UN TEOREMA DE MULTIRECURSION

José F. PRIDA*

ABSTRACT

A very general multi-recursion theorem is proved, particular cases of which are the Kleene's fixed point theorem and the Smullyan's double recursion theorem.

El siguiente resultado es una generalización del teorema de doble recursión de Smullyan:

Para toda secuencia de funciones recursivas $f_1, f_2, ..., f_m : \omega^{n+m} \to$ (n = 0, 1, ...) existen funciones recursivas $r_1, r_2, ..., r_m : \omega^n \to \omega$ tales que para todo χ ($\chi = x_1, x_2, ..., x_n$) se verifica:

$$\phi r_1 (\chi) = \phi f_1 (\chi, r_1 (\chi), ..., r_m (\chi))$$

$$\phi r_2 (\chi) = \phi f_2 (\chi, r_1 (\chi), ..., r_m (\chi))$$

. . . .

$$\phi r_m (\chi) = \phi f_m (\chi, r_1 (\chi), ..., r_m (\chi)) \cdot$$

Demostración:

m = 1: teorema de recursión.

m + 1: por la hipótesis de inducción existen funciones recursivas $p_2, p_3, ..., p_{m+1}$ tales que

$$\phi p_2 (\chi, x) = \phi f_2 (\chi, x, p_2 (\chi, x), ..., p_{m+1} (\chi, x))$$

. . . .

$$\phi p_{m+1} (\chi, x) = \phi f_{m+1} (\chi, x, p_2 (\chi, x), ..., p_{m+1} (\chi, x)) \cdot$$

Sean p1, r1, r2, ..., r_m funciones recursivas tales que

$$\phi p_1 (\chi, x) = \phi f_1 (\chi, x, p_2 (\chi, x), ..., p_{m+1} (\chi, x))$$

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, Nº 16-17-18, tomo A, 87-90

....

$$r_j(\chi) = p_j(\chi, r_1(\chi)) \qquad (j = 2, 3, ..., m+1)$$

De las igualdades anteriores se sigue el teorema, ya que

$$\phi r_1(\chi) = \phi p_1(\chi, r_1(\chi)) = \phi f_1(\chi, r_1(\chi), ..., r_{m+1}(\chi))$$

$$\phi r_2(\chi) = \phi p_2(\chi, r_1(\chi)) = \phi f_2(\chi, r_1(\chi), ..., r_{m+1}(\chi))$$

....

$$\phi r_{m+1}(\chi) = \phi p_{m+1}(\chi, r_1(\chi)) = \phi f_{m+1}(\chi, r_1(\chi), ..., r_{m+1}(\chi))$$

A continuación damos una aplicación del teorema para el caso en que $n = 2$, probando la equivalencia de dos definiciones de inseparabilidad:

Sean A, B dos subconjuntos de ω recursivamente enumerables.

df. 1: A y B son efectivamente inseparables si existe una función recursiva f tal que

$$\forall x \forall y\, ((A \subset W_x \;\&\; B \subset W_y \;\&\; W_x \cap W_y = \emptyset) \to f(x,y) \in W_x \cap W_y).$$

df. 2: A y B son efectivamente inseparables si existe una función recursiva parcial ψ tal que

$$\forall x \forall y\, ((A \subset W_x \;\&\; B \subset W_y \;\&\; W_x \cap W_y = \emptyset) \to (\psi(x, y)\downarrow \;\&\; \psi(x, y) \in W_x \cap W_y)).$$

Obviamente si A y B verifican df 1 también verfican df 2.

Recíprocamente, si A y B verifican df 2, sean g y h funciones recursivas tales que

$$W_{g(x,y,u,v)} = \{z: z \in A \;\; ; \;\; (z \in W_x \;\&\; \psi(x, y)\downarrow)\}$$

$$W_{h(x,y,u,v)} = \{z: z \in B \;\; ; \;\; (z \in W_y \;\&\; \psi(x, y)\downarrow)\}.$$

Por el teorema de multirecursión, existirán funciones recursivas $r, s : w^2 \to w$ verificando:

$$W_{r(x,y)} = W_{g(x,y,r(x,y),s(x,y))}$$

$$= \{z : z \varepsilon A \ ; \ (z \varepsilon W_x \ \& \ \psi (r(x, y), s(x, y)) \downarrow\};$$

$$W_{s(x,y)} = W_{h(x,y,r(x,y),s(x,y))}$$

$$= \{z : z \varepsilon B \ ; \ (z \varepsilon W_y \ \& \ \psi (r(x, y), s(x, y)) \downarrow\}.$$

Sea f la función definida mediante la igualdad

$$f(x, y) = \psi (r(x, y), s(x, y)).$$

La función f es total y, por tanto, recursiva, ya que

$$f (x, y) \uparrow \rightarrow (W_{r(x,y)} = A \ \& \ W_{s(x,y)} = B)$$

$$\rightarrow \psi (r(x, y), s(x, y)) \downarrow$$

$$\rightarrow f (x, y) \downarrow.$$

En consecuencia se tiene que

$$W_{r(x,y)} = A \cup W_x$$

$$W_{s(x,y)} = B \cup W_y.$$

Y, por tanto, f verifica df 2, ya que si

$$A \subset W_x, B \subset W_y \ \text{ y } \ W_x \cap W_y = \emptyset,$$

entonces

$$W_{r(x,y)} = W_x$$

$$W_{s(x,y)} = W_y$$

$$W_{r(x,y)} \cap W_{s(x,y)} = \emptyset$$

con lo que

$$f(x, y) \ \varepsilon \ W_{r(x,y)} \cap W_{s(x,y)} = W_x \cap W_y.$$

*Dpto. de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad Complutense de Madrid.

BIBLIOGRAFIA

SMULLYAN, R.M. "Theory of Formal Systems", **Annals of Mathematics Studies**, Number 47, Princeton University Press, 1961, p. 75-77.

SOARE, R. **Recursively enumerable sets and degrees**, Sringer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1987, p. 39-40.