SIMPLIFICANDO EL ANALISIS DE LAS COMPARACIONES DE APROXIMACION
(*Simplifying the Analysis of the Approximation Comparisons*)

Juan Carlos GARCIA-BERMEJO*

Manuscrito recibido: 1998.2.6.
Versión final: 1999.9.21.

* Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de Canto Blanco, 28049 Madrid. E-mail: juancarlos.gbermejo@uam.es

BIBLID [0495-4548 (2000) 16: 38; p. 349-382]

RESUMEN: Con este artículo se pretende simplificar la propuesta presentada en un trabajo anterior,[1] prescindiendo como conectiva del símbolo barra de la probabilidad condicionada. Haciéndolo, se consigue reducir a la mitad el número de condiciones postuladas, percibiéndose con ello mejor el lugar central de la condición de superioridad por implicación. También se aborda qué información pueda proporcionar el grado de aproximación de los modelos teórico-económicos sobre lo que vaya a terminar sucediendo en las situaciones empíricas correspondientes, se indican dos formar de ampliar el análisis para incrementarla, y se comenta la aplicabilidad práctica de las comparaciones estudiadas.

Descriptores: aproximación a la verdad, comparaciones de aproximación, aplicación aproximada de modelos teóricos económicos, modelos teóricos económicos, modelos irreales, modelos aproximados.

ABSTRACT: *The proposal about the approximation comparisons presented in an earlier essay may be simplified doing without the bar symbol of conditional probability. In this way, the number of the postulated conditions diminish in a half, and the key role of the superiority by implication property is better perceived. Attention is also paid to what information can be gathered from the approximation degree of economic theoretical models about what may finally happen in the corresponding empirical situations, and to the ways by which this information can be increased. Some comments about the applicability of approximation comparisons are added.*

Keywords: *approximation to the truth, approximation comparisons, approximative application of theoretical economic models, economic theoretical models, irrealistic models, approximative models.*

SUMARIO

1. Introducción

La construcción y el análisis de modelos matemáticos constituyen la estrategia fundamental de investigación en la corriente mayoritaria de la teoría económica.[2] Es un fenómeno relativamente reciente, pudiéndose relacionar su expansión con la difusión de la teoría del equilibrio general y de su enfoque axiomático.[3]

Si la estrategia es reciente, todavía lo es más la percepción de las diferencias que trae consigo respecto de las visiones más tradicionales sobre el método apropiado en ciencia empírica.

En la literatura filosófica, el protagonismo casi exclusivo concedido a las teorías, entendidas la mayor parte de las veces como conjuntos de afirmaciones legaliformes, ha tendido a relegar la función de los modelos a un lugar secundario. Además, unido ese protagonismo a la marginación a la que ha sido sometido el contexto de descubrimiento, entre los dos han contribuido más a dificultar la comprensión de las funciones que los modelos pueden cumplir en la investigación teórica, que a facilitarla.[4]

Esta herencia ha condicionado también a los filósofos de la ciencia dedicados al estudio metodológico de la economía. Daniel Hausman, por ejemplo, convencido de la importancia de los modelos para entender la teorización económica, dedica un capítulo de su obra más conocida a las relaciones entre la teoría y los modelos económicos. Sin embargo, y como concluimos en otro lugar, el *status* de los modelos sería a la postre de subordinación a la teoría, entendida ésta además en términos bastante tradicionales: como conjunto de afirmaciones legaliformes.[5]

El peso de la tradición también se ha sentido entre los propios economistas. Seguramente ha sido la falta de ajuste entre el pensamiento de corte tradicional y la práctica de la investigación uno de los factores que han favorecido la creciente escasez de contribuciones metodológicas en los medios teóricos. En cualquier caso, ya en su ensayo metodológico dedicado a acompañar la presentación y difusión de la teoría axiomática del equilibrio general, Tjalling Koopmans hablaba de la teoría económica como una archivo de modelos. Más recientemente, Robert Aumann se ha expresado en términos muy parecidos.[6] Un autor de tanta audiencia como Paul Krugman mantiene una postura muy clara respecto de la peculiaridad de la investigación teórica basada en los modelos.[7] Robert Lucas, primero, y Edward Prescott y Finn Kydland después, han analizado con cierto detalle los aspectos del tipo de modelos y de su empleo que ellos proponen.[8] Pero quizá sea una frase del conocido artículo de Allan Gibbard y Hal Varian sobre los modelos económicos la que mejor ilustre y refleje la convicción de que el diseño y el análisis de modelos matemáticos es una estrategia de investigación con caracteríticas propias:

> Gran parte de la investigación teórica, en lugar de consistir en una búsqueda de leyes económicas, o en la formulación de hipótesis explícitas acerca de las situaciones analizadas y en su contrastación, consiste en investigar modelos económicos.[9]

Una peculiaridad de los modelos teóricos en economía abiertamente reconocida es que suelen carecer de contrapartidas empíricas exactas. Además, en muchas ocasiones tampoco tienen contrapartidas que pudieran juzgarse aproximadas en un grado significativo. Seguramente, uno de los problemas metodológicos más interesantes abiertos hoy en relación con la economía es entender la función que pueden desempeñar modelos como aquellos en los que, en términos de Gibbard y Varian, en lugar de tratar de representar las situaciones empíricas, se distorsiona deliberadamente la realidad.[10] Otra circunstancia metodológica de gran interés, relacionada con la anterior, es la frecuencia con la que para explicar o predecir fenómenos en un cierto tipo de entorno, se construyen y emplean modelos cuyo entorno es claramente distinto y no pretende ser una representación de aquél lo más aproximada posible.[11] Por otro lado, los problemas de la falta de acoplamiento de las construcciones teóricas con los hechos no se circunscriben a los entornos diseñados en los modelos. Las críticas a las nociones de racionalidad y de equilibrio por sus desviaciones y problemas empíricos y predictivos son muy conocidas y ampliamente admitidas dentro y fuera de la profesión, como sucede, por ejemplo, con las vinculadas con el concepto de racionalidad acotada de Herbert Simon.[12] En síntesis, los modelos económicos, que son la pieza clave de la investigación teórica, suelen incorporar simplificaciones y distorsiones que impiden aplicarlos sin más a los casos empíricos a cuyo análisis están destinados, o para cuyo análisis han sido construidos.

Una circunstancia muy valorada a este respecto es que los resultados disponibles en torno a un conjunto de cuestiones o de problemas sean robustos. Un conjunto de resultados robustos favorecen la creencia de que en situaciones próximas a las analizadas en los modelos de los que han sido obtenidos, los fenómenos que a la postre tengan lugar terminarán siendo similares a esos resultados, mientras que si éstos hubieran sido más dispersos, esa creencia no se habría generado, o no lo hubiera hecho con la misma fuerza ni el mismo grado de concreción.

En relación con el problema de la aplicabilidad de las construcciones teórico-económicas, hay otra circunstancia que tradicionalmente ha sido muy valorada también y por razones muy similares: la circunstancia de que los modelos en los se que base el análisis sean aproximados a las situaciones que traten de analizarse. En términos de Herbert Simon, por ejemplo, las consecuencias de esa eventualidad, y las razones de su significación, se concretan así:

> Permítaseme proponer un principio metodológico para reemplazar el principio de la irrealidad. Lo llamaría 'el principio de la continuidad de la aproximación'. Afirma: si las condiciones del mundo real se aproximan suficientemente bien a los supuestos de un tipo ideal, las derivaciones a partir de esos supuestos serán aproximadamente correctas.[13]

Por su parte, Gibbard y Varian, en su artículo ya citado sobre los modelos económicos, se manifiestan de esta manera:

> Si la exactitud o el grado de aproximación fueran numéricamente caracterizables, nuestra posición podría ser planteada de la forma siguiente. Cuando un modelo se aplica a una situación como una aproximación, se fija un nivel de aspiración ε para el grado de aproximación de las conclusiones. La hipótesis es ésta: hay un δ tal que (i) el grado de aproximación a la verdad de los postulados del modelo aplicado es, al menos, δ, y (ii) en cualquier situación posible en la que el modelo pueda aplicarse, si el grado de aproximación a la verdad de los postulados de ese modelo aplicado es, al menos, δ, el grado de aproximación a la verdad de sus conclusiones es, cuando menos, ε.[14]

Y para terminar esta serie de referencias, sirva citar a George Akerlof y Janet Yellen, quienes llegan a calificar de teorema popular la misma idea que maneja Simon:

> De esta manera, la mayor parte de la teoría económica basada en la maximización estricta es útil cuando va acompañada del teorema popular según el cual los resultados de esta teoría son aproximadamente correctos si las desviaciones respecto de la optimalidad (o los costes de transacción de la toma de decisiones) son pequeñas.[15]

Estas declaraciones de principio, sin embargo, aclaran poco respecto de la naturaleza y las propiedades básicas del concepto de aproximación a la verdad. Por ejemplo, un modelo es una lista o conjunción de expresiones que, cuando quedan referidas a una situación concreta, constituyen enunciados.[16] Pues bien, ¿qué relaciones puede guardar el grado de aproximación de todo el modelo con el grado de aproximación de cada una de las partes que lo componen? ¿Qué incidencia puede tener sobre el grado de aproximación de un modelo el hecho de que incorpore una condición de equilibrio, por ejemplo, que presuponga un comportamiento perfectamente racional e informado por parte de los agentes? Se plantea, incluso, una pregunta más fundamental y de una mayor incidencia práctica. Las conclusiones obtenidas de un modelo, ¿son tan aproximadas como éste, son más aproximadas que él, o, por el contrario, pueden ser menos aproximadas, auque la diferencia pueda ser pequeña? Y si el problema es que se dispone de dos o de más modelos distintos que tratan sobre una misma cuestión, ¿debemos esperar que sea más aproximada la conclusión del modelo más aproximado? Y si no es así, ¿de qué sirve intentar construir modelos más aproximados? ¿En qué sentido es un modelo más aproximado mejor que otro que lo sea menos?

Las anteriores son, entre otras, preguntas que se pretendía clarificar y a las que se pretendía ofrecer una respuesta mediante las relaciones binarias que se presentaban y caracterizaban en el artículo 'Comparaciones de aproximación a la verdad y de lejanía de la falsedad' (en adelante, 'Comparaciones'). Mediante esas relaciones se procuraba representar y precisar las propiedades y características básicas de las comparaciones que un agente puede plantear y resolver entre proposiciones o enunciados de acuerdo con su mayor o menor grado de aproximación. Como se ilustra en el artículo mencionado mediante ejemplos cercanos a la trivialidad, son muchas las ocasiones en las que nos sentimos plenamente autorizados y justificados para resolver sin más y en un sentido determinado comparaciones de esa clase.[17]

Conviene recalcar a propósito de las comparaciones de esa clase, que lo comparado en ellas son proposiciones o enunciados, y que su resultado es puramente cualitativo, ordinal. Al resolver la comparación entre dos proposiciones, el resultado puede ser el juicio de que una de ellas sea más aproximada a la verdad que la otra, o el juicio de que ambas son igualmente aproximadas. Pero, ni siquiera en el caso de las comparaciones numéricas se pretende hablar de un grado de aproximación en un sentido cordinal, como si fuera la medida de una magnitud.

Asimismo y como también se explica en 'Comparaciones', nuestra finalidad es diferente al de los enfoques inspirados en la idea popperiana de verosimilitud, lo que se traduce también en unas diferencias fundamentales de planteamiento.[18]

También hay una diferencia básica de enfoque con el tratamiento estructuralista de la aplicación aproximada de las teorías empíricas, debido originalmente a Ulises Moulines, puesto que lo comparado en nuestro caso son entidades lingüísticas. Pero en otros aspectos tan básicos o más, la influencia del planteamiento de Moulines fue decisiva en la configuración del nuestro.[19]

2. *Conceptos iniciales*

En dos trabajos anteriores[20], las comparaciones de aproximación se representaban mediante relaciones binarias que se bautizaban como "relaciones de confianza", y que podían mediar entre cualquier par de proposiciones fuera cual fuese su valor veritativo.

Solemos hablar de aproximación cuando la exactitud está ausente; en consecuencia, el terreno más propicio para las comparaciones de aproximación es el de las proposiciones falsas. Decir del precio de los pisos que ha subido en Madrid en los últimos doce meses un diez por ciento en promedio es más aproximado que decir que se ha mantenido constante. Pero por razones parecidas, podríamos decir que una proposición que no sea falsa, por ser verdadera o por tener alguna probabilidad de serlo, es más aproximada a la verdad que una que sí lo sea. Análogamente, una proposición verdadera podría considerarse más aproximada a la verdad que una que sólo sea probable. Y si comparamos dos proposiciones verdaderas, puede suceder también que establezcamos una gradación entre ellas, por juzgar a una más fiable o más firme que la otra. Por ejemplo, la proposición de que dos y dos son cuatro será normalmente juzgada más fiable, más alejada de la eventualidad de ser falsa, que la constatación de que la mesa sobre la que estoy escribiendo es marrón. Ambas son proposiciones verdaderas, pero una está más lejos de ser falsa que la otra. Sucede, además, que estas comparaciones entre enunciados verdaderos guardan una relación de simetría con la comparación entre sus negaciones, que son falsas. Decir de esta mesa que no es marrón, aunque falso, se acerca mucho más a la posibilidad de ser verdadero que decir que dos y dos no son cuatro.[21]

Coherentemente con todo ello y una vez dado o supuesto el espacio enunciativo o proposicional considerado E^*,[22] en esos dos trabajos aludidos el dominio de las relaciones de confianza era todo ese espacio, cuyas proposiciones quedaban caracterizadas como verdaderas, falsas y meramente probables a juicio del agente mediante esas mismas relaciones de confianza.

La novedad más significativa que se introducía en 'Comparaciones' era la separación de las comparaciones de aproximación propiamente dichas, de las realizadas y resueltas por la mayor o menor probabilidad de las proposiciones involucradas. Allí se argumentaba, por ejemplo, la posibilidad de que dos proposiciones que no fuesen ni verdaderas ni falsas, tuvieran la misma probabilidad de ser verdaderas pero una de ellas se aproximara a la verdad más que la otra.[23] Al separar ambas clases de comparaciones, aproximación y probabilidad, en función de consideraciones de este tipo, se conseguía una propuesta más general y, sobre todo, mucho más sencilla.

En la estrategia seguida para realizar esa separación hay dos fases principales. En primer lugar, se define una clase de relaciones binarias, los preórdenes de aproximación semántica,[24] cuyo dominio sigue siendo el espacio proposicional E^*, y cuyo destino es representar o reconstruir las comparaciones de aproximación a la verdad o de lejanía de la falsedad realizadas o realizables por el agente entre enunciados del espacio mencionado, pero suponiendo que esos enunciados sólo pueden considerarse como verdaderos o como falsos. En un segundo momento, y una vez completada la fase anterior, se supone dada una distribución de probabilidad definida sobre el conjunto de los preórdenes de aproximación semántica. La distribución es la encargada de recrear la posibilidad de que el agente no sea capaz de resolver todas las comparaciones en juego, y de reflejar el punto de vista mantenido de hecho por aquél al determinar 1º) las proposiciones que él considera verdaderas o falsas, y a las que atribuye una probabilidad u otra de ser verdaderas, y 2º) las relaciones de aproximación que admite como resueltas en un sentido o en otro.[25]

Un preorden semántico típico es una relación binaria R. Interpretaremos las expresiones de la forma «$e'R\ e''$» como abreviaturas de la proposición «e' se aproxima a la verdad, o se aleja de la falsedad, más o igual que e''», o de la proposición «e' se aproxima a la verdad, o se desvía de la falsedad, al menos tanto como e''». A su vez, sobre la base de esa relación podemos definir formalmente las relaciones destinadas a representar la situación en la que una proposición e' se aproxima a la verdad, o se desvía de la falsedad, más que otra e'' (en símbolos, $e'P\ e''$), y la situación que se crea cuando dos proposiciones e' y e'' se aproximan a la verdad, o se alejan de la falsedad, en la misma medida (en símbolos, $e'I\ e''$, o $e''I\ e'$). Las definiciones son las siguientes:

1ª) $e'P\ e''$ syss[26] $e'R\ e''$ y no $e''R\ e'$, y
2ª) $e'I\ e''$ syss $e'R\ e''$ y $e''R\ e'$.[27]

Supondremos que todo preorden semántico R, como su denominación indica y además de satisfacer otras propiedades, es una relación binaria reflexiva, transitiva, y completa (conexa). De ello se deriva que *P* es irreflexiva y asimétrica, que *I* es reflexiva y simétrica, y que ambas son transitivas.[28]

Los diferentes preórdenes a los que la distribución asigna probabilidad positiva, son los estados de conocimientos y creencias que el agente considera posibles. Por ejemplo, el agente puede considerar la posibilidad de que dos proposiciones e' y e'' fueran las dos falsas y la primera más aproximada a la verdad que la segunda. O la posibilidad de que ambas fueran verdaderas y la segunda más aproximada que la primera. O la posibilidad de que una de ellas fuera verdadera y la otra falsa y menos aproximada, por lo tanto, que aquélla. En función de las posibilidades consideradas y de las probabilidades atribuidas a los diversos preórdenes, las probabilidades resultantes determinan si, a juicio del agente, esas proposiciones son verdaderas, falsas o sólo probables, y cuál puede ser la relación que medie entre los grados de aproximación de una y de otra.

De esta manera, la distribución sobre los preórdenes incorpora varias informaciones de interés. Por un lado, clasifica las proposiciones en tres grupos: verdaderas, falsas, y meramente probables (a juicio del agente). En segundo lugar, nos dice cuándo considera el agente una proposición dada más o menos probable que otra, y qué enunciados considera equiprobables. En tercer lugar, nos informa de las comparaciones de aproximación a la verdad y de lejanía de la falsedad que el agente logra resolver y la forma en que lo hace. Y en cuanto a las comparaciones de aproximación que el agente no tenga resueltas, nos indica el sentido más probable en el que piensa que puedan terminar resolviéndose.

3. La simplificación que se propone

Al igual que sucedía en los dos trabajos anteriores citados, en 'Comparaciones' se sigue considerando como una conectiva diádica más el símbolo barra utilizado habitualmente para expresar la probabilidad condicionada. En parte, por razones técnicas: para poder postular dos condiciones, que adaptan ideas procedentes del cálculo de probabilidades.[29] Pero también, por razones conceptuales: por la convicción de que el empleo de ese símbolo puede constituir un expediente sencillo y apropiado para recoger el sentido de los condicionales contrafácticos.

Sin embargo, tiene interés plantearse si podría simplificarse más la propuesta prescindiendo de esa conectiva barra. Porque su inclusión complica bastante las cosas. Recuérdese, por ejemplo, que en 'Comparaciones' obliga a postular propiedades específicamente destinadas al tratamiento de las expresiones barra[30], como la condición de equivalencia de las expresiones paracompuestas y la condición de estabilidad veritativa. También conduce a complicar de una manera *ad hoc* una condición tan central como la de superioridad por implicación.[31]

El objetivo de estas páginas es ilustrar cómo puede diseñarse una nueva versión cuya novedad es justamente ésa, se prescinde del símbolo de la probabilidad condicionada como conectiva y, por lo tanto, se dejan de suponer incluidas en el espacio proposicional E^* enunciados construidos mediante ella. Con la feliz consecuencia de que la propuesta se hace mucho más sencilla, como podemos pasar a ver. Por otro lado, y para aligerar la exposición de problemas, en estas páginas supondremos que E^* incluye sólo expresiones cerradas.

La simplificación comentada afecta primordialmente a la definición de los preórdenes semánticos. En 'Comparaciones', esa definición exigía estipular diez condiciones o propiedades.[32]

De esas diez condiciones, ya hemos adoptado la primera al suponer que los preórdenes semánticos son relaciones reflexivas, transitivas y completas en E^*.

También adoptaremos literalmente otras dos, a propósito de las cuales conviene recordar que si e' y e'' son dos proposiciones una de las cuales es negación de la otra, decir que e' se aproxima a la verdad o se aleja de la falsedad más que e'', esto es, decir que $e'P\ e''$, significa que la primera es verdadera y la segunda falsa.

[Adaptación del principio de tertio excluso]
Para todo par de proposiciones e', e'' de E^* tales que una de ellas sea negación de la otra, $e'P\ e''$ o $e''P\ e'$.

[Condición de simetría vertical]
Para toda e^1, e^2, e^3 y e^4 de E^* tales que una de las dos primeras sea negación de la otra, y suceda lo propio entre la tercera y la cuarta, $e^1R\ e^3$ syss $e^4R\ e^2$.

A diferencia de otros planteamientos vinculados con la idea popperiana de la verosimilitud, en 'Comparaciones' y en los trabajos anteriores ya citados, se defiende la idea de que, al igual que sucede con las relaciones de probabilidad, cuando una proposición implica lógicamente otra, ésta no debe considerarse menos aproximada a la verdad que aquélla. Al ser los preórdenes semánticos completos, eso significa que la proposición implicada debe considerarse al menos tan aproximada como la implicadora. Si con la dimensión aproximativa se mezclan en la comparación aspectos relativos al contenido de una y de otra, eso no tiene por qué ser necesariamente así. El contenido de la proposición implicadora puede ser muchísimo mayor que el de la implicada, que forma parte, por lo demás, de ese mismo contenido. Pero precisamente por esta razón, si se está hablando sólo de aproximarse o de alejarse de la verdad, no parece razonable considerar que parte del contenido de una proposición pueda considerarse menos aproximada que ella misma. Si hay una parte del contenido cuyo grado de aproximación sea bajo, esa parte arrastrará hacia ese mismo grado, por lo menos, a toda la proposición en cuyo contenido está incluida.

En 'Comparaciones' nos veíamos en la tesitura de definir una noción específica de implicación y de introducir tres condiciones sobre el tema. La ausencia de la conectiva barra nos permite reflejar aquí esa idea, sencilla pero muy poderosa, de una manera directa y general:

[condición general de superioridad por implicación]
para toda e', e'' pertenecientes a E^*, si e' implica (lógicamente) a e'', entonces $e''R\,e'$.

Al incorporar implícitamente todos los resultados lógicos sobre las relaciones de implicación entre proposiciones, la condición de superioridad por implicación es la principal responsable de la sencillez final de la propuesta.

De las cuatro restantes condiciones postuladas en 'Comparaciones', dos, la condición de equivalencia de las expresiones paracompuestas y la de estabilidad veritativa, tenían como finalidad exclusiva el tratamiento del símbolo y las expresiones barra. En consecuencia, podemos prescindir de ellas, quedándonos solamente por decidir qué hacer con las otras dos: la condición de adosamiento y la adaptación de la regla de la multiplicación.[33]

En relación con la segunda, su versión obtenida al sustituir la conectiva barra por la condicional[34] es una consecuencia directa de la condición general de superioridad por implicación. Por ello, no hace falta postularla aparte.

La mayor reforma es la que necesita la condición de adosamiento. Podemos valernos de una versión como ésta:

[versión para condicionales de la condición de adosamiento]
para toda e', toda $(e' \Rightarrow e'')$, y toda $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$ en E^*,
si e' es verdadera, entonces
o bien $e'I\,[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$, o bien $(e' \Rightarrow e'')I\,[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$.

A la hora de justificarla, supóngase que e' es verdadera y retornemos al planteamiento seguido en 'Comparaciones'. De la condición de superioridad por implicación y de la adaptación de la regla de la multiplicación, tal como quedaban postuladas allí, se deriva que $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\ (e' \wedge e'')I\ I\ [(e'' \mid e') \wedge e']$, y que si $(e'' \mid e')R\ e'$, entonces $(e' \wedge e'')I\ [(e'' \mid e') \wedge e']I\ e'$. Por ello, $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\ e'$. Por otra parte, resulta completamente natural suponer (y postular) que bajo todo preorden semántico R' que trate la proposición e' como verdadera, $(e' \Rightarrow e'')I\ (e'' \mid e')$. Por lo tanto, si $(e' \Rightarrow e'')R\ e'$, entonces $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\ e'$.

Análogamente, de la misma condición de adosamiento se sigue que si $e'R\ (e'' \mid e')$, entonces $(e' \wedge e'')I\ [(e'' \mid e') \wedge e']I\ (e'' \mid e')$. En virtud de ello, $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\ (e'' \mid e')$, por lo que, si seguimos suponiendo que cuando e' sea verdadera sucederá que $(e' \Rightarrow e'')I'\ (e'' \mid e')$, deberemos admitir que si $e'R\ (e' \Rightarrow e'')$, entonces $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\ (e' \Rightarrow e'')$.

Sin embargo, si e' fuera falsa y, por lo tanto, $(e' \Rightarrow e'')$ fuese verdadera, $(e'' \mid e')$ podría ser falsa. En virtud de ello, podría ocurrir que $e'P\ (e'' \mid e')$, por lo que, aplicando la condición de adosamiento postulada en 'Comparaciones', no podríamos asegurar que $[(e'' \mid e') \wedge e']I\ e'$. Eso sólo sucedería si $(e'' \mid e')R\ e'$.

Resumiendo, para definir los preórdenes semánticos en ausencia de la conectiva y de las expresiones barra, puede ser suficiente hacerlo mediante 1ª) las propiedades generales de los preórdenes completos: reflexividad, transitividad y complitud, 2ª) la adaptación del principio de *tertio excluso*, 3ª) la condición de simetría vertical, 4ª) la condición general de superioridad por implicación, y 5ª) la versión para condicionales de la condición de adosamiento.

Una vez caracterizado el conjunto Z^* de los preórdenes semánticos mediante esas condiciones, la fase posterior para representar el punto de vista del agente no tiene por qué cambiar respecto del planteamiento seguido en 'Comparaciones'. Concretamente, si deseamos mantener el mismo procedimiento, bastará 1º) que supongamos dada una distribución de probabilidad p sobre el mencionado conjunto Z^* de los preórdenes de aproximación semántica[35]; y 2º) que supongamos definidas las relaciones globales de aproximación RX, PX y IX, definiéndose la primera de este modo,

> $e'RX\ e''$, syss, $e'R\ e''$ bajo todo preorden R perteneciente al soporte de la distribución p,

y definiéndose sobre ella las otras dos de la manera acostumbrada, es decir,

$e'PX e''$ syss $e'RX e''$ y no $e''RX e'$; $e'IX e''$ syss $e'RX e''$ y $e''RX e'$.

4. *Cuestiones relativas a la forma lógica de las proposiciones comparadas*

Llegados hasta aquí, se impone comprobar si esta nueva propuesta incorpora un rendimiento similar a la presentada en 'Comparaciones'.

Un capítulo importante en el desarrollo de propuestas de esta clase debe estar dedicado a las propiedades que terminen cumpliendo las comparaciones de aproximación entre proposiciones en virtud de la forma lógica de éstas. Dicho de otra manera, una propuesta de este tipo debe analizar cómo la forma lógica de las proposiciones puede condicionar o determinar las comparaciones de aproximación que quepa realizar y resolver entre ellas. Por eso, en 'Comparaciones', al igual que en los trabajos anteriores a ese artículo ya citados, se asigna un lugar preferente al análisis de las comparaciones de aproximación entre las conjunciones (cerradas) y sus miembros, entre las disyunciones (cerradas) y sus miembros, entre las proposiciones condicionales y sus miembros, y entre los enunciados bicondicionales y sus miembros. Además de su interés propio, conocer la forma y las peculiaridades de estas comparaciones más sencillas es la base para analizar la forma y las peculiaridades de las comparaciones cuando se tenga en cuenta una estructura lógica más compleja.

De manera análoga, aunque seguramente con un interés menor, entre los desarrollos iniciales de la propuesta como la que tenemos entre manos, debe abordarse el comportamiento de las comparaciones en las que estén envueltas proposiciones (cerradas) cuantificadas universal y existencialmente, y, en el caso de haber decidido considerarlas, expresiones abiertas que se vayan a utilizar como proposiciones.

Felizmente, en relación con estos dos capítulos nos bastará con ilustrar cómo el rendimiento de la propuesta presentada es similar al de versiones anteriores. En concreto, nos limitaremos a examinar cómo se pueden obtener las mismas propiedades que exponíamos en 'Comparaciones' sobre las relaciones que median entre una conjunción (cerrada) y sus miembros bajo un preorden semántico cualquiera y bajo una distribución de probabilidad expresiva del punto de vista del agente. Como los resultados que pueden conseguirse sobre las restantes conectivas diádicas se obtienen de una manera casi mecánica,[36] esa tarea será suficiente para ilustrar que, a pesar de haber prescindido de la conectiva barra, la propuesta conserva el rendimiento deseado (salvo por lo que afecta, naturalmente, a las expresiones barra y a las cuestiones relacionadas con ellas). Y en cuanto a las comparaciones que involucran proposiciones cerradas y cuantificadas, aprovecharemos la ocasión para indicar un procedimiento muy sencillo para su análisis, aunque nos limitaremos a ilustrarlo en referencia a las proposiciones cuantificadas universalmente.

Sea $e^o = (e' \wedge e'')$ una conjunción (cerrada) y sean e' y e'' sus dos miembros. Como éstos quedan implicados por aquélla, $e'R\ e^o$ y $e''R\ e^o$ en virtud de la condición general de superioridad por implicación.

A su vez, la transitividad de R y la condición de simetría vertical garantizan, a partir de lo anterior, que si e^o es verdadera bajo R, también lo serán e' y e'', mientras que si alguna de éstas es falsa bajo R, también lo será aquélla.

Asimismo, se puede establecer que si e' y e'' son verdaderas bajo R, 1°) e^o también lo será, y que 2°) $e^oI\ e'$ o $e^oI\ e'$.[37] Además, si $e'R\ e''$, entonces $e''I\ (e' \Rightarrow e'')$, y si $e''R\ e'$, puede suceder que $(e' \Rightarrow e'')P\ e''R\ e'$.

Por último, si e' es verdadera y e'' es falsa bajo R, 1°) como ya sabemos, e^o será también falsa, 2°) al ocurrir que $(e' \Rightarrow e'')I\ [(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\ e^o$ en virtud de la condición de simetría vertical, de la condición general de superioridad por implicación y de la versión para condicionales de la condición de adosamiento, sucederá que $(e' \Rightarrow e'')I\ e^o$, y 3°), por último, también sucederá que $e^oI\ e''$ syss $(e' \Rightarrow e'')I\ e''$.

Teniendo ahora en cuenta la distribución de probabilidad p definida sobre el conjunto Z^* de todos los preórdenes de aproximación semántica, a cuyo soporte nos referiremos mediante Sp, y suponiendo definidas de la manera ya comentada las relaciones globales de aproximación RX, PX y IX, se desprende de forma inmediata 1°) que siempre $e'RX\ e^o$ y $e''RX\ e^o$; 2°) que e' y e'' son verdaderas bajo p siempre y cuando lo sea la propia conjunción e^o; 3°) que si e^o es verdadera (bajo p), entonces para toda R' de Sp, $e^o I'\ e'$ o $e^o I'\ e''$, por lo que si $e'RX\ e''$ entonces $e^o IX\ e''$, y si $e''RX\ e'$ entonces $e^o IX\ e'$; 4°) que cuando e' es verdadera (bajo p) pero e'' no, entonces $p[e^o]=p[e'']$[38], y $e'PX\ e^o$; sucede, además, lo previsto en el punto anterior, es decir, que para toda R' de Sp, $e^o I'\ e'$ o $e^o I'\ e''$, por lo que si $e'RX\ e''$ entonces $e'PX\ e^o$ y $e^o IX\ e''$; y 5°) que en general, cuando ni e' ni e'' son verdaderas bajo RX, tampoco lo será e^o, siendo ésta falsa bajo esa relación global si lo es alguno de sus dos miembros en cada preorden de Z^* es falso alguno de sus dos miembros, y pudiendo igualmente ser falsa aunque eso no suceda.[39]

Supóngase ahora que e^o es una proposición (cerrada) cuantificada.[40] Entenderemos por primera instancia de e^o toda aquella proposición resultante de 1°) eliminar de e^o su primera cuantificación, y 2°) sustituir todas las ocurrencias de la variable que venían ligadas en e^o por la primera cuantificación, por una misma constante o una descripción (definida y propia).

Aunque, a diferencia de 'Comparaciones', no hayamos postulado la condición de implicación por instanciación, en virtud de la condición general de superioridad por implicación se sigue cumpliendo 1º) que si e' es una proposición abierta o es una proposición cerrada y cuantificada universalmente, y e'' es una conjunción de primeras instancias suyas o es una de ellas, entonces $e''R\,e'$; y 2º) que si e'' es una proposición cuantificada existencialmente, y e' es una disyunción de primeras instancias suyas o es una de ellas, entonces $e''R\,e'$.

Un procedimiento muy sencillo para plantear y analizar de una manera más completa las comparaciones de aproximación que involucren proposiciones (cerradas) cuantificadas (o expresiones abiertas), consiste en suponer que en el espacio E^* hay, por cada subconjunto suyo $E \subseteq E^*$, dos proposiciones: 1ª) una, en la que se afirma que todas las expresiones de E son verdaderas; y 2ª) otra, en la que se afirma que es verdadera alguna de las expresiones pertenecientes a ese conjunto E. Llamaremos a la primera "la meta-afirmación mayor sobre E", y la designaremos mediante $e^{\forall}(E)$. Por su parte, llamaremos a la segunda "la meta-afirmación menor sobre E", y la designaremos mediante $e^{\exists}(E)$.

Ni que decir tiene que estas nuevas proposiciones se comportan como las demás del espacio E^*, y con ellas se siguen cumpliendo las mismas propiedades que hemos postulado para caracterizar los preórdenes semánticos, así como las que hemos derivado de las anteriores sobre el comportamiento y las relaciones que median entre las conjunciones y sus miembros bajo cada preorden, y las que puedan derivarse de unas y de otras.

Supóngase ahora que e^o es una proposición (cerrada) cuya primera cuantificación es la universal. Designaremos mediante $N(e^o)$ el conjunto de todas sus primeras instancias existentes en E^*. Naturalmente, e^o implica $e^{\forall}[N(e^o)]$, ya que si e^o es o fuera verdadera lo serían todas sus instancias recogidas en $N(e^o)$.

El análisis de e^o y de sus relaciones con sus primeras instancias puede venir dificultado porque, al incluir E^* sólo las proposiciones consideradas por el agente, puede suceder que ese espacio no incluya todas las instancias necesarias para poder implicar conjuntamente la proposición universal, esto es, para que si todas las instancias recogidas en $N(e^o)$ son o fueran verdaderas, lo tuviera que ser e^o también.

Imaginemos, sin embargo, que fuera así, es decir, que e^o y $e''[N(e^o)]$ fueran proposiciones equivalentes, y que, en virtud de la condición general de superioridad por implicación, $e^o I\ e^{\forall}[N(e^o)]$ bajo cualquier preorden de aproximación semántica. Sean, asimismo, E' y E'' dos subconjuntos (no vacíos y disyuntos) que forman una partición de $N(e^o)$ (por lo tanto, $N(e^o)= E' \cup E''$), y sean $e'= e^{\forall}(E')$ y $e''= e^{\forall}(E'')$ las meta-afirmaciones mayores sobre cada uno de ellos. Naturalmente, las propiedades expuestas más arriba relativas a las conjunciones y a sus miembros serán aplicables sin más a la conjunción $(e' \wedge e'')= [(e^{\forall}(E') \wedge e^{\forall}(E'')]$ y a sus miembros $e'= e^{\forall}(E')$ y $e''= e^{\forall}(E'')$. Sucede, además, que $(e' \wedge e'')= [e^{\forall}(E') \wedge e^{\forall}(E'')]$ es equivalente a $e^{\forall}[N(e^o)]= e^{\forall}(E' \cup E'')$, que es a su vez equivalente a e^o. En consecuencia, entre e^o, de un lado, y $e'= e^{\forall}(E')$ y $e''= e^{\forall}(E'')$, del otro, median las mismas relaciones y se cumplen las mismas propiedades que cuando suponíamos que $e^o= (e' \wedge e'')$.

El nivel, por lo tanto, de aproximación de un enunciado universal depende del nivel de todas y cada una de sus instancias posibles, no pudiendo ser superior al de ninguna de ellas. Este fenómeno lógico es una de las razones principales para pensar que cuando se hacen jucicios de aproximación empírica a propósito de enunciados universales o de expresiones abiertas, y a diferencia de lo que sucede con las proposiciones singulares, dichos juicios pueden ser distintos que los juicios de aproximación a la verdad que correspondería hacer en términos puramente lógicos. Puede ocurrir que al enjuiciar el nivel de aproximación de una hipótesis empírica, por ejemplo, no sea tan interesante saber si hay algún caso empírico en el que esté muy lejos de cumplirse, como saber si, "en promedio", la hipótesis se cumple a un nivel de aproximación razonable.

Con los modelos teóricos sucede algo parecido, aunque el hecho que lo origina es otro. Desde un punto de vista lógico, un modelo m suele ser una serie de premisas de la que se obtienen varias conclusiones;[41] sea c cualquiera de ellas. Si prescindimos de los detalles referentes a su interpretación, el resultado específico del ejercicio adquiere la forma $(m \Rightarrow c)$, tratándose, si la demostración es correcta, de un condicional formalmente válido equivalente a su clausura universal. La aplicación de ese resultado a un caso empírico específico nos permite adelantar que si el modelo se cumple en ese caso a un nivel de aproximación dado, la conclusión se cumplirá, al menos, a ese mismo nivel. Por ello, desde el punto de vista de la aplicabilidad del modelo, la información más interesante no es la posible existencia de un caso en que el modelo se desvíe mucho de la realidad, sino alguna información más general sobre todos los casos en juego, o sobre alguna clase o algunas clases especiales de ellos.

5. ¿Por qué puede importar el nivel de aproximación a la verdad de un modelo teórico?

5.1. Primeras consideraciones

Otra cuestión central es hasta qué punto respalda la propuesta ideas como las que veíamos al comienzo del artículo que sostenían Simon, Gibbard y Varian, y Akerlof y Yellen a propósito de las relaciones que debieran mediar entre el grado de aproximación de un modelo y el de sus conclusiones.

La versión expuesta en las secciones anteriores respalda de una manera matizada estas ideas intuitivas o informales como consecuencia prácticamente directa de la condición de superioridad por implicación. Imagínese, por ejemplo, 1º) que m y c son, respectivamente, la presentación formal de un modelo y la conclusión obtenida a partir de m en un ejercicio teórico; 2º) que z es la lista de cláusulas en las que se establece qué es lo que está destinada a ser, designar o representar cada una de las variables ocurrentes libres en m o en c con las que se pretende designar entidades de naturaleza no exclusivamente matemática; 3º) que z_a es la lista que se obtiene al referir la interpretación ofrecida por z a un caso o una situación empírica concreta a;[42] 4º) que zm_a es es la sublista de z formada por las cláusulas relativas a las variables ocurrentes libres en m que requieren ser interpretadas extramatemáticamente; 5º) y que zc_a es es la sublista de z_a es formada por las cláusulas relativas a variables ocurrentes libres en c que requieren interpretación extramatemática.

Nótese que m y c son expresiones abiertas. Por lo tanto, lo que se establece en el ejercicio teórico es la validez de la clausura universal de la expresión condicional $(m \Rightarrow c)$; el resultado del ejercicio no puede leerse como si estableciera que la clausura universal de m implica formalmente la clausura de c, porque eso sería interpretarlo en un sentido que también se cumple, pero que restringe su alcance.[43] Por ello, los niveles de aproximación que interesa comparar no son los de m y c, sino los de los pares de expresiones instanciadas o individualizadas a casos o situaciones singulares, como el par formado por $(zm_a \wedge m)$ y $(zc_a \wedge c)$.

En ese sentido, la aplicabilidad de un modelo así a casos y situaciones como a viene dada por el hecho de que $[(zm_a \wedge m) \wedge (m \Rightarrow c)]$ implica lógicamente $(zc_a \wedge c)$.

Por otro lado, $(m \Rightarrow c)$ es formalmente válida. Eso significa que hay una serie de premisas adicionales pd, normalmente de naturaleza matemática, tales que $(pd \wedge m \Rightarrow c)$ y $[pd \Rightarrow (m \Rightarrow c)]$ son lógicamente válidas. En consecuencia, bajo cada uno de los preórdenes de aproximación semántica pertenecientes al soporte de la distribución de probabilidad expresiva del punto de vista del agente, $[pd\Rightarrow (m\Rightarrow c)]$ y pd tendrán el mayor nivel de confianza,[44] lo tendrá asimismo $\{pd\wedge [pd\Rightarrow (m\Rightarrow c)]\}$, y lo tendrá, asimismo, $(m\Rightarrow c)$ en virtud de la condición de superioridad por implicación.

Por todo ello, de nuevo en virtud de la misma condición, y por disfrutar $(m\Rightarrow c)$ del mayor nivel de confianza, $(zc_a\wedge c)R\,(zm_a\wedge m)$ bajo cualquiera de los preórdenes de aproximación semántica mencionados. Dicho de otra manera, el nivel de aproximación a la verdad de un modelo (instanciado o referido a un caso o situación concreta) es el suelo, es el nivel mínimo de aproximación de cualquiera de sus conclusiones (instanciadas o referidas a ese mismo caso o situación concreta).

¿Es ésa la única información que nos puede proporcionar el conocimiento del nivel de aproximación de un modelo (instanciado)?

Al obtener una conclusión de un modelo, se selecciona una entre las diferentes eventualidades que podrían tener lugar como posibilidades alternativas. Por ejemplo, si se obtiene la conclusión de que un aumento del gasto público aumentará la tasa de inflación, ésa es una posibilidad entre otras, como las de que esa tasa disminuya o permanezca constante. Concluir que el precio de un bien aumentará en primavera un cincuenta por cien es identificar una entre todas las posibilidades (reales y lógicas) de que ese precio aumente o disminuya en cualquier cantidad, o se mantenga constante. Es en este sentido en el que se puede afirmar que cada ejercicio teórico ofrece, con cada una de las conclusiones que se alcanzan en él, una respuesta a una pregunta. Responder es seleccionar o identificar una entre las varias respuestas potenciales, entre las respuestas que, como cuestión de principio, tiene o tendría sentido admitir sobre la cuestión planteada.[45]

Como es obvio, si las condiciones postuladas en el modelo se cumplen en un caso concreto, el ejercicio nos asegura que la conclusión también lo hará y será, por lo tanto, la respuesta correcta, la solución. Sin embargo, si el modelo sólo se cumple de una manera aproximada, el ejercicio no nos ayuda a conocer la respuesta verdadera. Ya sabemos que nos garantiza que la conclusión se aproximará a la verdad al menos en ese mismo nivel. Pero, ¿se limita a proporcionarnos esa información, o nos puede suministrar otras informaciones adicionales, por ejemplo, sobre las eventualidades alternativas a la conclusión que tienen alguna posibilidad de terminar cumpliéndose, y las que no?

Una razón para esperar alguna información adicional de este tipo es la siguiente. Del hecho de que la conclusión (instanciada) de un modelo (instanciado) se aproxime a la verdad al menos tanto como éste, se desprende que no puede terminar teniendo lugar ninguna de las eventualidades alternativas que, de ser verdaderas, originarían que la conclusión se desviase de la verdad más de lo que lo hace el propio modelo. Esas eventualidades alternativas no podrían ser verdaderas, y deberían quedar desechadas como imposibles.

Para concretar algo más las cosas, sea Q el conjunto de respuestas potenciales a la cuestión planteada, entre las que figurará la conclusión c, y que comparten con ésta las mismas variables libres.[46] Sobre ese conjunto podemos suponer dos cosas, 1ª) que todas las respuestas potenciales que lo forman se excluyen entre sí, es decir, que con cada par e', $e'' \in Q$ sucede que $[zc_a \Rightarrow (e' \Rightarrow \neg e'')]$[47] y, por lo tanto, las expresiones de la forma $[zc_a \Rightarrow (e'' \Rightarrow \neg e')]$ son verdaderas bajo cualquiera de los preórdenes de aproximación semántica en el soporte de la distribución expresiva del punto de vista del agente;[48] 2ª) que el conjunto es exhaustivo en el sentido de que tiene que cumplirse alguna de las respuestas potenciales que lo componen, es decir, que bajo cada preorden R hay en Q una e^o tal que $(zc_a \Rightarrow e^o)$ es verdadera bajo R.

A propósito de situaciones de esta clase, podemos establecer propiedades como la siguiente,

> bajo cualquier preorden de aproximación semántica, y para toda m, c, zm_a, zc_a y e' tales que $(m \Rightarrow c)$ y $[zc_a \Rightarrow (c \Rightarrow \neg e')]$ sean verdaderas bajo ese preorden, si $(zm_a \wedge m)P\,(zc_a \wedge e')$, entonces $(zc_a \wedge e')$ será falsa bajo ese preorden, y si zc_a es verdadera,[49] $(zc_a \Rightarrow e')$ será también falsa. Por ello, si $(zm_a \wedge m)PX\,(zc_a \wedge e')$, y si $(m \Rightarrow c)$ y $[zc_a \Rightarrow (c \Rightarrow \neg e')]$ son verdaderas bajo RX, entonces $(zc_a \wedge e')$ será falsa bajo esa misma relación global de aproximación semántica RX, por lo que si zc_a es verdadera bajo RX, $(zc_a \Rightarrow e')$ será falsa.

Para demostrarla, comencemos por advertir que si $(zm_a \wedge m)$ fuera verdadera bajo un preorden R, entonces lo sería $\{[(zm_a \wedge m) \Rightarrow (zc_a \wedge c)] \wedge (zm_a \wedge m)\}$[50], por lo que $\{[(zm_a \wedge m) \Rightarrow (zc_a \wedge c)] \wedge (zm_a \wedge m)\}P\,\neg\{[(zm_a \wedge m) \Rightarrow (zc_a \wedge c)] \wedge (zm_a \wedge m)\}$. A su vez, por las condiciones de simetría vertical y de superioridad por implicación, $(zc_a \wedge c)R\,\{[(zm_a \wedge m) \Rightarrow (zc_a \wedge c)] \wedge (zm_a \wedge m)\}P\,\neg\{[(zm_a \wedge m) \Rightarrow (zc_a \wedge c)] \wedge (zm_a \wedge m)\}R\,\neg(zc_a \wedge c)$; por lo tanto, $(zc_a \wedge c)P\,\neg(zc_a \wedge c)$, y en consecuencia $(zc_a \wedge c)$ sería verdadera. Pero entonces también sería verdadera $\{[(zc_a \wedge c) \Rightarrow \neg(zc_a \wedge e')] \wedge (zc_a \wedge c)\}$[51], y por un argumento similar al que acabamos de desarrollar, $\neg(zc_a \wedge e')$ sería verdadera y $(zc_a \wedge e')$ sería falsa.

Supongamos ahora que $(zm_a \wedge m)$ fuera falsa. Por hipótesis, $(zm_a \wedge m)P$ P $(zc_a \wedge e')$; luego, por la condición de simetría vertical, $\neg(zc_a \wedge e')P$ $\neg(zm_a \wedge m)$, y si $(zm_a \wedge m)$ fuera falsa, entonces $\neg(zm_a \wedge m)P$ $(zm_a \wedge m)$, por lo que $\neg(zc_a \wedge e')P$ $\neg(zm_a \wedge m)P$ $(zm_a \wedge m)P$ $(zc_a \wedge e')$; en consecuencia, por la transitividad de P, $(zc_a \wedge e')$ sería falsa bajo ese preorden.

Por otra parte, es inmediato que $(zc_a \Rightarrow \neg e')$ se deriva de $\neg(zc_a \wedge e')$, como también es inmediato obtener las consecuencias sobre lo que sucede bajo la relación global *RX*.

Empleando un argumento análogo y todavía más sencillo, se puede establecer que

> bajo cualquier preorden de aproximación semántica, si $(zc_a \wedge c)P$ $(zc_a \wedge e')$, y si $[(zc_a \wedge c) \Rightarrow \neg(zc_a \wedge e')]$ es verdadera bajo ese preorden, entonces $(zc_a \wedge e')$ será falsa bajo *R*. Por lo tanto, también sucede que si $(zc_a \wedge c)PX$ PX $(zc_a \wedge e')$, y si $[(zc_a \wedge c) \Rightarrow \neg(zc_a \wedge e')]$ es verdadera bajo *RX*, entonces $(zc_a \wedge e')$ será falsa bajo esa misma relación.

El problema con este tipo de resultados es que ya se presupone en el propio antecedente que bajo todo preorden de aproximación semántica que se considere, la proposición $(zc_a \wedge e')$ bajo análisis se aleja de la verdad más que $(zm_a \wedge m)$ o que $(zc_a \wedge c)$. Por lo tanto, casi resulta trivial que no pueda ser verdadero en ningún caso. Si lo fuera, tendrían que serlo $(zc_a \wedge c)$ o la propia $(zm_a \wedge m)$; pero si lo fueran, no podría serlo $(zc_a \wedge e')$ por su incompatibilidad con $(zc_a \wedge c)$ y, consecuentemente, con $(zm_a \wedge m)$.

Por otra parte, según la intuición en la que basábamos la búsqueda de esta clase de resultados, las eventualidades que podían quedar desechadas por imposibles eran aquéllas que por su distanciamiento de *c* originarían, en caso de ser verdaderas, que ésta estuviera más alejada de la verdad de lo que está el propio modelo del que se deriva. Para recoger esta intuición de una manera más literal, necesitamos introducir nuevas figuras en el planteamiento.

5.2. Comparaciones cruzadas de niveles de aproximación

A ese efecto, una de las opciones más sencillas consiste dar entrada a la posibilidad de comparar los niveles de aproximación de las proposiciones según estén evaluadas bajo un preorden de aproximación semántica o lo estén bajo otro. Formalmente, el dominio de esas comparaciones es el producto cartesiano $E^* \times Z^*$, es decir, el conjunto de los pares ordenados de la forma (e', R'), donde $e' \in E^*$, y $R \in Z^*$.

Convengamos en representar mediante la expresión «*(e', R')(>)(e'', R'')*» la idea de que el nivel de aproximación a la verdad de la proposición *e'*, evaluado bajo el preorden de aproximación semántica *R'*, es superior al de la proposición *e''* evaluado bajo el preorden *R''*. Análogamente, convengamos en que la expresión «*(e', R')(=)(e'', R'')*» signifique que el nivel de aproximación a la verdad de la proposición *e'*, evaluado bajo el preorden de aproximación semántica *R'*, es el mismo que el de la proposición *e''* evaluado bajo el preorden *R''*. Así, la expresión «*(e', R')(≥)(e'', R'')*» significará que el nivel de aproximación a la verdad de la proposición *e'*, evaluado bajo el preorden de aproximación semántica *R'*, es igual o superior al de la proposición *e''* evaluado bajo el preorden *R''* (o es al menos como el de la proposición *e''* evaluado bajo el preorden *R''*).

Vamos a suponer que cualquier relación de proximidad como *(≥)* es reflexiva, transitiva y completa en su dominio, y que *(>)* y *(=)* se definen sobre su base de la misma manera que las relaciones > y = se definen en términos de la relación ≥. Por analogía con los preórdenes de aproximación semántica, podemos decir que estas nuevas relaciones binarias son preórdenes de comparación cruzada de niveles de aproximación semántica, o preórdenes de comparación cruzada a secas, cuando, además de hacerlo con las anteriores, satisfagan la propiedad siguiente:

para toda $e', e'' \in E^*$, y todo $R \in Z^*$,
- a) *e'R e''* syss *(e', R)(≥)(e'', R)*; de donde
- b) *e'P e''* syss *(e', R)(>)(e'', R)*; y
- c) *e'I e''* syss *(e', R)(=)(e'', R)*.

La introducción de esta nueva clase de preórdenes hace que el punto de vista del agente tenga que venir representado ahora mediante dos distribuciones de probabilidad: 1ª) una, definida sobre los preórdenes de aproximación semántica, a la que seguiremos designando mediante la letra *p*; y 2ª) otra, definida sobre los preórdenes de comparación cruzada.

Volvamos ahora a la idea que tratamos de respaldar formalmente. Si la conclusión *c* de un modelo *m* se aproxima a la verdad al menos tanto como éste, no puede tener lugar ninguna de las eventualidades alternativas a *c* cuya distancia con ésta es tal que, si se cumplieran, originarían que la conclusión se desviase de la verdad más de lo que lo hace el propio modelo. Por lo tanto, esas eventualidades alternativas no podrían ser verdaderas, y deberían quedar desechadas como imposibles.

Si el agente admite que *(m⇒ c)* es formalmente válido, eso significa, como ya sabemos, que bajo todo preorden de aproximación semántica *R* al que la distribución p asigna probabilidad positiva, $(m \Rightarrow c)$ es verdadera bajo R, y $(m \Rightarrow c)R\ (zm_a \wedge m)$. Por otro lado, para todo preorden de aproximación semántica R, si $(m \Rightarrow c)$ es verdadera bajo R, y si $(m \Rightarrow c)R$ $R\ (zm_a \wedge m)$, entonces $(zc_a \wedge c)R\ (zm_a \wedge m)$. Luego, bajo todo preorden de aproximación semántica R al que la distribución p asigne probabilidad positiva, sucede que $(zc_a \wedge c)R\ (zm_a \wedge m)$.

Aplicando ahora las propiedades de los preórdenes de comparación cruzada, lo anterior implica que bajo cualquiera de estos preórdenes de comparación cruzada $(\geq)$ y todo preorden de aproximación semántica R al que la distribución p asigne probabilidad positiva, $[(zc_a \wedge c),R](\geq)[(zm_a \wedge$ $\wedge\ m),\ R]$.

Por otra parte, bajo cualquiera de estos preórdenes de comparación cruzada $(\geq)$, y para todo preorden de aproximación semántica R al que la distribución p asigne probabilidad positiva, habrá algún preorden de aproximación semántica R' también con probabilidad positiva y para el que $[(zm_a \wedge m),\ R](\geq)[(zm_a \wedge m),\ R']$, y por lo tanto, $[(zc_a \wedge c),\ R](\geq)[(zm_a \wedge m),$ $R']$.[52]

De todo ello se sigue que, para todo preorden $(\geq)$ de comparación cruzada, y todo todo preorden de aproximación semántica R al que la distribución p asigne probabilidad positiva, si con todo preorden R' al que p asigna probabilidad positiva sucede que $[(zm_a \wedge m),\ R'](>)[(zc_a \wedge c),\ R]$, entonces $p(R) = 0$.

En consecuencia,

para cualquier preorden de comparación cruzada $(\geq)$, y toda m, c, zm_a, zc_a y $e^o \in E^*$,

a) si bajo todo preorden de aproximación $R \in Z^*$ al que p asigne probabilidad positiva sucede que $(m \Rightarrow c)$ es verdadera y que $(m \Rightarrow c)R\ (zm_a \wedge$ $\wedge\ m)$, y

b) si con todo preorden de aproximación $R^o \in Z^*$ bajo el que e^o sea verdadera y todo preorden de aproximación $R' \in Z^*$ al que p asigne probabilidad positiva sucede que $[(zm_a \wedge m),\ R'](>)[(zc_a \wedge c),\ R^o]$, entonces,

1º) para todo preorden de aproximación $R^o \in Z^*$ bajo el que e^o sea verdadera, $p(R) = 0$;

2º) por lo que e^o será falsa bajo RX.

5.3. Proximidad entre enunciados

Aunque ligeramente más complicada, otra posibilidad de llegar a resultados similares nos la ofrecen las comparaciones de proximidad entre enunciados (evaluados bajo algún preorden de aproximación). Con la ventaja de que podemos explotar la idea de la lejanía entre $(zc_a \wedge e')$ y $(zc_a \wedge c)$ como explicación de que $(zc_a \wedge e')$ no constituya ninguna eventualidad que pueda terminar ocurriendo.[53]

Supondremos que el objeto de esas comparaciones es el nivel o grado de proximidad o desviación entre un enunciado evaluado bajo un preorden y otro enunciado evaluado bajo el mismo u otro preorden, en comparación con el nivel o grado de proximidad o desviación entre un enunciado evaluado bajo un preorden y otro enunciado evaluado bajo el mismo u otro preorden. Dicho de otra forma, lo que se compara es el nivel de proximidad o de desviación entre un par como $[(e^1, R^1), (e^2, R^2)]$, y un par como $[(e^3, R^3), (e^4, R^4)]$. Así pues, el dominio de esas comparaciones es el producto cartesiano $E^* \times Z^* \times E^* \times Z^*$.

Convengamos, además, en representar mediante el símbolo $[>]$ la relación "estar más próxima que", mediante el símbolo $[=]$ la relación "estar tan próxima como", y mediante $[\geq]$ la relación "estar tan próxima, al menos, como".

De esta forma, la expresión «$[(e^1, R^1), (e^2, R^2)][>][(e^3, R^3), (e^4, R^4)]$» significa que, evaluada bajo R^1, e^1 está más próxima a e^2 evaluada bajo R^2 de lo que lo está e^3 a e^4 cuando estas dos últimas están evaluadas bajo R^3 y R^4, respectivamente. Análogamente, «$[(e^1, R^1), (e^2, R^2)][=][(e^3, R^3), (e^4, R^4)]$» significa que, evaluada bajo R^1, e^1 está tan próxima a e^2 evaluada bajo R^2 de lo que lo está e^3, evaluada bajo R^3, a e^4 evaluada bajo R^4. Por fin, la expresión «$[(e^1, R^1), (e^2, R^2)][\geq][(e^3, R^3), (e^4, R^4)]$» significa que, evaluada R^1, e^1 está tan próxima, por lo menos, a e^2 evaluada bajo R^2, como lo está e^3, evaluada bajo R^3, a e^4 evaluada bajo R^4.

Como en ocasiones semejantes, vamos a suponer que cualquier relación de proximidad como $[\geq]$ es reflexiva, transitiva y completa en su dominio, y que $[>]$ y $[=]$ se definen sobre su base de la manera que ya conocemos. A estas nuevas relaciones binarias las podemos llamar preórdenes de proximidad semántica cuando satisfagan las anteriores y estas nuevas propiedades, que resulta bastante natural admitir a propósito de las relaciones de esta naturaleza:

1ª) para toda $e^1, e^2, e^3 \in E^*$ y todo $R \in Z^*$,
$[(e^1, R), (e^2, R)][=][(e^2, R), (e^1, R)]$;

2ª) para toda $e^1, e^2, e^3 \in E^*$ y todo $R \in Z^*$,
si $e^1 I\, e^2$, entonces $[(e^1, R), (e^3, R)][=][(e^2, R), (e^3, R)]$;

3ª) para toda $e^1, e^2, e^3, e^4 \in E^*$ y todo $R \in Z^*$,

si $e^1 I e^2$, entonces $[(e^1, R), (e^2, R)][\geq][(e^3, R), (e^4, R)]$,
es decir, las proposiciones que más se aproximan entre sí bajo R son las que se aproximan a la verdad en la misma medida;

4ª) para toda $e^1, e^2, e^3 \in E^*$ y todo $R', R'' \in Z^*$,

a) si e^1 es verdadera bajo R, y e^2 y e^3 son falsas bajo R'',
$[(e^2, R''), (e^1, R')][\geq][(e^3, R''), (e^1, R')]$ syss $e^2 R e^3$, y
$[(e^2, R''), (e^1, R')][>][(e^3, R''), (e^1, R')]$ syss $e^2 P e^3$;

b) por el contrario, si e^1 es falsa bajo R', y e^2 y e^3 son verdaderas bajo R'',
$[(e^2, R''), (e^1, R')][\geq][(e^3, R''), (e^1, R')]$ syss $e^3 R e^2$, y
$[(e^2, R''), (e^1, R')][>][(e^3, R''), (e^1, R')]$ syss $e^3 P e^2$.

Asimismo, para reflejar el punto de vista del agente sobre las relaciones de proximidad entre enunciados, podemos seguir el mismo procedimiento que hasta ahora: postular una distribución de probabilidad definida sobre el conjunto de todos los preórdenes de esa clase.

Por otro lado, dado el carácter peculiar de Q, al que hemos supuesto exhaustivo y compuesto por respuestas potenciales excluyentes entre sí, también parece natural admitir dos cosas. Primero, que la proximidad o lejanía entre $(zc_a \wedge c)$ y $(zc_a \wedge e^o)$, donde e^o es cualquiera de las posibilidades incompatibles con c pertenecientes a Q, se mantiene constante sea cual sea el preorden bajo el que se considera evaluada una y otra. Y segundo, que lo mismo sucede entre ellas dos y $(zm_a \wedge m)$. Ello nos permite mantener la hipótesis siguiente en torno a esas expresiones:

para todo preorden de proximidad $[\geq]$ con probabilidad positiva, y para todo preorden $R^1, R^2, R^3, R^4 \in Z^*$,

a) $[((zc_a \wedge e^o), R^1), ((zc_a \wedge c), R^2)][=][((zc_a \wedge e^o), R^3), ((zc_a \wedge c), R^4)]$,
b) $[((zc_a \wedge e^o), R^1), ((zm_a \wedge m), R^2)][=][((zc_a \wedge e^o), R^3), ((zm_a \wedge m), R^4)]$,
c) $[((zc_a \wedge c), R^1), ((zm_a \wedge m), R^2)][=][((zc_a \wedge c), R^3), ((zm_a \wedge m), R^4)]$.

Pues bien, de ello se desprende que

si $(zc_a \wedge e^o)$ no es falsa bajo RX, entonces bajo todo preorden de proximidad $[\geq]$ con probabilidad positiva, y bajo cualesquiera $R^1, R^2, R^3, R^4 \in Z^*$, sucede que $[((zc_a \wedge e^o), R^1), ((zc_a \wedge c), R^2)][\geq][((zc_a \wedge e^o), R^3), ((zm_a \wedge m), R^4)]$.

Nótese que si $(zc_a \wedge e^o)$ no es falsa bajo RX, entonces habrá algún prorden de aproximación con probabilidad positiva bajo el que $(zc_a \wedge e^o)$ sea verdadera. Sea R^o ese preorden. Bajo ese preorden, $(zc_a \wedge c)$ y $(zm_a \wedge m)$ serán falsas; además, como bajo cualquier otro con probabilidad positiva,

$(zc_a \wedge e^o) R^o (zm_a \wedge m)$; por todo ello, en virtud de la condición 4ª postulada más arriba, $[((zc_a \wedge e^o), R^o), ((zc_a \wedge c), R^o)][\geq][((zc_a \wedge e^o), R^o),((zm_a \wedge m), R^o)]$. Pero entonces, por la hipótesis anterior, $[((zc_a \wedge e^o), R^1), ((zc_a \wedge c), R^2)][\geq]$ $[\geq][((zc_a \wedge e^o), R^3), ((zm_a \wedge m), R^4)]$.

Un corolario inmediato es de lo anterior es que

> si hay algún preorden de proximidad $[\geq]$con probabilidad positiva y tal que para algunos preórdenes de aproximación R^1, R^2, R^3, $R^4 \in Z^*$, $[((zc_a \wedge e^o), R^1), ((zm_a \wedge m), R^2)][>][((zc_a \wedge e^o), R^3), ((zc_a \wedge c), R^4)]$, entonces $(zc_a \wedge e^o)$ será falsa bajo RX,

que es lo que tratábamos de establecer.

5.4. Aplicabilidad práctica de las comparaciones de aproximación que involucran modelos

Para terminar esta sección, un par de comentarios sobre la aplicabilidad práctica de estos resultados, cuyo sentido es similar al de los recogidos al final de la sección III del artículo 'Realism and Truth Approximation in Economic Theory'.[54]

En todos los casos considerados, la aplicabilidad de la propiedad respectiva depende que que se resuelva la comparación de $(zm_a \wedge m)$ con proposiciones de la forma $(zc_a \wedge e')$, donde $e' \in Q$ es una respuesta potencial o un acontecimiento alternativo e incompatible con *c*.

Sobre estos conjuntos como *Q*, es natural pensar que, en muchos casos, no habrá mayores problemas para resolver las comparaciones de aproximación y de proximidad entre las conjunciones de la forma $(zc_a \wedge e')$, donde $e' \in Q$. Una razón es la sencillez y la homogeneidad de la estructura lógica de las expresiones integrantes de esos conjuntos. Pero la principal es la homogeneidad de su significado, al referirse todas ellas a un mismo tipo de fenómeno o acontecimiento.

Sin embargo, eso no es lo que sucede cuando se comparan esas mismas conjunciones con $(zm_a \wedge m)$. Como *m* es el modelo del que se parte en el ejercicio para obtener *c*, lo corriente es que una y otra expresión tengan estructuras lógicas muy diferentes, y que la de *m* sea notablemente más compleja. Además, la clase fenómenos o acontecimientos recogidos en *m*, por un lado, y en cualquiera de las expresiones pertenecientes a *Q*, por el otro, pueden ser de naturaleza muy diferente. Consecuencia corriente de todo ello es que será por lo general muy difícil, si es que resulta posible, resolver de una manera fiable las comparaciones de aproximación a la verdad o de proximidad entre $(zm_a \wedge m)$, por un lado, y proposiciones de la forma $(zc_a \wedge e')$, por el otro, donde $e' \in Q$.

Imagínese que m es un modelo macroeconómico y que Q es el conjunto de valores que puede adquirir una magnitud cualquiera de las mencionadas en m. Si fuera fácil resolver las comparaciones aludidas, podríamos establecer con facilidad cuál sería la expresión e'' de Q tal que el nivel de aproximación a la verdad de $(zc_a \wedge e'')$ fuera el mismo que el de $(zm_a \wedge m)$, o el más cercano al de esta última conjunción. Por el contrario, lo corriente en esta clase de situaciones es que no sea posible resolver de una manera mínimamente satisfactoria las comparaciones entre $(zm_a \wedge m)$, por un lado, y las conjunciones $(zc_a \wedge e')$ tales que $e' \in Q$, por el otro. Mucho menos, identificar la expresión de ese conjunto cuya conjunción con zc_a tenga el mismo nivel de aproximación que $(zm_a \wedge m)$, o el más cercano a él.

La propia complejidad de un modelo y, sobre todo, el hecho de que su nivel de complejidad sea notoriamente mayor que el de sus conclusiones, hace pensar en la frecuencia con la que el grado de aproximación de $(zc_a \wedge c)$ puede ser el elemento de juicio más claro sobre el grado de aproximación del propio modelo instanciado $(zm_a \wedge m)$, y la frecuencia con la que las hipótesis o las creencias de partida sobre el grado de aproximación del propio modelo instanciado pueden verse corregidas a la luz del grado de aproximación de alguna de las conclusiones obtenidas a partir de él.[55]

Por último, y volviendo a una significativa cuestión teórica, aunque con indudables consecuencias prácticas, nótese que la condición de superioridad por implicación nos permite hablar de las relaciones entre el grado de aproximación de los modelos y sus conclusiones respectivas, pero no nos autoriza a prever que las conclusiones de un modelo más aproximado vayan a ser también más aproximadas.

6. *¿Pérdida de los condicionales subjuntivos y contrafácticos?*

En las dos secciones inmediatamente precedentes se ha ilustrado cómo la sencilla propuesta presentada en este artículo da pie también a los mismos desarrollos que los que se inferían de la propuesta presentada en 'Comparaciones' salvo, claro está, en lo referente a las expresiones compuestas mediante la conectiva barra, expresiones y conectiva de las que se ha decidido prescindir.

Es obvio que en la medida en que las expresiones barra se consideren un expediente apropiado para expresar condicionales subjuntivos y contrafácticos, prescindir de ellas significa prescindir de esas posibilidades de expresión. Pero a este propósito conviene también tener presente que el planteamiento basado en los preórdenes semánticos, aunque no se recurra a las expresiones mencionadas, permite extender el análisis de una manera muy sencilla para reflejar el punto de vista que el agente mantiene o podría mantener sobre cómo serían las cosas si se dieran o hubieran dado ciertas circunstancias.

Una posibilidad a ese respecto es, por ejemplo, suponer definida sobre el conjunto de los preórdenes semánticos una distribución de probabilidad $\delta_{e'}$ por cada una de las series de circunstancias reales o ficticias que quieran considerarse. Otra, considerar y suponer semánticamente evaluada cada expresión del espacio proposicional E^*, que pasaría así a ser el espacio de las proposiciones en modo indicativo, bajo cada hipótesis que quisiera considerarse sobre el cumplimiento de tales circunstancias reales o ficticias. Es decir, por cada expresión proposicional indicativa e^o y cada una de esas circunstancias e', $e^o_{e'}$ sería una expresión más a considerar en los planos sintáctico y semántico.

Estas posibilidades no introducen ninguna incoherencia con la decisión de haber dejado fuera del planteamiento las expresiones barra. Son cosas diferentes. Una expresión barra expresiva, por ejemplo, de un condicional contrafáctico, es una proposición susceptible de ser afirmada en unas condiciones distintas de las que están presentes cuando se considera la posibilidad de afirmar la condicionada de esa expresión barra bajo la hipótesis o el supuesto de que se cumplan, cumplieran o hubieran cumplido las circunstancias descritas en su condicionante. Una cosa es afirmar una expresión como "si el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos fuera el marítimo, y si los buques capaces de hacerlo no superaran los cincuenta nudos a la hora de velocidad, llegar a América llevaría varios días", y otra sería afirmar que "llegar a América lleva varios días" en el caso supuesto de que el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos fuera el marítimo, y de que los buques capaces de hacerlo no superaran los cincuenta nudos a la hora de velocidad.

La diferencia es más clara si se advierte que 1°) la frase "si el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos fuera el marítimo, y si los buques capaces de hacerlo no superaran los cincuenta nudos a la hora de velocidad, entonces el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos sería el marítimo, y los buques capaces de hacerlo no superarían los cincuenta nudos a la hora de velocidad" es una tautología, analíticamente válida; 2°) mientras que la frase "el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos es el marítimo, y los buques capaces de hacerlo no superaran los cincuenta nudos a la hora de velocidad", afirmada en el caso de que el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos fuera el marítimo, y de que los buques capaces de hacerlo no superaran los cincuenta nudos a la hora de velocidad, no pasaría de ser una constatación verdadera de una serie de circunstancias fácticas. Visto desde otro ángulo, 1º) la frase "si el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos fuera el marítimo, y los buques capaces de hacerlo no superaran los cincuenta nudos a la hora de velocidad, entonces el marítimo no sería el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos, y los buques capaces de hacerlo superarían los cincuenta nudos a la hora de velocidad" es una contradicción; 2º) mientras que la frase "el marítimo no es el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos, y los buques capaces de hacerlo superan los cincuenta nudos a la hora de velocidad", no pasaría de ser una proposición simplemente falsa si fuera afirmada siendo el marítimo el único modo de trasporte para cruzar los mares y océanos o suponiendo que así fuera, y sucediendo o suponiendo que los buques capaces de hacerlo no superaran los cincuenta nudos a la hora de velocidad.

7. Resumen y comentarios finales

En las seciones segunda y tercera hemos presentado una reforma de una propuesta anterior para modelar las comparaciones de enunciados según se aproximen más o menos a la verdad o se alejen más o menos de la falsedad. La reforma pretende simplificar la versión presentada en el artículo "Comparaciones de aproximación a la verdad y de lejanía de la falsedad", versión que, a su vez, reforma y simplifica las propuestas ofrecidas en dos trabajos anteriores.

La atención prestada a las comparaciones de esta clase viene motivada por el papel que en economía se ha atribuido al grado de aproximación a la realidad de los modelos teóricos de cara a su propia aplicabilidad, como se comenta en la sección introductoria.

La reforma estudiada en el artículo consiste básicamente en prescindir de la conectiva barra y de las expresiones formadas con su ayuda. Naturalmente, con esa reforma se consigue de entrada que no haga falta considerar expresión alguna en cuya formación intervengan conectivas distintas de las convencionales. Pero se consigue, sobre todo, que la lista de condiciones y propiedades que es preciso estipular sea mucho más reducida que la que se postulada en 'Comparaciones', y que las propias condiciones sean más sencillas en casos importantes, como el de la condición general de superioridad por implicación.

Esta sencillez, por otra parte, permite clarificar conceptualmente un extremo importante: la significación central que en un planteamiento como el que se propone adquiere esa misma condición de superioridad por implicación y el gran rendimiento al que da lugar.

En la sección cuarta se ha mostrado que, por lo que hace a las propiedades vinculadas con la presencia de conectivas y cuantificación lógica, el rendimiento de la nueva versión es el mismo que el de la desarrollada en 'Comparaciones'. Además, se ha presentado una nueva y sencilla forma de tratar las expresiones cuantificadas.

En la sección quinta se han abordado otras cuestiones importantes para una propuesta como la estudiada: las relaciones sistemáticas que pueden mediar entre el grado de aproximación de un modelo y el de sus conclusiones, y la información que el grado de aproximación de un modelo nos puede proporcionar sobre lo que pueda terminar sucediendo en las situaciones empíricas cuyo análisis tenga encomendado. Con este motivo, en esa misma sección se han indicado dos formas alternativas de ampliar la propuesta para que la información proporcionada por el grado de aproximación de un modelo sea mayor, y esté más en la línea de lo que esperamos intuitivamente. De todas maneras, también se indican algunas circunstancias que pueden hacer difícil la aplicación práctica de las previsiones incorporadas en la propuesta, y se alude a una limitación teórica que persistirá mientras no se refuerce la condición de superioridad por implicación: un modelo más aproximado puede dar lugar a conclusiones menos aproximadas que las de otros modelos cuyo grado de aproximación sea menor.

Por último y en relación con las pérdidas de capacidad expresiva motivadas por la ausencia de la conectiva barra, particularmente en relación con los condicionales sujuntivos y contrafácticos, se han dejado indicadas también dos formas muy sencillas de expandir el análisis para compensarlas.

Notas

1 Gª-Bermejo (1996).

2 Los modelos a los que nos referimos no deben entenderse en un sentido semántico. Son listas o conjunciones de expresiones matemáticas, que suelen ir acompañadas de una serie de cláusulas en las que se especifica la interpretación extramatemática de las variables destinadas a recibir una interpretación de esta clase. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones, acompañado de las correspondientes convenciones de notación, puede ser perfectamente un modelo en este sentido.

3 Las contribuciones iniciales decisivas datan de mediados de los años cincuenta. El libro que constituye la exposición de referencia de la teoría fue publicado en 1971.

4 Sobre este proceso, puede verse el primer apartado de la segunda sección de Gª-Bermejo (2000a). Por otra parte, ha habido excepciones muy notables, como la de Ronald Giere.

5 Véanse las dos primeras secciones del artículo citado Gª-Bermejo (2000a). Otro síntoma de la falta de claridad con la que se percibe el asunto entre los filósofos especializados en metodología económica es el contenido que se da a la voz "modelos" en Davis, Hands y Mäki (1998, pp. 316-321).

6 Koopmans (1957, pp. 142-3). Aumann (1985, seccs. 4 y 5).

7 *Cfr.* Krugman (1995, cap. 3), y Krugman (1995), especialmente las pp. 1833 y ss.

8 Véase, por ejemplo, Kydland y Prescott (1991 y 1996), y Lucas (1980 y 1987). El propio Hicks dedica una parte de Hicks (1983) a defender el uso de modelos como laboratorios conceptuales. *Cfr.* pp. 373 y ss.

9 Gibbard y Varian (1978, p. 676).

10 *Cfr.* Gibbard y Varian (1978, pp. 673 y ss.)

11 *Cfr.* la segunda sección de Gª-Bermejo (2000a) y de (2000b).

12 Sobre esta clase de críticas y sobre su enjuiciamiento, puede verse la sección final de Gª-Bermejo (2000a).

13 Simon (1963, p. 247).

14 Gibbard, y Varian, *op. cit.*, pp. 671-2.

15 Akerlof y Yellen (1985, p. 708).

16 Sobre la naturaleza lógica de los modelos, puede verse la primera sección de Gª-Bermejo (2000a).

17 Quizá no esté de más recordar esos ejemplos: "Por ejemplo, si a la pregunta de cuántos años han transcurrido desde el final de la segunda guerra mundial, un interlocutor respondiera que treintaicinco y otro que veintitrés, estaríamos de acuerdo en que, entre esas dos respuestas equivocadas, la primera estaría más cerca de la verdad. Análogamente, también estaríamos de acuerdo en que se aproximaría más a la verdad decir que el PIB español ascendió el año pasado a noventa billones de pesetas, que fijar esa cifra en cuatrocientos veinte billones. Y los ejemplos pueden multiplicarse con facilidad aunque prescindamos de aproximaciones numéricas. Así, normalmente, consideraremos más adecuado pensar sobre cualquier amigo o amiga que toma sus decisiones de una manera motivada, que creer que lo hace siempre de una manera aleatoria. La pantalla de mi ordenador no es completamente rectangular, pero decir que lo es se admitirá más fácilmente que atribuirle una forma triangular. Seguramente, en España durante este año el consumo agregado no se comporta exactamente como si fuera función de la renta disponible, pero esa hipótesis está más cerca de la realidad que suponer que dicho consumo depende de las fases lunares" ('Comparaciones', p. 46). Otro ejemplo utilizado en presentaciones anteriores invitaba a comparar la proposición de que la tierra es, en cuanto a su forma, como una naranja, con la proposición de que la tierra es, en cuanto a su forma, como la torre Eiffel.

18 'Comparaciones', p. 46 y 47.

19 'Comparaciones', p. 47 y 48.

20 Gª-Bermejo (1990 y 1994a).

21 Estas comparaciones podrían entenderse también como comparaciones de carácter modal. Decir que la frase "esta mesa no es marrón" está más próxima de ser verdadera que "dos y dos no son cuatro" coincide con el juicio de que el nivel de imposibilidad de la segunda es mayor que el de la primera. Análogamente, el juicio según el cual que "dos

y dos son cuatro" está más alejada de la falsedad que "esta mesa es marrón" coincide con la apreciación, filosóficamente familiar por otro lado, de que el grado de necesidad de la primera es superior al de la segunda.

22 Cuyas características pueden ser las propuestas en las pp. 52 a 54 de 'Comparaciones'.

23 Otro ejemplo esgrimido en el mismo lugar es el siguiente: "Así, puede ocurrir, por ejemplo, que *e'* sea verdadera o que la probabilidad de que lo sea alcance un valor mayor que la probabilidad de que lo sea *e"*, y que, por el contrario, el conjunto de los preórdenes bajo los cuales esta segunda proposición se aproxima más a la verdad o se aleja más de la falsedad reciba (...) una probabilidad mayor que la de los preórdenes en los cuales es *e'* la más aproximada a la verdad o la más lejana de la falsedad de las dos. Esto es lo que ocurriría, por ejemplo, si un agente tuviera una conjetura *e"* que pensara demostrar matemáticamente y en cuya verdad tuviera una gran confianza, que de todas maneras fuese menor de la que tuviera en que su hija la mayor volviese a la hora convenida, siendo ésta la opción *e'*." ('Comparaciones', pp. 58 y 59).

24 Como es sabido, un preorden es una relación binaria reflexiva y transitiva. A los preórdenes que también cumplen la condición de complitud (conexividad), se los apellida totales o completos.

Quizá convenga precisar que una relación binaria R definida en un dominio X, 1º) es reflexiva cuando xRx para todo $x \in X$; 2º) es transitiva cuando para todo $x,z,w \in X$, si xRz y zRw, entonces xRw; y 3º) es completa (o débilmente conexa) siempre que para todo $x,z \in X$ tales que $x \neq z$, se cumple que xRz o que zRx.

25 La razón por la que se supone dada una distribución de probabilidad, a pesar de no haber supuesto expresamente que el espacio proposicional sea finito ni haber justificado de otro modo que el caso sea discreto, es fundamentalmente simplificadora.

26 Abreviaremos la expresión "si y sólo si" de esta manera.

27 En el apartado II.1 de 'Comparaciones' (pp. 50-1) se apuntan las razones por las que se propone que los preórdenes de aproximación semántica cubran tanto las relaciones de aproximación a la verdad, como las de lejanía o desviación de la falsedad.

28 Decir de la relación P que es irreflexiva significa que para todo $x \in X$, no xPx; y decir que es asimétrica, que para todo $x,z \in X$, si xPz, entonces no zPx. A su vez, la relación I es simétrica porque para todo $x,z \in X$, si xIz, entonces sucede también que zIx.

29 La condición de adosamiento y la adaptación de la regla de la multiplicación.

30 Llamamos "expresiones barra" a las construidas mediante el empleo, como conectiva diádica, del símbolo barra de la probabilidad condicionada.

31 Véanse las pp. 54 a 56 de 'Comparaciones'.

32 Las diez siguientes: 1ª) condición sobre las propiedades relacionales generales de los preórdenes de aproximación semántica (reflexividad, transitividad y completitud); 2ª) de adaptación del principio de *tertio excluso*, 3ª) de simetría simetría vertical, 4ª) de superioridad por implicación, 5ª) de implicación por instanciación, 6ª) de equivalencia por clausura, 7ª) de equivalencia de las expresiones paracompuestas, 8ª) de adosamiento, 9ª) de adaptación de la regla de la multiplicación, y 10ª) de estabilidad veritativa. Véanse las pp. 52 a 56 de 'Comparaciones'.

33 *Condición de adosamiento:* con toda $e', (e'' \mid e')$ y $[(e'' \mid e') \wedge e']$ en E^*,
sucede que $e' I [(e'' \mid e') \wedge \wedge e']$ o que $(e'' \mid e') I [(e'' \mid e') \wedge e']$.
Adaptación de la regla de la multiplicación: para toda $(e' \wedge e'')$ y $[(e'' \mid e') \wedge e']$ en E^*,
$(e' \wedge e'') I [(e'' \mid e') \wedge e']$.

34 Es decir, la versión siguiente: *[adaptación de la regla de la multiplicación en términos del functor condicional]* para toda $(e' \wedge e'')$ y $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$ en E^*, $(e' \wedge e'')\, I\, [(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$.

35 En la sección III de 'Comparaciones' (pp. 56-8) se comenta el sentido que tiene postular esa distribución de probabilidad, las distintas clases de información que nos proporciona, y las relaciones entre las comparaciones de probabilidad y las de aproximación a la verdad o de lejanía de la falsedad.

Nótese, por otra parte, que en el caso de que el agente resolviera taxativamente todas las comparaciones planteables en E^*, la distribución de probabilidad correspondiente tendría que asignar probabilidad igual a uno a un sólo preorden semántico, y probabilidad igual a cero a todos los demás. En ese caso, por lo tanto, bastaría con postular únicamente dicho preorden.

36 A través de las conocidas equivalencias entre las conectivas diádicas.

37 Siguiendo la misma estrategia que en 'Comparaciones', demostremos primero que si e' y e'' son verdaderas y $e'P\,[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$, entonces $(e' \Rightarrow e'')I\, e'$.

Por la condición de adosamiento y puesto que $e'P\,[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$, tendrá que suceder que $[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\,(e' \Rightarrow e'')$. A su vez, por la condición general de superioridad por implicación (de la que se deriva, recuérdese, la adaptación de la regla de la multiplicación en términos del functor condicional) $e''R\,(e' \wedge e'')I\,[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']I\,(e' \Rightarrow e'')$. Por lo tanto, por transitividad, $e''R\,(e' \Rightarrow e'')$.

Imaginemos, ahora, que $[(e \Rightarrow \neg e) \wedge e]R\, e$; sucedería que $\neg eR\, e$, ya que en virtud de la condición de superioridad por implicación, $\neg eR\,(\neg e \wedge e)I\,[(e \Rightarrow \neg e) \wedge \wedge e]R\, e$. *Consecuentemente, por la condición de simetría vertical,* $\neg e$ *sería verdadera y* e *falsa, en contradicción con la hipótesis de partida. Por lo tanto,* $eP\,[(e \Rightarrow \neg e) \wedge e]$, y por un argumento similar al utilizado en el párrafo anterior, $\neg eR\,(e \Rightarrow \neg e)$, siendo $(e \Rightarrow \neg e)$ lógicamente equivalente a $\neg\,(e \wedge e)$, por lo que $\neg eR \neg\,(e \wedge e)$. Pero si $eR\,(e \Rightarrow e)$ y $\neg eR \neg\,(e \wedge e)$, la única posibilidad permitida por la condición de simetría vertical es que $eI(e \Rightarrow e)$ y que $\neg eI \neg\,(e \wedge e)$.

Una vez establecido lo anterior, podemos demostrar que si e y e son verdaderas, entonces $(e \wedge e)I\, Ie$ o $(e \wedge e)I\, e$. Si ocurriera que $(e' \wedge e'')I\, e'$, no tendríamos que probar nada más. Supongamos, por lo tanto, que ése no es el caso. En tales circunstancias, la condición general de superioridad por implicación garantiza que $e'P\,(e' \wedge e'')I\,[(e' \Rightarrow e'') \wedge \wedge e']$, y que, por lo tanto, $e'P[(e' \Rightarrow e'') \wedge e']$. De esta manera, aplicando el resultado anterior podemos concluir que $e''I\,(e' \Rightarrow e'')$.

38 Por $p[e]$ entenderemos la probabilidad de que e sea verdadera, a juicio del agente, aunque en el sentido literal más riguroso esa expresión designa la probabilidad del conjunto $[e]$ de todos los preórdenes de aproximación semántica bajo los que es verdadera la proposición e.

39 En cuanto a las relaciones entre la probabilidad de e^o y las de sus miembros e' y e'', también es inmediato establecer que

a) $p[e^o]= 1$ syss $p[e']= 1$ y $p[e'']= 1$;

b) si $p[e']= 1$ y $p[e''] < 1$, entonces $p[e^o]= p[e'']$; y si $p[e'] < 1$ y $p[e'']= 1$, entonces $p[e^o]= = p[e']$;

c) si la probabilidad de e' y de e'' es superior a 0.5, entonces la de la propia conjunción será positiva; si, además, $p[[e'']\wedge[e']]= 1$ o si $p[[e']\wedge[e'']]= 1$, entonces $1 > p[e^o] > > 0.5$;

d) si $1 > p[e^{o}] > 0.5$, entonces o bien $p[e'] = 1$ y $1 > p[e''] = p[e^{o}] > 0.5$,
o bien $p[e''] = 1$ y $1 > p[e'] = p[e^{o}] > 0.5$,
o bien $1 > p[e''] > 0.5$ y $1 > p[e'] > 0.5$;

e) si la probabilidad de uno de los miembros, sea por ejemplo e', es mayor que 0.5 y la del otro, que en este caso sería e'', alcanza exactamente ese valor, entonces la probabilidad de e^{o} también será positiva en estas circunstancias; si, además, $p[[e'] \wedge [e'']] = 1$, entonces $p[e^{o}] = 0.5$;

f) si las probabilidades de e' y de e'' son las dos de 0.5, entonces entonces $0.5 > p[e^{o}] > 0$; sucederá que $p[e^{o}] = 0.5$ siempre que $p[[e''] \wedge [e']] = 1$, o $p[[e'] \wedge [e'']] = 1$; sucederá, en cambio, que $0.5 > p[e^{o}] > 0$ siempre y cuando $1 > p[[e''] \wedge [e']] > 0$, $1 > p[[e'] \wedge [e'']] > 0$; por ello, cuando e' sea estadísticamente independiente de e'' bajo p (es decir, si $p[[e''] \wedge [e']] = p[e'']$, o si $p[[e'] \mid [e'']] = p[e']$), o e'' lo sea de e', entonces $0.5 > p[e^{o}] > 0$; y cuando $p[[e''] \wedge [e']] = 0$ y $p[[e'] \wedge [e'']] = 0$, sucederá que $p[e^{o}] = 0$;

g) si $p[e^{o}] = 0.5$, entonces o bien a) $p[e'] = 1$ y $1 > p[e''] = p[e^{o}] = 0.5$, o bien b) $p[e''] = 1$ y $1 > p[e'] = p[e^{o}] = 0.5$, o bien c) $1 > p[e''] > 0.5$ y $1 > p[e'] > 0.5$;

h) si la probabilidad de alguno de los dos miembros es positiva pero menor que 0.5, sucederá con carácter general que $0.5 > p[e^{o}] \geq 0$; si $p[[e''] \wedge [e']] = 0$, o $p[[e'] \wedge [e'']] = 0$, entonces $p[e^{o}] = 0$; en los demás casos, $0.5 > p[e^{o}] > 0$;

i) si $1 > p[e^{o}] > 0$, entonces o bien $p[e'] = 1$ y $1 > p[e''] = p[e^{o}] > 0$,
o bien $p[e''] = 1$ y $1 > p[e'] = p[e^{o}] > 0$,
o bien $1 > p[e''] > 0$ y $1 > p[e'] = p[e^{o}] > 0$;

j) si $p[e'] = 0$ o $p[e''] = 0$, entonces $p[e^{o}] = 0$; y, por fin,

k) si $p[e^{o}] = 0$, entonces o bien $p[e'] = 0$, o bien $p[e''] = 0$,
o bien $p[e'] > 0$, $p[e''] > 0$, $p[[e''] \wedge [e']] = 0$ y $p[[e'] \wedge [e'']] = 0$.

40 Como hacíamos antes al exponer sólo las propiedades relativas a las conjunciones, nos limitaremos a ilustrar las propiedades relativas a las proposiciones cerradas y cuantificadas universalmente.

41 Esto no es siempre así. En estática comparativa, por ejemplo, los ejercicios se valen de un conjunto de premisas que incluye la versión del modelo aplicado al periodo o a la situación inicial, y la versión del mismo modelo pero aplicado a la situación que se genera después de haber tenido lugar el impacto cuyas consecuencias o efectos se investigan. En tales ejercicios, por lo tanto, las premisas empleadas en el desarrollo del argumento se obtienen al aplicar el modelo a esas situaciones o periodos, y no es el propio modelo el que constituye el conjunto de tales premisas. Pero el argumento sigue siendo deductivo. Por ello, no perdemos generalidad si centramos nuestra atención en la primera y más sencilla clase de ejercicios.

42 Como dicen Gibbard y Varian en la página 667 del artículo ya citado, "(...) mientras que un modelo habla de entidades de ciertas clases generales - precios, consumidores, información, y similares - sin decir de qué entidades concretas del mundo real se trate, un modelo aplicado especifica las clases particulares de entidades sobre las que versa. La teoría de la empresa, por ejemplo, es un modelo; cuando se interpreta en referencia a la General Motors, a los coches que produce la General Motors, sus precios, y así sucesivamente, es un modelo aplicado."

43 Estos puntos se desarrollan con más detalle en la sección primera de Gª-Bermejo (2000a).

44 Es decir, para cualquier otra proposición $e \in E^*$, $(pd \wedge m \Rightarrow c) R\, e$, y $[pd \Rightarrow (m \Rightarrow c)] R\, e$.

45 Matti Sintonen (1985, p. 32) defiende que esa idea sólo puede aplicarse a las cuestiones bien definidas. Pero, según él, ése no suele ser el caso de las cuestiones científicas.

Nuestra posición es más cercana a la expuesta por Allan Gibbard and Hall Varian cuando dicen: "Todos los modelos económicos tienen, por lo menos, esto en común: un modelo plantea una cuestión de la forma "¿qué sucedería si ocuriera tal y tal cosa?" de manera que pueda ser respondida deductivamente." (*Op. cit.*, p. 668).

46 En el caso más simple, Q puede limitarse a incluir c y su negación.

47 Recuérdese que estamos suponiendo que las variables libres son las mismas en todas las respuestas potenciales pertenecientes a Q.

48 De una manera más general, aunque complicando algo las cosas y sin añadir nada sustancialmente a cambio, podríamos suponer que existe una partición de Q tal que para toda par e', $e'' \in Q$, a) si pertenecen al mismo elemento de la partición, se aproximan en la misma medida a la verdad bajo cualquier preorden del soporte Sp; y b) si pertenecen a elementos distintos, se excluyen mutuamente.

49 Como sucede cuando se adoptan las convenciones de notación incluidas en ella.

50 Nótese que al ser $(m \Rightarrow c)$ formalmente válida, lo son también $[z_a \Rightarrow (m \Rightarrow c)]$, $\{[(z_a \wedge m) \Rightarrow (z_a \wedge c)]\}$ y $\{[(zm_a \wedge m) \Rightarrow (zc_a \wedge c)]$.

51 Por hipótesis, $[zc_a \Rightarrow (c \Rightarrow \neg e')]$; luego $[(zc_a \wedge c) \Rightarrow \neg e']$, $[(zc_a \wedge c) \Rightarrow (zc_a \wedge \neg e')]$, y $[(zc_a \wedge c) \Rightarrow \neg (zc_a \wedge e')]$.

52 Nótese que ese preorden cuya existencia se afirma puede ser el propio R.

53 Lo que sigue es una adaptación del enfoque adoptado en la última sección de Gª-Bermejo (1994b).

54 Gª-Bermejo (1997).

55 Esto no significa admitir con Milton Friedman que, como una cuestión de principio, el único grado de aproximación relevante sea el de las conclusiones (instanciadas). Aunque sí significa reconocer que, como una cuestión de hecho, ése será el caso en muchas ocasiones. Gibbard y Varian sostienen, a su vez, un aspecto diferente de las tesis de Friedman, la idea de que a la hora de juzgar si las hipótesis de un modelo aplicado son suficientemente aproximadas, no hay ninguna medida que sea independiente de la exactitud de las conclusiones. *Cfr. op. cit.*, p. 671.

BIBLIOGRAFIA

Akerlof, George A., Yellen, Janet L.: 1985b, 'Can Small Deviations from Rationality Make Significant Differences to Economic Equilibria?', *The American Economic Review* 75/4, 708-20.

Aumann Robert J.: 1985, 'What is Game Theory Trying to Accomplish?', in Kenneth J. Arrow, Seppo Honkaphoja: *Frontiers of Economics*, Oxford, Blackwell, pp. 28-91.

Davis, John B., Hands, Wade D., Mäki, Uskali: 1998, *The Handbook of Economic Methodology*, Cheltenham, UK, Edward Elgar Publishing Limited.

Gª-Bermejo, Juan C.: 1990, *Aproximación, Probabilidad y Relaciones de Confianza*, Madrid, Alianza Editorial.

--: 1994a, *Introducción a las Comparaciones de Confianza*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

--: 1994b, 'Aproximación empírica, aproximación a la verdad, proximidad a y proximidad entre', *Theoria* 20, 151-171.

--: 1996, 'Comparaciones de aproximación a la verdad y de lejanía de la falsedad', *Theoria* 26, 45-83.

--: 1997, 'Realism and Truth Approximation in Economic Theory', in A. Ibarra, Th. Mormann (eds.): *Representations of Scientific Rationality. Contemporary Formal Philosophy of Science in Spain*, Poznan Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities, vol. 61, Amsterdam, Atlanta, Rodopi, pp. 167-203.

--: 2000a, 'Afirmaciones Teóricas y Modelos Económicos', *Argumentos de razón técnica* 3. En prensa.

--: 2000b, 'The Evaluation of Models Classifying Trees in Terms of Responsiveness' (mimeo).

Gibbard, Allan, Varian, Hal R.: 1978, 'Economic Models', *The Journal of Philosophy* 75, 664-77.

Hicks, John R.: 1983, 'A Discipline not a Science', in *Classics and Moderns. Collected Essays on Economic Theory. Vol. III.*, Blackwell, pp. 365-75.

Koopmans,Tjalling: 1957, *Three Essays on the State of Economic Science*. N. York, McGraw-Hill Company. Hay versión castellana publicada en Barcelona por A. Bosch.

Krugman, Paul: 1995, *Development, Geography and Economic Theory*, The MIT Press. Caps. 1º y 3º.

--: 1998, 'Two Cheers for Formalism', *The Economic Journal* 108, 1829-1837.

Kydland, Finn E., Prescott, Edward: 1991, 'The Econometrics of the General Equilibrium Approach to Business Cycles', *Scandinavian Journal of Economics* 93(2), 161-78. Hay versión castellana, 'El análisis econométrico del enfoque de equilibrio general de los ciclos económicos', *Cuadernos Económicos de ICE* 48, 1991/92, 125- 42).

--: 1996, 'The Computational Experiment: An Econometric Tool', *Journal of Economic Perspectives* 10/1, 69-85.

Lucas, Robert E. Jr.: 1980, 'Methods and Problems in Business Cycle Theory', *Journal of Money, Credit and Banking* 12, 696-715.

--: 1987, *Models of Business Cycles*, Yrjö Jahnsson Lectures, Oxford y New York, Basil Blackwell. Hay versión castellana, *Modelos de ciclos económicos*, Madrid, Alianza Editorial, 1988.

Simon, Herbert A.: 1963, 'Problems of Methodology - Discussion', *The American Economic Review: Papers & Proceedings* 53, 229-31. Also in D. Hausman (ed.): 1984, *The Philosophy of Economics*, Cambridge University Press, pp. 245-48.

Sintonen, Matti: 1985, 'Separating problems from their backgrounds: a question-theoretic proposal', *Communication and Cognition* 18, 25-49.

Juan Carlos García-Bermejo es catedrático de Metodología General y Económica de la Universidad Autónoma de Madrid. Ha trabajado principalmente en temas de elección individual y social, y de metodología científica y económica. En esta línea, ha publicado *Economía y Filosofía de la Ciencia* (Ediciones de la UAM, 1990), *Aproximación, Probabilidad y Relaciones de Confianza* (Alianza, 1990), *Introducción a las Comparaciones de Confianza* (Ediciones de la UAM, 1994), y 'Realism and Truth Approximation in Economic Theory' (en *Representations of Scientific Rationality. Contemporary Formal Philosophy of Science in Spain*, ed. por A. Ibarra y Th. Mormann, 1997).