CONCEPTION "DYNAMIQUE" EN GÉOMÉTRIE, IDÉALISATION ET RÔLE DE L'INTUITION *

Luciano BOI **

Ein grosser Teil der Schrift dreht sich um die Behauptung gegen Kant, daß die Gewißheit der Geometrie sich nicht auf die Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das *Principium identitatis* und das *Principium contradictionis* gründe. Dass von diesen logischen Hilfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht läugnen wollen: aber dass dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüthen treiben wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes selbst überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist.

(C. F. Gauss, *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 63. Stück, den 20. April 1816)

Il y a *des sciences pures de l'essence*, telles que la logique pure, la mathématique pure, la théorie pure du temps, de l'espace, du mouvement, etc. Dans aucune de leurs démarches elles ne posent des faits, ou, ce qui revient au même, *aucune expérience en tant qu'expérience* -si l'on entend par là une conscience qui saisit ou pose une réalité, une existence- *n'y joue le rôle de fondement*. Quand l'expérience y intervient, ce n'est pas *en tant* qu'expérience. Le *géomètre*, lorsqu'il trace au tableau ses figures, forme des traits qui existent en fait sur le tableau qui lui-même existe en fait. Mais, pas plus que le geste physique de dessiner, l'expérience de la figure dessinée, en tant qu'expérience, ne *fonde* aucunement l'intuition et la pensée qui portent sur l'essence géométrique. (...) Mais pour la géométrie qui explore non des réalités mais des "possibilités idéales", non des états des choses propres à la réalité mais des états des choses propres aux essences, *l'intuition* des essences est, à la place de l'expérience, *l'acte qui fournit les ultimes fondements*.

(E. Husserl, *Idées directrices pour une phénoménologie*, 1913)

1. Critique du formalisme

Il a été dit à maintes réprises[1] que le but poursuivi par Hilbert, notamment dans ses travaux sur les fondements de la géométrie[2], aurait été celui de trouver les hypothèses fondamentales permettant d'édifier la science de l'espace sur des bases axiomatiques solides, selon le modèle de l'arithmétique, et selon un idéal "finitiste" de la méthode utilisée.

Mais il suffit de jeter un œil sur les développements de la géométrie au XIX^e siècle, en particulier sur certains travaux tels que ceux de Riemann[3], Clifford[4], Poincaré[5] et Lie[6], pour s'apercevoir que bien que ces mathématiciens aient poursuivi le même but, ils le faisaient cependant dans le cadre d'une conception de

THEORIA - Segunda Época - Vol. X
1995, Nº 22, 145-161

la géométrie profondément différente, et dont le point de départ était (explicitement ou implicitement) la critique des points de vues "nominaliste" et "logiciste".

Afin d'éclaircir ce point, donnons une première définition générale de géométrie qui servira de point de départ de notre raisonnement: *la géométrie est un ensemble d'objets mathématiques, définis suivant leur appartenance à une structure formelle et possédant certaines propriétés énoncées par des propositions qui demandent à être démontrées.* D'un point de vue logique, une telle définition caractérise complètement la géométrie. Mais si l'on fait suivre à cela une deuxième définition: *la géométrie n'est pas un système clos dont les définitions et les théorèmes seraient établis une fois pour toutes*, et le corollaire: *il existe ce qu'on pourrait appeler l'"intuition géométrique", qui est capable de créer une géométrie spécifique et peut-être nouvelle pour chaque domaine scientifique* (on dit bien scientifique et non pas logique!), alors la géométrie est beaucoup plus qu'un système logique ou une théorie purement formelle...

On remarquera que les expressions "structure" et "intuition géométrique", revêtent une signification tout à fait fondamentale, puisqu'elles permettent d'analyser les contenus des mathématiques autrement que la conception formaliste, d'après laquelle elles reviennent à être, du moins idéalement, une logique parfaite.

Il n'est pas possible de discuter ici des conséquences et limites d'une telle vision; on verra plus loin en quoi consiste cette conception dans le cadre plus spécifique de son application à la géométrie.

A l'instar de cette conception, on dira que toute théorie mathématique s'érige sur des concepts, lesquels, d'une part, en assurent sa générativité formelle, et d'autre part, en permettent une fécondité au point de vue ontologique. Par concept mathématique on entend ici le résultat d'un processus d'idéalisation[7]. A ce propos, un exemple très clair est celui du concept de *groupe de transformations*, pour lequel le processus d'idéalisation consiste, à un premier niveau, en le passage de la notion intuitive de *déplacement*[8] à celle géométrique, infiniment plus abstraite, *d'automorphisme*[9].

2. L'idéalisation géométrique appliquée au concept de groupe

Comme on le sait, la géométrie euclidienne repose sur l'existence des corps rigides; ce sont les seuls corps qui demeurent inaltérés suite à n'importe quel mouvement dans l'espace. Les parties de l'espace occupées ainsi par le même corps solide dans deux de ses positions différentes, sont appellées *congruentes.* Cela permet de choisir la notion de corps rigide comme modèle pour réaliser toutes les mesures des corps spatiaux, de sorte qu'on pourra vérifier si, et jusqu'à quel point, un corps donné réalise l'idéal de rigidité.

Dès que les parties de l'espace peuvent être marquées par un corps rigide, leur congruence consiste à établir une application biunivoque entre deux volumes congruents, soit V et V'. Une première expérience de congruence est relative à un certain corps rigide p. Ensuite, son indépendance factuelle de p est un fait des plus fondamentaux. Supposons à ce propos que V et V' soient deux parties de l'espace occupées par p dans deux de ses positions différentes. Soit p^* un autre corps rigide qui occupe d'abord V, et, dans une deuxième position, V'. Puisqu'on peut répéter, du moins idéalement, cette simple opération jusqu'à ce qu'un corps rigide occupe chaque point de l'espace, l'application $V \rightarrow V'$ peut être étendue à l'espace tout entier. On a alors des applications congruentes de l'espace formant un groupe Δ^+ de transformations, appelé le groupe des mouvements euclidiens. Chaque fois que ce groupe est connu, des volumes congruents peuvent être définis comme des parties de l'espace qui se laissent transporter dans toute autre par une transformation S de Δ^+. Ce fait suggère l'interprétation suivante, à savoir que le groupe Δ^+ des applications congruentes *exprime une structure intrinsèque de l'espace lui-même, une structure imprimée par l'espace sur tous les objets spatiaux.* La prochaine étape consiste à montrer que les relations fondamentales d'une géométrie sont fixées en même temps que le groupe Ψ d'automorphismes. Voici comment on arrive à cette notion importante. Supposons donné un automorphisme Y; aussi bien Y que Y^{-1} doivent pouvoir transformer n'importe quelle paire de parties congruentes de l'espace v_1, v_2, grâce à la transformation Y. Considérons ensuite la paire v_1^*, v_2^*, qu'on obtient de v_1 et v_2, moyennant une transformation Y. En outre, soit S le mouvement qui fait passer v_1 dans v_2. Comme le diagramme le montre, v_1^* passe à son tour dans v_2^* grâce à l'application $Y^{-1}SY$:

$$\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[r, "(S)"] & v_2 \arrow[d, "(Y)"] \\
v_1^* \arrow[u, "(Y^{-1})"] \arrow[r] & v_2^*
\end{tikzcd}$$

En fait, les transformations $Y^{-1}SY$ et YSY^{-1} appartiennent à Δ^+ toutes les fois que S appartient à Δ^+. On dira qu'une transformation Y commute avec un groupe de transformations Δ donné si $Y^{-1}SY$ et YSY^{-1} sont contenus dans Δ à chaque fois que S en fait partie. Les transformations qui commutent avec Δ forment un groupe appelé *le normalisateur de* Δ. Ce groupe contient nécessairement Δ comme sous-groupe; on dira alors que Δ est identique à son normalisateur ou à une partie propre de celui-ci. D'où il est possible de conclure que *le groupe* Γ *des similitudes est le normalisateur du groupe* Δ^+ *des mouvements.*

Revenons brièvement au point déjà souligné, affirmant que le groupe des applications congruentes de l'espace exprime une structure intrinsèque de l'espace lui-même, une structure qui est donc en quelque sorte constitutive pour les objets spatiaux. Il s'agit d'un fait d'importance fondamentale car, d'après lui, la signification de l'espace ne saurait être réduite tout simplement à un ensemble de propriétés formelles, figées dans un modèle unique de géométrie, à l'intérieur duquel elles recevraient une définition exhaustive. Et cela, en premier lieu parce que d'un point de vue mathématique l'espace est inséparable d'une généalogie des formes spatiales[10], dont le contenu se trouve exprimé *in nuce* dans certaines intuitions fondamentales[11]; et en deuxième lieu, parce que l'espace a un contenu ontologique, c'est-à-dire des propriétés physiques. L'idée essentielle est que l'espace serait régi par une sorte de principe de fusionnement (*Verschmelzung*) entre matière et forme[12]. Ce principe apparaît clairement, par exemple, dans le rapport de la courbure de l'espace (forme), avec la gravitation (matière), qui a été thématisé, à la suite des intuitions de Riemann, dans le cadre des développements modernes de la géométrie différentielle et de la théorie de la relativité générale[13].

3. Deux conceptions sur la nature de la géométrie

Concernant la question fondamentale de savoir si la géométrie est une science de nature axiomatique et formelle, ou bien, physique, on peut distinguer schématiquement au moins deux conceptions. Une première, pouvant être appelée "physicaliste", et qui remonte à Helmholtz, considère qu'elle peut être fondée sur un simple fait physique, à savoir l'existence de corps rigides dans l'espace, par suite, sur une relation de congruence entre ces mêmes corps, donc, sur la possibilité d'effectuer des mesures des relations spatiales et grandeurs physiques caractérisant ces corps rigides. A ce propos, il écrit:

> Mon point de départ a consisté à ramener toutes les mesures primitives de l'espace à une observation de congruence. (...) On ne peut cependant parler de congruence que dans le cas où l'on suppose l'existence de corps rigides qui peuvent se mouvoir, et que lorsque la congruence de deux grandeurs spatiales n'est pas admise indépendamment de tout mouvement. J'ai donc supposé dès le départ la possibilité de mesurer l'espace au moyen d'une constatation de congruence, et j'ai tâché de trouver la forme analytique la plus générale d'une multiplicité étendue (ausgedehnte Mannigfaltigkeit), dans laquelle fût possible le mouvement susdit.[14]

Il n'y a aucun doute sur la fait que la position d'Helmholtz ait eu une influence remarquable sur l'élaboration successive que cette conception a connue avec le néo-positivisme autour des années trente et quarante de ce siècle, surtout grâce à Carnap et Reichenbach[15]. Rappelons de façon très succinte l'idée qui la caractérise. D'après ces derniers, une séparation nette serait à faire entre la géométrie théorique (mathématique) d'une part, qui se laisserait toujours réduire à un système axiomatique -autrement dit, il y aurait une sorte d'assimilation de la géométrie à la logique-, et la géométrie expérimentale (physique) d'autre part, qui consisterait en un ensemble de propositions et d'opérations de nature proprement physique, ces dernières servant à vérifier si les propositions abstraites ont un contenu réel ou pas[16]. Une telle manière de raisonner montre, à notre avis, des limites et une certaine inconsistence, du fait qu'elle semble ignorer non seulement la profondeur et l'articulation conceptuelle propre à la pensée géométrique, mais aussi, la question de la signification ontologique véritable des concepts géométriques, ainsi que la connaissance de leurs interactions mutuelles, c'est-à-dire le rapport entre les concepts géométriques formels et l'objectivité physique[17]. Si l'on devait s'en tenir à ce point de vue, on serait forcément obligés d'accepter le mystère qu'elle laisse planer sur la genèse et la formation -au sens étymologique de prendre forme- des concepts géométriques, et la constitution des "objets" de la physique, alors qu'il s'agit justement d'expliquer comment les concepts abstraits (idéaux) s'investissent dans la genèse du concret.

Contrairement à la conception *physicaliste* et néo-positiviste, tous ces problèmes que nous venons brièvement d'évoquer, se trouvent au cœur d'une autre conception de la géométrie, qu'on appelera *dynamique*. On peut reconnaître son origine dans l'œuvre du philosophe allemand J. F. Herbart[18], bien que ce soit grâce aux travaux de Riemann[19] et Clifford[20], qu'elle a pu, après beaucoup de résistance, jouer un rôle au sein des mathématiques. En effet, il faudra attendre les travaux philosophiques d'Husserl, sans oublier ceux de Franz Brentano et de Stumpf, et ceux mathématiques d'Elie Cartan et surtout d'Hermann Weyl, pour que les idées d'Herbart et Husserl, Riemann et Clifford, acquièrent de nouveau une place importante dans la réflexion scientifique et épistémologique.

4. Quelques traits remarquables de la conception "dynamique"

On se bornera ici à présenter trois aspects qui, nous semble-t-il, caractérisent cette conception.

i) Tout d'abord, il y a la critique au "nominalisme géométrique". C'est le thème qui constitue le point d'attaque de Riemann dans son mémoire de 1854:

> On sait que la Géométrie admet comme données préalables non seulement le concept de l'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'esapce. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiomes. *Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être.*[21]

L'essence de la géométrie ne consisterait plus dès lors à trouver de simples définitions idéales pour ses notions, ou à attribuer des propriétés nominales à ses propres entités. La place est laissée à une recherche "généalogique" des concepts qui permettent la construction des structures de l'espace (des espaces); par ailleurs, cette recherche a comme fonction d'élucider la signification des rapports d'interdépendance entre ces mêmes concepts:

> La raison en est que le concept général des grandeurs de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues, n'a jamais été l'objet d'aucune étude. En conséquence, je me suis posé d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur, *le concept d'une grandeur de dimensions multiples*[22].

Inutile d'ajouter que la syntaxe logique ne prend du tout en compte ni l'explication de ce fait ni celle du possible contenu objectif de ces concepts. La critique du nominalisme et de sa forme plus raffinée qui est le logicisme, conduit à rejeter l'idée qui conçoit la géométrie comme une science purement déductive, dont les premiers axiomes seraient indiscutables, et contiendraient en eux-mêmes toutes les autres propositions portant sur l'espace. En revanche, un des traits qui caractérise la conception "dynamique" est de penser que les propriétés essentielles de l'espace demeurent encore et en partie inconnues[23], et qu'il faille passer par une *détermination mathématique* des concepts géométriques pour que ces mêmes propriétés nous soient accessibles dans leur contenu objectif, c'est-à-dire physique.

En considération de l'état actuel de la recherche dans certains domaines de la géométrie, le problème de la détermination mathématique de ses concepts peut etre posé dans les termes suivants. Il y a une pluralité d'espaces (donc de géométries) obéissant à une certaine classification et satisfaisant des structures formelles qui sont, pour ainsi dire, des "univers mathématiques" réalisant des modèles de "mondes possibles". La géométrie de ces espaces fournit les concepts pour l'élaboration de ces modèles. Prenons un exemple précis: l'image mathématique de l'espace-temps est une variété différentiable à *4* dimensions que l'on appelle aussi l'"Univers". Un point dans cet "Univers" est une idéalisation d'un très petit événement tel que, par exemple, un éclair, une radiation ou une absorption d'un photon par un atome. Il importe d'ajouter qu'un point dans cet "Univers" ne représente qu'un événement *potentiel*, c'est-à-dire qu'à un moment donné, un point pourrait représenter un événement, mais celui-là existe indépendamment de celui-ci. Il s'agit donc, d'abord et avant tout d'une existence mathématique. En outre, un événement concentré dans une "petite" région de l'espace et ayant une certaine durée dans le temps -une étoile, par exemple-, a une courbe comme modèle dans l'espace-temps qui est appelée la "ligne-Univers". Cette courbe permet de tracer en quelque sorte l'histoire de cet événement. Or, pour parler d'une façon quelque peu métaphorique, ce qui est fondamental de saisir est le devenir de cette image de l'Univers, qui équivaut à en comprendre l'histoire. Mais suivre le devenir ou l'histoire revient, au fond, à en comprendre la géométrie.

ii) Le deuxième trait tient dans la tentative commune aux philosophes et mathématiciens mentionnés plus haut, d'élaborer une *théorie géométrique des formes*. Le mot "forme" ne signifie pas ici purement "formelle", mais il a un sens mathématique beaucoup plus important qui renvoie à l'idée de construire une "image globale" d'un problème mathématique, permettant de suivre l'*évolution qualitative* de ce dernier. Dès lors, on s'intéresse davantage à connaître les propriétés, non plus locales et analytiques, mais globales et topologiques d'un "être" géométrique[24]. La "surface de Riemann" est un exemple d'"image globale" en mathématiques, et représente une forme géométrique au sens qui a été précédemment expliqué. Cette image repose sur l'intuition fondamentale qu'une surface, ainsi que ses transformations intrinsèques et topologiques, permettent d'étudier l'évolution d'une fonction d'une variable complexe[25]; en fait, ces deux objets, c'est-à-dire la surface et la fonction, au lieu d'être considérés comme distincts, deviennent un seul et même "objet" mathématique.

L'image de l'"espace courbe" de Clifford constitue aussi un exemple de forme géométrique, bien que d'une autre nature. D'après la vision que ce jeune mathématicien anglais, sous l'influence de Riemann et Maxwell, a pu développer, l'espace possédrait des propriétés géométriques de nature dynamique. Ainsi, la courbure, une propriété intrinsèque de l'espace, loin de simplement lui apparaître comme une abstraction mathématique, aurait été pour lui une possible propriété physique de déformation qui se transmettrait dans l'espace lui-même, de telle sorte que la variation de la courbure de l'espace serait à l'origine mouvement de la matière ("the motion of matter").

iii) D'après la conception "dynamique", la recherche de la signification des concepts géométriques renverrait à une sorte d'"altérité" de l'espace. On doit entendre par là qu'en plus de son identité mathématique amorphe[26], c'est-à-dire en plus de l'$\mathbf{R}^3$ euclidien, il doit exister d'autres principes constitutifs de l'objectivité spatiale. Autrement dit, si l'on part du fait que l'espace n'est pas simplement le cadre ou le receptacle vide où des phénomènes physiques prennent place, mais qu'il est lui-même "coextensif"[27] de la nature, c'es-à-dire qu'il y aurait un lien intime entre les propriétés géométriques de l'espace et les phénomènes physiques se déroulant en lui. On est forcé, par conséquent, de reconnaître l'importance d'un autre mode d'existence de l'espace, à savoir celui de sa genèse, que certains philosophes et mathématiciens allemands, notamment Husserl, Becker et Weyl, ont thématisé comme la problématique du "remplissement" (*Erfüllung*). Ce thème se trouve déjà au cœur des réflexions de Riemann:

> La question de la validité des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée avec *la question du principe intime des rapports métriques dans l'espace.* Dans cette dernière question, que l'on peut bien encore regarder comme appartenant à la théorie de l'espace, on trouve l'application de la remarque précédente, que, dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété, tandis que, dans une variété continue, ce principe doit venir d'ailleurs. Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, *ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui*[28].

On peut brièvement mentionner deux exemples qui relèvent de cette problématique. Le premier se réfère à la conception dynamique de la métrique que l'on doit à Hermann Weyl[29]. D'après ce dernier, l'espace n'est pas autre chose qu'une variété tridimensionnelle amorphe, et c'est son contenu matériel qui lui donne sa forme et détermine ses rapports de mesure. Il s'agit alors de trouver les lois selon lesquelles cette détermination se fait, et la réponse a été que la forme métrique fondamentale de la variété espace-temps changera au cours du temps, tout comme la matière change dans l'Univers. Le deuxième exemple, qui a été analysé par Oskar Becker[30], concerne le rapport entre *Raumform* (forme spatiale) et *Raumfülle* (contenu spatial). En tant que forme, l'espace n'est qu'un *principium individuationis*, ayant comme fonction d'assurer une sorte de légalité constitutive des phénomènes du monde extérieur[31]. Ainsi conçu, l'espace serait le moment abstrait de la nature saisi par un acte purement intellectuel, construit dans la pure conscience. En tant que contenu, en revanche, l'espace est inséparable des phénomènes naturels, ou, pour utiliser l'expression d'Husserl, des *essences éidétiques matérielles*.

Pour conclure sur ce point, on peut dire que, tandis que dans le premier cas l'espace est essentiellement un concept "idéal", dans le deuxième, il est un concept à la fois "idéal" et "réel".

5. Le rôle de l'intuition en géométrie

En ce qui concerne la question des rapports entre idéalité et objectivité de l'espace, qui a été thématisée au point de vue philosophique, et ce de façon systématique, par Kant le premier, un point important est celui du rôle et du statut de l'intuition. Nous ne prétendons pas ici de procéder à l'approfondissement d'un tel sujet, mais on se contentera de faire quelques remarques générales.

On peut schématiquement mettre en relief trois conceptions de la nature de l'intuition. Une première, que l'on appelera *extérnaliste*, et qui est souvant liée à une certaine théorie de la perception, considère l'intuition comme la faculté de se représenter des concepts par une capacité de "figuration"; en d'autres termes, l'intuition serait l'acte d'exhiber moyennant un "objet extérieur" (qui n'est pas forcément de nature matérielle) – par exemple, une figure idéale – le contenu abstrait d'un concept. La signification de l'intuition résiderait ainsi dans cette possibilité d'extériorisation. C'est sur cette idée que s'appuie implicitement Helmholtz lorsqu'il écrit:

> Lorsqu'on s'apprête à discuter la question, à savoir, si les relations spatiales admettent une représentation intuitive dans l'espace métamathématique, nous devons en premier lieu établir d'après quel critère nous serions en mesure d'apprécier le caractère intuitif d'un objet, dont nous n'avons jamais eu d'intuition. J'ai établie en fait une définition de ce que nous devons reconnaître comme pouvant être représenté dans l'intuition: se représenter un objet qui nous est inconnu consiste à imaginer la série des sensations qui, conformément aux lois (physiologiques) acceptées, pourraient réellement se présenter à quelqu'un qui chercherait à connaître, selon diverses perspectives et à l'aide de tous ses sens, un tel objet et ses changements successifs. Ces sensations doivent aussi être de nature telle qu'on puisse les interpréter d'une manière univoque. Si cette série d'impressions pouvait être donnée complètement et univoquement, alors l'objet serait à considérer comme susceptible d'une représentation intuitive[32].

On peut se demander si Kant ne s'était pas déjà inspiré d'une pareille conception lorsqu'il écrivait dans la *Critique de la raison pure* (*Analytique transcendentale*; *I Axiomes de l'intuition*):

> Je ne puis pas me représenter une ligne, si petite soit-elle, sans (*la tirer par la pensée*), c'est-à-dire sans en produire successivement toutes les parties, à partir d'un point, (*et tracer d'abord cette intuition*). (...) Tous les phénomènes sont donc intuitionnés déjà comme des agrégats (ensembles de parties antérieurement données), ce qui n'est pas le cas pour toute espèce de grandeurs, mais pour celles que nous représentons et appréhendons de façon *extensive*.C'est sur cette synthèse successive de l'imagination productive, dans la production des figures, que se fonde la mathématique de l'étendue (géométrie) (...)[33].

Quant à la deuxième conception, que l'on appellera "constructiviste", l'accent est mis sur la nature purement intellectuelle de l'intuition, qui ne serait au fond qu'une pure faculté de l'esprit, et ferait preuve d'une capacité infinie de création.

Une intuition conçue de la sorte serait, par exemple, à l'origine de la notion du continu. C'est l'idée affirmée clairement par Poincaré:

> Je conclurai que nous avons tous en nous l'intuition d'un nombre quelconque de dimensions, parce que nous avons la faculté de construire un continu physique et mathématique; que *cette faculté préexiste en nous à toute expérience* parce que sans elle, l'expérience proprement dite serait impossible et se réduirait à des sensations brutes, impropres à toute organisation, que cette intuition n'est que la conscience que nous avons de cette faculté[34].

Dans un autre texte, toujours de Poincaré, on peut lire à ce propos un autre passage intéressant:

> Nous avons en nous, en puissance, un certain nombre de modèles de groupe et l'expérience nous aide seulement à découvrir lequel s'écarte le moins de la réalité. (...) Ce que nous appelons la géométrie n'est pas autre chose que l'étude des propriétés formelles d'un certain groupe continu; si bien que nous pouvons dire que l'espace est un groupe. *La notion de ce groupe continu existe dans notre esprit antérieurement à toute expérience*; mais il en est de même pour la notion de beaucoup d'autres groupes continus; par exemple celui qui correspond à la géométrie de Lobatchewsky[35].

Suivant Poincaré, l'intuition du continu préexisterait à toute tentative de conceptualisation et, à plus forte raison, de formalisation du continu lui-même[36]. En d'autres termes, on peut dire que la signification propre à l'intuition du continu, ainsi qu'à certains autres concepts fondamentaux tels que, par exemple, celui de groupe de transformations, qui sont *constitutifs* pour l'univers mathématique et notamment pour celui géométrique, serait de présenter, pour ainsi dire, une sorte *d'antériorité idéale*, ce qui les distinguerait de concepts proprement dits, qui sont de nature plutôt *constructive*[37].

La version la plus élaborée de cette conception de l'intuition est celle qui est connue sous le nom d'"intuitionnisme", dont la formulation la plus cohérente est due au mathématicien L.E.J. Brouwer[38]. Selon lui, l'existence des "objets" mathématiques est définie par la possibilité de "construction" de ces mêmes objets; les seuls objets qui "existent" sont donc ceux que l'on peut "construire"[39]. D'après Brouwer, le sens des mathématiques repose à la fois sur la donnée d'une intuition originaire, qui serait de l'ordre de l'intellect pur et alangagier, et sur le fait qu'on peut appliquer à cette intuition de façon réitérée un ensemble d'opérations (d'actes mentaux) de nature "constructive". Ce serait donc le fait qu'il soit possible cette réitération qui caractériserait au fond le raisonnement mathématique. Ainsi, l'idée du continu linéaire (à savoir, le modèle de la droite réelle **R**) obéirait au type de procédé mental qu'on vient d'évoquer. Brouwer écrit:

> Ce néo-intuitionnisme considère la désagrégation des moments de la vie en parties qualitativement différentes, devant être réunis alors qu'ils sont temporellement séparés, comme étant le phénomène fondamental de l'intellect humain, qui par abstraction s'éleve de son état émotionnel au phénomène essentiel du raisonnement mathématique, à savoir, l'intuition du simple bi-unité. Une telle intuition, qui *constitue le fondement des mathématiques*, crée non seulement les nombres 1 et 2, mais aussi tous les nombres ordinaux finis; vu qu'un des éléments du bi-unité peut être pensé comme faisant partie d'un nouveau bi-unité, *ce processus peut être répété indéfiniment*; et cela donne lieu encore davantage au plus petit nombre

> ordinal infini π. Enfin, cette intuition fondamentale des mathématiques, dans laquelle le connexe et le séparé, le continu et le discret sont unis, est la source immédiate de l'intuition du continu linéaire, c'est-à-dire, de l'"entre", *qui n'est pas exhaustive parce qu'on interpose de nouvelles unités, et par conséquent, elle ne peut jamais être pensée comme étant une simple collection d'unités*[40].

Considérons, enfin, une troisième conception du rôle et de la nature de l'intuition en géométrie. D'abord, disons qu'elle semble être à bien d'égards la plus profonde et intéressante, celle qui caractérise le mieux l'essentiel de la recherche en géométrie, surtout celle qui se fait actuellement. Au point de vue philosophique, une telle théorie de l'intuition a été développée par Husserl dans ses recherches phénoménologiques, bien qu'elle ait déjà nourri le travail créateur des mathématiciens qui ont contribué de façon décisive aux développements de la science de l'espace au XIXe siècle. En effet, à la source de toute découverte importante dans ce domaine, on peut reconnaître le déploiement d'une intuition fondamentale au sens qui sera expliqué dans ce qui suit. Pour essayer de la caractériser, on dira qu'elle consiste dans une possibilité *d'intelligibilité* nouvelle et inattendue d'un problème (d'une aporie) qui se présente à un moment donné dans l'univers mathématique, suivie d'une interprétation inédite du cadre conceptuel (théorique) au sein duquel le problème est surgi, et d'une anticipation des solutions cherchées.

L'intuition dont il est question en géométrie, s'attache à fournir une réponse à la question de qu'est-ce que l'espace?, à donner une explication qualitative de sa structure mathématique, ainsi que de ses propriétés formelles et "réelles"[41].

Les exemples de concepts et d'"objets" mathématiques jusqu'ici mentionnés[42], nous semblent montrer clairement que ce qu'on a appelé l'intuition mathématique précède la construction syntaxique d'un "objet" appartenant à une théorie, et l'excède au point de vue sémantique, c'est-à-dire formelle. Certes, l'intuition n'est, ni une représentation intuitive d'un objet quelconque ni une sorte d'illumination subjective ni simplement un principe heuristique qui guiderait la recherche. Dans le cas de la géométrie, par exemple, elle consiste dans la possibilité de *saisir les modes d'existence virtuelle et réelle de l'espace* en vue de reconnaître ses structures formelles ainsi que de sanctionner l'émergence du continu physique-géométrique à un nombre quelconque de dimensions. L'intuition de l'espace est inséparable de la recherche des principes capables d'en expliquer sa genèse et dynamique intrinsèques.

** *Séminaire d'Epistémologie des Mathématiques*
EHESS, Paris
Institut für Philosophie, Wissenschaftstheorie,
Wissenschafts- und Technikgeschichte
Technische Universität Berlin

Notes

* Ceci est une version remaniée du texte de la communication présentée lors du Colloque *Rationalisme scientifique et philosophique*, organisé par Messieurs M. A. Sinaceur et J. Petitot, et qui s'était tenu à l'*Unesco*, Paris, 30 novembre au 1 décembre 1989.

1 Voir, par exemple, la contribution de H. Sinaceur dans *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis (Eds.), Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 1992, 167-174.

2 Cf. *Grundlagen der Geometrie* (1re éd., 1899), Leipzig, B. G. Teubner.

3 "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Habilitationsschrift, 1854), *Abh. Königl. Gesell. Wiss. Gött.*, Bd. XIII, 1867.

4 "The Postulates of the Science of Space" (Conférence présentée à la *Royal Institution* en 1873), publiée dans *Lectures and Essays*, Vol. I, Londres 1879, 295-323.

5 "Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie", *Bull. Soc. Math. Fr.*, tome 15, pp. 203-216.

6 "Über die Grundlagen der Geometrie", *Ber. Abh. Königl. Säch. Gesell. Wiss.*, Math.-Phys. Cl., Leipzig, Bd. 42, 284-321; 355-418.

7 F. Gonseth a élaboré sa propre philosophie des sciences à partir d'une notion analogue, celle de *schématisation* (cf. *Les mathématiques et la réalité*, Paris, A. Blanchard, 1974; en particulier les chapitres III-IV). "L'idée du géométrique -écrit Gonseth- a sa source dans l'intuitif. Mais sa sphère d'existence spécifique est comprise entre la première axiomatisation qui lui donnait un visage abstrait face au côté 'purement' logique. En deçà, et au delà, elle n'existe pas encore ou n'existe plus. C'est dans ce double rôle que s'épuise l'existence géométrique, dans ce double visage que se révèle son vrai caractère" (p. 86).

8 Cf. H. Poincaré: 1921, *Des fondements de la géométrie*, Paris, Chiron (paru en anglais dans la revue *The Monist*, en 1898).

9 Cf. H. Weyl: 1949, *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences* (édition anglaise révisée et augmentée), Princeton, University Press, en particulier les pp. 78-84.

10 A ce sujet, j'aimerais mentionner les réflexions très intéressantes de Monsieur Sinaceur, dans la conférence introductive du Colloque, durant laquelle il soulignait en particulier l'importance de la *voie* d'Herbart et Riemann qui se situe entre l'empirisme et le formalisme, et qui s'intéresse à une sorte de *généalogie de la pensée*. Sinaceur rappelait également que le thème de la forme n'est pas le même que le discours formaliste, mais qu'il renverrait à une *théorie géométrique des formes*, et il a notamment insisté sur l'exigence d'un approfondissement d'une "théorie de la conceptualisation".

11 L'intuition du continu en est une, ainsi que celle de groupe et de variété. Dans le même ordre d'idées, Albert Lautman a beaucoup insisté sur le fait que le mouvement qui préside au développement des mathématiques, est guidé par des idées abstraites, qu'il a qualifiées de "dialectiques"; Cf. *Essai sur l'unité des mathématiques*, Union Générale d'Editions, Paris, 1977, pp. 28-29.

12 Cf. l'exposé de Monsieur Robinet sur les rapports entre forme et substance chez Leibniz, dans ce même colloque.

13 On doit surtout à Hermann Weyl d'avoir donné une explication profonde de ce rapport: il affirme que la structure métrique d'un espace, conçu désormais comme une variété riemannienne à *4* dimensions, est déterminée par la distribution de la matière.

14 "Mein Ausgangspunkt war, daß alle unsprüngliche Raummessungen auf Beobachtung der Congruenz beruht. (...) Von Congruenz kann man aber überhaupt nicht reden, wenn nicht feste Körper bewegt werden können, und wenn Congruenz zweier Raumgrössen nicht ein unabhänging von allen Bewegungen bestehendes Factum ist. Die Möglichkeit der Raummessungen durch Constatierung von Congruenz habe ich also von Anfang an vorausgesetzt und mir die Aufgabe gestellt, die allgemeinste analytische Form einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu suchen, in der die dabei verlangte Art der

Bewegungen möglich ist."; "Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen", *Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Gött.*, Bd. IX, p. 621; ou *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. 2, Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1883 (pp. 618-639). Voir aussi "Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze, Antwort gegen Herrn Professor Land", *Mind*, No. X, 1878, pp. 212-224; ou *Wiss. Abh., op. cit.*, pp. 640-660.

15 Cf. R. Carnap: 1956, *Philosophical Foundations of Physics*, Basic Books, New York; en part. la 3me partie.

16 Les néo-positivistes incluaient ainsi les concepts géométriques dans le cadre de leur "théorie de la vérification".

17 Pour une discussion approfondie de cette question, cf. J. Petitot: "Refaire le 'Timée. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. XL, n° 1, pp. 79-115; "Mathématiques et ontologie", in *La Scienza tra Filosofia e Storia in Italia nel Novecento*, Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri, Rome, 1987 (pp. 191-211).

18 Cf. *J. F. Herbart's Sämtliche Werke*, Bd. VIII: "Allgemeine Metaphysik, nebst den Anfaengen der Philosophischen Naturlehre" (Originalausgabe: Königsberg, 1829), H. Beyer und Söhne, Langensalza, 1893.

19 La référence principale est le mémoire de 1854 déjà cité. Parmi les autres travaux de Riemann qui s'inscrivent dans ce même ordre d'idées, on peut citer: "Ein Beitrag zur Electrodynamik", *Pogg. Ann. Phy. Che.*, Bd. CXXXI, 1867, pp. 237-243; *Fragmente philosophischen Inhalts*, publiés en annexe dans la première édition complète de ses Œuvres mathématiques, en 1876.

20 De W. K. Clifford voir: "On the Space-Theory of Matter", *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, Vol. II, 1870, pp. 157-158; "On the Theories of Physical Forces" (conférence donnée à la Royal Institution en 1870 et publiée dans *Lectures and Essays*, Vol. I, MacMillan & Co., London, 1879, pp. 109-123); *The Common Sense of the Exact Science* (1885), Dover Publication, New York, 1955, en particulier le chapitre II: "Space".

21 "Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. *Das Verhältniß dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob möglich ist*"; "Ueber die Hypothesen...", *op. cit.*, p. 254 (souligné par nous).

22 "Es hatte dies seinen Grund wohl darin, daß der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, *den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren*"; B. Riemann 1854, *ibid.* (souligné par nous).

23 Cf. W. K. Clifford, "The postulate of the Science of Space", *Lectures and Essays, op. cit.*, pp. 299-300. Voir également l'introduction d'H.J.S. Smith aux *Mathematical Papers* de Clifford (1re éd., 1882), où il souligne le rôle important que ce dernier accordait à la géométrie: "Enough has been said to show that Clifford's prediction for geometry lay deep. But to this his favorite science he attributed the widest scope, and at same times regarded it as co-extensive with the whole domain of nature. (...) Geometry was to him an important factor in the problem of "solving the universe"; p. XXXIX.

24 On utilise ici, bien entendu, l'expresion "topologique" au sens originaire d'*Analysis situs*, à laquelle ont fait déjà référence, entre autres, Leibniz, Gauss, Listing et Riemann.

25 Cf. B. Riemann, "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" (*Inauguraldissertation*, Göttingen, 1851), *Math. Werke*, *op. cit.*, pp. 3-47.

26 Ce type d'identité n'est pas évidemment à négliger, puisque c'est le niveau par lequel nous pouvons interpréter le monde extérieur. Par ailleurs, du point de vue mathématique elle constitue l'opération préalable à toute conceptualisation géométrique véritable.

27 Chez Leibniz on trouve déjà une définition qui, bien qu'elle ait un caractère idéal, est intéressant de citer dans ce contexte: "Der Raum ist die Ordnung des Koexistierenden, oder die Ordnung der Existenz für alles, was zugleich ist." ("**Spatium** est *ordo coexistendi* seu ordo existendi inter eaquae sunt simul."); (*Metaphysischen Anfangsgründen der Mathematik =Initia rerum mathematicarum metaphysica*, 1687), *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, Felix Meiner, Hamburg, 1966, p. 54.

28 "Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie in Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage *nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes*. Bei dieser Frage (...), kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder dass dem Raum zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, *oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.*"; B. Riemann 1854, *cit.*, pp. 267-268; souligné par nous.

29 Cf. *Raum-Zeit-Materie*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1988 (1re éd. 1918), en particulier pp. 98-104.

30 Cf. *Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihre physikalischen Anwendung*, Max Niemeyer Verlag, Tübingen (parû dans *Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung* de Husserl, Bd. VI, 1923, pp. 382-560).

31 Déjà Riemann voiait l'espace abstrait (variété) comme un "moment" essentiel de legalité constitutive des phénomènes: "Que l'espace soit une variété illimitée à trois dimensions, c'est là une hypothèse *qui s'applique dans toutes nos conceptions du monde extérieur*, qui nous sert à compléter à chaque instant *le domaine de nos perceptions effectives et à construire les lieux possibles d'un objet cherché*, et qui se trouve constamment vérifiée dans toutes ces applications" ("Dass der Raum eine umbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, *welche bei jeder Aufassung der Aussenwelt angewandt wird*, nach welcher in jedem Augenblick *das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes construirt werden* und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt."), (1854), *op. cit.*, p. 266; souligné par nous. De façon plus générale, on trouve chez le mathématicien allemand l'idée épistémologique que toute science de la nature consiste à expliquer les phénomènes naturels par des concepts exacts. Il n'y a aucun doute, que l'espace constitue pour Riemann le concept fondamental qui permet une telle explication, encore qu'il ne soit pas qu'un concept. Les concepts au moyen desquels on essaye d'expliquer la nature, sont aptes non pas seulement à compléter nos perceptions, mais aussi, à déterminer leur degré de nécessité, ou, en tant que le système de concepts est lui-même incomplet, à en déterminer leur probabilité. Quoi qu'il en soit, la détermination conceptuelle est ce par quoi la connaissance de la réalité est possible, et elle précède toujours l'expérience. Comme Riemann ajoute: "(...) Le degré de possibilité ("probabilité") de chaque événement actuel ou virtuel, d'après ces concepts, pour qu'il soit suffisamment précis, peut être défini mathématiquement. Si le contenu de ce qui a été déterminé mathématiquement par les concepts se produit, alors on dira que ces derniers se trouvent confirmés, et c'est sur une telle confirmation par l'expérience que repose le crédit que nous leur accordons. Mais si, en revanche, ont lieu des faits inattendus, c'est-à-dire non prévus par le système des concepts -des faits qui d'après ces concepts, étaient considérés comme impossibles ou improbables-, alors il faudra compléter ce système, ou, si nécessaire, le réviser"; *Fragmente philosophischen Inhalts*, II. *Erkenntnisstheoretisches* (notes manuscrites

non datées), publiées dans les *Anhang* aux *Gesammelte Mathematische Werke* de Riemannn (1re éd. de 1876), *op. cit.*, p. 507.

32 Cf. "Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze;...", *op. cit.*, p. 644.

33 *Œuvres philosophiques*, tome I, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1980, pp. 903-904 (les passages entre parenthèses sont soulignés par nous).

34 "Pourquoi l'espace a trois dimensions", in: *Dernières pensées*, Flammarion, Paris, 1933, p. 96 (1re éd. 1913); souligné par nous.

35 *Des fondements de la géométrie*, Chiron, Paris, 1912, pp. 62-63 (publié en anglais sous la forme d'article en 1898 dans la revue *The Monist*); souligne par nous.

36 Sur ce point, cf. la conférence de J. Petitot dans ce même colloque. On retiendra ici son affirmation que "le continu est irréductible à son axiomatisation...".

37 R. Thom a, en revanche, insisté à maintes reprises sur la nature ontologique du continu, et également sur son antériorité par rapport au nombre. "Nelle matematiche -écrit-il- la soluzione fantasmatica attualmente in vigore è quella che consiste nel generare il continuo a partire dal discreto. (...) Ma non bisogna nascondersi che se si abbandona l'aspetto strettamente tecnico della matematica per una considerazione più filosofica, inevitabilmente si viene a conferire al continuo per le sue capacità di immediata realizzazione intuitiva, un fondamento ontologico infinitamente più solido che le costruzioni iterative infinite della teoria degli insiemi e dell'algebra (...)"; in: "L'aporia fondatrice delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, Vol. XV, Einaudi, Torino, 1982, p. 1134.

38 Cf. "Intuitionism and formalism", *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 20, 1913, pp. 81-96; ou *Collected Works*, Vol. 1, Edited by A. Heyting, North-Holland, Amsterdam, 1975, pp. 123-138. On remarquera que la position de Poincaré fut très proche de celle de Brouwer, puisqu'il reconnaissait dans la divisibilité à l'infini la condition qui permet d'élaborer la notion du continu mathématique. Voir, par exemple, *Des fondements de la géométrie*, *op. cit.*, en particulier pp. 23-27.

39 Un point de vue analogue était partagé, à peu près à la même époque, par d'autres mathématiciens. Un exemple très significatif est celui du géomètre italien Giuseppe Veronese, qui défend une position "intuitionniste" dans le cadre d'une critique de la méthode analytique employée surtout pour élaborer la théorie des espaces à plusieurs dimensions. Dans son ouvrage fondamental, *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* (Padue, 1981), il affirme que l'exigence que doit satisfaire la méthode géométrique synthétique consiste à se référer à des entités qu'on peut construire. Dans ce cas uniquement, un résultat analytique aurait une véritable signification géométrique. Voici comment il résume sa pensée: "(...) pero, affinchè un risultato analitico abbia un effettivo significato geometrico bisogna che si riferisca ad un ente che si possa costruire, e in ogni caso la geometria non puo contentarsi di sapere ad esempio che esiste una data superficie, ma vuole conoscere *le leggi della costruzione* della superficie stessa"), in: *Préface*, pp. XXIII-XXIV (souligné par nous).

40 "This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively differents parts, to be reunited only while remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare two-oneness. This intuition of two-oneness, *the basal intuition of mathematics*, creates not only the numbers one and two, but also all finite ordinal numbers, inasmuch as one of the elements of the two-oneness may be thought of as a new two-oneness, *which process may be repeat indefinitely*; this give rise still further to the smallest infinite ordinal number π. Finally this basal intuition of mathematics, in which the connected and the separate, the continuous and the discrete are united, give rise immediately to the intuition of the linear continuum, i. e., of the "between", which is not exhaustible by the interposition of new units and which therefore can never be thought of as a mere collection of units"; in: "Intuitionism and formalism", *op. cit.*, pp. 85-86 (souligné par nous).

41 L'introduction du concept de variété *(Mannigfaltigkeit)* due à Riemann, représente, selon nous, un exemple effectif d'intuition mathématique, ou, si l'on préfère, un exemple d'application de l'imagination spéculative à des "objets" non seulement mathématiques, mais encore physiques et naturels. Rappelons que ce concept permet au mathématicien allemand, entre autres, de considérer l'espace, non plus comme le "lieu" qui rendrait possible la construction des figures, et moins encore, comme le cadre absolu des phénomènes physiques accessibles à notre expérience. En fait, l'espace devient, au point de vue mathématique un cas parmi d'autres de variétés tridimensionnelles, et, de plus, un concept pouvant avoir une "existence" physique dont les lois ne correspondent plus forcément à celles que la géométrie euclidienne a prétendues toujours décrire. L'image de l'espace courbe de Clifford, dont nous avons déjà parlé à propos de la conceeption *dynamique* en géométrie, peut être également considérée comme un acte de l'intuition mathématique. Elle aura été précisément une anticipation féconde quant à la connaissance des "essences" géométriques et physiques de l'espace, en ouvrant un horizon inconnu dans ce domaine de la science et de la théorie de la connaissance (cf. "On the Space-Theory of Matter", *op. cit.*, pp. 157-158, où Clifford esquisse cette image).

42 On se permet de renvoyer le lecteur à nos travaux cités dans la bibliographie pour une analyse approfondie.

BIBLIOGRAPHIE

Becker, O.: 1973, *Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihre physikalischen Anwendung*, Tübingen, Max Niemeyer Verlag (paru dans le *Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung*, d'Edmund Husserl, Bd. VI, 1923).

Boi, L.: 1989, 'Idéalisation et objectivation ou des rapports entre géométrie et physique', *Fundamenta Scientiae*, Vol. 10, No. 1, 85-114.

Boi, L.: 1992, 'L'espace: concept abstrait et/ou physique; la géométrie entre formalisation mathématique et étude de la nature', in L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis (Eds.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 65-90.

Brentano, F.: 1976, *Philosophische Untersuchungen zu Raum, Zeit und Kontinuum* (1906-1907), Hamburg, Felix Meiner.

Brouwer, J.E.L.: 1975, *Collected Works*, Vol. 1: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, Edited by A. Hayting, Amsterdam, North-Holland.

Carnap, R.: 1971, *I fondamenti filosofici della fisica*, trad. it. Il Saggiatore, Milan (1ère éd. angl., 1966).

Cassirer, E.: 1977, *Substance et fonction*, Paris, Les Editions de Minuit (1ère éd. all., Berlin 1910).

Chatelet, G.: 1985, 'Le retour de la Monade. Quelques réflexions sur le calcul différentiel et mécanique quantique', *Fundamenta Scientiae*, Vol. 6, No. 4, 327-345.

Clifford, W.K.: 1870, 'On the Space-Theory of Matter', *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, Vol. II, 157-158.

Clifford, W.K.: 1879, 'The Philosophy of Pure Science', in *Lectures and Essays*, Vol. I, London, MacMillan, 254-323.

Desanti, J.T.: 1968, *Les idéalités mathématiques*, Paris, Editions du Seuil.

Dewey, J.: 1887, 'Knowledge as idealisation', *Mind*, No. XLVII, 382-396.

Giorello, G.: 1982, 'Ipotesi, calcoli, conoscenza', in *Enciclopedia*, Vol. XV, Turin, Einaudi, 916-947.

Gonseth, F.: 1974, *Les Mathématiques et la Réalité* (1936), Paris, A. Blanchard.

Granger, G.G.: 1988, *Pour la connaissance philosophique*, Paris, Odile Jacob.

Helmholtz, H.: 1883, *Wissenschaftliche Abhandlung*, Bd. 2, Leipzig, Johann Ambrosius Barth.

Herbart, J.F.: 1893, *Sämtliche Werke*, Bd. VIII: *Allgemeine Metaphysik, nebst den Anfaengen der Philosophischen Naturlehre* (Originalausgabe, Königsberg 1829), Langensalza, H. Beyer & Söhne.

Hilbert, D.: 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, B.G. Teubner.

Husserl, E.: 1913, 'Ideen zu einer Phänomenologie und phaenomenologischen Philosophie', *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, Bd. I.

Kant, I.:1980, *Oeuvres philosophiques*, tome I, Paris, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard.

Kerszberg, P.: 1986, 'Sur la physique et la phénoménologie de Hermann Weyl', *Etudes Phénoménologiques*, Tome II, N° 3, 3-31.

Largeault, J.: 1990, *Préface* à R. Thom: *Apologie du logos*, Paris, Hachette, 9-29.

Lautman, A.: 1977, *Essai sur l'unité des mathématiques* (1937-1939), Paris, Union générale d'Editions.

Leibniz, G.W.: 1966, *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, Bd. I, Felix Meiner, Hamburg ('Metaphysischen Anfangsgründen der Mathematik', pp. 17-29).

Manin, Yu. I.: 1981, *Mathematics and Physics*, Boston, Birkhäuser.

Paty, M.: 1989, 'Interprétation et construction dans le rapport des mathématiques à la physique', *Fundamenta Scientiae*, Vol. 10, N° 1, 35-55.

Petitot, J.: 1987, 'Refaire le 'Timée'. Introduction à la philosophie mathématique d'A. Lautman', *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. XL, N° 1, 79-115.

Petitot, J.: 1988, 'Structuralisme et phénoménologie: la théorie des catastrophes et la part maudite de la raison', in J. Petitot (éd.), *Logos et Théorie des Catastrophes*, Colloque de Cerisy sur René Thom, Genève, Ed. Patino, 345-376.

Poincaré, H.: 1912, *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion.

Poincaré, H.: 1913, *Dernières Pensées*, Paris, Flammarion.

Poincaré, H.: 1921, *Des fondements de la géométrie*, Paris, Chiron (paru en anglais dans la revue *The Monist*, 1898).

Reichenbach, H.: 1977, *Filosofia dello spazio e del tempo*, trad. it. Feltrinelli, Milan (1re éd. all., Berlin 1928).

Riemann, B.: 1876, *Gesammelte mathematische Werke*, herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber, Leipzig, B.G. Teubner.

Salanskis, J.M.: 1990, *L'Herméneutique Formelle, L'Infini-Le Continu-L'Espace*, Paris, Ed. du CNRS.

Scholz, E.: 1980, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Basel, Birkhäuser.

Stumpf, C.: 1939, *Erkenntnislehre*, Bd. I, Leipzig, Johann Ambrosius Barth.

Thom, R.: 1982, 'L'aporia fondatrice delle matematiche', in *Enciclopedia*, Vol. XV, Turin, Einaudi, 1133-1146.

Thom, R.: 1990, *Apologie du logos*, Paris, Hachette.

Veronese, G.: 1891, *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*, Padue, Tipografia del Seminario.

Weyl, H.: 1988, *Raum-Zeit-Materie*, Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag (1ére éd., 1918).

Weyl, H.: 1949, *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*, Princeton, Princeton University Press.