COMPARACIONES DE APROXIMACION A LA VERDAD Y DE LEJANIA DE LA FALSEDAD†

(*Comparing statements by their closeness to the truth and their distance from the falsehood*)

Juan Carlos GARCIA-BERMEJO OCHOA*

Manuscrito recibido: 1995.7.19.
Versión final: 1996.1.22.

* Departamento de Teoría Económica, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid.

BIBLID [ISSN 0495-4548 (1996) Vol. 11: No 26; p. 45-83]

RESUMEN: En el artículo se caracteriza una clase de relaciones binarias para que éstas puedan representar las comparaciones de enunciados que un agente puede plantear y resolver de acuerdo con su mayor o menor grado de aproximación a la verdad. Con ello se espera poder analizar con mayor detalle el peso que puede terminar teniendo en su evaluación metodológica el grado de aproximación a la verdad de los modelos teórico-económicos. De todas formas, el propósito inmediato del artículo es el de ofrecer una propuesta más general y, sobre todo, mucho más sencilla que las presentadas en otros dos trabajos anteriores del autor. Por otra parte, el concepto de aproximación a la verdad que se maneja es diferente del vinculado con la noción poperiana de verosimilitud.

Descriptores: filosofía de la ciencia, metodología económica, aproximación a la verdad, verosimilitud, aplicación aproximada de las teorías, teorías aproximadas, modelos teóricos, modelos económicos, modelos aproximados, modelos simplificados, modelos ideales, simplificaciones teóricas, idealizaciones teóricas.

ABSTRACT: *In this paper, we characterize a class of binary relations to represent the comparisons which an agent can make between statements according to their degree of approximation to the truth. This class of relations, we hope, can help to analyse how much can weight the degree of approximation of economic theoretical models in their methodological assesment. In any case, the immediate purpose of the paper is to offer a proposal easier and more general than two other worked up earlier by the author. On the other hand, our concept of approximation to the truth differs from that linked with the popperian notion of verosimilitude.*

Keywords: *philosophy of science, economic methodology, approximation to the truth, truthlikeness, verosimilitude, approximate application of theories, approximate theories, theoretical models, economic models, approximate models, simplified models, ideal models, theoretical simplifications, theoretical idealizations.*

I. Introducción

En estas páginas se ofrece una propuesta para reconstruir las comparaciones que diferencian unos enunciados de otros por su mayor o menor grado de aproximación a la verdad. Y la razón para hacerlo es que dicha propuesta es más general y, sobre todo, mucho más sencilla que las presentadas en dos trabajos anteriores.[1]

Muchas entre esas comparaciones de aproximación a la verdad que se pretende reconstruir son comparaciones que nos sentimos plenamente autorizados a resolver sin más de una manera determinada. Por ejemplo, si a la pregunta de cuántos años han transcurrido desde el final de la segunda guerra mundial, un interlocutor respondiera que treintaicinco y otro que veintitrés, estaríamos de acuerdo en que, entre esas dos respuestas equivocadas, la primera estaría más cercana a la verdad. Análogamente, también estaríamos de acuerdo en que se aproximaría más a la verdad decir que el PIB español ascendió el año pasado a noventa billones de pesetas, que fijar esa cifra en cuatrocientos veinte billones. Y los ejemplos pueden multiplicarse con facilidad aunque prescindamos de aproximaciones numéricas. Así, normalmente consideraremos más adecuado pensar sobre cualquier amigo o amiga que toma sus decisiones de una manera motivada, que creer que lo hace siempre de una manera completamente aleatoria. La pantalla de mi ordenador no es completamente rectangular, pero decir que lo es se admitirá más fácilmente que atribuirle una forma triangular. Seguramente, en España durante este año el consumo agregado no se comporta exactamente como si fuera función de la renta disponible, pero esa hipótesis está más cerca de la realidad que suponer que dicho consumo depende de las fases lunares.

Quizá convenga aclarar desde ahora que, como estos ejemplos ponen de relieve, al decir de una proposición que se aproxima más a la verdad que otra en las comparaciones que nos ocupan, sólo se quiere dar a entender que, aunque las dos frases comparadas sean falsas, la primera estaría más cerca de ser verdadera de lo que lo haría la segunda. Y en ese mismo sentido, parece completamente natural, e incluso trivial, considerar a toda proposición verdadera más aproximada a la verdad que cualquier otra que sea falsa.

Estas aclaraciones sobrarían seguramente si no fuera porque, como es conocido, en los planteamientos y desarrollos inspirados por la idea popperiana de verosimilitud planea un concepto de aproximación a la verdad en el que el aspecto de aproximación se mezcla con el de contenido. De esta manera, lo que preocupa en ellos no es tanto la cercanía de una frase a ser verdadera, como la proximidad de una teoría a la "verdad completa" en el dominio del que se trate.[2]

Como no podía ser menos, estas divergencias conceptuales se traducen en diferencias analíticas muy básicas. Por ejemplo, en nuestro enfoque se adopta la idea de que si una frase implica lógicamente a una segunda, ésta no puede estar más lejana de la verdad que aquélla, por razones muy similares a las que hacen que si una frase implica lógicamente a una segunda, ésta no pueda ser menos probable que la primera. En las propuestas vinculadas con la verosimilitud, por su parte, la postura más frecuente es la de admitir que pueda ocurrir lo contrario.[3]

Análogamente, puesto que una conjunción implica lógicamente a sus miembros, el nivel de aproximación a la verdad de éstos no puede ser, en nuestro planteamiento, inferior al de aquélla (ni el nivel de los miembros de una disyunción puede ser superior al de la propia disyunción), a diferencia de las previsiones con las que uno se suele encontrar en las propuestas aludidas.

En cualquier caso, nada es tan indicativo de que lo que se pretende incluir en el concepto de verosimilitud desborda la dimensión pura o neta de aproximación a la verdad, como la admisión expresa de la posibilidad de que proposiciones falsas sean consideradas y tratadas como más aproximadas a la verdad que proposiciones verdaderas. En nuestro planteamiento, como hemos subrayado más arriba, esa posibilidad queda descartada.

Las diferencias con los enfoques orientados por el concepto de verosimilitud no acaban con las apuntadas. Pero éstas, por su naturaleza tan fundamental, pueden bastar para dejar aclarado que éste es un desarrollo de orientación diferente,[4] y que, por lo tanto, creemos que podemos ahorrarnos a partir de aquí el seguir anotando las diferencias y las coincidencias de detalle con ellos.[5]

Hay, de todas formas, otra diferencia de fondo que quizá resulte también clarificadora, aunque en otro sentido. En el concepto de verosimilitud late el propósito de constituir un criterio de superioridad teórica. En nuestra propuesta, por el contrario, el objetivo es mucho más modesto. Por un lado, las comparaciones de aproximación en las que se está pensando no son aplicables a las teorías como objeto exclusivo ni preferente, sino a las construcciones y formulaciones teóricas más concretas, que en el terreno económico se suelen conocer casi siempre como modelos.[6] Por lo tanto, nada que decir sobre la aproximación de las teorías, salvo que se identifiquen con formulaciones como las descritas. Por otra parte, la propuesta no presupone que la aproximación a la verdad sea la característica metodológica determinante de las construcciones teóricas. Por el contrario, con su elaboración se pretende facilitar el poder plantearse con precisión la pregunta de hasta qué punto la aproximación a la verdad sea una característica metodológica importante. Dicho de otra manera, ¿qué sentido tiene realmente preferir la construcción de modelos más aproximados? ¿No puede resultar preferible, por ejemplo, buscar modelos más convincentes, de una fuerza explicativa mayor? ¿Está realmente garantizado que un mayor nivel de aproximación traiga consigo una fuerza explicativa mayor?, o ¿puede ocurrir por el contrario que para conseguir una mayor capacidad de convicción haya que remontarse a circunstancias más alejadas de la experiencia? ¿Puede resultar preferible un modelo menos aproximado a las circunstancias reales, y que tampoco exhiba un contenido empírico notable? Lejos de presuponer una respuesta determinada a cada una de estas preguntas, lo que la propuesta trata de conseguir es poder contribuir a su planteamiento riguroso.

El enfoque seguido en éste y en los dos trabajos ya citados[7] también se separa en decisiones fundamentales del tratamiento estructuralista de la aplicación aproximada de las teorías empíricas, original de C. U. Moulines.[8] Para empezar, los asuntos que centran el análisis son distintos, puesto que en dicho planteamiento no se pretende estudiar la cuestión de la aproximación a la verdad, sino las relaciones de aproximación que pueden darse entre modelos potenciales (o entre modelos parciales potenciales) de los elementos teóricos. Además, la naturaleza de las entidades cuyas relaciones de aproximación se pretende analizar en cada caso, modelos potenciales (y parciales potenciales) en el estructuralista, frases o proposiciones en el nuestro, es una razón adicional de que los rasgos y las propiedades estudiadas sean de naturaleza también diferente. Así, mientras que el planteamiento de Moulines es de carácter topológico, el nuestro es de carácter lógico.

Sin embargo, nuestra propuesta debe a la de Moulines su inspiración respecto de tres rasgos importantes de la manera de la que se aborda el análisis de las comparaciones y relaciones de aproximación a la verdad. En primer lugar, por situar las comparaciones y relaciones objeto de estudio en el ámbito de los elementos teóricos, no en el de las teorías globalmente consideradas. En segundo término, por recurrir a las relaciones binarias como representación matemática de las relaciones de aproximación. Y en tercer lugar, al proceder caracterizando axiomáticamente esas relaciones de una manera general, en lugar de intentar definir el concepto de aproximación o alguna medida suya.

En esa sintonía, el núcleo de este trabajo lo constituyen el conjunto de las diez estipulaciones mediante las que se caracterizan las relaciones binarias que se propone bautizar como "preórdenes de aproximación semántica"[9] estipulaciones que pueden clasificarse en cuatro grupos. La primera de ellas está dedicada a postular las características generales de dichos preórdenes, reflexividad, transitividad y complitud. El segundo grupo está constituido por dos propiedades motivadas por la existencia de negaciones, y que no son más que la adaptación de dos principios elementales y muy familiares: el de *tertio excluso* y el de complementariedad.[10] El tercer grupo, referente a la relación de implicación, podría reducirse a la idea ya comentada según la cual una proposición implicada lógicamente por otra tiene que estar como mínimo tan próxima a la verdad como aquélla. Las otras dos propiedades que lo completan figuran más para servir de recordatorio que por necesidad. El cuarto grupo, por último, gira en torno a la adaptación de otra propiedad elemental y conocida, la regla de la multiplicación del Cálculo de Probabilidades, adaptación que viene acompañada de otras tres propiedades exigidas por la introducción del símbolo barra de la probabilidad condicionada como conectiva diádica.[11] Como se ve, pues, una serie reducida de postulados, que en los casos más significativos no son más que la adaptación directa de propiedades elementales y muy conocidas, procedentes de la Lógica o de la Teoría de la Probabilidad.

De todas maneras, la diferencia más notable que presenta este trabajo respecto de los dos ya citados es la sugerencia de representar el punto de vista del agente mediante una distribución de probabilidad sobre el conjunto de los preórdenes aludidos en el párrafo anterior, en lugar de hacerlo mediante uno de ellos. Por esa razón, antes de considerar completada la base postulacional de la propuesta deben considerarse incluidas en ella las estipulaciones al efecto, que son más convenciones de notación que otra cosa.

El resto del trabajo está dedicado a presentar varias series de resultados, que versan sobre asuntos y cuestiones muy básicas en el desarrollo de la propuesta. Destacarían dos grupos, el primero relacionado con las conjunciones, y el segundo con las relaciones de dependencia que pueden mediar entre proposiciones, sea o no por razones lógicas o formales.

El motivo principal para ocuparnos de las conjunciones viene dado por la propia motivación de la propuesta: el estudio de las formulaciones teóricas y de su mayor o menor grado de aproximación a la verdad. Una formulación teórica es, desde el punto de vista de su forma lógica, una conjunción[12]. Por ello, es inmediato y elemental preguntarse qué relaciones puede haber entre el nivel de aproximación de una conjunción y los de sus miembros. Por ejemplo, supongamos que un miembro de la conjunción es verdadero y el otro falso. Ya sabemos que la conjunción tendrá que ser falsa en esas circunstancias, pero ¿será tan aproximada a la verdad como su miembro falso, o lo será menos? ¿Y si los dos miembros son falsos? Y si alguno de esos dos miembros no es verdadero ni falso a juicio del agente, ¿qué pasa con la propia conjunción y con su nivel de aproximación a la verdad?[13]

Análogamente, supongamos que a juicio del sujeto se da una relación de dependencia entre dos proposiciones expresable mediante un enunciado condicional que, por lo tanto, es verdadero para él. ¿Se desprende de ello que el consecuente tenga que ser más, igual o menos aproximado a la verdad que el antecedente? Y si el antecedente es una formulación teórica y el consecuente una conclusión obtenida de ella mediante prueba formal, ¿se deriva de ello alguna consecuencia determinada sobre sus niveles de aproximación respectivos? ¿Y qué pasa cuando la dependencia es sólo probable?

A su vez, cada uno de estos dos grupos de preguntas plantean o sugieren nuevas cuestiones. Por ejemplo, las relativas a las conjunciones sugieren la pertinencia de hacerse las preguntas análogas en relación con las disyunciones, condicionales y bicondicionales. Y extendiendo la analogía, parece igualmente pertinente preguntarse por las relaciones entre los niveles de aproximación a la verdad de las proposiciones cuantificadas universal y existencialmente por un lado, y los de sus instancias por el otro.

Por su parte, la disponibilidad de la conectiva barra nos permite expresar las relaciones de dependencia de dos maneras, mediante dicha conectiva y mediante la condicional, lo que invita a preguntarse adicionalmente por las propiedades fundamentales de la conectiva barra como expresiva de relaciones de dependencia, y por las semejanzas y diferencias entre esas dos conectivas de sentido tan cercano entre sí.

En definitiva, entre las consecuencias que se desprenden de la caracterización de los preórdenes de aproximación semántica que acabamos de anunciar, vamos a fijarnos especialmente en cinco grupos: 1°) uno de ellos tiene que ver con las relaciones en las que pueden terminar estando los niveles de aproximación a la verdad de las proposiciones compuestas y los de sus miembros; 2°) otro tiene que ver con las relaciones en las que pueden terminar estando los niveles de aproximación de las proposiciones abiertas y de las cerradas y cuantificadas con los de sus versiones instanciadas; 3°) un tercero tiene que ver con las relaciones en las que pueden terminar estando los niveles de las proposiciones que guardan entre sí alguna relación de dependencia, sea ésta de implicación formal o no, y sea la condicional o la barra la conectiva mediante la que esté expresada; 4°) otro tiene que ver con las relaciones lógicas entre esas dos conectivas; y 5°) un último grupo ilustra hasta qué punto satisface la conectiva barra leyes lógicas elementales que sí cumple la condicional. Con ello, daremos por finalizada nuestra tarea.

II. Preórdenes de aproximación semántica

II.1. Comparaciones representadas por los preórdenes de aproximación semántica

Los ejemplos recogidos en el segundo párrafo de este artículo ilustran las comparaciones de aproximación a la verdad que pueden considerarse prototípicas: las que establecemos entre proposiciones falsas.[14] También hemos hecho mención de las que se resuelven considerando a las frases verdaderas como más aproximadas a la verdad que las falsas. Y hay una tercera clase de comparaciones que también cabría clasificar como comparaciones de aproximación a la verdad: las comparaciones que podemos establecer entre proposiciones por su mayor o menor probabilidad de ser verdaderas. Si un agente acepta que la frase «mañana va a llover» es más probable que «mañana no va a llover», está admitiendo que la primera está más cerca de resultar verdadera que la segunda.

En los dos trabajos ya citados proponíamos integrar estas tres clases de comparaciones en un planteamiento unificado, agrupándolas a todas ellas como comparaciones de confianza. En esta ocasión, vamos a adoptar un planteamiento más general. Así, en una primera fase vamos a agrupar en los preórdenes de confianza las comparaciones de la primera y de la segunda de las tres clases anteriores. Después, introduciremos las consideraciones probabilísticas mediante distribuciones de probabilidad sobre esos preórdenes.

Pero antes, tenemos que mencionar otra clase de comparaciones, que se hacen entre proposiciones verdaderas, que son la versión simétrica de las de aproximación a la verdad entre proposiciones falsas, y que, por esta razón, también van a quedar integradas en los preórdenes aludidos.

En la medida en la que uno admita como más aproximada a la verdad la idea de que hace ya treinta años desde que finalizó la segunda guerra mundial, frente a la de que haría ventitrés, uno queda comprometido a admitir que está más lejos de ser falso el juicio de que no hace ventitrés años desde que finalizara dicha contienda, de lo que lo está el de que no hace treintaicinco. De una manera semejante, consideramos más seguro decir que el PIB español no alcanzó el año pasado los cuatrocientos veinte billones, por estar más lejos de ser falso, que negar solamente que alcanzara los noventa. Estos ejemplos ilustran dos cosas. Primero, la posibilidad de plantear y resolver comparaciones entre proposiciones verdaderas que no resulta tan natural considerar planteadas ni realizadas bajo el criterio de una mayor o menor aproximación a la verdad, pero que pueden perfectamente considerarse resolubles según el mayor o menor alejamiento respecto de la falsedad de las opciones en juego. Y segundo, la relación de simetría que media entre las comparaciones de aproximación planteadas entre proposiciones falsas y las comparaciones de lejanía de la falsedad planteadas entre proposiciones verdaderas, y que podemos resumir de esta manera: si una proposición se aproxima a la verdad más que otra, la negación de esta segunda estará más lejana de la falsedad que la primera, y viceversa.[15]

En síntesis, diremos a partir de ahora que una proposición *e'* se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad más que otra *e"* 1°) si *e'* y *e"* son las dos verdaderas y la segunda está más cerca de ser falsa que la primera, 2°) o si esas dos proposiciones son las dos falsas y la primera se aproxima más a la verdad que la segunda, 3°) o si *e'* es verdadera y *e"* falsa y, por lo tanto, la primera, trivialmente, se aproxima más a la verdad que la segunda. Y diremos que *e'* se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad tanto como *e"* cuando ambas sean verdaderas y estén igualmente próximas a ser falsas, o cuando ambas sean falsas y se aproximen por igual a la verdad.[16]

II.2. Conceptos y propiedades iniciales

Sea ahora S^* un conjunto de proposiciones, y considérese un juego de tres relaciones binarias como el siguiente, formado por las relaciones *P*, *I* y *R*: para cualquier *e'*, *e"* pertenecientes a S^*, 1°) «*e'P e"*» significará que *e'* se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad más que *e"*[17]; 2°) « *e'I e"*» significará que *e'* se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad tanto como *e"*[18]; y 3°) « *e'R e"*» significará que *e'* se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad tanto o más que *e"*.[19]

Como es natural, esas tres relaciones están estrechamente vinculadas entre sí. El procedimiento habitual para concretar y hacer explícita esa vinculación consiste en definir las relaciones *P* e *I* sobre la base de *R* de la manera siguiente:

1°) *e'P e"* syss[20] *e'R e"* y no *e"R e'*, y
2°) *e'I e"* syss *e'R e"* y *e"R e'*.

En virtud de estas dos definiciones, *P* es asimétrica e *I* es simétrica. Asimismo, *e'R e"* siempre y cuando *e'P e"* o *e'I e"*.[21]

De esas tres relaciones es *R* a la que corresponde llamar preorden, puesto que la vamos a suponer reflexiva, completa y transitiva. En realidad, estas tres propiedades configuran a *R* como un preorden completo, de lo cual se deriva, dadas las definiciones anteriores de *P* y de *I*, que *P* es irreflexiva y transitiva, y que *I* es reflexiva y transitiva.

También conviene tener presente que si *e'* y *e"* son dos proposiciones una de las cuales es negación de la otra, decir que *e'* se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad más que *e"*, esto es, decir que *e'P e"*, significa que la primera es verdadera y la segunda falsa, no admitiéndose más posibilidades que esas dos en un preorden de aproximación a la verdad o lejanía de la falsedad:

> *[adaptación del principio de tertio excluso]* para todo par de proposiciones *e'*, *e"* de S^* tales que una de ellas sea negación de la otra, *e'P e"* o *e"P e'*.

Por otra parte, la simetría ya comentada entre las comparaciones de aproximación a la verdad y las de lejanía de la falsedad puede precisarse mediante una condición como ésta,

> *[condición de simetría vertical]* para toda e^1, e^2, e^3 y e^4 de S^* tales que una de las dos primeras sea negación de la otra, ocurriendo lo propio entre la tercera y la cuarta, $e^1 R e^3$ syss $e^4 R\, e^2$,

condición de la que se desprende a) que $e^1 P e^3$ syss $e^4 P\, e^2$, b) que $e^1 I\, e^3$ syss $e^4 I\, e^2$, y c) que si *e'* es doble negación de *e"*, entonces *e'I e"*.[22]

3. Espacio proposicional

En el aspecto axiomático, nuestra tarea principal va a ser la de definir el conjunto Z^* de todos los preórdenes completos (con dominio S^*) de aproximación a la verdad o lejanía de la falsedad, o más brevemente, de aproximación semántica, tarea que ya hemos comenzado a realizar en el apartado anterior y que va a ocuparnos de una manera especial en el siguiente. Pero antes de proseguir con ella, conviene que aclaremos más el contenido del conjunto S^*, al que llamaremos espacio proposicional, que, como hemos apuntado, es el dominio de los preórdenes de aproximación semántica cuyo conjunto Z^* tratamos de definir, que representa el conjunto de todas las proposiciones que el agente tiene en cuenta expresa o tácitamente en el periodo analizado[23], y del que supondremos que no es vacío.

Para que toda proposición pueda quedar clasificada sin equívocos como verdadera o como falsa bajo cualquier preorden de confianza, estipularemos que toda proposición afirmativa *e'* esté acompañada en S^* de su propia negación, que designaremos por $\neg e'$. Concretamente, supondremos que para toda e° perteneciente a S^*, a) si hay alguna expresión *e'* tal que $e^\circ = \neg e'$, entonces *e'* también pertenecerá a S^*; y b) si ella misma no es una negación, habrá en S^* una *e"* tal que $e'' = \neg e'$.[24]

En cuanto a las clases de expresiones enunciativas compuestas que podemos suponer que pueda haber en S^*, prestaremos una atención especial a las que estén formadas a base de las cuatro conectivas diádicas habituales, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, y del símbolo barra de la probabilidad condicionada, $|$, al que consideraremos también como una conectiva diádica más, sin que ello implique que no pueda haber en S^* frases compuestas de otros tipos.[25]

Naturalmente, también vamos a tener en cuenta la posible presencia en S^* de proposiciones cuantificadas universal y existencialmente, y, en consecuencia, de proposiciones abiertas y cerradas.[26] Sin entrar en detalles sobre los procedimientos de instanciación alternativos a la mera sustitución de variables por constantes, supondremos que por cada proposición cerrada y cuantificada y por cada proposición abierta, existe en S^* un conjunto no vacío de proposiciones cerradas que constituyen versiones instanciadas suyas. Si e' es una proposición cuantificada y e'' es la expresión que se obtiene al eliminar de e' la primera cuantificación que aparece en ella, los conjuntos de sus versiones instanciadas coinciden.

El espacio proposicional no pretende recoger todas las posibilidades expresivas que el agente tiene a su disposición, ni pretende recoger tampoco todas las expresiones enunciativas manejadas por el agente en el periodo aludido, entre otras cosas porque las expresiones abiertas pueden no ser usadas como proposiciones propiamente dichas[27]. Por ello, conviene tener presente una hipótesis como ésta: a) si $e' = \neg e''$, e' será cerrada (o abierta) syss lo es también e''; y b) si $e° = (e' \$ e'')$ para alguna de las conectivas diádicas $\$ = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, o $|$, y $e°$ pertenece a S^*, entonces si e' y e'' son cerradas, ellas también pertenecerán a S^*.

En relación con las expresiones compuestas a base de la conectiva barra, expresiones que a partir de ahora conoceremos como "expresiones barra", puede haber razones poderosas para que el agente evite el empleo de algunas de ellas que, sin embargo, estarían formadas a base de expresiones con pleno sentido. Por ejemplo, si admitiéramos como condicionantes expresiones lógicamente contradictorias, las reglas de uso de las expresiones barra con esa clase de condicionantes podría diferir bastante de lo habitualmente admitido. Por ello, vamos a situar fuera del espacio proposicional todas aquellas expresiones barra la conjunción de cuyos presupuestos no pueda ser verdadera bajo ningún preorden de Z^*: para toda e' y e'' pertenecientes a S^*, si a) e' es una proposición barra y b) e'' es la conjunción de todos sus presupuestos, entonces 1°) si e'' también pertenece a S^*, habrá algún preorden semántico R bajo el que e'' sea verdadera, y 2°) si e'' no pertenece a S^* y es, por lo tanto, abierta, habrá alguna versión instanciada suya en S^* y algún preorden semántico R bajo el que dicha versión sea verdadera.[28]

Por último, podemos adoptar un par de supuestos adicionales que nos permitan enunciar de una manera más sencilla algunas de las consecuencias a las que vamos a referirnos: a) si e' es una conjunción, disyunción, condicional o bicondicional, y e'' es también una expresión de alguna de esas cuatro clases (sin que tenga que ser de la misma clase que *e'*) y sus miembros son los mismos que los de *e'* aunque su orden pueda ser distinto, o en algún caso o en todos son la negación de los de *e'*, b) o si *e'* y *e"* son dos expresiones barra de igual condicionante y la condicionada de una de ellas es la negación de la condicionada de la otra, entonces, si una de esas dos proposiciones pertenece a S^*, también lo hará la otra.

II.4. Otras propiedades definitorias de los preórdenes de aproximación semántica

A) *Propiedades en torno a la implicación*

Volvamos a nuestra tarea principal, la de completar el catálogo de las propiedades mediante las que vamos a definir el conjunto Z^* de todos los preórdenes (completos) de aproximación semántica cuyo dominio es S^*, recordando que hasta ahora, aparte de las definiciones de *P* y de *I*, sobre cada preorden de aproximación semántica *R* sólo hemos postulado que es una relación binaria reflexiva, completa y transitiva en S^*, y que satisface la adaptación del principio de *tertio excluso* y la condición de simetría vertical.

Al introducir expresiones barra, el concepto de implicación lógica que tenemos que manejar es más amplio que el habitual. Por eso, diremos que *e'* implica lógicamente a *e"* en el marco de los preórdenes de aproximación semántica, o más brevemente, que *e'* Z^*-implica a *e"*, siempre y cuando 1°) *e'* implique a *e"* en el sentido lógico habitual, o 2°) suceda bajo todo preorden semántico que si *e'* es verdadera, también lo sea *e"*.[29]

Este concepto, a su vez, nos permite postular esta condición:

[superioridad por implicación]
para toda *e'*, *e"* pertenecientes a S^*, si *e'* Z^*-implica a *e"*, entonces *e"R e'*.[30]

Por otra parte, y aunque en realidad no haría falta más que recordarlas, quizá facilitemos las cosas dejando formuladas expresamente las dos propiedades siguientes:

[implicación por instanciación]
1°) si a) e' es una proposición abierta o es una proposición cerrada y cuantificada universalmente, y b) *e"* es una conjunción de versiones instanciadas suyas o es una de tales versiones,
2°) o si a) *e"* es una proposición cuantificada existencialmente, y b) *e'* es una disyunción de versiones instanciadas suyas o es una de tales versiones, entonces, *e'* Z^*-implica *e"* (y, por lo tanto, *e"R e'*).

[equivalencia por clausura]
si e' es la clausura universal de una proposición abierta e'', entonces e' y e'' serán Z^*-equivalentes (y, por lo tanto, $e' I e''$).

B) *Propiedades básicas relativas a las proposiciones barra*

Para terminar, vamos a postular cuatro condiciones vinculadas con la conectiva barra.

En primer término, adviértase que si e' y e'' no fuesen proposiciones barra ni hubiera proposiciones de esta clase entre las frases de las que están compuestas, $\neg(e''| e')$ y $(\neg e''| e')$ deberían ser tratadas como proposiciones equivalentes en el caso de ser operativas, y lo mismo debería suceder con $[(e' \$ e'')| e^{\circ}]$ y $[(e'| e^{\circ}) \$ (e''| e^{\circ})]$ para cualquier conectiva diádica convencional $\$ = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Como no hemos restringido la manera de componer expresiones barra, estamos obligados a postular una condición algo más complicada en la forma:

[equivalencia de las expresiones paracompuestas]
para cualesquiera $e', e'', e^1, e^2,.., e^n$ de S^*, donde $n > 1$,
1°) las expresiones $[(..((\neg e'| e^1)| e^2)|..)| e^n]$ y $\neg[(..((e'| e^1)| e^2)|..)| e^n]$ son Z^*-equivalentes;
2°) y para toda conectiva diádica convencional, $\$ = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$,
las expresiones $[(.((.(((e' \$ e'')| e^1)| e^2)|..)| e^i)|..)| e^n]$, y
$\{[(.((.((e'| e^1)| e^2)|.)| e^i)|.)| e^n] \$ [(.((.((e''| e^1)| e^2)|.)| e^i)|.)| e^n]\}$
también lo son.[31]

De las otras tres estipulaciones anunciadas, dos no son más que la adaptación a nuestro contexto de propiedades muy conocidas del Cálculo de Probabilidades, como apuntábamos en la sección introductoria:

[condición de adosamiento]
con toda $e', (e''| e')$ y $[(e''| e') \wedge e']$ en S^*,
sucede que $e' I [(e''| e') \wedge e']$ o que $(e''| e') I [(e''| e') \wedge e']$;

[adaptación de la regla de la multiplicación]
para toda $(e' \wedge e'')$ y $[(e''| e') \wedge e']$ en S^*,
$(e' \wedge e'') I [(e''| e') \wedge e']$.

Por último, nótese que si no estipulamos nada más sería posible que una expresión como $(e'| e')$ fuese falsa bajo algún preorden de aproximación semántica, o que una frase como $(\neg e'|e')$ fuera verdadera bajo algún otro preorden. Naturalmente, nada de esto puede ocurrir bajo los preórdenes bajo los cuales *e'* es verdadera. Pero en aquéllos bajo los cuales *e'* es falsa sí podría suceder, porque no hemos introducido ninguna restricción que lo impida.[32]

Los ejemplos anteriores ponen de relieve lo inadecuado de permitir que el valor veritativo asignado a las expresiones barra pueda variar exclusivamente como consecuencia de las posibilidades puramente formales abiertas por el hecho de que sus condicionantes puedan ser falsas. Por el contrario, cuando uno mantiene la verdad o la falsedad de una proposición barra, esa postura debería mantenerse tanto para el caso de que la condicionante sea verdadera como para la eventualidad de que fuese falsa, y viceversa.

En relación con una proposición barra como $(e'| e'')$, la condición que vamos a postular se limita a exigir que si $(e'| e'')$ es verdadera (o falsa) bajo algún preorden, haya al menor algún preorden bajo el que también sea verdadera (o falsa) pero bajo el que también sea verdadera *e"*.[33]

Como las proposiciones que manejamos no son todas ellas barra, necesitamos generalizar la idea anterior, aunque lo vamos a hacer de una manera mínima:

> *[condición de estabilidad veritativa]*
> Sea *e'* una proposición barra o una conjunción perteneciente a S^*. Para cada *e"* de S^* que, además de ser verdadera en bajo algún preorden de Z^*, sea condicionante de *e'* si ésta es barra, o lo sea de algún miembro de *e'* que, perteneciendo a S^*, sea barra, habrá algún preorden en Z^* bajo el que serán verdaderas *e'* y *e"*.[34]

En resumen, para toda terna de relaciones binarias *R*, *P* e *I* definidas en S^* y tales que las dos segundas queden definidas de la manera conocida sobre la base de la primera, ésta será un preorden de aproximación semántica siempre y cuando sea reflexiva, completa y transitiva, y satisfaga las condiciones 1ª) de adaptación del principio de *tertio excluso*, 2ª) de simetría vertical, 3ª) de superioridad por implicación, 4ª) de implicación por instanciación, 5ª) de equivalencia por clausura, 6ª) de equivalencia de las expresiones paracompuestas, 7ª) de adosamiento, 8ª) de adaptación de la regla de la multiplicación, y 9ª) de estabilidad veritativa.

III. Distribuciones de probabilidad entre preórdenes de aproximación semántica

III.1. Presentación

Una vez caracterizados los preórdenes de aproximación semántica, ocupémonos de las distribuciones de probabilidad entre ellos, cuya pertinencia viene avalada por razones como la siguiente. Podría suceder que pudiéramos representar adecuadamente el punto de vista de un agente mediante uno de los preórdenes aludidos. Pero sería un caso raro, si no excepcional. Lo que cabe esperar normalmente, salvo que S^* sea muy pequeño, es que un agente no haya resuelto todas las comparaciones entre todos los pares de proposiciones de S^*. Además, en muchos de estos casos puede ser que albergue expectativas más o menos definidas sobre el sentido que pueda acabar tomando la resolución de la comparación de que se trate.

Por ello, una forma idónea de representar el punto de vista de un agente es hacerlo mediante una distribución de probabilidad *p* sobre el conjunto Z^* de todos los preórdenes completos de aproximación semántica[35]. Designaremos el soporte de *p* como *Sp*.[36]

Como es lógico, cuando una proposición *e'* se aproxime a la verdad o se aleje de la falsedad más que otra *e"* bajo todos los preórdenes del soporte de *p*, hemos de entender que el sujeto resuelve su comparación de esa misma manera, sucediendo lo propio cuando dos proposiciones se aproximen a la verdad o se alejen de la falsedad tanto una como otra bajo todos los preórdenes de *Sp*.

Comentarios como los anteriores nos permiten definir el juego de relaciones de aproximación a la verdad o lejanía de la falsedad inducidas por la distribución *p*, a las que designaremos como *RX*, *PX* e *IX*, definiéndose estas dos últimas de la forma acostumbrada[37], y definiéndose la primera de este modo:

e'RXe", syss, *e'R e"* bajo toda *R* en *Sp*.[38]

Es inmediato comprobar que *RX* hereda las propiedades de los preórdenes *R* menos la complitud, *PX* hereda todas las de las partes asimétricas *P* de dichos preórdenes, e *IX* todas las de las partes simétricas *I* de éstos.[39]

III.2. Información de naturaleza probabilística ofrecida por las distribuciones

Las relaciones *RX*, *PX* e *IX* no hacen uso de la información de naturaleza probabilística contenida en *P*.

Por ejemplo, si *e"* es negación de *e'* o ésta lo es de aquélla, bajo *RX* sólo caben tres tipos de información: que *e'* sea verdadera y *e"* falsa, que sea *e"* la proposición verdadera y *e'* la falsa, o que no estén comparadas entre sí bajo *RX*, en cuyo caso ninguna de ellas será verdadera ni falsa.[40] Sin embargo, la distribución *p* nos proporciona una información mucho más detallada sobre esas proposiciones. En efecto, si *A* es el conjunto de todos los preórdenes en *Sp* bajo los cuales *e'* se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad más que *e"*, siendo *A* por lo tanto el conjunto de todos los preórdenes en *Sp* bajo los cuales *e'* es verdadera, la probabilidad de *A*, que será igual a la suma de las probabilidades de los preórdenes que lo integran, es la probabilidad que tiene *e'*, bajo *p*, de ser verdadera (y *e"* de ser falsa).

Además, puede que tampoco sea conveniente perder de vista otra parte de la información de carácter probabilístico que nos proporciona la distribución *p*:

las probabilidades que termina atribuyendo a las distintas formas de resolver las comparaciones de aproximación a la verdad y lejanía de la falsedad hechas entre proposiciones que no están relacionadas lógicamente por ser una de ellas negación de la otra. Puede suceder, por ejemplo, que el agente no haya logrado resolver completamente la comparación entre las frases e^1 y e^2 por un lado, ni la comparación de e^3 con e^4 por el otro. Si no se nos dice más, ambas situaciones tendrían que catalogarse en el mismo grupo, es decir, como comparaciones sin resolver. Sin embargo, pueden ser muy diferentes. Este sería el caso, por ejemplo, si el agente considerara muy probable que la comparación de e^1 con e^2 fuera a terminar resolviéndose claramente en favor de la primera, mientras que sobre la segunda comparación no mantuviera ninguna expectativa determinada.

En consecuencia, podemos distinguir tres capítulos en la información que nos ofrece p sobre las comparaciones que cabe hacer entre las proposiciones de S^* aplicando la idea de aproximación a la verdad o de lejanía de la falsedad:

1ª) las comparaciones de aproximación a la verdad o lejanía de la falsedad completamente resueltas; son las comparaciones que recoge el juego formado por las relaciones *RX*, *PX* e *IX*;

2ª) las expectativas que pueda albergar el agente sobre la forma en que pueden terminar resolviéndose las comparaciones de aproximación a la verdad y lejanía de la falsedad todavía no resueltas;[41] y

3ª) la probabilidad de ser verdadera que se atribuye a cada proposición.[42]

III.3. ¿Un planteamiento unificado?

Una vía que parece muy natural para extender las relaciones *RX*, *PX* e *IX* consiste en permitir a) que una proposición e' sea considerada, bajo p, más aproximada a la verdad o más lejana a la falsedad que otra e'' bien sea porque $e' PX\, e''$, o porque la probabilidad de que e' sea verdadera sea mayor que la de e'', y b) que dos proposiciones e' y e'' sean consideradas, bajo p, igualmente aproximadas a la verdad o alejadas de la falsedad porque $e' IX\, e''$ o porque la probabilidad de ser verdaderas sea la misma para las dos.[43]

Sin embargo, esa sugerencia puede tropezar con algunos problemas, salvo que introduzcamos estipulaciones adicionales.

Podría ocurrir, por ejemplo, con dos proposiciones e^3 y e^4 que no fuesen verdaderas ni falsas, que tuvieran bajo p la misma probabilidad de ser verdaderas y que, sin embargo, bajo *RX* una de ellas se aproximara a la verdad o se alejara de la falsedad más que la otra.[44]

Las dificultades para integrar unas comparaciones y otras se acrecientan cuando tomamos en consideración la información restante de carácter probabilístico que nos proporciona la distribución p. Así, puede ocurrir, por ejemplo, que e' sea verdadera o que la probabilidad de que lo sea alcance un valor mayor que la probabilidad de que lo sea e'', y que, por el contrario, el conjunto de los preórdenes bajo los cuales esta segunda proposición se aproxima más a la verdad o se aleja más de la falsedad reciba de p una probabilidad mayor que la de los preórdenes en los cuales es e' la más aproximada a la verdad o más lejana de la falsedad de las dos. Esto es lo que ocurriría, por ejemplo, si un agente tuviera una conjetura e' que pensara demostrar matemáticamente y en cuya verdad tuviera una gran confianza, que de todas maneras fuese menor de la que tuviera en que su hija la mayor volviese a la hora convenida, siendo ésta la opción e''.

IV. Consecuencias sobre las proposiciones compuestas y sobre las cuantificadas

IV.1. Focos de cuestiones analizadas

Con los preórdenes de aproximación semántica y las distribuciones de probabilidad sobre ellos pretendemos ofrecer un instrumento para el análisis, sobre todo, de las formulaciones y los modelos teóricos. Sea e^m un modelo tal. Además de elaborarlo, la otra dimensión principal del trabajo teórico consiste en obtener conclusiones a partir de él, mediante la correspondiente derivación formal. Sean e^1, e^2,.., e^n esas conclusiones. Sin entrar en otros asuntos que no son del momento, podemos convenir en que la forma lógica general de esos resultados puede concretarse en las proposiciones abiertas condicionales $(e^m \rightarrow e^1)$, $(e^m \rightarrow e^2)$,.., $(e^m \rightarrow e^n)$, o en sus clausuras universales. Naturalmente, la pregunta sobre el nivel de aproximación semántica de estos enunciados condicionales formalmente válidos no presenta tanto interés como la que se interroga por las relaciones que puedan mediar entre dicho nivel y el de sus versiones instanciadas. Pero lo que tiene mayor interés es plantearse las relaciones entre el nivel de aproximación del antecedente de cada una de esas versiones instanciadas[45] y el de su consecuente. Ya insinuábamos anteriormente que sería muy difícil explicar la búsqueda de modelos que constituyan "buenas aproximaciones" si no hubiera ningún mecanismo que vinculase esos niveles. De otra parte, tanto el modelo general como sus versiones instanciadas serán normalmente listas de condiciones, ecuaciones, fórmulas, etc, es decir, expresiones en forma de conjunción.

Bastan unas consideraciones tan someras como ésas para destacar los tres focos de cuestiones en referencia a los cuales vamos a ilustrar el rendimiento de la propuesta: 1°) qué relaciones pueden darse entre los niveles de aproximación semántica de las conjunciones y los de sus miembros, y por extensión, qué relaciones pueden darse entre el nivel de aproximación de cualquier proposición compuesta y los de sus miembros; 2°) qué relaciones pueden mediar entre el nivel de aproximación del antecedente y el del consecuente de un condicional formalmente válido, y por extensión, qué relaciones puede mediar entre los niveles de aproximación de dos proposiciones entre las que se afirma una relación de dependencia, sea cual sea la validez o la probabilidad de la afirmación, y sea cual sea la forma en la que la dependencia venga expresada; y 3°) qué relaciones pueden tener lugar entre los niveles de aproximación de las proposiciones abiertas o las cerradas y cuantificadas[46] de un lado, y los de sus versiones instanciadas de otro.

Además, el hecho de haber introducido el símbolo barra de la propiedad condicionada como conectiva alternativa a la condicional para expresar relaciones de dependencia, nos compromete a comentar sus propiedades y características a la hora de cumplir esa finalidad, y a comentar, asimismo, los rasgos más sobresalientes que arroja la comparación entre ambas conectivas, rivales y, a la vez, complementarias.

IV.2. Relaciones entre los niveles de aproximación de las conjunciones y los de sus miembros

Comenzaremos por abordar las cuestiones relativas a las proposiciones compuestas (cerradas), empezando por las referentes a las conjunciones, y preguntándonos, en consecuencia, sobre una expresión como $e^{\circ}= (e' \wedge e'')$ si e° es más, menos o tan aproximada como e' o como e''.

Sucede que la respuesta puede variar según sean los valores veritativos de las tres proposiciones involucradas. Así, pues, tenemos que distinguir la situación en la que e° es verdadera (y lo son también e' y e''), de aquéllas en las que e° es falsa, situaciones estas últimas entre las que, a su vez, puede ser pertinente distinguir si e' y e'' son las dos falsas o, por el contrario, sólo lo es una de ellas.

Además, son dos los contextos en los que podemos plantear y tratar de responder dichas cuestiones: 1°) el de los preórdenes de aproximación semántica, y 2°) el de las distribuciones de probabilidad sobre ellos.

De otra parte, en este segundo contexto las proposiciones no sólo pueden ser verdaderas o falsas, como sucede en los preórdenes. También pueden estar sin decidir y tener una probabilidad positiva de ser verdaderas, probabilidad que puede ser alta, media o baja. Por ello, en este segundo contexto hemos de ampliar en esa dirección el repertorio de las situaciones y circunstancias a tener en cuenta.

Por último, las distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de los preórdenes de aproximación semántica nos proporcionan una información adicional más conocida, pero que es muy fácil obtener en nuestra construcción, y que puede ser útil tener a mano: las relaciones entre la probabilidad que tiene e° de ser verdadera y la que tienen e' y e''.

Así pues, vamos a preguntarnos por tres cosas: 1ª) por las relaciones entre los niveles de aproximación semántica de e°, e' y e'' bajo un preorden de aproximación semántica; 2ª) por las relaciones entre los niveles de aproximación semántica de e°, e' y e'' bajo una distribución de probabilidad sobre Z^*; y 3ª) por las relaciones entre la probabilidad de e°, la de e' y la de e'' bajo una distribución de probabilidad sobre el conjunto mencionado.

Toda conjunción (cerrada) implica lógicamente a cada uno de sus miembros, por lo que la transmisión a través de la implicación lógica asegura para todo preorden de aproximación semántica R y para cualquier conjunción como $(e' \wedge e'')$, que $e'R\,(e' \wedge e'')$ y que $e''R\,(e' \wedge e'')$. A partir de ello, la condición de simetría vertical garantiza que si $(e' \wedge e'')$ es verdadera, e' y e'' también lo serán, y que si e' o e'' es falsa, $(e' \wedge e'')$ también será falsa.

Por otro lado, también se puede demostrar que si e' y e'' son verdaderas, $(e' \wedge e'')$ será verdadera igualmente y tan aproximada bajo R como alguna de ellas, fenómeno al que nos podemos referir diciendo que $(e' \wedge e'')$ estará adosada a alguna de esas dos frases.[47]

Supongamos que e' es verdadera y e'' es falsa bajo R, o que ambas son falsas y $e'P\,e''$. Sabemos ya que $(e' \wedge e'')$ será falsa. Y en principio, puede estar adosada o no estarlo; pero de estarlo, sólo puede hacerlo a e''. Como por la adaptación de la regla de la multiplicación y la condición de superioridad por implicación sucede que $(e' \wedge e'')I\,[(e''| \, e') \wedge e']I\,(e'' \wedge e')I\,[(e'| \, e'') \wedge e'']$, la conjunción $(e' \wedge e'')$ estará adosada a e'' si y sólo si $e''I\,(e''| \, e')$ y $(e'| \, e'')R\,e''$.

Por un razonamiento similar podemos concluir que si e' es falsa y e'' es verdadera bajo R, o si las dos son falsas y $e''P\,e'$, $(e' \wedge e'')$ será falsa, y estará adosada a e' si y sólo si $e'\,I\,(e'| \, e'')$ y $(e''| \, e')R\,e'$.

Supongamos, por último, que e' y e'' son falsas y que $e'I\,e''$. Sabemos que $(e' \wedge e'')$ será falsa. Por razones parecidas, $(e' \wedge e'')$ estará adosada a e' o a e'' si y sólo si $(e''| \, e')R\,e'$ y $(e'| \, e'')R\,e''$.[48]

En síntesis,

bajo todo preorden R de aproximación semántica, y para toda e°, e' y e'' (cerradas) pertenecientes a S^*, si a) $e^\circ = (e' \wedge e'')$[49] y si b) $(e''| \, e')$, $[(e''| \, e') \wedge e']$, $(e'| \, e'')$, $[(e'| \, e'') \wedge e'']$ también pertenecen a S^*, entonces

1°) siempre, $e'R\,e^\circ$ y $e''R\,e^\circ$;

2°) e° será verdadera bajo R si y sólo e' y e'' también lo son; y si e° es verdadera bajo R, estará adosada a e' o a e'', estándolo, naturalmente, a la de menor nivel;

3°) e° será falsa bajo R siempre y cuando, a) lo sea e', o b) lo sea e'';

3°1) si e' es verdadera bajo R siendo e'' falsa, o si e' y e'' son falsas y $e'P\,e''$, e° sólo podrá estar adosada a e'', y lo estará syss $e''\,I\,(e''|e')$ y $(e'| \, e'')R\,e''$;

3°2) si e' es falsa bajo R siendo e'' verdadera, o si e' y e'' son falsas y $e''P\,e'$, e° sólo podrá estar adosada a e', y lo estará syss $e'\,I\,(e'| \, e'')$ y $(e''| \, e')R\,e'$;

3°3) y si tanto *e'* como *e"* son falsas bajo *R* y *e'I e"*, *e°* estará adosada a *e'* o a *e"* siempre y cuando *(e"| e')R e'* y *(e'| e")R e"*.

De esos resultados, por su parte, se desprende de manera inmediata que bajo toda distribución de probabilidad *P* sobre *Z**:

1°) siempre *e'RX e°* y *e"RX e°*;

2°) si *e°* es verdadera (bajo *p*), entonces para toda *R'* de *Sp*, *e°I' e'* o *e°I' e"*, por lo que si *e'RX RX e"* entonces *e'PX e°* y *e°IX e"*; y si *e"RX e'* entonces *e"PX e°* y *e°IX e'*;[50]

3°) cuando *e'* es verdadera (bajo *p*) pero *e"* no, entonces *p[e°]= p[e"]*, y *e'PX e°*;[51] sucede, además, lo previsto en el punto anterior, es decir, que para toda *R'* de *Sp*, *e°I' e'* o *e°I' e"*, por lo que si *e'RX e"* entonces *e'PX e°* y *e°IX e"*;[52]

4°) y, en general, cuando ni *e'* ni *e"* son verdaderas y *e'RX e"* (y, por lo tanto, *p[[e"]|[e']]*= 1), si bajo toda *R* en *Sp* bajo la cual *e"* es falsa sucede que *e"I (e"| e')* o que *(e'| e")R e"*, entonces *e°IX e"*, ocurriendo que *e"PX e°* en caso contrario[53].

Decíamos en la sección introductoria que nuestra propuesta permitía, además, obtener de una manera inmediata consecuencias sobre las relaciones entre la probabilidad de que *e°* sea verdadera, y la de que lo sea *e'* y *e"*.[54] Por otro lado, las situaciones en las que *e°, e'* y *e"* son verdaderas, o en las que es falsa *e'* o lo es *e"*, ya las conocemos gracias a las listas anteriores. Asimismo, acabamos de dejar establecido que si uno de los miembros de la conjunción es verdadero (bajo *p*) y el otro no, la propia conjunción tendrá la misma probabilidad de ser verdadera que la que tiene ese miembro no verdadero. Por lo tanto, la pregunta que podemos formularnos sería: ¿qué sucede con la probabilidad de una conjunción como *e°* cuando la de cada uno de sus dos miembros es positiva pero menor que uno?

Podemos distinguir cuatro grupos de circunstancias:

1°) si la probabilidad de ambos miembros es superior a 0.5, entonces la de la propia conjunción será positiva; si, además, *p[[e"]|[e']]*=1 o *p[[e']|[e"]]*=1, entonces 1 > *p[e°]* > 0.5;

2°) si la probabilidad de uno de los miembros, sea por ejemplo *e'*, es mayor que 0.5 y la del otro, que en este caso sería *e"*, alcanza exactamente ese valor, entonces la probabilidad de *e°* también será positiva en estas circunstancias; si, además, *p[[e']|[e"]]*= 1, entonces *p[e°]* = 0.5;

3°) si las probabilidades de *e'* y de *e"* son las dos de 0.5, entonces entonces 0.5 > *p[e°]* > 0; sucederá que *p[e°]* = 0.5 siempre y cuando *p[[e"]|[e']]*= 1, o *p[[e']\[e"]]*= 1; sucederá, en cambio, que 0.5 > *p[e°]* > 0 siempre y cuando 1 > *p[[e"]\[e']]* > 0, 1 > *p[[e']\[e"]]* > 0; por ello, cuando *e'* es estadísticamente independiente[55] de *e"* bajo *p*, o *e"* lo es de *e'*, entonces 0.5 > *p[e°]* > 0; y cuando *p[[e"]\[e']]*= 0 y *p[[e']\[e"]]*= 0, sucederá que *p[e°]* = 0;

4°) por último, si la probabilidad de alguno de los dos miembros es positiva pero menor que 0.5, sucederá con carácter general que 0.5 > *p[e°]* ≥ 0; si *p[[e"]\[e']]*= 0 y o *p[[e']\[e"]]*= 0, entonces *p[e°]* = 0; en los demás casos, 0.5 > *p[e°]* > 0.

De todo ello se sigue que:

1°) si 1 > *p[e°]* > 0.5, entonces o bien a) *p[e']* = 1 y 1 > *p[e"]* = *p[e°]* > 0.5, o bien b) *p[e"]* = 1 y 1 > *p[e']* = *p[e°]* > 0.5, o bien c) 1 > *p[e"]* > 0.5 y 1 > *p[e']* = *p[e°]* > 0.5;

2°) si *p[e°]* = 0.5, entonces o bien a) *p[e']* = 1 y 1 > *p[e"]* = *p[e°]* = 0.5, o bien b) *p[e"]* = 1 y 1 > *p[e']* = *p[e°]* = 0.5, o bien c) 1 > *p[e"]* > 0.5 y 1 > *p[e']* > 0.5;

3°) si 1 > *p[e°]* > 0, entonces o bien a) *p[e']* = 1 y 1 > *p[e"]* = *p[e°]* > 0, o bien b) *p[e"]* = 1 y 1 > *p[e']* = *p[e°]* > 0, o bien c) 1 > *p[e"]* > 0 y 1 > *p[e']* = *p[e°]* > 0;

4°) por fin, si *p[e°]* = 0, entonces a) o bien *p[e']* = 0, b) o bien *p[e"]* = 0, c) o bien *p[e']* > 0, *p[e"]* >0, *p[[e"]\[e']]*= 0 y *p[[e']\[e"]]*= 0.[56]

IV.3. Disyunciones

Aprovechando ahora que *(e'∨ e")* y *¬(¬e'∧ ¬e")* son lógicamente equivalentes, a partir de lo que ya sabemos sobre el comportamiento de las conjunciones podemos obtener con facilidad[57] que bajo todo preorden *R* de aproximación semántica, y para toda *e°*, *e'* y *e"* en *S** a) tales que *e°= (e'∨ e")*[58] y b) tales que *(¬e"| ¬e')*, *[(¬e"| ¬e')∧ ¬e']*, *(¬e'| ¬e")*, *[(¬e'| ¬e")∧ ¬e"]* también pertenezcan a *S**:

1°) siempre, *e°R e'* y *e°R e"*;

2°) *e°* será verdadera bajo *R* siempre y cuando, a) lo sea *e'*, o b) lo sea *e"*;

2°.1) si tanto *e'* como *e"* son verdaderas bajo *R* y *e'I e"*, *e°* estará adosada a *e'* o a *e"* syss *e'R (e'| ¬e')* y *e"R(e'| ¬e")*;

2°.2) si *e'* es verdadera siendo *e"* falsa bajo *R*, o si *e'* y *e"* son verdaderas y *e'P e"*, *e°* sólo podrá estar adosada a *e'*, y lo estará si y sólo si *e' I (e'| ¬e")* y *e'R (e'| ¬e')*;

2°.3) si *e'* es falsa siendo *e"* verdadera bajo *R*, o si *e'* y *e"* son verdaderas y *e"P e'*, *e°* sólo podrá estar adosada a *e"*, y lo estará si y sólo si $e'' \, I \, (e' \rceil \neg e')$ y $e''R \; (e' \rceil \neg e'')$;

3°) *e°* será falsa bajo *R* si y sólo *e'* y *e"* también lo son; y si *e°* es falsa bajo *R*, estará adosada a *e'* o a *e"*, estándolo, naturalmente, a la de mayor nivel.

A su vez, con ayuda de esta lista podemos establecer ahora que bajo cualquier distribución de probabilidad sobre Z^*:

1°) siempre, *e°RX e'* y *e°RX e"*;

2°) cuando *e'* no es falsa bajo *p* o no lo es *e"*, si *e'RX e"*, y sucede además que bajo toda *R* en *Sp* bajo la cual *e'* es verdadera se cumple que $e' \, I \, (e' \rceil \neg e'')$ y $e'R \; (e' \rceil \neg e')$, entonces *e°IX e'*, ocurriendo que *e°PX e'* en caso contrario;[59]

3°) cuando *e'* es falsa pero *e"* no, entonces *p[e°]= p[e"]*, *e°PXe'* y para toda *R'* de *Sp*, *e°I' e'* o *e°I' e"*, por lo que si *e"RX e'* entonces *e"IX e°* y *e°PX e'*;[60]

4°) si *e°* es falsa, entonces para toda *R'* de *Sp*, *e°I' e'* o *e°I' e"*, por lo que si *e'RX e"* entonces *e'IX e°* y *e°PX e"*; y si *e"RX e'* entonces *e"IX e°* y *e°PX e'*.[61]

Y en cuanto a las relaciones entre las probabilidades de *e°*, *e'* y *e"*, se puede establecer fácilmente que:

1°.1) $p[e°]=p[e']$ syss a) $p[e'']/p[e']=p[[e'']\backslash[e']]$, y b) $p[[e']\backslash[e'']]=1$; y

1°.2) $p[e°] > p[e']$ syss a) $p[e'']/p[e'] > p[[e'']\backslash[e']]$, y b) $p[[e']\backslash[e'']] < 1$;[62]

2°) *e°* es verdadera bajo *p* syss a) o bien lo es *e'*, b) o bien lo es *e"*, c) o bien $p[e'] > 0$, $p[e''] > > 0$, y $p[e'] + p[e''] - 1 = p[e' \wedge e'']$;

3°) Para cualquier *k* del intervalo $\{0,1\}$, si $p[e'] > k$, o si $p[e''] > k$, entonces $p[e°] > k$;

4°) Si $p[e'] = p[e''] = 0.5$, entonces $1 > p[e°] > 0.5$;

4°.1) sucederá que $p[e°] = 0.5$ siempre y cuando $p[[e'']\backslash[e']]= 1$, o $p[[e']\backslash[e'']]= 1$;

4°.2) sucederá, en cambio, que $1 > p[e°] > 0.5$ siempre y cuando $1 > p[[e'']\backslash[e']] > 0$, o $1 > p[[e']\backslash[e'']] > 0$; por ello, si *e'* es estadísticamente independiente de *e"* bajo *p*, o *e"* lo es de *e'*, entonces $1 > p[e°] > 0.5$; y cuando $p[[e'']\backslash[e']]= 0$ y $p[[e']\backslash[e'']]= 0$, sucederá que $p[e°] = 1$.

5°) Por último, si $0.5 > p[e'] > 0$ y $0.5 > p[e''] > 0$, entonces $1 > p[e°] > 0$; y si $p[[e'']\|[e']] = 1$ o $p[[e']\|[e'']] = 1$, entonces $0.5 > p[e°] > 0$.

Por todo ello,

1°) si $1 > p[e°] > 0.5$, entonces o bien a) $p[e'] = 0$ y $1 > p[e''] = p[e°] > 0.5$, o bien b) $p[e''] = 0$ y $1 > p[e'] = p[e°] > 0.5$, o bien c) $1 > p[e''] > 0.5$ o $1 > p[e'] > 0.5$;

2°) si $p[e°] = 0.5$, entonces o bien a) $p[e'] = 0$ y $p[e''] = p[e°] = 0.5$, o bien b) $p[e''] = 0$ y $p[e'] = p[e°] = 0.5$, o bien c) $0 < p[e''] < 0.5$ y $0 < p[e'] < 0.5$;

3°) y si $0.5 > p[e°] > 0$, entonces o bien a) $p[e'] = 0$ y $0 < p[e''] = p[e°] < 0.5$, o bien b) $p[e''] = 0$ y $0 < p[e'] = p[e°] < 0.5$, o bien c) $0 < p[e''] < 0.5$ y $0 < p[e'] < 0.5$.

IV.4. Condicionales y bicondicionales

Respecto de las proposiciones condicionales y las bicondicionales también podemos explotar sendas y familiares equivalencias, pues $(e' \rightarrow e'')$ es lógicamente equivalente a $(\neg e' \vee e'')$, y $(e' \leftrightarrow e'')$ es lógicamente equivalente a la conjunción de $(e' \rightarrow e'')$ con $(e'' \rightarrow e')$. Para ilustrarlo, nos ceñiremos al comportamiento de condicionales y bicondicionales bajo los preórdenes de aproximación semántica.

Bajo todo preorden R de aproximación semántica, y para toda $e°$, e' y e'' en S^* a) tales que $e° = (e' \rightarrow e'')$[63] y b) tales que $(\neg e'' | e')$, $[(\neg e'' | e') \wedge e']$, $(e' | \neg e'')$, $[(e' | \neg e'') \wedge \neg e'']$ también estén en S^*, entonces,

1°) en general, $e° R \neg e'$ y $e° R\, e''$;

2°) $e°$ será verdadera bajo R siempre y cuando, a) e' sea falsa, o b) e'' sea verdadera;

2°.1) si e' es falsa y e'' es verdadera bajo R y $\neg e' I\, e''$, $e°$ estará adosada a $\neg e'$ o a e'' syss $\neg e' R\ (e' | e')$ y $e'' R (\neg e' | \neg e'')$;

2°.2) si e' y e'' son falsas bajo R, o si e' es falsa y e'' es verdadera y $\neg e' P\, e''$, $e°$ sólo podrá estar adosada a $\neg e'$, y lo estará syss $\neg e' I (\neg e' | \neg e'')$ y $\neg e' R\ (e' | e')$;

2°.3) si e' y e'' son verdaderas bajo R, o si e' es falsa y e'' es verdadera y $e'' P \neg e'$, $e°$ sólo podrá estar adosada a e'', y lo estará syss $e'' I (e'' | \neg e')$ y $e'' R (\neg e' | \neg e'')$;

3°) e° será falsa bajo R si y sólo e' es verdadera y e'' falsa; además, si e° es falsa bajo R, estará adosada a $\neg e'$ o a e'', estándolo, naturalmente, a la de mayor nivel.

Por lo que hace a las proposiciones bicondicionales, a partir de lo que ya sabemos sobre las conjunciones y las condicionales se puede argumentar fácilmente que bajo todo preorden R de aproximación semántica, y para toda e°, e', e'', e' y e'' en S^* a) tales que $e' = (e' \rightarrow e'')$, $e'' = (e'' \rightarrow e')$, y $e^\circ = (e' \leftrightarrow e'')$[64], b) tales que $(\neg e'' \mid e')$, $[(\neg e'' \mid e') \wedge e']$, $(e' \mid \neg e'')$, $[(e' \mid \neg e'') \wedge \neg e'']$, $(\neg e' \mid e'')$, $[(\neg e' \mid e'') \wedge e'']$, $(e'' \mid \neg e')$ y $[(e'' \mid \neg e') \wedge \neg e']$ también pertenecen a S^*, y c) tales que $(e' \wedge e'')$, $(e'' \mid e')$, $[(e'' \mid e')\ e']$, $(e' \mid e'')$ y $[(e' \mid e'') \wedge e'']$ también pertenecen a S^*,

1°) siempre, $e'R\,e^\circ$ y $e''R\,e^\circ$, $e'R\,\neg e'$ y $e'R\,e''$, y $e''R\,\neg e''$ y $e''R\,e'$;

2°.1) e° será verdadera bajo R si y sólo e' y e'' también lo son; por lo tanto, e° será verdadera bajo R si y sólo e' y e'' son las dos verdaderas bajo R, o son las dos falsas bajo ese mismo preorden;

2°.2) además, si e° es verdadera bajo R, entonces a) si $e'R\,e''$, entonces $e^\circ I\,e''$, y b) si $e''R\,e'$, entonces $e^\circ I\,e'$,

2°.2.1) si e°, e' y e'' son verdaderas bajo R y si $e'R\,e''$, entonces a) $e^\circ I\,e''$, y b) e'' (y e°) sólo podrá estar adosada a e', y lo estará si y sólo si $e'\ I\ (e' \mid \neg e'')$ y $e'R\ (\neg e'' \mid \neg e')$;

2°.2.2) si e°, e' y e'' son verdaderas bajo R y si $e''R\,e'$, entonces a) $e^\circ I\,e'$, y b) e' (y e°) sólo podrá estar adosada a e'', y lo estará si y sólo si $e''\ I\ (e'' \mid \neg e')$ y $e''R\ (\neg e' \mid \neg e'')$;

2°.2.3) si e° es verdadera y e' y e'' son falsas bajo R, y si $e'R\,e''$, entonces a) $e^\circ I\,e''$, y b) e'' (y e°) sólo podrá estar adosada a $\neg e''$, y lo estará si y sólo si $\neg e''\ I\ (\neg e'' \mid \neg e')$ y $\neg e''R\ (e' \mid e'')$;

2°.2.4) si e° es verdadera y e' y e'' son falsas bajo R, y si $e''R\,e'$, entonces a) $e^\circ I\,e'$, y b) e' (y e°) sólo podrá estar adosada a $\neg e'$, y lo estará si y sólo si $\neg e'\ I\ (\neg e' \mid \neg e'')$ y $\neg e'R\ (e'' \mid e')$;

3°.1) e° será falsa bajo R siempre y cuando, a) lo sea e', o b) lo sea e'';

3°.2.1) si e' es verdadera siendo e'' falsa bajo R, o si e' y e'' son falsas y $e'P\,e''$, e° sólo podrá estar adosada a e'', y lo estará si y sólo si $e''\ I\ (e'' \mid e')$ y $(e' \mid e'')R\,e''$; a su vez, si e'' es falsa y $e'R\,\neg e''$, entonces $e''I\,e'$, y si e'' es falsa y $\neg e''R\,e'$, entonces $e''I\,\neg e''$;

3°.2.2) si e' es falsa siendo e'' verdadera bajo R, o si e' y e'' son falsas y $e''P\,e'$, e° sólo podrá estar adosada a e', y lo estará si y sólo si $e'\ I\ (e' \mid e'')$ y

$(e'' \rceil\, e')R\, e'$; a su vez, si e' es falsa y $\neg e'Re''$, entonces $e'I\neg e'$, y si e' es falsa y $e''R\neg e'$, entonces $e'I\, e''$; y

3°.2.3) si tanto e' como e'' son falsas bajo R y $e'I\, e''$, e° estará adosada a e' y a e'' syss $(e'' \rceil\, e')Re'$ y $(e' \rceil\, e'')R\, e''$; a su vez, si $e'P\, \neg e''$ (y, por lo tanto, $e''P\neg e'$), entonces $e'I\, e''$ y $e''I\, e'$, por lo que $e'I\, e''$ y $\neg e'I\, \neg e''$; si $e'I\, \neg e''$ (y, por lo tanto, $e''I\neg e'$), entonces $e'I\neg e'$, $e'I\, e''$, $e''I\, e'$ y $e''I\, \neg e''$, por lo que $e'I\neg e'I\, e''I\neg e''$; y si $\neg e''P\, e'$ (y, por lo tanto, $\neg e'P\, e''$), entonces $e'I\neg e'$ y $e''I\neg e''$, por lo que $e'I\, e''$ y $\neg e'I\, \neg e''$.

V. Dependencias

V.1. Cuestiones seleccionadas

Como ya hemos apuntado con anterioridad, el segundo foco de cuestiones a cuyo análisis vamos a aplicar la propuesta para ilustrar su rendimiento, gira en torno a las relaciones de dependencia que se pueden mantener o afirmar (y también negar) entre proposiciones. La clase más clara es la que constituyen aquéllos casos en los que una proposición e'' es consecuencia lógica de otra e', casos en los que podemos expresar esa dependencia mediante el enunciado condicional $(e' \rightarrow e'')$, que será lógicamente válido.

Para el análisis metodológico de las formulaciones y los modelos teóricos no es tan pertinente la relación de dependencia que conlleva la implicación lógica, como las que se ponen de manifiesto en las demostraciones matemáticas mediante las que se obtienen las conclusiones derivadas de las formulaciones y los modelos aludidas. En esos casos también podemos expresar la dependencia existente mediante un enunciado condicional como $(e' \rightarrow e'')$, aunque éste no será ya lógicamente válido, sino que sólo lo será formal o lógico-matemáticamente.[65]

Además, cuando de un modelo teórico se obtiene una consecuencia determinada, puede ser de gran interés conocer si el nivel de aproximación de ésta depende del de aquél (en sus versiones instanciadas). No lo será cuando el modelo de turno sea verdadero o probable. Pero con los modelos teóricos éste no es casi nunca el caso. Un modelo teórico suele incorporar simplificaciones u otro tipo de decisiones que no le permiten aspirar a ser verdadero ni probable. Aspiran, a lo sumo, a ser "buenas aproximaciones". Pero lo que se espera, en tales casos, es que las consecuencias, previsiones y predicciones obtenidas sean aproximaciones suficientemente buenas como para ser significativas. Por ello, a propósito de las dependencias formales expresables mediante condicionales lógicamente válidos como $(e' \rightarrow e'')$, es pertinente preguntarse hasta qué punto o en qué medida el nivel de aproximación del consecuente puede depender del nivel del antecedente.

Además y como es obvio, las dependencias entre fenómenos, acontecimientos o circunstancias que pueden mantenerse y que pueden expresarse y afirmarse mediante enunciados condicionales como los anteriores, no se circunscriben a las que pueden ser probadas formalmente. En asuntos de nuestra vida corriente, cada uno de nosotros estamos plenamente convencidos de múltiples dependencias. Y en el ámbito científico, la forma lógica atribuida al prototipo más sencillo de hipótesis científica desde la época clásica de la Filosofía de la Ciencia es la de una proposición condicional cuantificada universalmente. Así pues, también puede resultar pertinente hacerse la misma pregunta que antes, pero en relación con cualquier condicional, no sólo a propósito de los que son formalmente válidos.

Por otro lado, la conectiva barra representa una posibilidad alternativa de expresar dependencias entre proposiciones. Seguramente, nuestra propuesta no hubiera recurrido a ella si no hubiera sido necesario para poder incluir la adaptación de algunas leyes básicas del Cálculo de Probabilidades entre las propiedades definitorias de los preórdenes de aproximación semántica. Pero con independencia de esa necesidad instrumental, la conectiva barra ofrece ciertos rasgos que la hacen especialmente interesante para el análisis metodológico.

A título de ejemplo, piénsese en un modelo consistente en un sistema de ecuaciones m del que se obtiene, entre otras, la conclusión c, pudiéndose representar, por lo tanto, el ejercicio formal mediante el condicional $(m \rightarrow c)$, que sería formalmente válido. El el ejercicio teórico, sin embargo, no se limita a ese ejercicio formal. Si lo hiciera, todo lo que sería capaz de decirnos respecto de los casos concretos, empíricos o no, a los que pretendiera ser aplicable sería que, en cada uno de esos casos, si se cumple m se cumplirá necesariamente c. Pero m no es más que un sistema de ecuaciones no interpretado, y c será también una fórmual matemática no interpretada. Por el contrario, lo que pretende decirnos el ejercicio es que, suponiendo admitidas, aceptadas o vigentes las convenciones sobre la interpretación de las variables ocurrentes en m y en c que están destinadas a representar entidades o magnitudes extramatemáticas, si se cumple m se cumplirá necesariamente c. Sea v la conjunción de esas convenciones. ¿Qué forma lógica es ahora la adecuada para representar esta lectura del ejercicio? Si sólo disponemos de la conectiva condicional tendríamos que manejar expresiones como $[v \rightarrow (m \rightarrow c)]$ o como $[(v \rightarrow m) \rightarrow (v \rightarrow c)]$, equivalentes entre sí. La primera de esas expresiones no añade nada al condicional $(m \rightarrow c)$ del que ya sabemos que es formalmente válido. La segunda, por el contrario, recoge mejor el sentido del ejercicio: "si dada la interpretación propuesta de las variables extramatemáticas se cumple el sistema m, entonces se cumplirá c, dando por sentada esa misma interpretación". Pero supongamos que v no está admitida, o que es distinta de la interpretación estándar y que cupiera, por lo tanto, calificarla de falsa. La expresión anterior perdería sentido porque $(v \rightarrow c)$ (y $(v \rightarrow m)$) se convertiría en una proposición verdadera por la simple razón de que la interpretación recogida en v no sería la establecida.

La conectiva barra, por el contrario, nos permite evitar esta clase de dificultades. Las fórmulas expresivas del ejercicio serían de la forma $[(m \rightarrow c)| v]$ y $[(m| v) \rightarrow (c| v)]$, que también son equivalentes entre sí. Y a diferencia del caso anterior, el valor veritativo de *(m| v)* no cambia sea cual sea el de *v*, como tampoco cambia el de *(c| v)*.

Supongamos ahora que *v* reflejara las convenciones de notación establecidas y no presentara ningún problema, pero que, precisamente bajo esa interpretación y como suele suceder con los modelos, el modelo *m* fuera falso. En tal caso, tanto *(v→ m)* como *(m| v)* serían falsas, por lo que, de seguir con las fórmulas anteriores como representación del resultado del ejercicio, éste carecería de contenido informativo. En efecto, aunque *[(v→ m)→ (v→ c)]* y *[(m| v)→ (c| v)* seguirían siendo formalmente válidas, la falsedad de *(v→ m)* y de *(m| v)* impediría aventurar ningún valor veritativo para *(v→ c)* ni para *(c| v)*. Pero si representáramos el ejercicio mediante expresiones barra de la forma *[(v→ c)| (v→ m)]* o *[(c| v)| (m| v)]*, el problema desaparecería.[66]

En cualquier caso, la cohabitación de las conectivas barra y condicional nos obliga a reiterar sobre la primera de ellas las mismas preguntas que nos planteábamos respecto de la segunda en torno a su capacidad para transmitir la aproximación semántica, y nos invita a preguntarnos por las relaciones lógicas que medien entre ellas, así como por las características de la conectiva barra a la hora de expresar dependencias en comparación con las de la condicional.

Por razones expositivas, vamos a comentar en primer término las relaciones lógicas que median entre ambas.

V.2. Relaciones lógicas entre las conectivas condicional y barra

Es fácil establecer para toda *(e'→ e")* y *(e"| e')* de S^* tales que *e'*, *e"* y *[(e"| e')∧ e"]* también pertenezcan a S^*, que *(e"| e')* Z^*-implica a *(e'→ e")*,[67] por lo que *(e'→ e")R (e"| e')* bajo toda *R* de Z^*.

La conversa no es válida. En su lugar se puede establecer que a) si *(e'→ e")* es verdadera bajo todo preorden de aproximación semántica, *(e"| e')* también lo será; b) por ello, si *(e'→ e")* es verdadera bajo todos esos preórdenes, entonces bajo cada uno de ellos *(e"| e')I (e'→ e")R e°* para toda e° en S^*;[68] y c) si *e'* es verdadera bajo todos los preórdenes de aproximación semántica, *(e'→ e")* será verdadera bajo cada uno de ellos syss lo es también *(e"| e')]*.

Análogamente, se puede establecer fácilmente 1°) que para toda *(e"| e')* y *[(e'→ e")∧ e']* pertenecientes a S^* y tales que *e'*, *e"*, *(e'→ e")* y *[(e"| e')∧ e']* (o *[(e'| e")∧ e"]*) también pertenezcan a S^*, *[(e'→ e")∧ e']* Z^*-implica a *(e"| e')*; y 2°) que para toda *[(e'→ e")∧ e']* y *[(e"| e')∧ e']* pertenecientes a S^* y tales que *e'*, *e"*, *(e'→ e")*, *(e"| e')*, *{[e'| (e'→ e")]∧ (e'→ e")}* (o *{[(e'→ e")| e']∧ e'}*) y *{[e'| (e"| e')]∧ (e"| e')}* (o *{[(e"| e')| e']∧ e'}*) también pertenezcan a S^*, *[(e'→ e")∧ e']* y *[(e"| e')∧ e']* son Z^*-equivalentes.

Por último, todo par de proposiciones de la forma $(e''| e')$ y $[(e' \rightarrow e'')| e']$ también son equivalentes, si $(e| e')$ es también una proposición perteneciente a S^*.[69]

V.3. Transmisión del nivel de aproximación semántica a través de las conectivas barra y condicional

Sobre este asunto, conviene empezar por tener en cuenta que $[(e' \rightarrow e'') \wedge e']$ implica lógicamente e'' y que, de manera análoga, $[(e''| e') \wedge e']$ Z^*-implica a e''. Por ello, bajo cualquier preorden de aproximación semántica R sucederá que $e'' R [(e' \rightarrow e'') \wedge e']$ y, análogamente, que $e'' R [(e''| e') \wedge e']$.[70] Pero el paralelismo se quiebra porque $[(e''| e') \wedge e']$ está siempre adosada, mientras que $[(e' \rightarrow e'') \wedge e']$ puede no estarlo si no es verdadera.

Detallando las cosas, bajo todo preorden R de aproximación semántica, y para toda e^*, e°, e^b, e^d, e', e'' en S^* tales que $e^b = (e''| e')$, $e^d = (e' \rightarrow e'')$, $e^* = (e^b \wedge e')$ y $e^\circ = (e^d \wedge e')$, y tales que $(e''| \neg e')$, $(e'| \neg e'')$, $(e^d | e')$, $(e'| e^d)$, $[(e^d | e') \wedge e']$ y $[(e'| e^d) \wedge e^d]$ pertenecen también a S^*,

1°) siempre e'' R e^* y e'' R e°;

1°.1) también, e^* estará siempre adosada, de manera que a) si $e^b R\, e'$ entonces $e'' R\, e' I\, e^*$, y b) si $e' R\, e^b$ entonces $e'' R\, e^b I\, e^*$;

1°.2) en cambio, puede suceder que e° no esté adosada a e^d ni a e', salvo que e^d, e' y, por lo tanto, e° sean verdaderas; en concreto,

2°.1) si e' y e^d son verdaderas y $e^d R\, e'$: en general, e'' será verdadera y $e^d R\, e'' R\, e' I\, e^\circ$; y si $e'' I\, (e''| \neg e')$ o $e'' R\, (\neg e'| \neg e'')$, $e^d I\, e'' R\, e' I\, e^\circ$;

2°.2) si e' y e^d son verdaderas y $e' R\, e^d$: e'' será verdadera y $e' R\, e'' I\, e^d I\, e^\circ$;

3°.1) si e' es verdadera y e^d es falsa: en general, e° será falsa y $e' P\, e^d R\, e'' R\, e^\circ$; si $e'' R \neg e'$, entonces $e' P\, e^d I\, e'' R\, e^\circ$; y si $\neg e' P\, e''$, entonces $e' P\, e^d I \neg e' P\, e'' R\, e^\circ$;

3°.2) y si $e^d I\, (e^d | e')$ o $(e'| e^d) R\, e^d$: $e' P\, e^d I\, e'' I\, e^\circ$ y $e'' R \neg e'$;[71]

4°.1) si e' es falsa y e^d es verdadera:[72] en general, e° será falsa, $e^d R\, e'' R\, e^\circ$ y $e^d P\, e' R\, e^\circ$; y si $e' I\, (e'| e^d)$ y $(e^d | e') R\, e'$, entonces $e^d R\, e'' R\, e^\circ I\, e'$ y $e^d P\, e' I\, e^\circ$;

4°.2) si $\neg e' I\, e''$ y $\neg e' R\, (e''| e')$ [y, por simetría, $(\neg e''| e') R\, e'$], o si $\neg e' I\, e''$ y $e'' R\, (\neg e'| \neg e'')$ [y $(e'| \neg e'') R \neg e''$], entonces $e^d I\, e'' I \neg e' P\, e^\circ$ y $e^d P\, e' R\, e^\circ$; y si $e' I\, (e'| e^d)$ y $(e^d| e') R\, e'$, entonces $e^d I\, e'' I \neg e' P\, e^\circ I\, e'$ y $e^d P\, e' I\, e^\circ$;

4°.3) si $\neg e'P\ e''$, $\neg e'I\ (\neg e'|\neg e'')\ [(e'|\neg e'')I\ e']$, o $\neg e'R\ (e''|\ e')\ [(\neg e''|\ e')R\ e']$, entonces $e^d\ I\neg e'P\ e''P\ e^{\circ}$ y $e^dP\ e'R\ e^{\circ}$; y si $e'I\ (e'|\ e^d)$ y $(e^d\ |\ e')R\ e'$, entonces $e^dI\neg e'P\ e''P\ e^{\circ}\ I\ e'$ y $e^dP\ e'I\ e^{\circ}$;

4°.4) y si $e''P\neg e'$, $e''I\ (e''|\neg e')\ [(e''|\neg e')I\neg e'']$, o $e''R\ (\neg e'|\neg e'')\ [(e'|\neg e'')R\neg e'']$, entonces $e^dI\ e''P\neg e'P\ e^{\circ}$ y $e^dP\ e'R\ e^{\circ}$; y si $e'I\ (e'|\ e^d)$ y $(e^d\ |\ e')R\ e'$, entonces $e^dI\ e''P\neg e'P\ e^{\circ}I\ e'$ y $e^dP\ e'I\ e^{\circ}$.

Por otro lado, sustituyendo en la lista anterior R por RX, P por PX e I por IX, se obtiene la lista paralela pertinente cuando, en lugar de un preorden de aproximación semántica, lo que se considera una es distribución de probabilidad entre los preórdenes de esa clase.

V.4. Propiedades especialmente asociadas con la conectiva barra

Como se parecen tanto en cuanto a su sentido, las conectivas condicional y barra comparten muchas propiedades.[73] En este apartado se muestra cómo la conectiva barra satisface la transcripción de algunas de las leyes lógicas más familiares que cumple el functor condicional.[74] Con ello se pretende ilustrar dos cosas: 1°) la semejanza de comportamiento entre una y otra conectiva en cuanto a las leyes lógicas vinculadas con la idea de dependencia, y 2°) cómo pueden obtenerse las demostraciones pertinentes en la propuesta que se ofrece en estas páginas.

Ha quedado ya indicado anteriormente que bajo todo preorden de aproximación semántica, $e''R\ [(e''|\ e')\wedge\ e']$, cumpliéndose así la propiedad que transcribe el clásico *modus ponens* a términos de la conectiva barra.

En cuanto al *modus tollens*, se puede demostrar de una forma similar para toda e' y $[(e''|e')\wedge\ \wedge\neg e'']$ de S^* tales que e'' y $(e''|\ e')$ también pertenecen a S^*, que $\neg e'R\ [(e''|\ e')\wedge\neg e'']$ bajo toda R perteneciente a Z^*.[75]

Y aunque se requiera una argumentación algo más elaborada, también se puede establecer la adaptación para la conectiva barra de la ley de contraposición: para toda $(e''|\ e')$ y $(\neg e'|\neg e'')$ en S^* tales que e', e'', $[(e''|\ e')\wedge\ (e'|\neg e'')]$ y $[(\neg e'|\neg e'')\wedge\ (\neg e''|\ e')]$ son también proposiciones pertenecientes a S^*, $(e''|\ e')I\ (\neg e'|\neg e'')$ bajo todo preorden R.[76]

En cuanto a la transitividad de las relaciones de dependencia expresadas mediante la conectiva barra, se puede probar que para toda $[(e^2|\ e^1)\wedge\ (e^3|\ e^2)]$ y $(e^3|\ e^1)$ de S^* tales que e^1, e^2, e^3, $(e^2|\ e^1)$, $(e^3|\ e^2)$ y $\{[(e^2|\ e^1)\wedge\ (e^3|\ e^2)]\wedge\neg(e^3|\ e^1)\}$ también pertenezcan a S^*, $(e^3|\ e^1)R\ [(e^2|\ e^1)\wedge\ (e^3|\ e^2)]$ bajo cualquier R.[77]

También puede demostrarse que si se afirma una dependencia como la expresada mediante la frase $(e''|\ e')$, uno queda comprometido a mantener la dependencia de e'' respecto de cualquier conjunción de la que e' sea miembro. Concretamente, para toda $(e^3|\ e^1)$ y $[e^3|\ (e^1\wedge\ e^2)]$ en S^* tales que e^1, e^2, e^3,

$(e^1 \wedge e^2)$ y $\{(e^3| e^1) \wedge [\neg e^3| (e^1 \wedge e^2)]\} \in S^*$, $[e^3| (e^1 \wedge e^2)]R (e^3| e^1)$ bajo toda R.[78]

Argumentos parecidos permiten establecer las propiedades análogas referentes a la disyunción y al condicional:

a) para toda $(e^3| e^1)$ y $[e^3| (e^1 \vee e^2)]$ de S^* tales que e^1, e^2, e^3, $(e^1 \vee e^2)$ y $\{[e^3| (e^1 \vee e^2)] \wedge (\neg e^3| e^1)\}$ también pertenezcan a S^*, $(e^3| e^1)R [e^3| (e^1 \vee e^2)]$ bajo toda R;

b.1) para toda $(e^3| \neg e^1)$ y $[e^3| (e^1 \rightarrow e^2)]$ en S^* tales que e^1, e^2, e^3, $(e^1 \rightarrow e^2)$ y $\{[e^3| (e^1 \rightarrow e^2)] \wedge \wedge (\neg e^3| \neg e^1)\}$también pertenezcan a S^*, $(e^3| \neg e^1)R [e^3| (e^1 \rightarrow e^2)]$ bajo cualquier R; y

b.2) para toda $(e^3| e^2)$ y $[e^3| (e^1 \rightarrow e^2)]$ en S^* tales que e^1, e^2, e^3, $(e^1 \rightarrow e^2)$ y $\{[e^3| (e^1 \rightarrow e^2)] \wedge (e^3| e^2)\}$ también estén en S^*, $(e^3| e^2)R [e^3| (e^1 \rightarrow e^2)]$ bajo cualquier R.

Asimismo, la conectiva barra también cumple las adaptaciones de las leyes de importación y exportación de la condicional: para toda $[e^3| (e^1 \wedge e^2)]$ y $[(e^3| e^2) | e^1]$ en S^* tales que e^1, e^2, e^3, $(e^1 \wedge e^2)$, $(e^3| e^2)$, $\{ e^3| (e^1 \wedge e^2)] \wedge [(\neg e^3| e^2)| e^1]\}$ y $\{[(e^3| e^2)| e^1] \wedge [\neg e^3| (e^1 \wedge e^2)]\}$ también estén en S^*, $[e^3| (e^1 \wedge e^2)]I [(e^3| e^2)| e^1]$ bajo cualquier R.[79]

Para cerrar este apartado y como ilustración de la validez de propiedades todavía más elementales que las comentadas hasta aquí, adviértase que la condición de estabilidad veritativa garantiza que toda proposición cerrada de la forma $(e'| e')$ sea, bajo toda R de Z^*, tanto o más lejana de la falsedad que cualquier otra proposición en S^*.

Análogamente, también se cumple para toda $(e''| e')$ y $[(e''| e')| e']$ tales que e', e'', $\{(e''| e') \wedge [(\neg e''| e')| e']\}$ y $\{[(\neg e''| e')| e'] \wedge (e''| e')\}$ también estén en S^*, que $(e''| e')I [(e''| e')| e']$ para toda R [80], condición de la que se desprende que bajo toda R y para toda $(e''| e')$ y $[(e' \rightarrow e'')| e']$ tales que e', e'', $(e' \rightarrow e'')$, $\{[(e' \rightarrow e'')| e'] \wedge (\neg e''| e')\}$ y $\{(e''| e') \wedge [(e' \rightarrow e'')| e']\}$ también estén en S^*, $(e''| e')I [(e' \rightarrow e'')| e']$.

VI. Resumen

La pieza fundamental de este trabajo son los preórdenes de aproximación semántica, que se definen (para un espacio proposicional dado) como las relaciones binarias reflexivas, transitivas y completas que satisfacen una serie de condiciones elementales de naturaleza lógica o gramatical (condición de adaptación del principio de *tertio excluso*, de superioridad por implicación, de implicación por instanciación, de equivalencia por clausura, de equivalencia de las expresiones paracompuestas, y de estabilidad veritativa) o adaptadas del

Cálculo de Probabilidades (condición de adosamiento, y adaptación de la regla de la multiplicación).

Con los preórdenes de aproximación semántica se pretende representar las comparaciones hechas entre enunciados o proposiciones por su mayor o menor aproximación a la verdad (o su menor o mayor lejanía de la falsedad) sin mezclar la dimensión de aproximación con ninguna otra, y en particular, sin mezclarla con la dimensión del contenido, como hace la noción popperiana de verosimilitud y los planteamientos inspirados en ella.

Un preorden de aproximación semántica podría representar el punto de vista de un agente si éste tuviese completamente resueltas todas las comparaciones entre cada dos enunciados del espacio proposicional considerado. Como no es de esperar que esto sea así por lo general, se propone representar los puntos de vista de los agentes mediante distribuciones de probabilidad entre los preórdenes aludidos.

En cuanto a los resultados mediante los que se ilustra el rendimiento de la propuesta, se presentan en dos grandes grupos.

Los del primero versan sobre las relaciones entre los niveles de aproximación semántica de las proposiciones compuestas (y cerradas) y los de sus miembros, y sobre las que median entre los niveles de las proposiciones abiertas y de las cerradas y cuantificadas, y los de las versiones instanciadas de unas y de otras. Una conjunción, por ejemplo, será, a lo sumo, semánticamente tan aproximada como el de menos aproximado de sus dos miembros, siendo tan aproximada como él cuando éstos sean verdaderos. Una disyunción, por su parte, será, como mínimo, semánticamente tan aproximada como el más aproximado de sus miembros, siendo tan aproximada como él cuando estos dos sean falsos.

Los resultados del segundo grupo tratan, sobre todo, de establecer si la afirmación de una dependencia entre acontecimientos mediante un condicional, por ejemplo, transmite el nivel de aproximación del antecedente al consecuente, o si transmite el nivel de la proposición condicionante a la condicionada cuando la afirmación se sirve de la conectiva barra.

Los hechos fundamentales al efecto son que $[(e' \rightarrow e'') \wedge e']$ implica lógicamente e'' y que, de manera análoga, $[(e'' | e') \wedge e']$ Z^*-implica a e''. Por ello, bajo cualquier preorden de aproximación semántica sucederá que e'' será semánticamente tan aproximada, por lo menos, como $[(e' \rightarrow e'') \wedge e']$ y, análogamente, que e'' será semánticamente tan aproximada, por lo menos, como $[(e'' | e') \wedge e']$.[81] Pero este paralelismo se rompe porque $[(e'' | e') \wedge e']$ está siempre adosada, y por lo tanto e'' será tan aproximada por lo menos como $(e'' | e')$ o como e', mientras que no se puede decir lo mismo respecto de $[(e' \rightarrow e'') \wedge e']$, salvo que sea verdadera.

En torno a la capacidad de la conectiva barra para expresar relaciones de dependencia, en el último apartado se ilustra cómo satisface algunas propiedades familiares de la conectiva condicional. Y sobre la comparación entre ambas conectivas, lo más señalado es que para cualesquiera proposiciones e' y e'', la frase condicional formada por ellas estará implicada y, por ello, será tan aproximada, por lo menos, como la proposición barra formada por esas mismas proposiciones en el mismo orden, mientras que la conversa no es válida.

Notas

† Quede constancia de mi agradecimiento a Jesús Zamora Bonilla por la atención que ha dedicado a este trabajo, y a los dos evaluadores anónimos que lo han informado, por sus valiosos comentarios.

1 García-Bermejo Ochoa, Juan Carlos: 1990, *Aproximación, Probabilidad y Relaciones de Confianza*, Madrid, Alianza Editorial; e *Introducción a las Comparaciones de Confianza*, Madrid, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1994.

2 La primera parte de la tesis doctoral de Jesús P. Zamora Bonilla, *La Verosimilitud de las Teorías Científicas* (Universidad Autónoma de Madrid, Fac. de Fª y Letras, 1992), constituye un magnífico panorama de los desarrollos que tienen su origen en la idea popperiana de verosimilitud. Cuando aparezca este artículo, habrá sido publicada seguramente dicha primera parte por Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid bajo el título *Mentiras a medias*.

3 ¿Qué sentido puede tener la búsqueda y construcción de modelos teóricos que constituyan "buenas aproximaciones" si las consecuencias, previsiones y predicciones que puedan obtenerse a partir de ellos no tienen garantizado siquiera ese nivel? *Cfr.* Simon, Herbert: 1963, 'Problems of Methodology - Discussion', *The American Economic Review: Papers & Proceedings*, vol. 53, 229-31.

4 O por lo menos, de orientación diferente a lo que es usual en esos planteamientos.

5 Puede verse una lista de requisitos básicos impuestos a las definiciones aceptables de verosimilitud en Niiniluoto, Y.: 1986, *Truthlikeness*, Dordrecht, D. Reidel, pp. 232-33. No todos los autores están de acuerdo con cada uno de esos requisitos. Véase, por ejemplo, Oddie, Graham: 1986, *Likeness to the Truth*, Dordrecht, D. Reidel, pp. 169-70; y Tichy, Pavel: 1974, 'On Popper's Definition of Verosimilitude', *The British Journal for the Philosophy of Science* 25, 155-60.

6 Dicho sea de paso, cuando se está pensando en modelos, y no en teorías, resulta más fácil y natural desligar el aspecto "aproximación a la verdad" del aspecto "contenido", en la misma medida en que resulta más difícil acotar el dominio que determine "la verdad completa" a la que haya que aproximarse.

7 Véase la nota 2ª.

8 El artículo en el que Moulines presenta inicialmente su propuesta se titula 'Approximate Application of Empirical Theories: A General Explication', *Erkenntnis* 10, nº 2, Julio de 1976. En la sección 7ª del capítulo segundo de su libro *Exploraciones metacientíficas. Estructura, desarrollo y contenido de la ciencia*, Madrid, Alianza Editorial, 1982, ofrece una presentación más accesible del planteamiento. Asimismo, el capítulo VII de *An Architectonic for Science. The Structuralist Program* (de W. Balzer, C.U. Moulines y J. Sneed. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1987) está enteramente dedicado al tema. Por último, una descripción muy condensada de la propuesta originaria de Moulines puede encontrarse en García-Bermejo, Juan Carlos: 1981, 'Nota sobre 'Aplicación Aproximada de las Teorías Científicas', *Teorema* Vol XI/I, 79-87.

9 Hablaremos de preórdenes de aproximación semántica en lugar de hacerlo de preórdenes de aproximación a la verdad y de lejanía de la falsedad, para abreviar.

10 Por principio de complementariedad entendemos la condición establecida en el Cálculo de Probabilidades según la cual la probabilidad de la negación de una proposición (del complemento de un conjunto) es igual a uno menos la probabilidad de la proposición negada (de dicho conjunto).

11 En principio, la introducción de la conectiva barra y las complicaciones que origina no son más que el resultado directo de enfocar el tratamiento de las relaciones de aproximación a la verdad recurriendo a propiedades establecidas en el Cálculo de Probabilidades. Sin embargo, su alcance desborda este origen instrumental, pues contribuye a poner de relieve la significación de dicha conectiva para el análisis metodológico y su idoneidad de cara a la formalización de los condicionales contrafácticos. (Puede verse la sección primera del capítulo tercero de *Aproximación, Probabilidad y Relaciones de Confianza*, o las secciones primera y sexta del capítulo décimo de *Introducción a las Comparaciones de Confianza*, libros ya citados en la nota 2ª. A su vez, en el apartado inicial de la sección quinta de este mismo artículo se hacen unos comentarios breves sobre las ventajas que ofrece la conectiva barra para formalizar las formulaciones teóricas).

12 Sería más correcto hablar de sus instancias y demás versiones instanciadas, cuyo nivel de aproximación es, por otra parte, el elemento de juicio básico cuando se evalúa el nivel de aproximación a la verdad de una formulación teórica. Véase la nota 23.

13 Con respecto al concepto de verosimilitud, y, por ejemplo, según una conocida propuesta de David Miller ('Popper's Qualitative Theory of Verosimilitude', *The British Journal for the Philosophy of Science* 25, 1974, 166-77), si el enunciado e' es verdadero, entonces $(e'' \wedge e')$ es al menos tan verosímil como e'', sea cual sea ese enunciado e''.

14 Como hemos defendido en otros sitios, una comparación de dos proposiciones falsas según su mayor o menor aproximación a la verdad debe resolverse igual que si se tuviera que responder a la pregunta, contrafáctica, de cuál de esas dos proposiciones resultaría ser verdadera si pudiera o tuviera que serlo alguna de las dos. Por ejemplo, sabemos que el índice de precios al consumo en España no alcanzó a finales de 1995 una subida anual del 20% ni del 300%. Pero alguien nos podría preguntar por cuál de esas dos eventualidades pensaríamos que habría tenido lugar en el caso, imposible, de que hubiera sido cierta alguna de ellas. Al responder que la primera, la que sitúa la subida en el 20%, estaríamos poniendo de manifiesto que esa opción está más cerca de ser verdadera que la otra. Es como si después de una carrera de caballos ganada por el número 1, que entró seguido del nº 12, nos preguntaran por cuál apostaríamos como ganador en el caso de que la carrera se iniciara de nuevo y sólo participaran el mencionado número 12 y el caballo que hubiera llegado a la meta en el último lugar.

15 En otros casos, pueden ponerse de relieve con más nitidez otros aspectos. Por ejemplo, parece natural aceptar «2+2= 4» como una frase que está más lejos de ser falsa que la afirmación de que una caja con veinte aspirinas cuesta 232 pesetas, aunque en este caso sea el carácter necesario de la primera proposición frente al carácter contingente de la segunda lo que motivaría esa forma de resolver la comparación. De una manera análoga, todos confiamos más en que al calentar una bola de cobre, ésta se expanda, que en que suenen las señales horarias en una emisora radiofónica cualquiera al dar las dos de la tarde.

Aunque no vayamos a extendernos sobre el asunto, quede por lo menos apuntado que las comparaciones entre proposiciones verdaderas por su mayor o menor lejanía a la falsedad pueden coincidir en gran medida, si es que no lo hacen siempre, con las comparaciones de carácter modal entre esas mismas proposiciones, planteadas según su mayor o menor grado de necesidad, o su menor o mayor grado de accidentalidad o contingencia.

16 También diremos, para abreviar, que e' es semánticamente más aproximada que e'', o que es semánticamente tan aproximada como ella.

17 La relación P será el conjunto de todos los pares ordenados formados por elementos de S^* cuya primera componente se aproxima más a la verdad o se aleja más de la falsedad que la segunda.

18 La relación I será el conjunto de todos los pares ordenados formados por elementos de S^* cuyas componentes se aproximan a la verdad o se alejan de la falsedad en la misma medida.

19 La relación R será el conjunto de todos los pares ordenados formados por elementos de S^* cuya primera componente es, por lo menos, tan aproximada a la verdad o tan lejana de la falsedad como la segunda.

20 Abreviaremos la expresión "si y sólo si" de esta manera.

21 Recuérdese que una relación binaria B definida en un conjunto Ω: 1º) es reflexiva en Ω syss para todo $x \in \Omega$, xBx; 2º) es irreflexiva en Ω syss para todo $x \in \Omega$, no xBx; 3º) es simétrica en Ω syss para todo $x, y \in \Omega$, si xBy entonces yBx; 4º) es asimétrica en Ω syss para todo $x, y \in \Omega$, si xBy entonces no yBx; 5º) es transitiva en Ω syss para todo $x, y, z \in \Omega$, si xBy y yBz, entonces xBz; y 6º) es (débilmente) completa (o débilmente conexa) en Ω syss para todo $x, y \in \Omega$ tales que $x \neq y$, xBy o yBx.

22 Análogamente, de las dos condiciones estipuladas se desprende para toda e^1, e^2, e^3 y e^4 en S^* tales que una de las dos primeras sea negación de la otra, ocurriendo lo propio entre la tercera y la cuarta, que si e^1 es verdadera bajo R y e^3 es falsa bajo ese mismo preorden, entonces $e^1 P\, e^3$. Nótese que si e^1 es verdadera, e^2 será falsa y $e^1 P\, e^2$; y si e^3 es falsa, e^4 será verdadera y $e^4 P\, e^3$. Si sucediera que $e^2 R e^3$, por transitividad ocurriría que $e^1 P\, e^3$. Supongamos, por lo tanto, que $e^3 P\, e^2$; en virtud de la condición de simetría vertical sucedería que $e^1 P\, e^4$, y como por hipótesis $e^4 P\, e^3$, por transitividad $e^1 P\, e^3$.

Por el contrario, si e' y e'' son las dos verdaderas o las dos falsas, puede ocurrir entre ellas cualquier cosa, es decir, puede ocurrir que $e' P\, e''$, o que $e' I\, e''$, o que $e'' P\, e'$.

23 Por ser, por ejemplo, componentes inmediatas o mediatas de alguna proposición tenida en cuenta expresamente.

24 De ahora en adelante, para simplificar las cosas, las expresiones de la forma «$\neg e$» designarán la negación de e si dicha negación es también una proposición perteneciente a S^*; en caso contrario, designarán la proposición que se obtiene al eliminar de e el primer signo de negación que aparezca en ella.

25 Como ya hemos propuesto otras veces, llamaremos "proposición (expresión) barra" a toda poposición (expresión) compuesta a base de dicha conectiva, es decir, a toda proposición (expresión) cuya conectiva principal sea el símbolo barra. Dada una proposición barra como $(e'|e'')$, conoceremos a e'' como la frase condicionante, y a e' como la condicionada.

Quedan admitidas expresiones barra de cualquier número finito de pisos, o dicho con mayor rigor, de condicionante y condicionada que pueden ser ellas mismas expresiones barra o tener componentes que lo sean. Por eso, también puede sernos útil disponer de la noción de presupuesto caracterizada de esta manera: cuando una expresión barra sea de la forma $e^* = [((.(((.((e^\circ|e^n)|e^{n-1})|..)|e^{k+1})|e^k)|..)e^2)|e^1]$, $n \geq 1$, diremos de cualquier e^j, $1 \leq j \leq k$, que es un presupuesto de $((.((e^\circ|e^n)|e^{n-1})|..)|e^{k+1})$ en e^*; y diremos de cualquier e^i, $1 \leq i \leq n$, que es un presupuesto de e° en e^*, o simplemente, que es un presupuesto de e^*.

Sobre la introducción en la propuesta de las proposiciones barra, puede verse el capítulo X y las secciones iniciales de los tres capítulos siguientes del trabajo ya citado *Introducción a las Comparaciones de Confianza*.

26 La posibilidad de cuantificar variables no la supondremos restringida a la cuantificación de variables individuales.

27 Eso es lo que suele suceder, por ejemplo, con los modelos teóricos. Sea e^{m}, por ejemplo, un sistema de ecuaciones del que se obtienen una serie de conclusiones como e^1, e^2, e^3,... Los teoremas correspondientes se obtienen no pueden ser formalizados lógicamente como los condicionales cuyo antecedente es la clausura universal de e^{m} y cuyo consecuente es la clausura también universal de la conclusión respectiva. Por el contrario, deben ser reconstruidos como las clausuras universales de los condicionales formados por e^m como antecedente y e^1, e^2, e^3,... como consecuentes. Por ello, los modelos serían expresiones abiertas pero no proposiciones propiamente dichas. Lo serían en cambio 1º) los condicionales en los que figuran como antecedentes, siendo los consecuentes las conclusiones obtenidas a partir de ellos; 2º) las clausuras universales de dichos condicionales; 3º) las versiones instanciadas de esos mismos condicionales; y 4º) las versiones instanciadas de los propios modelos (y de las conclusiones).

28 Se podría reforzar este requisito de la manera siguiente: si e'' no pertenece a S^* y es, por lo tanto, abierta, habrá alguna versión instanciada suya, algún espacio proposicional que, además de incluir S^*, contuviera esa versión, y algún preorden semántico R definido en ese nuevo espacio bajo el que dicha versión sea verdadera.

29 Algo similar pasa con el concepto de validez lógica. Por eso, diremos que e° es lógicamente válida en el marco de los preórdenes de aproximación semántica, o más brevemente, que e° es Z^*-válida, siempre y cuando 1º) e° sea válida en el sentido lógico habitual, o 2º) e° sea verdadera bajo todo preorden semántico de Z^*.

30 Nótese que esta condición asegura que 1º) si e' es verdadera bajo todo preorden R de Z^*, $e' R\, e^\circ$ para toda e° perteneciente a S^*; y que 2º) si e'' es falsa bajo todo preorden R de Z^*, $e^\circ R\, e'$ para toda e° perteneciente a S^*.

Para comprobarlo, basta advertir que según la noción propuesta e implicación, toda e° Z^*-implica e', y que e'' lo hace con toda e°.

Por otro lado, nótese que la condición puede canalizar la función de control y revisión de los juicios de aproximación a la verdad, de una manera parecida a la forma en la que el *modus tollens* lo hace respecto de los juicios sobre la verdad y la falsedad de las proposiciones. Si un agente, por ejemplo, piensa que una proposición dada está muy próxima a la verdad, pero infiere lógicamente de ella otra proposición de la que piensa que estaría bastante más alejada de la verdad que la primera, la condición anterior le obliga a revisar su juicio de aproximación sobre ésta.

31 En realidad, la condición debería establecer de una manera más general que para cualesquiera e', e'', e^1, e^2,.., e^n de S^*, donde n > 1,

1º) las expresiones siguientes son Z^*-equivalentes: $[(..((\neg e' | e^1) | e^2) | ..) | e^n]$, $[(..(\neg (e' | e^1) | e^2) | ..) | e^n]$, $[(..\neg ((e' | e^1) | e^2) | ..) | e^n]$, $[\neg (..((e' | e^1) | e^2) | ..) | e^n]$, y $\neg [(..((e' | e^1) | e^2) | ..) | e^n]$;

2º) y para toda conectiva diádica convencional, $\$ = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, pasa lo mismo con las expresiones $[(.((.(((e' \$ e'') | e^1) | e^2) | ..) | e^i) | ..) | e^n]$, y $\{(.([((.((e' | e^1) | e^2) | .) | e^i) \$ ((.((e'' | e^1) | e^2) | .) | e^i)] | e^{i+1}) | .) | e^n)\}$, como también sucede con cada una de ellas y con la expresión $\{[(.((.((e' | e^1) | e^2) | .) | e^i) | .) | e^n] \$ [(.((.((e'' | e^1) | e^2) | .) | e^i) | .) | e^n]\}$.

32 Sobre la posibilidad y el sentido de utilizar la conectiva barra aunque la condicionante sea falsa, véase la segunda parte del capítulo XIII* de *Introducción a las Comparaciones de Confianza*, ya citado.

33 Recuérdese que como $(e' | e'')$ es una proposición, por hipótesis habrá al menos un preorden de aproximación semántica bajo el que e'' será verdadera.

34 Nótese que de esta condición se desprende que si es verdadera bajo todo preorden de Z^* bajo el que e' sea verdadera, $(e''|e')$ será verdadera bajo todos los preórdenes de Z^*. Supóngase, en efecto, que $(e''|e')$ fuera falsa bajo algún preorden. Bajo ese mismo preorden, por consiguiente, $(\neg e''|e')$ sería verdadera, y habría algún preorden bajo el cual $(\neg e''|e')$ y e' serían verdaderas, en contradicción con la hipótesis.

Por otro lado, sería plausible acompañar la condición anterior de la exigencia a todas las distribuciones admisibles de probabilidad sobre el conjunto de los preórdenes de aproximación semántica, de que si $1 > P[e'] > 0$, entonces $p([e''|e'] \| [e']) = p([e''|e'] \| [e' \vee \neg e']) = p([e''|e'])$, sobre todo teniendo en cuenta que es equivalente a la condición: si $p[e'] > 0$, entonces $p[e''|e'] = p([e''] \| [e'])$.

Para comprobar la primera parte de la equivalencia, nótese que $p([e''] \| [e']) = p([e'']\acute{}[e'])/p[e'] = p[e' \wedge e''])/p[e'] = p[(e''|e') \wedge e']/p[e'] = p[(e''|e')\acute{}[e']/p[e'] = p([e''|e'] \| [e'])$. Por ello, si $p[e'] = 1$, o si $1 > p[e'] > 0$ y $p([e''|e'] \| [e']) = p([e''|e'])$, entonces $p([e''] \| [e']) = p[e''|e']$.

Supóngase ahora que si $p[e'] > 0$ entonces $p[e''|e'] = p([e''] \| [e'])$. Ya hemos establecido que $p([e''] \| [e']) = p([e''|e'] \| [e'])$. Por lo tanto, $p[e''|e'] = p([e''|e'] \| [e'])$.

35 Como un agente tiene una capacidad limitada para realizar y plantearse comparaciones de aproximación, viéndose además obligado a repensar conjuntamente las comparaciones realizadas para ejecutar y comprobar el cumplimiento de la transitividad, podría suponerse que S^* es finito. Y si S^* es finito, no hay mayor problema para representar el punto de vista del agente mediante una distribución de probabilidad sobre los preórdenes de aproximación semántica. Nosotros no vamos a llegar a tanto, por lo que ese modo de representar el punto de vista del agente puede presuponer por ejemplo que, si S^* no es finito, lo será al menos el número de comparaciones que el agente se plantee pero no termine de resolver completamente durante el periodo analizado. En cualquier caso, se trata de movernos en el planteamiento más sencillo.

Por otra parte, los enfoques al uso de las preferencias estocásticas operan de una manera similar. Véase, por ejemplo, Barberá, S.: 1990, 'Rationalizable Stochastic Choice over Restricted Domains' (in Chipman, McFadden, Richter (comps.): *Preferences, Uncertainty and Optimality: Essays In Honor of Leonid Hurwicz*, Westview Press, pp. 203-217); o Fishburn, P.: 1992, 'Stochastic Utility' (mimeo).

36 *Sp* es el subconjunto (finito) de Z^* formado por todos aquellos preórdenes a los que p asigna una probabilidad positiva.

37 Es decir, a) $e'PX\, e''$ syss $e'RX\, e''$ y no $e''RX\, e'$, mientras que b) $e'IX\, e''$ syss $e'RX\, e''$ y $e''RX\, e'$.

38 También se puede definir el juego siguiente, que de todas maneras no utilizaremos por tener un contenido informativo más pobre: a) $e'PU\, e''$, syss, para toda R en Sp, $e'P\, e''$; b) $e'IU\, e''$, syss, para toda R en Sp, $e'I\, e''$; y c) $e'RU\, e''$, syss, $e'PU\, e''$ o $e'IU\, e''$.

Nótese que a) si $e'RU\, e''$ entonces $e''RX\, e'$, pero que la convesa no es válida; análogamente, b) si $e'PU\, e''$ entonces $e''PX\, e'$, pero la conversa tampoco es válida; en cambio, c) $e'IU\, e''$ syss $e'IX\, e''$.

Por otro lado, para distinguir las comparaciones recogidas en los preórdenes de las inducidas por las distribuciones, leeremos así las relaciones definidas en el texto: a) $e'PX\, e''$: bajo p, e' se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad más que e''; b) $e'IX\, e''$: bajo p, e' se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad tanto como e''; y c) $e'RX\, e''$: e' es, bajo p, por lo menos tan aproximada a la verdad o tan lejana a la falsedad como e''.

39 Es decir, *RX* es reflexiva y transitiva, *PX* es irreflexiva, asimétrica y transitiva, e *IX* es reflexiva, simétrica y transitiva. Además, *e'RX e"* syss *e'PX e"* o *e'IX e"*.

40 Sean *e'* y *e"* dos proposiciones tales que una de ellas sea negación de la otra. La proposición *e'* será verdadera bajo *RX* cuando *e'PX e"* (es decir, cuando sea verdadera bajo todo preorden de *Sp*), falsa cuando *e"PX e'* (es decir, cuando lo sea en todo preorden de *Sp*), y no será verdadera ni falsa cuando cuando no suceda que *e'RX e"* ni que *e"RX e'* (es decir, cuando sea verdadera bajo algunos preórdenes de *Sp* y falsa en otros, pudiendo ser más o menos probable).

41 Esas expectativas pueden resumirse también mediante un juego de relaciones binarias como los que ya conocemos. Para ello, podemos convenir en designar por *[e'(>)e"]* el conjunto de todos los preórdenes *R* de Z^* tales que *e'P e"*; por *[e'(=)e"]* el conjunto de todos los preórdenes *R'* de Z^* tales que *e'I'e"*; y por *[e'(≥)e"]* el conjunto de todos los preórdenes *R"* de Z^* tales que *e'R"e"*. Con ello, podemos definir un juego de relaciones como el formado por *RT*, *PT* e *IT* de la manera siguiente:

1º) *e'PT e"* (es decir, *e'* es, bajo *p*, tentativamente más aproximada a la verdad o más lejana de la falsedad que *e"*), siempre y cuando, a) *p[e'(≥) e"]* < 1, y b) *p[e'(≥) e"]* > *p[e"(≥) e']* (donde *p*[e^1(≥) e^2] es la probabilidad del conjunto [e^1(≥) e^2]);

2º) *e'IT e"* (es decir, *e'* es, bajo *p*, tentativamente tan aproximada a la verdad o tan lejana de la falsedad como *e"*), siempre y cuando, a) *p[e'(≥) e"]*< 1, b) *p[e'(=) e"]*< 1, y c) *p[e'(≥) e"]* = *p[e"(≥) e']*; y

3º) *e'RT e"* (es decir, *e'* es, bajo *p*, tentativamente tan aproximada o más a la verdad, o tan lejana o más de la falsedad que *e"*), siempre y cuando, *e'PT e"* o *e'IT e"*.

Se advierte inmediatamente que *IT* es reflexiva y simétrica, y que *PT* es irreflexiva y asimétrica. Asimismo, es importante tener en cuenta que ninguna de las tres es (necesariamente) transitiva. En cambio, se cumple que 1º) si $e^1PX\,e^2$ y $e^2PT\,e^3$, o si $e^1PT\,e^2$ y $e^2PX\,e^3$, o si $e^1IX\,e^2$ y $e^2PT\,e^3$, o si $e^1PT\,e^2$ y $e^2IX\,e^3$, o si $e^1PX\,e^2$ y $e^2IT\,e^3$, o si $e^1IT\,e^2$ y $e^2PX\,e^3$, entonces $e^1PT\,e^3$; 2º) si $e^1IX\,e^2$ y $e^2IT\,e^3$, o si $e^1IT\,e^2$ y $e^2IX\,e^3$, entonces $e^1IT\,e^3$; y, por lo tanto, 2º) si $e^1RX\,e^2$ y $e^2RT\,e^3$, o si $e^1RX\,e^2$ y $e^2RX\,e^3$, entonces $e^1RT\,e^3$.

Por otro lado, si *e'* y *e"* son las dos verdaderas bajo *p*, o las dos falsas, salvo que *e'RX e°* o *e"RX e°* para toda *e°* en S^*, no hay ninguna limitación sobre las relaciones de aproximación semántica que puedan mediar entre ellas bajo *p*. Concretamente, puede ocurrir 1º) que *e'PX e"*, o 2º) que *e'IX e"*, o 3º) que *e"PX e'*, o 4º) que su comparación no esté completamente resuelta y que *e'PT e"*, o 5º) que su comparación no esté resuelta y que *e'IT e"*, o, finalmente, 6º) que su comparación no esté resuelta y que *e"PT e'*.

42 En adelante, por *[e°]* entenderemos el conjunto de preórdenes bajo los que la proposición *e°* es verdadera.

43 Este es el planteamiento que corresponde a las relaciones de confianza presentadas en los dos trabajos ya citados del autor.

44 La condición siguiente excluye la posibilidad de que haya algún problema de ese tipo: si para toda *R* en *Sp* sucede que *e'* es verdadera bajo *R* syss lo es *e"*, entonces no puede suceder que *e'PX e"*.

45 Antecendentes que seán, a su vez, versiones instanciadas del propio modelo.

46 Lo cierto es que sobre unas y otras poco tenemos que decir, porque las hemos introducido de manera que fueran fácilmente asimilables a los casos de las conjunciones y las disyunciones. En efecto, si se cumplen las condiciones previstas en la condición de implicación por instanciación, bajo todo preorden de Z^* sucederá que *e"R e'*, por lo que *e"RX e'*.

Merecen una atención especial aquellas conjunciones e'' de versiones instanciadas de una proposición e' abierta, o cerrada y cuantificada universalmente, que el agente considera que bastan para determinar el valor veritativo de ésta, o la disyunción e' de versiones instanciadas de una proposición cerrada y cuantificada existencialmente e'' con la que también sucede a juicio del agente que $(e'|e'')$ es verdadera. En tales casos, $e'R\,[(e'|e'')\wedge e'']$ bajo toda R de SP, y si $(e'|e'')R\,e''$ entonces $e''I\,e'$ y $e''IX\,e'$.

47 Demostremos primero que para toda e', e'', $(e''|e')$, $[(e''|e')\wedge e']$ en S^*, si e' y e'' son verdaderas, entonces si $e'P\,[(e''|e')\wedge e']$, entonces $(e''|e')I\,e'$.

Por la condición de adosamiento y puesto que $e'P\,[(e''|e')\wedge e']$, tendrá que suceder que $(e''|e')I\,[(e''|e')\wedge e']$. Por la adaptación de la regla de la multiplicación y la condición de superioridad por implicación, $e''R\,(e'\wedge e'')I$ $I(e''|e')I\,[(e''|e')\wedge e']$. Por lo tanto, $e''R\,(e''|e')$.

Si sucediera que $[(\neg e''|e')\wedge e']R\,e'$, ocurriría que $\neg e''R\,e'$, ya que en virtud de la adaptación de la condición de superioridad por implicación, $\neg e''R\,(\neg e''\wedge e')I$ $[(\neg e''|e')\wedge e']R\,e'$. Consecuentemente, por la condición de simetría vertical, $\neg e''$ sería verdadera y e'' falsa, en contradicción con la hipótesis de partida. Por lo tanto, $e'P[(\neg e''|e')\&\,e']$, y por un argumento similar al utilizado en el párrafo anterior, $\neg e''R\,(\neg e''|e')$.

Ahora bien, si sucede que $e''R\,(e''|e')$ y que $\neg e''R\,(\neg e''|e')$, la única posibilidad permitida por la condición de simetría vertical es que $e''I\,(e''|e')$ y que $\neg e''I\,(\neg e''|e')$. Q.E.D.

Una vez establecido lo anterior, podemos demostrar que para toda e', e'', $(e''|e')$, y $[(e''|e')\&\,e']$ en S^*, si e' y e'' son verdaderas, entonces $(e'\wedge e'')I\,e'$ o $(e'\wedge e'')I\,e''$.

Si ocurriera que $(e'\wedge e'')I\,e'$, no tendríamos que probar nada más. Supongamos, por lo tanto, que ése no es el caso. En tales circunstancias, la adaptación de la regla de la multiplicación y la superioridad por implicación garantizan que $e'P\,(e'\wedge e'')I\,[(e''|e')\wedge e']$ y, por lo tanto, que $e'P\,[(e''|e')\wedge e']$. De esta manera, aplicando el resultado anterior podemos concluir que $e''I\,(e''|e')$.

En otro orden de cosas, nótese que este resultado es el que nos permite argumentar que si $(e''|e')$ y e' son verdaderas bajo R, y si $\{[(e''|e')|e']\wedge e'\}$ o $\{[e'|(e''|e')]\wedge (e''|e')\}$ también pertenecen a S^*, entonces $[(e''|e')\wedge e']$ será verdadera, lo será también $(e'\wedge e'')$ y, por lo tanto, lo será también e''.

48 También se puede establecer en general que si $e'I\,(e'|e'')$, o $e''I\,(e''|e')$, entonces $(e'\wedge e'')$ tendrá el mismo nivel que la de menor nivel entre e' y e''; aunque la conversa no es válida.

En efecto, sabemos que $(e'\wedge e'')I\,[(e''|e')\wedge e']I\,[(e'|e'')\wedge e'']$, y que estas dos últimas estarán adosadas; por ello, si $e'I\,(e'|e'')$ caben dos posibilidades: a) que $e'R\,e''$, en cuyo caso $[(e''|e')\wedge e']I\,(e''|e')$ y $[(e'|e'')\wedge e'']I\,e''$, o b) que $e''R\,e'$, en cuyo caso, $[(e''|e')\wedge e']I\,[(e'|e'')\wedge e'']I\,(e'|e'')I\,e'$.

Por lo tanto, también podemos dar por establecido que si $e'I\,(e'|e'')$, entonces a) $(e'\wedge e'')$ está adosada a e' o a e''; y b) si sucede, además, que $e''R\,e'$, lo estará a e'. Asimismo, por un razonamiento análogo, si $e''I\,(e''|e')$, entonces a) $(e'\wedge e'')$ está adosada a e'' o a e', y b) si $e'R\,e''$, entonces lo estará a e''.

49 Recuérdese, además, que la conjunción $[(e'|\,e^{\circ})\wedge (e''|\,e^{\circ})]$ es lógicamente equivalente a la paraconjunción $[(e'\wedge e'')|\,e^{\circ}]$. Por ello, las afirmaciones que siguen son aplicables también a cualquier paraconjunción equivalente a cualquier conjunción perteneciente a S^*.

50 Además, si $e'RT\,e''$ entonces $e'PX\,e^{\circ}$ y $e''PX\,e^{\circ}$; y si $e''RT\,e'$ entonces $e'PX\,e^{\circ}$ y $e''PX\,e^{\circ}$.

51 Y cuando e'' es verdadera (bajo p) pero e' no lo es, entonces $p[e^{\circ}]= p[e']$, y $e''PX\,e^{\circ}$.

Recuérdese, por otra parte, que $[e']$ es el conjunto de preórdenes pertenecientes a Sp en los que e' es verdadera, $p[e^{\circ}]$ es la probabilidad de ese conjunto, y $p[[e''] \mid [e']]$ es la probabilidad, condicionada al conjunto $[e']$, del conjunto de preórdenes pertenecientes a Sp en los que e'' es verdadera.

52 Como e' es verdadera y e'' no, no puede ocurrir que $e''RX\, e'$. En cambio, cuando e'' es verdadera y e' no, sí puede suceder que $e''RX\, e'$, en cuyo caso $e''PX\, e^{\circ}$ y $e^{\circ} IX\, e'$.

53 Y cuando $e''RX\, e'$ (y, por lo tanto, $p[[e''] \mid [e']] = 1$), si bajo toda R en Sp bajo la cual e'' es falsa sucede que $e'I\, (e' \mid e'')$ o que $(e'' \mid e')R\, e'$, entonces $e^{\circ} IX\, e'$, ocurriendo que $e'PX\, e^{\circ}$ en caso contrario.

54 Conviene recordar, al efecto, que $p[e^{\circ}] = p([e'] \cap [e'']) = p[[e''] \mid [e']].p[e'] = p[[e'] \mid [e'']].p[e'']$. Así como que $p[[e''] \mid [e']] = p[e'']$ syss $p[[e'] \mid [e'']] = p[e']$, y $p[[e''] \mid [e']] = 0$ syss $p[[e'] \mid [e'']] = 0$.

55 Es decir, si $p[[e''] \mid [e']] = p[e'']$, o si $p[[e'] \mid [e'']] = p[e']$. Recuérdese, por otra parte, que $p[[e''] \mid [e']] = 0$ syss $p[[e'] \mid [e'']] = 0$.

56 Ya hemos apuntado que parece muy plausible una condición como la siguiente: para toda e', e'', $(e' \mid e'')$ y $(e'' \mid e')$ en S^*, a) si $p[e'] > 0$, entonces $p[[e''] \mid [e']] = p[(e'' \mid e')]$, y b) si $p[e''] > 0$, entonces $p[[e'] \mid [e'']] = p[(e' \mid e'')]$.

Si se adopta, los resultados anteriores pueden reescribirse realizando las sustituciones oportunas.

57 Nótese que si las proposiciones e' y e'' son lógicamente equivalentes, bajo todo preorden de aproximación semántica sucederá que $e'I\, e''$.

58 También valen las afirmaciones que siguen cuando e° es una paradisyunción equivalente a $(e' \vee e'')$, y ésta también pertenece a S^*.

59 Si $e''RX\, e'$ (y, por lo tanto, e' y e'' son verdaderas - y falsas - bajo los mismos preórdenes de Sp) y sucede además que bajo toda R en Sp bajo la cual e'' es verdadera se cumple que $e''\, I\, (e' \mid \neg e')$ y $e''R\, (e' \mid \neg e'')$, entonces $e^{\circ} IX\, e''$, ocurriendo que $e^{\circ}PX\, e''$ en caso contrario.

60 Y cuando e'' es falsa pero e' no, entonces $p[e^{\circ}] = p[e']$, $e^{\circ}PXe''$ y para toda R' de Sp, $e^{\circ}I'\, e'$ o $e^{\circ}I'\, e''$, por lo que si $e'RX\, e''$ entonces $e'IX\, e^{\circ}$ y $e^{\circ}PX\, e''$.

61 Además, si $e'RT\, e''$ entonces $e^{\circ}PX\, e'$ y $e^{\circ}PX\, e''$; y si $e''RT\, e'$ entonces $e^{\circ}PX\, e'$ y $e^{\circ}PX\, e''$.

62 Y, naturalmente, $p[e^{\circ}] > p[e'']$ syss a) $p[e']/ p[e''] > p[[e'] \mid [e'']]$, y b) $p[[e''] \mid [e']] < 1$.

Sobre estos resultados, recuérdese que $p[e^{\circ}] = p([e'] \cup [e'']) = p[e'] + p[e''] - p[e' \wedge e'']$ y que $p[e' \wedge e''] = p([e'] \cap [e'']) = p[[e''] \mid [e']].p[e'] = p[[e'] \mid [e'']].p[e'']$. Por lo tanto, $p[e^{\circ}] = p([e'] \cup [e'']) = p[e'] + p[e''] - p[[e''] \mid [e']].p[e'] = p[e'] + p[e''] - p[[e'] \mid [e'']].p[e'']$.

En virtud de ello, $p[e^{\circ}] = p[e']$ syss $p[e''] = p[[e''] \mid [e']].p[e']$ y $p[e''] = p[[e'] \mid [e'']].p[e'']$. De donde, $p[e^{\circ}] = p[e']$ syss a) $p[e'']/ p[e'] = p[[e''] \mid [e']]$, y b) $p[[e'] \mid [e'']] = 1$.

Asimismo, $p[e^{\circ}] > p[e']$ syss $p[e''] > p[[e''] \mid [e']].p[e']$ y $p[e''] > p[[e'] \mid [e'']].p[e'']$. De donde, $p[e^{\circ}] > p[e']$ syss a) $p[e'']/ p[e'] > p[[e''] \mid [e']]$, y b) $p[[e'] \mid [e'']] < 1$.

63 O tales que que e° es una frase paracondicional equivalente a $(e' \rightarrow e'')$ que también pertenecería a S^*.

64 O si e' es la proposición paracondicional equivalente a $(e' \rightarrow e'')$ y ésta pertenece a S^*, e'' es la proposición paracondicional equivalente a $(e'' \rightarrow e')$ y ésta también pertenece a S^*, y e^{o} es una frase parabicondicional equivalente a $(e' \leftrightarrow e'')$, que también pertenecería a S^*.

65 Véanse, de todas maneras, los comentarios que se hacen más abajo sobre la forma lógica de los resultados obtenidos en los ejercicios teóricos.

66 Este ejemplo no es más que una instancia más de la aptitud comparativamente mayor de la conectiva barra para expresar las frases condicionales contrafácticas. Véanse las referencias contenidas en la nota 12.

67 Nótese que si e' es falsa, $(e' \rightarrow e'')$ será verdadera. Supongamos, por lo tanto, que e' es verdadera. Si $(e'|e'')$ es verdadera y $[(e''|e') \wedge e'] \in S^*$, $[(e''|e') \wedge e']$ será también verdadera y tan aproximada como $(e' \wedge e'')$, por lo que $e''R[(e''|e') \wedge e']$, y e'' será verdadera. Luego, en cualquier caso, $(e' \rightarrow e'')$ será verdadera.

68 Para demostrarlo, repárese en que bajo cualquier preorden R, si e' y $(e' \rightarrow e'')$ son verdaderas, $(e''|e')$ no puede ser falsa, porque entonces tendría que ser falsa e'', lo que es imposible al ser verdaderas e' y $(e' \rightarrow e'')$. Por lo tanto, por la condición de estabilidad veritativa $(e''|e')$ será verdadera bajo toda R' de Z^*. Por otra parte, para cualquier par e^1 y e^2 de proposiciones, si e^1 es verdadera bajo todo preorden R'' de Z^*, bajo cualquiera de ellos, e^1Re^2. Así pues, $(e''|e') \mid (e' \rightarrow e'')\ R\ e^\circ$ para toda proposición e°.

69 Por la condición de estabilidad veritativa, $(e'|e')$ es verdadera en todo preorden semántico. Por ello, si $(e''|e')$ es verdadera lo tiene que ser también $[(e' \rightarrow e'')|e']$, y si $(e''|e')$ fuera falsa, también lo sería $[(e' \rightarrow e'')|e']$.

70 Lo primero se debe a que $[(e' \rightarrow e'') \wedge e']$ implica lógicamente a e''; lo segundo, a que $(e' \wedge e'')$ implica lógicamente a e'' y a que $(e' \wedge e'') | [(e''|e') \wedge e']$ en virtud de la adaptación de la regla de la multiplicación.

71 En virtud de la Z^*- equivalencia entre $(e^d \wedge e')$ y $(e^b \wedge e')$ establecida en el apartado anterior, si e' es verdadera y e^d es falsa, entonces $e^b\ |\ (e^d \wedge e')\ |\ (e^b \wedge e')$.

72 Nótese que si e' es falsa, $(e' \rightarrow e'')$ tiene que ser verdadera, por lo que no puede darse el caso de que e^d y e' sean falsas simultáneamente.

Por otra parte, si e' es falsa y e^d verdadera, e^b puede ser verdadera o falsa. Por ello, la Z^*- equivalencia entre $(e^d \wedge e')$ y $(e^b \wedge e')$ sólo nos permite concretar que a) si $e'Re^b$, entonces $e^b |\ (e^d \wedge e') |\ (e^b \wedge e')$, y b) si $e^bR\ e'$, entonces $e' |\ (e^d \wedge e') |\ (e^b \wedge e')$.

73 Aunque es preciso recalcar que no comparten todas, por elementales que sean. Por ejemplo, e'' implica $(e' \rightarrow e'')$ pero no lo hace con $(e''|e')$.

74 En algún caso, como el representado por la adaptación del *modus ponens* en términos de la conectiva barra, ya lo hemos hecho antes.

75 Nótese al efecto que si fuera verdadera $[(e''|e') \wedge \neg e'']$ y $\neg e'$ fuese falsa, e' sería verdadera, con lo que e'' y $\neg e''$ tendrían que ser verdaderas simultáneamente.

76 Repárese en que si $(e''|e')$ fuera verdadera bajo R y $(\neg e'|\neg e'')$ falsa, $[(e''|e') \wedge (e'|\neg e'')]$ tendría que ser verdadera bajo ese preorden. Eso conllevaría que $\neg e''$ tendría que ser falsa bajo R, porque de ser verdadera, terminaría siendo también verdadera e''. Pero entonces, por la condición de estabilidad veritativa, habría un preorden R' bajo el que serían verdaderas $[(e''|e') \wedge (e'|\neg e'')]$ y $\neg e''$, y por las mismas razones que antes, también e''. Por lo tanto, bajo toda R, si $(e''|e')$ es verdadera $(\neg e'|\neg e'')$ también lo será.

Análogamente, supongamos que $(\neg e'|\neg e'')$ fuera verdadera y $(e''|e')$ falsa. En tal caso, $[(\neg e'|\neg e'') \wedge (\neg e''|e')]$ sería verdadera, y no lo podría ser e'. Pero por un argumento semejante al anterior habría un preorden bajo el que tendrían que ser verdaderas e' y $\neg e'$.

77 Supóngase que $[(e^2| e^1) \wedge (e^3| e^2)]$ fuese verdadera bajo alguna R' y que $(e^3| e^1)$ no lo fuera. Como consecuencia de ello, sería verdadera bajo R' la frase $\{[(e^2| e^1) \wedge (e^3| e^2)] \wedge \neg(e^3| e^1)\}$. Bajo R, e^1 no puede ser verdadera porque tendrían que ser verdaderas simultáneamente e^3 y su negación. Pero entonces, por la condición de estabilidad veritativa tendrá que haber un preorden R' bajo el que sean verdaderas $\{[(e^2| e^1) \wedge (e^3| e^2)] \wedge \neg(e^3| e^1)\}$ y e^1, lo que es igualmente imposible por las mismas razones. Por lo tanto, si $[(e^2| e^1) \wedge (e^3| e^2)]$ es

verdadera bajo R también lo será $(e^3 | e^1)$, por lo que $[(e^2 | e^1) \wedge (e^3 | e^2)]$ Z^*-implica a $(e^3 | e^1)$.

78 Para comprobarlo, supóngase que $(e^3 | e^1)$ es verdadera bajo R mientras que $[e^3 | (e^1 \wedge e^2)]$ es falsa. Sería entonces verdadera la frase $\{(e^3 | e^1) \wedge [\neg e^3 | (e^1 \wedge e^2)]\}$, lo que sólo podría suceder si $(e^1 \wedge e^2)$ fuera falsa. Pero, en virtud de la condición de estabilidad veritativa, habría entonces otro preorden R' bajo el que serían verdaderas $\{(e^3 | e^1) \wedge [\neg e^3 | (e^1 \wedge e^2)]\}$, $(e^1 \wedge e^2)$, e^3 y $\neg e^3$, lo que es imposible.

79 Bastará ilustrar el asunto con la demostración de la primera parte. Supongamos que $[e^3 | (e^1 \wedge e^2)]$ no implicara $[(e^3 | e^2) | e^1]$. Habría algún preorden R bajo el que la primera de esas dos proposiciones sería verdadera mientras que la segunda sería falsa. Por lo tanto, sería verdadera $\{[e^3 | (e^1 \wedge e^2)] \wedge [(\neg e^3 | e^2) | e^1]\}$. Naturalmente, $(e^1 \wedge e^2)$ no podría ser verdadera porque, de serlo, sucedería que e^3 y $\neg e^3$ tendrían que ser ambas verdaderas bajo R. Pero por la condición de estabilidad veritativa habría algún preorden bajo el que tendría que ocurrir todo eso.

80 Será suficiente con demostrar la primera parte. Supongamos que $(e'' | e')$ es verdadera bajo R y que $[(e'' | e') | e']$ es falsa. Sería entonces verdadera la frase $\{(e'' | e') \wedge [(\neg e'' | e') | e']\}$. Es evidente que e' no podría ser verdadera bajo R. Pero por la condición de estabilidad veritativa habría algún otro preorden bajo el que tendría que operarse esa contradicción.

81 Lo primero se debe a que $[(e' \rightarrow e'') \wedge e']$ implica lógicamente a e''; lo segundo, a que $(e' \wedge e'')$ implica lógicamente a e'' y a que $(e' \wedge e'') | [(e'' | e') \wedge e']$ en virtud de la adaptación de la regla de la multiplicación.

Juan Carlos García-Bermejo Ochoa es catedrático de Metodología General y Económica de la Facultad de CC. Económicas y Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid, facultad de la que fué decano entre 1982 y 1986. En el terreno teórico, se ha ocupado principalmente de cuestiones de elección individual y social. Su preocupación principal se ha centrado en el análisis metodológico de la Teoría Económica, y en aquellos asuntos y movimientos en Filosofía de la Ciencia más cercanos a ese análisis. En esta línea pueden situarse trabajos como *Economía y Filosofía de la Ciencia* (Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Cuadernos de Apoyo,1990), *Aproximación, Probabilidad y Relaciones de Confianza* Alianza Editorial, Madrid 1990), e *Introducción a las Comparaciones de Confianza* (Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1994).