ISAAC NEWTON Y EL INFINITESIMAL†

(Isaac Newton's Infinitesimals)

Manuel A. SELLES*

Manuscrito recibido: 1998.3.15.
Versión final: 1999.3.22.

* Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Edificio de Humanidades, Senda del Rey s/n, 28040 Madrid. E-mail: mselles@human.uned.es

BIBLID [0495-4548 (1999) 14: 36; p. 431-460]

RESUMEN: A través de una reconstrucción de la evolución de su pensamiento, en este artículo se estudia la utilización de infinitesimales por parte de Newton. Se distingue entre dos concepciones sucesivas de lo que denominó *momento*. A la primera de estas entidades la caracterizó como un infinitesimal, pero a la segunda (un indivisible generador de magnitudes finitas, que interviene en su método de las primeras y últimas razones) no la consideró como tal. Se entiende así su manifestación de rechazo a los infinitesimales, formulada en una segunda etapa, y se ve que las dudas arrojadas por algunos investigadores sobre la veracidad de tal manifestación se deben a una determinada interpretación de esta última concepción de *momento*.

Descriptores: cálculo infinitesimal, historia; siglo XVII, Newton; infinitesimal, conceptos.

ABSTRACT: *This paper discusses Newton's recourse to infinitesimals through the reconstruction of the evolution of his thought. Two successive concepts of what he termed "moment" are told apart. The first of those entities was characterized by him as an infinitesimal, while the second -an indivisible generating finite magnitudes, present in his method of first and last reasons- was not considered such an entity. This move makes understandable his express rejection of infinitesimals in the second stage, and exposes the doubts of some scholars about the sincerity of Newton's rejection as due to a peculiar interpretation of his last concept of "moment".*

Keywords: *Infinitesimal calculus, history of; Seventeenth-Century, Newton; Infinitesimal, concept of.*

SUMARIO

¿Renunció Newton a los infinitesimales? Él así lo afirmó, manifestando que su método constituía una propuesta más natural. Sin embargo, diversos investigadores han argumentado que, pese a esta declaración, los infinitesimales se agazapaban tras el método de las fluxiones o su última versión en términos de razones primeras y últimas. Según Boyer, Newton "no renunció completamente al infinitesimal, sino que continuó refiriéndose a los momentos como partes infinitamente pequeñas"[1]. Kitcher indica que el progreso al método de las razones primeras y últimas consistía "en tratar al infinitesimal *o* [un infinitesimal de tiempo] como una variable"[2]. Lai afirma que Newton no hubiese podido renunciar a los infinitesimales porque "eran demasiado fundamentales en su concepción del mundo y de las matemáticas"[3]. Bechler escribe que "como su método de primeras y últimas razones depende de su método de fluxiones y éste depende de los infinitesimales, su declaración en contra es irrelevante"[4]. Sin embargo, Arthur manifiesta que, en el esquema fluxional, "*o* es siempre finito", y que este esquema "involucra implícitamente un tipo de procedimiento temporal al límite"[5]. Este último autor, en oposición a los anteriores, ve implícito el método de límites de su procedimiento de las primeras y últimas razones ya desde el primer esquema fluxional de 1671.

A través de una reconstrucción de la evolución del pensamiento de Newton, mi trabajo pretende mostrar que la contradicción entre sus manifestaciones y estas interpretaciones tiene sus raíces en el concepto de infinitesimal implicado. Newton sostuvo, no una, sino dos concepciones distintas y consecutivas de "momento". Pero sólo calificó de "infinitesimal" a la primera de ellas. Así, interpretar al segundo de sus "momentos" -un indivisible generador de magnitudes finitas- como un infinitesimal supone adoptar un punto de vista anacrónico. Tal interpretación oscurece el problema de fundamentos implicado y no contribuye -más bien todo lo contrario- a esclarecer las ya de por sí difíciles bases de su método de las primeras y últimas razones.

1. *Infinitésimos y fluxiones*

Hacia la primavera o principios del verano de 1664 Newton comenzó a familiarizarse, a través de la obra de Wallis, con los procedimientos de cuadraturas, y en el invierno con sus trabajos sobre series. También de esa época, a comienzos del otoño, datan sus primeros cálculos sobre curvatura empleando el método de Descartes.

En sus anotaciones de Wallis considera a las figuras equivalentes a la suma de sus indivisibles; pero, en la práctica, efectúa las cuadraturas dividiendo la línea adoptada como base según una progresión aritmética[6]. En la Fig. 1 *ac* se divide "en un número infinito de partes iguales" *ad*, *de*, *ef*, etc. desde las cuales se trazan paralelas *nd*, *pe*, *qf*, etc., cuya longitud se incrementa continuamente en una progresión determinada. Todas estas líneas equivalen a la superficie *bqnac*, de modo que la razón de esta superficie a la del paralelogramo *ambc* será igual a la razón que todas estas líneas tengan a otras tantas líneas iguales a la mayor de ellas (*bc*). Se trata, pues, de comparar dos series infinitas (W, *1*, p. 98).

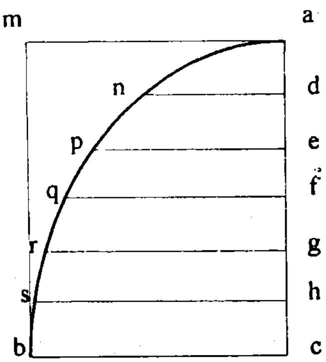

Figura 1

Por otra parte, en sus estudios de curvatura, Newton comienza a usar el símbolo *o* para denotar un pequeño incremento *finito* que, en el momento final del cálculo, se iguala a cero[7]. El procedimiento de Descartes para hallar la tangente a una curva en un punto dado era determinar previamente la subnormal. Para esto había que localizar una circunferencia tangente a la curva en ese punto. Descartes introducía una circunferencia que cortaba a la curva en dos puntos, y establecía la condición de que ambos puntos fuesen el mismo. A Newton se le ocurrió que si tomaba dos normales en puntos próximos de la curva y las hacía coincidir, coincidirían con el radio de la circunferencia tangente. En mayo de 1665 redactó una exposición de su procedimiento. Esta se abre con la siguiente demostración[8]. Sea la curva *ea*, y *d* el centro de la circunferencia tangente a la curva en *e*.

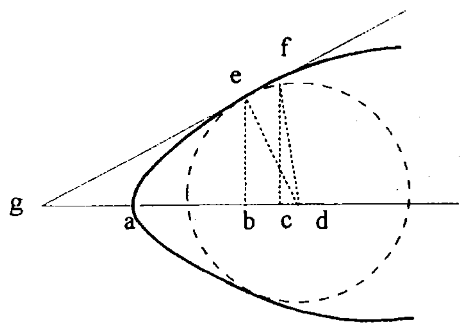

Figura 2

Si $ab=x$, $eb=y$, bd=v, $bc=o$, $cf=z$, y $ed=df$ (radio de la circunferencia), en los triángulos *ebd*, *fcd* se tiene:

$$ed^2 = df^2 = y^2 + v^2 = z^2 + (v - o)^2 \qquad (1)$$

El punto *f*, de coordenadas (z, $x+o$) no se encuentra sobre la curva, sino sobre la circunferencia con centro en *d*. Si suponemos que la ecuación de la curva es $y=f(x)$, y sustituimos $z=f(x+o)$, esteremos igualando dos miembros sólo aproximadamente iguales. Estrictamente hablando, la sustitución sólo será válida cuando *f* coincide con *e*, esto es, si o=0. Haciendo esto, se obtiene una expresión para v que determina la normal en el punto *e*. El primer caso que trata Newton es el de una hipérbola, cuya ecuación es $y^2=x^2+ax$. Así,

$$z^2 = (x + o)^2 + a\,(x + o) \qquad (2)$$

valor que, sustituido en (1), da:

$$v = x + a/2 + o \qquad (3)$$

que cuando se hacen coincidir ambos puntos se reduce a $v=x+a/2$.

Newton observa que, dado que hay que despejar v en un término que viene multiplicado por o (y por tanto, al hacerlo, los demás términos deberán dividirse por o), se pueden eliminar de partida los términos en potencias de o iguales o mayores que 2, pues tras la división éstos darán siempre lugar a términos en *o* que en el paso final del proceso -cuando se haga o=0- desaparecerán. De modo que si, en general, de (2) se obtiene:

$$z = \sqrt{y^2 + 2ov - o^2} \tag{4}$$

se puede escribir de partida que:

$$z = \sqrt{y^2 + 2ov} \tag{5}$$

La presencia de la raíz no es precisamente cómoda para el cálculo, y Newton encuentra un procedimiento al que califica de "más conveniente" (W, *1*, pp. 278-80). En la Fig. 3, dibuja el pequeño triángulo *efr*

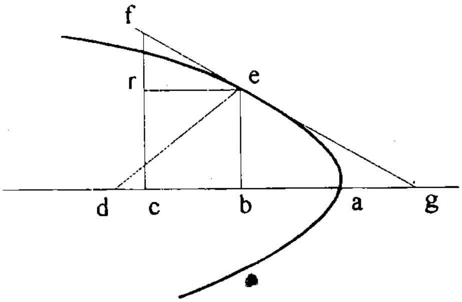

Figura 3

y establece las siguientes proporciones:

$$be/db = bg/be = re/fr \tag{6}$$

esto es,

$$y/v = o/z\text{-}y \tag{7}$$

de donde:

$$z = y + ov/y \tag{8}$$

A continuación afirma que las proporciones (6) sólo pueden establecerse si o se imagina "infinitamente pequeño, esto es, si el triángulo *efr* se supone que es infinitamente pequeño" (W, *1*, p. 278). Ahora los términos en o "son infinitamente pequeños, es decir, se desvanecen si se comparan a términos finitos" (W, *1*, p. 279). Algo más adelante deduce de nuevo la expresión (8), esta vez sin recurrir al llamado "triángulo característico" *efr*, y deduce a partir de ella expresiones para z^2, z^3, etc. despreciando términos en potencias de o superiores a la primera, y manifiesta:

> Esta operación no puede considerarse buena en este caso a menos que la infinita pequeñez se pueda considerar geométricamente. (W, *1*, 282)

Newton todavía no ha sustituido $z=f(x+o)$, por lo que la única aproximación que interviene es la cancelación de los términos en o^2. Esto sugiere que, en este contexto, pudo introducir el infinitesimal para justificar esta operación[9]. Más adelante afirma (Fig. 4) que, si se considera *cd* infinitamente pequeño, entonces la diferencia *os* entre las líneas *ob* y *bs* será infinitamente menor que *ob*, por lo que se puede hacer *ob=os*, lo que equivale, en nuestra notación anterior, a la sustitución $z=f(x+o)$ o, dicho en otros términos, a la del arco por la tangente.

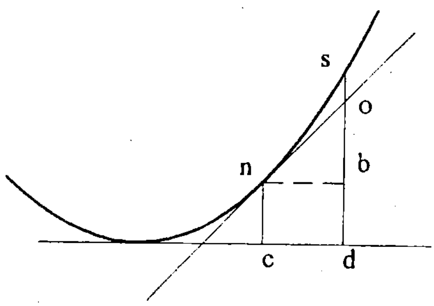

Figura 4

Estas operaciones no hacen a Newton muy feliz. Según parece, por dos motivos. Por una parte, como dice, encuentra cuestionable la legitimidad del uso de infinitesimales en geometría; por otra, piensa que su empleo supone una aproximación que va en detrimento de la exactitud de las matemáticas; si bien, como veremos algo más adelante, sus manifestaciones en este sentido serán tardías. Entre tanto, el siguiente paso es la extensión de esta aproximación cinemática a la generación de curvas y a la determinación de tangentes, desarrollando su cálculo fluxional.

La generación de figuras geométricas mediante el movimiento de sus indivisibles se remonta a la antigüedad y era bien conocida en la época. La distinción entre curvas geométricas y mecánicas que se estableció en el mundo clásico se refería a la diferencia entre los procedimientos de trazado más puramente "geométricos" -regla y compás- y los que empleaban medios instrumentales más complejos. Pero Descartes entendió por geométrico aquéllo que es exacto, y por mecánico lo que no lo es, y así incluyó en la primera de estas categorías todas aquéllas curvas definidas cinemáticamente que fuesen descritas por un movimiento o por la composición de dos movimientos que guardasen razón exacta entre ellos[10]. Newton, por su parte, en el "Prefacio" a los *Principia*, llevó las cosas mucho más lejos. Distinguiendo entre una mecánica racional, exacta, y otra práctica, artesanal, subsumió en la primera a la geometría, afirmando que "los trazados de las líneas rectas y curvas en que se apoya la *Geometría* pertenecen a la *Mecánica*."[11]

Para algunos, las definiciones genéticas -génesis de las figuras por el movimiento- proveían a la geometría de una causalidad que la convertía en una verdadera ciencia en el sentido aristotélico. Torricelli, Hobbes, Spinoza, fueron de este parecer; y particularmente Barrow, quien vio en el movimiento la clave para una nueva fundamentación de la geometría, y cuyas *Lectiones Geometricae* (1670), casi con toda probabilidad, sirvieron de inspiración a Newton. De modo que las indagaciones de Newton en mecánica, emprendidas en esos primeros años, y la génesis de las figuras por el movimiento sentaban sobre las mismas bases tanto la mecánica racional como la geometría. Ya que, dado que el origen de la segunda está en la primera, en su punto de partida no son más que una y la misma disciplina. Y a su vez la mecánica no tiene otro origen que la abstracción del mundo fenoménico, que no es estático e inmutable como las figuras de la geometría de Euclides, sino que está sometido a cambio por el movimiento respecto del trasfondo de un espacio y un tiempo absolutos.

La primera sistematización del cálculo fluxional aparece en un manuscrito datado en noviembre de 1665[12]. Dada una ecuación que expresa la relación de dos o más líneas x, y, z descritas en el mismo tiempo por dos o más cuerpos móviles A, B, C, se trata de encontrar la relación de sus velocidades p, q, r. El procedimiento es el siguiente:

1) Iguálese la ecuación a cero.
2) Multiplíquese cada término por p/x tantas veces como sea el exponente de x en ese término, tantas veces por p/y como lo sea el de y, y lo mismo en el caso de z.

3) La ecuación resultante dará la relación entre p, q, r.

Tras exponer tres ejemplos, Newton presenta la demostración. Sean dos cuerpos A/B que se mueven uniformemente desde a/b a c/d, e/f, g/h, etc. en el mismo tiempo

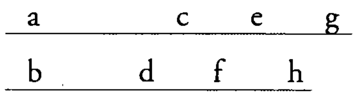

Figura 5

Las líneas ac/bd, ce/df, eg/fh son como sus velocidades p/q. Y prosigue:

> Y aunque no se muevan uniformemente con todo hay líneas infinitamente pequeñas que describen en cada momento y son como las velocidades que tienen mientras las describen. Como si el cuerpo A con la velocidad p describe la infinitamente pequeña línea o en un momento. En ese momento el cuerpo B con la velocidad q describirá la línea oq/p. Pues $p:q::o:oq/p$. Así, si las líneas descritas en un momento son x e y, serán $x+o$ y $y+oq/p$ en el [momento] siguiente. (W, *1*, p. 385)

Ahora en la ecuación se sustituye x por $x+o$, y por $y+oq/p$, se simplifica, se dividen los términos por o, y los términos en o también desaparecen "porque son infinitamente pequeños". A finales de 1665, pues, Newton sigue empleando el infinitesimal, aproximando las curvas por líneas poligonales de lados infinitamente pequeños. Estos lados se recorren con movimiento uniforme, aun cuando el punto generador no se mueva uniformemente.

El tratado sobre fluxiones de octubre de 1666 recoge esto prácticamente palabra por palabra, con sólo un cambio muy significativo. Ahora designa al "momento" de tiempo por o, de modo que $p:q::po:qo$ (W, *1*, pp. 400-448; p. 414). No dice que el momento de tiempo sea infinitamente pequeño, sino que lo es el espacio recorrido en dicho momento.

También en este escrito aparece un artificio cuyo interés se verá un poco más adelante: la adopción del valor p=1, es decir, la suposición de que la velocidad de uno de los cuerpos -el A en este caso- es constante e igual a la unidad (W, *1*, p. 427). Esto aparecerá de nuevo en el 'De analysi per aequationes infinitas', escrito probablemente a principios del verano de 1669 (W, *2*, p. 206, n.1), junto con una nueva concepción para el término "momento". Sea AD una curva cualquiera, y AHBK un rectángulo cuyos lados AH=BK son la unidad.

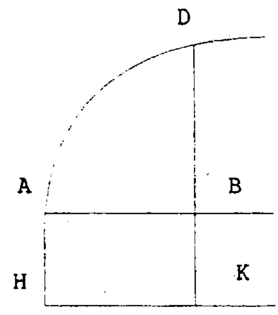

Figura 6

Considérese que la línea DBK describe las áreas ABD y AK a medida que se mueve uniformemente desde AH; y que BK(1) es el "momento" por el cual AK(x) crece gradualmente y BD(y) aquél por el cual lo hace ABD; y que, cuando está dado continuamente el momento de BD se puede investigar el área ABD (por las reglas que ha dado anteriormente) o compararlo con AK(x) descrito con un "momento" unidad (W, *2*, p. 233).

Dejemos esto así por ahora y vayamos finalmente a la más ambiciosa exposición del nuevo cálculo, redactada en 1671[13]. Aquí Newton se esfuerza por clarificar la fundamentación de su método. Como es sabido, comienza reduciendo el estudio de curvas a dos problemas:

> 1. Dada una longitud de espacio continuamente (esto es, para cada tiempo), hallar la velocidad del movimiento para cada tiempo propuesto.
> 2. Supuesta una velocidad del movimiento continuamente, hallar la longitud del espacio descrito en un tiempo propuesto. (W, *3*, p. 70)

Newton prosigue con el siguiente ejemplo: En la ecuación $x^2=y$, y representa la longitud del espacio recorrido en cualquier tiempo, el cual es "medido y representado por un segundo espacio x a medida que éste crece con velocidad uniforme" (W, *3*, p. 72). Esto es precisamente lo que hemos visto más arriba que hacía tomando p=1. La justificación es que:

> dado que no tenemos estimación del tiempo excepto en la medida en que es exhibido y medido por un movimiento local uniforme, y además puesto que sólo cantidades del mismo género, al igual que sus velocidades de aumento y disminución, pueden compararse entre sí, por estas razones, en lo que sigue, no me fijaré en el tiempo, considerado formalmente, sino que de entre las cantidades propuestas que son del mismo tipo supondré que alguna aumenta con un flujo uniforme y a la cual todas las demás pueden referirse como si fuese el tiempo, y por tanto se le puede dar analógicamente la denominación de "tiempo". Y así siempre que en lo que sigue aparezca la palabra "tiempo" (...), por este nombre debe entenderse no el tiempo formalmente considerado sino esa otra cantidad a través de cuyo flujo o movimiento uniforme el tiempo es exhibido y medido. (W, *3*, p. 2)

La fuente de Newton es, con toda probabilidad, Barrow[14]. En la primera de sus *Lectiones Geometricae* se encuentra la generación de figuras por el movimiento, la idea del tiempo como un flujo uniforme, que geométricamente se puede representar por una línea, y la consideración de que este flujo puede medirse a través de un movimiento regular. Aquí se plantea la cuestión de saber cuándo un movimiento es realmente uniforme, de modo que represente adecuadamente el flujo del tiempo. Barrow piensa que el movimiento más apropiado es el de los astros, cuya regularidad se puede constatar con un reloj bien construido, el cual sería regular en virtud de su construcción: el flujo regular del tiempo se correlacionaría con el movimiento bajo una fuerza regular. Newton fue algo más sutil: percibiendo que quizás no se pudiese encontrar en la naturaleza un movimiento verdaderamente regular, identificó su tiempo absoluto con el tiempo astronómico, pero corregido matemáticamente de irregularidades por la ecuación del tiempo[15].

Como hemos mencionado, Newton tiene razones, basadas muy probablemente en el método de determinación de tangentes, para rechazar el tratamiento geométrico de las curvas por medio de infinitesimales. En el primero de sus manuscritos que citamos más arriba, datado en noviembre de 1665, todavía denota mediante el símbolo *o* un espacio infinitesimal. En octubre de 1666, *o* pasa a representar un momento -en el sentido de un intervalo infinitesimal- de tiempo. Pero todavía las velocidades se expresan mediante los espacios recorridos por el cuerpo en una "unidad" infinitesimal de tiempo, arbitrariamente escogida; ahora el tiempo es la variable independiente. Esto cambia en 1669, donde denomina "momento" a lo que luego llamará "fluxión"; aquí hace constante la velocidad de cambio de la variable independiente, tomando dicha velocidad como unidad. Finalmente, en su tratado de 1671 adopta claramente como unidad el mismo *flujo* del tiempo.

Nótese el empleo del término "continuamente" en la cita de más arriba, cuando reduce a dos problemas el estudio de las curvas. Newton trata aquí las curvas "verdaderas", no lo que considera sus aproximaciones mediante líneas poligonales de infinitos lados (concepción que se tratará en el próximo apartado). Naturalmente, las velocidades o fluxiones que aquí intervienen son verdaderas entidades instantáneas. Es precisamente en este manuscrito donde Newton introduce la denominación de "fluentes" para las variables, y de "fluxiones" para sus velocidades de cambio. De hecho, comenzó a tachar el término "momento", sustituyéndolo por el de "fluxión" (W, *3*, p. 77, n.88). Entonces redactó un parágrafo precisando su relación:

> Los momentos de las cantidades fluentes (esto es, sus partes indefinidamente pequeñas, por cuya adición aumentan durante cada período de tiempo infinitamente pequeño) son como sus velocidades de flujo. (W, *3*, p. 78)

Así, el momento de, digamos, una fluente x se expresa como el producto $\mathrm{fl}(x)o$ de su fluxión $\mathrm{fl}(x)$ y una cantidad infinitamente pequeña o:

> Puesto que o se supone infinitamente pequeño de modo que pueda expresar los momentos de las cantidades, los términos que lo contienen como factor serán como nada respecto de los otros. (W, *3*, p. 80)

Pero con esto Newton no se ha librado de los infinitesimales. Los momentos lo son, gracias a resultar del producto por un intervalo de tiempo infinitesimal o. Por ello, como se decía al principio, muchos investigadores coinciden en señalar que la sustitución de los momentos por las fluxiones no ofrece, en realidad, ninguna ventaja respecto del abandono del infinitesimal.

2. *Una digresión sobre indivisibles, infinitesimales e infinitos*

¿Por qué dudaba Newton, en la cita de más arriba, de "que la infinita pequeñez se pueda considerar geométricamente"? Hay que avanzar bastante en el tiempo para encontrar entre sus escritos una manifestación en este sentido. Es en 1713-14, cuando ya ha publicado el método de las razones primeras y últimas y lo defiende frente al cálculo diferencial de Leibniz. En tal contexto manifestó que el cálculo infinitesimal,

> no está fundamentado en la Geometría de Euclides. No hay ninguna Proposición en Euclides relativa a cantidades o figuras infinitamente pequeñas. El cálculo procede por aproximaciones haciendo los infinitamente pequeños arcos de curvas y sus cuerdas, senos y tangentes iguales entre sí y empleando con frecuencia otras aproximaciones a las que les falta una Demostración rigurosa de que el error es menor que cualquier error dado.[16]

En esta concepción, las curvas no son líneas poligonales con un infinito número de lados infinitesimales. La línea poligonal infinitangular no se identifica con la curva, ya que tan sólo la aproxima. La raíz del problema se encuentra en la naturaleza aparentemente paradójica del infinitesimal, al poseer la propiedad de tener una cantidad o magnitud positiva -y por tanto distinta de cero- y, todavía, ser incomparablemente menor que cualquier número o magnitud finita. Geométricamente, el infinitesimal surgía de una división al infinito de la magnitud pero, a diferencia del indivisible, era homogéneo con ella; así, un infinitesimal de línea tenía las dimensiones de la línea y era divisible, a diferencia del indivisible de línea, el punto, que carece de dimensión. Se podría decir que los infinitesimales surgían de una división de la magnitud potencialmente infinita (infinitamente muchos, pero no tantos que no pueda haber más), mientras que el indivisible se alcanzaría mediante una división por el infinito actual (todos los que son). Era este infinito actual el que separaba las dimensiones[17].

Leibniz, por ejemplo, no aceptó este infinito que hemos denominado actual como entidad matemática[18], y pensaba que no hay un número tal que no existiese otro mayor. Correspondientemente, tampoco existiría un último término en una serie infinita[19].

Wallis, asimismo, se expresaría en estos términos. En su respuesta a Hobbes, escribía:

> Que usualmente en *Euclides*, y en todos los que le siguieron, por *Infinito* no se significa otra cosa sino *Más que cualquier Finito asignable*, y no Absolutamente Infinito, o el mayor posible.[20]

Un proceso de división por este infinito conduciría al infinitesimal, tras lo cual, por decirlo de alguna manera, el proceso habría terminado, no se podría llevar más allá. El proceso, no los estadios sucesivos de división, pues el infinitesimal todavía es divisible. Citemos de nuevo a Wallis:

> Una Cantidad Finita (como AB) se puede *suponer* (por tales bisecciones continuadas) divisible en un número de partes *Infinitamente muchas* (es decir, más que cualquier número Finito asignable:) Pues no hay restricción más allá de la cual no se pueda *suponer* que tal división continúe; (pues aún el último, no importa cuán pequeño, tendrá dos mitades).[21]

Sin embargo, situar a los infinitesimales entre el cero y los números finitos o, en términos geométricos, entre una figura finita y sus indivisibles, podía sugerir que el proceso de división podría llegar más allá, y esto conducía a una concepción del infinitesimal distinta de la anterior. Tal concepción se puede rastrear en las consideraciones que el mismo Wallis hace sobre el ángulo de contacto. Considera un polígono inscrito en un círculo, siendo:

> el número de sus lados infinitamente muchos; tal lado debe ser infinitamente corto (...) y el Ángulo Externo infinitamente pequeño (...) Pero si entonces (...) tal lado (infinitamente pequeño) se supone además que degenera en un Punto, y ese Polígono en un Círculo, (...) el Ángulo de Contacto (...) que era antes infinitamente pequeño, debe ahora ser nada.[22]

El término empleado por Wallis, este proceso que lleva a que el infinitesimal "degenere" o "termine" en un punto, no permite atribuirle sin más la admisión de una concepción correspondiente al que aquí hemos denominado infinito actual; y más cuanto que, como se ha visto en las citas anteriores, en otros lugares se expresa claramente de otro modo. La impresión que se obtiene, sin embargo, es que una línea poligonal de lados infinitamente pequeños constituye, de alguna manera, una aproximación a la "verdadera" curva. Wallis, tratando el ángulo de contacto, dibuja una figura como

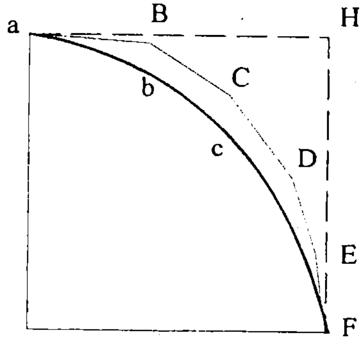

Figura 7

y escribe:

> (...) Así puede variar también la declinación; bien por Saltos, y (una o más) Fracciones (formando así muchos Ángulos Rectilíneos) como en ABC, DEF; o (gradualmente) por Flexión continua, como en una curva continuada AcF: (...).[23]

De este modo, el ángulo de contacto, como quiere mostrar aquí Wallis, resulta de una dimensión inferior al rectilíneo, pero todavía es susceptible de variación en su propia dimensión. Este mismo concepto es el que presentó Newton en el cuaderno del Trinity, redactado durante sus años de estudiante, junto con la aceptación de un infinito actual.

A continuación Wallis caracteriza al ángulo de contacto como lo que denomina un elemento "inceptivo" o "incoactivo". Se trata de entidades que respecto de algún tipo de magnitud no son nada, pero están en la inmediata posibilidad de serlo. Así el punto, considerado en orden al movimiento, es inceptivo de la longitud, como la línea de la superficie, y la superficie del sólido. La "celeridad o rapidez" es inceptiva de la longitud en movimiento, y la aceleración es inceptiva de la velocidad. Tal como la aceleración caracteriza la tasa de cambio de la velocidad, el ángulo de contacto lo hace con respecto a la tasa de cambio de los ángulos rectilíneos. Y estos inceptivos tienen su propia magnitud y pueden compararse entre sí; pero no son infinitesimales, pues, como se ha dicho, para Wallis los infinitesimales de una magnitud son homogéneos con ella[24].

El concepto de estas entidades "inceptivas" es bastante escurridizo. Pero en un texto de Newton datado algunos años antes de la redacción de los *Principia* se encuentra una nueva definición de momento cuanto menos muy similar:

> Los momentos de cantidades son sus principios de generación o alteración en un flujo continuo: como el tiempo presente lo es del pasado y el futuro, el movimiento presente del pasado y del futuro, la fuerza centrípeta o cualquier otra fuerza momentánea del *impetus*, el punto de la línea, la línea de la superficie, la superficie del sólido y el ángulo de contacto del ángulo rectilíneo.[25]

F. De Gandt ha llamado la atención hacia esta concepción del momento como "comienzo": el punto de la línea, la fuerza del *impetus*. Un comienzo, señala, es más que un elemento, "está preñado de la realidad a acontecer"[26]. Una noción que ve próxima al *conatus* de Hobbes, y que en un sentido más o menos similar se puede encontrar en distintos ámbitos y autores de la época: Descartes, Huygens, Spinoza, incluso Leibniz[27]. Y como hemos visto, aunque De Gandt no lo cita, también en Wallis.

Con esta nueva concepción de momento, la igualdad de razones entre éstos y las de las fluxiones es estricta. El momento es, ahora, una magnitud "de punto", al igual que la fluxión. El nuevo momento es el generador del antiguo, el que lo hubiese generado si dispusiese de un pequeño intervalo de tiempo. Pero ahora este intervalo ya no es infinitesimal: Newton ha desterrado esta entidad de sus matemáticas. El nuevo momento es un indivisible generador de magnitudes finitas. Tal como escribirá en los *Principia*:

> Las partículas finitas no son momentos, sino las cantidades mismas generadas por los momentos. Han de entenderse como los mismos principios nacientes de las magnitudes finitas. (N, p. 365; R, p. 431)

En el método fluxional de 1671, Newton llegaba a la razón entre las fluxiones a través de la razón entre los momentos -infinitesimales, homogéneos- que figuraban en el triángulo diferencial. Anulando el intervalo infinitesimal de tiempo *o* en el que dichos momentos se habían generado, llegaba a una relación válida para un punto. Pero, desechado el infinitesimal, los nuevos momentos -indivisibles, heterogéneos- son magnitudes puntuales. ¿Cómo determinar su razón?

3. *Primeras y últimas razones*

En algún momento posterior a la primera redacción del tratado de 1671, Newton escribió algunas nuevas páginas. Tras el catálogo de cierto número de "curvas" y sus "áreas" correspondientes, suministró algunos ejemplos de su empleo, y recomendó que, tras haber hallado así el área de alguna curva, se atendiese a elaborar una prueba que no contuviese cálculos algebraicos (W, *3*, p. 279). En estas pruebas emplea un argumento como el siguiente: toma el rectángulo FEqf igual al espacio Feef,

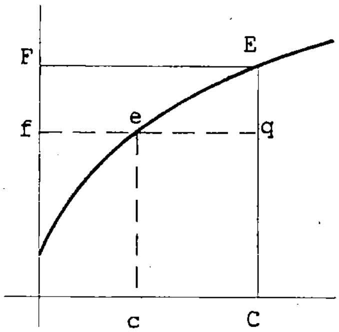

Figura 8

> (...) como (debido a que su diferencia Eqe es infinitamente menor que ellos y así, respecto de ellos, cero), no tienen razón de desigualdad. (W, *3*, p. 283)

Y la justificación que precede inmediatamente a la cita anterior es la siguiente:

> En demostraciones de este tipo debería observarse que tomo como cantidades iguales aquéllas cuya razón es la de igualdad. Y debe considerarse una razón de igualdad la que difiere de la igualdad menos que cualquier razón de desigualdad que pueda asignarse. (W, *3*, p. 279)

Acto seguido, afirma que, sin embargo, el método "basado en la génesis de las superficies por su movimiento de flujo parece una propuesta más natural". Y da un par de ejemplos. Es esta la parte que extiende la nueva redacción, que abre con cuatro axiomas, afirmando el último de ellos que "los momentos contemporáneos son como sus fluxiones" (W, *3*, p. 331). Y a continuación establece como primer teorema que si hay cuatro cantidades fluentes tales que A/B=C/D (AD=BC), entonces:

$$A\,fl(D) + D\,fl(A) = B\,fl(C) + C\,fl(D) \tag{9}$$

Comienza planteando el problema usando un momento M de A de infinita pequeñez, que en el paso final se anula. Pero tacha esta demostración y la sustituye por otra geométrica. En la Fig. 9, las fluentes se representan por las líneas AE, AC, AB, AD.

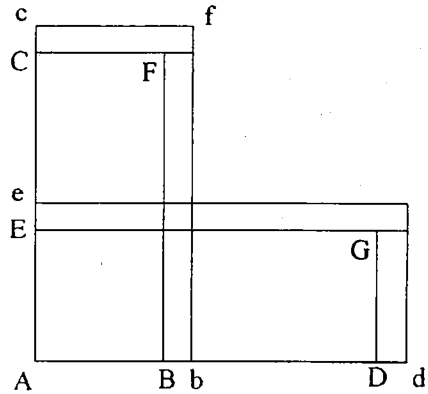

Figura 9

La proporción de partida implica que los rectángulos ACFB y AEGD son iguales. Si las líneas se incrementan fluxionalmente por sus momentos Bb, Dd, Ee y Cc y dado que por hipótesis los rectángulos son iguales, sus incrementos serán iguales:

$$Ab \bullet Cc + AC \bullet Bb = Ad \bullet Ee + AE \bullet Dd \tag{10}$$

y como, de acuerdo con el axioma, los momentos son como sus fluxiones, se podrán sustituir por éstas:

$$Ab \bullet fl(AC) + AC \bullet fl(AB) = Ad \bullet fl(AE) + AE \bullet fl(AD) \tag{11}$$

Pero Newton tacha esto último. Como observa Westfall[28], aquí está tratando de nuevo a los momentos como incrementos infinitesimales y estáticos. En la nueva demostración, escribe:

> Hágase ahora que los rectángulos Af y Ag disminuyan hasta convertirse en los primitivos rectángulos AF y AG: Ab se convertirá entonces en AB, mientras que Ad se tornará AD. Por tanto en el último momento de esa defluxión infinitamente pequeña -esto es, en el primer momento de fluxión de los rectángulos AF y AG cuando comienzan a aumentar o disminuir-, será:
> $$AB \bullet fl(AC) + AC \bullet fl(AB) = AD \bullet fl(AE) + AE \bullet fl(AD)$$
> Como se quería demostrar. (W, *3*, p. 334)

De acuerdo con Whiteside y Westfall[29], aquí nace el concepto de primeras y últimas razones, el cual condujo la noción de valores límite, presente en su método de series infinitas, a su método fluxional[30]. Esta noción de límite se presenta en el Lema I, Secc. I, Libro I de los *Principia*:

> Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales. (N, p. 73; R, p. 157)

Nótese que Newton está afirmando de partida la existencia de un último término, aquél en el que se da la igualdad[31]. A diferencia del tratado de 1671, en el que empleaba infinitesimales, y en donde tomaba como iguales cantidades que difieren en menos de cualquier valor asignable.

Los dos lemas siguientes extienden esto al área bajo una curva, acotada por dos series de paralelogramos, inscritos y circunscritos, cuando la anchura de sus bases disminuye infinitamente.

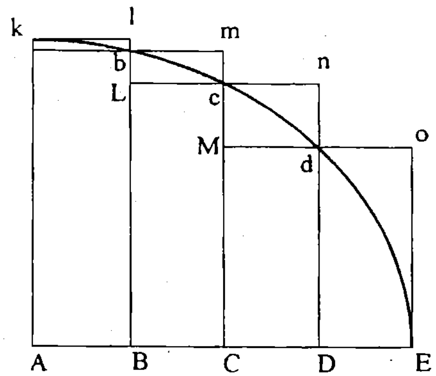

Figura 10

Y finaliza con cuatro corolarios en los que establece que "la suma última de paralelogramos evanescentes coincide en todo punto con la figura curvilínea" y que "estas figuras últimas (en cuanto a los perímetros acE) no son rectilíneas, sino los límites curvilíneos de figuras rectilíneas" (N, p. 75; R, p. 159).

Más adelante, en el Lema VII, establece "que la razón última entre la cuerda, el arco y la tangente entre sí, es la razón de igualdad" (N, p. 78; R, p. 161). El Lema VIII establece (Fig. 11), para los triángulos RAB, RACB, RAD, en donde AD es la tangente y AB la cuerda del arco ACB, que su "forma última (...) es la de semejanza y la razón última de igualdad" (N, p. 79; R, p. 162) cuando los triángulos se desvanecen al aproximarse B a A.

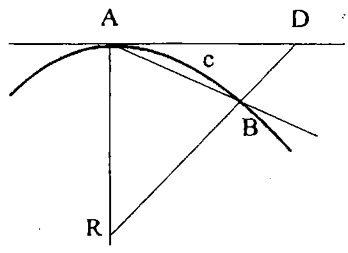

Figura 11

Por ello, afirma en un corolario, "tales triángulos pueden ser sustituidos uno por otro en toda argumentación sobre razones últimas" (N, p. 79; R, p. 163).

Finalmente Newton tiene que justificar la existencia de esas "sumas o razones últimas" de cantidades que decrecen al infinito. Esta justificación, basada en una comparación con el caso del movimiento, no está muy clara. Él mismo plantea la objeción:

> Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas, y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna. (N, p. 87; R, p. 170)

Por la misma razón -escribe- podría decirse que un cuerpo que llega a un punto en el que acaba su movimiento no tendría una velocidad última.

La cuestión es antigua. Platón, en el *Parménides*, introdujo una entidad, al parecer inextensa, para dividir un período de movimiento de otro de reposo. Aristóteles discutió en el Libro VI de la *Física* la naturaleza del tiempo y del instante, por analogía del punto con respecto a la línea. En la Edad Media se la denominó la cuestión *de primo et ultimo instanti*. El problema de fondo es la densidad del conjunto de puntos del continuo: los puntos de una línea no pueden ordenarse sucesivamente pues, entre cada par de puntos, se podrán señalar siempre infinitos puntos. De este modo, si señalamos un instante en el tiempo como principio del reposo, entonces no podremos señalar otro instante inmediatamente anterior como *último* instante de movimiento. Newton ya se había enfrentado a cuestiones similares en el Cuaderno del Trinity. Pero su respuesta, al contrario de lo que afirma, no es nada fácil:

> La respuesta es fácil: por velocidad última se entiende aquélla con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquélla con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquélla con la que cesa el movimiento. (...) Existe un límite que puede alcanzar la velocidad al final del movimiento, pero no puede traspasarlo. Esta es la velocidad última. (N, 87; R, 170)

La tradición medieval, de acuerdo con Aristóteles, entendía que en las entidades sucesivas, como es el caso del movimiento, se daba un último instante de no existencia en su principio, y un primer instante de no existencia en su cese; es decir, se hallaban limitadas extrínsecamente. Mientras que las entidades permanentes se hallaban intrínsecamente limitadas en su principio, y extrínsecamente en su final. De acuerdo con esto, no existirían ni un primer ni un último instantes del movimiento.Galileo, por su parte, caracterizó al reposo como al grado de infinita lentitud[32]. Aserción que cabe interpretar de dos maneras. O bien reposo y movimiento no son entidades distintas, cosa que no parece el caso, pues entonces nunca podríamos decir que un movimiento comienza o cesa, o bien el último instante de reposo es también el primero de movimiento. Pero si se acepta esto último se está admitiendo que sentencias que predican contrarios del mismo sujeto pueden ser ciertas a la vez. Así, por ejemplo, cuando Galileo expone la paradoja del bol, también llamada de la escudilla, resulta que en el estadio final una circunferencia es igual a un punto, el cual es así la última de las circunferencias:

> Parece, pues, que la circunferencia de un círculo inmenso puede considerarse igual a un solo punto. Y esto que sucede con los sólidos, sucede igualmente con las superficies, sus bases, las cuales, conservando siempre, en el curso de su común reducción, la igualdad, acaban, al término de su última disminución, por confundirse la una con la circunferencia de un círculo y la otra con un solo punto. ¿Por qué habríamos de negarnos a tenerlas por iguales, ya que son los últimos vestigios, los últimos restos de cantidades iguales?[33]

La terminología, como se ve, es muy similar a la de Newton.

Cavalieri sostenía que la razón entre las figuras se podía obtener a través de la razón entre sus indivisibles. Pero Galileo presenta la recíproca: la razón entre las figuras finitas es también la que se da entre sus componentes últimos. Las paradojas surjen cuando estos componentes últimos son límites que no pertenecen a la sucesión de figuras. En los ejemplos anteriores, las figuras son superficies, y los componentes últimos son de dimensión inferior. Las paradojas se salvan dotando a los indivisibles de la misma dimensión: esto es, introduciendo los infinitesimales. Con ello pierden -cuanto menos aparentemente- su condición de verdaderamente últimos, de límites. Otra forma de escapar del problema es afirmar que, en rigor, estos límites no se alcanzan nunca. Así, Newton escribe:

> También pudiera objetarse que si se dan razones últimas de cantidades evanescentes, también se darán magnitudes últimas; y así toda cantidad constará de indivisibles, contra lo que demostró Euclides sobre los inconmensurables en el libro décimo de los elementos. Pero esta objeción se apoya en una hipótesis falsa. Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan *in infinitum.* (N, p. 88; R, pp. 170-1)

Ahora bien, ¿cómo disminuyen las cantidades *in infinitum*? Tal como aparece en los *Principia*, de dos modos, pues de dos modos interviene el tiempo: como el tiempo discreto de las operaciones del matemático y como el tiempo continuo del movimiento, sobre cuyo trasfondo las magnitudes crecen o decrecen. F. De Gandt ha destacado la existencia de estos dos modos, así como el carácter cinemático de la geometría de los *Principia*[34]. El primero aparece en los Lemas II a V, que tratan de la aproximación de figuras rectilíneas mediante series de paralelogramos cuya anchura disminuye al infinito; el segundo, en los Lemas VI a XI, en donde un punto B de un arco AB se mueve sobre él hasta llegar a coincidir con A. En el primer caso, el tiempo requerido para la total coincidencia con las figuras es infinito, y su igualdad última sólo puede establecerse mediante la extrapolación de la situación en un tiempo finito, que es precisamente lo que establece el Lema I. En el segundo caso, B alcanza efectivamente a A en un tiempo finito, por lo que el límite también se alcanza. Lo que sucede es que en este límite el valor de la razón de las cantidades continuamente decrecientes se torna indeterminado -un cociente entre ceros-, y sólo puede asignarse en virtud de un principio de continuidad. Como escribe Newton, antes de que desaparezcan estas cantidades la razón no es última, y después de desaparecidas no puede darse razón. Siendo continua la transición entre estas dos situaciones, ésta debe haberse efectuado en algún momento.

Newton no va más lejos en sus explicaciones, así que no se puede saber si realmente pensaba, como en el ejemplo del movimiento, que el último instante de éste es también el primero de reposo. Bien puede ser que opinase que esta situación no es contradictoria. Así, por ejemplo, hablar de "las dos en punto" significa demarcar un punto en el continuo temporal, una frontera *común* -siguiendo la definición de Aristóteles de continuidad- entre dos horas. ¿No es, a la vez, esta frontera el final de la una y el principio de las dos? Cuando se divide un segmento de línea AB en un punto intermedio C, ¿es C un solo punto, o hay que hablar de dos, uno el extremo de AC y el otro el de CB? También se podría objetar que en un punto no puede haber movimiento, puesto que cualquier movimiento supone una cierta distancia recorrida. Pero todavía Newton podría decir que se puede hablar de una última velocidad, entendida como la disposición a finalizar el movimiento, y con la que el movimiento termina. La existencia de una velocidad última, límite de la razón entre espacios recorridos y tiempos empleados en recorrerlos, no presupone, como dice, la existencia de un último espacio y de un último intervalo de tiempo.

En uno de los borradores de su réplica a la recensión que hizo Leibniz del *De Analysi* en las *Acta Eruditorum*, y que quedó manuscrita, Newton señala las diferencias de su método con el de los infinitesimales:

> Pues en este método las cantidades nunca se consideran infinitamente pequeñas ni se sustituyen nunca los arcos por líneas rectas ni se aproxima ninguna línea o cantidad por cualquier otra línea o cantidad a la cual no es exactamente igual, sino que toda la operación se realiza exactamente con cantidades finitas por la Geometría de Euclides hasta que se llega a una ecuación, y entonces la ecuación se reduce rechazando los términos que se anulan entre sí y dividiendo el residuo por la cantidad finita *o*, y haciendo a esta cantidad *o*, no tornarse infinitamente pequeña, sino desvanecerse completamente. (...) Ahora, por la desaparición de *o*, queda una ecuación que resuelve el Problema. (W, *2*, p. 264)

Se ve que, si bien sus fundamentos geométricos son distintos, a nivel algebraico ambos métodos vienen a resultar equivalentes.

4. *¿Renunció Newton al infinitesimal?*

Como hemos visto, Newton sostuvo dos concepciones de "momento". En la primera era una cantidad infinitesimal, obtenida mediante el producto de la variable por el infinitesimal de tiempo *o*; en la segunda, el momento es un indivisible dotado, aun así, de la tendencia, poder o capacidad de generar un incremento finito indefinidamente pequeño. Pero en el Lema II del Libro II de los *Principia* Newton fomenta la confusión entre ambas concepciones al buscar comparar su método con el de Leibniz y remontar su elaboración a 1671. Refiriéndose a las fluentes, escribe:

> Considero aquí a dichas cantidades como indeterminadas y variables y como si creciesen y decreciesen con un movimiento o flujo continuo; y a sus incrementos o decrementos momentáneos es a lo que llamo momentos: de modo que los incrementos pueden considerarse como momentos añadidos o positivos y los decrementos como negativos o substraídos. Pero cuídese de no entenderlo como partículas finitas. Las partículas finitas no son momentos, sino las cantidades mismas generadas por los momentos. Han de entenderse como los mismos principios nacientes de las magni-

tudes finitas. Y ni siquiera se contempla en este lema la magnitud de los momentos, sino la proporción primera entre momentos nacientes. Lo mismo ocurre si en lugar de momentos se trata de las velocidades de los incrementos (que también pueden llamarse movimientos, mutaciones, fluxiones de cantidades) o bien de cualquier cantidad finita proporcional a dichas velocidades. (N, pp. 364-65; R, p. 431)

En la primera edición de los *Principia*, tras la frase de la cita anterior en donde se manifiesta que los momentos no pueden entenderse como magnitudes finitas, Newton escribió:

> Los momentos, en tanto que son de magnitud finita, dejan de ser momentos, pues tener fin es incompatible en cierto modo con su incremento o decremento perpetuos. (N, p. 365, n.)

Estas líneas desaparecieron en las ediciones posteriores, quizás porque las consideró superfluas. Conviene, pues, distinguir entre fluxiones, momentos y aumentos. En el *De Quadratura Curvarum* (1704) precisa:

> Las fluxiones son muy aproximadamente como los aumentos de sus fluentes engendrados en las más pequeñas partículas iguales de tiempo: expresándolo exactamente están en la primera razón de los aumentos nacientes, pero pueden ser expresadas por cualesquiera líneas que les sean proporcionales. (W, *8*, pp. 122-24)

Y más adelante, en un manuscrito titulado 'Analysis per quantitates fluentes et earum momenta', datado hacia abril de 1712, escribe:

> Fluxiones y momentos son muy aproximadamente como los aumentos de sus fluentes (W, *8*, p. 260)

En cualquier caso, está claro que los momentos, geométricamente, son indivisibles respecto de las variables; pero, con todo, guardan razón entre sí, esto es, llevan asociada una "medida" de su tendencia generadora.

Si los infinitesimales se conciben como elementos en una recta real densa, la recta euclídea, entonces la primera concepción de momento de Newton, pero no la segunda, les resulta equivalente. Pero si se toman sobre una recta real hiperdensa, entonces les resulta equivalente esta segunda concepción de momento; con la salvedad, nada trivial, de que Newton sólo aceptaba la recta euclídea. Es decir, que allí donde se introducen más puntos para dar cabida a "verdaderos" infinitesimales, Newton introduce su equivalente algebraico como medida en un punto. Así, el límite de las razones newtoniano es la razón entre estos infinitesimales, y la diferencia entre ambas concepciones consiste en que para Newton el paso al límite permite determinar la razón entre cantidades últimas aun sin que existan geométricamente dichas cantidades -pues, recordemos, su recta real no es hiperdensa-, mientras que en el método infinitesimal existen estas cantidades -las diferenciales- y por ello no se precisa recurrir al paso al límite.

Si esta interpretación es correcta, entonces no se puede hablar, en una reconstrucción histórica, de infinitesimales y diferenciales sin precisar algo más el tipo de entidades a las que se está calificando. Antes de la invención del análisis no estándar, los estudios históricos trataban a los diferenciales con cierta indulgencia -un camino fecundo, pero sin salida-, y su caracterización no era muy esmerada, a sabiendas de que, en fin de cuentas, carecían de legitimidad matemática. Este es por ejemplo el caso de C. Boyer, quien los califica de "los menores intervalos posibles", cuando en realidad son divisibles[35]. Y aunque, como observa muy atinadamente, la base del cálculo tal como apareció en los *Principia* se encuentra en la naturaleza de los momentos, no llega a discernir -aún no se habían publicado los manuscritos de Newton- las dos diferentes concepciones de momento que Newton sostiene. Así que funde ambas interpretando a los momentos como cantidades infinitamente pequeñas. Lo cual no obsta para que su análisis sea penetrante y calibre la confusión que el mismo Newton originó al afirmar la equivalencia de los dos métodos y publicar el primero después de que viesen la luz los *Principia.*

Un buen ejemplo de las manipulaciones de Newton lo ofrecen los tres borradores que redactó en 1713 como respuesta a la recensión de Leibniz en las *Acta Eruditorum*, ya mencionados. En el primero de ellos, tras afirmar (véase la cita de más arriba) que *o* es una cantidad finita que se anula al final del cálculo, escribe que en 1669 él mismo (habla de sí en tercera persona):

> da el nombre de momentos a cantidades infinitamente pequeñas y las representa por los mismos caracteres, poniendo *o* para una cantidad infinitamente pequeña. (W, *2*, p. 264, n.10)

frase que después tacha, escribiendo en cambio que:

> A veces considera a las cantidades creciendo o decreciendo por movimiento continuo o fluxión, y da el nombre de momentos a sus incrementos o decrementos momentáneos; (...). (W, *2*, p. 265)

En el segundo borrador, dice:

> Representa al tiempo por cualquier cantidad que fluya uniformemente, la fluxión del tiempo por una unidad, un momento de tiempo por la letra *o*, otras cantidades fluentes y sus fluxiones por algunos otros símbolos, y sus momentos por sus fluxiones extendidas en un momento de tiempo, adoptando el nombre de momentos de los momentos de tiempo en los que son generados y el de fluxiones de la fluxión del tiempo. Si está investigando o resolviendo un Problema, usa la letra *o* para representar un momento infinitamente pequeño y para mayor brevedad no lo expresa, poniendo únicamente el símbolo de la fluxión tanto para la fluxión como para el

> momento, pero omitiendo expresar el coeficiente *o* cuando significa el momento. Si está demostrando alguna Proposición, siempre expresa la letra *o* y la emplea para representar un momento finito o una parte de tiempo indefinidamente (no infinitamente) pequeña. (W, *2*, p. 266)

Finalmente, en el tercer borrador equipara a los momentos (entendidos como cantidades infinitamente pequeñas que responden a un "momento de tiempo") con las diferenciales de Leibniz (W, *2*, p. 273). Aún habiendo renunciado a los infinitesimales, Newton tiene que recurrir a su primera concepción de momento para afirmar su prioridad sobre Leibniz.

La interpretación de P. Kitcher, por su parte, se ve oscurecida por la notación que emplea. Así, expresa cómo Newton consiguió dar un fundamento sintético al método de fluxiones en los siguientes términos:

> Si $dx(t)$ y $dy(t)$ son pequeños incrementos en x e y, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son las fluxiones de x e y, entonces la diferencia entre las razones $dy(t){:}dx(t)$ e $\dot{y}:\dot{x}$ puede hacerse tan pequeña como se quiera escogiendo t suficientemente pequeño.[36]

La notación diferencial que emplea oscurece el hecho de que $dx(t)$ y $dy(t)$ no son infinitesimales; y, por otra parte, no menciona aquí que su cociente se hace, no sólo tan pequeño como se quiera al disminuir t, sino estrictamente nulo.

La opinión de T. Lai es que el método de las razones, introducido con el propósito de desterrar al infinitesimal, es inseparable del método de las fluxiones; y que este último emplea al infinitesimal, pues considera que los momentos son infinitesimales[37]. Pero también considera que lo son los puntos y las líneas que, por su movimiento, generan las líneas y superficies[38]. Esta afirmación quizá pudiese ponerse en resonancia con lo que se dijo más arriba sobre la naturaleza de los infinitesimales y la estructura del continuo, de no ser porque Lai remonta la concepción a Henry More. En su *Inmortality of the Soul* (1662), More considera al punto de contacto entre un globo y un plano como una entidad mínimamente extensa e indivisible que, por repetición, generaría una línea. Una concepción que Newton abandonó ya en el Cuaderno del Trinity.

Z. Bechler es otro autor que opina que Newton escondió el infinitesimal. Defiende, como se hace aquí, la utilización por parte de Newton del infinito actual, lo que lleva a aceptar la existencia de un "último" estado y, en consonancia con esto, considera a las razones primeras y últimas como "una nueva categoría de existencia" que consistiría en la coexistencia simultánea de una entidad (velocidad, longitud) en el último estado de no ser y el primero de ser[39]. Pero interpreta la velocidad instantánea no como un "poder" o "tendencia", sino como una verdadera velocidad, lo que le lleva a suponer que Newton modificó el concepto de instante, que en tal caso no sería finito ni, dado que "debe acomodar la existencia de la velocidad en él", cero, y por ello deduce que debe poseer alguna estructura interna[40]. De modo que, en definitiva, el instante de tiempo no sería inextenso, sino infinitesimal. Llega así a atribuir a Newton una concepción geométrica del infinitesimal coincidente con la que surgiría del análisis no estándar. Mi interpretación, como se ha visto, difiere de la suya en estos últimos aspectos.

Finalmente, R.T.W. Arthur subraya la centralidad que el flujo del tiempo desempeña en el cálculo de Newton, y el carácter de continuidad de que dota a su análisis, permitiéndole asumir que cada fluente tiene una tasa de generación, o fluxión, en cada instante[41]. Sin embargo, va demasiado lejos buscando una reivindicación para el rechazo de Newton al infinitesimal, al considerar que, tanto en el esquema fluxional de 1671 como en su formulación del método de las razones, sus momentos son sólo cantidades indefinidamente pequeñas.

5. *Conclusión*

La segunda mitad del siglo XVII es un momento en el que aparecen los nuevos procedimientos de análisis matemático, en el que comienzan a concretarse las relaciones entre la geometría y el álgebra, y en el que se configura una nueva física matemática que no sólo emplea los recursos de ambas, sino que les demanda nuevos desarrollos. En tal contexto, conceptos como los de infinitesimal e infinito no siempre tenían un sentido unívoco.

Por el lado del álgebra, el infinitesimal es una entidad que se sitúa entre el cero y lo finito. Tiene la curiosa propiedad -como destacarían sus detractores- de ser una cantidad positiva a lo largo del cálculo, pero de considerarse estrictamente nula en su paso final. Aunque todavía su introducción presentaba menos problemas que en geometría. En el campo de los números, lo que hoy entendemos por el conjunto de los reales todavía estaba en vías de formación. Se dudaba de que los irracionales fuesen verdaderos números; también estaban los negativos, los imaginarios, e incluso los había calificados de "artificiales": los logaritmos. Eran "entes de la razón", ficciones útiles sin correlato en el mundo real (tal como Leibniz presentó en alguna ocasión a sus diferenciales).

La geometría, por su parte, tenía una tradición más amplia y, matices aparte, las entidades que constituían su objeto estaban caracterizadas desde antiguo. En este terreno, los infinitesimales debían encontrar su acomodo en las dimensiones. El requisito de homogeneidad obligaba a que un infinitesimal de línea fuese, también, una línea, y como tal se concibiese limitado en sus extremos por dos puntos y susceptible de ser dividido señalando un punto en su extensión. A diferencia de los indivisibles, que sólo constituían los límites de las figuras geométricas, los infinitesimales se consideraban sus elementos constituyentes. Así, hubo quienes pensaron -como he intentado mostrar, Newton entre ellos- que en el paso final del cálculo estos infinitesimales se anulaban en razón de su (infinita) pequeñez lo que, si se los contemplaba como entidades positivas, suponía cometer, todavía, un error. Concepción alentada por las mismas representaciones de la geometría, en las que el infinitesimal, por ejemplo, de línea, se dibujaba como un segmento finito y, además, se superponía a un tramo de la curva, mezclando en la misma figura representaciones relativas a dos órdenes distintos: lo finito y lo infinitesimal.

Este era el tipo de problemas de fundamentación que surgían cuando se ponía el acento en la naturaleza homogénea del infinitesimal, en su carácter de entidad con una magnitud positiva. Por el contrario, poner dicho acento en su carácter, digamos, heterogéneo, en su condición de ser incomparablemente menor que cualquier magnitud finita, podía llevar a caracterizar una entidad próxima al indivisible. Dentro de este género caería la segunda concepción de "momento" de Newton. Dado que las viejas discusiones sobre la composición del continuo habían dejado bastante claro que ni tan siquiera una cantidad infinita de indivisibles inextensos podía llegar a formar una magnitud finita, estos elementos inhomogéneos no podían *componer* la magnitud, aunque sí podía dotárseles de la capacidad de *generarla*. Posiblemente por ello Newton no los calificó de "infinitesimales" (tampoco, como se ha visto, Wallis). Se trata de una entidad de carácter dinámico, a diferencia de la anterior que cabría calificar, aun siendo una variable, de estática, y que se inserta en el marco conceptual de la generación de las figuras geométricas por el movimiento.

En el caso de la obra mecánica de Newton, la tradición histórica señala una especie de tensión nunca resuelta entre lo discreto y lo continuo. Así en el caso de las dos definiciones de fuerza de los *Principia*; y en las que se han considerado dos aproximaciones distintas a la actuación de las fuerzas centrípetas, la una -denominada "poligonal"- por el paso al límite de una sucesión de impulsos instantáneos, la otra -denominada "parabólica"- por la aplicación de la ley de Galileo de la caída de los graves. La diferencia entre estas concepciones es análoga a la que, en esta reconstrucción, separa sus dos sucesivas concepciones de "momento". De modo que, si mi interpretación es acertada, debería poder arrojar alguna luz sobre esta cuestión y mostrar, como en el presente caso de su rechazo al infinitesimal, que, en definitiva, estas tensiones -cuanto menos en cierta medida- tienen su origen en las interpretaciones de su obra antes que en el pensamiento del mismo Newton. Esto es lo que trataré de abordar en un próximo trabajo.

Notas

† Debo agradecer a C. Solís, J. Romo y E. Rada que se tomasen la molestia de leer el manuscrito y efectuar algunas útiles sugerencias, así como las que propuso el informante de este trabajo con vistas a su mejora; además, E. Rada me ayudó a revisar las traducciones del latín. Por supuesto, cualquier defecto de traducción o contenidos es sólo mío.

1 Boyer (1959, p. 201).

2 Kitcher (1973, p. 44, en nota 39).

3 Lai (1975, p. 135).

4 Bechler (1991, p. 249).

5 Arthur (1995, p. 343).

6 Y todavía sigue considerándolas equivalentes a una superficie; cuando determina la cuadratura de la parábola, escribe: "Now suppose y^e lines called x doe increase in arithmeticall proportion [y^n] all y^e x's taken together make y^e superficies *dch* (...)". (Whiteside 1967-81, vol. 1, p. 93). Con el fin de aligerar las notas, en lo sucesivo se hará referencia a esta obra en el texto con la inicial, el volumen y la página: (W, *1*, p. 93).

7 Westfall (1980, p. 111). Su empleo, en (W, *1*, p. 557; véase la n. 21 y pp. 245-251). La cantidad *o* -un cero pequeño- es la *E* de Fermat, el cual nunca dijo que fuese un infinitesimal o bien que tendiese a cero. Tampoco parece que Newton la use, en un primer momento, en un sentido distinto al de una cantidad muy pequeña.

8 Westfall (1980, pp. 128-129) y (W, *1*, pp. 272-278).

9 Westfall (1980, p. 128), dice que esta introducción se efectúa ya desde un primer momento, al apuntar que en nuestra fig. 1 Newton escoge los puntos *e* y *f* separados por una distancia infinitesimal. Pero, como hemos visto, Newton habla por primera vez de infinitesimales en la demostración correspondiente a nuestra fig. 2, cuando introduce el triángulo característico.

10 Mancosu (1996, pp. 71 ss.)

11 Newton (1726; 1978, p. 15). He seguido la traducción de E. Rada, en la p. 97 de la ed. en español. Con el objetivo de aligerar las notas, en lo sucesivo se citará en el texto así: (N, p. 15; R, p. 97).

12 "To find y^e velocitys of bodys by y^e lines they describe", en (W, 1, pp. 382-389). La primera aparición del método, en pp. 343-344. Véanse asimismo pp. 363 y ss.

13 Conocida como 'Tractatus de methodis serierum et fluxionum', si bien Newton no le dio título. En (W, *3*, pp. 32-328).

14 Véase Arthur (1995, pp. 336-339), para una discusión de la influencia de Barrow sobre el método fluxional de Newton.

15 Esto es lo que se argumenta convincentemente en Arthur (1995). Pero, en cualquier caso, nótese que en la determinación de la ecuación del tiempo intervenían las medidas efectuadas con péndulos. De modo que el concepto de uniformidad de una escala de tiempos es siempre relativo a un conjunto determinado de fenómenos físicos, y por tanto sólo puede ser objeto de definición. Así que, en definitiva, podríamos decir que el tiempo absoluto de Newton es aquél que interviene en las ecuaciones de Newton.

16 (W, *2*, pp. 271-272). El 'De Analysi per Aequationes infinitas', compuesto por Newton en 1668-69, fue publicado por William Jones en 1711, y fue objeto de una recensión de Leibniz al año siguiente en *Acta Eruditorum.* Newton redactó una réplica que quedó manuscrita, de la que se conservan tres borradores (W, *2*, pp. 263-273). La cita pertenece al último de ellos. Véase Westfall (1980, pp. 717 ss)., particularmente la p. 724.

17 Otros autores, por ejemplo Malet (1996, p. 19), expresan con el término "infinito actual" el proceso de división que conduce al infinitesimal, y que se correspondería con el que en este trabajo se ha denominado "infinito potencial" -en rigor, quizás tendría que haberse denominado "infinito potencial actualizado". La diferencia atañe a los términos, no a los conceptos implicados.

18 Véase Knobloch (1990), así como Knobloch (1994).

19 Véase McDonald Ross (1950) en Lamarra (ed.), esp. pp. 128-130.

20 Wallis (1671, p. 2241).

21 *Ibid.*, pp. 2242-43.

22 Wallis (1685, p. 91).

23 Wallis, (1685, pp. 97).

24 Malet (1997b, pp. 87-88); también Malet (1996, pp. 45-48).

25 El texto se encuentra en una revisión del manuscrito 'De motu corporum', y fue cancelado. Pero el concepto es el mismo que se expresa en el Lema II del Libro II de los *Principia.* En Herivel (1965, p. 306).

26 De Gandt (1992, p. 154).

27 En un texto de 1671 titulado 'Theoria Motus Abstracti, Hypothesis Physica Nova' defiende la existencia de indivisibles o inextensos como comienzos o fines de un cuerpo, de un movimiento (el *conatus*), de un tiempo (el instante). Afirma que el *conatus* es al movimiento como el punto al espacio, o como uno a infinito. *Ibid.*, p. 155.

28 Westfall (1980, p. 230).

29 (W, *3*, p. 334, n.16), y Westfall (1980, p. 231).

30 El concepto se afirma explícitamente como axioma en un manuscrito, la *Geometria Curvilinea*, datado en o c. 1680, que según Whiteside constituye un paso intermedio entre su tratado de 1671 y el Lema II del Libro II de los *Principia*: "Las fluxiones de las cantidades están en la primera razón de sus partes nacientes o, lo que es exactamente lo mismo, en la última razón de aquellas partes cuando se desvanecen por defluxión" (W, 4, p. 426).

31 Como hace notar Bechler (1991, pp. 238-9), existe una tercera posibilidad que un aristotélico -y el mismo Leibniz, como hemos visto- defendería: que no existe un último término. Pero Newton no concede al lector esta posibilidad.

32 Galilei (1632; 1968, Vol. VII, p. 44; p. 20 de la trad. de A. Beltrán).

33 Galilei (1638; 1968, Vol. VIII, p. 75; p. 104. de la trad. de J. Sádaba).

34 De Gandt (1986).

35 Boyer (1959. p. 12).

36 Kitcher (1973, p. 47).

37 Lai (1975, p. 130).

38 *Ibid.*, p. 133.

39 Bechler (1991, pp. 244-45).

40 *Ibid.*, p. 245.

41 Arthur (1995).

BIBLIOGRAFIA

Arthur, R.T.W.: 1995, 'Newton Fluxions and Equably Flowing Time', *Stud. Hist. Phil. Sci.* 26, 323-351.

Bechler, Z.: 1991, *Newton's Physics and the Conceptual Structure of the Scientific Revolution*, Dordrecht, Kluwer.

Boyer, C.B.: 1859, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Nueva York, Dover (reimp. de la ed. Orig. de 1949).

De Gandt, F.: 1986, 'Le style mathématique des *Principia* de Newton', *Rev. Hist. Sci.* 39/3, 195-222.

De Gandt, F.: 1992, 'Newton: La justification des infiniment petits et l'intuition du mouvement', in F. Monnoyeur (ed.): *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, París, Eds. Belin, pp. 147-157.

Galilei, G.: 1968, *Opere*, 20 vols. Ed. de A. Favaro. Repr. Florencia, Barbera. (1ª ed. 1890-1909).

Galilei, G.: 1632; 1994, *Galileo Galilei. Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*, Madrid, Alianza. Ed. A. Beltrán.

Galilei, G.: 1638; 1976, *Galileo Galilei: Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Madrid, Editora Nacional. Intr. de C. Solís y trad. de J. Sádaba.

Garrison, J.W.: 1987, 'Newton and the relation of mathematics to natural philosophy', *J. Hist. Ideas* 48, 609-627.

Herivel, J.: 1965, *The Background to Newton's Principia. A Study of Newton's Dynamical Researches in the Years 1664-84*, Oxford, Clarendon Press.

Kitcher, P.: 1973, 'Fluxions, Limits, and Infinite Littlenesse. A Study of Newton's Presentation of the Calculus', *Isis* 64, 33-49.

Knobloch, E.: 1990, 'L'infini dans les mathématiques de Leibniz', in A. Lamarra (ed.), pp. 33-124.

Knobloch, E.: 1994, 'The infinite in Leibniz's mathematics -the historiographical method of comprehension in context', in K. Gavroglu, J. Christiandis, E. Nicolaidis (eds.): *Trends in the Historiography of Science* (Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 151), Dordrecht, Kluwer, pp. 265-278.

Lai, T.: 1975, 'Did Newton renounce infinitesimals?', *Historia Mathematica* 2, 127-136.

Malet, A.: 1996, *From Indivisibles to Infinitesimals. Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*, Bellaterra, Univ. Autónoma.

Malet, A.: 1997a, 'Isaac Barrow and the Mathematization of Nature: Theological Voluntarism and the Rise of Geometrical Optics', *J. Hist. Ideas* 58, 265-287.

Malet, A.: 1997b, 'Barrow, Wallis, and the Remaking of Seventeenth Century Indivisibles', *Centaurus* 39, 67-92.

Mancosu, P.: 1989, 'The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Science, 1700-1706', *Historia Mathematica* 16, 224-248.

McDonald Ross, G.: 1990, 'Are there real infinitesimals in Leibniz Metaphysics?', in A. Lamarra (ed.): *L'infinito in Leibniz. Problemi e terminologia*, Roma, Edizioni dell'Ateneo, pp. 125-141.

Newton, I.: 1726; 1972, *Isaac Newton's Philosophiae naturalis principia mathematica*, 3ª ed. (1726), con anotaciones de A. Koyré, I. B. Cohen y A. Whitman, Cambridge (Ingl.), Univ. Press, y Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 2 vols.

Newton, I.: 1726; 1987, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, ed. de E. Rada, Madrid, Alianza, 2 vols.

Wallis, J.: 1671, 'An Answer to Four Papers of Mr. Hobs, lately Published in the Months of August, and this present September, 1671', *Phil. Trans.* 75, 2241-2253.

Wallis, J.: 1685, *A Defense of the Treatise of the Angle of Contact*, Londres, 1684. En Apéndice a la obra *A Treatise of Algebra*, Londres, 1685, pp. 69-105.

Westfall, R.S.: 1980, *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton*, Cambridge, Cambridge Univ. Press.

Whiteside, D.T. (ed.): 1967-81, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, 8 Vols., Cambridge, Cambridge Univ. Press.

Manuel A. Sellés es licenciado en Ciencias Físicas y Doctor en Filosofía, y profesor titular de Historia de la Ciencia Moderna y Contemporánea de la UNED. Ha investigado en historia de la teoría de la relatividad restringida, y en astronomía y navegación en el siglo XVIII; actualmente trabaja en problemas relacionados con la matematización de la filosofía natural en los siglos XVII y XVIII. Es autor de *En torno a la génesis de la teoría especial de la relatividad* (1984), *El Observatorio de Marina de Cádiz, 1753-1831* (1988; con A. Lafuente), *La revolución científica* (1991; con C. Solís), *Los instrumentos de la navegación: del Mediterráneo al Pacífico* (1994) y *Solo en casa. Guía para el estudio de la Historia de la Ciencia* (1996; con C. Solís).