

Tesis doctoral

**INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA
DINÁMICA DE SISTEMAS MULTICUERPO MEDIANTE
DIFERENCIAS CENTRALES DE ORDEN DOS**

Presentado por:

Gorka Urkullu Martín

Perteneciente a:

Departamento de Ingeniería Mecánica

Escuela de Ingeniería de Bilbao

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Para optar al título de:

Doctor Ingeniero Industrial

Director de tesis:

Dr. Igor Fernández de Bustos

Bilbao, 13 de junio de 2019

Eskertzeak

- Lehenik eta behin, nire aitari eta amari eskerrak eman nahiko nizkieke. Ez daukat orri nahikorik, niretzat egin duzuen guztia esateko. Primeran egin duzue.
- Nire zuzendariari, Igor Fernández de Bustos, tesia egiteko aukera eman zidan eta. Momentu hartan ez zen erraza nigan fidatzea eta berak egin zuen. Azkenean, ez da txarto atera, ezta?
- Nire familia guztiari, hurbil daudenei eta urrun daudenei ere bai. Bakoitza zuen gisakoa zarete, hori bai, baldin eta ostegunetan pintxopotera joaten jarrai dezagun, bestela norbait ezabatuko dut.
- Doktoregai gelako lankide guztiei, batez ere, Iker Heras, Maggi Madrid eta Vanessa García nirekin hasieratik egon direlako. Bizitzak beste leku batera eramango gaitu baina beti denbora egongo da bazkariaren bat antolatzeke, agian joateko ez, hori jada doodle-ek erabakiko du.
- Nire lagunak ere gogoratu nahi ditut. Zintzo izateko, ez dute ezer berezirik egin baina, hori behar nuena zen. Lasai, hurrengo erronda neuk ordainduko dut. Errondei buruz berba eginez, ikerketa taldekideei, *paper* berri bakoitzarekin ohitura oso polita hasi gara. Horrela jarraitzea espero dut. Punto honetan, Naiara Ortega ere aipatu nahi dut, nahiz eta ezin izan zen, tesia egitea proposatu zidan lehen pertsona zen.
- Euskal Herriko Unibetsitateari eskerrak ematen dizkiot, doktoratu aurreko laguntza emateagatik ikertzaileak prestatzeko.
- Eusko Jaularitzari, ikerketa taldea onartzeagatik IT 947-16 atalean.
- Ekonomi eta Lehiakortasun Ministerioari, DPI2016-80372-R (AEI / FEDER, EB) proiektua onesteagatik.
- Azkenik, Javier Cuadrado irakaslearen ikerketa taldeari eskerrak eman nahi dizkiot lan hau garatzeko aholkularitza eta orientabideagatik.

Contenido

Eskertzeak.....	xi
Contenido.....	xiii
Lista de Figuras.....	xix
Lista de Tablas.....	xxvii
PARTE I: PREÁMBULO Y ANTECEDENTES.....	1
<u>1 Introducción.....</u>	<u>3</u>
1.1 Organización del trabajo.....	3
1.2 Resumen.....	4
1.3 Objetivos y alcance del proyecto.....	6
1.4 Notación matemática empleada en el documento.....	7
1.5 Marco de referencia de la investigación.....	8
<u>2 Estado del arte.....</u>	<u>13</u>
2.1 Modelado del problema.....	14

2.1.1	Coordenadas independientes.....	15
2.1.2	Coordenadas dependientes.....	16
2.1.3	Orientación de un sólido en el espacio.....	21
2.2	Ecuaciones de la dinámica.....	28
2.2.1	Ecuaciones de Newton-Euler.....	30
2.2.2	Ecuaciones de Lagrange.....	31
2.2.3	Ecuaciones de Hamilton.....	33
2.2.4	Ecuaciones de Gibbs-Appell.....	34
2.2.5	Ecuaciones de Kane.....	36
2.3	Formulación de sistemas dinámicos restringidos.....	37
2.3.1	Multiplicadores de Lagrange.....	38
2.3.2	Ecuación de Lagrange de primera clase.....	40
2.3.3	Eliminación algebraica de los multiplicadores de Lagrange	41
2.4	Métodos numéricos para sistemas restringidos.....	45
2.4.1	Técnicas para la obtención de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	45
2.4.2	Técnicas de reducción de índice.....	51
2.4.3	Técnicas de estabilización de las restricciones.....	52
2.4.4	Técnicas de eliminación de la deriva en el cumplimiento de las restricciones.....	56
2.4.5	Técnicas basadas en elementos finitos.....	60
2.5	Integración numérica.....	64
2.5.1	Integración de sistemas EDO.....	65

2.5.2 Integración de sistemas DAE.....	78
PARTE II: METODOLOGÍA.....	83
3 Conceptos básicos previos.....	85
3.1 Cuaternión unitario.....	87
3.2 Magnitudes básicas.....	91
3.2.1 Coordenadas globales de un punto a partir de las locales.....	92
3.2.2 Coordenadas globales de un vector a partir de las locales.....	95
3.2.3 Coordenadas globales de un plano a partir de las locales.....	96
3.2.4 Coordenadas globales de una línea a partir de las locales.....	98
3.3 Velocidad de un punto de un elemento.....	102
3.4 Fuerzas en un punto.....	103
3.5 Energía del sistema.....	105
4 Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio.....	109
4.1 Ecuaciones del movimiento para un único sólido.....	110
4.1.1 Linealización de las ecuaciones.....	111
4.1.2 Ecuación de Euler.....	112
4.1.3 Ecuaciones de Newton-Euler.....	118
4.2 Ecuaciones del movimiento para sistemas con varios cuerpos.....	119
4.3 Elementos discretos.....	122
4.3.1 Muelles.....	123

4.3.2 Amortiguadores.....	125
4.3.3 Implementación de los elementos discretos en las ecuaciones de equilibrio.....	127
5 Integración por diferencias centrales.....	131
5.1 Características del método de integración.....	132
5.2 Aplicación del método.....	133
6 Restricciones.....	137
6.1 Implementación de las restricciones.....	138
6.2 Norma del cuaternión.....	144
6.3 Pares cinemáticos.....	146
6.3.1 Par esférico.....	146
6.3.2 Par de rotación.....	152
6.3.3 Par plano.....	155
6.3.4 Par cilíndrico.....	161
6.3.5 Par prismático.....	167
6.3.6 Par de junta cardan.....	171
6.3.7 Par de rodadura.....	177
6.4 Problema de posición.....	187
6.5 Diagrama de flujo del proceso.....	189
7 Optimización en la implementación de la metodología.....	193

PARTE III: APLICACIÓN DEL MÉTODO.....201**8 Resultados numéricos.....203**

8.1 Medidas.....	204
8.2 Peonza.....	206
8.3 Péndulo.....	211
8.4 Cuadrilátero articulado.....	217
8.5 Cuadrilátero articulado con resorte y amortiguador.....	222
8.6 Doble cuadrilátero articulado.....	227
8.7 Mecanismo de Bricard.....	232
8.8 Mecanismo de biela-manivela.....	237
8.9 Mecanismo biela-manivela con cardan.....	242
8.10 Mecanismo de Andrew.....	248
8.11 Regulador centrífugo.....	255
8.12 Bicicleta.....	260
8.13 Implementación en el lenguaje C.....	267
8.13.1 Peonza.....	268
8.13.2 Péndulo.....	268
8.13.3 Doble cuadrilátero articulado.....	269
8.13.4 Mecanismo de Bricard.....	270

PARTE IV: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....273

9 Conclusiones.....	275
10 Líneas futuras.....	281
Bibliografía.....	283
Nomenclatura y acrónimos.....	297

Lista de Figuras

Figura 1.1: Fases que componen el diseño de un sistema.....	9
Figura 1.2: Fases del proceso de diseño mecánico.....	11
Figura 2.1: Robot modelizado con coordenadas independientes.....	15
Figura 2.2: Coordenadas relativas en un mecanismo plano.....	16
Figura 2.3: Cuadrilátero articulado modelado con coordenadas cartesianas.....	18
Figura 2.4: Mecanismo biela-manivela con coordenadas naturales.....	19
Figura 2.5: Clasificación estandarizada de las ecuaciones de restricción.....	20
Figura 2.6: Vector respecto a los dos sistemas de referencia.....	22
Figura 3.1: Posición de un cuerpo respecto del sistema global.....	85
Figura 3.2: Punto de un sólido en el sistema global.....	92
Figura 3.3: Interpretación de la ecuación de un plano en el espacio.	96
Figura 3.4: Interpretación geométrica de una recta.....	99
Figura 3.5: Fuerzas y momentos sobre un cuerpo.....	104
Figura 3.6: Efecto de los esfuerzos puntuales sobre el CoM de un cuerpo en el sistema global.....	104
Figura 4.1: Modelización de elementos discretos.....	122
Figura 4.2: Muelle aplicado entre dos cuerpos.....	123

Figura 4.3: Dispositivo de amortiguación entre puntos de dos cuerpos diferentes.....	125
Figura 6.1: Representación clásica del par esférico.....	147
Figura 6.2: Representación de un par de rotación.....	152
Figura 6.3: Un par plano.....	156
Figura 6.4: Imagen de un par cilíndrico.....	161
Figura 6.5: Imagen de una cola de milano.....	168
Figura 6.6: Ilustración del par prismático.....	168
Figura 6.7: Representación idealizada de una junta cardan.....	172
Figura 6.8: Punto y vectores requeridos para definir una junta universal.....	172
Figura 6.9: Imagen de una leva con una restricción de rodadura pura.....	177
Figura 6.10: Contacto entre rueda y suelo en el instante	178
Figura 6.11: Contacto entre rueda y suelo en	178
Figura 6.12: Planteamiento de dos cuerpos para el par de rodadura.	179
Figura 6.13: Diagrama de flujo del proceso principal.....	189
Figura 6.14: Diagrama de flujo de un paso de integración.....	190
Figura 6.15: Diagrama de flujo de cálculo de las restricciones (izquierda) y paso de integración en el instante inicial (derecha).....	191
Figura 8.1: Imagen de la peonza y el suelo.....	206
Figura 8.2: Forma de la perturbación aplicada a la peonza.....	207
Figura 8.3: Desplazamiento en el eje del CoM de la peonza para diferentes pasos.....	208
Figura 8.4: Velocidad angular en dirección para la peonza.....	209

Figura 8.5: Desplazamiento del CdM en el eje para diferentes integradores con	210
Figura 8.6: Velocidad del CoM en el eje para diferentes integradores con	210
Figura 8.7: Violación de las restricciones a nivel de posición.....	211
Figura 8.8: Mecanismo de péndulo.....	212
Figura 8.9: Velocidad del punto en el eje para diferentes	213
Figura 8.10: Conservación de la energía mecánica para diferentes	214
Figura 8.11: Cumplimiento de las restricciones para el péndulo.....	214
Figura 8.12: Posición del punto en dirección para diferentes formulaciones.....	215
Figura 8.13: Posición del punto en dirección con diferentes métodos.....	216
Figura 8.14: Conservación de la energía mecánica para diferentes metodologías del problema del péndulo.....	217
Figura 8.15: Mecanismo del cuadrilátero articulado.....	218
Figura 8.16: Coordenada del punto del cuadrilátero articulado para diferentes	219
Figura 8.17: Velocidad angular de la barra de salida para diferentes en el cuadrilátero.....	219
Figura 8.18: Violación de las restricciones para el cuadrilátero articulado.....	220
Figura 8.19: Velocidad en del punto del cuadrilátero.....	221
Figura 8.20: Ángulo de la barra de salida del cuadrilátero.....	221
Figura 8.21: Cuadrilátero articulado con muelle y amortiguador.....	222
Figura 8.22: Desplazamiento en del punto para el mecanismo sin amortiguación.....	223

Figura 8.23: Desplazamiento en del punto para el mecanismo con amortiguación.....	224
Figura 8.24: Velocidad en del punto para el mecanismo con amortiguación.....	224
Figura 8.25: Cumplimiento de las restricciones a nivel de posición.	225
Figura 8.26: Desplazamiento en del punto para diferentes integradores.....	226
Figura 8.27: Velocidad angular de la barra de salida para diferentes integradores.....	226
Figura 8.28: Doble cuadrilátero articulado.....	227
Figura 8.29: Cumplimiento de la conservación de la energía para el doble cuadrilátero.....	228
Figura 8.30: Violación de las restricciones de posición.....	228
Figura 8.31: Desplazamiento del punto en el eje del Doble Cuadrilátero.....	229
Figura 8.32: Velocidad del punto en del Doble Cuadrilátero.....	230
Figura 8.33: Desvío de la conservación de la energía mecánica para diferentes integradores para el doble cuadrilátero.....	231
Figura 8.34: Imagen del mecanismo de Bricard.....	232
Figura 8.35: Desvío de la energía mecánica del mecanismo de Bricard para diferentes con DIMCD.....	233
Figura 8.36: Violación de las restricciones de posición para el mecanismo de Bricard.....	234
Figura 8.37: Posición del punto en del mecanismo de Bricard para diferentes integradores.....	235
Figura 8.38: Desplazamiento del punto en del mecanismo de Bricard.....	235

Figura 8.39: Conservación de la energía del mecanismo de Bricard para diferentes integradores.....	236
Figura 8.40: Desvío de la energía mecánica del mecanismo de Bricard para diferentes formulaciones.....	237
Figura 8.41: Mecanismo de Biela-Manivela.....	238
Figura 8.42: Velocidad de la deslizadera del mecanismo Biela-Manivela.....	239
Figura 8.43: Aceleración de la deslizadera en el mecanismo Biela-Manivela.....	239
Figura 8.44: Cumplimiento de las ecuaciones de restricción para el mecanismo biela-manivela.....	240
Figura 8.45: Velocidad angular de la barra de entrada en la biela-manivela.....	241
Figura 8.46: Fuerza de restricción sobre la deslizadera en dirección	241
Figura 8.47: Mecanismo biela-manivela con cardan.....	242
Figura 8.48: Desplazamiento de la deslizadera en el mecanismo biela-manivela con cardan.....	243
Figura 8.49: Fuerza de restricción en la deslizadera para el mecanismo biela-manivela con cardan.....	244
Figura 8.50: Aceleración de la deslizadera para diferentes integradores.....	245
Figura 8.51: Conservación de la energía para diferentes integradores.....	245
Figura 8.52: Conservación de la energía limitando el orden de los integradores a 2.....	246
Figura 8.53: Desplazamiento de la deslizadera del mecanismo biela-manivela con cardan para diferentes formulaciones.	248
Figura 8.54: Imagen del mecanismo de Andrew.....	249

Figura 8.55: Valor del término de un elemento del mecanismo de Andrew.....	250
Figura 8.56: Energía cinética del sistema.....	250
Figura 8.57: Velocidad del punto para el mecanismo de Andrew con diferentes	252
Figura 8.58: Conservación de la energía del sistema para diferentes	252
Figura 8.59: Posición del punto del mecanismo de Andrew para diferentes formulaciones.....	253
Figura 8.60: Conservación de la energía del sistema para diferentes formulaciones.....	254
Figura 8.61: Cumplimiento de las restricciones para el método DIMCD.....	255
Figura 8.62: Imagen del Regulador centrífugo de bolas.....	256
Figura 8.63: Velocidad de la deslizadera variando en el método DIMCD.....	257
Figura 8.64: Aceleración de la deslizadera variando en el método DIMCD.....	257
Figura 8.65: Datos de referencia para calcular el error	258
Figura 8.66: Cumplimiento de las restricciones a nivel de posición.	260
Figura 8.67: Imagen de una bicicleta.....	261
Figura 8.68: Ángulo de inclinación obtenido para diferentes con el método DIMCD en la maniobra 2.....	263
Figura 8.69: Velocidad de giro del manillar obtenida para diferentes con el método DIMCD en la maniobra 2.....	263
Figura 8.70: Velocidad de avance para la maniobra 2	264
Figura 8.71: Cumplimiento de las ecuaciones de restricción en la maniobra 2.....	265

Figura 8.72: Ángulo de inclinación durante la maniobra 1.....	265
Figura 8.73: Giro del manillar durante la maniobra 1.....	266
Figura 8.74: Velocidad de avance durante la maniobra 3.....	266
Figura 8.75: Ángulo de inclinación durante la maniobra 3.....	267

Lista de Tablas

Tabla 8.1: Datos del modelo peonza.....	207
Tabla 8.2: Convergencia de las simulaciones con el método DIMCD.....	209
Tabla 8.3: Detalles de las simulaciones para diferentes integradores.	211
Tabla 8.4: Datos del problema del péndulo.....	212
Tabla 8.5: Detalles de las simulaciones para el péndulo.....	216
Tabla 8.6: Simulación del problema del cuadrilátero articulado.....	218
Tabla 8.7: Simulaciones del cuadrilátero para diferentes integradores.....	221
Tabla 8.8: Características del cuadrilátero articulado con elementos discretos.....	222
Tabla 8.9: Simulaciones con el cuadrilátero articulado con muelle y amortiguador.....	226
Tabla 8.10: Datos del modelo de doble cuadrilátero articulado.....	227
Tabla 8.11: Simulaciones del doble cuadrilátero articulado.....	230
Tabla 8.12: Detalles de las simulaciones para diferentes formulaciones.....	232
Tabla 8.13: Características del problema del mecanismo de Bricard.	233
Tabla 8.14: Comparación de diferentes integradores del mecanismo de Bricard.....	236

Tabla 8.15: Detalles de las simulaciones para diferentes formulaciones.....	237
Tabla 8.16: Datos del problema de Biela-Manivela.....	238
Tabla 8.17: Comparación entre diferentes integradores para simular la biela-manivela.....	241
Tabla 8.18: Datos del problema de biela-manivela con cardan.....	242
Tabla 8.19: Resumen de las simulaciones del mecanismo biela-manivela con cardan.....	247
Tabla 8.20: Resultados de las simulaciones de diferentes fuentes.....	247
Tabla 8.21: Características del problema del mecanismo de Andrew.	249
Tabla 8.22: Error de ensamblaje.....	251
Tabla 8.23: Detalles de las simulaciones.....	254
Tabla 8.24: Datos de la simulación del Regulador centrífugo.....	256
Tabla 8.25: Resumen de las simulaciones del regulador de vapor.....	259
Tabla 8.26: Características de las maniobras de la simulación.....	261
Tabla 8.27: Detalles del problema.....	262
Tabla 8.28: Comparación de las diferentes simulaciones.....	264
Tabla 8.29: Características de la computadora para el problema del peonza.....	268
Tabla 8.30: Resumen de las simulaciones de la peonza.....	268
Tabla 8.31: Características de las computadoras en el problema del péndulo.....	269
Tabla 8.32: Detalles de las simulaciones del péndulo.....	269
Tabla 8.33: Características de las computadoras para el doble cuadrilátero articulado.....	270
Tabla 8.34: Detalles de las simulaciones del doble cuadrilátero articulado.....	270

Tabla 8.35: Características de las computadores para el mecanismo de Bricard.....	271
Tabla 8.36: Resumen de las simulaciones del mecanismo de Bricard.	271

PARTE I: PREÁMBULO Y ANTECEDENTES

1 Introducción

Este capítulo tiene como objetivo situar al lector en el contexto de aplicación de esta Tesis Doctoral.

1.1 Organización del trabajo

El documento está dividido en cuatro partes. La primera parte se ha titulado *Preámbulo y Antecedentes*. En ella se incluyen las características generales del documento: se presenta un resumen de la investigación; los objetivos y el alcance del proyecto; y la notación matemática, en este apartado se incluye el significado de las magnitudes que aparecen en la metodología. También se ha considerado conveniente establecer un marco de referencia donde se ubiquen los propósitos del análisis dinámico de sistemas multicuerpo en el ámbito industrial. Para finalizar esta parte se ha realizado una revisión del estado del arte donde se analizan las diferentes técnicas para abordar el problema dinámico multicuerpo con sólidos rígidos.

La segunda parte del documento se ha denominado *Metodología*. Aquí, se expone el desarrollo del método. En el primer capítulo de esta parte se calculan los conceptos básicos previos necesarios para formular el método. A continuación, se realiza el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio. Primero, se desarrollan las ecuaciones de un solo cuerpo para posteriormente, mediante expansión y ensamblaje, obtener las ecuaciones de un sistema formado por varios cuerpos, en el cual se incluyen elementos discretos. También, se ha dedicado un capítulo en esta parte, al método numérico escogido para integrar las ecuaciones de equilibrio. Obviamente, incorporar las ecuaciones de restricción en el sistema es una parte fundamental del desarrollo, por lo que se le ha dedicado un capítulo. Para finalizar esta parte, se ha incorporado una sección destinada a la optimización de la implementación de la metodología.

La tercera parte del documento se denomina *Aplicación del Método*. La metodología se ha implementado en el software de cálculo GNU Octave con el objetivo de ser validado mediante ejemplos numéricos. Se han desarrollado once problemas de sistemas multicuerpo con sólidos rígidos, de los cuales siete pertenecen a la colección de ejemplos de referencia del IFToMM. En este sentido, la formulación debe hacer frente a varias dificultades como: perturbaciones externas, configuraciones singulares, sistemas con restricciones redundantes o sistemas con tiempos de escala pequeños. También, se han incorporado problemas para comprobar todos los pares descritos en la metodología. Adicionalmente, la metodología se ha implementado con una programación optimizada en un lenguaje compilado mediante la cual se ha podido verificar la eficiencia.

Finalmente, la última parte se ha titulado *Conclusiones y Trabajos Futuros*. Evidentemente, en esta parte se ahonda en las conclusiones derivadas del desarrollo de esta investigación y también se abordan las líneas futuras principales a seguir en los próximos tiempos.

1.2 Resumen

La aportación fundamental de esta tesis consiste en el desarrollo de una nueva metodología para el análisis dinámico de sistemas multicuerpo de sólidos rígidos. La novedad reside en que el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden se resuelve directamente mediante el método de diferencias centrales como integrador de segundo orden. Al tratarse de un método explícito, el equilibrio se plantea en el instante t , donde los desplazamientos son conocidos; sin embargo, las velocidades no lo son. En este sentido, la no linealidad viene determinada por el problema de los productos cruzados de las velocidades angulares en las ecuaciones de Newton-Euler. Para que las soluciones converjan lo más rápidamente posible, el equilibrio se resuelve iterativamente aplicando el método de Newton exacto, de esta manera se consigue que la convergencia sea cuadrática.

Se ha asignado un triedro de referencia local a cada sólido. El origen del sistema de referencia local se sitúa en el centro de gravedad con sus ejes coincidentes con las direcciones principales de inercia. Para definir la posición del centro de masas de cada sólido respecto del sistema de referencia global, se han usado las coordenadas cartesianas mientras que para determinar su orientación se ha empleado la representación unitaria del cuaternión. De esta

manera, se ha evitado trabajar con expresiones trigonométricas y a su vez, representar unívocamente todas las posiciones del sólido sin la presencia de singularidades. A cambio, hay que usar 4 parámetros para definir la orientación a lo que se une la ecuación de la norma del cuaternión.

Las ecuaciones de restricción se incluyen usando el método del subespacio nulo. Es importante tener en cuenta que al haber aplicado el método de diferencias centrales, la ecuación de equilibrio se plantea únicamente en función de las variables de desplazamiento. Por lo tanto, las ecuaciones de restricción se construyen solamente a nivel de posición. Estas restricciones se aplican en el instante $t+\Delta t$, de manera que se tienen que ir recalculando a medida que se van obteniendo nuevas aproximaciones de $x(t+\Delta t)$ en el proceso de iteración interno en el instante t . En su mayoría, las ecuaciones de restricción son expresiones no lineales por lo que para implementarlas es necesario aplicar un método de linealización, en este caso se ha usado el desarrollo en serie de Taylor truncada en el primer término. De dicho proceso se forma un sistema indeterminado de ecuaciones lineales del cual se obtiene la expresión del subespacio nulo en cada iteración.

Como se ha comentado, las restricciones están definidas en función de las coordenadas; sin embargo, las ecuaciones de Newton-Euler se formulan en base a giros. Por consiguiente, al plantear el equilibrio del sistema completo, aparecen ecuaciones afectadas por las ligaduras, la cuales son desconocidas. Si se pretende eliminar estas fuerzas, se debe plantear las restricciones en función de los giros y para ello, se somete a cada ecuación de restricción a un movimiento infinitesimal. De esta manera, se forma un sistema cuya solución es el conjunto de los posibles movimientos infinitesimales compatibles con las restricciones del modelo. Premultiplicando las ecuaciones de equilibrio por la traspuesta del subespacio nulo de esta nueva matriz, se consigue expresar las fuerzas en función de los grados de libertad del modelo. Así, al plantear el equilibrio del sistema completo las fuerzas de restricción se anulan y las ecuaciones afectadas por las ligaduras desaparecen. Es importante señalar que esta matriz de restricciones para esfuerzos, al estar aplicando un método explícito, es válida para todo el instante de tiempo t , a diferencia de la matriz de restricción de coordenadas que hay que ir calculando durante el proceso iterativo interno.

La ventaja de esta metodología reside en que al aplicar directamente un método de integración al sistema de segundo orden, no es necesario duplicar la dimensión del sistema para reducir el orden de integración. Además,

plantear el sistema en función de las variables de posición conlleva dos ventajas. La primera es que, ya que la velocidad no se trata como una variable independiente, no hay que aplicar las restricciones a nivel de velocidad. La segunda que no es necesario resolver el problema de velocidades en cada instante, éstas se calculan a partir de las posiciones. No obstante, sí se resuelve el problema de posición y al obtener las posiciones de todos los cuerpos que forman el sistema en cada instante, se consigue aumentar la precisión. El hecho de emplear derivadas exactas representa varias ventajas respecto a los planteamientos con derivadas aproximadas. Los enfoques con derivadas exactas permiten reducir el orden del error de la tolerancia de integración sin que se produzcan fallos de convergencia. Además, si se trabaja con derivadas finitas, el mínimo incremento de tiempo que se podría aplicar se encontraría limitado por la capacidad de la computadora para captar esa variación. Estas dos cuestiones afectan directamente a la precisión de la solución del problema. Por último, el método del subespacio nulo conduce a un sistema de ecuaciones con el número mínimo de variables, aligerando el proceso de integración numérica. Este hecho, facilita aplicar un método explícito, el cual tiene una implementación mucho más sencilla que los métodos implícitos.

La validez del método se ha comprobado resolviendo varios ejemplos numéricos, varios de ellos se pueden encontrar en la colección de problemas de referencia del IFToMM (*“International Federation for the Promotion of the Mechanism and Machine Science”*, IFToMM). La metodología se ha implementado mediante una programación preliminar en GNU Octave y los resultados se han cotejado con las soluciones referencia o bien aquellas obtenidas mediante un software comercial como Msc Adams.

1.3 Objetivos y alcance del proyecto

Los principales objetivos que se plantean para alcanzar las condiciones descritas en el apartado anterior son:

- Integración directa de la ecuación diferencial de segundo orden para evitar duplicar las dimensión del sistema. De manera que la velocidad no forme parte de las variables del sistema.
- Obtener la mejor convergencia posible en el proceso de iteración.

- Implementar las restricciones de forma que no se aumenten las incógnitas del problema y a su vez, obtener un sistema con el mínimo número de coordenadas.
- Plantear en base a las coordenadas del sistema, todas las magnitudes básicas para desarrollar las ecuaciones de Newton-Euler. De la misma forma, las restricciones están fundamentadas en relaciones geométricas y también será necesario establecerlas usando las coordenadas del sistema.

A lo largo del trabajo también se deben cumplir los siguientes objetivos secundarios:

- Desarrollar el conjunto de elementos discretos e implementarlos en la ecuación de equilibrio.
- Desarrollar las ecuaciones de restricción de los diferentes pares cinemáticos tanto para las restricciones de coordenadas como para las restricciones de esfuerzos.
- Implementación de la metodología en un programa de cálculo y resolver varios ejemplos poniendo a prueba la metodología frente a diferentes obstáculos.
- Verificar la validez de la metodología comparando los resultados con otro tipo de formulaciones.

1.4 Notación matemática empleada en el documento

A fin de aclarar los conceptos matemáticos expuestos en el documento, resulta interesante establecer primeramente la notación que se va a seguir:

- Se ha pretendido que el texto mantenga una uniformidad tipográfica para facilitar sus comprensión. Para las expresiones matemáticas se ha empleado el estilo *Mathcad UniMath Prime* con un tamaño de letra 12.
- Las ecuaciones más relevantes van numeradas. El número va encerrado entre paréntesis y alineado a la derecha. En la numeración de las ecuaciones se puede ver el capítulo seguido por el número de la ecuación.

- Los símbolos se escriben con cursiva, en cambio, los textos se escriben con letra redonda. Las letras griegas, se emplean para parámetros y se ha optado por seguir la tendencia actual, donde las minúsculas van en cursiva y las mayúsculas, por el contrario, en redonda. Las cifras van siempre en redondo.
- Las adiciones de acentos a otro símbolo se hacen al símbolo central. Por ejemplo, se ha empleado sobrelineado para indicar que esa magnitud está referida al triedro local: \bar{a}_b .
- Las matrices van delimitadas por corchetes y se denominarán con una letra mayúscula y cursiva. En ocasiones se han tenido que emplear matrices demasiado grandes para ser incluidas en un solo bloque. En estas ocasiones se ha decidido dividir las en dos líneas, situando la expresión centrada.
- Los vectores se componen con letra negrita y cursiva.
- El producto escalar se indica siempre con un punto centrado: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- El producto vectorial se indica con el símbolo \wedge : $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

1.5 Marco de referencia de la investigación

Cuando se piensa en desarrollar un nuevo producto o en optimizar un producto ya existente, las primeras etapas se dedican a recopilar toda la información técnica disponible tanto en el mercado como en la propia empresa, recogiendo información sobre ideas similares, patentes, libros, ...etc. Después de realizar el estudio conveniente, se inicia la fase de diseño del producto. Todo producto se puede descomponer en diferentes subsistemas interrelacionados entre sí como son la mecánica, energía, ergonomía, electricidad o electrónica. A partir de aquí, se hará referencia únicamente al subsistema mecánico y más concretamente al proceso de diseño mecánico.

El diseño mecánico [1,2] se basa en un proceso iterativo en el que pueden distinguirse varias fases: diseño, análisis, prototipado y ensayos. Seguidamente, este proceso se conecta con nuevos ciclos de prueba y error, con el proceso de fabricación y finalmente con el comportamiento del producto en servicio como se muestra en la figura 1.1.

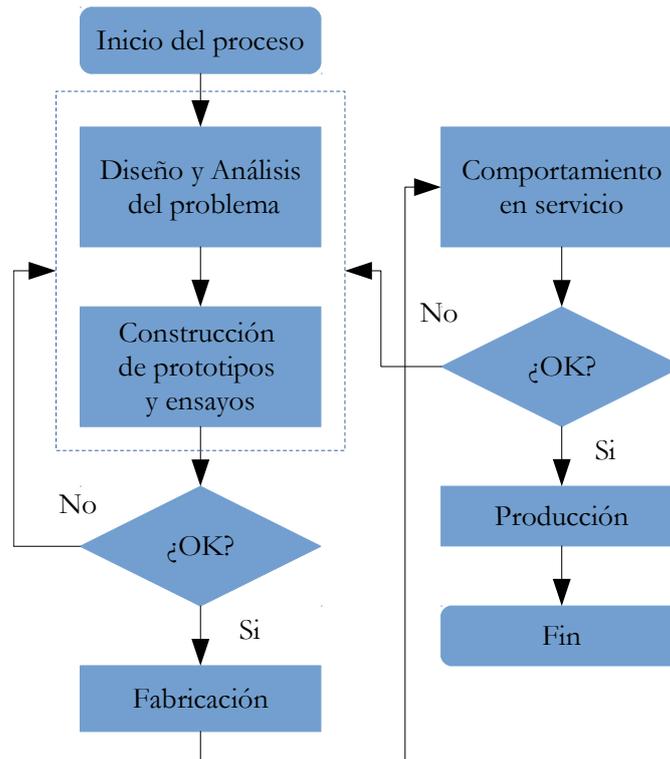


Figura 1.1: Fases que componen el diseño de un sistema.

El diseño de un sistema mecánico comienza con definir la función objetivo que es aquella que debe cumplir junto con el resto de especificaciones de diseño. Seguidamente, se elige el tipo de mecanismo apropiado para cumplir con la función ya sea un mecanismo de levas, un tren de engranajes, un mecanismo de barras o una combinación de varios tipos. A esta etapa se le conoce como síntesis de tipo y cobra gran importancia la experiencia y el ingenio del grupo de trabajo. Una vez seleccionado el tipo de mecanismo, sus elementos pueden articularse de diferentes maneras, dando lugar a distintas soluciones. La obtención de todos los mecanismos posibles usando un determinado número de elementos se conoce como síntesis de número. Normalmente, tanto la síntesis de tipo como la de número se agrupan dentro de lo que se llama síntesis estructural. Teniendo ya definido el mecanismo, se trata de obtener las dimensiones principales del mismo para que cumpla estrictamente con la función objeto de diseño, a esta etapa se le denomina síntesis dimensional. Se pueden ver trabajos interesantes en este campo como el de Avilés [3] o el de Fernández de Bustos [4]. Concretadas las dimensiones, hay que comprobar el grado de cumplimiento de los requisitos cinemáticos mediante el correspondiente análisis cinemático [5]. En esta etapa se incluye la verificación de las trayectorias, el análisis de posición, los ángulos de transmisión, la ventaja mecánica o el cálculo de velocidad y aceleración. Todo sistema mecánico está sometido a esfuerzos que rigen su comportamiento, su

estudio es fundamental para cumplir con las especificaciones del sistema y es aquí precisamente donde se sitúan los sistemas multicuerpo MBS (“*MBS, Multy Body System*”, *MBS*) [6–9].

Por lo tanto, el MBS forma parte del proceso de análisis y diseño en ingeniería y se define como la idealización de un sistema compuesto por dos o más elementos sometidos a una serie de fuerzas y enlazados de tal forma que su movimiento queda limitado a un conjunto de desplazamientos y giros concretos. Bajo esta perspectiva, es posible estudiar un sistema mecánico real generando un modelo computacional que alcance a predecir su comportamiento dinámico.

Con las solicitaciones y el comportamiento dinámico del sistema se examina cada elemento individualmente si fuera necesario [10]. El tipo de análisis depende de la naturaleza de las solicitaciones pudiendo ser necesario un análisis dinámico si las tensiones poseen componentes variables con el tiempo, y su contenido en frecuencia se encuentra dentro del rango de frecuencias naturales del modelo. Cuasiestático, si las fuerzas de inercia y dispositivos son despreciables pero la componente variable es importante o simplemente estático si esta variación es despreciable. Posteriormente, se estudia el comportamiento de la pieza, aplicando métodos de resistencia en estática [1,2,11] o a fatiga [12].

El procedimiento del análisis mecánico de tipo resistencia estructural se puede efectuar mediante métodos tradicionales [11,13–16], si no se desea un grado de precisión muy elevada o bien por un procedimiento de cálculo con computador mucho más preciso. Cabe destacar, el método de los elementos finitos (*FEM, Finite Element Method*) [10,17–19], como el más eficaz para un gran número de problemas de análisis mecánicos.

Se trata, por tanto, de una fase de diseño y análisis teórico que pretende simular el comportamiento real del sistema y que una vez que se han obtenido unos resultados satisfactorios se procede a la fase de construcción del prototipo si fuera el caso. Los resultados de los ensayos experimentales o del producto en servicio se pueden cotejar con las simulaciones teóricas para así mejorarlas y lograr un mayor grado de detalle. En la figura 1.2 se muestra más en detalle la metodología aplicada en el diseño mecánico.

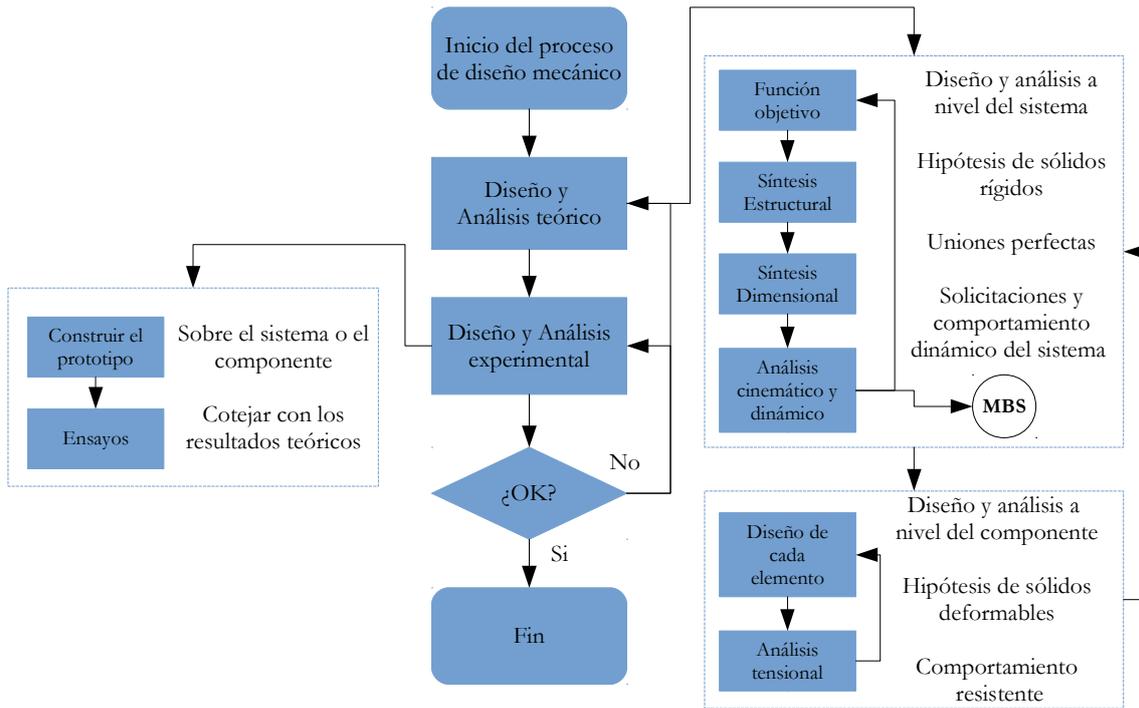


Figura 1.2: Fases del proceso de diseño mecánico.

El análisis que proporciona el MBS, como otros programas de análisis y simulación mediante computador se incluyen bajo las siglas CAE (“*Computer Aided Engineering*”, CAE). Son herramientas de ayuda al diseño y sus resultados deben ser estudiados críticamente ya que están sometidos a simplificaciones y su veracidad no está garantizada, por ello, no sustituyen al conocimiento del problema físico.

En términos de rentabilidad, el compromiso entre la precisión de resultados y el coste de los cálculos no siempre es fácil de conseguir e influye en la competitividad del producto. En este aspecto, resulta un factor estratégico investigar en nuevas metodologías que ayuden a mejorar la calidad y la eficiencia del análisis.

2 Estado del arte

En los comienzos, el análisis multicuerpo se llevaba a cabo en problemas con pocos elementos por métodos gráficos o bien analíticos poniendo poco énfasis en los procedimientos computacionales, probablemente esta tendencia se explica por la falta de potencia de los ordenadores de la época. Con el tiempo, el interés fue creciendo y junto con la mejora en la velocidad de cálculo de los computadores se hizo posible analizar sistemas con mayor número de elementos y uniones más complejas.

Los planteamientos clásicos basados principalmente en la mecánica Newtoniana y Lagrangiana se han ido redescubriendo y adaptando para su uso en dispositivos de alta capacidad de cálculo. En la actualidad, los MBS abarcan a un gran número de problemas como pueden ser robots, vehículos, estructuras espaciales o sistemas biomecánicos ofreciendo soluciones en diferentes áreas industriales.

En la resolución de sistema multicuerpo intervienen principalmente cuatro factores: el modelado del proceso, la aplicación de los principios de la mecánica, la formulación de las ecuaciones del movimiento y la integración numérica de las ecuaciones [20]. No se trata de elecciones independientes, cada decisión condiciona el siguiente paso y una mala elección influirá negativamente en la eficiencia de la simulación e incluso en la veracidad de los resultados.

El primer paso es modelar el problema y se trata de elegir las variables que definen la posición, la velocidad y la aceleración de todos los elementos que componen el sistema durante la simulación. Normalmente es preferible usar un número de variables superior al de grados de libertad, siendo las coordenadas de relativo, las coordenadas cartesianas y las coordenadas naturales los tipos de coordenadas dependientes más empleadas en sistemas multicuerpo.

El segundo paso consiste en aplicar principios de la mecánica tales como las ecuaciones de Lagrange, las leyes de Newton, las ecuaciones de canónicas de Hamilton o las potencias virtuales para obtener las ecuaciones del movimiento. Estos diferentes enfoques conducen a sistemas matemáticos de características dispares.

Las ecuaciones del movimiento junto con las ecuaciones de restricción forman un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas DAE (“*Differential Algebraic Equations*”, DAE) de orden 3. El método más empleado para introducir las restricciones es el de los multiplicadores de Lagrange. La adición de técnicas de estabilización como el método de Baumgarte o de Lagrange aumentado transforman el sistema de forma que permiten resolverlo por métodos estándar para sistemas de ecuaciones ordinarias ODE (“*Ordinary Differential Equations*”, ODE). Otra serie de formulaciones como los métodos recursivos, los de transformaciones de velocidad o de partición de coordenadas conducen a sistemas con el mínimo conjunto de variables o de la forma *state-space*.

Finalmente, se escoge el método de cálculo numérico para resolver el problema matemático. Una manera habitual de solucionar el problema de DAE es transformarlo en un sistema de ODE, como se ha comentado y una vez transformado es frecuente reducirlo a un sistema de orden 1 a cambio de aumentar su dimensión. De esta manera, se puede resolver con las herramientas numéricas existentes para ello, ya sean por métodos explícitos o implícitos. Sin embargo, otra alternativa es resolver el sistema DAE mediante métodos de integración directa.

Estos cuatro aspectos del análisis de sistemas multicuerpo se desarrollan en los siguientes puntos.

2.1 Modelado del problema

Para detallar el sistema desde un punto de vista matemático se emplea un conjunto de parámetros que se conocen como coordenadas del sistema. Éstas deben definir correctamente la posición y la orientación de todos y cada uno de los elementos que constituyen el modelo para cualquier instante de tiempo durante la simulación. Es una elección trascendente ya que va a determinar en gran medida aspectos fundamentales del análisis.

Los tipos de coordenadas se pueden dividir en dos grandes grupos: coordenadas independientes y coordenadas dependientes.

2.1.1 Coordenadas independientes

Las coordenadas independientes son aquellas que modelizan el sistema con el menor número de coordenadas posible. Se trata por tanto de usar el mismo número de parámetros que grados de libertad del modelo.

La ventaja reside en que se generan sistemas de poco tamaño y son interesantes para resolver problemas de cadena abierta. Sin embargo, desde el punto de vista de un análisis general no resultan una solución adecuada ya que no cumplen uno de los requisitos fundamentales; el sistema de coordenadas tiene que definir inequívocamente la posición de cada elemento del sistema. Por otra parte, resultan muy útiles y son muy comunes en aplicaciones para la modelización de robots con problemas de cadena abierta como el de la figura 2.1.

Las coordenadas independientes determinan directamente la posición del cuerpo de entrada o del valor de las coordenadas conducidas, pero no de la posición del sistema completo. Además, cuando se trata de sistemas de cadena cerrada, se exige la resolución de problemas cinemáticos complicados para determinar la posición del sistema. Aunque existe algún trabajo donde se usan coordenadas independientes en sistemas con lazos cerrados como el de Park [21].

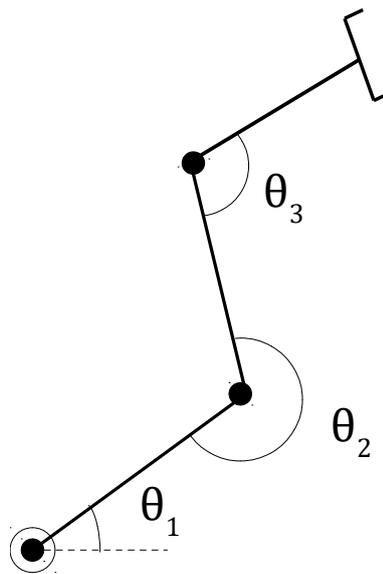


Figura 2.1: Robot modelizado con coordenadas independientes.

2.1.2 Coordenadas dependientes

Se llaman coordenadas dependientes cuando el número de coordenadas empleadas es mayor al de grados de libertad del modelo. De esta manera es posible determinar la posición de cada elemento del problema de forma inequívoca. Obviamente, estas coordenadas ya no son independientes y están relacionadas mediante ecuaciones de restricción. El número de ecuaciones de restricción de un sistema es igual a la diferencia entre número de coordenadas dependientes y el de grados de libertad.

Los tipos de coordenadas dependientes más usados tanto en sistemas planos como en sistemas espaciales son las coordenadas relativas, las coordenadas cartesianas y las coordenadas naturales. Una comparativa entre los diferentes tipos de coordenadas y su influencia en el proceso de resolución fue llevada a cabo por García de Jalón y Bayo [6].

2.1.2.1 Coordenadas relativas

Se asocian a los pares y sitúan cada elemento del mecanismo respecto del anterior, es decir, en cada articulación son necesarias tantas variables como grados de libertad relativos existen entre los elementos relacionados. Unos de los primeros programas de análisis que utilizaron coordenadas relativas fueron los de Paul y Krajcinovic [22], Shet y Uiker [23], y Smith et al [24].

En la figura 2.2 se muestra un mecanismo plano de un grado de libertad, definido por tres parámetros. Por lo tanto, serán necesarias dos ecuaciones de restricción.

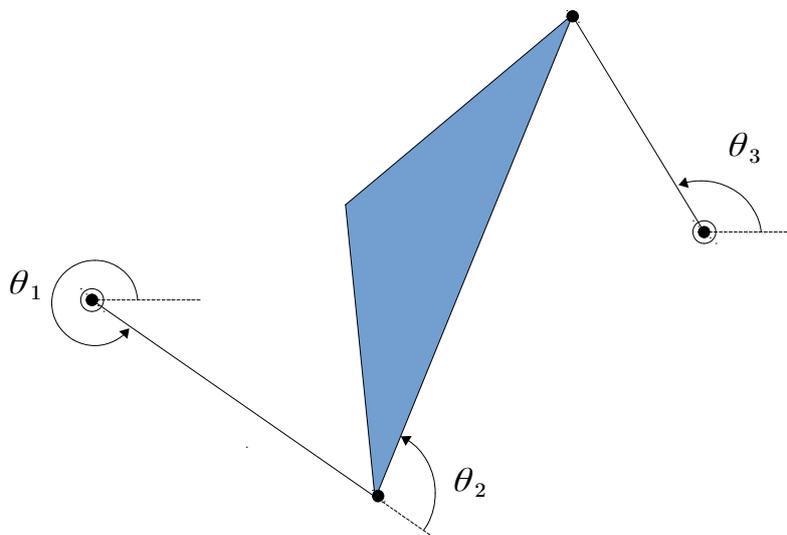


Figura 2.2: Coordenadas relativas en un mecanismo plano.

La ventaja es que usa el mínimo número de coordenadas dependientes, incluso en casos de cadena abierta coincide con el número de grados de libertad lo que mejora la eficiencia numérica y evita tener que trabajar con las ecuaciones de restricción.

Por otro lado, la formulación matemática puede estar demasiado enredada ya que la posición absoluta de un elemento depende de la posición del elemento anterior en la cadena cinemática. Además, en las ecuaciones de movimiento aparecen matrices muy condensadas y costosas de evaluar. Otro inconveniente es que son necesarias operaciones de preprocesado para determinar las ecuaciones de restricción independientes y postprocesado para obtener el movimiento absoluto de cada elemento.

En el caso plano, las restricciones con coordenadas relativas surgen de la ecuación vectorial de cierre de los respectivos lazos cinemáticos. A este respecto hay que mencionar los trabajos de Freudenstein [25–27] en la síntesis de mecanismos de cuatro barras.

2.1.2.2 Coordenadas Cartesianas

Las coordenadas Cartesianas o de punto de referencia definen cada elemento del sistema de manera independiente. Para ello se escogen las coordenadas de un punto cualquiera del elemento, preferiblemente el centro de masas (“*Centre of Mas*”, CoM), y se determina la orientación por cualquiera de los sistemas existentes. Las ecuaciones de restricción surgen ahora de imponer las uniones entre elementos ya que inicialmente se han definido como libres.

Es fácil de sistematizar y no es necesario ningún tipo de preprocesado ni postprocesado para conocer la posición de un elemento. Las matrices que aparecen en las ecuaciones son muy dispersas lo que resulta muy eficiente numéricamente.

Como mayor desventaja está el número de coordenadas que conlleva matrices de mayor dimensión, independientemente de trabajar con sistemas de cadena abierta. Además el tipo de sistema elegido para representar la orientación puede provocar que las ecuaciones de restricción sean bastante complejas.

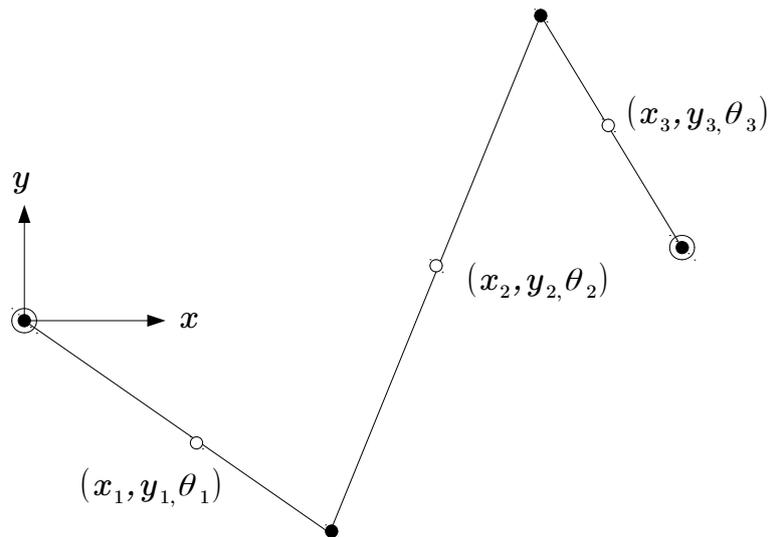


Figura 2.3: Cuadrilátero articulado modelado con coordenadas cartesianas.

En la figura 2.3 se ha definido un cuadrilátero articulado con nueve variables y al tratarse de un mecanismo de un grado de libertad para completar el modelo se precisarán ocho ecuaciones de restricción.

Una característica importante de la coordenadas Cartesianas es que para una ecuación de restricción correspondiente a una particular unión, las únicas coordenadas que intervienen son aquellas de los elementos relacionados con el enlace. Esto quiere decir, que al contrario que con las coordenadas relativas, las ecuaciones se establecen a nivel local. Por consiguiente, un enlace siempre implica a las mismas coordenadas sin importar la complejidad del sistema lo que facilita automatizar la generación de las ecuaciones de enlace. Por este motivo, Aslanov [28] opta por usar las coordenadas Cartesianas en detrimento de las relativas para configurar las ecuaciones del movimiento en sistemas con cambio de estructura en aplicaciones espaciales.

2.1.2.3 Coordenadas naturales

Fueron introducidas por García de Jalón y Serna [29,30] para casos planos y por García de Jalón et al [31,32] para casos de mecanismos espaciales. Se puede considerar como una migración de los puntos de referencia a los pares de manera que un punto contribuye a definir simultáneamente a dos elementos.

Debido a que cada elemento posee al menos dos puntos, su posición y su orientación están determinados por las coordenadas cartesianas de esos puntos y ya no es necesario recurrir a sistemas para definir la orientación del sólido lo que simplifica la formulación de la ecuaciones de restricción. El

número de coordenadas necesarias para definir un modelo se sitúa entre las usadas por las coordenadas relativas y las cartesianas y prácticamente no se requiere postprocesado ni preprocesado.

La desventaja de este tipo de coordenadas es que para usarlas correctamente exige familiarizarse con ellas y requieren un uso específico para cada mecanismo.

Se pueden encontrar varios trabajos que usan coordenadas naturales, entre ellos destaca Cossalter [33] que realiza un modelo dinámico de una motocicleta. Primero, define cada sólido con coordenadas naturales para luego obtener las uniones mediante ecuaciones algebraicas.

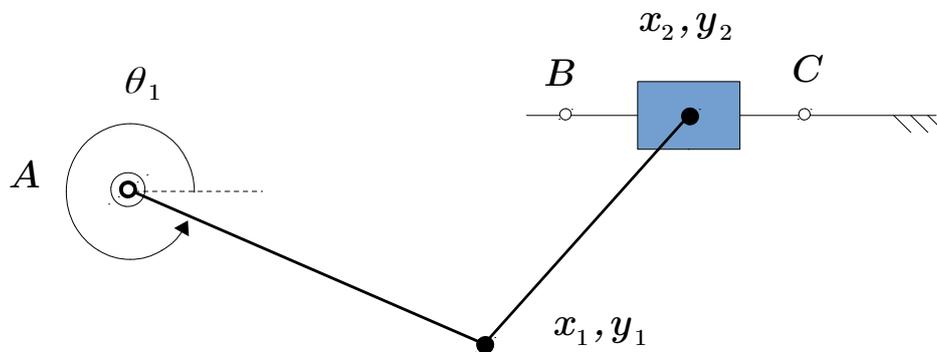


Figura 2.4: Mecanismo biela-manivela con coordenadas naturales.

En la figura 2.4 se muestra un mecanismo de biela-manivela modelizado mediante coordenadas naturales, los puntos en blanco simbolizan puntos fijos y los negros son las coordenadas del sistema. Para este caso han sido necesarias cinco variables, cuatro referentes a la posición de los puntos más una del ángulo de entrada, relacionadas por cuatro ecuaciones de restricción.

2.1.2.4 Ecuaciones de restricción

Las ecuaciones de restricción se clasifican acorde a la naturaleza de la limitación impuesta en la unión. En cualquier caso, las ecuaciones de restricción se describen como funciones algebraicas de las variables definidas en el sistema, pero la forma de la ecuación varía. En la figura 2.5 se representa un esquema con los distintos tipos de ecuaciones.

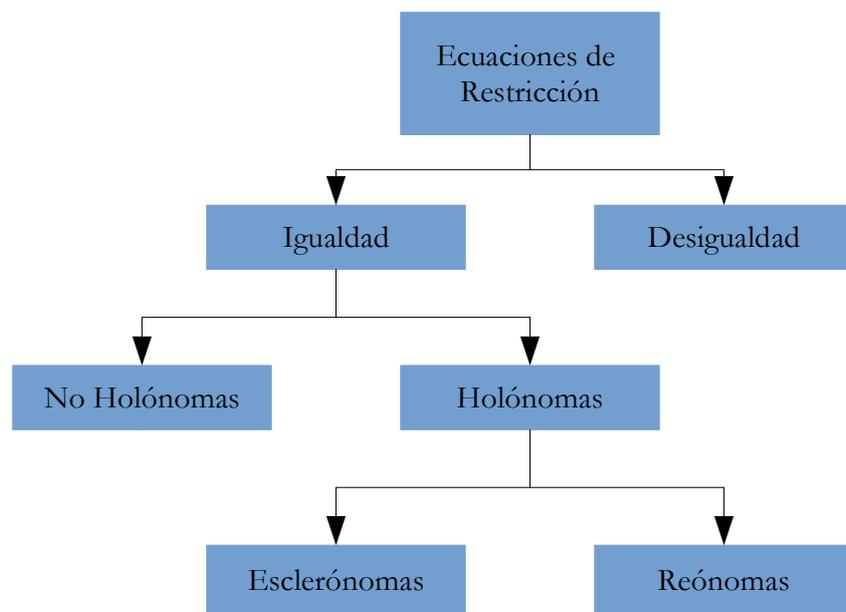


Figura 2.5: Clasificación estandarizada de las ecuaciones de restricción.

La primera división se realiza entre ecuaciones de igualdad y de desigualdad. Las primeras se usan cuando los contactos entre sólidos rígidos mediante pares son permanentes. Las segundas sirven para casos en que los sólidos sean libres de mantener el contacto o separarse en una determinada dirección, por lo tanto, las inecuaciones pueden modelizar colisiones, pérdidas de contacto o delimitar espacios. En esos casos el sólido pierde grados de libertad dependiendo de la posición lo que se traduce en tener que evaluar el sistema a cada instante para modificar las restricciones. Para profundizar en el estudio del contacto y en la modelización de impactos se puede consultar el libro de Coutinho [34], el artículo de Gilardi y Sharf [35] o las notas de Pfeiffer [36]. Para temas de fricción revisar el trabajo de Dupont [37].

Dentro de las ecuaciones de igualdad, se distinguen entre ecuaciones holónomas y no holónomas. La holónomas están compuestas solamente de variables de posición y las ecuaciones no holónomas de variables de posición y de velocidad, Bloch [38] hace un estudio sobre control y análisis de sistemas no holónomos. La mayor diferencia entre estos dos tipos es que las ecuaciones no holónomas no son integrables, es decir, que no derivan de ninguna ecuación. La consecuencia es que en los sistemas que poseen ecuaciones no holónomas, éstas no se pueden usar para eliminar las coordenadas dependientes y por tanto el número de coordenadas independientes es mayor al de velocidades independientes.

La última distinción es entre ecuaciones holónomas esclerónomas, que son aquellas ecuaciones que son función únicamente de las variables de posición, y

las ecuaciones holónomas reónomas que además de tener variables de posición también dependen del tiempo.

2.1.3 Orientación de un sólido en el espacio

Existen dos problemas aparejados a la representación de la rotación de un cuerpo en el espacio que motivan la búsqueda de formas alternativas. El primero es la no conmutabilidad de las rotaciones que hace que se deba tener especial consideración en el orden de aplicación de las sucesivas rotaciones. Mientras que el segundo se asemeja a la problemática que se da al usar latitudes y longitudes en las proximidades del polo, donde un pequeño desplazamiento produce grandes variaciones de longitud.

Las diferentes representaciones de la orientación conducen a situaciones que condicionan la integración de las ecuaciones del movimiento, a corregir las singularidades o a proporcionar una ventaja algebraica.

Existe numerosa bibliografía [7–9,39,40] donde se explican los diferentes métodos pero generalmente se pueden dividir en grupos dependiendo de su naturaleza. Se puede representar la orientación a través de matrices de rotación, mediante una secuencia de rotaciones sucesivas como los ángulos de Euler, usando una descripción algebraica de la rotación o mediante cuateriones.

2.1.3.1 Matriz de rotación

Se consideran dos sistemas de referencia, $(OXYZ)_1$ y $(OUVW)_2$, con el origen situado en el mismo punto, ver figura 2.6. El vector \mathbf{r} solidario al sistema $(OUVW)_2$, se puede expresar tanto en la base canónica del sistema $(OXYZ)_1$ como en la de $(OUVW)_2$, como se muestra en las ecuaciones (2.1) y (2.2):

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i}_x + r_y \mathbf{j}_y + r_z \mathbf{k}_z = \mathbf{r}_1 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r} = r_u \mathbf{i}_u + r_v \mathbf{j}_v + r_w \mathbf{k}_w = \mathbf{r}_2 \quad (2.2)$$

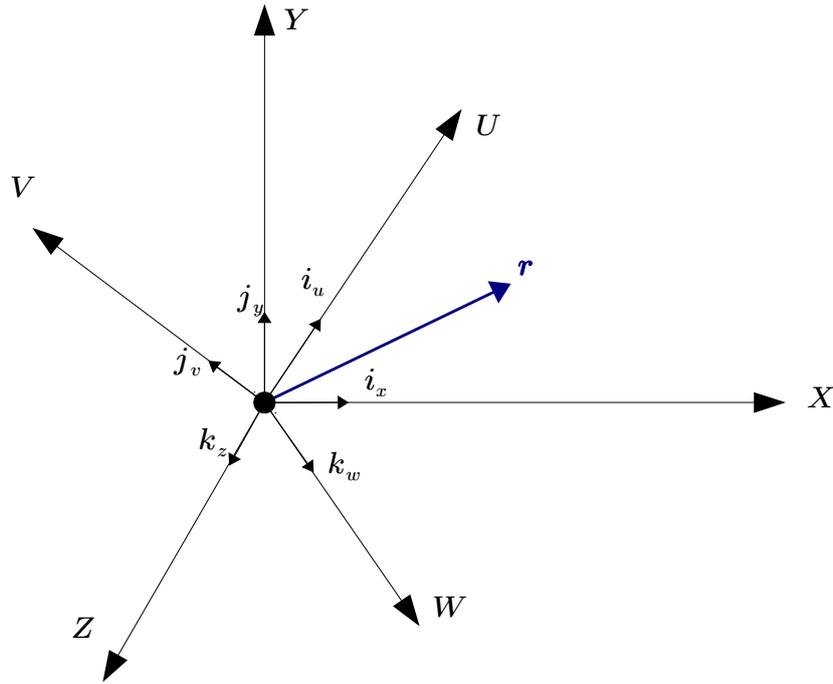


Figura 2.6: Vector \mathbf{r} respecto a los dos sistemas de referencia.

Si la posición del vector \mathbf{r} es conocida en el sistema de referencia 2, es posible obtener su posición respecto al sistema 1. Sabiendo que las componentes del vector \mathbf{r} en el sistema $(OXYZ)_1$ son las proyecciones de dicho vector según las direcciones X , Y y Z . Éstas se pueden expresar como un producto escalar de la forma de la ecuación (2.3):

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en la ecuación (2.3) se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u r_u + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v r_v + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w r_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u r_u + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v r_v + \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w r_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u r_u + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v r_v + \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w r_w \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Expresando la ecuación (2.4) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{j}_y \cdot \mathbf{k}_w \\ \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{i}_u & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{j}_v & \mathbf{k}_z \cdot \mathbf{k}_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Conociendo las propiedades del producto escalar, se dispone la matriz de rotación en función de los cosenos directores de los ejes U , V y W respecto del sistema $(OXYZ)_1$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_u) & \cos(\mathbf{i}_x, \mathbf{j}_v) & \cos(\mathbf{i}_x, \mathbf{k}_w) \\ \cos(\mathbf{j}_y, \mathbf{i}_u) & \cos(\mathbf{j}_y, \mathbf{j}_v) & \cos(\mathbf{j}_y, \mathbf{k}_w) \\ \cos(\mathbf{k}_z, \mathbf{i}_u) & \cos(\mathbf{k}_z, \mathbf{j}_v) & \cos(\mathbf{k}_z, \mathbf{k}_w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

O de forma compacta:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} \mathbf{r}_2 \quad (2.7)$$

La matriz de rotación \mathbf{R} expresa la orientación del sistema de referencia $(OUVW)_2$ respecto de $(OXYZ)_1$. Se trata de una matriz ortonormal, cuya principal utilidad se corresponde con la representación de la orientación de sistemas girados únicamente sobre uno de sus ejes principales de referencia. Se puede encontrar más información en Hernández [5] y en Barrientos [41].

2.1.3.2 Secuencia de tres rotaciones sucesivas

La matriz de rotación se puede expresar en términos de tres ángulos independientes, que corresponden a los ángulos de rotación alrededor de tres ejes ortogonales, en una secuencia de rotaciones sucesivas con la restricción de que no haya repetición consecutiva del mismo eje. Esta restricción conduce a 12 combinaciones de secuencias de rotaciones. A estas coordenadas se las conoce como ángulos de Euler. Existen dos maneras de plantearlas.

La primera consiste en que partiendo de un sistema de referencia fijo XYZ y un sistema de referencia móvil xyz , determinar los ángulos de rotación empleando una línea de nodos definida como la intersección de dos planos homólogos, por ejemplo el XY y el xy . Como consecuencia en la secuencia de rotaciones el primer y el tercer eje se repiten, siendo la más utilizada la ZXZ . Es un método muy empleado en física y en mecánica orbital y también en sistemas multicuerpo como Orlandea [42]. La matriz de rotación para los ángulos de Euler ZXZ se muestra en la expresión (2.8):

$$R = R_{z\phi} R_{x\theta} R_{z\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\phi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\psi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \sin(\psi) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) \cos(\phi) - \cos(\theta) \sin(\phi) \cos(\psi) & \sin(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\theta) \cos(\phi) \cos(\psi) & -\sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

En la segunda alternativa, a diferencia de la anterior, la secuencia de rotaciones elementales se realiza sobre tres ángulos distintos debido a que la línea de nodos se define como la intersección entre dos planos no homólogos. La secuencia más usada es la XYZ y se emplea habitualmente en aeronáutica ya que asigna un ángulo de inclinación cero cuando el avión está en horizontal mientras que si se hubiera usado la primera opción le daría un valor de $\pi/2$. La matriz de rotación en la secuencia XYZ se muestra en la ecuación (2.9). A esta segunda alternativa, algunos autores se refieren a ella como ángulos de Tait-Bryan:

$$R = R_{x\phi} R_{y\theta} R_{z\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) - \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) & -\sin(\theta) \\ \cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \cos(\psi) \\ \cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \cos(\psi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

El empleo de los ángulos de Euler conlleva dos inconvenientes. El primero es el elevado número de productos y sumas trigonométricas que hay que realizar. El segundo es que para ciertos valores existen dos combinaciones posibles de los ángulos que producen la misma rotación. Como consecuencia, el cuerpo pierde un grado de libertad y experimenta una situación de bloqueo, a esta singularidad se le conoce como *gimbal lock*.

2.1.3.3 Descripción algebraica de la rotación.

Euler justificó que cualquier sucesión de rotaciones que experimente un sólido se puede representar como un giro de ángulo ϕ alrededor de un eje

cuya dirección es la correspondiente al autovector \mathbf{l} asociado al autovalor +1 de la matriz de rotación. Según Junkins [43], la matriz de rotación, mostrada en la ecuación (2.10), se puede parametrizar como función del ángulo ϕ y del vector unitario \mathbf{l} .

$$R(l_1, l_2, l_3, \phi) = \begin{bmatrix} l_1^2(1 - \cos(\phi)) + \cos(\phi) & & \\ l_2 l_1(1 - \cos(\phi)) - l_3 \sin(\phi) & & \\ l_3 l_1(1 - \cos(\phi)) + l_2 \sin(\phi) & & \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{array}{cc} l_1 l_2(1 - \cos(\phi)) + l_3 \sin(\phi) & l_1 l_3(1 - \cos(\phi)) - l_2 \sin(\phi) \\ l_2^2(1 - \cos(\phi)) + \cos(\phi) & l_2 l_3(1 - \cos(\phi)) + l_1 \sin(\phi) \\ l_3 l_2(1 - \cos(\phi)) - l_1 \sin(\phi) & l_3^2(1 - \cos(\phi)) + \cos(\phi) \end{array} \right]$$

Existen tres importantes parametrizaciones de R relacionadas con los parámetros de rotación ϕ , \mathbf{l} ; los parámetros de Euler-Rodrigues, los parámetros de Euler y el Vector de Rotación Conforme.

2.1.3.3.1 Parámetros de Euler-Rodrigues

Se considera que el vector \mathbf{l} coincide con el eje de Euler de magnitud:

$$\mathbf{b}_i = l_i \tan(\phi/2) \quad (2.11)$$

En la ecuación (2.12), se muestra la matriz de rotación, la cual también se puede obtener por la fórmula de Cayley:

$$R = \frac{1}{1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \begin{bmatrix} 1 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 & 2(b_1 b_2 - b_3) & 2(b_1 b_3 + b_2) \\ 2(b_1 b_2 + b_3) & 1 - b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 & 2(b_2 b_3 - b_1) \\ 2(b_1 b_3 - b_2) & 2(b_2 b_3 + b_1) & 1 - b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Esta matriz de rotación requiere simplemente evaluar la función trigonométrica \mathbf{b} para luego obtener el operador de rotación de forma algebraica. Sin embargo, para calcular \mathbf{b} desde R existe una singularidad cuando $\phi = \pm\pi$. Si el ángulo rotado es cero, existen múltiples direcciones posibles para \mathbf{l} . Aparentemente esta singularidad se evita haciendo:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} R(\phi \mathbf{l}) = \lim_{\phi \rightarrow 0} R\left(\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{l}\right) = [I] \quad (2.13)$$

Li [44], hace una revisión de los parámetros de Euler-Rodrigues en su trabajo con el objetivo de llevar a cabo una metodología sistemática que formule el problema inverso de desplazamiento asociado a robots de seis grados de libertad. Por su parte, Jizheng [45], analiza algoritmos para estimar el error de orientación de un vehículo aéreo, alguno de los cuales usa los parámetros de Euler-Rodrigues como el MEAE.

2.1.3.3.2 Parámetros de Euler

Deriva de considerar un parámetro $e_0 = \cos(\phi/2)$ y tres parámetros formando un vector \mathbf{e} con dirección coincidente con el eje de Euler y de magnitud $l_i \sin(\phi/2)$. Los parámetros están sujetos a la restricción:

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - 1 = 0 \quad (2.14)$$

La forma de la matriz de rotación se puede expresar mediante la formula de Rodrigues:

$$R = (e_0^2 - \mathbf{e}^T \mathbf{e}) I + 2 \mathbf{e} \mathbf{e}^T + 2 e_0 E \quad (2.15)$$

Siendo E la matriz antisimétrica formada por las componentes del vector \mathbf{e} :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.15) se obtiene la matriz de rotación, como se muestra en la ecuación (2.17):

$$R = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) & 2(e_0 e_2 + e_1 e_3) \\ 2(e_1 e_2 + e_0 e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) \\ 2(-e_0 e_2 + e_1 e_3) & 2(e_2 e_3 + e_0 e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Existiendo una relación entre los parámetros de Euler-Rodrigues y Euler de la forma:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{e_0} \mathbf{e} \quad (2.18)$$

Así como en la parametrización de Euler-Rodrigues hay tres parámetros independientes, los cuatro parámetros de Euler son cantidades algebraicas

puramente vinculadas por la ecuación (2.14), y tienen un papel similar. Su inversión no posee singularidades, simplemente requiere hallar el mayor parámetro para después obtener los demás en función de éste mediante ecuaciones algebraicas de equivalencia.

Kong analiza la configuración de un mecanismo paralelo de tres grados de libertad con múltiples modos de operación usando parámetros de Euler y geometría algebraica [46].

2.1.3.3 Vector de rotación conforme

Consiste en definir un vector de rotación conforme \mathbf{a} de la forma:

$$a_i = 4 l_i \tan\left(\frac{\phi}{4}\right) \quad (2.19)$$

Y un cuarto parámetro en función de los otros tres componentes:

$$a_0 = \frac{1}{8}(16 - \mathbf{a}^T \mathbf{a}) \quad (2.20)$$

Obteniendo el operador de rotación de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{(4 - a_0)^2} [(a_0^2 + 8e_0 - 16)I + 2\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 2a_0 A] \quad (2.21)$$

Donde A es la matriz antisimétrica compuesta por las variables del vector \mathbf{a} .

El vector de rotación conforme no produce singularidades en su inversión, sumando pocos términos a la fórmula de obtención de \mathbf{R} , siendo numéricamente convenientes para la integración con la regla del trapecio [47].

Geradin [48] describe el vector de rotación conforme y lo aplica a la formulación de problemas de mecanismos de tres dimensiones con elementos finitos en casos de grandes rotaciones.

2.1.3.4 Cuaternión

Los cuaterniones son una extensión de los números complejos a 4-dimensiones, que con la restricción de ser unitarios permiten, de manera diferente, conducir al mismo concepto que los parámetros de Euler para representar rotaciones en el espacio [40,49,50]. Un cuaternión en su forma compleja se define como:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (2.22)$$

Donde q_0 es la parte escalar real y $q_1 i + q_2 j + q_3 k$ es la parte vectorial compleja. Hamilton [51] en 1843 dedujo de forma independiente estos concepto mientras buscaba la manera de describir la posición relativa de dos vectores en el espacio tridimensional. El producto de dos vectores satisface las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \\ ij &= -ji = k \end{aligned} \quad (2.23)$$

También existe una manera alternativa de notación en forma vectorial:

$$q = q_0 + \mathbf{q} \quad (2.24)$$

La equivalencia con los parámetros de Euler se obtiene haciendo:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ q_i &= l_i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Mientras que la matriz de rotación homogénea se logra aplicando la ecuación de Rodrigues:

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Al igual que los parámetros de Euler, la representación del cuaternión unitario carece de singularidades.

Bertch [52] realiza el análisis dinámico de un sólido rígido en términos del cuaternión unitario mediante la formulación Hamiltoniana. Por otra parte, Zoric [53] usa el cuaternión con las ecuaciones de Lagrange.

2.2 Ecuaciones de la dinámica

Los principios de la mecánica establecen una relación de equilibrio entre el conjunto de fuerzas aplicadas, ya sean de inercia, elásticas, disipativas, de

restricción o exteriores a través de las coordenadas que definen el sistema. Estos principios conducen generalmente a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se conoce como ecuaciones del movimiento, y constituyen la base de la dinámica de sistemas multicuerpo.

Las principales contribuciones de la Mecánica Clásica a la Dinámica de Sistemas Multicuerpo son, originalmente, las ecuaciones de Newton-Euler. Éstas fueron las más usadas en el desarrollo de los primeros paquetes de software para la modelización de MBS [54].

Por otro lado, el principio de los Trabajos Virtuales, el principio de D'Alembert y el principio de las Potencias Virtuales o principio de Jourdain son diferentes formas que han contribuido a establecer los fundamentos de la Mecánica Analítica [55]. Uno de los principales formalismos de este enfoque analítico son las ecuaciones de Lagrange, siendo uno de los más empleadas para problemas con restricciones holónomas. El formalismo lagrangiano se basa en una metodología sistematizada para modelizar el problema, definiendo el movimiento en términos de las coordenadas generalizadas.

Hamilton realizó una transformación que condujo a un sistema de ecuaciones de orden inferior, conocidas como ecuaciones canónicas de Hamilton. El estudio de estas ecuaciones resulta interesante, ya que ofrece una visión diferente de los problemas multicuerpo al presentar una alternativa a las formulaciones basadas en la aceleración. Además, constituye los cimientos de la Mecánica Relativista.

Las ecuaciones de Gibbs-Appell constituyen la primera metodología especializada en sistemas con restricciones no holónomas y surge de expresar la fuerza generalizada de inercia en función de la aceleración. Las ecuaciones de Hamel-Boltzman mantienen las ventajas de los formalismos de Gibbs-Appell para sistemas no holónomos y pueden ser vistas como una extensión de las ecuaciones de Lagrange. Estas ecuaciones de la dinámica se obtienen por medio de sus funciones de energía expresadas en términos de las coordenadas generalizadas y las cuasi-velocidades (*generalized speed*) [56–58]. Las ecuaciones de Maggi siguen el mismo formalismo, sin embargo, estas últimas eliminan los multiplicadores de Lagrange indeterminados, por medio del complemento ortogonal de la matriz Jacobiana de las ecuaciones de restricción [59–61]. Por lo tanto, no es necesario expresar las funciones de energía en términos de las cuasi-velocidades, solo se usan para obtener matriz del complemento ortogonal.

Las ecuaciones de Kane son contemporáneas al desarrollo de los primeros paquetes informáticos para la modelización y simulación de los MBS. Por ello, la metodología propuesta por este formalismo fue diseñada para superar los inconvenientes que se encontraban los pioneros en este campo [62,63]. No obstante, existen autores que señalan equivalencias entre las ecuaciones de Kane y las ecuaciones de Gibbs-Appell [64] o entre las ecuaciones de Maggi [65] y con cualquier otro método establecido con el principio de Jourdain [66]. Otros afirman que simplemente se trata de un caso particular del formalismo de Gibbs-Appell. Lo que es indudable es la importancia de las ecuaciones de Kane para la popularización de las metodologías en sistemas no holónomos y en el desarrollo de software [67–69].

Es fácil encontrar referencias donde se expliquen detalladamente estos conceptos [6–9,70]. A continuación, se ampliarán las formulaciones más empleadas.

2.2.1 Ecuaciones de Newton-Euler

Surgen de aplicar la conservación de la cantidad de movimiento y del momento angular a un cuerpo libre. De manera que se establece una relación entre el movimiento de un cuerpo y las fuerzas y momentos que actúan sobre él. Por una parte, la posición de un punto en el espacio queda determinada por la ecuación de Newton. Se trata sin más de expresar las leyes de Newton de forma matemática:

$$\sum \mathbf{f}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (2.27)$$

Siendo \mathbf{f} el vector de fuerzas aplicadas, \mathbf{p} la cantidad de movimiento, $\ddot{\mathbf{r}}$ la aceleración y m la masa. Por otra parte, su orientación se define mediante las leyes de Euler, que se pueden considerar como una extensión de las leyes de Newton a sólidos rígidos. La ecuación de Euler describe la rotación de un cuerpo respecto a un sistema de referencia solidario al propio sólido:

$$\sum \mathbf{t}_i = \frac{d\mathbf{h}}{dt} = I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{h} \quad (2.28)$$

Donde \mathbf{t} es el vector de pares aplicados, \mathbf{h} es el momento cinético, I es el tensor de inercia, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ es la aceleración angular y $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular. Estas dos ecuaciones vectoriales constituyen las ecuaciones de Newton-Euler y

definen el movimiento de un sólido en el espacio. Expresadas conjuntamente de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \wedge I \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Se trata de un sistema compuesto por seis ecuaciones por cada elemento lo que normalmente deriva en modelos de gran tamaño en comparación con el número de coordenadas independientes del modelo.

Existen dos razones que dificultan la resolución de este sistema de ecuaciones. La primera es debido a la no linealidad que aparece en el segundo término de la derecha. Mientras que la segunda se debe a las fuerzas de restricción que surgen como consecuencia de los enlaces, las cuales son desconocidas y se incluyen en el vector de fuerzas exteriores. A pesar de esto, se trata de una formulación cuya aplicación es prácticamente independiente de la topología del sistema lo que genera que sea fácil de sistematizar resultando apropiado para emplear en metodologías de carácter general.

Aslanov [28] emplea la formulación de las ecuaciones de Newton-Euler para sistemas con cambios de estructura. Se genera un sistema sencillo pero de grandes dimensiones por lo que para mejorar la velocidad de cálculo usa algunos algoritmos especializados en sistemas de cadena abierta como el de Baraff [71] o Featherstone [72]. En simulaciones de sistemas multicuerpo de ferrocarriles es común usar tablas de consulta en la modelización del contacto que agilizan el cálculo computacional en detrimento de la precisión. En su trabajo Escalona [72], hace un estudio sobre la idoneidad de esta simplificación, para el cual construye las ecuaciones del movimiento mediante las ecuaciones de Newton-Euler.

2.2.2 Ecuaciones de Lagrange

Como se ha comentado, las ecuaciones de Newton-Euler conducen a sistemas de grandes dimensiones, por ello, se buscan planteamientos que permitan lograr tamaños más cercanos al número de grados de libertad del modelo. A través del principio de los trabajos virtuales aplicado al principio de D’Alambert para un sólido rígido, se obtiene la siguiente ecuación escalar:

$$\delta W_{ext} + \delta W_{enl} - \delta W_{inercia} = 0 \quad (2.30)$$

En donde, el trabajo virtual realizado por las fuerzas de inercia se puede escribir como:

$$\delta W_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}} \delta \mathbf{q} dV \quad (2.31)$$

Siendo \mathbf{r} el vector posición, $\ddot{\mathbf{r}}$ el vector de aceleraciones, ρ la densidad y \mathbf{q} el vector de las coordenadas generalizadas del sistema. Es posible comprobar que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.32) en la ecuación (2.31) se obtiene:

$$\delta W_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}} \delta \mathbf{q} dV \quad (2.33)$$

Y teniendo en cuenta la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^t \dot{\mathbf{r}} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^t \dot{\mathbf{r}} \right\} \quad (2.34)$$

Se escribe la ecuación (2.30) como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = Q_{ext} \quad (2.35)$$

Donde T es la energía cinética, $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de las velocidades generalizadas y Q_{ext} son las fuerzas exteriores generalizadas. Si se separan las fuerzas entre conservativas y no conservativas la ecuación (2.35) se podría escribir de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = Q_{nc} \quad (2.36)$$

Donde L es el término lagrangiano y se define como la energía cinética menos la potencial:

$$L = T - V \quad (2.37)$$

En caso de modelos de varios cuerpos al plantear el sistema con coordenadas independientes el número de ecuaciones es igual al número de gradoa de libertad. Sin embargo, en la mayoría de los problemas es preferible usar coordenadas dependientes debido a que expresar la energía cinética y sus

derivadas en función de las coordenadas independientes es una tarea difícil de sistematizar. En tal caso, tanto las ecuaciones de restricción como los esfuerzos de los enlaces habría que incluirlos en el sistema.

McGrath [74] simula un cuerpo humano en dos dimensiones mientras camina, donde cada segmento se conecta mediante uniones rígidas y las ecuaciones del movimiento están formuladas usando la mecánica Lagrangiana. En [75] Konz, realiza una revisión de formalismo de Lagrange para derivar las ecuaciones del movimiento en sistemas mecánicos y muestra como las coordenadas redundantes pueden conducir a expresiones más adecuadas cuando se trata de configuraciones espaciales no isomórficas.

2.2.3 Ecuaciones de Hamilton

Las formulaciones antes expuestas forman un sistema diferencial de orden 2, el cual se debe resolver con métodos numéricos, debido principalmente a ser no lineal. A menudo, se recurre a aplicar algún método para disminuir el orden diferencial del sistema, en este sentido las ecuaciones de Hamilton forman parte de esas alternativas. Esta formulación emplea las ecuaciones canónicas de Hamilton para conseguir un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, en vez de uno de n ecuaciones diferenciales de segundo orden. Hamilton definió una nueva función conocida como función Hamiltoniana $H(q, p, t)$, la cual se usa para generar las ecuaciones de primer orden en función de las coordenadas generalizadas y el momento canónico.

Siendo el momento canónico:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (2.38)$$

Donde T es la energía cinética, L la función lagrangiana y $\dot{\mathbf{q}}$ la velocidad generalizada. Por otra parte, se define la función Hamiltoniana como:

$$H = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - L \quad (2.39)$$

Además, se puede escribir el diferencial de H de la siguiente forma:

$$\delta H = \dot{\mathbf{q}}^T \delta \mathbf{p} - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) \delta \mathbf{q} \quad (2.40)$$

Mediante la ecuación (2.38) se puede expresar la velocidad generalizada en función del momento canónico. Si el resultado se sustituye en la ecuación

(2.39), el Hamiltoniano se puede expresar en función de las coordenadas generalizadas y el momento canónico:

$$H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (2.41)$$

y

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (2.42)$$

Comparando las ecuaciones (2.40) y (2.42), es fácil llegar a la conclusión de que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.44)$$

Aplicando estas identidades junto con la ecuación (2.36) se obtienen las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\dot{\mathbf{p}} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{Q}_{nc} \quad (2.45)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \quad (2.46)$$

Derivar las ecuaciones de Hamilton es un proceso computacionalmente exigente, ya que para obtener la función Hamiltoniana se ha de calcular el lagrangiano, que de por sí ya requiere un considerable número de operaciones aritméticas. Quizás es por esto que no resulta una formulación atractiva en la mecánica multicuerpo.

Naudet [76] afirma que ya que en la mayoría de los algoritmos $O(n)$ basados en la aceleración, las ecuaciones del movimiento se obtienen por recursión, se evita así calcular la derivada directa y las derivadas parciales del lagrangiano. De forma que presenta un algoritmo $O(n)$ basado en el momento canónico capaz de reducir el número de operaciones.

2.2.4 Ecuaciones de Gibbs-Appell

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia se puede evaluar por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$Q_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.47)$$

$$Q_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.48)$$

$$Q_{inercia} = \int_V \rho \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.49)$$

Siendo todas equivalentes y conduciendo a los mismos resultados siempre y cuando se haya definido el sistema con el mismo conjunto de coordenadas.

Mientras que en las ecuaciones de Lagrange la fuerzas de inercia generalizadas se expresan en términos de la energía cinética, la cual es cuadrática para la velocidad, en las ecuaciones de Gibbs-Appell la fuerza de inercia generalizada se expresa con una función de aceleración. Pudiéndose escribir como:

$$Q_{inercia} = \int_V \rho \left[\frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}^T \ddot{\mathbf{r}} \right) \right]^T dV \quad (2.50)$$

La cual también se puede reescribir de la siguiente manera:

$$Q_{inercia} = \frac{\partial G}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \quad (2.51)$$

Donde $\ddot{\mathbf{q}}$ es la aceleración generalizada y G es la función de Gibbs-Appell, la cual se define como:

$$G = \frac{1}{2} \int_V \rho \ddot{\mathbf{r}}^T \ddot{\mathbf{r}} dV \quad (2.52)$$

El sistema resultante se conoce como ecuaciones de Gibbs-Appell y tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = Q \quad (2.53)$$

Siendo Q las fuerzas generalizadas. Las ecuaciones de Gibbs-Appell representan la primera metodología sistemática especializada en modelar sistemas mecánicos con restricciones no holónomas, sin necesidad de acudir a recursos matemáticos extras, como los multiplicadores de Lagrange. Es posible obtener modelos matemáticos con tantas ecuaciones como el número de grados de libertad del sistema estudiado. Esto se logra definiendo un

conjunto de cuasi-velocidades que parametrizan las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, garantizando la misma satisfacción que las restricciones cinemáticas existentes para cualquier valor asignado a estos parámetros. La función Gibbs-Appell o energía de aceleraciones permite describir los efectos de inercia evaluando las derivadas parciales de una función de tipo energética con respecto a las derivadas temporales de las cuasi-velocidades [64,77,78].

Sin embargo, cuando se trata de trabajar con restricciones holónomas ya no existe tal ventaja. Normalmente se elude usar las ecuaciones de Gibbs-Appell para este tipo de problemas por el hecho de que hay que evaluar la función G que deriva en expresiones con un número elevado de términos [79].

2.2.5 Ecuaciones de Kane

Aplicando el principio de los trabajos virtuales y el principio de D'Alembert a un sistema definido con coordenadas independientes se obtiene la siguiente ecuación:

$$\delta W = (\mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_{inercia}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.54)$$

Teniendo en cuenta la igualdad (2.32) la ecuación (2.54) se puede escribir como:

$$\mathbf{f}_{ext} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - m \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (2.55)$$

Para el caso de momentos se tiene:

$$\mathbf{t}_{ext} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - (I \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge I \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (2.56)$$

Superponiendo las fuerzas y los momentos se obtiene la ecuación de Kane:

$$\mathbf{f}_{ext} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{t}_{ext} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - m \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - (I \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge I \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (2.57)$$

Si se aplica el principio variacional de Jourdain a las ecuaciones de Gibbs-Appell se obtiene el mismo resultado que las ecuaciones de Kane.

2.3 Formulación de sistemas dinámicos restringidos

En el punto anterior, partiendo de los principios de la dinámica, se han desarrollado diferentes formulaciones para obtener las ecuaciones del movimiento. En todas ellas, se ha supuesto que el sistema no estaba restringido, es decir, que el número de coordenadas coincidía con el número de grados de libertad del sistema. Sin embargo, a pesar de que a primera vista no parezca atractivo, generalmente, se deben emplear un número mayor de coordenadas de las estrictamente necesarias.

Una vez definido el sistema en coordenadas dependientes, el problema se puede plantear de dos maneras diferentes. La primera alternativa consiste en hacer uso de las relaciones establecidas por las ecuaciones de restricción para formar un sistema de igual dimensión al número de grados de libertad del sistema. De este modo, todas las cantidades están expresadas en términos de las coordenadas independientes. La segunda alternativa, sin embargo, opta por formar un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas, en el cual la aportación de las fuerzas de enlace se incluye en términos de las matrices de restricción. Comparando ambos planteamientos, la primera opción resulta difícil de desarrollar cuando se trata de sistemas con un cierto grado de complejidad. Además, plantear las velocidades y aceleraciones angulares en función de las coordenadas independientes resulta una tarea difícil. Por otro lado, el resultado es un sistema ODE, más fácil y robusto de solucionar comparado con el sistema DAE que proporciona el segundo planteamiento. En alguna bibliografía, como en Bauchau [80], al primer planteamiento se le denomina formulación de Newton.

La principal característica de los sistemas multicuerpo es que el sistema está sometido a un movimiento finito en el que el movimiento relativo de cada cuerpo se encuentra condicionado por una función de restricción. Por una parte, las rotaciones finitas de los cuerpos introducen no linealidades en el sistema, por lo que un sistema multicuerpo es esencialmente no lineal. Por otra parte, las ecuaciones de restricción que definen los pares de ligadura son ecuaciones algebraicas, las cuales son generalmente no lineales. Teniendo en cuenta esto, las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar de la siguiente forma:

$$M(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_r \quad (2.58)$$

Donde M es la matriz de masas, \mathbf{f}_i es el vector de las fuerzas de inercia, \mathbf{f}_e el vector de las fuerzas de exteriores y \mathbf{f}_r el de las fuerzas de restricción. Mientras que las ecuaciones de restricción se expresan como:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x})=0 \\ f_2(\mathbf{x})=0 \\ f_3(\mathbf{x})=0 \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x})=0 \end{cases} \quad (2.59)$$

O bien de manera compacta:

$$\Phi(\mathbf{x})=0 \quad (2.60)$$

Obviamente, las ecuaciones (2.58) más la ecuaciones (2.60) forman el sistema de ecuaciones diferencial algebraico que hay que resolver.

2.3.1 Multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange es la base sobre la cual se sustentan la mayoría de las formulaciones de los sistemas dinámicos restringidos. Tradicionalmente, los multiplicadores de Lagrange se han empleado en problemas de optimización para obtener los puntos estacionarios de una función de una o varias variables sujeta a restricciones [81,82]. En cierta manera, el valor de los multiplicadores de Lagrange indica con que intensidad la solución “empuja” o “tira” de una restricción en concreto. Transportado este planteamiento a las ecuaciones de un sistema multicuerpo, los multiplicadores de Lagrange están relacionados con las fuerzas de restricción.

Si se tiene un conjunto de funciones de restricción, éstas se van a traducir en una serie de fuerzas que van a impedir el movimiento del sistema. La magnitud de estas fuerzas es desconocida, ya que dependiendo del instante en el que se encuentren tendrán mayor o menor intensidad, es decir, que no dependen únicamente de la posición, si no que también del estado dinámico. Sin embargo, la dirección de esos esfuerzos solo depende de la posición y por tanto, sí se puede calcular. Es conocido que la dirección de las fuerzas de restricción es la normal a la función que define esa ligadura en el punto de contacto entre los cuerpos y para calcularlo basta con obtener el gradiente. Para un sistema formado por las ecuaciones de restricción como el de (2.59) las direcciones de las fuerzas de restricción se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \nabla f_1(\mathbf{x}) &= \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n \\
 \nabla f_2(\mathbf{x}) &= \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n \\
 \nabla f_3(\mathbf{x}) &= \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n \\
 &\quad \vdots \\
 \nabla f_m(\mathbf{x}) &= \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Como se ha comentado, la magnitud de los esfuerzos es desconocida y se puede representar como un escalar, λ , que multiplica a cada vector del sistema (2.61). De forma que se tiene:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \nabla f_1(\mathbf{x}) &= \lambda_1 \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \lambda_1 \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n \\
 \lambda_2 \nabla f_2(\mathbf{x}) &= \lambda_2 \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \lambda_2 \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \lambda_2 \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n \\
 \lambda_3 \nabla f_3(\mathbf{x}) &= \lambda_3 \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \lambda_3 \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \lambda_3 \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n \\
 &\quad \vdots \\
 \lambda_m \nabla f_m(\mathbf{x}) &= \lambda_m \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} e_1 + \lambda_m \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} e_2 + \cdots + \lambda_m \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} e_n
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Ordenando la expresión (2.62) en forma matricial se tiene:

$$\boldsymbol{\lambda}^T \Phi_x \mathbf{e} \tag{2.63}$$

Donde $\boldsymbol{\lambda}$ son precisamente los multiplicadores de Lagrange, Φ_x es el Jacobiano de las funciones de restricción y \mathbf{e} son los vectores directores del sistema de referencia. Evidentemente, el vector de fuerzas de restricción se corresponde con la traspuesta de (2.63), es decir:

$$\mathbf{f}_r = \Phi_x^T \boldsymbol{\lambda} \tag{2.64}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de las fuerzas de restricción en las ecuaciones de equilibrio (2.58), se obtiene:

$$M(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_e + \Phi_x^T \boldsymbol{\lambda} \tag{2.65}$$

Ahora las incógnitas del problema no son solo el número de variables sino que también los multiplicadores de Lagrange. Por ello, el sistema de

ecuaciones se debe completar con las ecuaciones de restricción (2.59), formado de un sistema DAE de índice-3.

2.3.2 Ecuación de Lagrange de primera clase

Se pueden encontrar en la bibliografía numerosas referencias a esta ecuación [6,7,80]. Desarrollando la ecuación de Lagrange (2.36) se obtiene un sistema de la siguiente forma:

$$M \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_c \quad (2.66)$$

Donde M es la matriz de masa, $\ddot{\mathbf{q}}$ el vector de aceleraciones generalizadas, \mathbf{Q} las fuerzas generalizadas y \mathbf{Q}_c las fuerzas de restricción generalizadas. Si se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange a la ecuación (2.66) se obtiene la ecuación de Lagrange de primera clase:

$$M \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (2.67)$$

Siendo Φ_q^T el jacobiano de las restricciones formuladas en coordenadas generalizadas. A su vez, las restricciones se pueden expresar a nivel de velocidad mediante:

$$\dot{\Phi} = \Phi_q(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2.68)$$

En el caso de que las restricciones fuesen holónomas y además linealmente independientes, sería posible realizar una partición entre coordenadas generalizadas independientes y dependientes. De tal manera que disponiendo las coordenadas dependientes en función de las independientes, éstas se eliminarían del sistema. Obviamente, se debe tener especial cuidado con la selección de las coordenadas generalizadas independientes, ya que podrían surgir singularidades no previstas para ciertas configuraciones del sistema. Por otra parte, la ecuación (2.68) implica una dependencia lineal en la velocidad generalizada, lo que también se da el caso para la aceleración. De modo, que derivando respecto al tiempo se obtiene las restricciones a nivel de aceleración:

$$\ddot{\Phi} = \Phi_q(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_q(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}})_q + 2 \Phi_{qt}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2.69)$$

O bien:

$$\Phi_q(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \Phi_d \quad (2.70)$$

Donde:

$$\Phi_d = -(\Phi_q(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}})_q - 2\Phi_{qt}(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt}(\mathbf{q}, t) \quad (2.71)$$

2.3.3 Eliminación algebraica de los multiplicadores de Lagrange

En este apartado se van a describir los diferentes procedimientos algebraicos para eliminar los multiplicadores de Lagrange. En todos ellos, los planteamientos conducen a sistemas de EDOs.

2.3.3.1 Formulación de Maggi

Se comienza definiendo las cuasi-velocidades independientes, \mathbf{e} , que junto con las ecuaciones de restricción, supuestamente independientes, expresadas como en (2.68), forman el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_q(\mathbf{q}, t) \\ \widehat{\Phi}_q(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{Bmatrix} \Phi_t(\mathbf{q}, t) \\ \widehat{\Phi}_t(\mathbf{q}, t) \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

El sistema (2.72) tiene la misma dimensión que el número de coordenadas generalizadas empleadas, n . Obviamente, el número de grados de libertad del sistema será n menos el número de ecuaciones de restricción, m . La matriz formada por Φ y $\widehat{\Phi}$ define una transformación lineal y se asume que es invertible. Escribiendo:

$$B(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \Phi_q(\mathbf{q}, t) \\ \widehat{\Phi}_q(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Se puede expresar las velocidades generalizadas en función de las características cinemáticas de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{q}} = B(\mathbf{q}, t)^{-1} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Phi_t(\mathbf{q}, t) \\ \widehat{\Phi}_t(\mathbf{q}, t) \end{Bmatrix} \right) \quad (2.74)$$

La inversa de la matriz B se puede descomponer en dos matrices de la siguiente forma:

$$B(\mathbf{q}, t)^{-1} = \begin{bmatrix} \widehat{\Lambda}_q(\mathbf{q}, t) & \Lambda_q(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Introduciendo la expresión (2.75) en (2.74), se tiene:

$$\dot{\mathbf{q}} = \Lambda_q \mathbf{e} - (\Lambda_q \Phi_t + \hat{\Lambda}_q \hat{\Phi}_t) = \Lambda_q \mathbf{e} - \mathbf{d} \quad (2.76)$$

Obviamente, al ser la inversa de B , se debe cumplir:

$$B B^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_q \\ \hat{\Phi}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_q & \Lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_q \hat{\Lambda}_q & \Phi_q \Lambda_q \\ \hat{\Phi}_q \hat{\Lambda}_q & \hat{\Phi}_q \Lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

De esta última expresión se puede observar que el término $\Phi_q \Lambda_q$ es igual a cero. Por lo tanto, la matriz Λ_q es el subespacio nulo de la matriz de restricciones Φ_q , lo que a su vez implica que son complementos ortogonales. Ahora derivando la expresión (2.76) para obtener las aceleraciones generalizadas se consigue la siguiente ecuación:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\Lambda}_q \mathbf{e} + \Lambda_q \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{d}} \quad (2.78)$$

Introduciendo la expresión anterior en la ecuación (2.66) y premultiplicando por la traspuesta de Λ_q :

$$\Lambda_q^T M \Lambda_q \dot{\mathbf{e}} + \Lambda_q^T M \dot{\Lambda}_q \mathbf{e} = \Lambda_q^T \mathbf{Q} + \Lambda_q^T M \dot{\mathbf{d}} \quad (2.79)$$

Evidentemente, al ser Λ_q el subespacio nulo de la matriz de restricción el término $\Lambda_q^T \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda}$ se hace cero por lo que los multiplicadores de Lagrange desaparecen de la ecuación. La formulación de Maggi construida mediante las expresiones (2.76) y (2.79) generan un sistema de $2n - m$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.3.3.2 Formulación de índice-1

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange de primera clase junto con las ecuaciones de restricción a nivel de aceleraciones se forma un sistema DAE de índice 1 de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \Phi_d \end{Bmatrix} \quad (2.80)$$

El sistema (2.80) únicamente satisface las restricciones a nivel de posición y de velocidad en el instante inicial donde las condiciones iniciales son datos del problema. Bien, premultiplicando la primera ecuación por el término $B M^{-1}$ y con ayuda de la segunda ecuación se pueden eliminar las aceleraciones para obtener la expresión de los multiplicadores de Lagrange:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^{-1} (\Phi_q M^{-1} \mathbf{Q} - \Phi_d) \quad (2.81)$$

Una vez que λ es conocido se sustituye en la primera ecuación de (2.80) con lo que se tiene:

$$M \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \Phi_q^T (\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^{-1} (\Phi_q M^{-1} - \Phi_d) \quad (2.82)$$

Ahora, el sistema (2.82) es un sistema EDO de segundo orden.

2.3.3.3 Formulación del subespacio nulo

Se ha demostrado que la matriz Λ_q obtenida al calcular la inversa de la matriz B , es el subespacio nulo de la matriz de restricciones Φ_q . Por tanto, si se denomina N_q a Λ_q y se premultiplica la ecuación por la traspuesta de N_q se obtiene una expresión donde los multiplicadores de Lagrange desaparecen. El sistema quedaría con el siguiente aspecto:

$$\begin{bmatrix} N_q^T M \\ \Phi_q \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} N_q^T \mathbf{Q} \\ \Phi_d \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

De nuevo, el sistema se ha transformado en un EDO de segundo orden. Varios autores han desarrollado esta formulación de forma independiente. Hemami y Weimer [83], introdujeron el complemento ortogonal Λ_q , de la matriz de restricciones para obtener el sistema (2.83) para sistemas de pequeña escala, aunque no se propuso una metodología para determinar el complemento ortogonal. También demostraron la equivalencia de este planteamiento con la ecuaciones de Kane.

2.3.3.4 Formulación de Udwadia y Kalaba

En la ecuación (2.82) se incluye la inversa del término $(\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^{-1}$, bien, este término se puede sustituir por la pseudoinversa calculada mediante la expresión de la inversa generalizada de Moore-Penrose. Se tiene:

$$\Phi_q^T (\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^{-1} = M^{1/2} (\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^+ \quad (2.84)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.82) se obtiene:

$$M \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - M^{1/2} (\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^+ (\Phi_q M^{-1} - \Phi_d) \quad (2.85)$$

La ecuación anterior fue presentada en primera instancia por Udwadia y Kalaba [84,85], basándose en el principio de Gauss, el cual establece que las ecuaciones explícitas del movimiento se expresan como la solución de un

problema de minimización cuadrática, sujeto a unas condiciones de restricción formuladas en términos de aceleración.

2.3.3.5 Comparación entre de las diferentes formulaciones

Las distintas formulaciones presentadas han convertido el sistema de ecuaciones algebraico de primer orden asociado a las ecuaciones de Lagrange de primera clase en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinario a través de la eliminación de los multiplicadores de Lagrange. Mediante la formulación de Maggi se ha obtenido $2n-m$ ODEs de primer orden para las $n-m$ cuasi velocidades y n coordenadas generalizadas. Por su parte, las formulaciones de índice-1, subespacio nulo y Udwadia-Kalaba forman un conjunto de n EDOs de segundo orden para las n coordenadas generalizadas, el cual se puede convertir en un sistema de $2n$ EDOs de primer orden para n coordenadas generalizadas y n velocidades generalizadas.

La primera observación es que todos los métodos han reducido las dimensiones del problema. Sin embargo, esta disminución conlleva un coste. En las formulaciones del subespacio nulo y Maggi se requiere evaluar el subespacio nulo de la matriz de restricciones, mientras que para las ecuaciones de Udwadia-Kalaba se debe evaluar la inversa generalizada.

La segunda observación que se puede hacer es que la formulación de Maggi introduce las restricciones a nivel de velocidad, mientras que en las otras formulaciones lo hacen a nivel de aceleración. Esto implica que en la implementación de las restricciones en el sistema se produce una pérdida de información, lo que conlleva a una mayor violación de las restricciones. Obviamente, este fenómeno será más acusado para las aceleraciones, aunque para compensar este desvío será necesario aplicar alguna técnica de estabilización tanto a las restricciones de aceleración como a las de velocidad. La implementación de las restricciones a nivel de aceleración es una práctica habitual en la dinámica multicuerpo a pesar de que tenga un efecto potencialmente negativo sobre la resolución numérica del problema.

En la formulación de Maggi, los parámetros cinemáticos aparecen de forma explícita en la ecuación del movimiento. Por contra, estas variables adicionales no aparecen en la formulación del subespacio nulo ni en la de índice 1, las cuales expresan el movimiento en términos de las coordenadas generalizadas empleadas para definir el sistema.

La ventaja de la formulación de Udwadia-Kalaba respecto a los demás métodos es que la inversa generalizada de Moore-Penrose siempre existe, mientras que para otras formulaciones requieren que la matriz de restricciones no contenga ecuaciones dependientes. Por lo tanto, dicha formulación es capaz de afrontar problemas con restricciones redundantes. Además, problemas en donde el número de grados de libertad varía como pueden ser contactos, se abordan fácilmente.

2.4 Métodos numéricos para sistemas restringidos

El sistema formado por las ecuaciones de Newton-Euler o de Lagrange de primera clase junto con las restricciones forman un sistema DAE de índice-3. Gear señaló en [86], la dificultad que acompaña a este tipo de problemas. El mismo autor afirmó que si el problema no excedía el índice 1 se podía resolver sin grandes problemas pero si era superior se debería intentar reducirlo.

Este tipo de estudios derivó en dos líneas de investigación en la dinámica multicuerpo. La primera se basa en técnicas para la transformación del sistema DAE en ODE, en las cuales se incluyen la eliminación de los multiplicadores de Lagrange. La segunda, en cambio, trata de reducir el sistema de índice 3 a 1. Como se ha comentado en el capítulo anterior, al haber implementado las ecuaciones de restricción en términos de velocidad o aceleración, el sistema se ve afectado por un error de ensamblaje por la violación progresiva de las ligaduras. Para paliar este efecto, se incluyen técnicas de estabilización o bien técnicas de eliminación de la violación de las restricciones. En los últimos tiempos, en los planteamientos de la dinámica de sistemas multicuerpo se están incorporando técnicas basadas en el método de elementos finitos así como métodos de escalado los cuales se han demostrado que con el conveniente escalado, el sistema DAE de índice-3 no presenta mayores dificultades para ser integrado que un EDO. En este capítulo se repasarán alguna de estas técnicas.

2.4.1 Técnicas para la obtención de ecuaciones diferenciales ordinarias

Esta sección trata sobre los métodos que transforman el sistema DAE en ODE. Un planteamiento lógico sería eliminar las coordenadas dependientes y

obtener un sistema con el mínimo número de coordenadas, algo así se consigue con la formulación de Maggi. Sin embargo, también es común que el sistema EDO resultante tenga el mismo número de coordenadas que las empleadas para definir el sistema como las formulaciones del subespacio nulo o Udwadia-Kalaba.

2.4.1.1 Formulaciones “tipo-Maggi”

La esencia de la formulación de Maggi es la construcción del subespacio nulo para poder eliminar los multiplicadores de Lagrange al ser ésta el complemento ortogonal de la matriz de restricciones. Debido a que la matriz de restricciones es función del tiempo, el subespacio nulo también lo es. Esto implica que en cada instante de tiempo, es necesario calcularlo, lo que supone un coste computacional.

Para disminuir este coste, algunos autores proponen evaluar el subespacio nulo en el comienzo de la simulación y mantenerlo constante durante una secuencia de pasos de integración. Una vez que la secuencia de intervalos de tiempo fijados se ha superado, se vuelve a recalcular. Obviamente, durante estos instantes de tiempo la eliminación de los multiplicadores de Lagrange no será completa. Existen diferentes criterios a la hora de definir la duración de dichos intervalos de tiempo donde el subespacio nulo es constante, pero ninguno de ellos se puede definir como formulaciones de Maggi propiamente dichas. Por ese motivo se ha preferido nombrarlas como formulaciones “tipo-Maggi”.

Gran parte de las formulaciones “tipo-Maggi” únicamente difieren en la herramienta computacional para construir el subespacio nulo de la matriz de restricciones. Entre las distintas maneras se puede destacar el método de los autovalores nulos [87], el método de partición de coordenadas basado en la factorización LU [88,89], y el método de descomposición de valores singulares (“*Singular Value Decomposition*, “SVD”) [90,91].

2.4.1.2 Formulación de Maggi

Wampler en [92], presentó un sencillo planteamiento en el cual las características cinemáticas de la formulación de Maggi se seleccionaban como un subconjunto de velocidades generalizadas junto con la estructura del método de Kane. Por otra parte, otros autores han desarrollado planteamientos en los cuales se actualiza el subespacio nulo en cada instante

de tiempo. Kim y Vanderploeg [93], propusieron un esquema en donde se mantenía la continuidad direccional del subespacio nulo. Sin embargo, la matriz Q de la descomposición QR no conservaba la ortogonalidad, y por tanto, la descomposición QR debía repetirse en intervalos regulares.

Por su parte, Liang y Lance [94], han empleado el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para generar coordenadas independientes que sean continuas y diferenciables.

2.4.1.2.1 Procedimiento de extracción

El subespacio nulo se determina mediante la ecuación (2.76), escrita como $\dot{\mathbf{q}} = \Lambda_q \mathbf{e}$, asumiendo que las restricciones son holónomas y esclerónomas. Luego, es posible determinar el subespacio nulo correspondiente a las características cinemáticas como una “extracción” del vector de componentes de las velocidades generalizadas. A la vista de la ecuación (2.72), esto implica que cada fila de la matriz $\hat{\Phi}_q$ tiene una única entrada distinta de cero. Una buena elección para esta extracción se puede obtener inicialmente por medio de la triangulación gaussiana de la matriz de restricciones con pivotamiento total, en donde la ubicación de los pivotes indica las velocidades generalizadas que serán extraídas. Esta opción podría resultar inestable durante la simulación, si los pivotes seleccionados se vuelven demasiado pequeños. En este caso se seleccionaría una nueva extracción. García de Jalón *et al.* [95], investigó el uso de SVD para identificar los parámetros cinemáticos. Concluyeron que este planteamiento produce unos valores adecuados para mayores periodos de tiempo, sin embargo, genera un mayor coste computacional comparado con el método de extracción.

Avello *et al.* [96], detalla un procedimiento de extracción, el cual conduce a un algoritmo altamente paralelizable. Cada columna del subespacio nulo, Λ_q , se calcula en paralelo como la solución de un problema de velocidad elemental, y además, el producto triple $\Lambda_q^T M \Lambda_q$ también se puede evaluar en paralelo. Los términos del vector $\Lambda \mathbf{e}$ que aparecen en las ecuaciones de Maggi también se calculan en paralelo y se corresponden con las soluciones de problemas elementales de aceleración. Para la eficiencia computacional, el enfoque general es utilizar técnicas recursivas para los mecanismos de cadena abierta. En presencia de cadenas cerradas, se emplea la formulación lagrangiana aumentada.

2.4.1.3 Análisis de los métodos basados en la formulación de Maggi

Mientras que el subespacio nulo de la matriz de restricción es único, los vectores individuales que forman la base del subespacio no lo son. Los métodos presentados definen el subespacio nulo mediante un conjunto de vectores obtenidos por diferentes procesos computacionales. Para evaluar dichos planteamientos se emplean, fundamentalmente, dos criterios. El primero se pregunta si los vectores que forman el subespacio nulo son linealmente independientes, mientras que el segundo está relacionado con la robustez y la eficiencia del proceso numérico. El primero es una condición necesaria para la viabilidad del planteamiento. Kurdila *et al.* [97] señaló que los planteamientos de Kane [98] y Wehage y Haug [89] no eran robustos ya que en ocasiones conllevan un condicionamiento pobre o incluso una representación singular del subespacio nulo. Para solventar este inconveniente, en la mayoría de los planteamientos, el subespacio nulo se genera como una base ortogonal.

El segundo criterio, SVD requiere un coste computacional del orden de entre 2 y 10 veces superior a la descomposición QR, dependiendo del tamaño de la matriz de restricciones. Por su parte, el algoritmo QR es dos veces más costoso que la factorización LU. Además, SVD es varias veces más caro que el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Por otra parte, SVD es el algoritmo más robusto y estable, ya que se puede emplear con seguridad incluso cuando el rango de la matriz de restricciones no es completo, como puede ser en presencia de restricciones redundantes.

Una característica importante de la formulación de Maggi es que las restricciones se incluyen en términos de la velocidad. Por tanto, el cumplimiento de las restricciones varía produciendo un error en el proceso de integración. Esta deriva, sin embargo, será mínima debido a que las características cinemáticas se encuentran en el hiperplano tangente de las restricciones. Esto no ocurre en los métodos “tipo-Maggi”, debido a que al no actualizar el subespacio nulo en cada iteración, las características cinemáticas no residen exactamente en el hiperplano tangente.

2.4.1.4 Formulaciones del subespacio nulo

En esta sección se discute sobre planteamientos basados en la formulación del subespacio nulo presentada en el punto 2.3.3.3. Kamman y Hustin

[99,100], desarrollaron un planteamiento donde se empleó el teorema de los autovalores nulos para determinar el subespacio nulo de la matriz de restricciones. La respuesta dinámica del sistema fue después obtenida a través de la formulación de subespacio nulo. Borri *et al.* [101], señaló que este enfoque no es mucho más caro que otros métodos del subespacio nulo, ya que el mayor coste viene determinado por la obtención del subespacio nulo.

En la sección 2.4.1.2.1 se describe el procedimiento de extracción usado por García de Jalón para determinar el subespacio nulo de la matriz de restricciones. En este artículo, los autores introducen las formulaciones de índice 1, de Maggi y del subespacio nulo para la modelización de un sistema multicuerpo con sólidos rígidos. De particular interés es el segundo artículo [102], el cual compara distintos enfoques para la modelización de sistemas mecánicos restringidos. De este estudio se concluye que la eficiencia de las formulaciones depende del número de coordenadas y los grados de libertad del sistema. Además, la formulación del subespacio nulo tiende a ser más eficiente que el planteamiento de índice-1 y finalmente, la formulación de Maggi suele ser superior a la del subespacio nulo.

Chiou *et al.* [103], presenta un planteamiento numérico para la solución de las ecuaciones del movimiento expresadas en función de las velocidades independientes. El subespacio nulo de la matriz de restricciones se construye usando las relaciones de velocidad de transformación, basado en un esquema de partición.

A continuación, se presenta un método para obtener el subespacio nulo de una matriz mediante la factorización LDU.

2.4.1.4.1 Algoritmo LDU para la solución de mínimos cuadrados en sistemas lineales

Fernández de Bustos *et al.* [104] presentan un método para obtener la solución de mínimos cuadrados en sistemas lineales. Uno de los aspectos interesantes del trabajo reside en que durante el proceso, se obtienen tanto el subespacio nulo como el subespacio imagen. Obviamente, estas matrices pueden ser calculadas por medio de otros algoritmos como SVD o el de descomposición ortogonal completa (“*Complete Orthogonal Decomposition*”, COD), sin embargo, el uso de las factorizaciones LDU tienen sus ventajas, como el coste computacional y el bajo nivel de “*fill-in*”. El algoritmo presentado recoge las ventajas del método de Peters-Wilkinson [105] y Sauter

[106]. Esta combinación consigue un buen comportamiento en todos los casos y además, también permite optimizar la memoria almacenando el subespacio nulo y el subespacio imagen en la matriz factorizada.

2.4.1.5 Formulación de Udwadia y Kalaba

Arabyan y Wu [107], expandieron el uso de las ecuaciones de Udwadia y Kalaba, las cuales se empleaban inicialmente en sistemas de partículas, a los problemas restringidos con sólidos rígidos. El mayor reto de este planteamiento es la obtención de la inversa generalizada en cada paso de cálculo. Una alternativa es calcularla por medio de SVD, pero conlleva un coste considerable. Por lo tanto, los autores propusieron el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, que dependiendo del tamaño de la matriz, supone un ahorro computacional. Además, el proceso de Gram-Schmidt permite identificar inconsistencias en las restricciones.

2.4.1.6 Formulación proyectiva

Blajer [108,109], propuso un método de proyección para problemas dinámicos con restricciones, usando la geometría diferencial de Riemannian. Se trata de espacios métricos lineales en los que los vectores se resuelven en sus componentes covariante y contravariante, y la métrica del espacio se define por medio de la matriz de masas. El término “proyección geométrica” se utiliza debido a que el método propuesto proyecta las ecuaciones de índice-1 en los subespacios tangente y ortogonal a los subespacios admisibles. Después, las ecuaciones de Maggi se obtienen sustituyendo las variables independientes en las ecuaciones proyectadas en el subespacio tangente. Las variables independientes forman un conjunto de cuasi-velocidades independientes, o de cuasi-aceleraciones independientes.

Blajer [110], también abordó la implementación numérica de la formulación proyectiva. El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se usó para obtener el subespacio tangente. Sin embargo, en este planteamiento, la ortogonalidad de los subespacios tangente y de restricción no se logra en un espacio cartesiano, sino en un espacio dotado de una métrica definida por la matriz de masas. La formulación proyectiva requiere el cálculo de la inversa de la matriz de masas y su derivada respecto al tiempo, las cuales son operaciones que acarrear un coste computacional elevado. Por lo tanto, Blajer recomienda el uso de este método junto con las coordenadas absolutas que conducen a

matrices de masa constantes. En tal caso, el inverso debe calcularse una sola vez y su derivada temporal se desvanece.

2.4.2 Técnicas de reducción de índice

Las técnicas de reducción de índice se presentan típicamente como un proceso matemático para disminuir el índice de un sistema DAE. Gear [111] propuso un método para reducir el índice de 3 a 2 y mostró que el método de diferencias regresivas (“*Backward Difference*”, BD) converge para sistemas de índice-2. Más tarde, el mismo autor en [112], redujo el problema a índice-1. Obviamente, estos planteamientos implican un coste adicional en la forma de resolver el problema.

Lötstedt y Petzold [113] probaron que el método BD de orden k y paso constante convergen cuando se aplican a sistemas DAE de índice 1,2 y 3, siendo la precisión de orden $O(h^k)$, con h igual al tamaño del paso. Sin embargo, luego demostraron la dificultad de implementar métodos de paso variables en estos mismos problemas [113]. Se destacan las dificultades asociadas a los problemas de índice-3, como el condicionamiento del sistema en problemas no lineales cuando se aplica el método de Newton.

Einich [114], presentó un análisis de la convergencia en planteamientos de proyección de coordenadas con el método BD para integrar sistemas DAE de índice-1. Para reducir el error de ensamblaje, se proyecta la solución numérica de la ODE sobre los invariantes de la posición y la velocidad. La precisión se muestra idéntica a la del método BD aplicado a ODEs.

Para sistemas holónomos, Yen *et al.* [115,116] reducen el índice-1 a ODEs usando parametrizaciones locales. El sistema ODE caracteriza los parámetros locales los cuales implícitamente definen las coordenadas y las velocidades generalizadas independientes. Después, empleando el muestreo de la parametrización local y las ecuaciones de restricción se recuperan las coordenadas y velocidades generalizadas originales. En aplicaciones numéricas, la parametrización local se obtiene usando el método de partición de coordenadas generalizadas y del espacio tangente. Potra y Yen [117] usaron el espacio tangente determinado por la descomposición QR en las parametrizaciones locales. Basándose en los métodos BD, las ecuaciones discretizadas de Boltzmann-Hamel se muestran equivalentes a un conjunto discretizado de DAEs, implementando las restricciones a nivel de posición, velocidad y aceleración.

Yen *et al.* [118,119], introdujo la formulación de división de coordenadas para problemas DAE de índice-2 en sistemas con sólidos flexibles. Se propuso una familia de método- α de segundo orden junto con un control de disipación numérica, lo cual extiende el correspondiente método a sistemas ODEs. El método de división de coordenadas es una implementación numérica de la formulación del subespacio nulo aplicado al enfoque de índice-2 estabilizado de Gear [111]. Las proyecciones en el espacio de la matriz de masas se utilizan para imponer las restricciones tanto a nivel de desplazamientos como de velocidades. Para lidiar con las altas oscilaciones, los autores introducen una modificación en el proceso iterativo de Newton, denominado iteración de división de coordenadas modificada.

Otra formulación de reducción es el método de proyección integrado desarrollado por Borri *et al.* [120], el cual se puede usar sistemáticamente para reducir el índice de un sistema DAE de 3 a 1. Además, el método divide el problema original en su parte algebraica y diferencial, el cual puede ser resuelto secuencialmente. Si bien se ha demostrado la precisión y robustez del procedimiento, su complejidad también es evidente.

2.4.3 Técnicas de estabilización de las restricciones

Existen un gran número de técnicas que implementan las restricciones en términos de la aceleración, formando un sistema DAE de índice-1 con invariantes. De hecho, para la solución exacta, $\Phi=0$ y $\dot{\Phi}=0$ representan dos invariantes del sistema. Desafortunadamente, debido a las aproximaciones numéricas y al error de redondeo, las soluciones numéricas no evolucionarán manteniendo dichos invariantes, resultando en $\Phi \neq 0$ y $\dot{\Phi} \neq 0$.

Desde un punto de vista matemático, la ecuación $\dot{\Phi}=0$ no es estable ya que sus polos están situados en el origen del plano s , donde s es la variable de la transformada de Laplace, en consecuencia Φ y $\dot{\Phi}$ no convergen a 0, en caso de aparecer alguna desviación. Por lo tanto, las técnicas de estabilización intentan minimizar este desvío.

2.4.3.1 Técnicas de estabilización basadas en la teoría del control

La técnica de estabilización más conocida es la estabilización de Baumgarte.

2.4.3.1.1 Estabilización de Baumgarte

Para compensar la deriva de la solución, Baumgarte [121], introdujo este método de estabilización, en el cual la restricción de aceleración original se sustituye por:

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha \dot{\Phi} + \beta^2 \Phi = 0 \quad (2.86)$$

Donde α y β son dos parámetros positivos definidos por el usuario. La estabilización de Baumgarte es un método muy empleado en dinámica multicuerpo, ya que su implementación en cualquier formulación de las ecuaciones del movimiento, es muy sencilla. Desafortunadamente, los parámetros α y β son dependientes del problema, y no existe un procedimiento general para determinar su valor. Por lo tanto, el planteamiento tiende a ser inestable y no se recomienda para el uso en metodologías de propósito general, ya que las restricciones no se cumplen de manera exacta.

Nikravesh *et al.* [122] encontraron que una formulación de índice-1 junto con la estabilización de Baumgarte es significativamente más eficiente en términos computacionales que el planteamiento de partición de coordenadas. Según los autores la experiencia ha demostrado que para la mayoría de los problemas prácticos, los valores positivos menores de 5 para α y β son adecuados. Cuando $\alpha = \beta$, se logra una amortiguación crítica, que generalmente proporciona la reducción de error más rápida. Park y Haug [123] combinaron el método de Baumgarte con el método de partición de coordenadas generalizadas y mostraron que este enfoque híbrido supera a los dos métodos aplicados individualmente.

2.4.3.2 Técnicas de estabilización basadas en penalizadores

En esta formulación, las restricciones se imponen por medio de unos términos conocidos como penalizadores, los cuales se añaden al sistema y tienen la forma:

$$\frac{1}{2} \Phi^T P \Phi \quad (2.87)$$

Donde P es una matriz diagonal formada por unos términos p_i , que son precisamente los factores de penalización. Es muy común en la práctica usar el mismo penalizador para todas las restricciones de manera que el término penalizador se escribe $\frac{1}{2} p^2 \Phi^T \Phi$. la idea de esta formulación es escoger un

valor del factor de penalizador lo suficientemente grande para hace que la restricción sea cero. Tomando una variación del término de penalización, se obtiene $\delta q^T \Phi_q^T p^2 \Phi$, lo que indica que la fuerza generalizada equivalente aplicada externamente, $\Phi_q^T(p^2 \Phi)$, que en el límite se convierte en $\Phi_q^T \lambda$, donde λ son los multiplicadores de Lagrange. Evidentemente, en aplicaciones prácticas, se debe seleccionar un valor finito del factor de penalización para evitar un mal condicionamiento numérico y, por tanto, las restricciones nunca se implementan exactamente, siendo $\lambda = p^2 \Phi$ aproximadamente los multiplicadores de Lagrange.

2.4.3.2.1 Técnicas de estabilización modulada

Park y Chiou [124], presentaron una técnica de estabilización basada en la formulación con penalizadores. Los multiplicadores de Lagrange asociados a restricciones holónomas se escriben:

$$\lambda = \frac{\Phi(\mathbf{q}, t)}{\varepsilon} \quad (2.88)$$

Donde ε es $1/p^2$, la derivada respecto al tiempo de esta expresión:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\Phi_q^T \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.89)$$

Esta expresión junto con (2.67) forman un conjunto acoplado de ODEs. Para restricciones no holónomas, se puede seguir un procedimiento similar. Si los multiplicadores de Lagrange se escriben como $\lambda = \bar{\lambda} \exp(\sigma t)$, la parte homogénea de estas ecuaciones se convierte en $(\sigma + \Phi_q M^{-1} \Phi_q^T / \varepsilon) \bar{\lambda} = 0$. Esto implica que las tasas de caída de la restricción, σ_i , son los valores propios de la matriz $\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T / \varepsilon$, en otras palabras, las tasas de decaimiento son una función de las características físicas del sistema, en contraste con el método de Baumgarte que depende de los coeficientes abstractos no relacionados con las propiedades del sistema.

Se ha realizado una única derivada de las restricciones y, por lo tanto, este planteamiento será menos sensible al fenómeno de la deriva que los métodos que requieren dos derivadas del tiempo. Además, depende de un solo coeficiente, el factor de penalización. Ejemplos tratados por Park y Chiou [124], mostraron una mejora en el cumplimiento de los invariantes a nivel de desplazamiento en comparación con los resultados del método de Baumgarte. Esta técnica de estabilización es más robusta que Baumgarte, ya que se puede

adaptar a matrices de restricción de rango deficiente, mientras que la técnica de Baumgarte no puede.

2.4.3.2 Formulación de Lagrange aumentada

La formulación de Lagrange aumentada fue desarrollada por Bayo *et al.* [125], a partir del problema definido mediante penalizadores. Si se toma la restricción holónoma k^{th} , al sistema se le añaden los siguientes términos: el término del penalizador, $\frac{1}{2}\alpha_k\omega_k\Phi_k^2$, el término correspondiente con la fuerza de disipación de Rayleigh, $-2\alpha_k\omega_k\mu_k\dot{\Phi}_k$, y el término de la energía cinética, $\frac{1}{2}\alpha_k\dot{\Phi}_k^2$. Las ecuaciones del sistema ahora son ecuaciones de índice-1:

$$M\ddot{\mathbf{q}}+\Phi_q^T\alpha(\ddot{\Phi}+2\Omega\mu\dot{\Phi}+\Omega^2\Phi)=\mathbf{Q} \quad (2.90)$$

Donde α es la matriz diagonal formada por los términos α_k , Ω es la matriz diagonal formada por los términos ω_k , y μ es también una matriz diagonal formada por los μ_k . Esta formulación solo será precisa para grandes valores del factor de penalización. Los coeficientes ω_k y μ_k juegan un papel estabilizador similar a los correspondientes en la estabilización de Baumgarte. En la formulación de Lagrange aumentada, se introduce un conjunto de multiplicadores de Lagrange junto con los penalizadores:

$$M\ddot{\mathbf{q}}+\Phi_q^T\alpha(\ddot{\Phi}+2\Omega\mu\dot{\Phi}+\Omega^2\Phi)=\mathbf{Q}-\Phi_q^T\lambda^* \quad (2.91)$$

Si se hubieran introducido solo los multiplicadores de Lagrange, las ecuaciones habrían sido $M\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{Q}-\Phi_q^T\lambda$, y por lo tanto, $\lambda=\lambda^*+\alpha(\ddot{\Phi}+2\Omega\mu\dot{\Phi}+\Omega^2\Phi)$. Debido a que los multiplicadores de Lagrange son suficientes en sí mismos para imponer las restricciones, ya no se requiere que el coeficiente de penalización sea grande. La formulación, sin embargo, ahora implica m incógnitas adicionales. En el planteamiento propuesto, los multiplicadores de Lagrange, λ^* , no se tratan como incógnitas, más bien, se calculan a través de un proceso iterativo:

$$\lambda^{*(i+1)}=\lambda^{*(i)}+\alpha(\ddot{\Phi}+2\Omega\mu\dot{\Phi}+\Omega^2\Phi)^{(i+1)} \quad (2.92)$$

Combinando este proceso iterativo y la expresión (2.91):

$$(M+\Phi_q^T\alpha\Phi_q)\ddot{\mathbf{q}}^{(i+1)}=M\ddot{\mathbf{q}}^{(i)}-\Phi_q^T\alpha(\dot{\Phi}_q\dot{\mathbf{q}}+2\Omega\mu\dot{\Phi}+\Omega^2\Phi) \quad (2.93)$$

La formulación de Lagrange aumentada reduce el problema a un conjunto de EDOs, sin añadir incógnitas. La solución iterativa de Lagrange aumentado

resulta económica, ya que la solución de un sistema no lineal igualmente se debe resolver de forma iterativa. Aplicaciones numéricas muestran que la solución se puede obtener para un gran rango de valores del factor de penalización, $\alpha_k \in [10^3, 10^6]$.

Bayo *et al.* [126] más adelante elaboraron la formulación lagrangiana aumentada. El término de penalización se simplificó para mantener solo dos términos, dando como resultado $\lambda = \lambda^* + \alpha(\Phi + \mu \dot{\Phi})$. Observaron que la restricción a nivel de velocidad en el factor de penalización era necesaria para evitar la aparición de oscilaciones numéricas de alta frecuencia durante la simulación. Para integrar las ecuaciones de movimiento, la regla trapezoidal (“*Trapezoidal Rule*”, TR) se usó con aceleraciones o desplazamientos como variables primarias. Se mostró que estas últimas proporcionan rendimiento superior.

2.4.4 Técnicas de eliminación de la deriva en el cumplimiento de las restricciones

Al contrario que las técnicas de estabilización que sirven para paliar el incumplimiento de las restricciones, las técnicas de eliminación son métodos que dan como resultado el cumplimiento exacto de las restricciones, o al menos las satisfacen hasta lo que permite la precisión de la máquina.

2.4.4.1 Proyección geométrica de aproximación a la estabilización

Yoon *et al.* [127], desarrolló un enfoque de estabilización de la deriva en el cumplimiento de las ecuaciones de restricción. Debido a las aproximaciones numéricas, tanto las restricciones holónomas como las no holónomas no se cumplirán exactamente. El planeamiento, por tanto, consiste en corregir las coordenadas y velocidades generalizadas:

$$\mathbf{q}_n = \bar{\mathbf{q}}_n + \hat{\mathbf{q}}_n \quad (2.94)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_n + \dot{\hat{\mathbf{q}}}_n \quad (2.95)$$

Siendo $\bar{\mathbf{q}}_n$ y $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_n$ las coordenadas y velocidades generalizadas precedidas por el método de integración para el final del paso de cálculo n y, $\hat{\mathbf{q}}_n$ y $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_n$ las correcciones de las coordenadas y velocidades generalizadas, asumiendo que

su valor será pequeño. Para actualizar las coordenadas de desplazamiento y velocidad, se deben satisfacer las ecuaciones de restricción:

$$\Phi(\mathbf{q}_n, t_n) = 0 \quad (2.96)$$

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}_n, t_n) = 0 \quad (2.97)$$

Al comienzo, las correcciones se evalúan mediante la linealización de las restricciones holónomas para encontrar:

$$\Phi_q(\bar{\mathbf{q}}_n, t_n) \hat{\mathbf{q}}_n \approx -\Phi(\bar{\mathbf{q}}_n, t_n) \quad (2.98)$$

La solución se asume que estará en el subespacio definido por la matriz de restricciones:

$$\Phi_q^T \boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{q}}_n \quad (2.99)$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es un vector de valores desconocidos. Finalmente de la ecuación (2.98) y (2.99) se obtiene el valor de $\hat{\mathbf{q}}_n$:

$$\hat{\mathbf{q}}_n = -\Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \Phi(\bar{\mathbf{q}}_n, t_n) \quad (2.100)$$

Después, se evalúan las correcciones de las velocidades generalizadas linealizando las restricciones no holónomas. En esta segunda fase, las coordenadas generalizadas se mantienen constantes, ya que se han corregido en la primera etapa.

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_n = -\Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \dot{\Phi}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n, t_n) \quad (2.101)$$

Al contrario que el método de estabilización de Baumgarte, este procedimiento no modifica las ecuaciones del movimiento. El planteamiento es de naturaleza geométrica, la solución corregida es una proyección de la solución aproximada sobre las restricciones. Este procedimiento geométrico alivia la violación de las restricciones sin eliminarlas, la eliminación completa requeriría la solución iterativa de las ecuaciones de restricción.

Blajer [128,129], desarrolló un procedimiento similar para eliminar las restricciones basado en la interpretación geométrica de las restricciones dinámicas. Para ello, se aplica el siguiente esquema de corrección a las coordenadas generalizadas:

$$\hat{\mathbf{q}}_n = -M^{-1} \Phi_q^T (\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^{-1} \Phi(\bar{\mathbf{q}}_n, t_n) \quad (2.102)$$

Y a las velocidades generalizadas:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_n = -M^{-1} \Phi_q^T (\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)^{-1} \dot{\Phi}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n t_n) \quad (2.103)$$

Las correcciones de Blajer, ecuaciones (2.102) y (2.103), son físicamente más consistentes que las ecuaciones de Yoon, ecuaciones (2.100) y (2.101). Cuando las coordenadas generalizadas contienen términos de distintas unidades, como desplazamientos y rotaciones, en la matriz $(\Phi_q \Phi_q^T)$ todos los términos tienen el mismo peso, mientras que en $(\Phi_q M^{-1} \Phi_q^T)$ cada término viene asociado con su respectivo valor de inercia. En aplicaciones numéricas, las correcciones de posición, la ecuación (2.102), se usa primero de forma iterativa hasta que se haya eliminado completamente la violación de las restricciones.

Terze et al. [130], formuló un método para la eliminación de las restricciones empleando el enfoque del subespacio nulo. Usando el criterio de proyección definido por Blajer [109], identificaron un conjunto de variables independientes. El incumplimiento de las restricciones era eliminado iterativamente ajustando las variables dependientes para satisfacer las restricciones a nivel de desplazamientos. En un segundo paso, la violación de las restricciones de velocidad se eliminaban empleando las ecuaciones de restricción a nivel de velocidad. Durante los dos pasos, los desplazamientos y velocidades independientes se mantienen constantes.

2.4.4.2 Formulación de la proyección ortogonal de la masa

Bayo y Avello [131], propusieron una formulación lagrangiana aumentada basada en las ecuaciones canónicas de Hamilton. Comparado con la formulación basada en el índice-1, presentada anteriormente por Bayo *et al.* [125], la nueva formulación muestra una mejor precisión y robustez ante la presencia de configuraciones singulares. El rendimiento mejorado fue acreditado al hecho de que solo se requiere una única diferenciación de las restricciones holónomas en las formulaciones canónicas, en lugar de la doble diferenciación asociada a las formulaciones de índice-1.

Mientras la formulación lagrangiana satisface las restricciones ponderadas de la ecuación (2.90), hasta la precisión de la máquina, las restricciones individuales de posición, velocidad y aceleración no se tienen por qué cumplir necesariamente con el mismo nivel de precisión. Para mejorar esta situación, Bayo y Ledesma combinaron la formulación lagrangiana con la técnica de

proyección ortogonal de la masa. Para imponer las restricciones a nivel de posición, propusieron minimizar la función $V=1/2(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*)M(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*)$ sujeto a las restricciones $\Phi(\mathbf{q},t)=0$, donde \mathbf{q}^* es la solución obtenida al final del paso de integración usando la formulación de Lagrange. Este problema de minimización se resuelve transformando V en la siguiente expresión:

$$V^* = \frac{1}{2}(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*)M(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*) + \frac{1}{2}\Phi^T \alpha \Phi + \Phi^T \lambda \quad (2.104)$$

Una simple manipulación algebraica conduce al siguiente esquema iterativo para imponer las restricciones a nivel de posición:

$$\left(M + \Phi_q^T \alpha \Phi_q\right) \Delta^{(i+1)} = -M(\mathbf{q}^{(i)} - \mathbf{q}^*) - \Phi_q^T \lambda^{(i)} \quad (2.105)$$

Donde $\Lambda^{(i+1)} = \mathbf{q}^{(i+1)} - \mathbf{q}^{(i)}$ y $\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \alpha \Phi^{(i+1)}$. Desde el punto de vista computacional, este procedimiento iterativo no resulta muy costoso, ya que el sistema matricial $(M + \Phi_q^T \alpha \Phi_q)$, es idéntico al de la ecuación (2.93). Por lo tanto, esta matriz factoriza solo una vez y el coste computacional adicional consiste en la evaluación de la parte derecha de la ecuación (2.105), seguido de reducciones y sustituciones. Esto contrasta con el planteamiento presentado en la sección 2.4.4.1 que implica mayor esfuerzo computacional. Las restricciones a nivel de velocidad y aceleración se pueden tratar de manera similar, resultando un sistema idéntico al de (2.105).

Bayo y Ledesma [132], ilustraron este enfoque con diferentes ejemplos numéricos. La aplicación de la proyección ortogonal de la matriz de masas en cada paso de cálculo elimina la violación de las restricciones hasta la precisión que permite la máquina e incrementa la precisión de la simulación.

2.4.4.2.1 Comparación entre diferentes estudios

Para sistemas holónomos, Schiehlen [133], deriva las DAE y las EDO que gobiernan las ecuaciones de Boltzmann-Hamel, así como las ecuaciones de movimiento basadas en un enfoque recursivo. El enfoque recursivo puede resultar mucho más competitivo que la formulación ODE, aunque para sistemas con pocos grados de libertad, esta última sigue siendo competitiva, ya que la primera es bastante compleja. En general, los enfoques recursivos requieren operaciones $O(n)$, a diferencia de las formulaciones ODE que pueden necesitar hasta $O(n^3)$ operaciones aritméticas. Un estudio comparativo mostró que las formulaciones ODE son más eficientes que su

equivalente DAE, aunque esta conclusión se basó en ejemplos de sistemas multicuerpo muy simples y rígidos que incluían muy pocos grados de libertad.

Cuadrado *et al.* [20], compara cuatro métodos empleados en la dinámica multicuerpo con restricciones. Estos métodos son, las formulaciones aumentadas de Lagrange de índice-1 e índice-3 con proyecciones, una formulación “*state-space*” modificada y una formulación totalmente recursiva. Se llevaron a cabo una serie de modificaciones sobre la clásica formulación “*state-space*” para mejorar su comportamiento en presencia de sistemas rígidos. Las formulaciones aumentadas de Lagrange de índice-1 e índice-3 usan coordenadas naturales o coordenadas Cartersianas, como se define en [6]. Estas coordenadas tienen la ventaja de conducir a matrices de masas constantes.

Se resuelven una serie de problemas de sólidos rígidos con dichas formulaciones para comparar su comportamiento y ninguna de ellas resulta completamente satisfactoria. La formulación de índice-3 con proyecciones falla en la convergencia cuando se usan incrementos de tiempo menores de 10^{-5} segundos, mientras que para incrementos mayores que 10^{-2} , la formulación de índice-1 tampoco converge. Las formulaciones “*state-space*” y la totalmente recursiva resultan poco robustas, ya que fallan a la hora de gestionar configuraciones singulares. Además, la formulación totalmente recursiva tiene un comportamiento muy pobre en presencia de sistemas rígidos o sistemas que contienen restricciones redundantes. De todos los métodos examinados, la formulación de índice-3 con proyecciones se mostró como la más eficiente, mientras que la de índice-1 con proyecciones la más robusta. Los autores sugieren que una combinación de ambos métodos sería una buena herramienta para solucionar problemas dinámicos multicuerpo restringidos formados por sólidos rígidos.

2.4.5 Técnicas basadas en elementos finitos

A pesar de que en este trabajo se emplean únicamente sólidos rígidos, existe un lógico interés en problema formados por cuerpos elásticos, por lo que resulta interesante incluir este apartado en el que se resumen algunas técnicas de este campo. Si se desea obtener más información se puede encontrar en Shabana [134], Bauchau [80] o Wasfy y Noor [135].

El modelado de sistemas flexibles no lineales es uno de los temas más complejos en la dinámica multicuerpo. Tradicionalmente, se han llevado a

cabo usando planteamientos basados en sistemas de referencia flotante. El campo de desplazamientos de un sólido flexible se descompone en dos partes: la correspondiente a los desplazamientos de sólido rígido y los desplazamientos pertenecientes al campo elástico. Los movimientos de sólido rígido se caracterizan por grandes desplazamientos y rotaciones respecto a un sistema de referencia, el cual puede estar rígidamente conectado a un punto del sólido flexible o en movimiento respecto a éste, de aquí el nombre de sistema de referencia flotante. Por el contrario, los desplazamientos del campo elástico, respecto al sistema flotante, se asumen pequeños, por lo que se suelen emplear técnicas de superposición modal.

2.4.5.1 Sistema de referencia flotante

Como se ha comentado el campo de desplazamientos se puede dividir en dos partes: los desplazamientos de sólido rígido representados por el movimiento del sistema de referencia flotante más una superposición del campo de desplazamientos elásticos. Esta descomposición permite realizar algunas simplificaciones: aunque el movimiento total es siempre finito, los desplazamientos elásticos se puede asumir que dan lugar a deformaciones infinitesimales. Obviamente, esto no sucede en todos los casos.

Aunque el concepto parece intuitivo, la implementación del procedimiento computacional debe tener en cuenta algunas cuestiones. La primera es que la precisión del análisis depende de la selección de los modos. La segunda es que el sistema de referencia flotante seleccionado, bien puede estar conectado a un punto del cuerpo elástico o moverse respecto a él. La tercera es que los elementos definidos con una base modal se deben acoplar fácilmente con otros componentes del sistema modelados con las formulaciones de la dinámica multicuerpo. La cuarta que en ausencia de deformaciones elásticas, la formulación debe recuperar exactamente las ecuaciones de sólido rígido. Finalmente, la formulación tiene que ser independiente del paquete de análisis de elementos finitos empleado.

2.4.5.2 Algoritmos de incremento de tiempo

Se ha dedicado un gran esfuerzo al desarrollo de técnicas de integración adecuadas a sistemas de elementos finitos con grandes dimensiones. Cardona [136] demostró que el uso de la regla trapezoidal es incondicionalmente inestable para sistemas lineales, sin embargo, algoritmos disipativos como el

método HHT tienen un comportamiento estable. Farhat mostró como tanto el método HHT como el método α -generalizado logran la estabilidad para un tipo de formulación de restricciones híbridas. En estos planteamientos la estabilidad está asociada a la disipación de energía inherente al algoritmo y no existe ninguna garantía de que en sistemas no lineales se comporten de manera estable.

Para evitar este problema, se han desarrollado planteamientos para conseguir una estabilidad incondicional en sistemas no lineales. Estos esquemas afirman que existe una conservación de la energía mecánica total del sistema en un incremento de tiempo. Se trata de una consecuencia directa de la discretización de las fuerzas de inercia y elásticas que actúan en el sistema. En vista de la naturaleza definida positiva de la energía mecánica del sistema, esta ley de conservación de la energía discreta garantiza la estabilidad para problema no lineales.

Sin embargo, la estabilidad incondicional es sólo el primer paso y los planteamientos no se adaptan bien a los problemas con un gran número de elementos debido a las altas frecuencias de oscilación que pueden conducir a respuestas incorrectas como observó Bauchau [137,138]. Por lo tanto, para evitar que se produzca una irreal transferencia de energía entre los modos y aportar robustez al método parece indispensable que el integrador presente una disipación numérica de altas frecuencias.

2.4.5.3 Cumplimiento de las restricciones

Según Bauchau [137,139], el trabajo realizado por las fuerzas de enlace se debe eliminar durante la implantación del algoritmo siendo el trabajo de las fuerzas de enlace:

$$W_{ent} = \int F_{ent} \dot{q} dt = \int \lambda^T \Phi_q \dot{q} dt = \int \lambda^T \dot{\Phi} dt \quad (2.106)$$

Es evidente que la cancelación del trabajo de las fuerzas de enlace está relacionada con la supresión de la derivada de las restricciones. Por tanto, es importante imponer las restricciones tanto a desplazamientos como a velocidades. Una solución aproximada de las ecuaciones del movimiento no implica necesariamente la anulación del trabajo de las fuerzas de enlace lo que supone que es una posible fuente de desestabilización.

González [140], formula un esquema de integración para solucionar las ecuaciones de Hamilton de un sistema DAE con restricciones holónomas. El

planteamiento propuesto satisface las restricciones y conduce a la conservación del Lagrangiano pero no cumple estrictamente las restricciones de velocidad.

El hecho de implementar un algoritmo que combine la conservación de la energía y la supresión del trabajo de las fuerzas de enlace conlleva la estabilidad numérica en la integración no lineal de sólidos flexibles en sistemas multicuerpo, y el cumplimiento de las restricciones a nivel de desplazamientos y velocidades. Un aspecto fundamental para alcanzar estas características es que la discretización de las fuerzas de inercia, elástica y de restricción para cada tipo de elemento debe realizarse con maestría.

2.4.5.4 Enfoque discreto del subespacio nulo

Leyendecker y Betsch [141], han propuesto un método de integración de sistemas dinámicos con restricciones basados en la formulación de Maggi. En este planteamiento el sistema DAE de orden 3 es primero discretizado mediante la conservación de la energía y el momento basado en el algoritmo de González [140] y de Betsch y Steimann [142]. A continuación, los multiplicadores de Lagrange se eliminan usando el subespacio nulo. El subespacio nulo, se calcula para cada elemento del sistema independientemente, y por tanto, se puede emplear junto con cualquiera de los métodos que forman parte del marco de referencia de los métodos cimentados en elementos finitos sin perjudicar los atributos del sistema.

2.4.5.5 Escalado de la ecuaciones de equilibrio

Petzold [143] demuestra que para sistemas DAE de orden 3 con tamaños de paso reducidos se tiene un mal condicionamiento si se resuelven mediante métodos BDF (“*Backward Difference Formulas*”, BDF), produciéndose errores en la posición, la velocidad y en el campo de los multiplicadores. En este sentido, análisis realizados por Arnold [144] indican que ciertos errores e infracciones de las restricciones crecen más rápidamente con la reducción del incremento de tiempo.

Para solucionar este inconveniente, Petzold [143] presenta una transformación escalar del sistema DAE que mejora en orden 1 el error para el campo de soluciones. A pesar de que se reduce la sensibilidad a las perturbaciones, en la práctica se siguen observando problemas numéricos. El escalado consiste en dividir las restricciones por el incremento de tiempo

mientras que las ecuaciones dinámicas de equilibrio se multiplican por la misma cantidad. Bottasso [145] propone además dividir los multiplicadores de Lagrange por el cuadrado del intervalo de tiempo y multiplicar las velocidades por el paso de tiempo. La combinación de ambas técnicas de preconditionamiento proporcionan una propagación del error y un condicionamiento de orden 0, por ejemplo, el comportamiento de la solución numérica del sistema DAE es idéntica a la de un sistema ODE. El escalado se debe usar junto con otras técnicas para encontrar la solución a sistemas DAE, pero tiene la ventaja de una fácil implementación y además no requiere reformular las ecuaciones del movimiento ni introduce ninguna variable al sistema.

2.5 Integración numérica

Se ha visto como la modelización matemática de un sistema mecánico real se plasma, tras aplicar las leyes de la dinámica, en un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas. Este sistema se puede modificar para transformarlo en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos por cualquiera de las técnicas existentes.

La solución analítica de un sistema EDO es una fórmula de forma cerrada o simbólica, habitualmente en términos de funciones elementales, tales como: polinomios, exponenciales, logarítmicas o trigonométricas o bien mediante series infinitas, que permiten calcular el valor de la función solución para cualquier valor de la variable independiente (tiempo). Sin embargo, el número y la complejidad de las ecuaciones resultantes de un sistema multicuerpo requiere la aplicación de métodos numéricos. La solución numérica de una ecuación diferencial es una tabla de valores aproximados de las funciones solución en un conjunto discreto de puntos de la variable tiempo.

Los métodos numéricos son una materia muy conocida y de gran aplicación en programas CAE. En consecuencia, existe gran variedad de procedimientos para la integración numérica no sólo de sistemas EDO sino también de DAE donde las propiedades más determinantes a la hora de escoger el integrador adecuado son la estabilidad y la precisión. Se llama estabilidad de un integrador a la manera en que los errores de entrada se propagan a través del algoritmo. Por otra parte la precisión o el orden de precisión describe la evolución del error cuando el incremento de tiempo se hace más pequeño.

Los métodos numéricos se puede clasificar atendiendo a diferentes aspectos dependiendo de si son implícitos o explícitos, unipaso o multipaso, ...etc. En este punto se van a incluir los métodos de integración numérica más destacados para la aplicación en análisis MBS que van a dividir en dos grandes grupos los métodos para sistemas EDO y para sistemas DAE. Se puede consultar más información en las referencias [146–149].

2.5.1 Integración de sistemas EDO

Cualquier ecuación o sistema de ecuaciones de orden superior, sea lineal o no lineal, puede reducirse a un sistema de mayor dimensión y orden 1, y resolverse con las herramientas numéricas optimizadas existentes para ello. De hecho, la mayoría de los métodos generales y del software existente, tanto público como comercial, resuelven sistemas EDO de primer orden.

Por lo tanto, siendo $\mathbf{y}(t)=\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ el vector columna formado por las n funciones incógnitas de la variable independiente t , el problema de valor inicial de primer orden más general está definido por el sistema EDO:

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=f(\mathbf{y}(t), t) \quad (2.107)$$

junto con las condiciones iniciales (CI):

$$\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0 \quad (2.108)$$

donde \mathbf{y}_0 es el vector de los n valores numéricos dados.

La técnica de aproximación más elemental para resolver el problema de valor inicial es el método de Euler.

2.5.1.1 Método de Euler

Se basa en una aproximación por series de Taylor escogiendo únicamente los términos lineales y despreciando el resto de orden 2. Es un método explícito muy sencillo que rara vez se emplea en la práctica debido a que el orden de precisión del método es uno por lo que requiere incrementos de tiempo demasiado pequeños. La fórmula de avance sigue el siguiente esquema:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t)=\mathbf{y}(t)+\dot{\mathbf{y}}(t)\Delta t \quad (2.109)$$

La condición de estabilidad absoluta viene determinada además de por el propio EDO, por el incremento de tiempo por lo que es un método condicionalmente estable. A pesar de que prácticamente no se emplea es sencillo mejorarlo como se ve en los siguientes puntos.

2.5.1.1.1 Método de Euler regresivo

Es el método implícito más sencillo, cuya fórmula de avance es:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t)=\mathbf{y}(t)+\dot{\mathbf{y}}(t+\Delta t)\Delta t \quad (2.110)$$

En caso general, será necesario resolver la ecuación no lineal resultante por un método iterativo como el de punto fijo o el de Newton-Raphson. El método de Euler regresivo es incondicionalmente estable o A-estable, es decir, que el intervalo de estabilidad absoluta es $(-\infty, 0)$. Se demuestra que la región de estabilidad es todo el semiplano complejo izquierdo. La gran virtud de un método incondicionalmente estable es que la única limitación al tamaño de paso viene dada por la precisión deseada, no por la estabilidad. Sin embargo, su orden de precisión es uno lo que afecta a su utilidad de forma importante.

2.5.1.1.2 Método de Euler mejorado

A este método también se le conoce como método de Heun y forma parte de la familia de los métodos Runge-Kutta que se detallarán más adelante. Euler mejorado se trata de un método de orden dos de carácter explícito que tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t)=\mathbf{y}(t)+\frac{\Delta t}{2}(\dot{\mathbf{y}}_1+\dot{\mathbf{y}}_2) \quad (2.111)$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{y}}_1=f(\mathbf{y}(t),t) \quad (2.112)$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2=f(\mathbf{y}(t)+\dot{\mathbf{y}}(t)\Delta t,t+\Delta t) \quad (2.113)$$

Se trata de un integrador explícito de paso simple. El orden de precisión es de dos el cual coincide con las veces que hay que evaluar la función para avanzar un paso de tiempo. Al ser explícito no es necesario iterar, por el contrario es condicionalmente estable por lo que puede dar problemas en sistemas con rigideces elevadas. Su región de estabilidad absoluta es $(-2,0)$

igual que el método de Euler, como se puede comprobar por el método de la ecuación de prueba.

2.5.1.2 Método trapezoidal

Es una combinación del método de Euler y el método de Euler regresivo para obtener un método incondicionalmente estable pero de mayor orden de precisión. En concreto, tomando como pendiente para cada paso la media de las de ambos métodos se obtiene este método implícito. El esquema tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t)=\mathbf{y}(t)+\frac{\dot{\mathbf{y}}(t)+\dot{\mathbf{y}}(t+\Delta t)}{2}\Delta t \quad (2.114)$$

Se trata de un método incondicionalmente estable y el orden de precisión dos. Según Dahlquist [150], es el método de segundo orden y A-estable más preciso que se puede conseguir. Por otra parte, no todos los métodos implícitos son incondicionalmente estables. Generalmente tienen regiones de estabilidad más amplias que los explícitos, pero el tamaño de paso permitido no es siempre ilimitado.

2.5.1.3 Método de series de Taylor de orden superior

Algunos métodos numéricos son muy poco fiables para sistemas de ecuaciones rígidos, ya que la estabilidad está condicionada por las componentes de la solución de variación rápida, mientras que la precisión depende de las componentes de variación lenta de manera que el tamaño de paso puede quedar severamente penalizado.

En sistemas EDO es posible que se produzca este contraste entre partes lentas y partes rápidas lo que invita a deshacerse de las componentes rápidas no significativas en la solución por medio de técnicas de truncamiento modal. Otra alternativa es utilizar métodos incondicionalmente estables, sin embargo estos métodos son de mayor coste y limitados a un orden de precisión 2. Por ello, surgen los métodos de orden superior a uno.

Partiendo del desarrollo en series de Taylor, al igual que el método de Euler, se puede generar un método de orden superior. Continuando con la serie se puede escribir:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t)=\mathbf{y}(t)+\dot{\mathbf{y}}(t)\Delta t+\frac{\ddot{\mathbf{y}}(t)}{2}\Delta t^2 \quad (2.115)$$

Se dispone de $\dot{\mathbf{y}}(t)$ pero no de la segunda derivada. Esta última puede obtenerse de la primera mediante diferenciación, utilizando la regla de la cadena:

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = f_t(\mathbf{y}(t), t) + f_y(\mathbf{y}(t), t)\dot{\mathbf{y}}(t) \quad (2.116)$$

Sin embargo, mientras el orden de derivación va creciendo, las expresiones de la derivadas rápidamente se complican, por lo que los métodos de Taylor de orden superior no se utilizan mucho en la práctica. Otra opción es aproximar numéricamente las derivadas de orden superior, entonces se obtienen los métodos de Runge-Kutta que se describen a continuación.

2.5.1.4 Métodos de Runge-Kutta

Este método consiste en evitar el cálculo simbólico de las derivadas superiores, pero aproximando su efecto mediante la evaluación de la función f varias veces entre t y $t+\Delta t$. Para una descripción más detallada de este tipo de método se puede consultar Carnahan [151] o Conte [152].

El más simple de todos de los métodos Runge es el de orden dos que como se ha mencionado se conoce como Euler mejorado. Este método puede derivarse del método trapezoidal, basta con sustituir el término $\dot{\mathbf{y}}(t+\Delta t)$, causante del carácter implícito por el valor aproximado mediante el método explícito de Euler $f(\mathbf{y}(t) + \dot{\mathbf{y}}(t)\Delta t, t + \Delta t)$.

Uno de los más empleados es el método de Runge-Kutta de orden 4 que requiere evaluar la función cuatro veces por paso de cálculo. El algoritmo se escribe como:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t) = \mathbf{y}(t) + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (2.117)$$

$$\mathbf{k}_1 = f(\mathbf{y}(t), t)\Delta t \quad (2.118)$$

$$\mathbf{k}_2 = f\left(\mathbf{y}(t) + \frac{\mathbf{k}_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \quad (2.119)$$

$$\mathbf{k}_3 = f\left(\mathbf{y}(t) + \frac{\mathbf{k}_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t \quad (2.120)$$

$$\mathbf{k}_4 = f(\mathbf{y}(t) + \mathbf{k}_3, t + \Delta t)\Delta t \quad (2.121)$$

En este caso se trata de un método explícito ya que todas las \mathbf{k}_i dependen únicamente de valores previamente calculados. De otra manera se estaría hablando de un método implícito y debería resolverse de forma iterativa. La fórmula general del método Runge-Kutta tanto para explícito como para implícito tiene el siguiente aspecto:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t)=\mathbf{y}(t)+\Delta t \sum_{i=1}^r b_i \mathbf{k}_i \quad (2.122)$$

$$\mathbf{k}_i=f\left(\mathbf{y}(t)+\Delta t \sum_{j=1}^r a_{ij} \mathbf{k}_j, t+c_i \Delta t\right) \quad (2.123)$$

Donde r es el número de evaluaciones de la función.

Los Runge-Kutta explícitos son fáciles de implementar, debido a que sólo requieren la evaluación de las funciones y a que no necesitan ningún otro algoritmo para iniciar el proceso de integración ya que son métodos unipaso. Por el contrario, son sólo condicionalmente estables y además, necesitan varias evaluaciones de la función por paso de cálculo. Esto aumenta el coste computacional sobre todo en sistemas de ecuaciones no lineales de grandes dimensiones, como los que aparecen en los MBS.

Los métodos Runge-Kutta implícitos son más estables y más precisos que los explícitos. Sin embargo, son mucho más complicados de implementar y requieren un alto precio computacional. Una desventaja de ambos métodos es la dificultad que implica evaluar los límites en propagación del error o del error acumulado.

2.5.1.5 Métodos multipaso explícitos e implícitos

Los métodos descritos hasta ahora se valían de la información de un paso de tiempo para avanzar al siguiente. Cuando se utiliza información de más de uno de los pasos anteriores calculados para estimar la solución en el paso posterior se llaman métodos multipaso o métodos con memoria. Las fórmulas de avance se deducen a partir de la siguiente relación exacta:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t+\Delta t) &= \mathbf{y}(t-n \Delta t) + \int_{t-n \Delta t}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{y}}(t) dt = \\ &= \mathbf{y}(t-n \Delta t) + \int_{t-n \Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) dt \end{aligned} \quad (2.124)$$

De donde se extrae la relación aproximada:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t)=\mathbf{y}(t-n\Delta t)+\int_{t-n\Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{p}(t)dt \quad (2.125)$$

Siendo $\mathbf{p}(t)$ un polinomio que aproxima a $\dot{\mathbf{y}}(t)$ interpolando a f en n puntos. Si se trata de los n últimos puntos calculados se obtiene un método explícito de orden de precisión n conocido como Adams-Bashforth. Mientras que si se trata de los $n-1$ puntos más el siguiente, se obtiene un método implícito de orden n conocido como Adams-Moulton. La forma general de los métodos multipaso viene dada por la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{y}(t+(1-i)\Delta t) + \sum_{i=0}^k \Delta t \beta_i \mathbf{f}(\mathbf{y}(t+(1-i)\Delta t), t+(1-i)\Delta t) \quad (2.126)$$

Los parámetros α_i y β_i definen el tipo de método ya sea explícito o implícito. Un apunte a destacar es que los métodos resultantes de $\beta_i=0$ para todo $i \geq 1$ se denominan métodos de diferencias regresivas (“*Backward-Difference Method*”, BDM).

Cuantos más términos se involucren en la ecuación (2.126) mejor será la aproximación y se tendrá más precisión. Sin embargo, también se tendrá que guardar más información y se requerirá mayor espacio de almacenamiento. Esto puede ser un gran impedimento en sistemas multicuerpo. Las propiedades generales de los métodos Adams se resumen a continuación.

- No pueden comenzar automáticamente, porque precisan de varios valores previos de la solución. Por lo tanto, debe emplearse un procedimiento especial de inicio, como por ejemplo un método unipaso, hasta que se haya generado el número suficiente de valores.
- El cambio de tamaño de paso es complicado, ya que las fórmulas de interpolación están basadas en intervalos igualmente espaciados entre puntos consecutivos.
- Al estar basados en interpolación, pueden proporcionar de manera eficiente valores de la solución en puntos distintos de la integración. Pero esto no significa cambiar el tamaño de paso.
- Es posible encontrar un buen estimador del error local a partir de la diferencia entre el valor predicho y el corregido.

- Los métodos implícitos, como regla general, disponen de una región de estabilidad mayor que los explícitos, pero deben iterar hasta la convergencia para sacar provecho de este beneficio en forma completa.

Los métodos implícitos multipaso son normalmente más precisos y estables que los métodos explícitos pero requieren la solución iterativa del sistema de ecuaciones y una predicción inicial que puede ser suministrada por un método explícito. Entonces la pareja método explícito-implícito conforman una nueva clase de métodos que se conocen como predictores-correctores.

2.5.1.5.1 Métodos predictores-correctores

Una posibilidad es emplear el método corrector, por ejemplo mediante iteración de punto fijo, hasta converger en la tolerancia especificada pero también es posible fijar el número de iteraciones de la corrección con objeto de reducir el coste computacional. Esta modalidad se conoce como método $PC(CE)^n$ donde n indica el número de iteraciones de corrección efectuadas o la tolerancia entre correcciones sucesivas.

Una de las parejas predictor-corrector más conocidas entre los métodos multipaso es el método predictor-corrector de Adams. En este caso se predice con la fórmula explícita de Adams-Bashforth y se corrige iterando sobre la fórmula implícita de Adams-Moulton.

Se puede demostrar, según Carnahan [151], que el incremento de tiempo requerido para que esta iteración converja debe satisfacer la siguiente condición:

$$\Delta t < \frac{C}{\partial f / \partial \mathbf{y}} \quad (2.127)$$

Donde C es una constante que depende del tipo de método explícito usado. Se ve como el paso no sólo está limitado por criterios de estabilidad sino también por la convergencia del proceso de iteración. En este sentido es posible usar Newton-Raphson o cuasi Newton-Raphson para obtener la derivada de la función f respecto a \mathbf{y} de manera que la convergencia pasa a ser cuadrática.

Una ventaja de usar los algoritmos predictores-correctores es la posibilidad de encontrar un estimador del error en cada paso de cálculo. Esto se puede conseguir usando el error de truncamiento local de los métodos tanto predictor como corrector. Esta estimación del error permite la posibilidad de

ajustar el integrador con el incremento de tiempo. Si el error es más grande que una tolerancia fijada, es mejor reducir el paso que continuar con la iteración de punto fijo. Por otro lado, si el error es pequeño, se puede aumentar el incremento de tiempo para agilizar la simulación. La parte más exigente del proceso de integración es evaluar la función $f(\mathbf{y}(t), t)$ la cual requiere solución de las ecuaciones dinámicas que en caso de sistemas multicuerpo se componen de un gran número de ecuaciones no lineales.

2.5.1.6 Métodos de integración de sistemas EDO de orden 2

La mayor parte de los métodos de integración se basan en una hipótesis sobre la variación de la aceleración durante un paso Δt , a partir de la cual se obtienen la ecuación de la velocidad mediante integración, y seguidamente los desplazamientos correspondientes a la hipótesis de aceleración realizada.

Como se ha venido hablando durante este capítulo, los métodos explícitos plantean el equilibrio en el instante t , a partir de ahí se calcula la solución en $t+\Delta t$. Son más sencillos de implementar pero sólo son condicionalmente estables, por lo que hay que utilizar tamaños de paso más pequeños. Por el contrario, en los métodos implícitos el equilibrio se plantea en $t+\Delta t$ y son en su mayoría incondicionalmente estables en análisis lineal, con lo que el tamaño de paso se elige intentando lograr una buena precisión. Sin embargo, ahora el esfuerzo computacional en cada paso es mayor. En este punto se van a describir algunos métodos de ambos enfoques planteando la ecuación de equilibrio en la forma:

$$M \ddot{\mathbf{x}}(t) + C \dot{\mathbf{x}}(t) + K \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.128)$$

2.5.1.6.1 Método explícito de diferencias centrales (CD)

El método de las diferencias centrales (“*Central Difference*”, CD) de segundo orden es un método sencillo que presenta buenas características en cuanto a estabilidad y precisión. Parte de restar los respectivos desarrollos de Taylor en los instantes $t+\Delta t$ y $t-\Delta t$, truncados para el término de orden 2 con lo que se logra:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t-\Delta t) = 2\Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\mathbf{x}''(\xi)}{3!} \Delta t^3 \quad (2.129)$$

De donde se obtiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.130)$$

Sustituyendo la ecuación (2.130) en el desarrollo de Taylor para $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ o $\mathbf{x}(t-\Delta t)$ se puede despejar $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ obteniendo la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - 2\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (2.131)$$

Las ecuaciones (2.130) y (2.131) son las clásicas del método CD tal y como se pueden encontrar en cualquier referencia sobre el tema. Si se sustituyen en la ecuación de equilibrio:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \right) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \\ & = \mathbf{f}(t) + \left(\frac{C}{2\Delta t} - \frac{M}{\Delta t^2} \right) \mathbf{x}(t-\Delta t) + \left(2\frac{M}{\Delta t^2} - K \right) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.132)$$

la solución de (2.132) es el vector de desplazamientos en el instante $t+\Delta t$ a partir del cual, y del valor de los instantes previos se puede evaluar los vectores velocidad y aceleración mediante las relaciones (2.130) y (2.131).

El análisis de estabilidad se efectúa a través de von Neumann, planteando un error exponencial creciente o decreciente. En un sistema lineal se puede estudiar el error de forma independiente. Sin embargo, las ecuaciones de la dinámica son no lineales y no se sabe cómo puede afectar la no linealidad a la estabilidad, no sólo del método de diferencias centrales si no de cualquier método de integración. Dicho esto, aunque no se pueda hacer un cálculo exacto en condiciones no lineales, la estabilidad en condiciones lineales se acepta como aproximación:

$$\delta(t+\Delta t) + \varepsilon(t+\Delta t) = f(t) + u\delta + u\varepsilon(t) + v\delta(t-\Delta t) + v\varepsilon(t-\Delta t) \quad (2.133)$$

Para ver la evolución del error se considera la ecuación:

$$\varepsilon(t+\Delta t) = u\varepsilon(t) + v\varepsilon(t-\Delta t) \quad (2.134)$$

Si se asume una evolución exponencial del error la ecuación se puede escribir como:

$$E e^{a(t+\Delta t)} = u E e^{at} + v E e^{a(t-\Delta t)} \quad (2.135)$$

Lo que interesa es que el error no se amplifique por lo que debería cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{\varepsilon(t+\Delta t)}{\varepsilon(t)} = e^{a\Delta t} \leq 1 \quad (2.136)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable se logra:

$$\lambda^2 - u\lambda - v = 0 \quad (2.137)$$

A la ecuación (2.137) se le conoce como ecuación característica y para que se garantice la estabilidad las dos raíces deben ser menores o iguales a 1 en valor absoluto. Para analizar la estabilidad de un sistema matricial se realiza un paso a coordenadas modales y se analiza la ecuación más restrictiva. En coordenadas modales la ecuación resultante es:

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) + 2\omega\xi\dot{\mathbf{y}}(t) + \omega^2\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t) \quad (2.138)$$

A partir de la ecuación (2.138), se puede obtener los parámetros de estabilidad. Si se establece un esquema por diferencias centrales a la ecuación (2.138) el resultado es:

$$\mathbf{y}(t+\Delta t) = \frac{\Delta t^2}{1+\omega\xi\Delta t}\mathbf{g}(t) - \frac{\omega^2\Delta t^2-2}{1+\omega\xi\Delta t}\mathbf{y}(t) - \frac{1-\omega^2\xi\Delta t}{1+\omega\xi\Delta t}\mathbf{y}(t-\Delta t) \quad (2.139)$$

Volviendo a realizar un cambio de parámetro, $r = \Delta t^2 \omega^2$ y $s = \omega\xi\Delta t$:

$$u = \frac{r-2}{1+s} \quad (2.140)$$

$$v = \frac{s-1}{1+s} \quad (2.141)$$

Por lo tanto, las ecuaciones para el límite de estabilidad obtenidas son:

$$1+s-2+r-t+1=0 \quad (2.142)$$

$$1+s+2-r-t+1=0 \quad (2.143)$$

De donde sale:

$$r=0 \quad (2.144)$$

$$r=4 \quad (2.145)$$

La primera ecuación carece de sentido, sin embargo de la segunda se extrae:

$$\omega^2\Delta t^2=4 \quad (2.146)$$

Del análisis de estabilidad se concluye que para garantizar la estabilidad se debe cumplir:

$$\Delta t_{max} \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (2.147)$$

En la práctica se comprueba que el método CD es estable si el tamaño de paso es inferior a un cierto valor crítico Δt , que se obtiene a partir de la frecuencia más alta del sistema de n grados de libertad:

$$\Delta t_c = \frac{2}{\omega_n} \geq \Delta t \quad (2.148)$$

Puede encontrarse más información en las referencias [153,154].

2.5.1.6.2 Método implícito de Newmark

Es una generalización del método de la aceleración lineal. Newmark se basa en unas relaciones de ponderación entre los instantes t y $t+\Delta t$ para desplazamientos, velocidades y aceleraciones de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) = \dot{\mathbf{x}}(t) + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \gamma\ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)] \quad (2.149)$$

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)\ddot{\mathbf{x}}(t) + 2\beta\ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)] \quad (2.150)$$

Estos algoritmos se introducen directamente en las ecuaciones de equilibrio planteadas para el instante $t+\Delta t$. De aquí se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, las cuales pueden linealizarse o no dependiendo del tipo de problema, con $\ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)$ como incógnita. También es posible organizar las ecuaciones para obtener $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ como incógnita, dando lugar a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C + K \right) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \\ & \mathbf{f}(t) + M \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{x}(t) + \frac{1}{\gamma \Delta t} \dot{\mathbf{x}}(t) + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{x}}(t) \right) + \\ & + C \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{x}(t) + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{\mathbf{x}}(t) + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{\mathbf{x}}(t) \right) \end{aligned} \quad (2.151)$$

Triangularizando las matrices que premultiplican al término $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ la solución en cada paso para los desplazamientos únicamente requiere la formación de la parte derecha más una reducción hacia adelante y una

sustitución hacia atrás. Esta implementación es bastante más eficiente que el proceso de iteración de punto fijo el cual requeriría evaluar una función para cada iteración por paso de cálculo. Este planteamiento también puede aplicarse a problemas no lineales y resolver por el método de Newton-Raphson o cuasi Newton.

Las ecuaciones del movimiento en sistemas multicuerpo tienen la siguiente forma:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{c}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{f}(t) \quad (2.152)$$

Si se aplican los mismos conceptos a la ecuación (2.152), conduce a un sistema de ecuaciones con un nivel de no linealidad elevado. En consecuencia, las matrices tangentes o cuasi tangentes necesarias para resolver el problema por el método de Newton-Raphson resultan bastante complejas, por lo que se podría abandonar esta idea y usar algún algoritmo más simple y menos eficiente de tipo predictor-corrector con una iteración de punto fijo.

El algoritmo de Newmark más eficiente y A-estable se consigue definiendo lo parámetros con 0,25 para β y 0,5 para γ que coincide con la TR. Este algoritmo no atenúa ninguna frecuencia del sistema durante el proceso de integración. Para valores $\gamma > 0,25$, se preserva la estabilidad incondicional y además se introduce amortiguación artificial pero, por el contrario, el orden de precisión se reduce a 1. Para algunos problemas, el amortiguamiento artificial resulta beneficioso ya que el modelo matemático podría contener frecuencias adulteradas que necesiten ser atenuadas.

El método TR se comporta de manera estable en sistemas lineales, sin embargo, esto no es así para regímenes no lineales lo que supone otro motivo para considerar el amortiguamiento artificial como necesario. Como ejemplo de inestabilidad, Hughes [155] informó de un crecimiento patológico de la energía en problemas de dinámica estructural con materiales bilineales. Mientras que Cardona [136] y Bayo [126] también notaron inestabilidades en la integración con el TR en sistemas multicuerpo con restricciones.

2.5.1.6.3 Método implícito Hilber-Hughes-Taylor

Se ha visto como la familia de las fórmulas de integración de Newmark se basan en la determinación de dos parámetros β y γ . En este sentido, la única combinación de estos dos parámetros que conduce a una fórmula de integración de segundo orden es 0,25 para β y 0,5 para γ . Esta elección

coincide con el TR, el cual es de orden de precisión 2 e incondicionalmente estable. La desventaja es que no introduce ningún amortiguamiento numérico en la solución, lo que puede ocasionar problemas en sistemas con altas frecuencias de oscilación.

El método HHT [156], mantiene el orden de precisión 2 y la estabilidad incondicional pero además introduce un amortiguamiento variable que depende del valor del parámetro α . El método HHT o método- α usa las mismas expresiones de diferencias finitas que Newmark pero modificadas para obtener la siguiente forma:

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)+(1+\alpha)C\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)+(1+\alpha)K\mathbf{x}(t+\Delta t)=\mathbf{f}(\bar{t})+\alpha C\dot{\mathbf{x}}(t)+\alpha K\mathbf{x}(t) \quad (2.153)$$

Donde:

$$\bar{t}=t+(1+\alpha)\Delta t \quad (2.154)$$

Para $\alpha=0$ el método HHT se transforma a un método de Newmark. La elección del parámetro α se recomienda, atendiendo a criterios de estabilidad, que se ubique dentro del rango $[-1/3,0]$. Es posible reducir los tres parámetros de esta familia a solo un parámetro haciendo que:

$$\gamma=\frac{1-2\alpha}{2} \quad (2.155)$$

$$\beta=\frac{(1-\alpha)^2}{4} \quad (2.156)$$

Cuanto menor sea α mayor será el amortiguamiento. Puede verse una comparación de ambos métodos en trabajos como el de Hughes [17], Hilber [157].

2.5.1.6.4 Método implícito de Wilson- Θ

Se trata de un método de aceleración lineal presentado por Wilson [158], y supone que ésta varía linealmente entre t y $t+\theta\Delta t$, siendo θ un número mayor que la unidad y, generalmente comprendido entre 1 y 2 tomándose como valor recomendado 1,4 ya que para $\theta>1,37$ es incondicionalmente estable. En caso de que se elija la unidad, este método es equivalente al que se conoce simplemente como de aceleración lineal.

Los métodos de colocación fueron propuestos por Hilber [157] como una familia de métodos de 3 parámetros resultado de la combinación de la interpolación de Newmark con el método de Wilson- θ . De forma similar al método- α , el método de colocación permite introducir el amortiguamiento numérico de manera controlada. Una buena comparativa en cuanto a precisión y amortiguamiento de ambos métodos se incluye en Hughes [17] y Hilber [157]. Por otra parte, según Goudreau [159], este método tiene una tendencia a falsear la respuesta en el primer paso de integración lo que no ocurre ni en el método de Newmark ni en el método HHT.

2.5.2 Integración de sistemas DAE

Mientras que la teoría de existencia y unicidad se cumple en los sistemas EDO, no se cumple totalmente en sistemas DAE. La solución en este tipo de sistemas no siempre existe y cuando lo hace no tiene porque ser única. Los sistemas DAE no lineales se pueden clasificar en dos grupos. El primero son implícitos que adquieren la siguiente forma:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.157)$$

Con condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. En el segundo grupo están los semi-implícitos y son de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (2.158)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (2.159)$$

Y con condiciones iniciales $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ y $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$. Ésta es la manera más habitual en los sistemas multicuerpo.

La manera de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas es en esencia, buscando una aproximación de $\dot{\mathbf{x}}$ en las ecuaciones (2.157), (2.158) o (2.159) por fórmulas de diferencias finitas o mediante el método de Runge-Kutta implícito, y resolver el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales por algún proceso iterativo para encontrar una aproximación de \mathbf{x} . En general, el planteamiento mediante discretización directa para resolver el sistema DAE de orden 3 es menos preciso pero más rápido que los métodos de transformación a sistema EDO, sobre todo por el intenso coste computacional que acarrearán sistemas de grandes dimensiones con sólidos flexibles y en presencia de impactos.

En el contexto de los métodos de discretización directa, planteamientos basados en BDF han sido tradicionalmente los más empleados aunque también existen otros planteamientos como los cimentados en el método implícito de Runge-Kutta.

En los últimos tiempos, se han presentado trabajos en donde los métodos BDF se han sustituidos por otros tipos de integración. Gavrea [160], implementa el método de Newmark para obtener la solución del sistema DAE de orden 3 que surge de los modelos multicuerpo con sólido flexibles. Entre las ventajas que se logran están evitar tener que reducir el sistema a primer orden de integración y las buenas propiedades de estabilidad que ofrece el método de Newmark.

Posteriormente, Negrut [161], siguiendo la misma línea sustituye el método de Newmark por el método de HHT. De esta manera, consigue obtener un integrador de estabilidad incondicional manteniendo el orden de precisión 2 pero logrando introducir un amortiguamiento numérico. Así, es posible resolver problemas con altas frecuencias de oscilación pudiéndose eliminar aquellas altas oscilaciones parasitarias heredadas del proceso de discretización.

2.5.2.1 Solución por Diferencias Regresivas (BDF)

Consiste en aplicar directamente la fórmula de las diferencias regresivas al sistema de ecuaciones. Este planteamiento fue empleado en un programa comercial para la integración de las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico con restricciones, Chace [162]. Teniendo en cuenta que las expresiones del método BDF para sistemas de orden 1, son:

$$\dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) = \frac{1}{\Delta t \beta_0} (\mathbf{q}(t+\Delta t) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{x}(t-i\Delta t)) \quad (2.160)$$

$$\dot{\mathbf{s}}(t+\Delta t) = \frac{1}{\Delta t \beta_0} (\mathbf{s}(t+\Delta t) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{s}(t-i\Delta t)) \quad (2.161)$$

Siendo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{s}$$

Si se sustituyen en las ecuaciones del movimiento se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales algebraicas:

$$M \frac{1}{\Delta t \beta_0} (\mathbf{s}(t+\Delta t) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{s}(t-i\Delta t)) = \mathbf{Q}(t+\Delta t) - \Phi_q^T(t+\Delta t) \boldsymbol{\lambda}(t+\Delta t) \quad (2.162)$$

$$\mathbf{s}(t+\Delta t) = \frac{1}{\Delta t \beta_0} (\mathbf{q}(t+\Delta t) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{q}(t-i\Delta t)) \quad (2.163)$$

$$\Phi(t, \mathbf{q}(t+\Delta t)) = \mathbf{0} \quad (2.164)$$

El sistema de ecuaciones resultante puede ser resuelto por Newton-Raphson o bien si no se desea tanta precisión por el método de la secante o por iteraciones del punto fijo. Gear [163] demostró que cualquier DAE de orden 1, el paso- k BDF con incremento de paso constante es estable y converge en orden $O(\Delta t^k)$, siempre y cuando el valor inicial sea lo suficientemente preciso. En este camino, una extensión de este trabajo a paso variable también fue desarrollado posteriormente por Gear [111].

Sin embargo, la implementación de los algoritmos en métodos de resolución de propósito general no está libre de problemas numéricos. Se puede demostrar que para sistemas DAE de orden m , la matriz tangente o cuasi tangente usada en la iteración de Newton-Raphson tiene un condicionamiento numérico de orden $O(1/\Delta t^m)$. Por lo tanto, la implementación del método tiende a cometer errores de redondeo para tamaños pequeños de incremento de tiempo. Por otro lado, cuando aparecen inestabilidades producidas por un cambio repentino de las variables o de las restricciones se pueden generar discontinuidades en la respuesta. El método BDF multipaso intenta ajustar a través de un polinomio dicha discontinuidad con lo que el tamaño de paso se ve severamente reducido. Esto provoca un mal condicionamiento de la matriz en la iteración lo que repercute notablemente en la convergencia, según Steigerwald [164].

2.5.2.2 Solución por lo métodos de Runge-Kutta implícitos

Ofrecen importantes ventajas en comparación con BDF. Al ser un método unipaso no sufren discontinuidades y al ser *self-starting* solo requiere las condiciones iniciales para comenzar el proceso. Por el contrario, los métodos Runge-Kutta implícitos (*“Implicit Runge-Kutta”*, IRK) conducen a sistemas complejos y de grandes dimensiones compuestos por ecuaciones algebraicas no lineales.

El método consiste en sustituir las expresiones de IRK (2.123) en el sistema de ecuaciones. En caso de ecuaciones de tipo implícito se obtiene:

$$\mathbf{f}(t+c_i\Delta t, \mathbf{y}(t)+\Delta t \sum_{j=1}^r a_{ij}\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_i)=0 \quad I=1,2,\dots,r \quad (2.165)$$

El sistema resultante de ecuaciones es mas grande y enmarañado que el que surge de aplicar BDF, lo que supone que obtener la matriz tangente para el método de Newton-Raphson se convierta en una tarea demasiado complicada y disminuya el interés por profundizar en esta metodología.

PARTE II: METODOLOGÍA

3 Conceptos básicos previos

Para determinar el comportamiento de un mecanismo es necesario definir las magnitudes que intervienen en el proceso dinámico en función de las coordenadas del sistema. Estas magnitudes se emplean para formar las ecuaciones de equilibrio o para imponer las restricciones y deben estar definidas respecto de un sistema de referencia. Obviamente, la ecuación de equilibrio del sistema completo se plantea respecto a un único triedro que se denominará sistema de referencia global, y por consiguiente, para implementar las restricciones, éstas se tienen que cumplir en dicho sistema de referencia. Sin embargo, es preferible emplear un sistema local, que se mueva solidario al cuerpo, sobre el cual definir cada magnitud. Esta manera permite mantener el tensor de inercia constante y plantear las ecuaciones de cada sólido por separado para posteriormente, realizar el paso a coordenadas globales y proceder al ensamblado. Teniendo en cuenta que la metodología integra sólidos rígidos, cada elemento queda completamente definido respecto del triedro global por la posición de un punto del cuerpo y la orientación de su sistema de referencia local sobre el global, como se muestra en la figura 3.1.

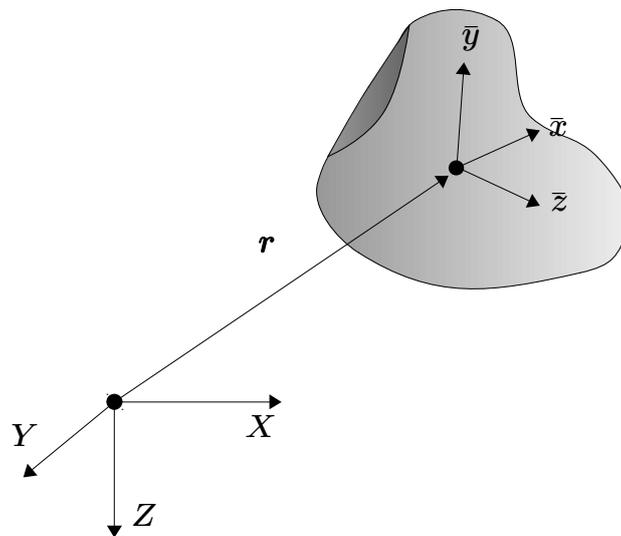


Figura 3.1: Posición de un cuerpo respecto del sistema global.

Para simplificar el proceso, el sistema local se sitúa en el centro de masas de del sólido (“*Center of Mass*”, CoM). Se han escogido las coordenadas cartesianas para ubicar el CoM de cada cuerpo respecto a un sistema de referencia absoluto y la representación del cuaternión unitario para determinar la orientación del cuerpo en el espacio. Como es sabido, existen otro tipo de representaciones pero desde un punto de vista general, las coordenadas cartesianas permiten tratar a cada cuerpo de manera independiente, sin tener en cuenta el tipo de enlace que puedan llegar a tener. Esto le dota de un alto nivel de automatización y para emplear en metodologías de carácter generalista resulta ventajoso. Por otra parte, las coordenadas naturales emplean menos variables para definir cada cuerpo lo que en la mayoría de los casos se traduce en una mejora de la eficiencia. En cambio, para realizar una correcta modelización se necesita familiarizarse con el método y para alcanzar ese grado de eficiencia hay que tener en cuenta el tipo de ligadura empleado por lo que se va perdiendo el grado de sistematización. Las coordenadas relativas, son una opción interesante cuando se trata de modelizar sistemas de cadena abierta, si bien para mecanismos más complejos, sobretodo en sistemas espaciales, podría resultar muy difícil obtener los lazos de cierre. En este trabajo se ha optado por emplear coordenadas cartesianas basándose en criterios de automatización y sencillez aunque la metodología admite otro tipo de coordenadas.

En cuanto a la orientación del cuerpo en el espacio, se conocen diferentes alternativas de parametrización. La primera que suele aparecer y es ampliamente empleada son las representaciones de tres rotaciones sucesivas, en especial los muy conocidos ángulos de Euler. La ventaja es que solo se emplean 3 variables, a cambio, la descripción algebraica de las rotaciones conduce a interminables funciones trigonométricas que dificultan no sólo el cálculo sino también la implementación en un software matemático. Sin embargo, la mayor desventaja es que para ciertas configuraciones en el espacio, los ángulos de Euler evidencian la pérdida de un grado de libertad, provocando que existan diferentes combinaciones para obtener la misma rotación. Esta singularidad se conoce como bloqueo de “*gimbal*”. Por otra parte, los parámetros de Rodrigues si bien plantean una descripción algebraica de la orientación no están exentos de singularidades, en la inversión de la matriz de rotación R , si se desea obtener el valor de la función trigonométrica b , aparece un punto singular. Para el presente trabajo se ha elegido la representación del cuaternión unitario como forma de determinar la

orientación del cuerpo y bajo la cual se plantearán tanto las ecuaciones de la dinámica como las restricciones del modelo matemático.

3.1 Cuaternión unitario

Los cuaterniones fueron desarrollados por W. R. Hamilton en 1843, y debido a que poseen las propiedades asociativas y multiplicativas formaron el primer grupo no conmutativo del álgebra. Existe en la bibliografía múltiples maneras de describir los cuaterniones, algunas más bien dirigidas a un lector con un marcado carácter matemático pero si se restringe a un ámbito ingenieril resulta más familiar pensar en ellos como una extensión de los números complejos a tres dimensiones. Es decir, de la misma manera que se puede representar un giro cualquiera en un plano a través de un número complejo por medio de la fórmula de Euler, se puede hacer lo mismo en el espacio añadiendo dos número complejos a la ecuación. De esta manera es posible representar el cuaternión con una parte real y una imaginaria de la siguiente manera:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (3.1)$$

Obviamente, como se ha comentado la propiedad multiplicativa para el producto de cuaterniones se establece como:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (3.2)$$

$$jk = -kj = i \quad (3.3)$$

$$ki = -ik = j \quad (3.4)$$

$$ij = -ji = k \quad (3.5)$$

En geometría, el teorema de la rotación de Euler dice que, en un espacio tridimensional, cualquier movimiento de un sólido rígido que mantenga un punto constante, también debe dejar constante un eje completo. Esto también explica que cualquier composición de rotaciones sobre un sólido rígido con ejes arbitrarios es equivalente a una sola rotación sobre un nuevo eje, llamado polo de Euler. De forma que es posible determinar cualquier rotación o sucesión de rotaciones mediante un giro de valor θ sobre el polo de Euler definido por un vector director \mathbf{u} y a su vez, asociar la representación de esta orientación al valor del cuaternión de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathbf{u} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (3.6)$$

O más explícitamente:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.7)$$

$$q_1 = u_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.8)$$

$$q_2 = u_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.9)$$

$$q_3 = u_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.10)$$

Si además, se hace que el vector director \mathbf{u} sea unitario se establece de forma unívoca la orientación de cualquier triedro de referencia respecto de otro sistema inicial. Ahora el cuaternión debe cumplir la norma unidad:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (3.11)$$

A menudo, se suele interpretar el cuaternión mediante una parte escalar y otra parte vectorial. No obstante, en este documento se empleará una representación más manejable de matriz columna de 4 dimensiones:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Para obtener la matriz de rotación se logra simplemente aplicando la fórmula de rotación de Rodrigues, dando como resultado una matriz cuadrada de dimensión 3, ortogonal y de determinante uno:

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Una propiedad interesante de los cuaterniones es que son invariantes respecto a la rotación del sistema de referencia que representan, es decir:

$$R(\mathbf{q}) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Esto es fácil de demostrar simplemente con desarrollar el producto de forma genérica. Sabiendo que q_0 es invariante en cualquier caso, se deduce que \mathbf{q} es invariante respecto del sistema de referencia original y el girado.

La matriz de rotación, R , está compuesta por los vectores $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$ y $\bar{\mathbf{k}}$ que definen las direcciones de los ejes del sistema local a través de las componentes de esos vectores unitarios en dirección de los ejes del sistema de referencia inercial:

$$R = [\bar{\mathbf{i}} \quad \bar{\mathbf{j}} \quad \bar{\mathbf{k}}] \quad (3.15)$$

Por lo tanto, $R(\mathbf{q})$ depende del tiempo ya que los vectores unitarios se mueven con el sistema de referencia local. Supóngase que el movimiento de ese sistema local consiste en un giro de velocidad Ω alrededor de un eje cuyo vector unitario es \mathbf{e} en coordenadas inerciales y $\bar{\mathbf{e}}$ en el sistema local, entonces se verifica:

$$\frac{d\bar{\mathbf{i}}}{dt} = \Omega \bar{\mathbf{i}} \quad (3.16)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{j}}}{dt} = \Omega \bar{\mathbf{j}} \quad (3.17)$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{k}}}{dt} = \Omega \bar{\mathbf{k}} \quad (3.18)$$

Se puede escribir:

$$\dot{R} = \Omega R \quad (3.19)$$

Debido a la propiedad de ortonormalidad se obtiene:

$$\Omega = \dot{R} R^T \quad (3.20)$$

Siendo la derivada de R respecto al tiempo:

$$\dot{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 2 \begin{bmatrix} q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_2 - q_3 \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_0 q_3 + q_0 \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_2 - q_0 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_0 q_3 - q_0 \dot{q}_3 & \dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_2 + q_0 \dot{q}_2 \\ q_0 \dot{q}_0 - q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 - q_3 \dot{q}_3 & \dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_1 - q_0 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_1 + q_0 \dot{q}_1 & q_0 \dot{q}_0 - q_1 \dot{q}_1 - q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que se debe cumplir la norma del cuaternión, su derivada también la tiene que cumplir, por lo tanto:

$$q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3 = 0 \quad (3.22)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.20) se llega a:

$$\Omega = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -q_2 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2 + q_0 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_0 \\ -q_3 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_3 + q_2 \dot{q}_0 - q_0 \dot{q}_2 \\ -q_1 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_1 + q_3 \dot{q}_0 - q_0 \dot{q}_3 & -q_1 \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_1 + q_0 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_0 \\ 0 & -q_2 \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_0 - q_0 \dot{q}_1 \\ -q_3 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_3 + q_0 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Que como era de esperar es perfectamente antisimétrica. Y expresando la velocidad angular en forma vectorial se tiene:

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \begin{Bmatrix} -q_3 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_3 + q_0 \dot{q}_1 - q_1 \dot{q}_0 \\ -q_1 \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_1 + q_0 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_0 \\ -q_2 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2 + q_0 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Derivando de nuevo la matriz de velocidad angular respecto al tiempo, se obtiene la matriz de aceleración angular:

Partiendo de las coordenadas relativas al sistema local se van a definir en el sistema absoluto; el punto, el vector, el plano y la línea. Por otra parte, también resulta apropiado incluir en este punto otras magnitudes de interés como es la velocidad de un punto cualquiera de un cuerpo y la acción de una fuerza puntual sobre un elemento.

3.2.1 Coordenadas globales de un punto a partir de las locales

Se desea obtener las coordenadas referidas al sistema global de un punto cualquiera c perteneciente al sólido k .

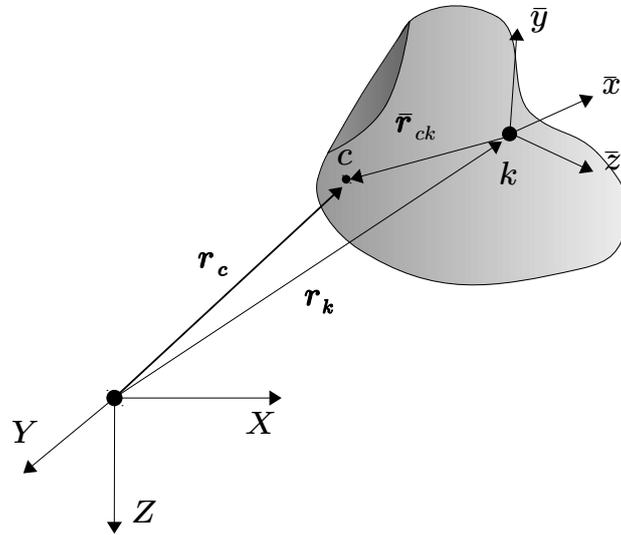


Figura 3.2: Punto de un sólido en el sistema global.

Siendo las coordenadas del punto k en el sistema local solidario al sólido:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ck} = \{\bar{x}_{ck} \quad \bar{y}_{ck} \quad \bar{z}_{ck}\}^T \quad (3.28)$$

Para expresarlas en el sistema global se puede hacer mediante:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_k + \mathbf{R}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} \quad (3.29)$$

Siendo \mathbf{q}_k el cuaternión que define la orientación del elemento k y \mathbf{r}_k las coordenadas del centro del sistema de referencia local respecto al absoluto. Sabiendo que la expresión de la matriz de rotación se muestra en (3.13), es posible desarrollar la ecuación (3.29) para obtener una expresión en función de las variables que definen al sólido k de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{ck}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \quad (3.30)$$

Desglosando el vector $\mathbf{r}_{ck}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$ en sus componentes se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ck}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x = & \\ q_{k0}^2 \bar{x}_{ck} + q_{k1}^2 \bar{x}_{ck} - q_{k2}^2 \bar{x}_{ck} - q_{k3}^2 \bar{x}_{ck} + 2q_{k1}q_{k2}\bar{y}_{ck} + & \quad (3.31) \\ - 2q_{k0}q_{k3}\bar{y}_{ck} + 2q_{k1}q_{k3}\bar{z}_{ck} + 2q_{k0}q_{k2}\bar{z}_{ck} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ck}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y = & \\ 2q_{k1}q_{k2}\bar{x}_{ck} + 2q_{k0}q_{k3}\bar{x}_{ck} + q_{k0}^2\bar{y}_{ck} - q_{k1}^2\bar{y}_{ck} + & \quad (3.32) \\ + q_{k2}^2\bar{y}_{ck} - q_{k3}^2\bar{y}_{ck} + 2q_{k2}q_{k3}\bar{z}_{ck} - 2q_{k0}q_{k1}\bar{z}_{ck} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ck}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z = & \\ 2q_{k1}q_{k3}\bar{x}_{ck} - 2q_{k0}q_{k2}\bar{x}_{ck} + 2q_{k2}q_{k3}\bar{y}_{ck} + & \quad (3.33) \\ + 2q_{k0}q_{k1}\bar{y}_{ck} + q_{k0}^2\bar{z}_{ck} - q_{k1}^2\bar{z}_{ck} - q_{k2}^2\bar{z}_{ck} + q_{k3}^2\bar{z}_{ck} & \end{aligned}$$

Si se sacan los términos del cuaternión y se agrupan las variables en forma matricial se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_{k0}\bar{x}_{ck} - q_{k3}\bar{y}_{ck} + q_{k2}\bar{z}_{ck} & q_{k1}\bar{x}_{ck} + q_{k2}\bar{y}_{ck} + q_{k3}\bar{z}_{ck} \\ 0 & 1 & 0 & q_{k3}\bar{x}_{ck} + q_{k0}\bar{y}_{ck} - q_{k1}\bar{z}_{ck} & q_{k2}\bar{x}_{ck} - q_{k1}\bar{y}_{ck} - q_{k0}\bar{z}_{ck} \\ 0 & 0 & 1 & -q_{k2}\bar{x}_{ck} + q_{k1}\bar{y}_{ck} + q_{k0}\bar{z}_{ck} & q_{k3}\bar{x}_{ck} + q_{k0}\bar{y}_{ck} - q_{k1}\bar{z}_{ck} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ q_{k0} \\ q_{k1} \\ q_{k2} \\ q_{k3} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

De manera compacta puede escribirse:

$$\mathbf{r}_c = P_{kc}(\mathbf{q}_k)\mathbf{x}_k \quad (3.35)$$

En la mayoría de los casos las ecuaciones de restricción son no lineales por lo que para implementarlas en el sistema, logrando la mejor convergencia posible, es necesario linealizarlas. Por ello, se aplica el desarrollo en serie de Taylor truncada para el primer término. Si se llama \mathbf{q}^0 , al cuaternión que indica la posición sobre la cual se realiza la aproximación puede hacerse partiendo de la ecuación (3.30):

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_k + \mathbf{s}_{p0}(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{kc}) + \mathbf{s}_p(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{kc}) \quad (3.36)$$

Siendo el vector $\mathbf{s}_{p0}(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{kc})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{p0}(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{kc})_x = \\ (q_{k0}^0)^2 \bar{x}_{ck} + (q_{k1}^0)^2 \bar{x}_{ck} - (q_{k2}^0)^2 \bar{x}_{ck} - (q_{k3}^0)^2 \bar{x}_{ck} + 2q_{k1}^0 q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{p0}(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{kc})_y = \\ 2q_{k1}^0 q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k0}^0 q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} + (q_{k0}^0)^2 \bar{y}_{ck} - (q_{k1}^0)^2 \bar{y}_{ck} + (q_{k2}^0)^2 \bar{y}_{ck} + \\ - (q_{k3}^0)^2 \bar{y}_{ck} + 2q_{k2}^0 q_{k3}^0 \bar{z}_{ck} - 2q_{k0}^0 q_{k1}^0 \bar{z}_{ck} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{p0}(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{kc})_z = \\ 2q_{k1}^0 q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k0}^0 q_{k2}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k2}^0 q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k0}^0 q_{k1}^0 \bar{y}_{ck} + \\ + (q_{k0}^0)^2 \bar{z}_{ck} - (q_{k1}^0)^2 \bar{z}_{ck} - (q_{k2}^0)^2 \bar{z}_{ck} + (q_{k3}^0)^2 \bar{z}_{ck} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Y el vector $\mathbf{s}_p(\mathbf{q}_k^0, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{kc})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_p(\mathbf{q}_k^0, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{kc})_x = \\ (2q_{k0}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k0} - q_{k0}^0) + \\ + (2q_{k1}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k1} - q_{k1}^0) + \\ + (-2q_{k2}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k1}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k0}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k2} - q_{k2}^0) + \\ + (-2q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k0}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k1}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k3} - q_{k3}^0) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_p(\mathbf{q}_k^0, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{kc})_y = \\ (2q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k0}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k1}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k0} - q_{k0}^0) + \\ + (2q_{k2}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k1}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k0}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k1} - q_{k1}^0) + \\ + (2q_{k1}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k2} - q_{k2}^0) + \\ + (2q_{k0}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k3} - q_{k3}^0) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_p(\mathbf{q}_k^0, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{kc})_z = \\ (-2q_{k2}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k1}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k0}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k0} - q_{k0}^0) + \\ + (2q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k0}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k1}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k1} - q_{k1}^0) + \\ + (-2q_{k0}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k2}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k2} - q_{k2}^0) + \\ + (2q_{k1}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{z}_{ck})(q_{k3} - q_{k3}^0) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Reorganizando las ecuaciones y extrayendo las variables del cuaternión de los vectores se obtiene la siguiente expresión lineal:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{r}}_{ck} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \mathbf{q}_k^0 + \mathbf{r}_k + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \mathbf{q}_k \quad (3.43)$$

Donde:

$$S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) = \begin{bmatrix} (2q_{k0}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{z}_{ck}) & (2q_{k1}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{z}_{ck}) \\ (2q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k0}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k1}^0 \bar{z}_{ck}) & (2q_{k2}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k1}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k0}^0 \bar{z}_{ck}) \\ (-2q_{k2}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k1}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k0}^0 \bar{z}_{ck}) & (2q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k0}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k1}^0 \bar{z}_{ck}) \\ (-2q_{k1}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{z}_{ck}) & (-2q_{k3}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k0}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k1}^0 \bar{z}_{ck}) \\ (2q_{k1}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{z}_{ck}) & (2q_{k0}^0 \bar{x}_{ck} - 2q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{z}_{ck}) \\ (-2q_{k0}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{y}_{ck} - 2q_{k2}^0 \bar{z}_{ck}) & (2q_{k1}^0 \bar{x}_{ck} + 2q_{k2}^0 \bar{y}_{ck} + 2q_{k3}^0 \bar{z}_{ck}) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

La ecuación (3.43) también puede reorganizarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_c = R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{r}}_{ck} - S_v(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \mathbf{x}_k^0 + S_s(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \mathbf{x}_k \quad (3.45)$$

Siendo:

$$S_v(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \end{bmatrix}_{3 \times 7} \quad (3.46)$$

$$S_s(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \end{bmatrix}_{3 \times 7} \quad (3.47)$$

3.2.2 Coordenadas globales de un vector a partir de las locales

De manera idéntica, se van a escribir las coordenadas de un vector en el sistema global. Si se conoce que las coordenadas en el sistema local son:

$$\bar{\mathbf{v}}_k = \begin{bmatrix} \bar{v}_{xk} & \bar{v}_{yk} & \bar{v}_{zk} \end{bmatrix}^T$$

La ecuación que relaciona las dos expresiones es:

$$\mathbf{v}_k = R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{v}}_k \quad (3.48)$$

Linealizando como en el caso anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{v}_k = R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{v}}_k - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k) \mathbf{q}_k^0 + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k) \mathbf{q}_k \quad (3.49)$$

Y forma compacta:

$$\mathbf{v}_k = R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{v}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k) \mathbf{x}_k^0 + S_v(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k) \mathbf{x}_k \quad (3.50)$$

Siendo:

$$S_v(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k) \end{bmatrix}_{3 \times 7} \quad (3.51)$$

3.2.3 Coordenadas globales de un plano a partir de las locales

Un plano se define mediante la siguiente expresión de la forma:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + e = 0 \quad (3.52)$$

Cualquier punto que se encuentre en el plano debe cumplir la ecuación (3.52), por lo tanto, el producto escalar del vector normal de coordenadas $[a_1, a_2, a_3]^T$ y el vector formado por el punto $[x, y, z]^T$ y el origen $[0, 0, 0]^T$ es precisamente la mínima distancia del plano al sistema de referencia, e , como se ve en la figura 3.3.

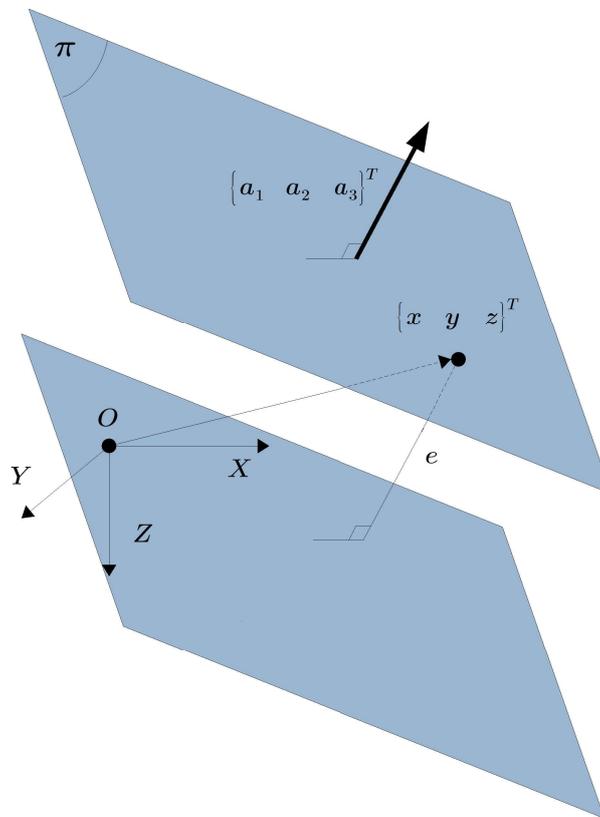


Figura 3.3: Interpretación de la ecuación de un plano en el espacio.

Si ahora se tiene un sistema local ligado a un sólido k , un plano puede definirse en coordenadas locales mediante la siguiente expresión:

$$\bar{p}_1 x + \bar{p}_2 y + \bar{p}_3 z + \bar{p}_4 = 0 \quad (3.53)$$

O también:

$$(\bar{\mathbf{p}})^T \bar{\mathbf{r}}_{ck} + \bar{p}_4 = 0 \quad (3.54)$$

Donde $\bar{\mathbf{p}}$ es el vector normal al plano y $\bar{\mathbf{r}}_{ck}$ representa un punto c perteneciente a dicho plano en el sistema local. Obviamente esta ecuación se podría multiplicar por cualquier escalar y seguiría siendo el mismo plano. Por ello, para emplear una expresión canónica se va a realizar una normalización del vector $\bar{\mathbf{p}}$, de la siguiente forma:

$$(\bar{\mathbf{p}})^T \bar{\mathbf{p}} = 1 \quad (3.55)$$

Queda claro de la ecuación (3.54), que el parámetro \bar{p}_4 representa la mínima distancia del plano al sistema local en coordenadas locales, a partir de aquí se le denominará \bar{e} . Si se tiene un plano en coordenadas locales se debe ser capaz de poder expresarlo en el sistema global. Teniendo en cuenta la expresión (3.29) se escribe:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ck} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_k) \quad (3.56)$$

Sustituyendo esta última expresión (3.56) en la ecuación (3.54), se obtiene:

$$(\bar{\mathbf{p}})^T \left[\mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T (\mathbf{r}_{ck} - \mathbf{r}_k) \right] + \bar{e} = 0 \quad (3.57)$$

Desarrollando:

$$(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_{ck} - (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k + \bar{e} = 0 \quad (3.58)$$

De donde puede extraerse la siguiente conclusión:

$$\bar{e} = (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k - \bar{e} \quad (3.59)$$

Que junto la ecuación:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} \quad (3.60)$$

Definen un plano en coordenadas globales a partir de sus coordenadas en un sistema local.

Como se ha venido comentando estas expresiones son necesario linealizarlas. La ecuación de (3.60) no reviste mayor dificultad ya que es exactamente la misma que (3.56). Sin embargo, la ecuación (3.59) requiere mayor esfuerzo. Planteando el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
 e &= e^L - (\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k = \bar{e} - (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k = \\
 &= \bar{e} - [R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k]^T \mathbf{r}_k = \\
 &= \bar{e} - [R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}}]^T \mathbf{r}_k - [S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k]^T \mathbf{r}_k + [S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k]^T \mathbf{r}_k
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para el último término $[S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k]^T \mathbf{r}_k$ se puede hacer:

$$\begin{aligned}
 [S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k]^T \mathbf{r}_k &= \mathbf{q}_k^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k = \\
 &= (\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k^0 + (\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k^0) + \\
 &\quad + (\mathbf{q}_k^T - (\mathbf{q}_k^{(0)})^T) S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k^0 = \\
 &= -(\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k^0 + (\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k + \mathbf{q}_k^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k^0 = \\
 &= -(\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k^0 + (\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k + (\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Luego el escalar e es:

$$\begin{aligned}
 e &= \bar{e} - [R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}}]^T \mathbf{r}_k + [S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k]^T \mathbf{r}_k + (\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k^0 + \\
 &\quad - (\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k - (\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Resumiendo, un plano definido en un sistema local se expresa en un sistema de referencia absoluto a través de las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{p} = R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k \tag{3.64}$$

$$e = \bar{e} + (\mathbf{q}_k^{(0)})^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{r}_k^0 - [R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}}]^T \mathbf{r}_k - (\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k \tag{3.65}$$

3.2.4 Coordenadas globales de una línea a partir de las locales

Una línea se puede definir con un punto y un vector director. Bajo estas condiciones la recta se determina por dos vectores uno que se denominará \mathbf{d} , formado por el punto de la recta y el origen del sistema de referencia y el otro el propio vector director \mathbf{p} . Con el objetivo de hacer que la recta sea inequívoca se impone que el punto sea el de mínima distancia desde el origen de coordenadas y que el vector director sea unitario.

Las implicaciones de las restricciones indicadas anteriormente establecen que:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{p} = 0 \quad (3.66)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1 \quad (3.67)$$

Si se ha obtenido el punto $\bar{\mathbf{d}}$ en coordenadas locales de sólido p , se puede pasar a globales de la forma:

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{d}} \quad (3.68)$$

Y para el vector director:

$$\mathbf{p} = R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}$$

Sin embargo, de la manera en la que se ha planteado, el punto \mathbf{d}^* no representa la mínima distancia para el sistema de referencia global. Para solucionar este inconveniente se plantea lo siguiente:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^* - (\mathbf{p}^T \mathbf{d}^*) \mathbf{p} \quad (3.69)$$

En la figura (3.4) se representa de forma geométrica el significado del planteamiento seguido para obtener la definición de una línea.

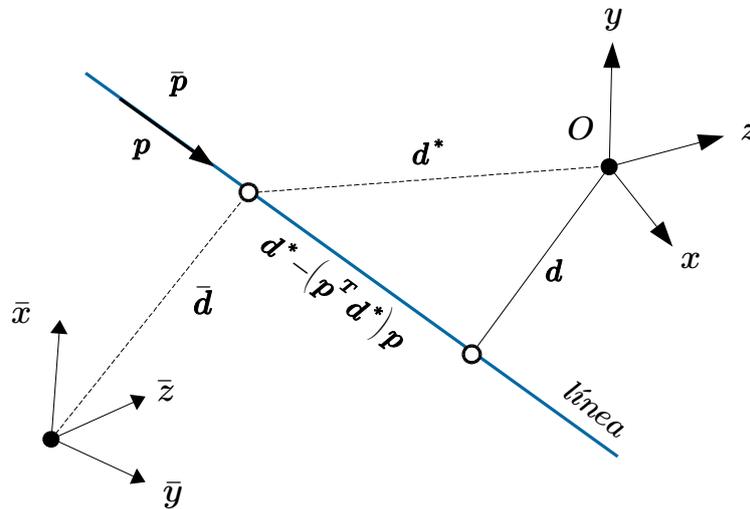


Figura 3.4: Interpretación geométrica de una recta.

Si se desarrolla la ecuación (3.69) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} &= [\mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{d}}] - [\mathbf{p}^T(\mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{d}})]\mathbf{p} = \\
 &= \mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{d}} - ((\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k) R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} + \\
 &\quad + ((\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{d}}) R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} = \\
 &= \mathbf{r}_k - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{d}} + [(\bar{\mathbf{p}})^T \bar{\mathbf{d}}] R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Como $\bar{\mathbf{p}}$ es perpendicular a $\bar{\mathbf{d}}$, el producto escalar se anula por lo que las ecuaciones definitivas se quedan en:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_k - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{d}} \tag{3.71}$$

$$\mathbf{p} = R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} \tag{3.72}$$

Para linealizar las ecuaciones, la expresión (3.72) se trata de un vector por lo que se actúa como de costumbre. Por el contrario, la expresión (3.71) requiere mayor atención. El segundo término de la derecha es el más complicado pero se puede plantear de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} = \\
 & = - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - \{ [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T - (\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T] \mathbf{r}_k^0 \} R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k^0)] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] [R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} - R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}}] = \\
 & = - \{ [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T] \mathbf{r}_k^0 \} R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] [R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}] + 2 [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.49), se linealiza el producto $R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}$ de la expresión (3.73):

$$\begin{aligned}
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}} = \\
 & = - \{ [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T - (\mathbf{q}^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T + \mathbf{q}_k^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T] \mathbf{r}_k^0 \} R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + 2 [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] [R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k] = \\
 & = - \{ [- (\mathbf{q}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T + \mathbf{q}_k^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})^T] \mathbf{r}_k^0 \} R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] [- S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k]
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Empleando las propiedades del producto escalar, la expresión anterior puede simplificarse logrando:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} = & \mathbf{r}_k + [(\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + \\
 & + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{d}} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \mathbf{q}_k^0 - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - [(\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + \\
 & + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \mathbf{q}_k^0
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Sabiendo que $(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) \mathbf{p} = \mathbf{p} \mathbf{a}^T \mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} = & \mathbf{r}_k + [(\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + \\
 & + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{d}} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \mathbf{q}_k^0 - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - \left\{ [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} (\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \right\} \mathbf{q}_k^0 + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \mathbf{q}_k^0
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Hay que puntualizar que de esta última expresión no se puede sacar factor común de $S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}})$, ya que en un caso es producto de escalar por matriz y en otro se trata de producto de matrices. Sin embargo, se puede proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} = & \mathbf{r}_k + [(\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + \\
 & + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{d}} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \mathbf{q}_k^0 - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & - \left\{ [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] I + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} (\mathbf{r}_k^0)^T \right\} S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \mathbf{q}_k^0
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Volviendo a aplicar la relación $(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) \mathbf{p} = \mathbf{p} \mathbf{a}^T \mathbf{x}$, se consigue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} = & \mathbf{r}_k + [(\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + \\
 & + \left\{ [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \right\} \mathbf{q}_k^0 + \\
 & + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{d}} - R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} (\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0 + \\
 & + \left\{ S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] I + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} (\mathbf{r}_k^0)^T \right\} S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Reorganizando se obtiene, finalmente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} = & [(\mathbf{r}_k^0)^T S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0] R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{d}} + \\
 & + \left\{ [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) \right\} \mathbf{q}_k^0 + \\
 & + \left[I - R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} (\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \right] \mathbf{r}_k^0 + \\
 & + \left\{ S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{d}}) - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q}_k^0)^T \mathbf{r}_k^0] I + R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} (\mathbf{r}_k^0)^T \right\} S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Por otro lado, para linealizar el vector director \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = R(\mathbf{q}_k^0) \bar{\mathbf{p}} - S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 + S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{q}_k^0 \tag{3.80}$$

3.3 Velocidad de un punto de un elemento

La velocidad asociada a un punto c de cuerpo k se expresa por la ecuación:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} \quad (3.81)$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{r}}_{ck}(\dot{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \quad (3.82)$$

En donde:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{ck}(\dot{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x = & \\ = 2(\mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k0} + \mathbf{q}_{k1} \dot{\mathbf{q}}_{k1} - \mathbf{q}_{k2} \dot{\mathbf{q}}_{k2} - \mathbf{q}_{k3} \dot{\mathbf{q}}_{k3}) \bar{x}_{ck} + & \\ + 2(\dot{\mathbf{q}}_{k1} \mathbf{q}_{k2} + \mathbf{q}_{k1} \dot{\mathbf{q}}_{k2} - \dot{\mathbf{q}}_{k0} \mathbf{q}_{k3} - \mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k3}) \bar{y}_{ck} + & \\ + 2(\dot{\mathbf{q}}_{k1} \mathbf{q}_{k3} + \mathbf{q}_{k1} \dot{\mathbf{q}}_{k3} + \dot{\mathbf{q}}_{k0} \mathbf{q}_{k2} + \mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k2}) \bar{z}_{ck} & \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{ck}(\dot{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y = & \\ = 2(\dot{\mathbf{q}}_{k1} \mathbf{q}_{k2} + \mathbf{q}_{k1} \dot{\mathbf{q}}_{k2} + \dot{\mathbf{q}}_{k0} \mathbf{q}_{k3} + \mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k3}) \bar{x}_{ck} + & \\ + 2(\mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k0} - \mathbf{q}_{k1} \dot{\mathbf{q}}_{k1} + \mathbf{q}_{k2} \dot{\mathbf{q}}_{k2} - \mathbf{q}_{k3} \dot{\mathbf{q}}_{k3}) \bar{y}_{ck} + & \\ + 2(\dot{\mathbf{q}}_{k2} \mathbf{q}_{k3} + \mathbf{q}_{k2} \dot{\mathbf{q}}_{k3} - \dot{\mathbf{q}}_{k0} \mathbf{q}_{k1} - \mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k1}) \bar{z}_{cp} & \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{ck}(\dot{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z = & \\ = 2(\dot{\mathbf{q}}_{k1} \mathbf{q}_{k3} + \mathbf{q}_{k1} \dot{\mathbf{q}}_{k3} - \dot{\mathbf{q}}_{k0} \mathbf{q}_{k2} - \mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k2}) \bar{x}_{ck} + & \\ + 2(\dot{\mathbf{q}}_{k2} \mathbf{q}_{k3} + \mathbf{q}_{k2} \dot{\mathbf{q}}_{k3} + \dot{\mathbf{q}}_{k0} \mathbf{q}_{k1} + \mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k1}) \bar{y}_{ck} + & \\ + 2(\mathbf{q}_{k0} \dot{\mathbf{q}}_{k0} - \mathbf{q}_{k1} \dot{\mathbf{q}}_{k1} - \mathbf{q}_{k2} \dot{\mathbf{q}}_{k2} + \mathbf{q}_{k3} \dot{\mathbf{q}}_{k3}) \bar{z}_{ck} & \end{aligned} \quad (3.85)$$

Las ecuaciones al ser lineales no hace falta aplicar ningún método, simplemente sacando los términos del $\dot{\mathbf{q}}_k$ de las ecuaciones se obtiene un sistema matricial con la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}}_k + \mathbf{S}_{sp}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \dot{\mathbf{q}}_k \quad (3.86)$$

Donde:

$$S_{sp}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) = 2 \begin{bmatrix} q_{k0} \bar{x}_{ck} - q_{k3} \bar{y}_{ck} + q_{k2} \bar{z}_{ck} & q_{k1} \bar{x}_{ck} + q_{k2} \bar{y}_{ck} + q_{k3} \bar{z}_{ck} \\ q_{k3} \bar{x}_{ck} + q_{k0} \bar{y}_{ck} + q_{k1} \bar{z}_{ck} & q_{k2} \bar{x}_{ck} - q_{k1} \bar{y}_{ck} - q_{k0} \bar{z}_{ck} \\ -q_{k2} \bar{x}_{ck} + q_{k1} \bar{y}_{ck} + q_{k0} \bar{z}_{ck} & q_{k3} \bar{x}_{ck} + q_{k0} \bar{y}_{ck} - q_{k1} \bar{z}_{ck} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} -q_{k2} \bar{x}_{ck} + q_{k1} \bar{y}_{ck} + q_{k0} \bar{z}_{ck} & -q_{k3} \bar{x}_{ck} - q_{k0} \bar{z}_{ck} + q_{k1} \bar{z}_{ck} \\ q_{k1} \bar{x}_{ck} + q_{k2} \bar{y}_{ck} + q_{k3} \bar{z}_{ck} & q_{k0} \bar{x}_{ck} - q_{k3} \bar{y}_{ck} + q_{k2} \bar{z}_{ck} \\ -q_{k0} \bar{x}_{ck} + q_{k3} \bar{y}_{ck} - q_{k2} \bar{z}_{ck} & q_{k1} \bar{x}_{ck} + q_{k2} \bar{y}_{ck} + q_{k3} \bar{z}_{ck} \end{bmatrix}$$

Agrupando términos:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = S_{ab}(\mathbf{q}_p, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \dot{\mathbf{x}}_k \quad (3.88)$$

Siendo:

$$S_{ab}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2(q_{k0} \bar{x}_{ck} - q_{k3} \bar{y}_{ck} + q_{k2} \bar{z}_{ck}) & 2(q_{k1} \bar{x}_{ck} + q_{k2} \bar{y}_{ck} + q_{k3} \bar{z}_{ck}) \\ 0 & 1 & 0 & 2(q_{k3} \bar{x}_{ck} + q_{k0} \bar{y}_{ck} + q_{k1} \bar{z}_{ck}) & 2(q_{k2} \bar{x}_{ck} - q_{k1} \bar{y}_{ck} - q_{k0} \bar{z}_{ck}) \\ 0 & 0 & 1 & 2(-q_{k2} \bar{x}_{ck} + q_{k1} \bar{y}_{ck} + q_{k0} \bar{z}_{ck}) & 2(q_{k3} \bar{x}_{ck} + q_{k0} \bar{y}_{ck} - q_{k1} \bar{z}_{ck}) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\begin{bmatrix} 2(-q_{k2} \bar{x}_{ck} + q_{k1} \bar{y}_{ck} + q_{k0} \bar{z}_{ck}) & 2(-q_{k3} \bar{x}_{ck} - q_{k0} \bar{y}_{ck} + q_{k1} \bar{z}_{ck}) \\ 2(q_{k1} \bar{x}_{ck} + q_{k2} \bar{y}_{ck} + q_{k3} \bar{z}_{ck}) & 2(q_{k0} \bar{x}_{ck} - q_{k3} \bar{y}_{ck} + q_{k2} \bar{z}_{ck}) \\ 2(-q_{k0} \bar{x}_{ck} + q_{k3} \bar{y}_{ck} - q_{k2} \bar{z}_{ck}) & 2(q_{k1} \bar{x}_{ck} + q_{k2} \bar{y}_{ck} + q_{k3} \bar{z}_{ck}) \end{bmatrix}$$

3.4 Fuerzas en un punto

Un cuerpo puede estar sometido a una fuerza y un momento aplicados en un punto cualquier del elemento, figura 3.11. Cada cuerpo está definido por un triedro situado en el CoM por lo que para incluir este tipo de fuerzas en las ecuaciones de equilibrio es necesario transportar dichos esfuerzos al centro del sistema de referencia.

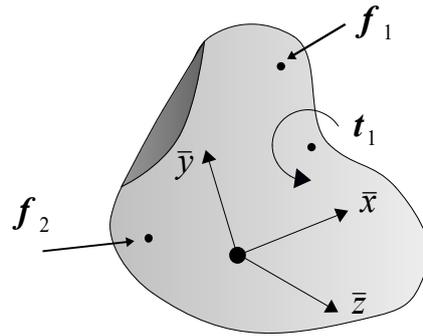


Figura 3.5: Fuerzas y momentos sobre un cuerpo.

Obviamente, el efecto causado no se va a componer únicamente de las fuerzas, sino que hay que añadir el par correspondiente. Supóngase que se aplica una fuerza \mathbf{f}_{ck} en un punto c del elemento k , de la forma:

$$\mathbf{f}_{ck} = \{f_{ckx} \quad f_{cky} \quad f_{ckz} \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (3.90)$$

Además de una fuerza en el punto c , también se está aplicando, un par \mathbf{t}_{ck} , el cual se puede incluir en el vector de fuerzas de la forma:

$$\mathbf{f}_{ck} = \{f_{ckx} \quad f_{cky} \quad f_{ckz} \quad t_{ckx} \quad t_{cky} \quad t_{ckz}\}^T \quad (3.91)$$

Se trata, por tanto de obtener la fuerza equivalente que \mathbf{f}_{ck} ejerce sobre el CoM del cuerpo k , como se observa en la figura 3.6. Es importante señalar que el esfuerzo \mathbf{f}_{ck} es referido al sistema global.

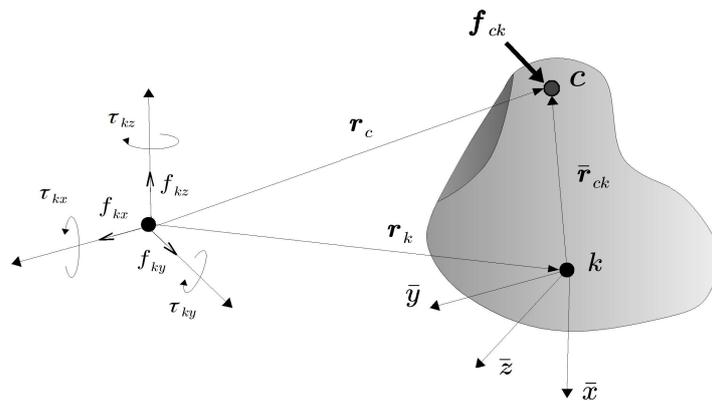


Figura 3.6: Efecto de los esfuerzos puntuales sobre el CoM de un cuerpo en el sistema global.

Es obvio que el traslado de los momentos no requiere ninguna acción especial pero se incluye en este punto para tener un tratamiento más homogéneo. Si se llama \mathbf{f}_k a la fuerza equivalente en el CoM del cuerpo k , ésta se puede expresar como la suma de dos términos:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_{ck} + \boldsymbol{\tau}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{kx} \\ \mathbf{f}_{ky} \\ \mathbf{f}_{kz} \\ t_{kx} \\ t_{ky} \\ t_{kz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{kx} \\ \tau_{ky} \\ \tau_{kz} \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Donde $\boldsymbol{\tau}_p$ es el par generado en el CoM de la fuerza \mathbf{f}_{ck} , y se escribe como:

$$\boldsymbol{\tau}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_{cky} f_{ckz} - r_{ckz} f_{cky} \\ -r_{ckx} f_{ckz} + r_{ckz} f_{ckx} \\ r_{ckx} f_{cky} - r_{cky} f_{ckx} \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Donde r_{ckx} , r_{cky} y r_{ckz} son las componentes del vector que va desde el centro de gravedad, CdG (“*Centro de Gravedad*”, CdG) del elemento k hasta el punto c expresadas en coordenadas globales. Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.92) y (3.93), se tiene:

$$\mathbf{f}_k = U_{ck}(\mathbf{r}_{ck}) \mathbf{f}_{ck} \quad (3.94)$$

Donde:

$$U_{ck}(\mathbf{r}_{ck}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{ckz} & r_{cky} & 1 & 0 & 0 \\ r_{ckz} & 0 & -r_{ckx} & 0 & 1 & 0 \\ -r_{cky} & r_{ckx} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

3.5 Energía del sistema

Partiendo de las ecuaciones de Newton, si se aplica un desplazamiento infinitesimal se obtiene que la energía cinética es igual al trabajo realizado por las fuerzas exteriores:

$$T = W_{ext} \quad (3.96)$$

Siendo T la energía cinética y W_{ext} el trabajo de las fuerzas exteriores. Las fuerzas exteriores se dividen entre fuerzas conservativas y no conservativas. Las conservativas son aquellas generadas por un campo potencial, es decir, que su magnitud depende de la posición. Por lo tanto, equivale al gradiente del campo con signo negativo y el trabajo producido por dicha fuerza sólo depende de la posición inicial y final. Sabiendo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa es la energía potencial, la ecuación (3.96) se escribe como:

$$T + V = W_{nc} \quad (3.97)$$

Donde V es la energía potencial y W_{nc} el trabajo de las fuerzas no conservativas. La energía potencial en sistemas multicuerpo proviene principalmente del campo gravitacional y del campo elástico. Tomando como referencia la posición del sistema global, la energía potencial gravitatoria es:

$$V_g = m g \mathbf{p}^T \mathbf{r} \quad (3.98)$$

Donde m es la masa del cuerpo, g la constante gravitacional, \mathbf{p} es el vector unitario que indica la dirección de la fuerza de gravedad y \mathbf{r} es la posición del CoM del sólido. Siendo la energía potencial gravitatoria de todo el sistema la suma de las energías de cada cuerpo.

En el caso de la energía elástica, si se sitúa un muelle entre dos puntos, la ecuación que determina la energía potencial elástica del muelle sería:

$$V_e = \frac{1}{2} k (l - l_0) \quad (3.99)$$

Siendo k la constante del muelle, l la distancia entre los dos puntos, y l_0 la longitud del muelle en ausencia de cargas. Sabiendo que el vector posición de un punto de un cuerpo se calcula con la expresión (3.29), la distancia l entre los puntos c y o de los sólidos p y m respectivamente, se obtiene con la siguiente expresión:

$$l = \sqrt{\mathbf{l}^T \mathbf{l}} \quad (3.100)$$

Donde:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_p + \mathbf{R}(\mathbf{q}_p) \bar{\mathbf{r}}_{cp} - \mathbf{r}_m - \mathbf{R}(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{r}}_{om} \quad (3.101)$$

La energía elástica total es la energía elástica de cada resorte que actúa en el sistema. Por otra parte, llamando $\bar{\mathbf{u}}(t)$ al vector de desplazamientos de un sólido rígido respecto al sistema de referencia local:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \{\bar{r}_x \quad \bar{r}_y \quad \bar{r}_z \quad \bar{\theta}_x \quad \bar{\theta}_y \quad \bar{\theta}_z\}^T \quad (3.102)$$

$\dot{\bar{\mathbf{u}}}(t)$ al vector de velocidad:

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}(t) = \{\dot{\bar{r}}_x \quad \dot{\bar{r}}_y \quad \dot{\bar{r}}_z \quad \dot{\bar{\omega}}_x \quad \dot{\bar{\omega}}_y \quad \dot{\bar{\omega}}_z\}^T \quad (3.103)$$

Y $\ddot{\bar{\mathbf{u}}}(t)$ al de aceleraciones:

$$\ddot{\bar{\mathbf{u}}}(t) = \{\ddot{\bar{r}}_x \quad \ddot{\bar{r}}_y \quad \ddot{\bar{r}}_z \quad \ddot{\bar{\omega}}_x \quad \ddot{\bar{\omega}}_y \quad \ddot{\bar{\omega}}_z\}^T \quad (3.104)$$

La fuerza de inercia se expresa mediante:

$$\bar{\mathbf{F}}_{inercia} = \bar{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}(t) \quad (3.105)$$

Donde $\bar{\mathbf{M}}$ es la matriz de masas:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_g \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Siendo $I_{3 \times 3}$ la matriz unidad de orden 3, m la masa del cuerpo e $\bar{\mathbf{I}}_g$ el tensor de inercia respecto del sistema local. Si se aplica un desplazamiento diferencial, el trabajo realizado por las fuerzas de inercia representa la energía cinética del sólido:

$$T = \int \bar{\mathbf{F}}_{inercia} d\bar{\mathbf{u}} = \int \bar{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} d\bar{\mathbf{u}} = \int \bar{\mathbf{M}} \frac{d\dot{\bar{\mathbf{u}}}}{dt} d\bar{\mathbf{u}} = \int \bar{\mathbf{M}} \dot{\bar{\mathbf{u}}} d\dot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (3.107)$$

Por lo tanto:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{u}}}^T \begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}}_g \end{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \quad (3.108)$$

Desarrollando la ecuación (3.108) se consigue una expresión en función de las velocidades lineales y angulares:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{r}}}^T m \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \frac{1}{2} \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}^T \bar{\mathbf{I}}_g \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \quad (3.109)$$

Donde $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ es la velocidad del CoM en coordenadas locales y $\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}$ el vector velocidad angular en locales, el cual se calcula con la ecuación (3.24) usando coordenadas locales. Para obtener la energía cinética en función de las

coordenadas globales es necesario realizar un cambio de variables empleando la matriz de rotación $\mathbf{R}(\mathbf{q})$, definida en la ecuación (3.13). Ahora, la expresión que define la energía cinética en coordenada globales es:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T m \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T I_g \boldsymbol{\omega} \quad (3.110)$$

Siendo $\dot{\mathbf{r}}$ es la velocidad del CoM respecto del triedro global, $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular del sólido y I_g el tensor de inercia en coordenadas globales, el cual se calcula con:

$$I_g = \mathbf{R}(\mathbf{q}) \bar{I}_g \mathbf{R}(\mathbf{q})^T \quad (3.111)$$

La ecuación (3.110) expresada de forma matricial es:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & I_g \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \quad (3.112)$$

Siendo:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = [\dot{r}_x \quad \dot{r}_y \quad \dot{r}_z \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (3.113)$$

La energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética de cada elemento. Finalmente, la energía mecánica del sistema se obtiene como la suma de la cinética más la potencial, la cual en ausencia de fuerzas no conservativas se mantiene constante:

$$E_{mec} = T + V \quad (3.114)$$

4 Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones del movimiento definen la evolución de un sistema mecánico expresado en función de unas variables y del tiempo. Existen principalmente dos maneras diferentes de entender estas ecuaciones de la dinámica; la Mecánica Newtoniana y la Mecánica Analítica. La Mecánica Newtoniana se basa directamente en las leyes de Newton y emplea el cálculo vectorial como soporte matemático. Esta teoría, que primeramente fue desarrollada para partículas materiales, se extendió un siglo después cuando Euler introdujo el concepto de CdG y momentos de inercia, que permitieron formular las ecuaciones de Newton-Euler para realizar el análisis dinámico de sólidos rígidos. Por otro lado, la aceptación del Principio de los Trabajos Virtuales y la aparición del concepto de fuerza de inercia sirvieron como puente para el desarrollo de la Mecánica Analítica que tuvo su comienzo con Leibniz y se fue completando con los trabajos de Lagrange y Hamilton.

En las ecuaciones de Newton-Euler se formulan las ecuaciones para cada sólido libre, al cual se le van añadiendo el efecto producido por los enlaces como fuerzas exteriores. De aquí, surge un sistema de seis ecuaciones diferenciales de orden dos por cada sólido rígido. La ventaja es que se realiza un tratamiento homogéneo a cada cuerpo sin importar el enlace, por lo que es un proceso automático. Sin embargo, al tratar las reacciones en los pares como incógnitas se generan sistemas de ecuaciones de gran tamaño. Las ecuaciones de Lagrange, en cambio, proporciona sistemas de ecuaciones con un tamaño más acorde con el número de variables independientes.

No obstante, al emplear el método del subespacio nulo, es posible manipular el sistema para obtener un problema con el mínimo número de coordenadas. Por otro lado, las ecuaciones de Newton-Euler permiten obtener un grado de automatización mayor. Por todo esto, se ha escogido plantear el equilibrio dinámico por medio de las ecuaciones de Newton-Euler.

De manera que aplicando los principios de la cantidad de movimiento y del momento cinético a un sólido rígido se relacionan las fuerzas y momentos exteriores y el movimiento originado por dichas perturbaciones:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j = m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{t}_j = \frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} \quad (4.2)$$

4.1 Ecuaciones del movimiento para un único sólido.

Si se define un cuerpo mediante un triedro de referencia ligado al sólido y con origen en el CdG, se puede expresar el momento cinético respecto a este sistema local, con lo que las componentes del tensor de inercia se mantienen constantes. Por otro lado, al derivar respecto al tiempo en un sistema absoluto, una magnitud definida en un sistema inercial, debe aparecer el término asociado a las fuerzas de inercia. De forma que la ecuación de Euler adquiere la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{t}_j = \left. \frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} \right|_{No\ Inercial} = \left. \frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} \right|_{Inercial} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{h}(t) \quad (4.3)$$

Siendo el momento cinético:

$$\mathbf{h}(t) = I_g \boldsymbol{\omega} \quad (4.4)$$

Si además se asume que los ejes de triedro local coinciden con los ejes principales de inercia, los productos de inercia se anulan, con lo que el tensor de inercia pasa a ser una matriz diagonal:

$$I_g = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Con todo esto, la forma final de la ecuación de Euler es:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{t}_j = I_g \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge I_g \boldsymbol{\omega} \quad (4.6)$$

Si se añaden la ecuaciones de Newton, se logran las ecuaciones de Newton-Euler, que para un sólido, expresadas en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \boldsymbol{\omega} \wedge I_g \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Un problema con esta ecuación es que la velocidad angular no se puede plantear como la derivada de los ángulos de giro respecto de los ejes x , y o z . Esto es un inconveniente dado que no se puede integrar directamente en esta forma. Por ello es necesario plantear una expresión de la velocidad angular en función de unos parámetros que definan la orientación, que pueden ser ángulos de Euler, cuaterniones, o incluso directamente los elementos de la matriz de rotación.

4.1.1 Linealización de las ecuaciones

Un sistema de ecuaciones diferenciales, como es el de la ecuación (4.7), difícilmente va a tener una solución analítica y se deberá resolver por métodos numéricos. Se trata por tanto de discretizar la variable tiempo, y partiendo de unas condiciones iniciales dadas, encontrar la solución del sistema en dichos momentos. Para ello, se aplica un método de integración, planteando el equilibrio en un instante dado, y con los datos disponibles, se obtiene la solución. Al haber sustituido la solución exacta por una aproximación numérica, inevitablemente se está cometiendo un error, el cual viene determinado por el orden de precisión del integrador empleado. Sin embargo, para encontrar esta solución aproximada, a menudo es necesario recurrir a procesos iterativos, bien porque el método de integración elegido es implícito, bien porque en las ecuaciones aparecen términos no lineales, o por ambos. Por lo tanto, para que este proceso iterativo converja hacia la solución, es necesario aplicar algún tipo de método de linealización.

Entre los métodos de linealización existen fundamentalmente dos alternativas, el método de Newton y los métodos cuasi-Newton. La diferencia entre estas dos alternativas reside en que el método de Newton emplea derivadas exactas, mientras que los métodos cuasi-Newton derivadas aproximadas. Este hecho afecta directamente al orden de convergencia del proceso, el método de Newton alcanza una convergencia cuadrática, sin embargo, los cuasi-Newton tienen una convergencia superlineal, siempre inferior a 2. Por este motivo se ha optado por aplicar el método de Newton.

En este documento a menudo se hace referencia al método de Newton como método de Newton exacto, esto se hace para remarcar que se están empelando derivadas exactas y de esta manera no confundir con los métodos cuasi Newton.

Una de las ventajas de trabajar con derivadas exactas es que el valor del error de tolerancia de integración puede ser más estricto que si se trabaja con derivadas aproximadas lo que aumenta la precisión. Además, el no usar un enfoque basado en diferencias finitas, permite emplear valores de incremento de tiempo de integración más pequeños. Por consiguiente, en casos donde el sistema requiera cierta precisión, es una ventaja.

El algoritmo del método de Newton se puede obtener directamente del desarrollo en series de Taylor truncando para el segundo orden de una función en el entrono de x_n :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_n)^2 \quad (4.8)$$

De donde se observa que una cota del error cometido en la ene-sima iteración, $|E_n|$, viene dado por:

$$|E_n| \leq \frac{c_2}{2c_1} (x_n - x_{n-1})^2 \quad (4.9)$$

Siendo:

$$c_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad (4.10)$$

$$c_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| \quad (4.11)$$

4.1.2 Ecuación de Euler

En primer lugar se va a plantear en coordenadas locales, la ecuación de Euler para un sólido k :

$$\bar{\mathbf{t}}_k = \bar{\mathbf{I}}_{gk} \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_k + \bar{\boldsymbol{\Omega}}_k \bar{\mathbf{I}}_{gk} \bar{\boldsymbol{\omega}}_k \quad (4.12)$$

Desarrollando la ecuación anterior, se obtiene un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_{kx} \\ \bar{t}_{ky} \\ \bar{t}_{kz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{kx} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{ky} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{kz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\omega}}_{kx} \\ \dot{\bar{\omega}}_{ky} \\ \dot{\bar{\omega}}_{kz} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{\omega}_{kz} \bar{I}_{kz} & -\bar{\omega}_{ky} \bar{I}_{ky} \\ -\bar{\omega}_{kz} \bar{I}_{kz} & 0 & \bar{\omega}_{kx} \bar{I}_{kx} \\ \bar{\omega}_{ky} \bar{I}_{ky} & -\bar{\omega}_{kx} \bar{I}_{kx} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{kx} \\ \bar{\omega}_{ky} \\ \bar{\omega}_{kz} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

El sistema (4.13) se va a resolver aplicando el método de integración de CD. Se trata de un método de integración explícito, por lo que el equilibrio se plantea en el instante t . Obviamente, el valor $\mathbf{x}(t)$ es conocido, de manera que el problema de esta expresión proviene del producto cruzado de las velocidades angulares, el cual deriva en un producto de velocidad de cuaterniones de la forma $\dot{q}_j \dot{q}_k$. Para resolverlo por el método de Newton, se realiza el siguiente desarrollo:

$$\bar{\omega}_j \bar{\omega}_i \simeq \bar{\omega}_j^0 \bar{\omega}_i^0 + \bar{\omega}_j^0 (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^0) + \bar{\omega}_i^0 (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_j^0) = -\bar{\omega}_j^0 \bar{\omega}_i^0 + \bar{\omega}_j^0 \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_i^0 \bar{\omega}_j \quad (4.14)$$

Con esto se puede escribir la ecuación (4.13) de la forma (4.15), donde se ha sustituido el segundo término de la derecha por su expresión linealizada:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_{kx} \\ \bar{t}_{ky} \\ \bar{t}_{kz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{kx} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{ky} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{kz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\omega}}_{kx} \\ \dot{\bar{\omega}}_{ky} \\ \dot{\bar{\omega}}_{kz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_x - \bar{I}_z) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz} (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx} (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky} (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky} \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz} \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx} \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Sustituyendo el valor de la aceleración angular por su equivalente en cuaterniones, se tiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_{kx} \\ \bar{t}_{ky} \\ \bar{t}_{kz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\bar{I}_{kx}(-q_{k3}\ddot{q}_{k2} + q_{k2}\ddot{q}_{k3} + q_{k0}\ddot{q}_{k1} - q_{k1}\ddot{q}_{k0}) \\ 2\bar{I}_{ky}(-q_{k1}\ddot{q}_{k3} + q_{k3}\ddot{q}_{k1} + q_{k0}\ddot{q}_{k2} - q_{k2}\ddot{q}_{k0}) \\ 2\bar{I}_{kz}(-q_{k2}\ddot{q}_{k1} + q_{k1}\ddot{q}_{k2} + q_{k0}\ddot{q}_{k3} - q_{k3}\ddot{q}_{k0}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_x - \bar{I}_z) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz} (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx} (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky} (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky} \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz} \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx} \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad angular y pasando el término de las coordenadas independientes a la izquierda la ecuación (4.16) se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \bar{t}_{ekx} \\ \bar{t}_{eky} \\ \bar{t}_{ekz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} 2 \bar{I}_{kx} (-q_{k3} \ddot{q}_{k2} + q_{k2} \ddot{q}_{k3} + q_{k0} \ddot{q}_{k1} - q_{k1} \ddot{q}_{k0}) \\ 2 \bar{I}_{ky} (-q_{k1} \ddot{q}_{k3} + q_{k3} \ddot{q}_{k1} + q_{k0} \ddot{q}_{k2} - q_{k2} \ddot{q}_{k0}) \\ 2 \bar{I}_{kz} (-q_{k2} \ddot{q}_{k1} + q_{k1} \ddot{q}_{k2} + q_{k0} \ddot{q}_{k3} - q_{k3} \ddot{q}_{k0}) \end{pmatrix}_k \\
 & \hspace{20em} (4.17) \\
 & + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 2(-q_{k2} \dot{q}_{k1} + q_{k1} \dot{q}_{k2} + q_{k0} \dot{q}_{k3} - q_{k3} \dot{q}_{k0})(\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 2(-q_{k3} \dot{q}_{k2} + q_{k2} \dot{q}_{k3} + q_{k0} \dot{q}_{k1} - q_{k1} \dot{q}_{k0})(\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 2(-q_{k1} \dot{q}_{k3} + q_{k3} \dot{q}_{k1} + q_{k0} \dot{q}_{k2} - q_{k2} \dot{q}_{k0})(\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{pmatrix} 2(-q_{k1} \dot{q}_{k3} + q_{k3} \dot{q}_{k1} + q_{k0} \dot{q}_{k2} - q_{k2} \dot{q}_{k0}) \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ 2(-q_{k2} \dot{q}_{k1} + q_{k1} \dot{q}_{k2} + q_{k0} \dot{q}_{k3} - q_{k3} \dot{q}_{k0}) \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ 2(-q_{k3} \dot{q}_{k2} + q_{k2} \dot{q}_{k3} + q_{k0} \dot{q}_{k1} - q_{k1} \dot{q}_{k0}) \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Es importante recordar que el cuaternión es idéntico expresado tanto en coordenadas locales como globales por lo que $q = \bar{q}$. Disponiendo el sistema de forma matricial se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \bar{t}_{kx} \\ \bar{t}_{ky} \\ \bar{t}_{kz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} -2\bar{I}_{kx}q_{k1} & 2\bar{I}_{kx}q_{k0} & -2\bar{I}_{kx}q_{k3} & 2\bar{I}_{kx}q_{k2} \\ -2\bar{I}_{ky}q_{k2} & 2\bar{I}_{ky}q_{k3} & 2\bar{I}_{ky}q_{k0} & -2\bar{I}_{ky}q_{k1} \\ -2\bar{I}_{kz}q_{k3} & -2\bar{I}_{kz}q_{k2} & 2\bar{I}_{kz}q_{k1} & 2\bar{I}_{kz}q_{k0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_{k0} \\ \ddot{q}_{k1} \\ \ddot{q}_{k2} \\ \ddot{q}_{k3} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -2\bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky})q_{k3} & -2\bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky})q_{k2} \\ -2\bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz})q_{k1} & 2\bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz})q_{k0} \\ -2\bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx})q_{k2} & 2\bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx})q_{k3} \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad (4.18) \\
 & + \begin{bmatrix} 2\bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky})q_{k1} & 2\bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky})q_{k0} \\ -2\bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz})q_{k3} & 2\bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz})q_{k2} \\ 2\bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx})q_{k0} & -2\bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx})q_{k1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{k0} \\ \dot{q}_{k1} \\ \dot{q}_{k2} \\ \dot{q}_{k3} \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} -2\bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky})q_{k2} & 2\bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky})q_{k3} \\ -2\bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz})q_{k3} & -2\bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz})q_{k2} \\ -2\bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx})q_{k1} & 2\bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx})q_{k0} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 2\bar{\omega}_{kz}^0 (I_{kz} - I_{ky})q_{k0} & -2\bar{\omega}_{kz}^0 (I_{kz} - I_{ky})q_{k1} \\ 2\bar{\omega}_{kx}^0 (I_{kx} - I_{kz})q_{k1} & 2\bar{\omega}_{kx}^0 (I_{kx} - I_{kz})q_{k0} \\ -2\bar{\omega}_{ky}^0 (I_{ky} - I_{kx})q_{k3} & 2\bar{\omega}_{ky}^0 (I_{ky} - I_{kx})q_{k2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{k0} \\ \dot{q}_{k1} \\ \dot{q}_{k2} \\ \dot{q}_{k3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Reorganizando el sistema anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_{kx} \\ \bar{\mathbf{t}}_{ky} \\ \bar{\mathbf{t}}_{kz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{\mathbf{I}}_{kz} - \bar{\mathbf{I}}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{\mathbf{I}}_{kx} - \bar{\mathbf{I}}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{\mathbf{I}}_{ky} - \bar{\mathbf{I}}_{kx}) \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k1} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k0} & -2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k3} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k2} \\ -2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k2} & 2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k3} & 2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k0} & -2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k1} \\ -2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k3} & -2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k2} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k1} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{k0} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{k1} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{k2} \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{k3} \end{Bmatrix} + \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & + \begin{bmatrix} -2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k3} + \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{\mathbf{I}}_{kz} - \bar{\mathbf{I}}_{ky}) & 2(\bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k3} - \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{\mathbf{I}}_{kz} - \bar{\mathbf{I}}_{ky}) \\ -2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k3} + \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{\mathbf{I}}_{kx} - \bar{\mathbf{I}}_{kz}) & 2(\bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k0} - \bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{\mathbf{I}}_{kx} - \bar{\mathbf{I}}_{kz}) \\ -2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k2} + \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{\mathbf{I}}_{ky} - \bar{\mathbf{I}}_{kx}) & 2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k0} + \bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k3})(\bar{\mathbf{I}}_{ky} - \bar{\mathbf{I}}_{kx}) \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 2(\bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k0} + \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{\mathbf{I}}_{kz} - \bar{\mathbf{I}}_{ky}) & 2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k0} - \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{\mathbf{I}}_{kz} - \bar{\mathbf{I}}_{ky}) \\ 2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k1} - \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k3})(\bar{\mathbf{I}}_{kx} - \bar{\mathbf{I}}_{kz}) & 2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k0} + \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{\mathbf{I}}_{kx} - \bar{\mathbf{I}}_{kz}) \\ 2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k0} - \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k3})(\bar{\mathbf{I}}_{ky} - \bar{\mathbf{I}}_{kx}) & 2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k2} - \bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{\mathbf{I}}_{ky} - \bar{\mathbf{I}}_{kx}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{k0} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{k1} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{k2} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{k3} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La ecuación de Euler linealizada para un sólido k , expresada en coordenadas locales se puede escribir como:

$$\bar{\mathbf{t}}_k + \bar{\mathbf{t}}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_k^0) = \bar{\mathbf{M}}_{Rk}(\mathbf{q}_k) \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_k + \bar{\mathbf{C}}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_k^0) \dot{\bar{\mathbf{q}}}_k \quad (4.20)$$

Donde:

$$\bar{\mathbf{t}}_k = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_{kx} \\ \bar{\mathbf{t}}_{ky} \\ \bar{\mathbf{t}}_{kz} \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_k^0) = \begin{Bmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{\mathbf{I}}_{kz} - \bar{\mathbf{I}}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{\mathbf{I}}_{kx} - \bar{\mathbf{I}}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{\mathbf{I}}_{ky} - \bar{\mathbf{I}}_{kx}) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{Rk}(\mathbf{q}_k) = \begin{bmatrix} -2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k1} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k0} & -2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k3} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kx} \mathbf{q}_{k2} \\ -2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k2} & 2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k3} & 2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k0} & -2\bar{\mathbf{I}}_{ky} \mathbf{q}_{k1} \\ -2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k3} & -2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k2} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k1} & 2\bar{\mathbf{I}}_{kz} \mathbf{q}_{k0} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\bar{C}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) = \begin{bmatrix} -2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k3} + \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) & 2(\bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k3} - \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ -2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k3} + \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) & 2(\bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k0} - \bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ -2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k2} + \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) & 2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k0} + \bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k3})(\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \\ 2(\bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k0} + \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) & 2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k0} - \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{I}_{kz} - \bar{I}_{ky}) \\ 2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k1} - \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k3})(\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) & 2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k0} + \bar{\omega}_{kz}^0 \mathbf{q}_{k2})(\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ 2(\bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k0} - \bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k3})(\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) & 2(\bar{\omega}_{ky}^0 \mathbf{q}_{k2} - \bar{\omega}_{kx}^0 \mathbf{q}_{k1})(\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Estas expresiones sólo son válidas cuando los términos están expresados en el sistema de coordenadas ligado al sólido. Sin embargo, es necesario tenerlas referidas al sistema global. Para el cambio de coordenadas, hay que incluir la matriz de rotación:

$$R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{t}}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{t}}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) = R(\mathbf{q}_k) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k) \ddot{\mathbf{q}}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{C}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) \dot{\mathbf{q}}_k \quad (4.25)$$

Además, si se considera que:

$$R_4^T(\mathbf{q}_k) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R^T(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Se tiene:

$$\bar{\mathbf{q}}_k = R_4^T(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k \quad (4.27)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}_k = R_4^T(\mathbf{q}_k) \dot{\mathbf{q}}_k \quad (4.28)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_k = R_4^T(\mathbf{q}_k) \ddot{\mathbf{q}}_k \quad (4.29)$$

Con esto se obtiene:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{t}}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{t}}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) &= \\ &= R(\mathbf{q}_k) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k) R_4^T(\mathbf{q}_k) \ddot{\mathbf{q}}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{C}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) R_4^T(\mathbf{q}_k) \dot{\mathbf{q}}_k \end{aligned} \quad (4.30)$$

Además teniendo en cuenta que:

$$\dot{\bar{\mathbf{q}}}_k^0 = \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_{k0}^0 \\ \dot{\bar{q}}_{k1}^0 \\ \dot{\bar{q}}_{k2}^0 \\ \dot{\bar{q}}_{k3}^0 \end{bmatrix} = R_4^T(\mathbf{q}_k) \dot{\mathbf{q}}_k^0 \quad (4.31)$$

Se puede escribir la ecuación (4.30) como:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{t}}_k + R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{t}}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) &= \\ = R(\mathbf{q}_k)\bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k)R_4^T(\mathbf{q}_k)\ddot{\mathbf{q}}_k + R(\mathbf{q}_k)\bar{C}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0)R_4^T(\mathbf{q}_k)\dot{\mathbf{q}}_k \end{aligned} \quad (4.32)$$

Si se nombra a los términos:

$$\mathbf{t}_k = R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{t}}_k \quad (4.33)$$

$$\mathbf{t}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) = R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{t}}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) \quad (4.34)$$

$$M_{Rk}(\mathbf{q}_k) = R(\mathbf{q}_k)\bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k)R_4^T(\mathbf{q}_k) \quad (4.35)$$

$$C_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) = R(\mathbf{q}_k)\bar{C}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0)R_4^T(\mathbf{q}_k) \quad (4.36)$$

La expresión de Euler linealizada expresada en el sistema de referencia absoluto es:

$$\mathbf{t}_k + \mathbf{t}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) = M_{Rk}(\mathbf{q}_k)\ddot{\mathbf{q}}_k + C_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0)\dot{\mathbf{q}}_k \quad (4.37)$$

Donde \mathbf{t}_k es el vector de momentos exteriores, \mathbf{t}_{CRk} es el vector de fuerzas indirectas surgido del proceso de linealización, M_{Rk} es la matriz de masas y C_{CRk} es una matriz donde se agrupan todas aquellas componentes procedentes de la linealización proporcionales a la velocidad.

4.1.3 Ecuaciones de Newton-Euler

Las ecuaciones de Newton relacionan la aceleración del centro de masa y las fuerzas exteriores. De manera que se trata de una expresión lineal, así que simplemente hay que añadir la ecuación (4.1) a la (4.37) formando el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_k = m_k \ddot{\mathbf{r}}_k \\ \mathbf{t}_k + \mathbf{t}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0) = M_{Rk}(\mathbf{q}_k)\ddot{\mathbf{q}}_k + C_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k^0)\dot{\mathbf{q}}_k \end{cases} \quad (4.38)$$

Agrupando términos en forma matricial se escriben las ecuaciones de Newton-Euler para un único elemento k como:

$$\mathbf{f}_{ek}(t) + \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = M_k(\mathbf{x}_k(t))\ddot{\mathbf{x}}_k(t) + C_{ik}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t))\dot{\mathbf{x}}_k(t) \quad (4.39)$$

Siendo:

$$\mathbf{f}_{ek} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{t}_k \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{f}_{ik} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{t}_{CRk} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

$$M_k = \begin{bmatrix} m_k I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & M_{Rk} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$C_{ik} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & C_{CRk} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Ahora ya se incluye el termino \mathbf{x}_k que sitúa correctamente al sólido en el espacio tanto en posición como en orientación:

$$\mathbf{x}_k = \left[x_k \ y_k \ z_k \ q_{0k} \ q_{1k} \ q_{2k} \ q_{3k} \ q_{4k} \right]^T \quad (4.44)$$

Lo que permite, una vez aplicado el método de integración, obtener de forma iterativa $\mathbf{x}_k(t + \Delta t)$.

4.2 Ecuaciones del movimiento para sistemas con varios cuerpos

Las ecuaciones del movimiento previamente planteadas se basan en el análisis de sólido libre por lo que tratan a cada elemento de forma independiente. De esta manera resulta muy sencillo plantear las ecuaciones para un sistema de varios cuerpos, ya que resulta ser un sistema desacoplado simplemente basta con realizar el proceso de expansión y ensamblado. Si se tiene un sistema de n elementos las ecuaciones de equilibrio que definen el comportamiento tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = M(\mathbf{x}(t)) \ddot{\mathbf{x}}(t) + C_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (4.45)$$

Siendo:

$$\mathbf{f}_e(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t)_{e1} \\ \mathbf{f}(t)_{e2} \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t)_{ej} \\ \vdots \\ \mathbf{f}(t)_{e(n-1)} \\ \mathbf{f}(t)_{en} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{i1}(\mathbf{x}_1(t), \dot{\mathbf{x}}_1(t)) \\ \mathbf{f}_{i2}(\mathbf{x}_2(t), \dot{\mathbf{x}}_2(t)) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{x}_j(t), \dot{\mathbf{x}}_j(t)) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{in-1}(\mathbf{x}_{n-1}(t), \dot{\mathbf{x}}_{n-1}(t)) \\ \mathbf{f}_{in}(\mathbf{x}_n(t), \dot{\mathbf{x}}_n(t)) \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

$$M(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} M_1(\mathbf{x}_1(t)) & \mathbf{0}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0}_{1,j} \\ \mathbf{0}_{2,1} & M_2(\mathbf{x}_2(t)) & \cdots & \mathbf{0}_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{j,1} & \mathbf{0}_{j,2} & \cdots & M_j(\mathbf{x}_j(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,2} & \cdots & \mathbf{0}_{n-1,j} \\ \mathbf{0}_{n,1} & \mathbf{0}_{n,2} & \cdots & \mathbf{0}_{n,j} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{0}_{1,n-1} & \mathbf{0}_{1,n} \\ \cdots & \mathbf{0}_{2,n-1} & \mathbf{0}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \mathbf{0}_{j,n-1} & \mathbf{0}_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & M_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1}(t)) & \mathbf{0}_{1,n} \\ \cdots & \mathbf{0}_{n,n-1} & M_n(\mathbf{x}_n(t)) \end{bmatrix}$$

$$C_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) =$$

$$\left[\begin{array}{cccc} C_{i_1}(\mathbf{x}_1(t), \dot{\mathbf{x}}_1(t)) & \mathbf{0}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0}_{1,j} \\ \mathbf{0}_{2,1} & C_{i_2}(\mathbf{x}_2(t), \dot{\mathbf{x}}_2(t)) & \cdots & \mathbf{0}_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{j,1} & \mathbf{0}_{j,2} & \cdots & C_{ij}(\mathbf{x}_j(t), \dot{\mathbf{x}}_j(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{0}_{n-1,2} & \cdots & \mathbf{0}_{n-1,j} \\ \mathbf{0}_{n,1} & \mathbf{0}_{n,2} & \cdots & \mathbf{0}_{n,j} \end{array} \right] \quad (4.49)$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \cdots & \mathbf{0}_{1,n-1} & \mathbf{0}_{1,n} \\ \cdots & \mathbf{0}_{2,n-1} & \mathbf{0}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \mathbf{0}_{j,n-1} & \mathbf{0}_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & C_{i_{n-1}}(\mathbf{x}_{n-1}(t), \dot{\mathbf{x}}_{n-1}(t)) & \mathbf{0}_{1,n} \\ \cdots & \mathbf{0}_{n,n-1} & C_{in}(\mathbf{x}_n(t), \dot{\mathbf{x}}_n(t)) \end{array} \right]$$

Y con:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_j(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1}(t) \\ \mathbf{x}_n(t) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Según se ha propuesto la ecuación (4.45) estaría incompleta. En un sistema mecánico los elementos están unidos entre sí mediante pares por lo que al plantear el sistema de ecuaciones completo hay que añadir los esfuerzos causados por estas ligaduras. Todas estas fuerzas se van a agrupar en un único vector $\mathbf{f}_r(\mathbf{x})$. Finalmente las ecuaciones lineales de equilibrio dinámico de un sistema definidas en un triedro de referencia absoluto tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) = M(\mathbf{x}(t))\ddot{\mathbf{x}}(t) + C_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (4.51)$$

4.3 Elementos discretos

Dentro de los elementos discretos se incluyen los muelles y los amortiguadores. Se trata de dispositivos que situados entre dos cuerpos son capaces de almacenar o disipar energía. Tiene el propósito de modelizar aquellos elementos que, por ejemplo, formen parte de un sistema de suspensión o simplemente de incluir con mayor o menor exactitud las propiedades elásticas y/o amortiguadoras de un elemento sin tener que recurrir a considerarlo flexible.

En la figura (4.1) se muestra cómo es posible simular el comportamiento de un sistema de suspensión de un vehículo en el que se ha incluido las propiedades de la rueda por medio de un elemento muelle y amortiguador.

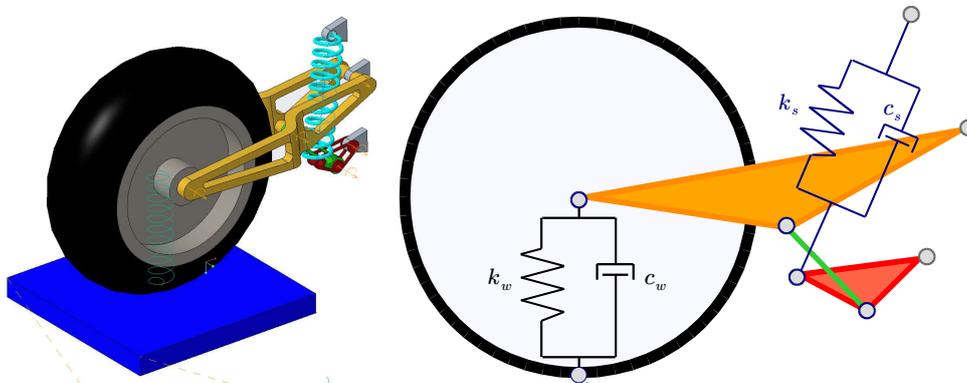


Figura 4.1: Modelización de elementos discretos.

Existen dos formas de plantear estos dispositivos. El primero consiste en introducirlo asociado a un par, es decir, un par P a cuyo movimiento se le añade un elemento discreto. Este procedimiento acarrea el problema de tener que generar cuerpos cuya masa pueda ser despreciable lo que implica un coste computacional adicional y problemas de matriz de masa no definida. El segundo, es modelizar el muelle o el amortiguador como un generador de fuerzas entre dos puntos, siendo éste el que se llevará a cabo.

Es importante recordar que se va a aplicar un método de integración explícito, esto significa que el equilibrio se establece en el instante t . La ecuación que modeliza la fuerza del resorte, es función únicamente de la posición, por lo que a la hora de implementarlo en la ecuación de equilibrio se podría hacer tanto como un vector de fuerzas exteriores como de forma matricial y la convergencia no se vería afectada. Por otra parte, las fuerzas que generan los amortiguadores dependen de la velocidad, que a su vez depende de la posición en el instante $t+\Delta t$, la cual no es conocida. Para que la

convergencia de las ecuaciones siga siendo cuadrática, es necesario disponer la fuerza ejercida por el amortiguador de forma matricial para posteriormente, aplicar las ecuaciones del método de CD.

4.3.1 Muelles

Si se introduce un muelle entre dos puntos c y o de los cuerpos p y m respectivamente, como se observa en la figura (4.2), la fuerza ejercida por el resorte sobre el punto c , se define como:

$$\mathbf{f}_c = -k_{oc}(l-l^0)\mathbf{u} \quad (4.52)$$

Donde k_{oc} es la constante elástica del muelle, l es una magnitud escalar que define la distancia entre los puntos o y c , \mathbf{u} el vector unitario que determina la dirección de la distancia l , y l^0 es la longitud del muelle en reposo.

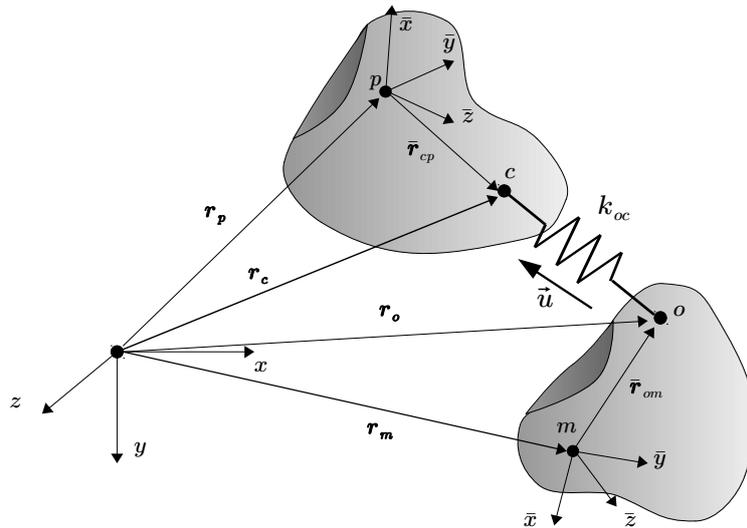


Figura 4.2: Muelle aplicado entre dos cuerpos.

Desarrollando la ecuación (4.52):

$$\mathbf{f}_c = -k_{oc}(l-l^0)\mathbf{u} = -k_{oc}\left(1 - \frac{l^0}{l}\right)l\mathbf{u} \quad (4.53)$$

Puede escribirse que:

$$l\mathbf{u} = \mathbf{l}_{oc} = \mathbf{r}_c - \mathbf{r}_o = \mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck} - \mathbf{r}_m - R(\mathbf{q}_m)\bar{\mathbf{r}}_{om} \quad (4.54)$$

Teniendo en cuenta la relación (4.54), se llama al termino \hat{k}_{oc} :

$$\hat{k}_{oc} = k_{oc} \left(1 - \frac{l^0}{l} \right) \quad (4.55)$$

Donde el valor de l se calcula mediante la siguiente expresión:

$$l = \sqrt{\mathbf{l}_{oc}^T \mathbf{l}_{oc}} \quad (4.56)$$

Ahora la ecuación (4.53) se escribe como:

$$\mathbf{f}_c = -\hat{k}_{oc} [\mathbf{r}_p + \mathbf{R}(\mathbf{q}_p) \bar{\mathbf{r}}_{cp} - \mathbf{r}_m - \mathbf{R}(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{r}}_{om}] \quad (4.57)$$

En el punto 3.2.1 se ha visto como poner las coordenadas de un punto en globales a partir de su definición en un sistema local. Entonces, aplicando la ecuación (3.35) se puede expresar la fuerza que ejerce el muelle en el punto c del cuerpo p como:

$$\mathbf{f}_c = -\hat{k}_{oc} [P_{pc}(\mathbf{q}_p) \mathbf{x}_p - P_{mo}(\mathbf{q}_m) \mathbf{x}_m] \quad (4.58)$$

En el cuerpo m , las fuerzas que genera el muelle en el punto o , deben ser iguales en magnitud pero de sentido opuesto, con lo que se tiene:

$$\mathbf{f}_o = -\mathbf{f}_c = \hat{k}_{oc} [P_{pc}(\mathbf{q}_p) \mathbf{x}_p - P_{mo}(\mathbf{q}_m) \mathbf{x}_m] \quad (4.59)$$

Sin embargo, estas expresiones sólo son válidas si el resorte se aplica en el CdG. Si se quiere usar una expresión para un punto cualquiera del sólido hay que añadir el momento provocado por la fuerza del muelle en el CdG del elemento. Para plantearlo se puede hacer como en el punto 3.4 de la siguiente manera. Empleando la ecuación (3.94), la fuerza que ejerce el resorte sobre el CdG del cuerpo p es:

$$\mathbf{f}_p = U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp}) \mathbf{f}_c = -U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp}) \hat{k}_{oc} P_{pc}(\mathbf{q}_p) \mathbf{x}_p + U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp}) \hat{k}_{oc} P_{mo}(\mathbf{q}_m) \mathbf{x}_m \quad (4.60)$$

Y para el cuerpo m , se obtiene:

$$\mathbf{f}_m = U_{mo}(\bar{\mathbf{r}}_{om}) \mathbf{f}_o = U_{mo}(\bar{\mathbf{r}}_{om}) \hat{k}_{oc} P_{pc}(\mathbf{q}_p) \mathbf{x}_p - U_{mo}(\bar{\mathbf{r}}_{om}) \hat{k}_{oc} P_{mo}(\mathbf{q}_m) \mathbf{x}_m \quad (4.61)$$

Si se tiene un sistema formado por n elementos el vector de fuerzas elásticas quedaría:

$$\mathbf{f}_k = \{0 \quad \cdots \quad \mathbf{f}_p \quad \cdots \quad \mathbf{f}_m \quad \cdots \quad \mathbf{0}_n\}^T \quad (4.62)$$

De forma matricial puede escribirse la ecuación anterior como:

$$\mathbf{f}_k = -K_{oc}(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t) \quad (4.63)$$

Donde:

$$K_{oc} = \begin{bmatrix} 0_{11} & \cdots & 0_{1p} & \cdots & 0_{1m} & \cdots & 0_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{p1} & \cdots & U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp})\hat{k}_{oc}P_{pc}(\mathbf{q}_p) & \cdots & -U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp})\hat{k}_{oc}P_{mo}(\mathbf{q}_m) & \cdots & 0_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m1} & \cdots & -U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp})\hat{k}_{oc}P_{pc}(\mathbf{q}_p) & \cdots & U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp})\hat{k}_{oc}P_{mo}(\mathbf{q}_m) & \cdots & 0_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & \cdots & 0_{np} & \cdots & 0_{nm} & \cdots & 0_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

En el caso de que exista más de un resorte en el sistema, la matriz de rigidez del modelo completo se forma mediante ensamblado de las matrices de rigidez de cada muelle, de la siguiente forma:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (4.65)$$

4.3.2 Amortiguadores

En la figura 4.3, se muestra un amortiguador situado entre los puntos c y o , de los cuerpos p y m respectivamente.

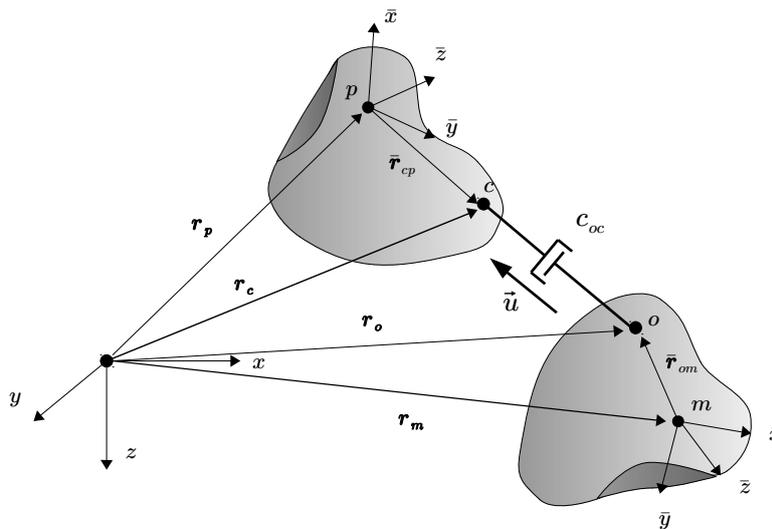


Figura 4.3: Dispositivo de amortiguación entre puntos de dos cuerpos diferentes.

Si se denomina a c_{oc} como la constante de amortiguación, la expresión que define la fuerza generada por el amortiguador es:

$$\mathbf{f}_c = -c_{oc} [(\dot{\mathbf{r}}_c - \dot{\mathbf{r}}_o)^T \mathbf{u}] \mathbf{u} \quad (4.66)$$

La ecuación anterior puede reorganizarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}_c = -c_{oc} \mathbf{u} [\mathbf{u}^T (\dot{\mathbf{r}}_c - \dot{\mathbf{r}}_o)] \quad (4.67)$$

El vector director \mathbf{u} depende de la posición, por lo que en el instante t es conocido. Por otra parte en el apartado 3.3 se ha visto como obtener la velocidad en un punto, así que teniendo en cuenta la ecuación (3.88), la expresión (4.67) se puede escribir:

$$\mathbf{f}_c = -c_{oc} \mathbf{u} \left\{ \mathbf{u}^T [S_{ab}(\mathbf{q}_p, \bar{\mathbf{r}}_{cp}) \dot{\mathbf{x}}_p - S_{ab}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{om}) \dot{\mathbf{x}}_m] \right\} \quad (4.68)$$

Para el cuerpo m la fuerza transmitida por el amortiguador es:

$$\mathbf{f}_o = -\mathbf{f}_c = c_{oc} \mathbf{u} \left\{ \mathbf{u}^T [S_{ab}(\mathbf{q}_p, \bar{\mathbf{r}}_{cp}) \dot{\mathbf{x}}_p - S_{ab}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{om}) \dot{\mathbf{x}}_m] \right\} \quad (4.69)$$

Como en el caso del resorte, para trasladar el efecto el amortiguador al CdG del elemento hay que añadir el par generado por la fuerza, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p &= U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp}) \mathbf{f}_c = \\ &= -U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp}) c_{oc} \mathbf{u} \left\{ \mathbf{u}^T [S_{ab}(\mathbf{q}_p, \bar{\mathbf{r}}_{cp}) \dot{\mathbf{x}}_p - S_{ab}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{om}) \dot{\mathbf{x}}_m] \right\} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Y para el elemento m :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_m &= U_{mo}(\bar{\mathbf{r}}_{om}) \mathbf{f}_o = \\ &= U_{mo}(\bar{\mathbf{r}}_{om}) c_{oc} \mathbf{u} \left\{ \mathbf{u}^T [S_{ab}(\mathbf{q}_p, \bar{\mathbf{r}}_{cp}) \dot{\mathbf{x}}_p - S_{ab}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{om}) \dot{\mathbf{x}}_m] \right\} \end{aligned} \quad (4.71)$$

En un sistema de n elementos el vector de fuerzas disipativas es:

$$\mathbf{f}_d = [0 \quad \cdots \quad \mathbf{f}_p \quad \cdots \quad \mathbf{f}_m \quad \cdots \quad 0_n]^T \quad (4.72)$$

Se puede plantear de forma matricial haciendo:

$$\mathbf{f}_d = -C_{oc}(\mathbf{x}(t)) \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (4.73)$$

Donde:

$$C_{oc} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{11} & \cdots & & \mathbf{0}_{1p} & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots \\ \mathbf{0}_{p1} & \cdots & U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp}) \mathbf{u} \mathbf{u}^T S_{ab}(\mathbf{q}_p, \bar{\mathbf{r}}_{cp}) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{0}_{m1} & \cdots & -U_{mo}(\bar{\mathbf{r}}_{om}^L) \mathbf{u} \mathbf{u}^T S_{ab}(\mathbf{q}_p, \bar{\mathbf{r}}_{cp}) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{0}_{n1} & \cdots & & \mathbf{0}_{np} & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\begin{bmatrix} & & \mathbf{0}_{1m} & \cdots & \mathbf{0}_{1n} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ -U_{pc}(\bar{\mathbf{r}}_{cp}) \mathbf{u} \mathbf{u}^T S_{ab}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{om}) & \cdots & \mathbf{0}_{pn} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{mo}(\bar{\mathbf{r}}_{om}) \mathbf{u} \mathbf{u}^T S_{ab}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{om}) & \cdots & \mathbf{0}_{mn} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \mathbf{0}_{nm} & \cdots & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix}$$

Como se ha comentado, al existir términos de velocidad no se puede implementar en la ecuación de equilibrio como una fuerza exterior y es necesario disponerla de forma matricial. Una ventaja es que la expresión es lineal respecto a la velocidad, de forma que la matriz C_{oc} es función únicamente de la posición y no hace falta linealizarla.

En el caso de que exista más de un amortiguador en el sistema, la matriz de amortiguación del modelo completo se forma mediante la suma de las matrices de amortiguación de cada elemento:

$$C_d = \sum_i^n C_{oci} \quad (4.75)$$

4.3.3 Implementación de los elementos discretos en las ecuaciones de equilibrio

Partiendo de un sistema de n elementos, las fuerzas generadas por elementos discretos pueden incluirse en la ecuación de equilibrio del modelo completo como fuerzas exteriores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_d = \\ = M(\mathbf{x}(t))\ddot{\mathbf{x}}(t) + C_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Desarrollando los términos de las fuerzas elástica y disipativa:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) - K\mathbf{x}(t) - C_d\dot{\mathbf{x}}(t) = \\ = M(\mathbf{x}(t))\ddot{\mathbf{x}}(t) + C_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Pasando las matrices K y C al otro lado se puede hacer:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) = \\ = M(\mathbf{x}(t))\ddot{\mathbf{x}}(t) + [C_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + C_d]\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Una vez que se han añadido los elementos discretos en la ecuación de equilibrio del sistema, puede agruparse los términos relativos a la velocidad de la siguiente manera:

$$C(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = C_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + C_d(\mathbf{x}(t)) \quad (4.79)$$

Por último, tras incluir los muelles y los amortiguadores, se obtiene la forma final de la ecuación de equilibrio, la cual se escribe como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) = \\ = M(\mathbf{x}(t))\ddot{\mathbf{x}}(t) + C(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Donde:

M : La matriz de masas. Se obtiene a partir del ensamblaje de las matrices M_k de cada elemento.

C : Es la matriz de amortiguamiento. En ella se incluyen las propiedades de los elementos discretos con características disipativas como pueden ser amortiguadores u otro tipo de esfuerzos proporcionales a la velocidad que se aplican en el sistema. También contiene las componentes obtenidas del proceso de linealización proporcionales a la velocidad.

K : Es la matriz de rigidez. Se obtiene a partir de los elementos elásticos como muelles discretos o similares que generan esfuerzos proporcionales a los desplazamientos.

\mathbf{f}_e : Se trata del vector de fuerzas externas que se aplican al sistema.

- \mathbf{f}_i : El vector de fuerzas indirectas. Se forma mediante el proceso de linealización.
- \mathbf{f}_r : Es el vector de las fuerzas de enlace o de restricción. Son las fuerzas generadas por los pares del mecanismo.

5 Integración por diferencias centrales

Los métodos de integración implícitos tienen un mayor rango de estabilidad llegando incluso a ser incondicionalmente estables en algunos casos. Obviamente, esto ofrece una ventaja, ya que es posible escoger un mayor incremento de tiempo que reduzca el tiempo de cálculo de la simulación. Por otro lado, el equilibrio se plantea en $t+\Delta t$ lo cual implica un mayor coste operativo, dado que hay que recalcular un mayor número de términos en las iteraciones requeridas para resolver cada instante. Es importante recalcar además que muchas veces el incremento de tiempo necesario viene determinado no por la estabilidad, sino por la precisión, por lo que en muchos casos no es necesario recurrir a un método implícito.

Los métodos explícitos son, en general, más fáciles de formular, ya que plantean el equilibrio en t , lo que permite recalcular menos términos en el proceso iterativo para resolver cada instante. El inconveniente que presentan es que son condicionalmente estables, lo que obliga a un incremento de tiempo máximo determinado por la estabilidad. Asimismo, el orden de precisión de los métodos implícitos suele ser superior al de los métodos explícitos si bien es cierto que el mayor orden de precisión que se puede lograr de un método incondicionalmente estable es dos. Es importante indicar que en condiciones no lineales, como es el caso sobre el que trata este trabajo, no existe ninguna garantía de estabilidad tanto en métodos explícitos como en implícitos, ya que hasta la fecha no se ha desarrollado una teoría de estabilidad válida para sistemas no lineales.

En este trabajo se describe una metodología para la integración de MBS formados por elementos sólidos. Teniendo en cuenta este supuesto, la rigidez del sistema va a venir determinada por un elemento de rigidez definida que conecte dos cuerpos como puede ser el muelle de un sistema de suspensión. En este sentido, la frecuencia más alta del sistema que, en el caso del método

de las diferencias centrales es el parámetro que determina el incremento de tiempo máximo de cálculo, no será muy elevada, por lo que el incremento de tiempo máximo vendrá determinado por la precisión. En caso de trabajar con elementos flexibles, aquí si pueden intervenir un mayor número de frecuencias y el incremento de tiempo se vería sensiblemente afectado por el riesgo de inestabilidad.

Por otra parte, al tratarse de un integrador de orden 2 es posible integrar directamente el sistema de ecuaciones (4.80). La ventaja es que de esta manera no es necesario duplicar las dimensiones del sistema de ecuaciones para reducir el orden diferencial. Valorando estos aspectos se ha escogido el método de diferencias centrales como método de integración de las ecuaciones del movimiento.

5.1 Características del método de integración

Se trata de un método explícito de orden 2, con buenas prestaciones tanto en su sencillez a la hora de ser implementado en el proceso como en su velocidad de cálculo. Haciendo el desarrollo en series de Taylor para una función en los instantes $t+\Delta t$ y $t-\Delta t$ próximos a t , se tiene:

$$f(t+\Delta t) = f(t) + f'(t)(\Delta t) + \frac{f''(t)}{2}(\Delta t)^2 \quad (5.1)$$

$$f(t-\Delta t) = f(t) - f'(t)(\Delta t) + \frac{f''(t)}{2}(\Delta t)^2 \quad (5.2)$$

Restando las ecuaciones (5.1) y (5.2) se obtiene la velocidad en el instante t :

$$f'(t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad (5.3)$$

Por otra parte sumando se consigue la aceleración:

$$f''(t) = \frac{f(t+\Delta t) - 2f(t) + f(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (5.4)$$

De esta manera se logra a través de tres posiciones consecutivas calcular la velocidad y la aceleración en el instante central. El análisis de estabilidad se efectúa a través de von Neumann [165], planteando un error exponencial creciente o decreciente. Del cual se concluye que para garantizar la estabilidad se debe cumplir la siguiente condición:

$$\Delta t_{max} \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (5.5)$$

La condición (5.5) del análisis de estabilidad de von Neuman es válido para ecuaciones lineales, en el caso de las ecuaciones de la dinámica no hay forma de saber cómo afecta la no linealidad a la estabilidad. Sin embargo, aunque no se pueda hacer un cálculo exacto, se acepta la expresión (5.5) como una aproximación.

En definitiva, el método CD es un método B-estable y su límite de estabilidad está influenciado por la frecuencia más alta del sistema. La elección del incremento de tiempo puede realizarse en base a 3 criterios:

- Se debe cumplir el criterio de estabilidad, garantizando la convergencia hacia la solución.
- El incremento de tiempo debe ser suficientemente pequeño para asegurar no perder información en el régimen transitorio.
- El régimen permanente tiene que estar definido correctamente sin que exista pérdida de calidad en la solución.

Como se ha venido comentando, debido a la hipótesis de sólido rígido las frecuencias no van a ser excesivamente elevadas como para poner en peligro la estabilidad por lo que la única limitación será la exactitud de la solución.

En cualquier caso si hubiera la necesidad de trabajar con sólidos flexibles se podría aplicar alguna técnica de superposición modal truncada para altas frecuencias y aplicar el método CD aunque esto queda fuera de este trabajo. Por ello, en este trabajo se emplea un incremento de tiempo constante acorde con los 3 criterios formulados.

5.2 Aplicación del método

Partiendo de la ecuación (4.80) que define el comportamiento dinámico del sistema, se sustituyen los términos de la velocidad y aceleración por los correspondientes del método CD [10,153,154], ecuaciones (5.3) y (5.4):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) = \\
 & = M(\mathbf{x}(t)) \left(\frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - 2\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \right) + \\
 & + C(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \left(\frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \right) + K(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Los términos que dependen de $\mathbf{x}(t)$, al ser un método explícito, ya están calculados. Sin embargo, los que dependen de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ no, debido a que éste depende de $\mathbf{x}(t+\Delta t)$. Organizando el sistema en función de los desplazamientos se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \left(M(\mathbf{x}(t)) \frac{1}{\Delta t^2} + C(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \frac{1}{2\Delta t} \right) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \\
 & = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) + \\
 & + \left(-M(\mathbf{x}(t)) \frac{1}{\Delta t^2} + C(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \frac{1}{2\Delta t} \right) \mathbf{x}(t-\Delta t) + \\
 & + \left(M(\mathbf{x}(t)) \frac{2}{\Delta t^2} - K(\mathbf{x}(t)) \right) \mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

La restricción impuesta por la norma del cuaternión se podría incluir dentro del sistema de ecuaciones pero es preferible implementarla como una restricción más. En cualquier caso en esta norma se parte de $q_0(t+\Delta t)$ igual a $q(t)$ para posteriormente actualizar este valor en cada iteración correspondiente al cálculo de $q_j(t+\Delta t)$.

De manera más compacta, se puede escribir la ecuación (5.7) como:

$$\begin{aligned}
 & A(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{x}(t+\Delta t) = \\
 & = \mathbf{e}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) + B(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{x}(t-\Delta t) + D(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Donde:

$$A(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \left(M(\mathbf{x}(t)) \frac{1}{\Delta t^2} + C(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \frac{1}{2\Delta t} \right) \tag{5.9}$$

$$B(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \left(-M(\mathbf{x}(t)) \frac{1}{\Delta t^2} + C(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \frac{1}{2\Delta t} \right) \tag{5.10}$$

$$D(\mathbf{x}(t)) = \left(M(\mathbf{x}(t)) \frac{2}{\Delta t^2} - K(\mathbf{x}(t)) \right) \tag{5.11}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \tag{5.12}$$

Hay que tener cuenta que, al introducir relaciones entre elementos tales como pares, es necesario resolver la ecuación de equilibrio para todos los elementos a la vez.

Como se aprecia en la ecuación (5.8), tras aplicar las ecuaciones de CD, la matriz $K(\boldsymbol{x})$ solo aparece en la matriz $D(\boldsymbol{x})$, mientras que las fuerzas exteriores se incluyen en el vector $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$. Por tanto, es fácil comprobar que es completamente equivalente implementar los elementos resorte bien como una fuerza exterior o bien de forma matricial. Esto no se puede hacer con elementos que disipen energía, ya que dependen de la velocidad.

6 Restricciones

Las restricciones forman un sistema de ecuaciones algebraicas, mayormente no lineales, que establecen una relación entre el movimiento relativo de los cuerpos del sistema. Estas restricciones junto con las ecuaciones de equilibrio forman un sistema de ecuaciones diferenciales algebraico. En la bibliografía se aprecian distintas maneras de incluir las ligaduras en el sistema, siendo la más interesante la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Esta técnica trata de encontrar un punto estacionario de una función definida por un número finito de variables. Ese punto también debe cumplir una serie de condiciones determinadas por una relación entre dichas variables, que son precisamente las ecuaciones de restricción. Este concepto trasladado a las ecuaciones de equilibrio permite sustituir el término de los esfuerzos de ligadura por la traspuesta del jacobiano de la matriz de restricciones premultiplicado por un vector formado por los propios multiplicadores de Lagrange. De esta manera, se obtiene un sistema diferencial-algebraico donde las incógnitas no son solo las variables del sistema si no que además también aparecen los multiplicadores de Lagrange. Para resolver el problema hay que añadir tantas ecuaciones como multiplicadores de Lagrange, siendo estas ecuaciones las propias restricciones.

A partir de aquí, existen varias alternativas para transformar el sistema en un EDO como son el método de Lagrange estabilizado junto con la estabilización de Baumgarte, el método de los penalizadores o el método de Lagrange aumentado. Todos ellos ampliamente conocidos. De especial interés en métodos explícitos es el método de la matriz R o también conocido como la formulación de subespacio nulo (*“Null Space Formulation”*). Consiste en relacionar las velocidades de las variables que definen el sistema con las velocidades independientes por medio de una matriz R . Al incluirlo en el sistema las fuerzas de restricción se anulan, obteniendo un sistema de igual dimensión que el número de variables independientes.

En este documento se aplica el método del subespacio nulo para introducir las restricciones en el problema. Al haber empleado un método de integración de orden dos, puede plantearse el algoritmo en función de los desplazamientos, donde las únicas variables desconocidas son los desplazamientos en el instante $t+\Delta t$. Esto posibilita introducir las restricciones únicamente en términos de la posición, evitando tener que resolver el problema de velocidad en cada paso de integración. Por consiguiente, las velocidades no forman parte de las variables del sistema y se obtienen en función de los desplazamientos por medio de las ecuaciones del método de CD. Además, el método del subespacio nulo conduce a un sistema con el mínimo número de coordenadas, lo que representa una ventaja en comparación con el método de Lagrange aumentado.

6.1 Implementación de las restricciones

Como ya se ha comentado, las ecuaciones de restricción en sistemas multicuerpo son en su mayoría no lineales, debido a que se van a introducir en el instante $t+\Delta t$. Una implementación adecuada lleva a la necesidad de linealizarlas. Para ello, se plantea un desarrollo en series de Taylor truncado para el primer grado de forma que se obtiene un sistema con la siguiente forma:

$$H \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.1}$$

Donde la matriz H está compuesta por aquellos términos que son coeficientes de las variables del sistema resultante de la linealización, \mathbf{x} es el vector de las coordenadas del modelo y \mathbf{b} es el vector de los términos independientes resultantes de la linealización. Hay que comentar que la matriz H en este caso no es la matriz Jacobina de las restricciones, esto se debe a que está relacionando posiciones y no velocidades ni incrementos de posiciones relativas.

El número de ecuaciones de restricciones del modelo siempre será menor que el número de variables del sistema de lo contrario se estaría hablando de una estructura hiperestática o cuanto menos estática pero nunca de un mecanismo. De esto se deduce que el sistema de ecuaciones (6.1) es un sistema indeterminado lo que implica que existen infinitos vectores \mathbf{x} que son solución del problema. Si, por ejemplo, se tiene un \mathbf{x}_1 y un \mathbf{x}_2 que son dos soluciones distintas se cumple que:

$$H(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = H \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

Obviamente, si para el sistema homogéneo (6.2) hay una solución distinta de la trivial, multiplicando dicho vector por un escalar, ésta será también solución lo que demuestra que existan infinitas soluciones. La cuestión es conocer cuántas de esas soluciones son linealmente independientes y así poder agruparlas. Esto es sencillo de saber, el número de soluciones linealmente independientes coincide con el número de grados de libertad del modelo, es decir, es el resultado de restar la dimensión del vector \mathbf{x} menos el rango de la matriz H . Si se llama s al número de grados de libertad y \mathbf{x}_h al vector solución linealmente independiente se puede decir que el conjunto de soluciones del sistema (6.2) es:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_{h1} + \alpha_2 \mathbf{x}_{h2} + \dots + \alpha_s \mathbf{x}_{hs} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{h1} & \mathbf{x}_{h2} & \dots & \mathbf{x}_{hs} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{Bmatrix} = N_H \boldsymbol{\alpha} \quad (6.3)$$

Con esto es muy fácil agrupar todas las infinitas soluciones del sistema de las ecuaciones (6.1) sin más que sumando una solución particular a la solución homogénea de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + N_H \boldsymbol{\alpha} \quad (6.4)$$

Si se escogen valores de la solución particular, \mathbf{x}_p , demasiado grandes pueden aparecer errores numéricos importantes por lo que es recomendable emplear valores de mínima norma o al menos una solución que garantice un límite a su norma. Adicionalmente, puede darse el caso que, bien por error numérico o por coincidencia, en alguna de las iteraciones el sistema sea incompatible. Para paliar este problema lo ideal es trabajar con la solución de mínimos cuadrados de mínima norma. El vector $\boldsymbol{\alpha}$ reúne al conjunto de coordenadas independientes del sistema.

Ahora bien, de todas estas infinitas soluciones agrupadas como en (6.4) únicamente es interesante aquella que además es también solución de las ecuaciones de equilibrio en su forma (5.8). En dicha ecuación de equilibrio los términos de los desplazamientos en t y en $t - \Delta t$ ya habrán sido calculados y son conocidos por lo que las restricciones se aplican en el instante $t + \Delta t$. Así que el conjunto de infinitas soluciones correspondiente al sistema indeterminado formado por las ecuaciones de restricción linealizadas caracterizado para el instante $t + \Delta t$ tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{x}(t+\Delta t)=\mathbf{x}_p(t+\Delta t)+N_H\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t) \quad (6.5)$$

Sustituyendo (5.8) en la ecuación de equilibrio se tiene:

$$\begin{aligned} &A(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))(\mathbf{x}_p(t+\Delta t)+N_H\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t))= \\ &= \mathbf{e}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))+\mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t))+B(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}(t-\Delta t)+D(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Desarrollando la expresión (6.6) se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &A(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))N_H\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)= \\ &= \mathbf{e}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))+\mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t))+B(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}(t-\Delta t)+ \\ &+D(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t)-A(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}_p(t+\Delta t) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Es importante puntualizar que, en sistemas multicuerpo, el uso del método del subespacio nulo se ha empleado tradicionalmente sobre las velocidades. Esto se ha debido a la reducción del sistema de segundo orden a primer orden, en el cual se introducen las velocidades como variables independientes. En este caso, el método del subespacio nulo se aplica únicamente a las coordenadas de posición. Para el cálculo del subespacio nulo se ha empleado la descomposición de valores singulares SVD, siendo el método que ofrece mayor precisión aunque para ello sea computacionalmente más costoso.

El sistema de ecuaciones (6.7) no es simétrico, se ha conseguido introducir las restricciones en la ecuación pero también se ha modificado el número de incógnitas y ahora se trata de un sistema sobredeterminado. El problema es que existen ecuaciones incompatibles afectadas por las ligaduras cuyas reacciones siguen estando presentes en el sistema. Para solventar este inconveniente se debe proyectar estas ecuaciones sobre los grados de libertad no restringidos del modelo de manera que desaparecen.

En Elementos Finitos, bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos, esto se consigue fácilmente. Basta con premultiplicar las ecuaciones por la traspuesta del subespacio nulo de la matriz de restricciones la cual ya está calculada. Esto es posible, siempre y cuando la traspuesta del subespacio nulo de la matriz de restricciones coincida con el subespacio imagen de la matriz cuyas columnas son las direcciones de las fuerzas de restricción. Es decir, el módulo de las restricciones es desconocido pero sí se sabe cuáles son las direcciones de aplicación de dichos esfuerzos pudiéndose escribir como:

$$\mathbf{f}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{r1} & \mathbf{x}_{r2} & \cdots & \mathbf{x}_{rm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{r1} \\ f_{r2} \\ \vdots \\ f_{rm} \end{Bmatrix} = \mathbf{W} \mathbf{f}_{rm} \quad (6.8)$$

Por lo tanto, desarrollando el siguiente planteamiento se puede confirmar la anterior aseveración:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{W}^T \\ \mathbf{H} \mathbf{N}_H &= \mathbf{W}^T \mathbf{N}_H = \mathbf{0} \\ (\mathbf{W}^T \mathbf{N}_H)^T &= \mathbf{N}_H^T \mathbf{W} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Esta condición se cumple cuando las ecuaciones del movimiento y las restricciones se formulan en base a las mismas variables. Sin embargo, las ecuaciones de Newton-Euler se formulan en coordenadas de desplazamientos y giros mientras que las ecuaciones de restricción se han definido empleando desplazamientos y cuaterniones de forma que no es posible aplicar la matriz \mathbf{N}_H . Obviamente, si se quiere eliminar los esfuerzos se debe plantear las ecuaciones de restricción en base a desplazamientos y giros.

Siguiendo este razonamiento, si se tiene una restricción de la forma $f(\mathbf{r}, \mathbf{q})$, se puede aplicar un desplazamiento y un giro infinitesimal haciendo:

$$\begin{aligned} d f(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= \\ \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial x} dx + \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial y} dy + \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial z} dz + \\ \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial \theta_x} d\theta_x + \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial \theta_y} d\theta_y + \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial \theta_z} d\theta_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Si se dispone de forma matricial:

$$d f(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial x} & \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial y} & \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial z} & \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial \theta_x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial \theta_y} & \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{q})}{\partial \theta_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

Se puede ver que la matriz fila de la ecuación anterior coincide con la dirección de aplicación de la restricción en función, esta vez de los desplazamientos y los giros que es precisamente lo que se pretendía obtener. Si se tienen m restricciones en un sistema formado por n cuerpos, se forma un sistema de la siguiente manera:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{q}_1)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{q}_1)}{\partial \theta_{z,1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{r}_n, \mathbf{q}_n)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{r}_n, \mathbf{q}_n)}{\partial \theta_{z,n}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = 0 \quad (6.12)$$

Siendo:

$$d\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \\ d\theta_{x,i} \\ d\theta_{y,i} \\ d\theta_{z,i} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

De forma compacta se escribe el sistema (6.12):

$$G \Delta \mathbf{x} = 0 \quad (6.14)$$

La solución al sistema (6.12) es el conjunto de los posibles movimientos infinitesimales compatibles con las restricciones. Por otra parte, las filas de la matriz G están formadas por las direcciones de las fuerzas de restricción en función de los desplazamientos y los giros, de manera que se cumple:

$$G = W^T \quad (6.15)$$

Entonces sí se puede decir que la traspuesta del subespacio nulo de G es el subespacio imagen de la matriz W :

$$\begin{aligned} G N_G &= W^T N_G = 0 \\ (W^T N_G)^T &= N_G^T W = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ahora sí, premultiplicando la ecuación (6.7) por N_G^T se eliminan las ecuaciones afectadas por las ligaduras:

$$\begin{aligned}
 & N_G^T A(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) N_H \boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t) = \\
 & = N_G^T [\mathbf{e}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + B(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{x}(t-\Delta t) + \\
 & \quad + D(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t) - A(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{x}_p(t+\Delta t)] + \\
 & \quad + N_G^T \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t))
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Las fuerzas de restricción están ya definidas en función de las coordenadas independientes del sistema, por lo que al plantear el equilibrio completo se cancelan:

$$N_G^T \mathbf{f}_r = 0 \tag{6.18}$$

Si se eliminan las ligaduras de la ecuación (6.17), se obtiene la ecuación característica del método:

$$\begin{aligned}
 & N_G^T A(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) N_H \boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t) = \\
 & = N_G^T [\mathbf{e}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + B(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{x}(t-\Delta t) + \\
 & \quad + D(\mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t) - A(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{x}_p(t+\Delta t)]
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Una ventaja es que el sistema (6.19) es simétrico y tiene las dimensiones de las coordenadas independientes del modelo. A partir de ahora, hay que hacer referencia no solo a las ecuaciones de restricción para coordenadas determinadas por la matriz H , sino también la matriz de restricción para esfuerzos definida por la matriz G . Un detalle importante es que al estar aplicando un método explícito, el equilibrio se plantea en el instante t , lo que implica que los esfuerzos no varían durante el proceso iterativo y en consecuencia la matriz G tampoco. Por el contrario, H se calcula para el instante $t+\Delta t$ y hay que ir recalculándola con cada nueva aproximación de $\mathbf{x}(t+\Delta t)$.

Como se ha dicho, la ecuación (6.19) se resuelve iterativamente, de donde se obtiene $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$. La solución particular se puede ir obteniendo del siguiente sistema lineal en cada iteración:

$$H(t+\Delta t) \mathbf{x}_p(t+\Delta t) = \mathbf{b}(t+\Delta t) \tag{6.20}$$

Para evitar soluciones particulares con una norma general, en este documento se emplea la solución de norma mínima, y se emplea la factorización SVD para obtenerla.

Habiendo obtenido el vector $\boldsymbol{\alpha}(t+\Delta t)$, las coordenadas del sistema completo se calculan sustituyendo cada término en la ecuación (6.5). Es

preciso puntualizar que durante el proceso iterativo en el instante t , la norma del cuaternión puede que no se cumpla estrictamente. Obviamente, las diferentes soluciones de $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ convergen hacia la norma pero por el camino es posible que aparezcan errores en este sentido que afecten a las ecuaciones de restricción. Por eso, es interesante que después de cada nueva aproximación de $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ se normalicen los cuaterniones. Una vez que se tiene los desplazamientos en t , $t-\Delta t$ y $t+\Delta t$ se puede calcular fácilmente las coordenadas de velocidad y aceleración, sin más que sustituir en (6.21) y (6.22):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad (6.21)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (6.22)$$

Al final de cada proceso iterativo se pueden obtener las fuerzas de restricción simplemente sustituyendo cada término de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t)) = & \\ & A(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}(t+\Delta t) - \mathbf{e}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) + \\ & -B(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}(t-\Delta t) - D(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6.23)$$

La expresión anterior tiene una apariencia aparatosa pero se trata simplemente de unas multiplicaciones de matriz por vector con un coste computacional de n^2 . Evidentemente, para el instante inicial la ecuación anterior no es válida, pero aprovechando que $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ es conocida, los esfuerzos de restricción se calculan con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t_0)) = & \\ M(\mathbf{x}(t_0)) \left[\frac{2(\mathbf{x}(t_1) - \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t_0)) - \mathbf{x}(t_0)}{\Delta t^2} \right] + C(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0))\dot{\mathbf{x}}(t_0) + & (6.24) \\ -\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0)) - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) & \end{aligned}$$

6.2 Norma del cuaternión

La norma del cuaternión no es una restricción de par en sí mismo y se podía haber incluido en el sistema de las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, se ha decidido tratarla como una ecuación de ligadura más, por el

carácter predominante que tienen las restricciones sobre las ecuaciones de equilibrio.

Para que el cuaternión defina una única orientación establece que su norma debe ser igual a la unidad:

$$f_q(\mathbf{q}) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1 = 0 \quad (6.25)$$

La expresión anterior es no lineal, si se linealiza haciendo un desarrollo en serie de Taylor truncado para el grado 1 de la función en un punto \mathbf{q}^{j+1} próximo a \mathbf{q}^j , se obtiene:

$$f_q(\mathbf{q}^{j+1}) \simeq -1 - q_0^j - q_1^j - q_2^j - q_3^j + 2 \{q_0^j \quad q_1^j \quad q_2^j \quad q_3^j\}^T \begin{pmatrix} q_0^{j+1} \\ q_1^{j+1} \\ q_2^{j+1} \\ q_3^{j+1} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.26)$$

Para un elemento k , la ecuación que define la norma del cuaternión se expresa como:

$$\{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2q_{0k}^j \quad 2q_{1k}^j \quad 2q_{2k}^j \quad 2q_{3k}^j\}^T \mathbf{x}_k^{j+1} = 1 + q_{0k}^j + q_{1k}^j + q_{2k}^j + q_{3k}^j \quad (6.27)$$

De manera compacta:

$$S_q(\mathbf{q}_k^j) \mathbf{x}_k^{j+1} = \mathbf{b}_q(\mathbf{q}_k^j) \quad (6.28)$$

Expandiendo para un sistema compuesto por n cuerpos:

$$\begin{bmatrix} 0_{1 \times 7} & \cdots & S_q(\mathbf{q}_k^j) & \cdots & 0_{1 \times 7} \end{bmatrix}_{1 \times 7n} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix}_{7n \times 1} = \mathbf{b}_q(\mathbf{q}_k^j) \quad (6.29)$$

Compactando:

$$H_q(\mathbf{q}_k^j) \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_q(\mathbf{q}_k^j) \quad (6.30)$$

Es importante indicar que la norma del cuaternión no ejerce ninguna fuerza por lo que no existe restricción de esfuerzos.

6.3 Pares cinemáticos

La mayoría de las restricciones se apoyan en conceptos geométricos para determinar una unión. Por ejemplo, establecer un punto en común entre dos sólidos determina un par esférico, el cual limita su movimiento relativo a los giros. Estas magnitudes geométricas deben estar formuladas en función del tipo de variable empelada para determinar la posición y la orientación de cada cuerpo, que en este caso son las coordenadas cartesianas y el cuaternión unitario. Estos conceptos ya fueron desarrollados en el apartado 3.2 y ahora son la base sobre la que se sostiene gran parte de los pares cinemáticos de este capítulo.

Se van a presentar la mayor parte de las restricciones holónomas existentes para poder simular un número importante de los mecanismos aunque también se ha querido incluir una restricción no holónoma como el par de rodadura la cual va a aportar una nueva forma de plantear una unión en base a la velocidad. Por el contrario, a pesar de la utilidad de las restricciones de tipo no holónomas en la modelización de impactos entre dos sólidos o para incluir las holguras en las uniones que son un aspecto importante en el estudio de fenómenos asociados al ruido, han quedado fuera de este documento.

Las funciones de restricción se han linealizado para una posición \mathbf{x}^{j+1} cercana a \mathbf{x}^j , empleando el desarrollo en serie de Taylor truncado para el grado uno.

6.3.1 Par esférico

Como se ha comentado, un par esférico se define mediante la imposición de un punto en común entre dos sólidos. De esta forma, el movimiento relativo entre dos cuerpos queda limitado únicamente a los tres giros, ver figura 6.1. Se trata por tanto de un par de clase III y se requieren tres ecuaciones.

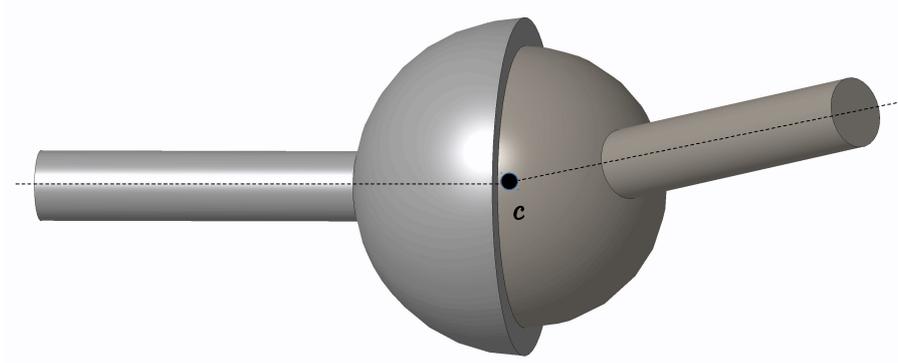


Figura 6.1: Representación clásica del par esférico.

Sabiendo que la posición de un punto en referencias absolutas viene determinado por la ecuación 3.29, la restricción de un par esférico entre dos cuerpos k y m en el punto c , se define por:

$$f_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = \mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck} - \mathbf{r}_m - R(\mathbf{q}_m)\bar{\mathbf{r}}_{cm} = 0 \quad (6.31)$$

6.3.1.1 Restricción de par esférico para coordenadas

Tal y como es de esperar se trata de una expresión no lineal, de la misma forma que la ecuación (3.45) se puede escribir la ecuación del par esférico como:

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{x}_k^{j+1}, \mathbf{x}_m^{j+1}, \mathbf{r}) &= \\ &= R(\mathbf{q}_k^j)\bar{\mathbf{r}}_{ck} - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck})\mathbf{x}_k^j + S_s(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck})\mathbf{x}_k^{j+1} + \\ &- R(\mathbf{q}_m^j)\bar{\mathbf{r}}_{cm} + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm})\mathbf{x}_m^j - S_s(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm})\mathbf{x}_m^{j+1} \end{aligned} \quad (6.32)$$

La ecuación (6.32) es lineal, y organizándola dejando las variables a la izquierda queda:

$$\begin{aligned} S_s(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck})\mathbf{x}_k^{j+1} - S_s(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm})\mathbf{x}_m^{j+1} &= \\ = -R(\mathbf{q}_m^j)\bar{\mathbf{r}}_{cm} + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm})\mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j)\bar{\mathbf{r}}_{ck} - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck})\mathbf{x}_k^j \end{aligned} \quad (6.33)$$

Ahora, si se tiene un sistema formado por n cuerpos se puede escribir de manera matricial como:

$$\begin{bmatrix} 0_{3 \times 7} & \cdots & S_s(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) & \cdots & -S_s(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm}) & \cdots & 0_{3 \times 7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \quad (6.34)$$

$$-R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{r}}_{cm} + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm}) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{r}}_{ck} - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \mathbf{x}_k^j$$

De manera compacta:

$$H_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r})_{3 \times 1} \quad (6.35)$$

6.3.1.2 Restricción de par esférico para esfuerzos

Si se tiene la ecuación de un punto cualquiera $\bar{\mathbf{r}}$ de un elemento en coordenadas locales, su posición en el sistema absoluto viene determinada por la ecuación (3.29), desarrollando esta expresión se puede escribir como:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{r}_x \\ \bar{r}_y \\ \bar{r}_z \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

Sometiendo a dicho enlace a un desplazamiento y un giro infinitesimal se obtiene la siguiente expresión:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_x} d\theta_x + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_y} d\theta_y + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_z} d\theta_z \quad (6.37)$$

La parte de los desplazamientos no requiere mayor explicación y se obtiene directamente:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Una variación de un elemento a una posición infinitamente próxima se expresa en notación matricial como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \varepsilon \quad (6.41)$$

Efectivamente, se comprueba que la matriz unidad hace referencia al desplazamiento mientras que ε simboliza la matriz que define el giro infinitesimal del sólido. Se puede demostrar que el producto de matrices de dos rotaciones infinitesimales es conmutativo, por lo que se puede descomponer el giro infinitesimal del sólido en otros tres giros independientes, alrededor de los ejes coordenados correspondientes a los tres grados de libertad del sólido. Se sabe que las matrices de rotación sobre el eje x , y y z tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\theta_x \\ 0 & d\theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -d\theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & -d\theta_z & 0 \\ d\theta_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Del producto de las tres matrices se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & -d\theta_z & d\theta_y \\ d\theta_x d\theta_y + d\theta_z & d\theta_x d\theta_y d\theta_z + 1 & -d\theta_x \\ -d\theta_y + d\theta_x d\theta_z & d\theta_y d\theta_z + d\theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Despreciando los infinitésimos de orden superior, la matriz anterior se escribe como:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & -d\theta_z & d\theta_y \\ d\theta_z & 1 & -d\theta_x \\ -d\theta_y & d\theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Por otro lado, dos posiciones infinitesimales de un elemento se vinculan como:

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + d\tilde{\mathbf{r}} \quad (6.47)$$

Teniendo en cuenta la relación (6.41) y que una rotación se representa por la ecuación:

$$\mathbf{r} = R \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.48)$$

Se deduce que:

$$\mathbf{r} = (I + \varepsilon) \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.49)$$

Ahora comparando las ecuaciones (6.46), (6.47) y (6.49) se obtiene que:

$$d\tilde{\mathbf{r}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -d\theta_z & d\theta_y \\ d\theta_z & 0 & -d\theta_x \\ -d\theta_y & d\theta_x & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.50)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$d\tilde{r}_x = -\tilde{r}_y d\theta_z + \tilde{r}_z d\theta_y \quad (6.51)$$

$$d\tilde{r}_y = \tilde{r}_x d\theta_z - \tilde{r}_z d\theta_x \quad (6.52)$$

$$d\tilde{r}_z = -\tilde{r}_x d\theta_y + \tilde{r}_y d\theta_x \quad (6.53)$$

O en forma matricial:

$$d\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{r}_z & -\tilde{r}_y \\ -\tilde{r}_z & 0 & \tilde{r}_x \\ \tilde{r}_y & -\tilde{r}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

De la misma manera, si se caracteriza la ecuación (6.36) para un punto c del elemento k , se puede hacer:

$$\mathbf{r}_c = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x \\ (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y \\ (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

Siendo:

$$(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x = (q_{k0}^2 + q_{k1}^2 - q_{k2}^2 - q_{k3}^2) \bar{r}_{ckx} + 2(q_{k1} q_{k2} - q_{k0} q_{k3}) \bar{r}_{cky} + 2(q_{k1} q_{k3} + q_{k0} q_{k2}) \bar{r}_{ckz} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} & (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_y = \\ & 2(q_{k1}q_{k2} + q_{k0}q_{k3})\bar{r}_{ckx} + (q_{k0}^2 - q_{k1}^2 + q_{k2}^2 - q_{k3}^2)\bar{r}_{cky} + 2(q_{k2}q_{k3} - q_{k0}q_{k1})\bar{r}_{ckz} \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} & (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_x = \\ & 2(q_{k1}q_{k3} - q_{k0}q_{k2})\bar{r}_{ckx} + 2(q_{k2}q_{k3} + q_{k0}q_{k1})\bar{r}_{cky} + (q_{k0}^2 - q_{k1}^2 - q_{k2}^2 + q_{k3}^2)\bar{r}_{ckz} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Entonces la matriz que representa un giro infinitesimal se define como:

$$\begin{bmatrix} 0 & (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & -(R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_y \\ -(R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & 0 & (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_x \\ (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_y & -(R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{Bmatrix} \quad (6.59)$$

Finalmente, un desplazamiento y un giro infinitesimal de la ecuación correspondiente a un punto se determina con la siguiente ecuación:

$$d\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & -(R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_y \\ 0 & 1 & 0 & -(R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & 0 & (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_x \\ 0 & 0 & 1 & (R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_y & -(R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{r}}_{ck})_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_k \\ dy_k \\ dz_k \\ d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{Bmatrix} \quad (6.60)$$

De forma compacta:

$$d\mathbf{r}_c = Q_s(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) d\mathbf{x}_k \quad (6.61)$$

Si como se ha dicho el par esférico se define como un punto en común entre dos sólidos las ecuaciones de restricción para esfuerzos se obtiene como:

$$df_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = Q_s(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) d\mathbf{x}_k - Q_s(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{cm}) d\mathbf{x}_m = 0 \quad (6.62)$$

Y con notación matricial:

$$\begin{bmatrix} 0_{3 \times 6} & \cdots & Q_s(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) & \cdots & -Q_s(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{cm}) & \cdots & 0_{3 \times 6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.63)$$

De forma compacta:

$$G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})_{3 \times 6n} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.64)$$

6.3.2 Par de rotación

El par de rotación se compone por un punto y un vector compartido entre dos cuerpos. De forma que se establecen cinco ecuaciones, tres del punto y dos del vector, para determinar un par de clase I. El único movimiento relativo permitido es un giro alrededor del eje que define el vector director, ver la figura 6.2.



Figura 6.2: Representación de un par de rotación.

En definitiva, si se tiene un par de rotación en un punto c entre los elementos k y m , siendo p el vector director del enlace, las ecuaciones del par de rotación son las siguientes:

$$f_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{cases} f_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = 0 \\ f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = 0 \end{cases} \quad (6.65)$$

Siendo:

$$f_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = \mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} - \mathbf{r}_m - R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{r}}_{cm} = \mathbf{0} \quad (6.66)$$

$$f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_{ck} - R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_{cm} = \mathbf{0} \quad (6.67)$$

6.3.2.1 Restricciones de coordenadas para el par de rotación

Las ecuaciones de la restricción de coordenadas para el punto son las mismas que las desarrolladas en el par esférico, y se pueden ver en la ecuación (6.35):

$$H_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j)_{3 \times 1} \quad (6.68)$$

Para obtener las referentes al vector, conviene recordar la ecuación (3.50) que representa la linealización de la expresión que define un vector en globales a partir de sus coordenadas en el sistema local. Teniendo en cuenta esta relación, la ecuación (6.67) toma la forma:

$$\begin{aligned} f_v(\mathbf{x}_k^{j+1}, \mathbf{x}_m^{j+1}, \mathbf{p}) = & \\ = R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{v}}_{ck} - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{v}}_{ck}) \mathbf{x}_k^j + S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{v}}_{ck}) \mathbf{x}_k^{j+1} + & \\ - R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{v}}_{cm} + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{v}}_{cm}) \mathbf{x}_m^j - S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{v}}_{cm}) \mathbf{x}_m^{j+1} & \end{aligned} \quad (6.69)$$

Si el sistema está compuesto por n cuerpos, la ecuación (6.69) dispuesta en notación matricial se escribe como:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{0}_{3 \times 7} \quad \cdots \quad S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_{ck}) \quad \cdots \quad -S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_{cm}) \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{3 \times 7} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix} = & \\ -R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_{cm} + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_{cm}) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_{ck} - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_{ck}) \mathbf{x}_k^j & \end{aligned} \quad (6.70)$$

De manera compacta se tiene:

$$H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{3 \times 1} \quad (6.71)$$

Por lo tanto, las ecuaciones lineales de restricción para coordenadas que determinan un par de rotación forman el siguiente sistema:

$$H_r(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{6 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_r(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{6 \times 1} \quad (6.72)$$

Donde:

$$H_r(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} H_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}) \\ H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

$$\mathbf{b}_r(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{cases} \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}) \\ \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (6.74)$$

Se observa que la restricción del vector requiere solo dos ecuaciones y sin embargo, se han empleado tres. Es importante indicar, que de esas tres, una es linealmente dependiente, por lo que al aplicar la técnica del subespacio nulo, automáticamente se obtendrá una expresión bien condicionada de las dos restricciones.

6.3.2.2 Restricciones de esfuerzo para el par de rotación

De la misma manera, las restricciones para el punto son iguales que las del par esférico de la ecuación (6.64), y se emplearán aquí también:

$$G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.75)$$

Para un vector \mathbf{v} , definido por la ecuación (3.48) en el sistema global, si se considera a un movimiento infinitesimal de la forma:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta_x} d\theta_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta_y} d\theta_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta_z} d\theta_z \quad (6.76)$$

Y, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.59), es posible escribir la ecuación anterior como:

$$d\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_z & -(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_y \\ 0 & 0 & 0 & -(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_z & 0 & (R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_x \\ 0 & 0 & 0 & (R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_y & -(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{v}})_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.77)$$

De forma compacta:

$$d\mathbf{v} = Q_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \quad (6.78)$$

Ahora un desplazamiento infinitesimal del enlace del vector común representado por la ecuación (6.67) se puede escribir como:

$$df_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = Q_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_{ck}) d\mathbf{x}_k - Q_v(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_{cm}) d\mathbf{x}_m = \mathbf{0} \quad (6.79)$$

Si se tiene un sistema formado por n cuerpos la ecuación anterior se puede disponer de forma matricial de la siguiente manera:

$$\left[\mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_{ck}) \quad \cdots \quad -\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_{cm}) \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{3 \times 6} \right] \begin{Bmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.80)$$

Compactando:

$$\mathbf{G}_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})_{3 \times 6n} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.81)$$

Con las relaciones (6.64) y (6.81), ya es posible obtener las restricciones para esfuerzos del par de rotación:

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{6 \times 6n} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.82)$$

Siendo:

$$\mathbf{G}_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) \\ \mathbf{G}_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

De igual forma que ocurría antes, de las seis ecuaciones una es linealmente dependiente.

6.3.3 Par plano

Cuando dos elementos comparten un plano su movimiento queda restringido a tres grados de libertad, dos relativos al desplazamiento en dicho plano y uno al giro sobre el eje normal al plano. Se trata de un caso de par de clase III. En la figura 6.3 se puede ver un caso de par plano.

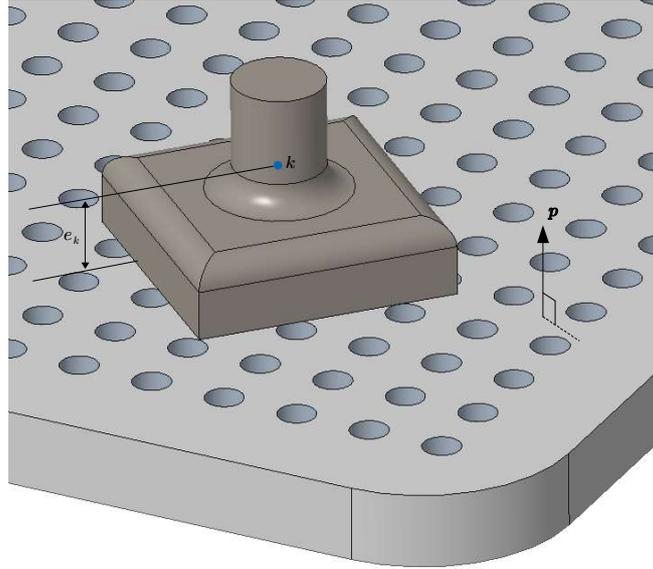


Figura 6.3: Un par plano.

Un plano queda determinado respecto a un sólido a través de la distancia al plano y un vector normal a la superficie de dicho plano. Estas magnitudes medidas en el sistema global se corresponden con las ecuaciones (3.59) y (3.60) del apartado 3.2.3. Para definir el enlace correctamente se debe tener en cuenta el hecho de que dos sólidos comparten un plano en común y por tanto el vector de mínima distancia en coordenadas absolutas es el mismo. Esto puede dar problemas de indefinición cuando esa distancia es cero, por lo que se emplea un vector unitario normal al plano y un escalar que simboliza la distancia. En consecuencia, las restricciones del par plano se componen de una ecuación escalar y dos ecuaciones vectoriales. Si se tienen dos sólidos k y m , con un plano definido por el vector normal \mathbf{p} y la mínima distancia e , el sistema que define la función de restricción tiene la siguiente forma:

$$f_{pl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e, \mathbf{p}) = \begin{cases} f_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e) = 0 \\ f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = 0 \end{cases} \quad (6.84)$$

Siendo:

$$f_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e) = \bar{e}_k - (\bar{\mathbf{p}}_k)^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k - \bar{e}_m + (\bar{\mathbf{p}}_m)^T \mathbf{R}(\mathbf{q}_m)^T \mathbf{r}_m \quad (6.85)$$

$$f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k - \mathbf{R}(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m = 0 \quad (6.86)$$

La función f_e se establece considerando un plano pasante por el origen de coordenadas del sistema global y paralelo al plano objetivo. La distancia de este plano al propio plano objetivo en valores absolutos, debe ser la misma

tanto si se formula mediante las coordenadas locales del cuerpo k como del cuerpo m . f_v representa al vector normal que evidentemente debe ser el mismo para ambos cuerpos si se representa en coordenadas locales.

6.3.3.1 Restricción de coordenadas para el par plano

El sistema de ecuaciones (6.86) ya ha sido desarrollado anteriormente y da como resultado la expresión lineal (6.71) que caracterizada para el caso del par plano entre dos cuerpos en un sistema con n elementos, se escribe como:

$$H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{3 \times 1} \quad (6.87)$$

Donde:

$$H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) & \cdots & -S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

$$\mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) = -R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^j \quad (6.89)$$

En caso de la función escalar (6.85), si se linealiza como en (3.65) se plantea una expresión con la forma:

$$\begin{aligned} f_e(\mathbf{x}_k^{j+1}, \mathbf{x}_m^{j+1}, e) &= \\ &= \bar{e}_k + (\mathbf{q}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k)^T \mathbf{r}_k^j - [R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k]^T \mathbf{r}_k^{j+1} - (\mathbf{r}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^{j+1} + \\ &- \bar{e}_m - (\mathbf{q}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m)^T \mathbf{r}_m^j + [R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m]^T \mathbf{r}_m^{j+1} + (\mathbf{r}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^{j+1} \end{aligned} \quad (6.90)$$

Organizando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} & [R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k]^T \mathbf{r}_k^{j+1} + (\mathbf{r}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^{j+1} + \\ & - [R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m]^T \mathbf{r}_m^{j+1} - (\mathbf{r}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^{j+1} = \\ & = \bar{e}_k + (\mathbf{q}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k)^T \mathbf{r}_k^j - \bar{e}_m - (\mathbf{q}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m)^T \mathbf{r}_m^j \end{aligned} \quad (6.91)$$

Si se agrupan los términos:

$$\begin{aligned} & S_e(\mathbf{x}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^{j+1} - S_e(\mathbf{x}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^{j+1} = \\ & = \bar{e}_k + (\mathbf{q}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k)^T \mathbf{r}_k^j - \bar{e}_m - (\mathbf{q}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m)^T \mathbf{r}_m^j \end{aligned} \quad (6.92)$$

Siendo:

$$S_e(\mathbf{x}^j, \bar{\mathbf{p}}) \mathbf{x}^{j+1} = \left[(R(\mathbf{q}^j) \bar{\mathbf{p}})^T \quad (\mathbf{r}^j)^T S_p(\mathbf{q}^j, \bar{\mathbf{p}}) \right] \quad (6.93)$$

si se tiene un sistema mecánico formado por n cuerpos, se escribe la ecuación anterior en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} 0_{1 \times 7} & \cdots & S_e(\mathbf{x}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) & \cdots & -S_e(\mathbf{x}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & 0_{1 \times 7} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix} = \quad (6.94)$$

$$\bar{e}_k + (\mathbf{q}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k)^T \mathbf{r}_k^j - \bar{e}_m - (\mathbf{q}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m)^T \mathbf{r}_m^j$$

Y de forma compacta:

$$H_e(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, e)_{1 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_e(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, e)_{1 \times 1} \quad (6.95)$$

Finalmente, las restricciones de par plano entre dos cuerpos k y m , se define mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$H_{pl}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, e, \mathbf{p})_{4 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_{pl}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, e, \mathbf{p})_{4 \times 1} \quad (6.96)$$

Donde:

$$H_{pl}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, e, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} H_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e) \\ H_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

$$\mathbf{b}_{pl}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, e, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_e(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, e) \\ \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (6.98)$$

6.3.3.2 Restricciones para esfuerzos del par plano

La función del vector normal común entre ambos cuerpos ya se ha realizado y tiene la expresión (6.81), que usando la simbología del par plano se escribe como:

$$G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})_{3 \times 6n} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.99)$$

El cual se puede desarrollar como:

$$\left[\mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) \quad \cdots \quad -\mathbf{Q}_v(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m) \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{3 \times 6} \right] \begin{Bmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.100)$$

Por otro lado, se puede calcular el diferencial de la función escalar que representa la mínima distancia en globales a partir de las magnitudes en coordenadas locales para un único cuerpo de la siguiente manera:

$$df_e(\mathbf{x}, \mathbf{0}, e) = d(\bar{\mathbf{e}} - (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q})^T \mathbf{r}) = 0 \quad (6.101)$$

Desarrollando la ecuación anterior, se hace:

$$df_e(\mathbf{x}, \mathbf{0}, e) = d\bar{\mathbf{e}} - d(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q})^T \mathbf{r} = -d(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q})^T \mathbf{r} \quad (6.102)$$

O lo que es lo mismo:

$$df_e(\mathbf{x}, \mathbf{0}, e) = -(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{R}(\mathbf{q})^T d\mathbf{r} - \mathbf{r}^T d(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}) \quad (6.103)$$

Ahora, tanto el término $d\mathbf{r}$ como el $d(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})$ son conocidos, y se corresponden con la matriz unidad de dimensión 3 y el sistema (6.59) respectivamente:

$$d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (6.104)$$

$$d(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_z & -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_y \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_z & 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_x \\ (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_y & -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{Bmatrix} \quad (6.105)$$

Llamando:

$$\mathbf{Q}_g(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_z & -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_y \\ -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_z & 0 & (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_x \\ (\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_y & -(\mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}})_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.106)$$

La ecuación (6.103) se puede escribir como:

$$df_e(\mathbf{x}, 0) = -(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T I \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} d\mathbf{r} - \mathbf{r}^T Q_g(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \begin{pmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} \quad (6.107)$$

Organizando la expresión anterior de forma matricial:

$$df_e(\mathbf{x}, 0, e) = \left[-(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T I \quad -\mathbf{r}^T Q_g(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right] \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} \quad (6.108)$$

De manera compacta se tiene:

$$df_e(\mathbf{x}, 0, e) = Q_e(\mathbf{x}, \mathbf{p})_{1 \times 6} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.109)$$

Si lo que se tiene es una ecuación de la forma $f(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m)$ como (6.85), se debe hacer:

$$df_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e) = Q_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k) d\mathbf{x}_k - Q_e(\mathbf{x}_m, \mathbf{p}_m) d\mathbf{x}_m = 0 \quad (6.110)$$

Ampliando para un sistema de n cuerpos:

$$\left[\mathbf{0}_{1 \times 6} \quad \cdots \quad Q_e(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) \quad \cdots \quad -Q_e(\mathbf{x}_m, \bar{\mathbf{p}}_m) \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{1 \times 6} \right] \begin{pmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{pmatrix} = 0 \quad (6.111)$$

O bien de forma compacta:

$$G_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e)_{1 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.112)$$

Por lo tanto, la matriz de restricciones para esfuerzos del par plano se define como:

$$G_{pl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e, \mathbf{p})_{4 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.113)$$

En donde la matriz G_{pl} se construye como:

$$G_{pl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} G_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e) \\ G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

6.3.4 Par cilíndrico

El par cilíndrico se impone entre dos elementos cuando comparten una línea. En este caso, el movimiento queda restringido a un desplazamiento sobre la recta y un giro alrededor de ésta. Es por tanto un par de clase II. En la figura 6.4 se observa una imagen que representa un par cilíndrico.

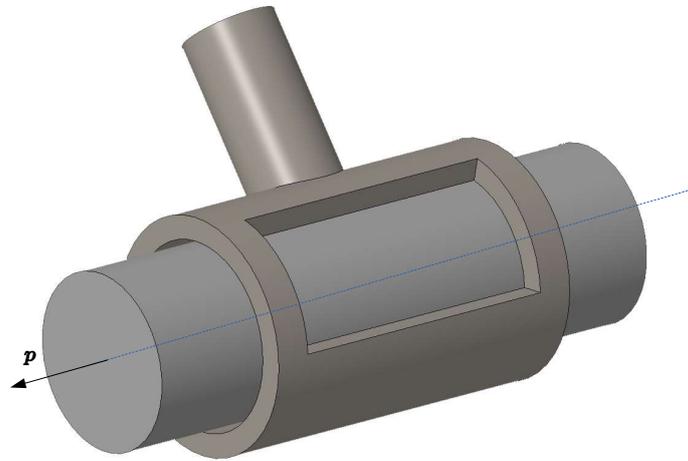


Figura 6.4: Imagen de un par cilíndrico.

En el apartado 3.2.4 ya se definió una línea empelando las coordenadas del sistema. Evidentemente, con esto se puede formular la restricción de línea entre dos cuerpos k y m de la siguiente forma:

$$f_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}) = \begin{cases} f_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) = 0 \\ f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = 0 \end{cases} \quad (6.115)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) = & \\ = \mathbf{r}_k - [(\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{d}}_k + & (6.116) \\ - \mathbf{r}_m + [(\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m)^T \mathbf{r}_m] R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m - R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{d}}_m & \end{aligned}$$

$$f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k - R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m \quad (6.117)$$

Llegados a este punto merece la pena recordar el significado de las ecuaciones. La función f_d representa que la mínima distancia desde el sistema

de referencia global a la recta debe ser la misma, tanto calculada a partir de las coordenadas locales del cuerpo k como del cuerpo m . De aquí se establece la igualdad del vector mínima distancia \mathbf{d} , ver ecuación (3.71), lo que corresponde a 2 ecuaciones independientes. En cuanto a f_v , si se llama p al vector director que define la recta, este vector tiene que ser el mismo en coordenadas globales a partir de las magnitudes locales de los dos sólidos. Efectivamente, de aquí salen las otras dos ecuación de la ligadura.

6.3.4.1 Restricciones de coordenadas para el par cilíndrico

La restricción linealizada del vector se ha realizado para definir los últimos pares por lo que no se va a repetir de nuevo. Simplemente cabe mencionar que tiene la siguiente forma:

$$H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{3 \times 1} \quad (6.118)$$

Donde:

$$H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) & \cdots & -S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

$$\mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) = -R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^j \quad (6.120)$$

Por otro lado, la linealización de la magnitud vectorial d , se corresponde con la expresión (3.79). Por tanto, la función (6.116) se puede escribir para un \mathbf{x}^{j+1} próximo a \mathbf{x}^j como:

$$\begin{aligned} f_d(\mathbf{x}_k^{j+1}, \mathbf{x}_m^{j+1}, \mathbf{d}) = & \\ = & \left[(\mathbf{r}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^j \right] R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{d}}_k + \\ + & \left[\left[(\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j \right] S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) - S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) \right] \mathbf{q}_k^j + \\ + & \left[I - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k (\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \right] \mathbf{r}_k^{j+1} + \\ + & \left\{ S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) - \left[\left[(\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j \right] I + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k (\mathbf{r}_k^j)^T \right] S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \right\} \mathbf{q}_k^{j+1} + \\ - & \left[(\mathbf{r}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^j \right] R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m - R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{d}}_m + \\ - & \left[\left[(\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \mathbf{r}_m^j \right] S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) - S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{d}}_m) \right] \mathbf{q}_m^j + \\ - & \left[I - R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m (\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \right] \mathbf{r}_m^{j+1} + \\ - & \left\{ S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{d}}_m) - \left[\left[(\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \mathbf{r}_m^j \right] I + \right. \right. \\ & \left. \left. + R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m (\mathbf{r}_m^j)^T \right] S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \right\} \mathbf{q}_m^{j+1} \end{aligned} \quad (6.121)$$

La ecuación anterior se puede reorganizar haciendo:

$$\begin{aligned}
& \left[I - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k (\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \right] \mathbf{r}_k^{j+1} + \\
& + \left\{ S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) - \left[((\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j) I + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k (\mathbf{r}_k^j)^T \right] S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \right\} \mathbf{q}_k^{j+1} + \\
& - \left[I - R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m (\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \right] \mathbf{r}_m^{j+1} + \\
& - \left\{ S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{d}}_m) - \left[((\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \mathbf{r}_m^j) I + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m (\mathbf{r}_m^j)^T \right] S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \right\} \mathbf{q}_m^{j+1} = \\
& = - \left[(\mathbf{r}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^j \right] R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{d}}_k + \\
& - \left[((\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j) S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) - S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) \right] \mathbf{q}_k^j + \\
& + \left[(\mathbf{r}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^j \right] R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{d}}_m + \\
& + \left[((\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \mathbf{r}_m^j) S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) - S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{d}}_m) \right] \mathbf{q}_m^j
\end{aligned} \tag{6.122}$$

Agrupando términos se puede poner:

$$\begin{aligned}
& S_d(\mathbf{x}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) \mathbf{x}_k^{j+1} - S_d(\mathbf{x}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \mathbf{x}_m^{j+1} = \\
& = - \left[(\mathbf{r}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^j \right] R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{d}}_k + \\
& - \left[((\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j) S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) - S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) \right] \mathbf{q}_k^j + \\
& + \left[(\mathbf{r}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^j \right] R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{d}}_m + \\
& + \left[((\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \mathbf{r}_m^j) S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) - S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{d}}_m) \right] \mathbf{q}_m^j
\end{aligned} \tag{6.123}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
& S_d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_{3 \times 7} = \left[\left[I - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k (\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \right] \right. \\
& \left. \left\{ S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) - \left[((\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j) I + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k (\mathbf{r}_k^j)^T \right] S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{6.124}$$

Si se dispone en forma matricial para un sistema formado por n cuerpos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_d(\mathbf{x}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) & \cdots & -S_d(\mathbf{x}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \quad (6.125)$$

$$\begin{aligned} &= -\left[(\mathbf{r}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^j \right] R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{d}}_k + \\ & - \left\{ [(\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j] S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) - S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) \right\} \mathbf{q}_k^{j+1} + \\ & + \left[(\mathbf{r}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^j \right] R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{d}}_m + \\ & + \left\{ [(\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \mathbf{r}_m^j] S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) - S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{d}}_m) \right\} \mathbf{q}_m^{j+1} \end{aligned}$$

Si se acondiciona en notación compacta:

$$H_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d})_{3 \times 1} \quad (6.126)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones que define un par cilíndrico entre dos elementos k y m tiene el siguiente aspecto:

$$H_c(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p})_{6 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_c(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p})_{6 \times 1} \quad (6.127)$$

Siendo:

$$H_c(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} H_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}) \\ H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.128)$$

$$\mathbf{b}_c(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}) \\ \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{Bmatrix} \quad (6.129)$$

De las seis ecuaciones únicamente cuatro son linealmente independientes.

6.3.4.2 Restricción de esfuerzos para el par cilíndrico

Para obtener las restricciones de esfuerzos se debe aplicar un desplazamiento y un giro infinitesimal. Para la ecuación que define el vector director en común f_v , tiene la misma expresión que la ecuación (6.99), que para este caso adquiere la siguiente forma:

$$G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.130)$$

Donde (6.130) tiene el siguiente aspecto:

$$\left[\mathbf{0}_{3 \times 6} \quad \cdots \quad Q_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) \quad \cdots \quad -Q_v(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m) \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{3 \times 6} \right] \begin{Bmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.131)$$

La expresión $Q_v(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}})$ se puede ver en (6.78).

Para obtener un movimiento infinitesimal de la función f_d , primeramente se simplifica la expresión para un único cuerpo, lo que equivale a la ecuación de mínima distancia, d , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_d(\mathbf{x}, 0, \mathbf{d}) &= \\ &= \mathbf{r} - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} + R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (6.132)$$

Calculando el diferencial de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} df_d(\mathbf{x}, 0, \mathbf{d}) &= \\ &= d\left\{ \mathbf{r} - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} + R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{d}} \right\} \end{aligned} \quad (6.133)$$

Se puede hacer:

$$\begin{aligned} df_d(\mathbf{x}, 0, \mathbf{d}) &= \\ &= d\mathbf{r} - d[(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} + dR(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (6.134)$$

Los términos $d\mathbf{r}$ y $dR(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}}$ ya se han calculado anteriormente y equivalen a:

$$d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (6.135)$$

$$d(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}}) = Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}}) d\theta \quad (6.136)$$

Siendo:

$$Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 0 & (R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}})_z & -(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}})_y \\ -(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}})_z & 0 & (R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}})_x \\ (R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}})_y & -(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{d}})_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.137)$$

Falta ocuparse del término $d[(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}]R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}$. Para ello, se puede descomponer haciendo:

$$\begin{aligned} & d\{[(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}]R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}\} = \\ & = d[(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T] \mathbf{r} R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} + [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T] d\mathbf{r} R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} + \\ & \quad + [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] dR(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (6.138)$$

La ecuación anterior se puede reorganizar para que sea más clara. Teniendo en cuenta que hay productos escalares multiplicando a vectores es posible hallar una expresión equivalente con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & d\{[(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}]R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}\} = \\ & = R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} \mathbf{r}^T d[R(\mathbf{q})(\bar{\mathbf{p}})] + R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T] d\mathbf{r} + \\ & \quad + [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] dR(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (6.139)$$

Sabiendo que:

$$d\mathbf{r} = I d\mathbf{r} \quad (6.140)$$

$$d(R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}) = Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) d\theta \quad (6.141)$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} & d\{[(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}]R(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}\} = \\ & = R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} \mathbf{r}^T Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) d\theta + R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T] I d\mathbf{r} + \\ & \quad + [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) d\theta \end{aligned} \quad (6.142)$$

Por lo tanto, el diferencial (6.133) es:

$$\begin{aligned} & I d f_d(\mathbf{x}, 0) = \\ & = d\mathbf{r} - d[(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} + Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}}) d\theta \end{aligned} \quad (6.143)$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} & d f_d(\mathbf{x}, 0) = \\ & = \{I - R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T] I\} d\mathbf{r} + \\ & \quad + \{-R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} \mathbf{r}^T Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) + Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}})\} d\theta \end{aligned} \quad (6.144)$$

Si se dispone con notación matricial:

$$d f_d(\mathbf{x}, 0, \mathbf{d}) = Q_d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_{3 \times 6} d\mathbf{x} \quad (6.145)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 & Q_d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})_{3 \times 6} = \\
 & = \left[\left[I - R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T] \right] \right. \\
 & \left. \left[-R(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{p}} \mathbf{r}^T Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) - [(\bar{\mathbf{p}})^T R(\mathbf{q})^T \mathbf{r}] Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) + Q_g(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{d}}) \right] \right]
 \end{aligned} \tag{6.146}$$

Si ahora se amplía para dos cuerpos k y m ya es posible escribir el diferencial de la función (6.116) completamente:

$$d f_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) = Q_d(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) d \mathbf{x}_k - Q_d(\mathbf{x}_m, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) d \mathbf{x}_m = 0 \tag{6.147}$$

Para un sistema de n cuerpos se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[0_{3 \times 6} \quad \cdots \quad Q_d(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) \quad \cdots \right. \\
 & \left. -Q_d(\mathbf{x}_m, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) \quad \cdots \quad 0_{3 \times 6} \right] \begin{Bmatrix} d \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d \mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d \mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{6.148}$$

O de manera compacta:

$$G_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d})_{3 \times 6n} d \mathbf{x} = 0 \tag{6.149}$$

Finalmente, las ecuaciones de restricción de esfuerzos para el par cilíndrico se puede escribir como:

$$G_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p})_{6 \times 6n} d \mathbf{x} = 0 \tag{6.150}$$

Donde:

$$G_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} G_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \\ G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \tag{6.151}$$

Del sistema (6.150) se obtienen cuatro ecuaciones linealmente independientes.

6.3.5 Par prismático

Cuando se establece un par prismático entre dos cuerpos el movimiento relativo queda restringido a un desplazamiento sobre una recta. Se define mediante cinco ecuaciones, dejando un único grado de libertad de manera

que se trata de un par de clase I. En la figura 6.5 se muestra una cola de milano que es un ejemplo clásico de un par prismático.

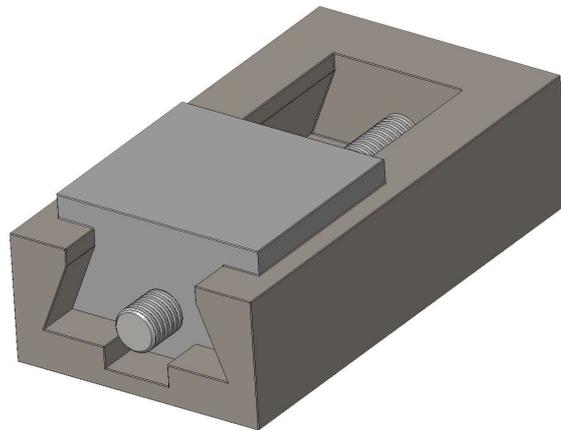


Figura 6.5: Imagen de una cola de milano.

El sistema matemático se puede construir de diferentes maneras. Cuatro de las cinco ecuaciones necesarias provienen del par cilindro f_c , la restante limitación debe restringir el giro alrededor de la recta. Una opción puede ser imponiendo que el producto escalar de dos vectores fuera constante o bien una restricción de plano. Las dos alternativas anteriores son válidas, sobre todo la del producto escalar que solo suma una ecuación al sistema y será desarrollada en el par de junta universal. Sin embargo, se va a optar por una tercera vía. Aprovechando que se ha empleado las ecuaciones correspondientes a un vector común f_v en varios pares, aquí se puede hacer lo mismo. Si se define un vector u perpendicular a la recta, estableciendo éste como vector común el giro queda restringido alrededor de la línea. En la figura 6.6 se puede ver una imagen que ilustra esta idea.

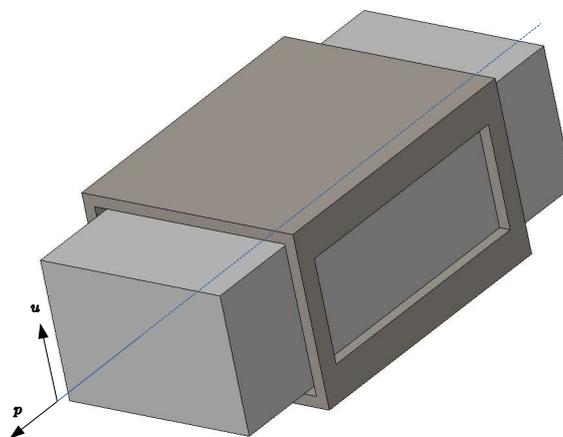


Figura 6.6: Ilustración del par prismático.

Por lo tanto, el par prismático entre los cuerpos k y m queda establecido mediante una línea definida por la distancia \mathbf{d} y el vector director \mathbf{p} y un vector \mathbf{u} , perpendicular a \mathbf{p} . De esta manera, el movimiento relativo entre los dos cuerpos queda limitado a un desplazamiento en la dirección del vector director de la recta \mathbf{p} . El correspondiente sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$f_p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \begin{cases} f_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}) = 0 \\ f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (6.152)$$

Siendo:

$$f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{u}) = R(\mathbf{q}_k)\bar{\mathbf{u}}_k - R(\mathbf{q}_m)\bar{\mathbf{u}}_m \quad (6.153)$$

Mientras que f_c se define como:

$$f_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}) = \begin{cases} f_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) = 0 \\ f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = 0 \end{cases} \quad (6.154)$$

Donde:

$$f_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) = \mathbf{r}_k - [(\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k)^T \mathbf{r}_k] R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{d}}_k + \mathbf{r}_m + [(\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m)^T \mathbf{r}_m] R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m - R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{d}}_m \quad (6.155)$$

$$f_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k - R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m \quad (6.156)$$

De este sistema de nueve ecuaciones, se extraen cinco ecuaciones independientes que generan el par prismático.

6.3.5.1 Restricción de coordenadas para el par prismático

Las ecuaciones (6.153), (6.155) y (6.156) ya han sido linealizadas cuando se han definido las ligaduras anteriores, por ello no se va a incluir el desarrollo de ninguna de ellas. El sistema de ecuaciones de restricción del par prismático entre dos cuerpos k y m tiene la siguiente forma:

$$H_p(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u})_{9 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_p(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u})_{9 \times 1} \quad (6.157)$$

La matriz H_p y el vector \mathbf{b}_p tienen la siguiente forma:

$$H_p(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} H_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}) \\ H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \\ H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (6.158)$$

$$\mathbf{b}_p(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}) \\ \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \\ \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (6.159)$$

Donde la matriz H_d y el vector \mathbf{b}_d están definidos en (6.126) y tienen la siguiente expresión:

$$H_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_d(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) & \cdots & -S_d(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \quad (6.160)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_d(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{d}) = & \\ & - \left[(\mathbf{r}_k^j)^T S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{q}_k^j \right] R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{d}}_k + \\ & - \left[(\bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_k^j)^T \mathbf{r}_k^j \right] S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) - S_p(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{d}}_k) \mathbf{q}_k^j + \\ & + \left[(\mathbf{r}_m^j)^T S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{q}_m^j \right] R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{d}}_m + \\ & + \left[(\bar{\mathbf{p}}_m)^T R(\mathbf{q}_m^j)^T \mathbf{r}_m^j \right] S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) - S_p(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{d}}_m) \mathbf{q}_m^j \end{aligned} \quad (6.161)$$

Mientras que H_v y \mathbf{b}_v se pueden determinar como en (6.118), siendo por tanto:

$$H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) & \cdots & -S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \quad (6.162)$$

$$H_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{u}}_k) & \cdots & -S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{u}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \quad (6.163)$$

$$\mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) = -R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^j \quad (6.164)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{u}) = & \\ & -R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{u}}_m + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{u}}_m) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{u}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{u}}_k) \mathbf{x}_k^j \end{aligned} \quad (6.165)$$

Las expresiones de S_d y S_v se corresponden con (6.124) y (3.46), respectivamente.

6.3.5.2 Restricción de esfuerzos para el par prismático

De igual manera las restricciones de esfuerzos del par prismático se pueden construir mediante el siguiente sistema:

$$G_p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u})_{9 \times 6n} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.166)$$

Donde la matriz G_p está compuesta de:

$$G_p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} G_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) \\ G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \\ G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (6.167)$$

Las matrices G_d y G_v se pueden ver en las expresiones (6.149) y (6.130) respectivamente. Caracterizadas para el par prismático toman la siguiente forma:

$$G_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}) = \quad (6.168)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \cdots & Q_d(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k) & \cdots & -Q_d(\mathbf{x}_m, \bar{\mathbf{p}}_m, \bar{\mathbf{d}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix}$$

$$G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \cdots & Q_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) & \cdots & -Q_v(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (6.169)$$

$$G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \cdots & Q_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{u}}_k) & \cdots & -Q_v(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{u}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

Las matrices Q_d y Q_v pueden verse en (6.145) y (6.78).

6.3.6 Par de junta cardan

Un par universal o junta cardan permite dos movimientos relativos entre los dos cuerpos enlazados. Es por tanto un par del clase II y los movimientos relativos están asociados a dos giros alrededor de los ejes que forman la cruceta como se puede ver en la imagen 6.7. Se emplea para transmitir una rotación entre dos ejes desalineados como en el árbol de transmisión de un automóvil.

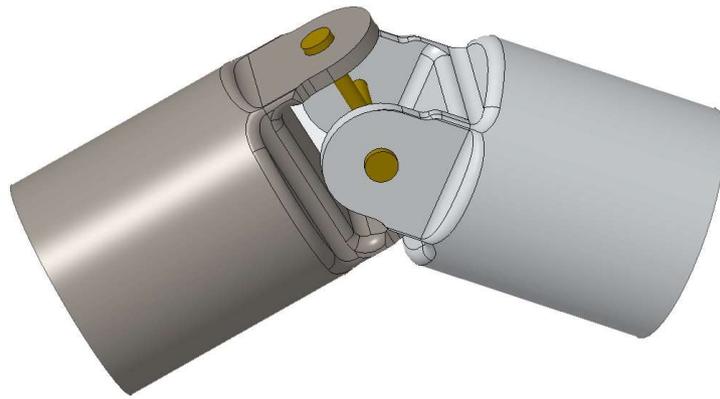


Figura 6.7: Representación idealizada de una junta cardan.

La ligadura requiere 4 ecuaciones. Tres provienen del punto en común situado en el centro de la cruceta, la otra se puede obtener imponiendo un producto escalar constante entre dos vectores. De manera que si se tienen dos cuerpos k y m , se establece una restricción de junta universal si se impone un punto en común para ambos c , y además el producto escalar de un vector p_k perteneciente a k y un vector p_m perteneciente a m es constante. Como se puede observar en la figura 6.8 los cuerpos pueden rotar alrededor de los vectores p_k y p_m .

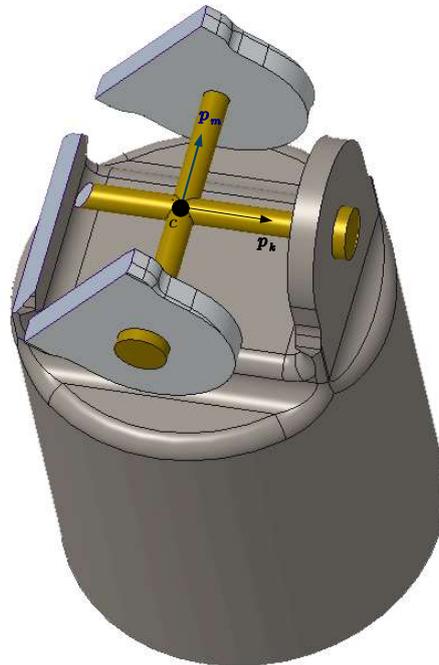


Figura 6.8: Punto y vectores requeridos para definir una junta universal.

Teniendo en cuenta los requerimientos anteriores las funciones matemáticas que definen el enlace tienen la siguiente forma:

$$f_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{cases} f_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = 0 \\ f_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = 0 \end{cases} \quad (6.171)$$

Siendo:

$$f_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = \mathbf{r}_k + R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} - \mathbf{r}_m - R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{r}}_{cm} = 0 \quad (6.172)$$

$$f_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m - a = 0 \quad (6.173)$$

Donde a es el valor del producto escalar. Para el caso habitual la cruceta forma un ángulo recto, de lo contrario las magnitudes de salida se ven seriamente afectadas.

6.3.6.1 Restricciones de coordenadas para la junta cardan

La ecuación f_s linealizada se ha desarrollado en el par esférico (6.35). Se forma un sistema de tres ecuaciones que para un mecanismo de n elementos adquiere la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_s(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) & \cdots & -S_s(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm}) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{Bmatrix} = \quad (6.174)$$

$$-R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{r}}_{cm} + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{cm}) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{r}}_{ck} - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \mathbf{x}_k^j$$

Compactando:

$$H_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r})_{3 \times 1} \quad (6.175)$$

En cuanto a la ecuación f_{esc} , se puede linealizar mediante el método de Newton para una posición \mathbf{x}^{j+1} próxima a \mathbf{x}^j . Se tiene por tanto:

$$\begin{aligned} f_{esc}(\mathbf{x}_k^{j+1}, \mathbf{x}_m^{j+1}, \mathbf{p}) = \\ = (R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m - a + (R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k)^T (R(\mathbf{q}_m^{j+1}) \bar{\mathbf{p}}_m - R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m) + \\ + (R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m)^T (R(\mathbf{q}_k^{j+1}) \bar{\mathbf{p}}_k - R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k) = 0 \end{aligned} \quad (6.176)$$

Desarrollando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
 & \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m - a + \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T R(\mathbf{q}_m^{j+1}) \bar{\mathbf{p}}_m + \\
 & \quad - \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + \\
 & + \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T R(\mathbf{q}_k^{j+1}) \bar{\mathbf{p}}_k - \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k = 0
 \end{aligned} \tag{6.177}$$

Es posible simplificar la ecuación restando términos:

$$\begin{aligned}
 & - \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m - a + \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T R(\mathbf{q}_m^{j+1}) \bar{\mathbf{p}}_m + \\
 & \quad + \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T R(\mathbf{q}_k^{j+1}) \bar{\mathbf{p}}_k = 0
 \end{aligned} \tag{6.178}$$

De igual manera que en (3.50), es posible desarrollar el término $R(\mathbf{q})\mathbf{p}$ para obtener:

$$\begin{aligned}
 & - \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m - a + \\
 & + \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T \left[R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m - S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^j + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^{j+1} \right] + \\
 & + \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T \left[R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^j + S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^{j+1} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{6.179}$$

Reorganizando la ecuación dejando las variables a la izquierda se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^{j+1} + \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^{j+1} = \\
 & \quad = \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m + a + \\
 & \quad - \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T \left[R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m - S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^j \right] + \\
 & \quad - \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T \left[R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^j \right]
 \end{aligned} \tag{6.180}$$

Para un sistema formado por n cuerpos se puede disponer en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{0}_{1 \times 7} \quad \cdots \quad \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \quad \cdots \right. \\
 & \quad \left. \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{1 \times 7} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix} = a +
 \end{aligned} \tag{6.181}$$

$$+ \left(R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k \right)^T S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{p}}_m) \mathbf{x}_m^j - \left(R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{p}}_m \right)^T \left[R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{p}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{p}}_k) \mathbf{x}_k^j \right]$$

Empleando una notación compacta:

$$H_{esc}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{1 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_{esc}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p})_{1 \times 1} \tag{6.182}$$

Finalmente, las restricciones de coordenadas para la junta universal entre dos cuerpos k y m se establece mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$H_{cr}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_{cr}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 1} \quad (6.183)$$

Donde la matriz H_{cr} está formada por:

$$H_{cr}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 7n} = \begin{bmatrix} H_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}) \\ H_{esc}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.184)$$

Y el vector \mathbf{b}_{cr} :

$$\mathbf{b}_{cr}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 7n} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}) \\ \mathbf{b}_{esc}(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.185)$$

6.3.6.2 Restricciones de esfuerzos para la junta cardan

Las ecuaciones de las restricciones de esfuerzos para el par cardan se calculan sometiendo a la función f_{cr} a un movimiento infinitesimal:

$$d f_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (6.186)$$

La ecuación del punto (6.172) ya ha sido calculada en los pares anteriores y coincide con la expresión (6.64):

$$d f_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})_{3 \times 6n} d \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (6.187)$$

Donde:

$$G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})_{3 \times 6n} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 6} & \cdots & Q_s(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) & \cdots & -Q_s(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{cm}) & \cdots & 0_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (6.188)$$

El valor de la matriz Q_s se puede ver en (6.61).

Para calcular el diferencial de la función f_{esc} se procede de la siguiente manera:

$$d f_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = d \left[(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m - a \right] = \mathbf{0} \quad (6.189)$$

Desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned} df_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) &= d\left[(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m \right] - da = \\ &= d\left[(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.190)$$

Que equivale a:

$$\begin{aligned} df_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) &= d\left[(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m \right] = \\ &= (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T d\left[R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m \right] + (R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m)^T d\left[R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.191)$$

El término $dR(\mathbf{q})\mathbf{p}$ se ha calculado anteriormente y puede verse en (6.136), de manera que se tiene:

$$\begin{aligned} &(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T d\left[R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m \right] + (R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m)^T d\left[R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k \right] = \\ &= (R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m)^T Q_g(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) d\boldsymbol{\theta} + (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{p}}_k)^T Q_g(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m) d\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (6.192)$$

Si se llama:

$$Q_{esc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & (R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{p}}_m)^T Q_g(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) \end{bmatrix} \quad (6.193)$$

Se tiene:

$$Q_{esc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) d\mathbf{x}_k + Q_{esc}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m) d\mathbf{x}_m = 0 \quad (6.194)$$

Para un sistema de n cuerpos se puede organizar con notación matricial de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0_{1 \times 6} & \cdots & Q_{esc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k) & \cdots & Q_{esc}(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{p}}_m) & \cdots & 0_{1 \times 6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.195)$$

De manera compacta:

$$G_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})_{1 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.196)$$

Por último, las restricciones de esfuerzos para la junta universal se establecen a través del siguiente sistema de ecuaciones:

$$G_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{4 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.197)$$

Donde la matriz G_{cr} está compuesta por las expresiones (6.187) y (6.196) de la forma:

$$G_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) \\ G_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.198)$$

6.3.7 Par de rodadura

Esta ligadura ofrece un punto de vista diferente a las anteriores. En enlaces precedentes, se establecía una magnitud geométrica como base para desarrollar la restricción. En el caso de rodadura, esta relación se realiza en base a la velocidad. Para ser precisos, la restricción de rodadura se genera cuando el punto de contacto entre dos cuerpos tiene la misma velocidad, es decir, se está vinculando el desplazamiento con el giro. Un ejemplo típico es una leva como en la figura 6.9 o un disco rodando. Obviamente, esto no es del todo exacto. El análisis del contacto es bastante más complejo ya que además de rodadura dependiendo de las condiciones reales del modelo también es probable que aparezca deslizamiento y algún que otro fenómeno físico. Por lo tanto, cuando se establece la hipótesis de rodadura pura se está hablando de una simplificación del sistema real.

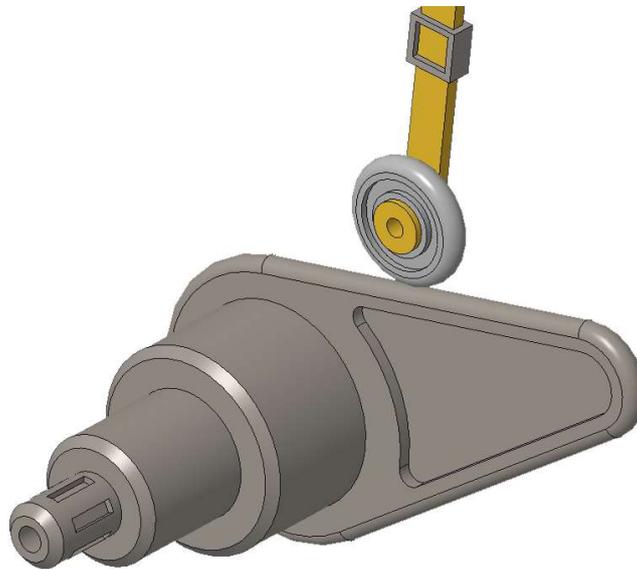


Figura 6.9: Imagen de una leva con una restricción de rodadura pura.

Centrándose en el ejemplo de la figura 6.10, la velocidad del punto de contacto c del disco k debe ser nula para que la relación se cumpla. La velocidad de un punto de un elemento se ha desarrollado en el apartado 3.3, y su expresión es la de la ecuación (3.86), que, caracterizada para el ejemplo en cuestión, tiene la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}}_k + \mathbf{S}_{sp}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) \dot{\mathbf{q}}_k \quad (6.199)$$

Si se presta atención a la ecuación anterior, el vector $\bar{\mathbf{r}}_{ck}$ es el vector en coordenadas locales que va desde el centro de masas del cuerpo k hasta el punto de contacto c . Este vector, por estar expresado en locales, debería cambiar con el giro del disco k , y en un instante posterior ya no estaría definiendo el punto de contacto, como se muestra en la figura 6.11. En realidad, sí estaría definiendo el contacto, pero el disco no se desplazaría.

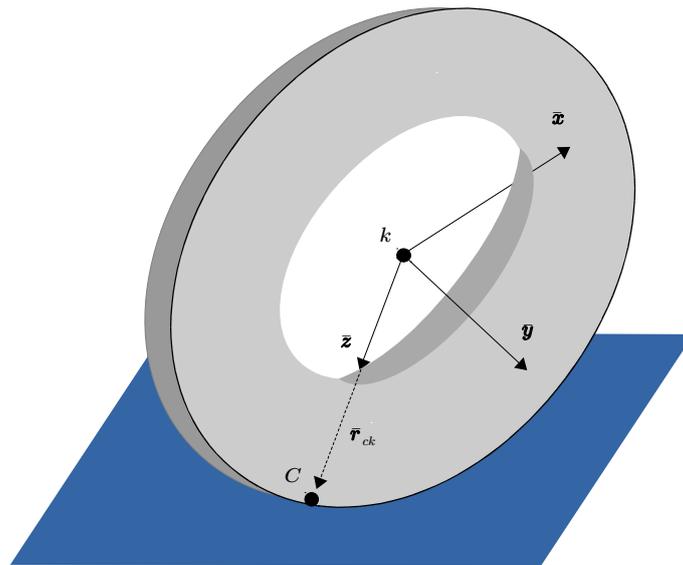


Figura 6.10: Contacto entre rueda y suelo en el instante t .

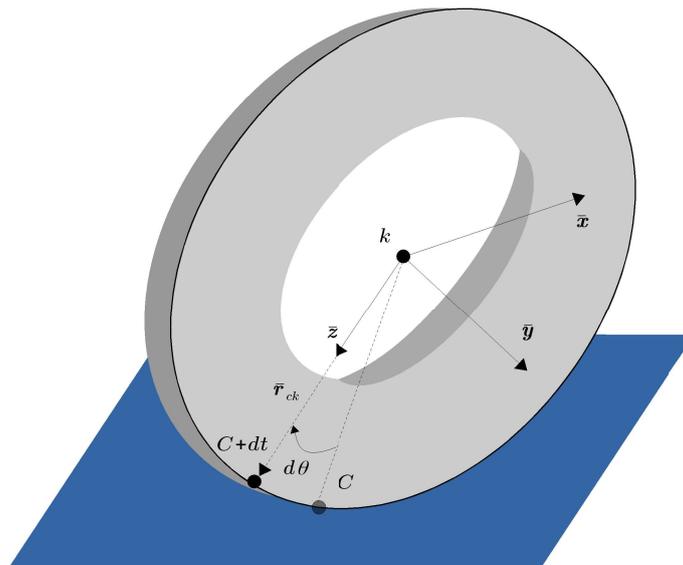


Figura 6.11: Contacto entre rueda y suelo en $t+dt$.

Para solucionar este problema se van a plantear dos sólidos. Un sólido m que gira y se desplaza con la rodadura al que se le adjudican las propiedades de inercia del disco y un sólido k sin masa. El cuerpo k , está unido a m por un par de rotación en el CdG. Además, se le debe restringir el giro de alguna manera, por ejemplo estableciendo alguna igualdad entre algún vector del cuerpo k con otro vector fijo en el espacio. De esta manera el vector $\bar{\mathbf{r}}_{ck}$ estará siempre definiendo el punto de contacto c . Para ilustrar este razonamiento se ha incluido la figura 6.12.

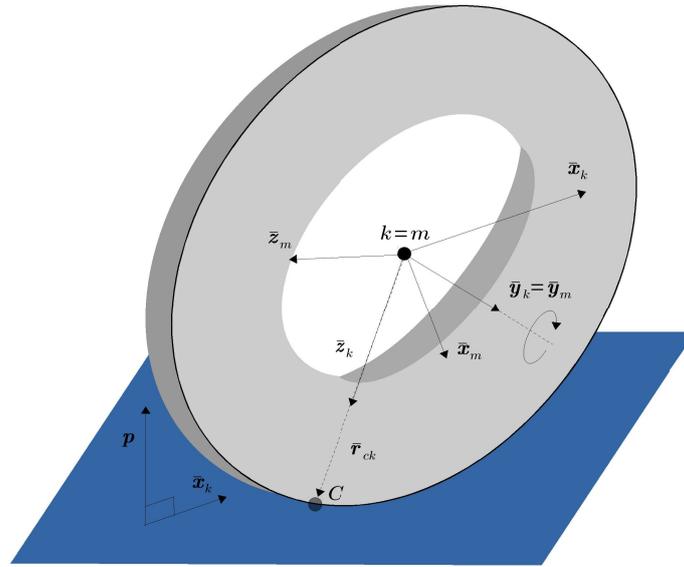


Figura 6.12: Planteamiento de dos cuerpos para el par de rodadura.

Sabiendo que el vector $\bar{\mathbf{r}}_{ck}$ expresado en coordenadas absolutas tiene la forma:

$$\mathbf{r}_{ck} = R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} \quad (6.200)$$

La expresión que define la velocidad de un punto c es por tanto:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{r}}_m + \Omega_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} \quad (6.201)$$

Está claro que existen diferentes variantes, por ejemplo que la distancia $\bar{\mathbf{r}}_{ck}$ sea variable o que ninguno de los cuerpos en contacto estén fijos en el espacio. Sin embargo, habiendo expresado este concepto de dos cuerpos es posible generar cualquiera de las ideas anteriores por lo que en este punto se va a desarrollar un ejemplo sencillo que bien ayude a ilustrar de qué manera se aplican este tipo de ligaduras, como el de la figura 6.12.

Teniendo un disco m de radio constante y siendo c el punto del disco en contacto con una superficie fija, las funciones que definen el par de rodadura se establecen de la siguiente manera. Primeramente, se debe hacer que la velocidad del punto de contacto c sea nula. Si se llama k a un disco de igual geometría pero sin masa y $\bar{\mathbf{r}}_{ck}$ el vector que une el contacto con el punto k en coordenadas locales se tiene que:

$$f_{vel}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}}_m + \Omega_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} = 0 \quad (6.202)$$

También, se tiene que aplicar un par de rotación, ecuación (6.65), entre los cuerpos m y k . En este caso el punto de aplicación coincide con los puntos k y m que son centros de masas de ambos cuerpos:

$$f_r(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{cases} f_s(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = 0 \\ f_v(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{p}) = 0 \end{cases} \quad (6.203)$$

Donde:

$$f_s(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = \mathbf{r}_m + R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{r}}_{mm} - \mathbf{r}_k - R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{kk} = 0 \quad (6.204)$$

$$f_v(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{p}) = R(\mathbf{q}_m) \bar{\mathbf{y}}_m - R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{y}}_k = 0 \quad (6.205)$$

En este caso el vector $\bar{\mathbf{y}}_k$ tiene las coordenadas $[0 \ 1 \ 0]^T$. Además, para evitar que el disco sin masa k gire, se puede hacer que el vector $\bar{\mathbf{x}}_k = [1 \ 0 \ 0]^T$ sea perpendicular al vector \mathbf{p} normal al suelo en coordenadas globales, siendo la función de restricción la siguiente:

$$f_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{0}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{x}}_k) = 0 \quad (6.206)$$

De forma que la función que define el movimiento de un disco m con rodamiento puro en el contacto con el suelo es:

$$f_{roll}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{cases} f_{vel}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = 0 \\ f_s(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = 0 \\ f_v(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{p}) = 0 \\ f_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{0}, \mathbf{p}) = 0 \end{cases} \quad (6.207)$$

Por la tanto, se tienen diez ecuaciones de las cuales ocho son linealmente independientes. Se tiene tres grados de libertad que coinciden con dos giros,

pivotamiento e inclinación, más la relación entre el desplazamiento y la rotación alrededor del eje del disco.

Es importante no confundir el vector $\mathbf{x}_k = [x_k \ y_k \ z_k \ q_{k0} \ q_{k1} \ q_{k2} \ q_{k3}]^T$ que define las posición del cuerpo k con el vector que define al eje longitudinal en coordenadas locales $\bar{\mathbf{x}}_k = [1 \ 0 \ 0]^T$.

6.3.7.1 Restricción de coordenadas para el par de rodadura

Si bien la mayoría de las funciones son conocidas, los desarrollos no se van a incluir. Sin embargo, como se está empleando una nomenclatura específica sí se van a mostrar las matrices necesarias para el par de rodadura.

La función del punto f_s linealizada, que coincide con la del par esférico, se escribe en estas circunstancias como:

$$H_s(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j)_{3 \times 1} \quad (6.208)$$

Siendo:

$$\left[\mathbf{0}_{3 \times 7} \quad \cdots \quad S_s(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{kk}) \quad \cdots \quad -S_s(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{mm}) \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{3 \times 7} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix} = \quad (6.209)$$

$$-R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{r}}_{mm} + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{r}}_{mm}) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{r}}_{kk} - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{r}}_{kk}) \mathbf{x}_k^j$$

En este caso en concreto, el valor de los vectores $\bar{\mathbf{r}}_{kk}$ y $\bar{\mathbf{r}}_{mm}$ es nulo por lo que la ecuación se simplifica bastante aunque no tiene porqué ocurrir lo mismo en un caso general.

El vector f_v , es parte del par de rotación al igual que la ecuación f_s y este caso adquiere la siguiente forma:

$$H_v(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{p})_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{p})_{3 \times 1} \quad (6.210)$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{y}}_k) & \cdots & -S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{y}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix} = \quad (6.211)$$

$$-R(\mathbf{q}_m^j) \bar{\mathbf{y}}_m + S_v(\mathbf{q}_m^j, \bar{\mathbf{y}}_m) \mathbf{x}_m^j + R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{y}}_k - S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{y}}_k) \mathbf{x}_k^j$$

Las ecuaciones del par de rotación entre los discos con y sin masa, k y m son, por tanto:

$$H_r(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{6 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_r(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p})_{6 \times 1} \quad (6.212)$$

Siendo:

$$H_r(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} H_s(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}) \\ H_v(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{p}) \end{bmatrix} \quad (6.213)$$

$$\mathbf{b}_r(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{r}) \\ \mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k^j, \mathbf{x}_m^j, \mathbf{p}) \end{Bmatrix} \quad (6.214)$$

En cuanto al producto escalar nulo, que hace que los vectores $\bar{\mathbf{x}}_k$ y \mathbf{p} permanezcan perpendiculares y así evitar el giro del disco sin masa, puede hacerse de igual manera que la ecuación (6.182). En este caso con $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ y sustituyendo los términos correspondientes se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 7} & \cdots & \mathbf{p}^T S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{x}}_k) & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 7} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 7} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix} = \quad (6.215)$$

$$\mathbf{p}^T [-R(\mathbf{q}_k^j) \bar{\mathbf{x}}_k + S_v(\mathbf{q}_k^j, \bar{\mathbf{x}}_k) \mathbf{x}_k^j]$$

Con notación matricial:

$$H_{esc}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{p})_{1 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_{esc}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{p})_{1 \times 1} \quad (6.216)$$

Hasta aquí era todo conocido y no implica ninguna novedad. Sin embargo, la expresión (6.202) f_{vel} , requiere una cierta aclaración. En primer lugar, es posible, al igual que la expresión (3.86), sacar las velocidades como factor común ya que la expresión es lineal:

$$f_{vel}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}}_m + S_{sp}(\mathbf{q}_m, \mathbf{r}_{ck}) \dot{\mathbf{q}}_m = 0 \quad (6.217)$$

O bien, de forma matricial:

$$f_{vel}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & S_{sp}(\mathbf{q}_m, \mathbf{r}_{ck}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_k \\ \dot{\mathbf{y}}_k \\ \dot{\mathbf{z}}_k \\ \dot{q}_{k0} \\ \dot{q}_{k1} \\ \dot{q}_{k2} \\ \dot{q}_{k3} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.218)$$

Con lo que se tiene:

$$f_{vel}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = S_{ab}(\mathbf{q}_m, \mathbf{r}_{ck}) \dot{\mathbf{x}}_m = 0 \quad (6.219)$$

Se están imponiendo las restricciones a los desplazamientos y en este caso se tienen velocidades. No obstante, si se aplican diferencias centrales se puede sustituir el término de la velocidad de la siguiente manera:

$$f_{vel}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = S_{ab}(\mathbf{q}_m^j, \mathbf{r}_{ck}^j) \frac{\mathbf{x}_m^{j+1} - \mathbf{x}_m^{j-1}}{2 \Delta t} = 0 \quad (6.220)$$

Reorganizando la ecuación anterior:

$$S_{ab}(\mathbf{q}_m^j, \mathbf{r}_{ck}^j) \frac{\mathbf{x}_m^{j+1}}{2 \Delta t} = S_{ab}(\mathbf{q}_m^j, \mathbf{r}_{ck}^j) \frac{\mathbf{x}_m^{j-1}}{2 \Delta t} \quad (6.221)$$

Si se tiene un sistema de n elementos se dispone la ecuación con notación matricial:

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 7} & \cdots \\ & & S_{ab}(\mathbf{q}_m^j, \mathbf{r}_{ck}^j) \frac{1}{2\Delta t} & \cdots \\ & & & \mathbf{0}_{3 \times 7} \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{j+1} \end{pmatrix} = \quad (6.222)$$

$$S_{ab}(\mathbf{q}_m^j, \mathbf{r}_{ck}^j) \frac{\mathbf{x}_m^{j-1}}{2\Delta t}$$

O, lo que es lo mismo:

$$H_{vel}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}^j)_{3 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_{vel}(\mathbf{x}_m^{j-1}, \mathbf{x}_k^{j-1}, \mathbf{r}^{j-1})_{3 \times 1} \quad (6.223)$$

El término $2\Delta t$ aparece en ambos lados de la ecuación y se podría cancelar. En cualquier caso, es habitual aplicar técnicas de escalado para mejorar el condicionamiento numérico del sistema.

En resumen, las ecuaciones que determinan un par de rodadura entre un disco m y una superficie inmóvil forman el siguiente sistema:

$$H_{roll}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}^j, \mathbf{p}^j)_{10 \times 7n} \mathbf{x}^{j+1} = \mathbf{b}_{roll}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}^j, \mathbf{p}_m^j)_{10 \times 1} \quad (6.224)$$

Donde H_{roll} y \mathbf{b}_{roll} son:

$$H_{roll}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} H_r(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ H_{esc}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{p}) \\ H_{vel}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (6.225)$$

$$\mathbf{b}_{roll}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_r(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{b}_{esc}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{p}) \\ \mathbf{b}_{vel}(\mathbf{x}_m^j, \mathbf{x}_k^j, \mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (6.226)$$

6.3.7.2 Restricción de esfuerzos para el par de rodadura

La mayoría de las restricciones de esfuerzos de las funciones que componen el par de rodadura ya han sido calculadas y sus desarrollos no tienen

demasiado interés. Por otro lado, la función f_{vel} , requiere un tratamiento distinto. Partiendo de la ecuación (6.202):

$$f_{vel}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_k, \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}}_m + \Omega_m(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) \mathbf{R}(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck} = 0 \quad (6.227)$$

Sabiendo que la matriz de velocidad angular se puede escribir como:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.228)$$

La función f_{vel} puede expresarse como:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dy}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-d\theta_z}{dt} & \frac{d\theta_y}{dt} \\ \frac{d\theta_z}{dt} & 0 & \frac{-d\theta_x}{dt} \\ \frac{-d\theta_y}{dt} & \frac{d\theta_x}{dt} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x \\ (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y \\ (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.229)$$

El término dt se cancela y desarrollando el producto de matriz por vector se obtiene:

$$\begin{bmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -d\theta_z (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y + d\theta_y (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z \\ d\theta_z (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x - d\theta_x (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z \\ -d\theta_y (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x + d\theta_x (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y \end{pmatrix} = 0 \quad (6.230)$$

Sacando $d\theta$ se dispone de forma matricial de la forma:

$$\begin{bmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & -(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y \\ -(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & 0 & (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x \\ (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y & -(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{pmatrix} = 0 \quad (6.231)$$

Llamando:

$$Q_{sp}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) = \begin{bmatrix} 0 & (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & -(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y \\ -(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_z & 0 & (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x \\ (R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_y & -(R(\mathbf{q}_k) \bar{\mathbf{r}}_{ck})_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.232)$$

Se tiene:

$$I_{3 \times 3} d\mathbf{r} + Q_{sp}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) d\theta = 0 \quad (6.233)$$

O bien, compactando:

$$Q_{vel}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})_{3 \times 6} d\mathbf{x}_m = 0 \quad (6.234)$$

Finalmente, para un sistema de n cuerpos:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 6} & \cdots & Q_{vel}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck}) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} d\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_k \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_m \\ \vdots \\ d\mathbf{x}_n \end{array} \right\} = 0 \quad (6.235)$$

Con notación compacta:

$$G_{vel}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{r}})_{3 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.236)$$

Para la función de rotación puede hacerse como en (6.82) que, caracterizada para las condiciones de este supuesto, toma la forma:

$$G_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) \\ G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) \end{bmatrix} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.237)$$

Donde:

$$G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \cdots & Q_s(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{kk}) & \cdots & -Q_s(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{r}}_{mm}) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (6.238)$$

$$G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} & \cdots & Q_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{y}}_k) & \cdots & -Q_v(\mathbf{q}_m, \bar{\mathbf{y}}_m) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.239)$$

En cambio, el producto escalar se realiza tomando como ejemplo la expresión (6.196), pero adecuándolo para la función (6.206):

$$G_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{0}, \mathbf{p})_{1 \times 6n} d\mathbf{x} = 0 \quad (6.240)$$

Donde en este caso la matriz G_{esc} es:

$$\begin{aligned}
G_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{0}, \mathbf{p}) &= \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 6} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{p}^T Q_g(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{x}}_k) \end{bmatrix} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 6} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.241}$$

Por tanto, la restricción de esfuerzos para el par de rodadura toma el siguiente aspecto:

$$G_{roll}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \bar{\mathbf{r}})_{10 \times 6n} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6.242}$$

Estando la matriz G_{roll} compuesta por:

$$G_{roll}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \bar{\mathbf{r}}) = \begin{bmatrix} G_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} \\ G_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{0}, \mathbf{p}) \\ G_{vel}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{r}}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{6.243}$$

Como se ha comentado, este par de rodadura es un caso concreto pero los criterios seguidos pueden servir como patrón y aplicarse a cualquier otro modelo con sus pertinentes modificaciones.

6.4 Problema de posición

Cuando la configuración inicial del mecanismo no es correcta, aparecen errores de ensamblado en el primer paso de integración. Para evitar dichos fallos, es conveniente resolver el problema de posición, el cual una vez construido el sistema (6.1), se plantea fácilmente.

Un sistema de ecuaciones no lineales, definidas de la forma $\Phi(\mathbf{x})=0$, se puede resolver iterativamente aplicando el método de Newton-Rapshon, dando como resultado el siguiente algoritmo:

$$\Phi(\mathbf{x}_n) + \dot{\Phi}_x(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = 0 \tag{6.244}$$

Siendo \mathbf{x}_n el valor de entrada. La iteración concluye cuando el error entre \mathbf{x}_{n+1} y \mathbf{x}_n cumple con el criterio establecido. Si se reorganiza el sistema (6.244) se obtiene:

$$\dot{\Phi}_x(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} = \dot{\Phi}_x(\mathbf{x}_n)\mathbf{x}_n - \Phi(\mathbf{x}_n) \tag{6.245}$$

Precisamente, si se comparan el sistema (6.245) con el de la expresión (6.1), resulta evidente que se trata del mismo sistema, donde:

$$H(\mathbf{x}_n) = \dot{\Phi}_x(\mathbf{x}_n) \quad (6.246)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_n) = \dot{\Phi}_x(\mathbf{x}_n) \mathbf{x}_n - \dot{\Phi}(\mathbf{x}_n) \quad (6.247)$$

La matriz H y el vector \mathbf{b} ya están contruidos y obviamente, dependen de las restricciones del mecanismo. Para resolver el problema de posición inicial, hay que añadir a dicho sistema las ecuaciones relativas a las condiciones de contorno, que en este caso se corresponden a los grados de libertad del mecanismo. En la mayoría de los casos, las condiciones de contorno serán de tipo lineal, en caso contrario se deben linealizar. Por tanto, las condiciones de contorno se puede disponer formando el siguiente sistema:

$$J(\mathbf{x}_n) \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{c}(\mathbf{x}_n) \quad (6.248)$$

Para introducir las condiciones de contorno en el problema de posición se pueden añadir al sistema (6.1) o de forma más elegante mediante el método del subespacio nulo. Aplicando esta última alternativa se obtiene el siguiente algoritmo:

$$H(\mathbf{x}_n) N_J \boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \mathbf{b}(\mathbf{x}_n) - H(\mathbf{x}_n) \mathbf{c}_p(\mathbf{x}_n) \quad (6.249)$$

Donde N_J es el subespacio nulo de J , \mathbf{c}_p es una solución particular de (6.248) y $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ las incógnitas del sistema. El sistema (6.249) es un sistema sobredeterminado, que se puede resolver por cualquiera de los métodos numéricos existentes para obtener la solución de mínimos cuadrados. Una vez resuelto, la solución se obtiene con:

$$\mathbf{x}_{n+1} = N_J \boldsymbol{\alpha}_{n+1} + \mathbf{c}_p(\mathbf{x}_n) \quad (6.250)$$

La secuencia de aplicación del algoritmo en la iteración n sería la siguiente:

1. Partiendo del valor \mathbf{x}_n , se definen las condiciones de contorno, matriz $J(\mathbf{x}_n)$ y vector \mathbf{c}_n . En caso de ser lineales las condiciones de contorno se mantienen constantes.
2. Con el mismo \mathbf{x}_n se calcula $H(\mathbf{x}_n)$ y \mathbf{b}_n .
3. Con $J(\mathbf{x}_n)$ y \mathbf{c}_n se calcula el subespacio nulo N_J y se obtiene la solución particular \mathbf{c}_p .
4. Mediante la expresión (6.249), se halla $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$.
5. Finalmente, con la ecuación (6.250) se obtiene \mathbf{x}_{n+1} .

6. Si $E_{error} > \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$, se concluye el proceso iterativo. En caso contrario se vuelve al paso 1, siendo el nuevo valor de entrada \mathbf{x}_{n+1} .

6.5 Diagrama de flujo del proceso

La secuencia de operaciones del proceso no dista mucho de la que se puede aplicar a cualquier otro proceso de integración. El diagrama de flujo se define en las figuras 6.13, 6.14 y 6.15.

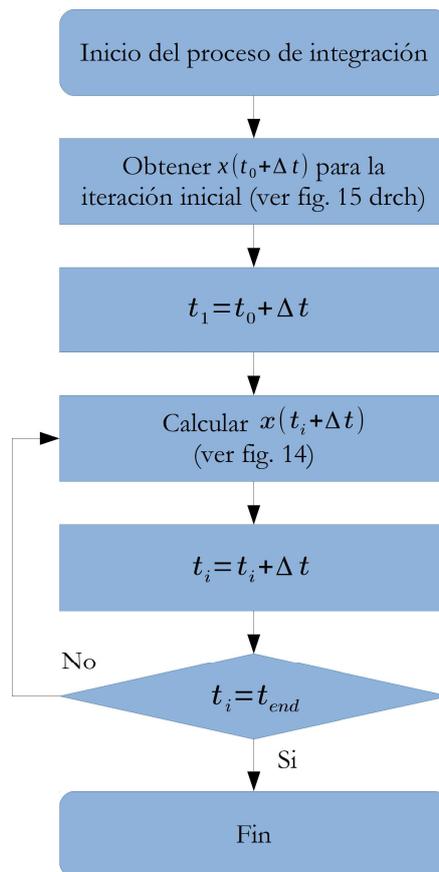


Figura 6.13: Diagrama de flujo del proceso principal.

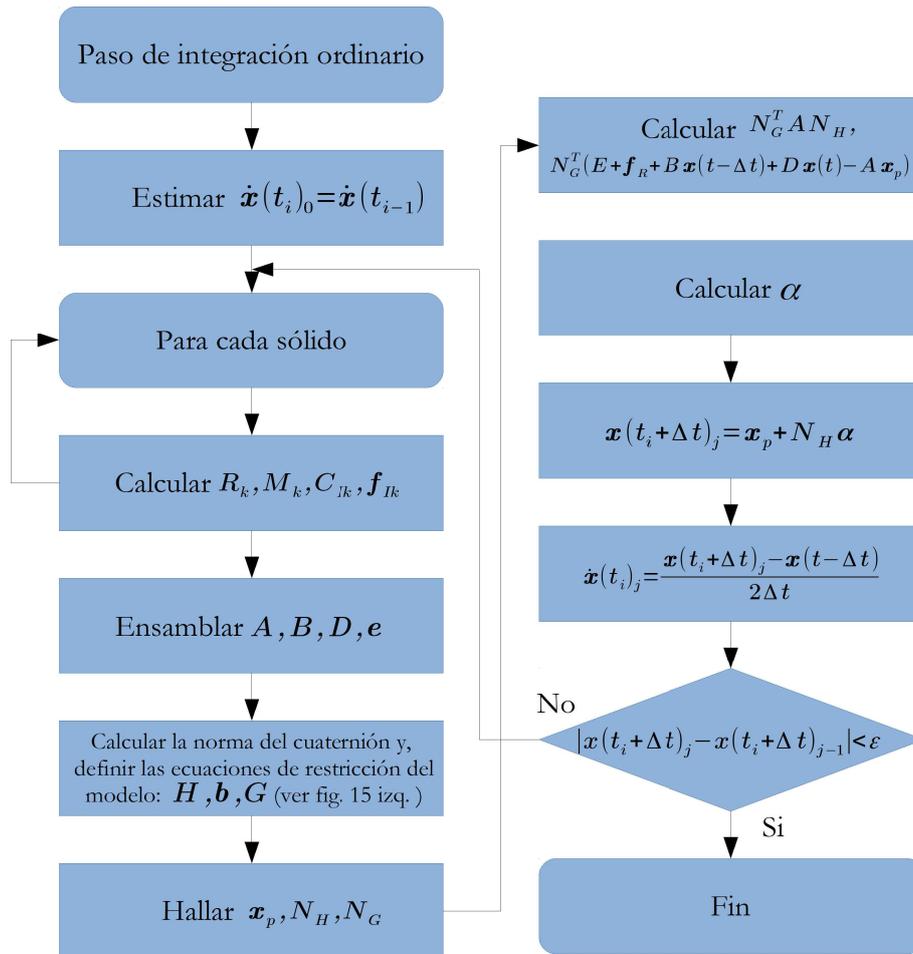


Figura 6.14: Diagrama de flujo de un paso de integración.

El proceso de forma general se describe en la figura 6.13. El desarrollo comienza con el primer paso de integración, el cual se detalla en la figura 6.15 derecha. A continuación todos los pasos de integración restantes se resuelven de la manera explicada en la figura 6.14. Salvo en la iteración del instante inicial, el proceso comienza con una estimación de $\dot{x}(t)$. Esto es necesario, como se explicará posteriormente, debido a que el método no incluye a las velocidades como variables independientes, de forma que éstas son obtenidas a partir de las coordenadas de posición mediante la fórmula de las diferencias centrales.

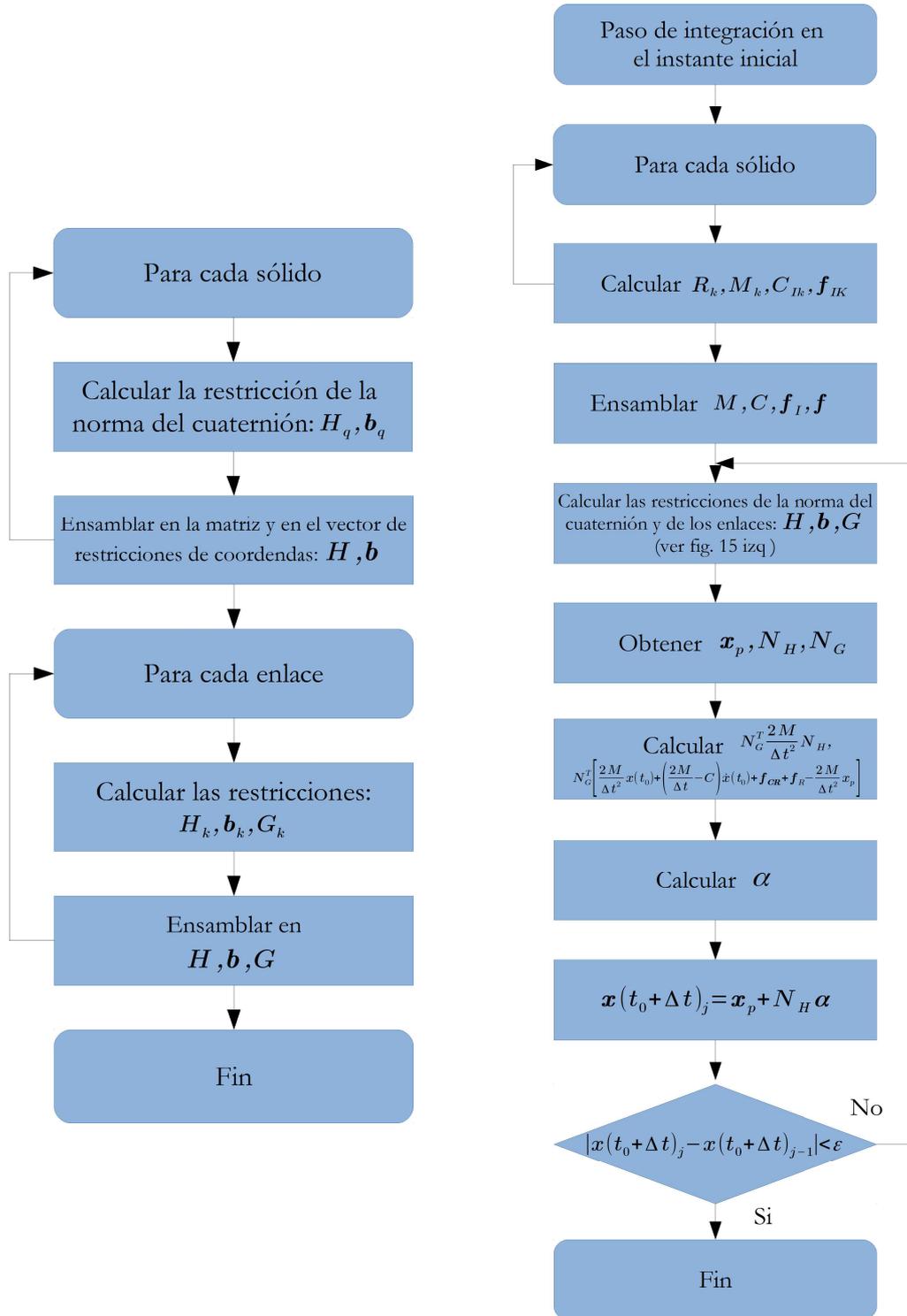


Figura 6.15: Diagrama de flujo de cálculo de las restricciones (izquierda) y paso de integración en el instante inicial (derecha).

Después, para cada elemento, se calculan las matrices de rotación R_k y R_4^T (ec. (3.13) y (4.26)), y con éstas se hallan M_k , C_{Ik} y f_{Ik} , (ecs. (4.41), (4.42), (4.43), (4.34), (4.35), (4.36), (4.22), (4.23) y (4.24)). Posteriormente, una vez se han obtenido las matrices para todos los elementos, es posible ensamblar las matrices M , C_I , f_I para el sistema completo (ecs. (4.47), (4.48), (4.49)). Si en el

sistema intervienen elementos discretos como resortes y/o amortiguadores se obtienen las matrices C_{ock} y K_{ock} (ecs (4.64) y (4.74)) y mediante ensamblado las del sistema completo C_D y K (ecs. (4.65) y (4.75)). En este momento, con C_D y C_I se obtiene la matriz C (ec. (2.138)) y se formula la ecuación de equilibrio para el sistema completo (ec. (4.79)). Una vez establecida la ecuación de equilibrio, se procede a aplicar el método de integración por CD. Se obtienen las matrices A , B , D y el vector e (ecs. (5.9), (5.10), (5.11) y (5.12)). A continuación, para cada elemento se obtiene la ecuación de restricción relativa a la norma del cuaternión y, para cada enlace, las ecuaciones de coordenadas y las de esfuerzo tal y como se muestra en la figura 6.15 izquierda. Este aspecto se tratará más adelante. Una vez que se han obtenido las matrices H , G y el vector b , es posible calcular su correspondiente subespacio nulo N_H y N_G y una solución particular (ec. (6.20)). Con esto, se puede construir la ecuación (6.19). La solución a esta ecuación conlleva a α , el cual conduce a obtener un candidato para $x(t+\Delta t)$. En este instante, ya puede calcularse la velocidad correspondiente a dicha solución, $\dot{x}(t)$. El último paso es comprobar la convergencia. Si no se obtiene el orden deseado, la nueva estimación de la velocidad permite realizar un nuevo proceso de iteración. En el instante inicial, el desarrollo es parecido salvo, que al conocer $\dot{x}(t_0)$, el proceso se simplifica.

La construcción de las ecuaciones de restricción se expone en la figura 6.15 izquierda. El primer paso es calcular la restricción impuesta por la norma del cuaternión, que únicamente afecta a H y b . La ecuación (6.27) se formula para cada cuerpo. Cuando las restricciones de la norma se han construido, se introducen las relativas a los enlaces. Se calculan las ecuaciones de restricción de las ligaduras no solo de las coordenadas H , sino también las de los esfuerzos G . Tanto las ecuaciones de restricción correspondientes a las coordenadas como las de esfuerzos se introducen en la matrices H , G y el vector b apilándose una debajo de la otra, como puede verse en las ecuaciones del par de rodadura (6.225), (6.226) y (6.243).

7 Optimización en la implementación de la metodología

Hasta ahora el método se ha expuesto de manera secuencial de tal manera que sea más comprensible para el lector. Sin embargo, a la hora de aplicarlo a un problema real, esta forma de proceder sería derrochar tiempo de cálculo obligando al ordenador a afrontar costosas secuencias de cálculo. Teniendo en cuenta el coste computacional de las operaciones matemáticas, en este apartado se presenta una de las posibles maneras de optimizar la implementación del método.

Partiendo de la ecuación de Euler para un único sólido (4.37), si se le aplica el método CD se tiene una ecuación con la siguiente forma:

$$A_{Rk}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\mathbf{q}(t+\Delta t) = \mathbf{t}_k + \mathbf{t}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) + B_{Rk}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\mathbf{q}(t-\Delta t) + D_{Rk}(\mathbf{q}(t))\mathbf{q}(t) \quad (7.1)$$

Donde:

$$A_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) = \left[M_{Rk}(\mathbf{q}_k) \frac{1}{(\Delta t)^2} + C_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \frac{1}{2\Delta t} \right] \quad (7.2)$$

$$B_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) = \left[-M_{Rk}(\mathbf{q}_k) \frac{1}{(\Delta t)^2} + C_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \frac{1}{2\Delta t} \right] \quad (7.3)$$

$$D_{Rk}(\mathbf{q}_k) = \left[2M_{Rk}(\mathbf{q}_k) \frac{1}{(\Delta t)^2} \right] \quad (7.4)$$

Incluyendo los términos relativos a los desplazamientos derivados de las ecuaciones de Newton, las matrices anteriores se modifican pasando a estar compuestas por:

$$A_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k) = \begin{bmatrix} \rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$B_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k) = \begin{bmatrix} -\rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & B_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$D_k(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} 2\rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & D_{Rk}(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Además se pueden incluir los siguientes vectores:

$$\mathbf{f}_{ek} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{t}_k \end{Bmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{f}_{ik} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{t}_{CRk} \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

Ahora puede escribirse:

$$A_k(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{f}_{ek} + \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) + B_k(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}(t-\Delta t) + D_{xk}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \quad (7.10)$$

La aplicación de la ecuación (7.10) es conceptualmente sencilla, pero implica una serie de costosos productos de matrices que no son interesantes desde el punto de vista de la eficiencia. Si por el contrario se considera:

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{f}_{ek} + \mathbf{f}_{ik}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) + B_k(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))\mathbf{x}(t-\Delta t) + D_{xk}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \quad (7.11)$$

Es evidente que, al estar tanto B_k como D_k formadas por productos y sumas de matrices, es más rápido si se ordena el proceso para eliminar las sumas de productos de matrices y convertirlos en productos de matrices por vectores y sumas de matrices por vectores. Esto se puede hacer de la siguiente manera:

$$B_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k) \mathbf{x}_k(t - \Delta t) = \begin{bmatrix} -\rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} & 0_{3 \times 4} \\ 0_{3 \times 3} & B_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \end{bmatrix} \mathbf{x}_k(t - \Delta t) = \begin{pmatrix} -\rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{r}_k(t - \Delta t) \\ B_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Desarrollando la ecuación anterior:

$$B_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) = \left[-M_{Rk}(\mathbf{q}_k) \frac{1}{(\Delta t)^2} + C_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \frac{1}{2\Delta t} \right] \mathbf{q}_k(t - \Delta t) = -\frac{1}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k) R_4^T(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) + \frac{1}{2\Delta t} R(\mathbf{q}_k) \bar{C}_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) R_4^T(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) \quad (7.13)$$

La ecuación (7.13) permite convertir las cuatro multiplicaciones de matrices ($4n^3$ flops), suma de dos matrices (n^2 flops), multiplicación de matriz por vector (n^2 flops), escalado de dos matrices ($2n^2$ flops) y suma de los mismos (n flops) en 5 productos de matriz por vector ($5n^2$ flops), escalado de dos vectores ($2n$ flops) y suma de dos vectores (n flops). La primera secuencia lleva un total de $4n^3 + 3n^2 + 3n$, mientras que la segunda conlleva $5n^2 + 3n$. De todas formas estos cálculos no son válidos ya que, como se verá luego, buena parte del trabajo empleado en obtener A_k se puede aplicar para obtener parte de B_k . Nótese que el primer sumando de (7.13) no depende de $\mathbf{q}_k(t + \Delta t)$, por lo que puede calcularse para cada $\mathbf{q}(t)$ y así no recalcularlo para cada iteración en el método de Newton. Haciendo:

$$B_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k) \mathbf{x}_k(t - \Delta t) = \begin{pmatrix} -\rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{r}_k(t - \Delta t) \\ \frac{-1}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k) R_4^T(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{3 \times 1} \\ \frac{1}{2\Delta t} R(\mathbf{q}_k) \bar{C}_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) R_4^T(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

De manera que se tiene:

$$B_{Rk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) = \mathbf{b}_{ck}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t - \Delta t)) + \mathbf{b}_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t - \Delta t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) \quad (7.15)$$

Por otro lado:

$$D_k(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 2 \rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{(\Delta t)^2} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & D_{Rk}(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \mathbf{x}_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(\Delta t)^2} \rho V_k I_{3 \times 3} \mathbf{r}_k(t) \\ D_{Rk}(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k(t) \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

Desarrollando:

$$D_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) \mathbf{q}_k(t) = \frac{2}{(\Delta t)^2} M_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) \mathbf{q}_k(t) = \frac{2}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) R_4^T(\mathbf{q}_k(t)) \mathbf{q}_k(t) = \frac{2}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) \mathbf{q}_k(t) \quad (7.17)$$

Nuevamente se reduce considerablemente el coste, al pasar de 2 productos de matriz por matriz ($2n^3$ flops), un producto de matriz por vector (n^2 flops) y un escalado de matriz (n^2 flops) a dos productos de matriz por vector ($2n^2$ flops) y un escalado de un vector (n flops). Se pasa de $2n^3 + 2n^2$ flops a $2n^2 + n$ flops. Como se verá, esto en realidad no importa, ya que es posible aprovechar parte del trabajo realizado para calcular A_k para obtener rápidamente D_k . En este caso el vector resultante es constante durante el instante t , ya que no se tiene ningún término que dependa de $\dot{\mathbf{x}}_k(t)$ ni, por tanto, de $\mathbf{x}_k(t + \Delta t)$.

Se puede escribir:

$$D_k(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(\Delta t)^2} \rho V_k I_{3 \times 3} \mathbf{r}_k(t) \\ \frac{2}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) \mathbf{q}_k(t) \end{pmatrix} = \mathbf{d}_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) \quad (7.18)$$

Para el vector de fuerzas generadas durante el proceso de linealización:

$$\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{t}_{CRk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ R(\mathbf{q}_k(t)) \begin{pmatrix} \bar{\omega}_{ky}^0 \bar{\omega}_{kz}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{ky}) \\ \bar{\omega}_{kz}^0 \bar{\omega}_{kx}^0 (\bar{I}_{kx} - \bar{I}_{kz}) \\ \bar{\omega}_{kx}^0 \bar{\omega}_{ky}^0 (\bar{I}_{ky} - \bar{I}_{kx}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Se puede volver a definir como:

$$\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = \mathbf{f}_{ivk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) \quad (7.20)$$

Como depende de $\dot{\mathbf{x}}_k(t)$, varía en las iteraciones del método de Newton.

Y para las fuerzas exteriores:

$$\mathbf{f}_{ek} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_k(t) \\ \mathbf{t}_k(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{f}_{ek}(t) \quad (7.21)$$

Por último para la matriz A_k se tiene:

$$A_k(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = \begin{bmatrix} \rho_k V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_{Rk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} A_{Rk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) &= \frac{1}{(\Delta t)^2} M_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) + \frac{1}{2\Delta t} C_{Rk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) = \\ & \frac{1}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) R_4^T(\mathbf{q}_k(t)) + \\ & + \frac{1}{2\Delta t} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{C}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) R(\mathbf{q}_k(t))_4^T \end{aligned} \quad (7.23)$$

Con lo que puede escribirse:

$$\begin{aligned} & A_k(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = \\ & \left\{ \begin{array}{cc} \rho_k V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) R_4^T(\mathbf{q}_k(t)) \end{array} \right\} + \\ & \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{2\Delta t} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{C}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) R(\mathbf{q}_k(t))_4^T \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (7.24)$$

O bien:

$$A_k(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = A_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) + A_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) \quad (7.25)$$

Siendo el primer sumando constante en el instante t .

Con todo esto se puede escribir:

$$\begin{aligned} & [A_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) + A_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t))] \mathbf{x}_k(t + \Delta t) = \\ & \mathbf{f}_{ek}(t) + \mathbf{b}_{ck}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t - \Delta t)) + \mathbf{d}_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) + \\ & \mathbf{f}_{ivk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) + \mathbf{b}_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t - \Delta t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) \end{aligned} \quad (7.26)$$

Otro detalle que puede reducir aún más el coste de cálculo viene de analizar los valores de A_{ck} , \mathbf{b}_{ck} y \mathbf{d}_{ck} . Efectivamente se comprueba que existen las siguientes relaciones:

$$A_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) = \begin{bmatrix} \rho_k V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) R_4^T(\mathbf{q}_k(t)) \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

$$\mathbf{b}_{ck}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t - \Delta t)) = \begin{pmatrix} -\rho V_k I_{3 \times 3} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{r}_k(t - \Delta t) \\ \frac{-1}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k) R_4^T(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) \end{pmatrix} = \quad (7.28)$$

$$-A_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) \mathbf{x}_k(t - \Delta t)$$

$$\mathbf{d}_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(\Delta t)^2} \rho_k V_k I_{3 \times 3} \mathbf{r}_k(t) \\ \frac{2}{(\Delta t)^2} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{M}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t)) \mathbf{q}_k(t) \end{pmatrix} = 2A_{ck}(\mathbf{x}_k(t)) \mathbf{x}_k(t) \quad (7.29)$$

Por otro lado si se comparan los términos A_{vk} y \mathbf{b}_{vk} , se tiene:

$$A_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \frac{1}{2\Delta t} R(\mathbf{q}_k(t)) \bar{C}_{Rk}(\mathbf{q}_k(t), \dot{\mathbf{q}}_k(t)) R_4^T(\mathbf{q}_k(t)) \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{b}_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t - \Delta t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \frac{1}{2\Delta t} R(\mathbf{q}_k) \bar{C}_{Rk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) R_4^T(\mathbf{q}_k) \mathbf{q}_k(t - \Delta t) \end{pmatrix} = \quad (7.31)$$

$$A_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) \mathbf{x}_k(t - \Delta t)$$

Como se ha comentado varias veces, al tratarse de una ecuación no lineal ya que varios términos dependen de $\dot{\mathbf{x}}_k(t)$ que a su vez depende de $\mathbf{x}_k(t + \Delta t)$, es necesario resolver cada etapa de equilibrio de forma iterativa. Teniendo en cuenta el anterior desarrollo la secuencia para un instante t sería la siguiente:

1. Se parte de $\mathbf{x}_k(t)$, $\mathbf{x}_k(t - \Delta t)$ y \mathbf{f}_{ek} .

2. Con estos valores se puede calcular $R(\mathbf{q}_k(t))$ y $A_{ck}(\mathbf{x}_k(t))$ y mediante las relaciones (7.28) y (7.29) se obtienen directamente $\mathbf{b}_{ck}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t-\Delta t))$ y $\mathbf{d}_{ck}(\mathbf{x}_k(t))$. Éstas son válidas para todo el instante t .
3. Se calcula un valor inicial de $\dot{\mathbf{x}}_k(t)$ que puede ser el de la iteración anterior o con:

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t)_j = \dot{\mathbf{x}}_k(t)_0 \simeq \dot{\mathbf{x}}_k(t-\Delta t) = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_k(t-2\Delta t)) \quad (7.32)$$

4. Ahora es posible obtener un $\mathbf{x}_k(t+\Delta t)_0$:

$$\mathbf{x}_k(t+\Delta t)_0 = \mathbf{x}_k(t-\Delta t) + 2\Delta t \dot{\mathbf{x}}_k(t)_0 \quad (7.33)$$

5. Ya se cuenta con $\mathbf{q}_k(t+\Delta t)$, $\dot{\mathbf{q}}_k(t)_j$ y $\ddot{\mathbf{q}}_k(t)_j = R(\mathbf{q}_k(t))_4^T \dot{\mathbf{q}}_k(t)_j$.
6. Con $\dot{\mathbf{q}}_k(t)_j$ y $\mathbf{q}_k(t)$ se obtiene $\dot{\omega}_k(t)_j$.
7. Ahora se pueden calcular $A_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)) \mathbf{x}_k(t-\Delta t)$ y $\mathbf{f}_{ivk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t))$ y a través de las relación (7.31) obtener $\mathbf{b}_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t-\Delta t), \dot{\mathbf{x}}_k(t))$.
8. Ya se puede construir la ecuación de equilibrio del sistema completo mediante expansión y ensamblado.
9. Se aplica el método del subespacio nulo para introducir las restricciones.
10. Resolver $\mathbf{x}_k(t+\Delta t)_j$.
11. Se calcula un nuevo $\dot{\mathbf{x}}_k(t)_j$, con:

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t)_j \simeq \dot{\mathbf{x}}_k(t-\Delta t) = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{x}_k(t+\Delta t)_j - \mathbf{x}_k(t-\Delta t)) \quad (7.34)$$

El criterio de parada puede ser en base a velocidad o desplazamiento. Si $\dot{\mathbf{x}}(t)_{j+1} - \dot{\mathbf{x}}(t)_j < \varepsilon$, se continúa en el siguiente instante de tiempo, sino, volver a (4) con el nuevo $\dot{\mathbf{x}}(t)_{j+1}$. La otra opción es $\mathbf{x}(t+\Delta t)_{j+1} - \mathbf{x}(t+\Delta t)_j < \varepsilon$. Esto último es parecido, aunque requiere, en la primera iteración, hacer $\mathbf{x}(t+\Delta t)_0 = \mathbf{x}(t-\Delta t) + 2\Delta t \dot{\mathbf{x}}(t)_0$. Esto de todos modos es interesante porque, al menos, hace falta $\mathbf{q}_k(t+\Delta t)_j$.

Para el instante inicial las cosas cambian:

1. Se tiene $\mathbf{x}(t_0)$, $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ y $\mathbf{f}_e(t_0)$.

2. Con los datos de partida se pueden calcular las matrices de masa $M(\mathbf{x}(t_0))$, amortiguación $C(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0))$ y rigidez $K(\mathbf{x}(t_0))$ de todos los elementos del sistema para poder expandirlas y ensamblarlas. Así como el vector de fuerzas indirectas $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0))$.
3. Es posible encontrar $\mathbf{x}(t_0 + \Delta t)$, mediante el siguiente sistema formado por estas 3 ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0 - \Delta t) = \mathbf{x}(t_0 + \Delta t) - \dot{\mathbf{x}}(t_0) 2\Delta t \\ \mathbf{x}(t_0 - \Delta t) = \ddot{\mathbf{x}}(t_0) \Delta t^2 - \mathbf{x}(t_0 + \Delta t) + \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{f}_e(t_0) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t_0)) = \\ M(\mathbf{x}(t_0)) \ddot{\mathbf{x}}(t_0) + C(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) \dot{\mathbf{x}}(t_0) + K(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) \mathbf{x}(t_0) \end{cases} \quad (7.35)$$

Da como resultado la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}(t_0)) \mathbf{x}(t_0 + \Delta t) = & \\ & \frac{(\Delta t)^2}{2} [\mathbf{f}_e(t_0) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}(t_0))] \\ & \left[(\Delta t) M(\mathbf{x}(t_0)) - \frac{(\Delta t)^2}{2} C(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) \right] \dot{\mathbf{x}}(t_0) + \\ & \left[\frac{1}{2} M(\mathbf{x}(t_0)) - \frac{(\Delta t)^2}{2} K(\mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0)) \right] \mathbf{x}(t_0) \end{aligned} \quad (7.36)$$

Hay que tener en cuenta que a esta ecuación hay que añadir las restricciones relativas tanto a los pares como a la impuesta por la norma del cuaternión.

PARTE III: APLICACIÓN DEL MÉTODO

8 Resultados numéricos

A pesar de la importancia de los sistemas multicuerpo existe una falta de estandarización de problemas que repercute en una correcta evaluación de las metodologías, por eso cabe destacar el esfuerzo realizado por autores como González [166] en la búsqueda y recopilación de ejercicios normalizados. Estos trabajos suponen una buena herramienta para los investigadores que desean validar sus trabajos y no encuentran unos ejemplos numéricos adecuados para comparar sus resultados. Gran parte de estos ejemplos se encuentran dentro de la colección de problemas para el análisis dinámico de sistemas multicuerpo propuestos por el IFToMM y se pueden encontrar en su página web. Varios de los modelos resueltos en este apartado se han obtenido de estas dos fuentes.

Además de los problemas de referencia, dentro de este apartado también se van a incluir algunos problemas creados por los autores con el fin de comprobar una restricción en algunos casos o para observar el comportamiento ante una perturbación exterior en otros.

La metodología se ha implantado mediante una programación preliminar en el software de cálculo GNU Octave 4.4.1 [167]. Aunque en algunos ejercicios se tiene una solución que sirve de referencia para asegurar que la solución converge hacia esos resultados, los ejercicios también se han resuelto con un software comercial. De esta manera, el método expuesto en este trabajo queda completamente validado. De entre los softwares comerciales empleados, el que más destaca es Msc Adams 17.2 Student Edition pero también se ha usado PTC Creo 4.0 Academic Edition y en menor medida RecurDyn V8R3 Student Edition. Las simulaciones se han llevado a cabo en un computador fabricado en abril del 2008, el cual está equipado con Windows 10 Pro, un procesador Intel Xeon E5345 @ 2,33 GHz y 32 Gb de RAM.

En relación a la validación de los resultados, la comparativa se ha centrado en la precisión y en la estabilidad. GNU Octave es un programa de cálculo

que emplea un lenguaje interpretado a diferencia de los softwares comerciales que usan un lenguaje compilado. Los lenguajes compilados son lenguajes en los que es necesario un proceso de traducción del programa a código máquina y un proceso de adición de las funciones de librería utilizadas para construir un programa ejecutable. En cambio, en los lenguajes interpretados, el código fuente del programa no se traduce a código de máquina sino que es interpretado por un interprete de código que va ejecutando los comandos que se le piden. Un lenguaje compilado es más eficiente y rápido a la hora de ser ejecutado, un lenguaje interpretado no necesita ser compilado y es más fácil de depurar; sin embargo, resulta un proceso lento y poco optimizado.

En este sentido, a pesar de que los ejercicios propuestos son adecuados para observar la capacidad de la metodología incluyendo problemas con restricciones redundantes, posiciones singulares o perturbaciones externas son ejemplos que emplean pocos elementos. Esta circunstancia implica que gran parte del coste computacional esté consumido por el propio funcionamiento del lenguaje interpretado. Por lo tanto, aunque se implementen otras formulaciones en GNU Octave obtener unas conclusiones en lo que a eficiencia computacional se refiere, sería difícil de asegurar.

A pesar de esta particularidad, se ha optado inicialmente por emplear GNU Octave por ser un lenguaje muy sencillo destinado precisamente al cálculo. Esto ha permitido comprobar la validez del método de una manera más simple y por lo tanto más rápida que si se hubiera usado un lenguaje compilado como puede ser usando una programación en C. Una vez evaluado los resultados en GNU Octave, se han incorporado en la parte final de este capítulo cuatro ejemplos implementados en C con una programación optimizada donde se puede comprobar la eficiencia.

8.1 Medidas

Aprovechando que se tienen ciertos problemas de referencia, es fácil obtener soluciones de la misma página web del IFToMM. Estos resultados se utilizan para establecer un error total comparando diferentes variables del ejercicio y así, tener una idea de la precisión alcanzada por las simulaciones. Obviamente, en cada caso se expondrán cuales son los parámetros que se han escogido para realizar esta medida. El método expuesto en el presente documento se ha denominado DIMCD (*“Direct Integration Method with Central Difference”*, DIMCD).

Existen varios factores que influyen en la precisión como puede ser el error admitido en cada paso de integración, el incremento de tiempo o como no el tipo de integrador. Por lo tanto, la precisión se mide como el máximo error entre una solución y el valor de referencia. En general, las variables que sirven para evaluar el error se encuentran en función del tiempo y puede ser una posición, una velocidad, un tipo de energía o una fuerza. Si se define:

$x_j(t_i)$ como la solución en un instante t_i de la variable j .

$x_j^{ref}(t_i)$ como la solución de referencia de la variable j en el instante t_i .

El error para la variable j se obtiene a través de la ecuación (8.1), mientras que la acumulación del error para n variables durante una simulación realizada con m intervalos de tiempo se calcula con la ecuación (8.2). El valor denominado “umbral” se introduce para evitar singularidades cuando el valor de referencia es nulo, siendo este valor umbral de $1e^{-3}$.

$$e_j(t_i) = \frac{|x_j(t_i) - x_j^{ref}(t_i)|}{\max\{|x_j^{ref}(t_i)|, x_j^{umbral}\}} \quad (8.1)$$

$$e_{Total} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (e_j(t_i))^2} \quad (8.2)$$

En este punto merece la pena puntualizar algunas cuestiones. En los resultados se va a mostrar una tabla donde aparece la variable error. Esto significa el error de tolerancia admitido en cada paso de integración. Por lo tanto, normalmente se va a asignar el mismo valor para todas las simulaciones y evidentemente, las diferentes soluciones se van a ver afectadas por este parámetro. Con esto, se quiere poner de manifiesto la influencia de usar el método de Newton exacto. Por el contrario, Msc Adams debido al hecho de no trabajar con derivadas analíticas, el error permitido debe ser mayor que la máxima precisión alcanzable en un planteamiento con diferencias finitas, la cual es más o menos la mitad de los dígitos representados de la precisión de coma flotante que emplee. En caso de no haber impuesto este requerimiento, las derivadas aproximadas perderán precisión y el algoritmo fallará en la convergencia. En este sentido, una de las ventajas del método propuesto en este trabajo, es que el uso de derivadas analíticas permite reducir la tolerancia de integración y, por lo tanto, aumentar la precisión.

Otra cuestión importante, es que los softwares comerciales emplean incrementos de tiempo variable mientras que actualmente, DIMCD se ha

planteado con incrementos constantes. Msc Adams permite acotar el máximo incremento de tiempo; sin embargo, el mínimo queda libre para asegurar la convergencia. Este aspecto sin duda influirá en los resultados. Por otra parte, si que es posible obtener valores en unos instantes de tiempo concretos y de este modo, calcular el error total como se ha comentado.

En cada ejemplo se va a mostrar la violación de las restricciones a nivel de posición. Este valor se calcula mediante la norma del vector en cada instante de tiempo. Debido a que el algoritmo de integración está planteado en base a los desplazamientos, tanto la velocidad como la aceleración se calculan en función de la posición. Además las restricciones se aplican únicamente sobre las coordenadas de posición por lo tanto, no tiene sentido mostrar la violaciones de las restricciones a nivel de velocidad. Sí es cierto que en otras formulaciones el vector solución incluye las velocidades, y ahí la violaciones de la restricción para las velocidad es un valor importante.

8.2 Peonza

Se trata de un sistema espacial de un único elemento con un par esférico en el contacto entre la peonza y el suelo como en la figura 8.1. La peonza parte en posición vertical con una velocidad de rotación en el eje longitudinal y en un instante dado se introduce una perturbación exterior. En la tabla 8.1 se recogen los datos del modelo.

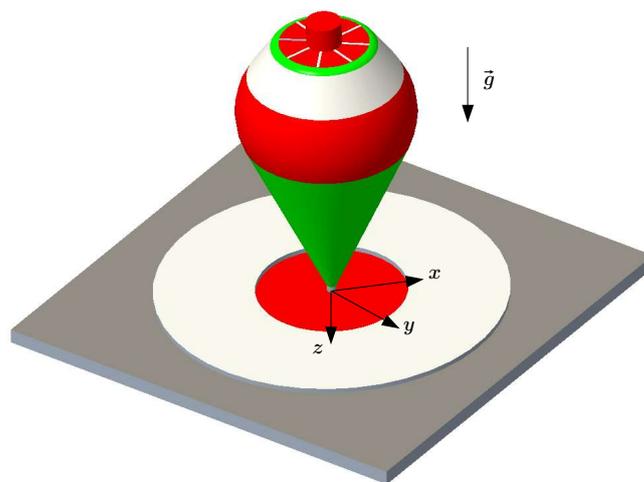


Figura 8.1: Imagen de la peonza y el suelo.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	VARIABLES DE INTERÉS
Espacial	2 seg.	Esférico	Perturbación en el CdM y la gravedad	Desplazamiento y velocidad del CoM.

Tabla 8.1: Datos del modelo peonza.

La perturbación se aplica en el CdG de la peonza en dirección radial en coordenadas absolutas, por lo que no gira con el sólido. La fuerza se ha modelizado mediante una curva gaussiana de la forma de la figura 8.2. Este problema tiene como objetivo verificar el par esférico y a su vez, observar la capacidad del método para modelizar con la suficiente precisión un cuerpo girando a altas velocidades sometido a una perturbación exterior.

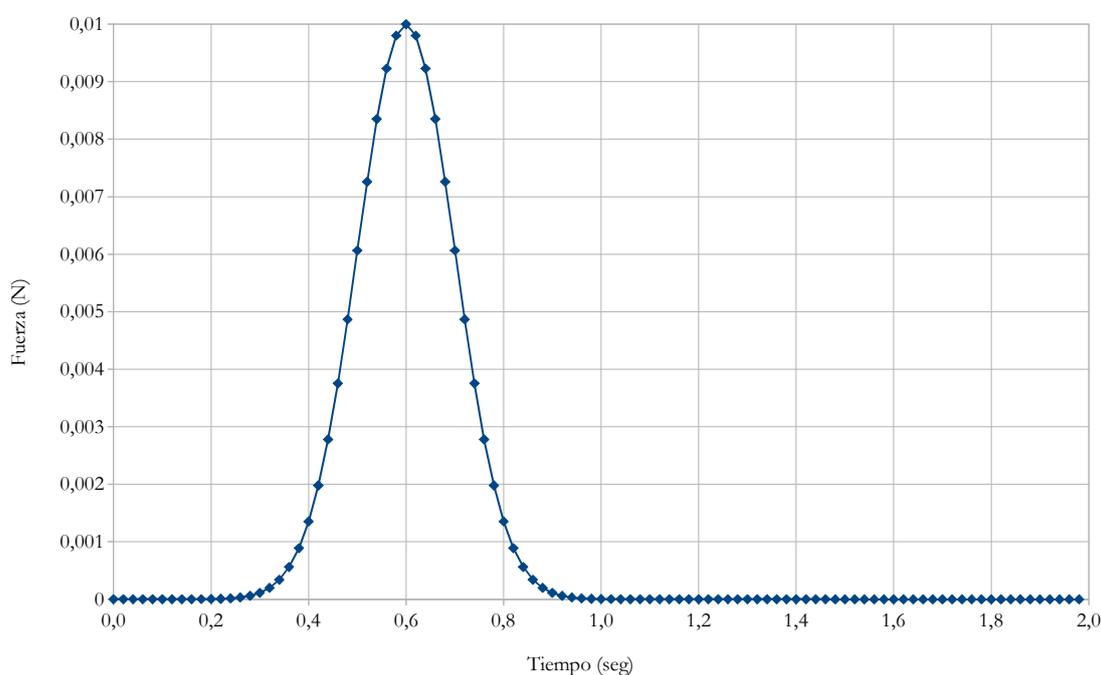


Figura 8.2: Forma de la perturbación aplicada a la peonza.

En la figura 8.3, se muestra el desplazamiento en la dirección x del CdG para diferentes simulaciones con DIMCD, variando el incremento de tiempo. Se observa que a medida que se reduce el paso la solución converge. Se observa que las curvas para 0,5 ms y 0,1 ms son lo suficientemente próximas para considerar el 0,5 ms como una solución aceptable.

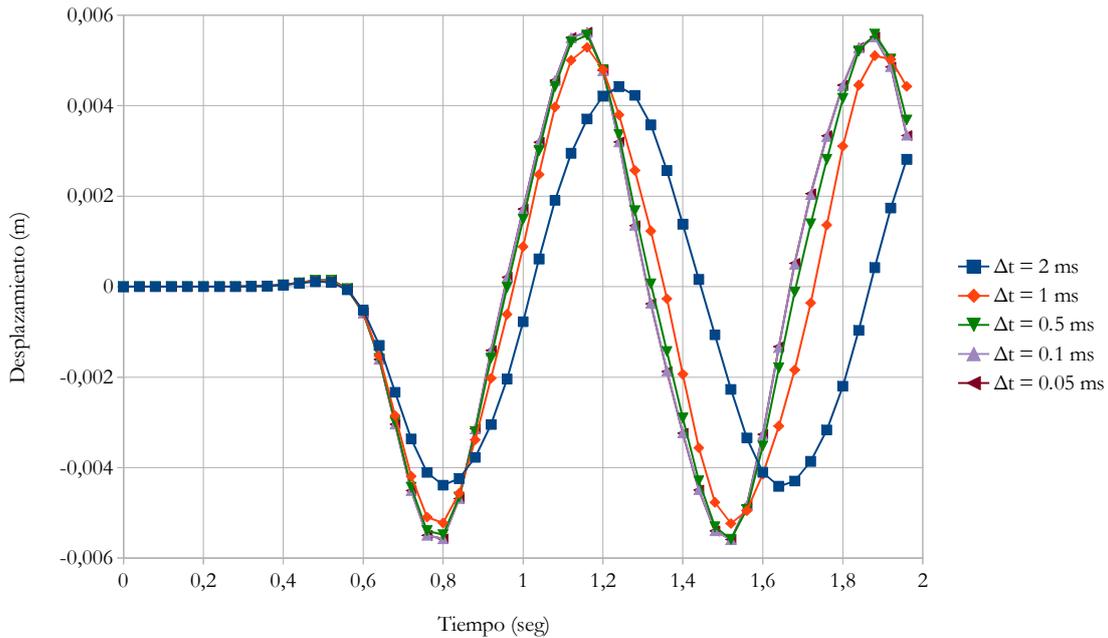


Figura 8.3: Desplazamiento en el eje x del CoM de la peonza para diferentes pasos.

Como ocurre con todos los integradores paso a paso, una elevada velocidad angular respecto al incremento de tiempo produce grandes variaciones de la orientación del sistema de referencia local durante el paso de cálculo. Esto afecta en la precisión de los resultados. La influencia de la velocidad angular en la precisión se observa en la figura 8.4, donde se muestran los resultados de la velocidad angular para diferentes pasos de cálculo. En la tabla 8.2, se incluye la convergencia de las simulaciones en función de la velocidad angular. El error relativo se ha calculado mediante las expresiones (8.1) y (8.2). Para ello, se han tomado como referencia los resultados de la simulación con un paso de 0,05 ms para las variables en x , y y z de la velocidad angular, con un total de 50 pasos. Como se podía esperar, el error relativo se reduce aproximadamente de forma cuadrática, para pequeños incrementos de tiempo de integración.

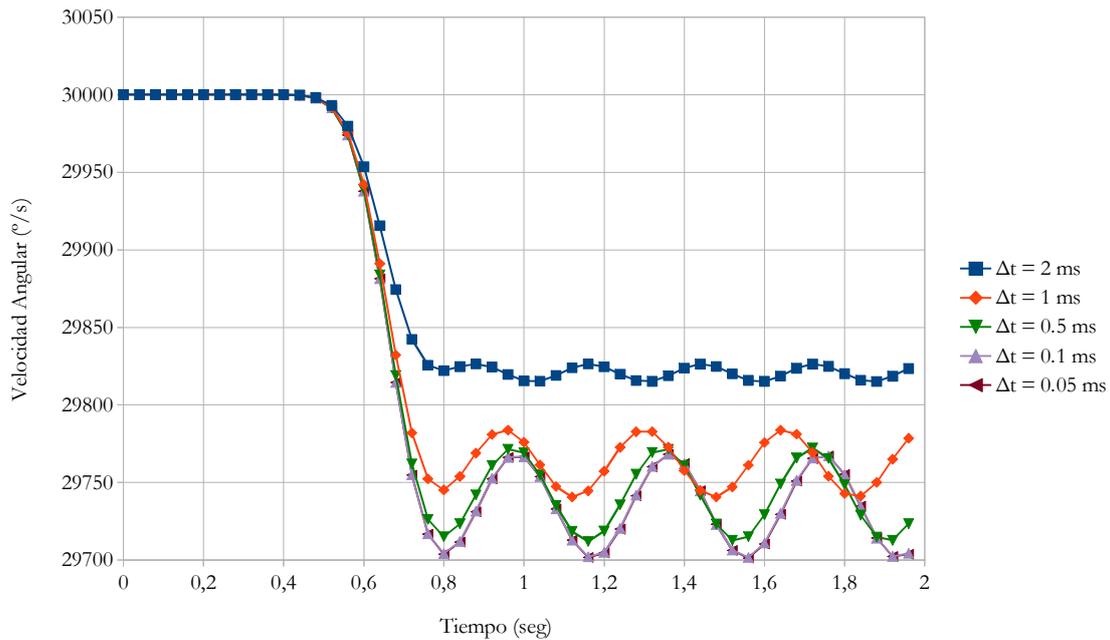


Figura 8.4: Velocidad angular en dirección z para la peonza.

Simulación	1	2	3	4	5
Δt ms	2	1	0,5	0,1	0,05
Error relativo	1,79	7,2e-1	1,9e-1	6e-3	0

Tabla 8.2: Convergencia de las simulaciones con el método DIMCD.

Se van a llevar a cabo diferentes simulaciones con un intervalo de paso de 0,5 ms para diferentes integradores incluidos en el MSC Adams. Se ha fijado el error de la tolerancia de integración en $1e-6$ y se han resuelto usando los integradores GSTIFF y WSTIFF. Los tres son integradores que emplean un paso variable, por lo que el programa es libre de reducir el paso para asegurar la convergencia. Se puede ver que el integrador GSTIFF disminuye el paso hasta los 0,2 ms en varios periodos de la simulación mientras que WSTIFF usa 0,1 ms en el momento que la perturbación es introducida. En las gráficas 8.5 y 8.6 se muestra el desplazamiento y la velocidad en la dirección x .

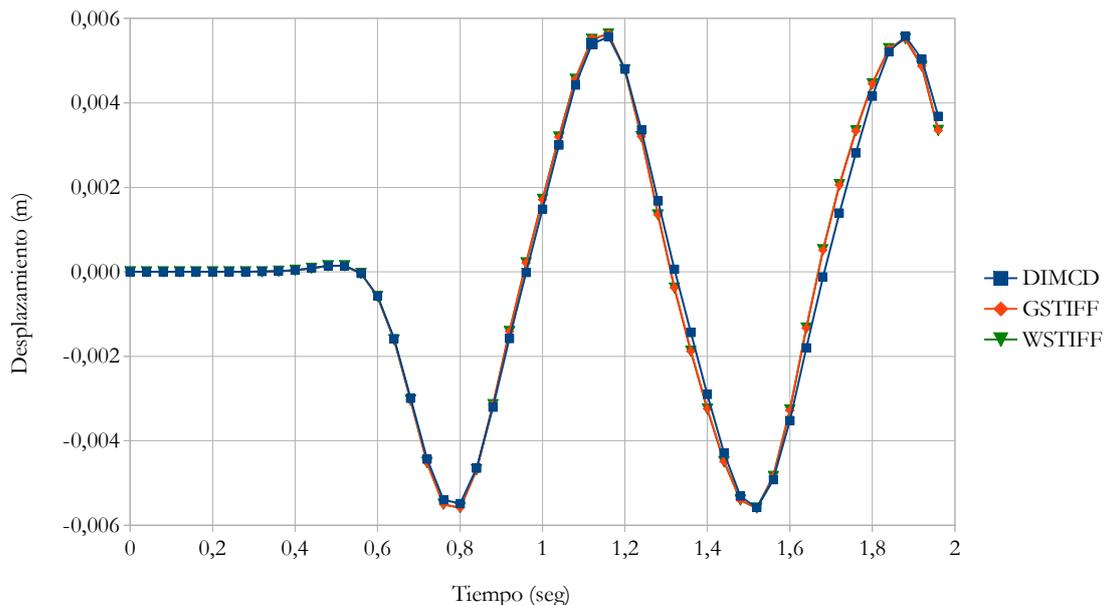


Figura 8.5: Desplazamiento del CdM en el eje x para diferentes integradores con $\Delta t=0,5\text{ ms}$.

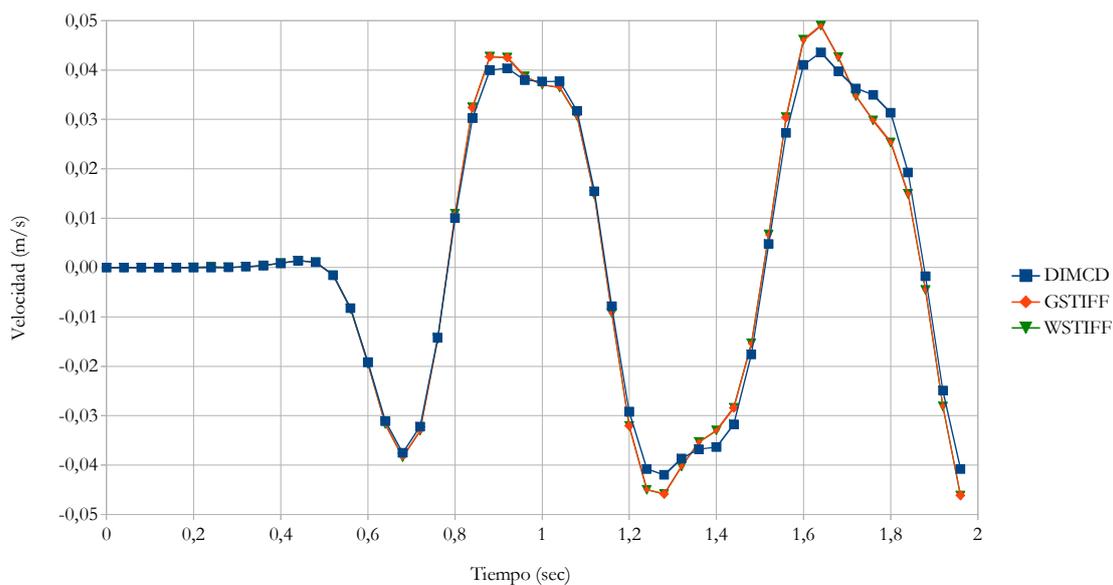


Figura 8.6: Velocidad del CoM en el eje x para diferentes integradores con $\Delta t=0,05\text{ ms}$.

Es evidente que la discretización del tiempo es un parámetro fundamental sobre todo para representar correctamente la perturbación. En este sentido, los integradores GSTIFF y WSTIFF reducen el paso y aumentan el orden de integración para lograr mejorar la precisión, por otra lado, el método DIMCD con un paso constante y un orden de integración de 2 obtiene unos resultados similares. En la tabla 8.3, se resumen los detalles de las simulaciones.

Método	Modelo	Paso	Intervalo de Δt (ms).	Orden de int.	Error	CPU (s)
DIMCD	GNU Octave	fijo	0,5	2	1e-6	59
GSTIFF	MSC Adams	variable	0,2-0,5	6	1e-6	3
WSTIFF	MSC Adams	variable	0,1-0,5	6	1e-6	3

Tabla 8.3: Detalles de las simulaciones para diferentes integradores.

Para estas condiciones las restricciones de posición se cumplen con un error del orden de $1e-16$, como se puede ver en la figura 8.7.

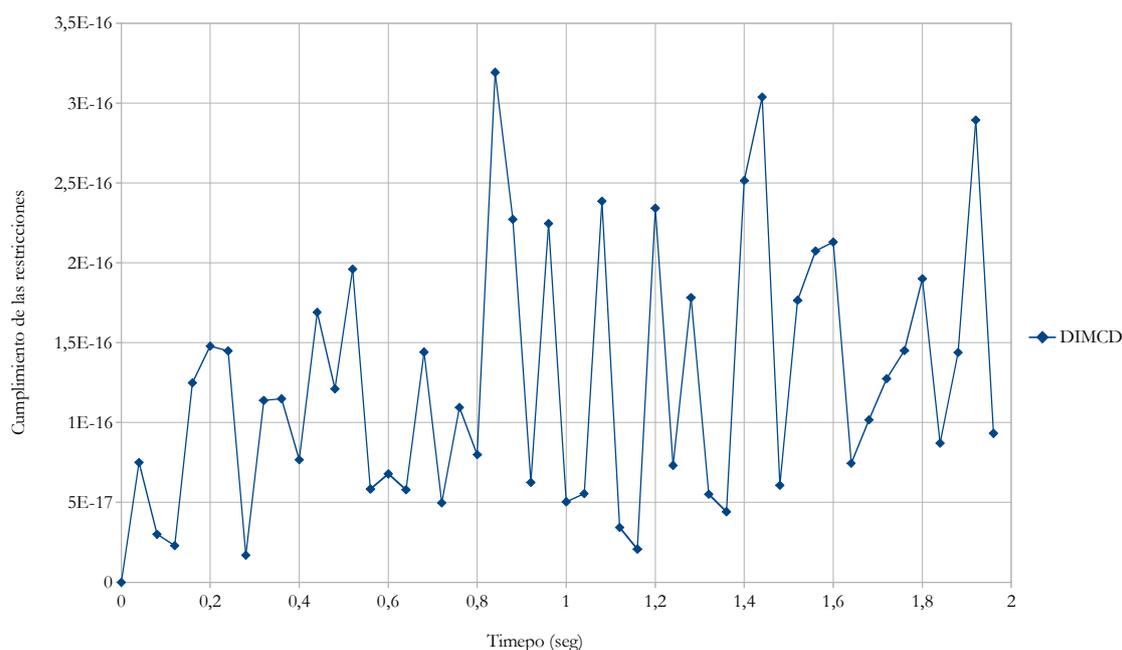


Figura 8.7: Violación de las restricciones a nivel de posición.

8.3 Péndulo

Es un problema con único sólido rígido unido al elemento fijo mediante un par de rotación. De manera que partiendo del reposo, se deja libre bajo la acción de la gravedad. La masa del péndulo se concentra en el punto P que se ubica en un extremo mientras que en el otro se coloca la ligadura, ver figura 8.8. Como solo actúan fuerzas conservativas la energía mecánica del sistema debe ser constante, por lo que puede servir como indicador de la calidad de la simulación. Se trata de un ejemplo de la librería de problemas de referencia del IFToMM, en el enunciado los autores establecen como criterio de calidad que el máximo desvío de la energía mecánica sea inferior a $5e-5$ J. En la tabla 8.4 se muestran los datos del problema.

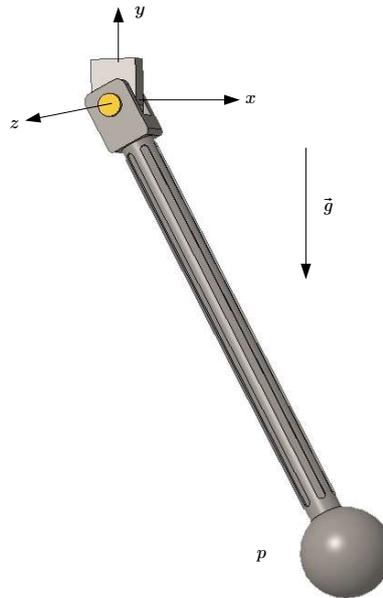


Figura 8.8: Mecanismo de péndulo.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Plano	10 seg.	Rotación	Gravedad	Desplazamiento y velocidad del punto p . Conservación de la energía mecánica.

Tabla 8.4: Datos del problema del péndulo.

Partiendo con la barra horizontal se simula el mecanismo durante 10 segundos. En este problema se puede verificar la validez del par de rotación y a su vez, ver cuál es la respuesta del modelo en lo que a la conservación de la energía se refiere. En la figura 8.9 se observa la velocidad de la masa obtenida con el método DIMCD para diferentes pasos de cálculo.

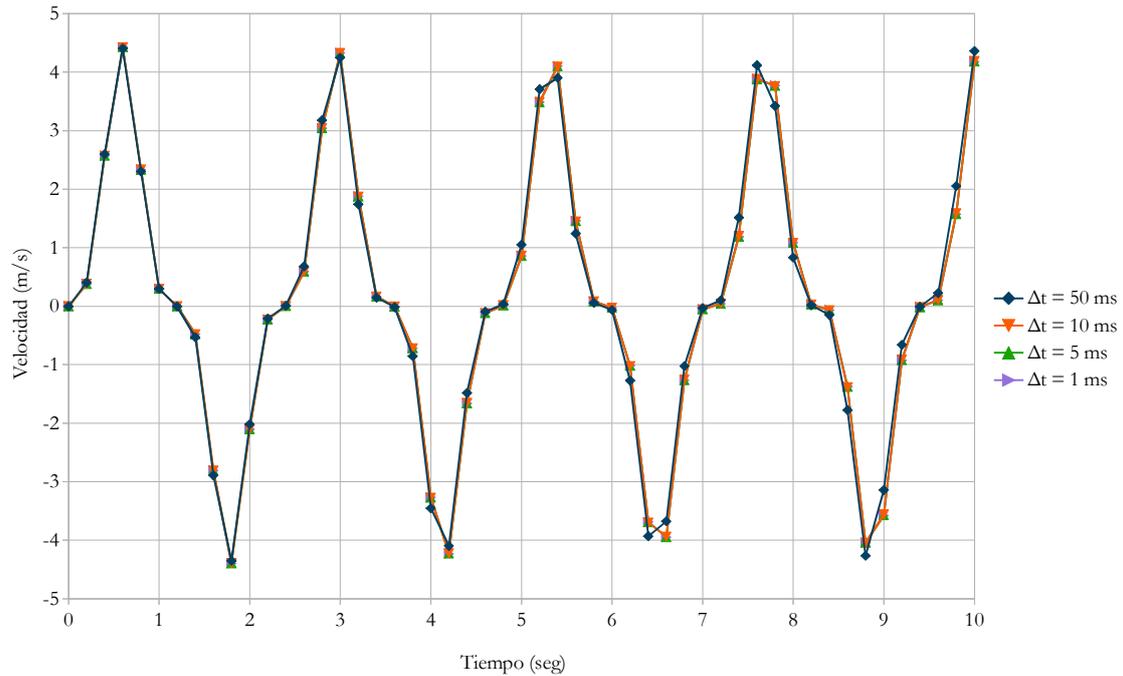


Figura 8.9: Velocidad del punto p en el eje x para diferentes Δt .

Visualmente, no se aprecia gran diferencia entre las simulaciones. Por otro lado, en la figura 8.10 se muestra la conservación de la energía para estas mismas simulaciones. La simulación con paso de integración de 50 ms tiene un desvío máximo de $9e-2$ J, lo que se queda lejos del criterio de calidad. Así mismo, con un paso de 10 ms la deriva se reduce a $3,6e-3$ J y con 5 ms a $9,02e-4$ J. Finalmente, el desvío con un paso de cálculo de 1 ms es de $3,6e-5$, suficiente para cumplir el requisito de calidad. Se puede ver que en la figura 8.10, aparecen picos donde desciende el nivel de conservación de la energía mecánica, estos puntos coinciden con el péndulo en posición vertical que a su vez es la zona donde se alcanza mayor velocidad. Para estas condiciones las restricciones se cumplen con un error del orden de $2e-15$, como se puede ver en la figura 8.11.

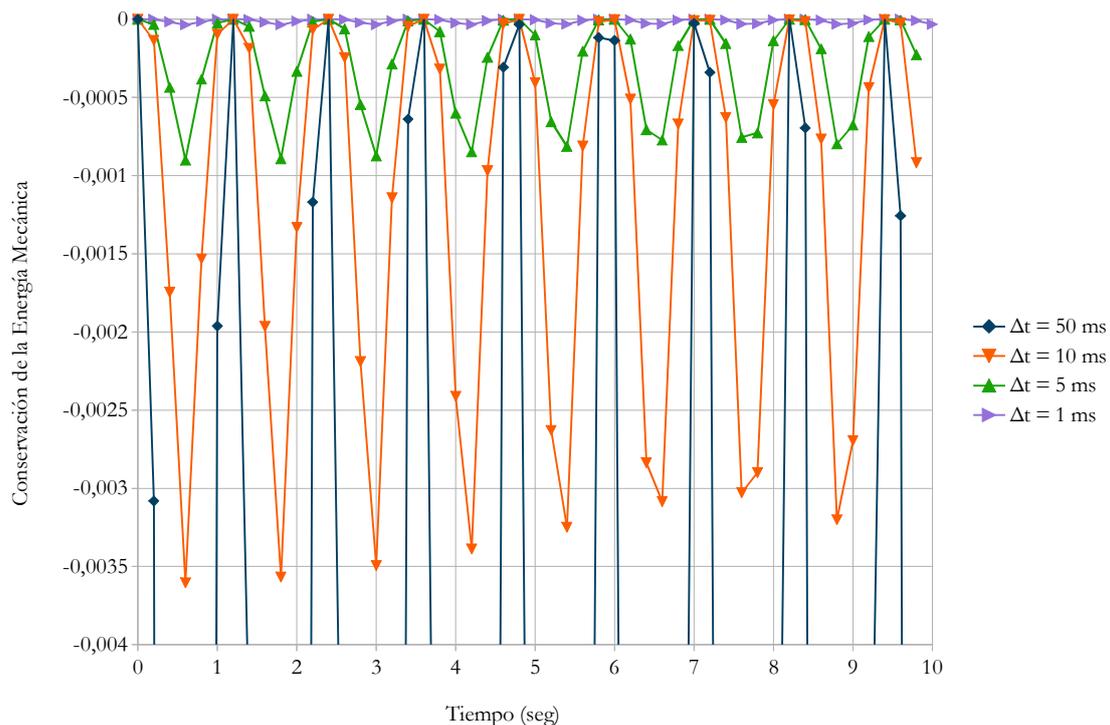


Figura 8.10: Conservación de la energía mecánica para diferentes Δt .

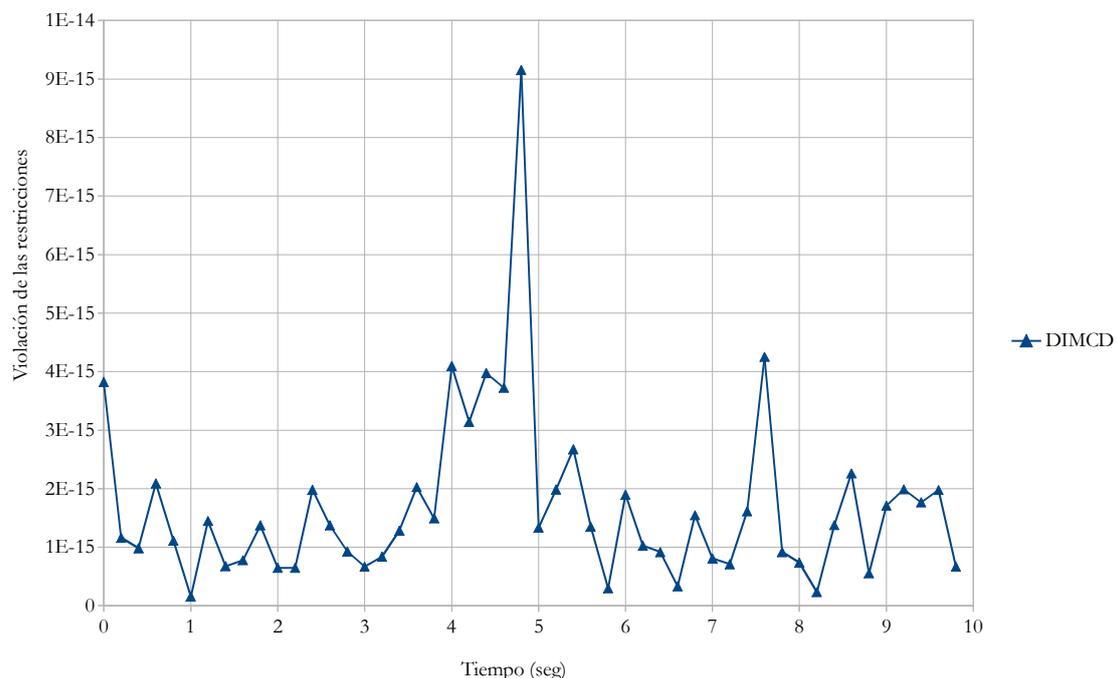


Figura 8.11: Cumplimiento de las restricciones para el péndulo.

A continuación se van a cotejar los resultados del DIMCD con $\Delta t=1$ ms con las diferentes soluciones encontradas en la librería del IFToMM. En las figuras 8.12 y 8.13, se puede observar la posición en x y en y de la masa durante la simulación para los distintos métodos de resolución. La solución 1 es la incluida por el autor del problema y se ha conseguido con una

formulación de Lagrange aumentado de orden 3 con proyección de velocidad y aceleración. Para la solución 2 se ha empleado OpenSim con coordenadas naturales y paso de cálculo variable y en la solución 3, se ha usado una formulación semi-recursiva con coordenadas relativas.

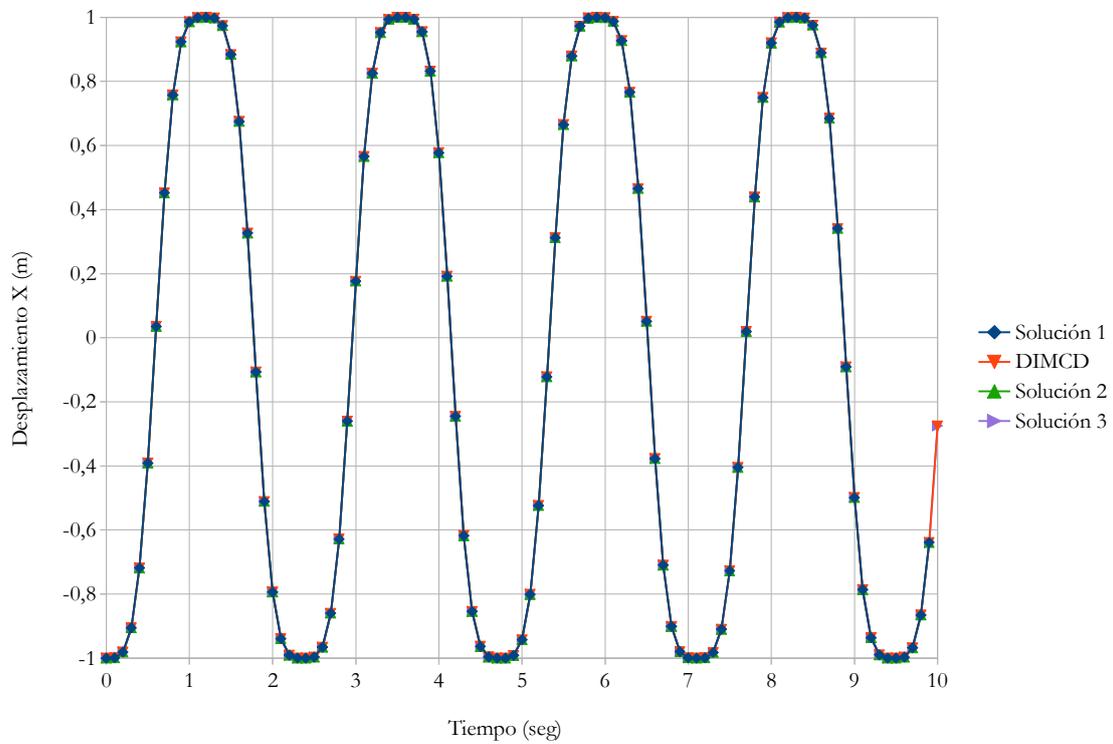


Figura 8.12: Posición del punto p en dirección x para diferentes formulaciones.

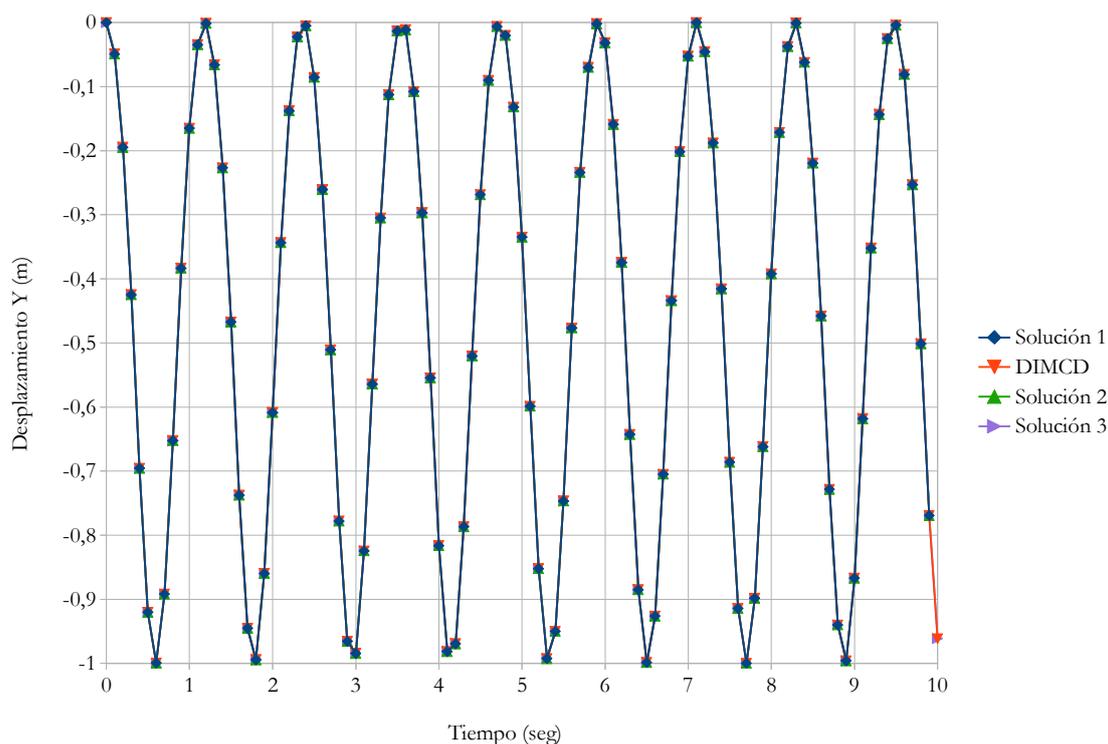


Figura 8.13: Posición del punto p en dirección y con diferentes métodos.

En la tabla 8.5, se recogen las características principales de las simulaciones. El término “error máx” hace referencia a la precisión de las simulaciones, la cual se ha calculado aplicando las ecuaciones (8.1) y (8.2) sobre el valor de la deriva de la energía mecánica. La solución DIMCD se ha llevado a cabo con un paso fijo de 1 ms y un error de tolerancia de integración de $1e-10$. Este problema es un claro ejemplo de mecanismo de cadena abierta y sería conveniente emplear coordenadas relativas para mejorar la eficiencia. De todas maneras, a pesar de ser un método de propósito general el resultado del el método DIMCD se ajusta a los parámetros de calidad.

Método	Modelo	Paso	Δt (ms).	Programación	Error	Error máx	CPU (s)
Solución 1	Lagange aumentado	fijo	1	C++	$1e-9$	$6e-4$	0,53
Solución 2	OpenSim	variable	$1-1e-3$	C++	-	$4e-11$	0,637
Solución 3	Semi-recursiva	fijo	1	C++	-	$9,17e-6$	0,0254
DIMCD	DIMCD	fijo	1	GNU Octave	$1e-10$	$3,6e-5$	150

Tabla 8.5: Detalles de las simulaciones para el péndulo.

Para corroborar los datos de la tabla 8.5, en la figura 8.14 se muestra la conservación de la energía mecánica de los distintos métodos.

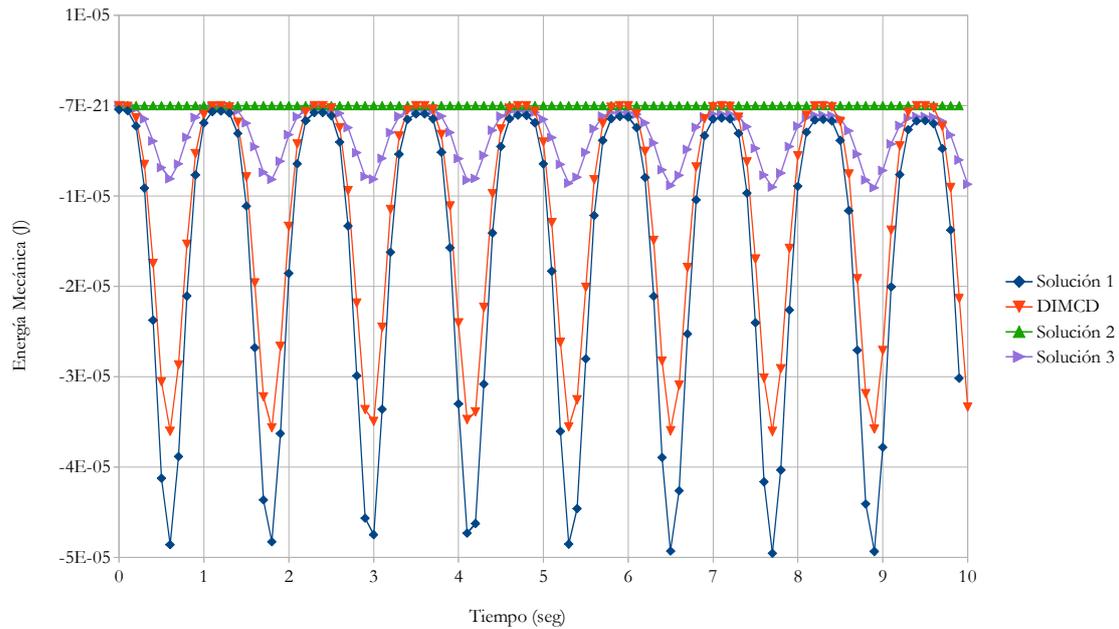


Figura 8.14: Conservación de la energía mecánica para diferentes metodologías del problema del péndulo.

8.4 Cuadrilátero articulado

El cuadrilátero articulado es un ejemplo clásico de sistema multicuerpo. Consta de 3 barras ligadas mediante pares de rotación de manera que el conjunto adquiere un grado de libertad. Existe muchísima bibliografía sobre este mecanismo plano sobre todo en el estudio de la parte cinemática [5]. En este ejemplo la longitud de las barras es idéntica de manera que se cumple en el límite el criterio de Grashof, por lo tanto, la barra de entrada puede dar vueltas completas. Aprovechando esta circunstancia a la barra de entrada se le va a acoplar un motor que proporciona un par constante. Las características de la simulación se detallan en la tabla 8.6.

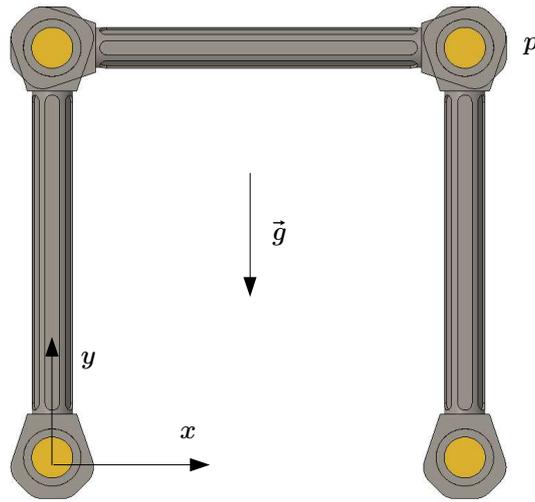


Figura 8.15: Mecanismo del cuadrilátero articulado.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Plano	5 seg.	Rotación	Par constante y la gravedad	Desplazamiento y velocidad del punto p . Ángulo y velocidad angular de la barra de salida.

Tabla 8.6: Simulación del problema del cuadrilátero articulado.

El objetivo de este problema es por una parte comprobar la validez del par de rotación y por otra, observar el comportamiento de las restricciones. El cuadrilátero articulado en 3 dimensiones tiene -2 grados de libertad pero debido a la disposición de los pares permite el movimiento en plano. Es interesante, comprobar que el método, el cual está definido en el espacio, se adapta a esta circunstancia. Se ha efectuado diferentes simulaciones con el método DIMCD variando el paso de cálculo. En la figura 8.16 se muestra la coordenada y del punto p , mientras que la figura 8.17 se ha obtenido la velocidad angular de la barra de salida. Se puede ver que para valores de 10 ms las curvas prácticamente coinciden.

Para estas condiciones, con un incremento de tiempo de 10 ms, se ha obtenido la norma del vector del cumplimiento de las restricciones de la ecuaciones de posición del modelo para cada instante de cálculo. Se aprecia en la figura 8.18, que las restricciones se cumplen con un error del orden de $2e-14$.

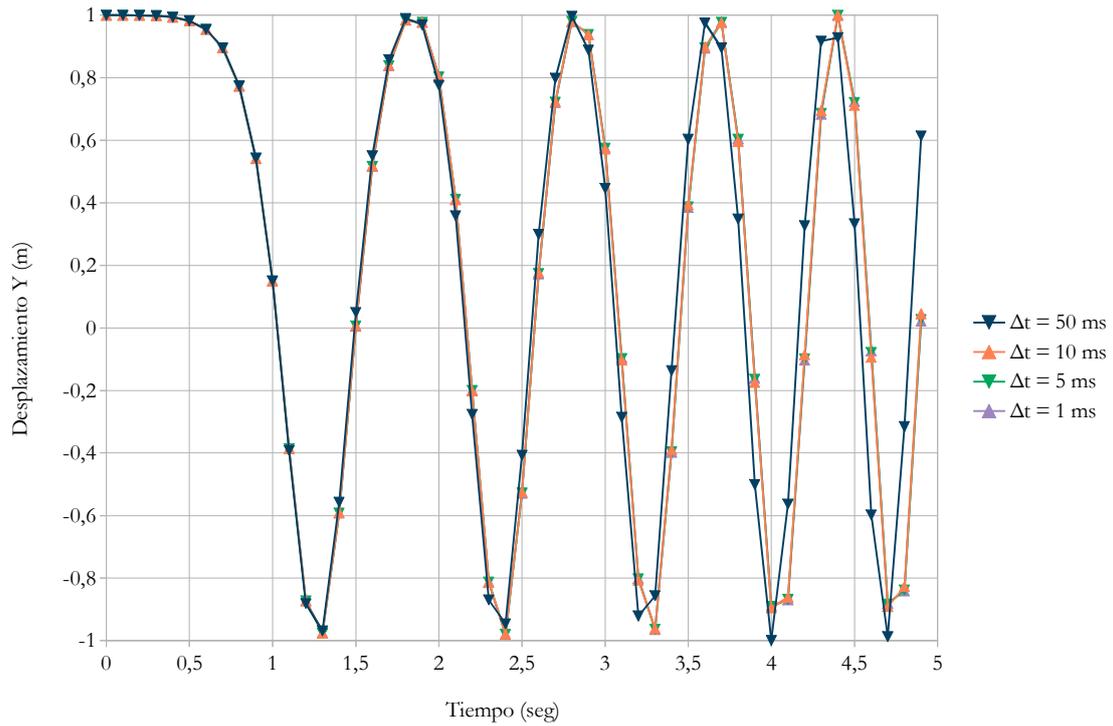


Figura 8.16: Coordenada y del punto p del cuadrilátero articulado para diferentes Δt .

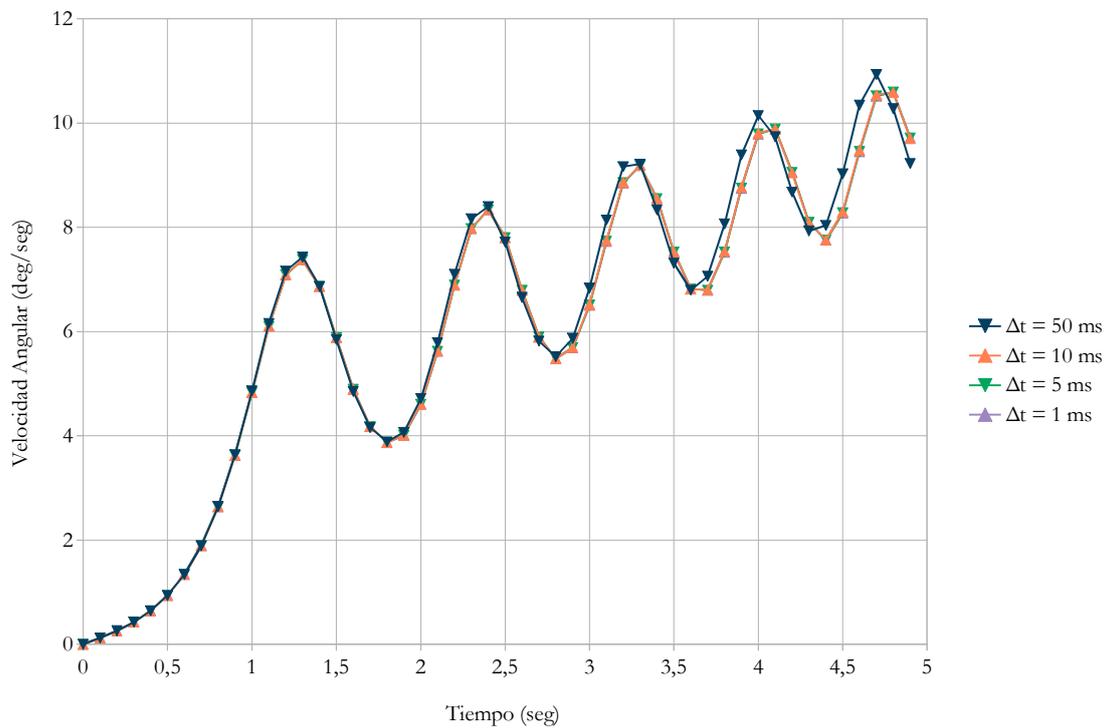


Figura 8.17: Velocidad angular de la barra de salida para diferentes Δt en el cuadrilátero.

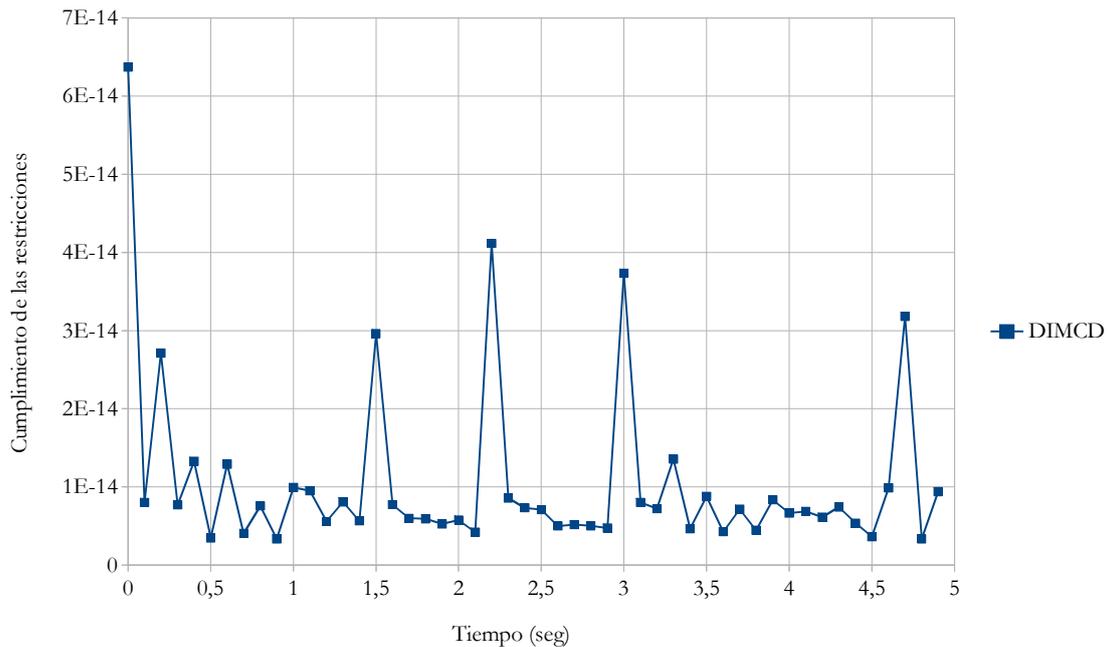


Figura 8.18: Violación de las restricciones para el cuadrilátero articulado.

Si se comparan los resultados del DIMCD con MSC Adams, se comprueba la validez de las soluciones. Los integradores GSTIFF y WSTIFF para obtener la solución reducen en ciertos instantes el paso de cálculo a 5 ms manteniendo el orden de integración en 6. Por otro lado HHT tiene que reducir considerablemente el incremento de tiempo hasta los 0,5 ms. En la figura 8.19 se observa la velocidad de la coordenada P en dirección y en la figura 8.20 el ángulo de la barra de salida medido mediante los ángulos de Euler para una secuencia 1-2-3. En la tabla 8.7 se resumen las características de estas simulaciones.

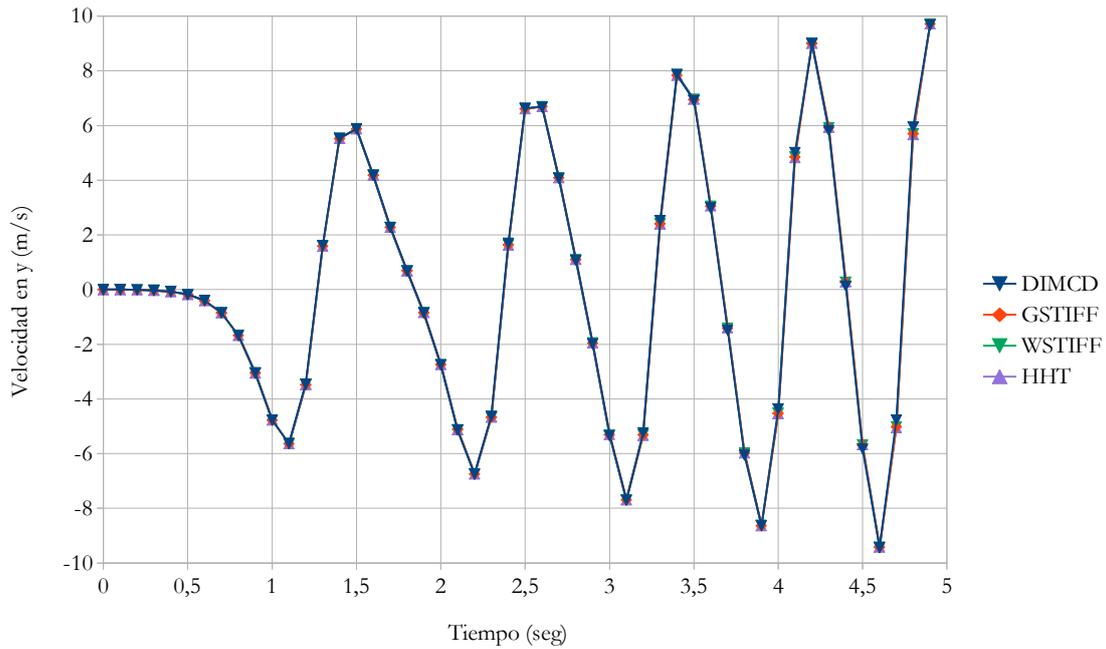


Figura 8.19: Velocidad en y del punto p del cuadrilátero.

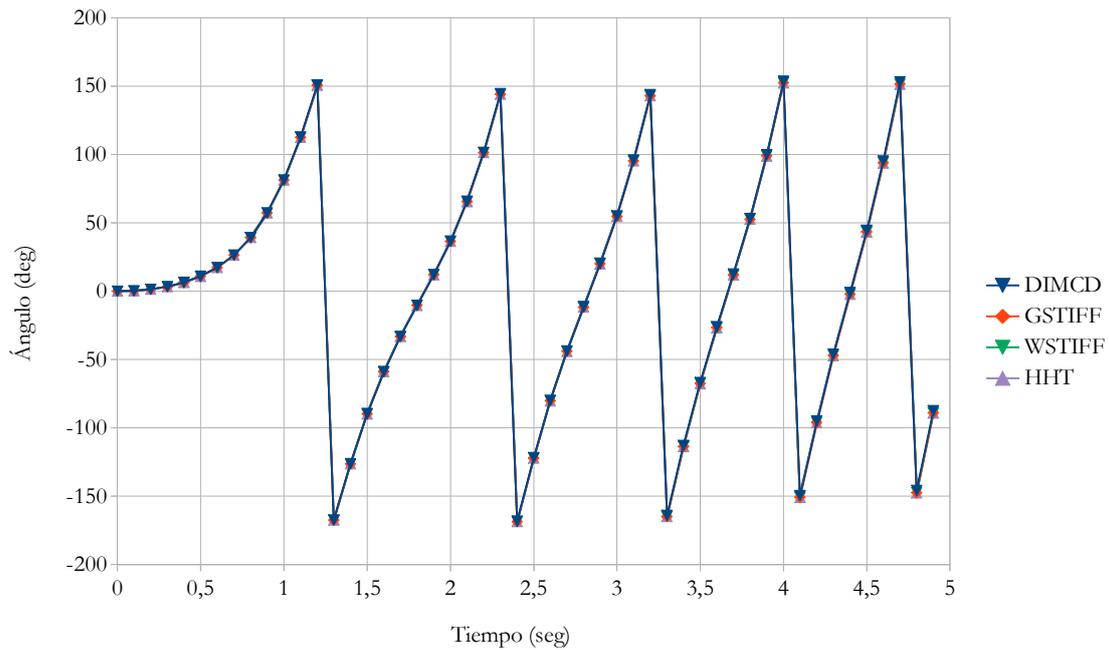


Figura 8.20: Ángulo de la barra de salida del cuadrilátero.

Método	Modelo	Paso	Intervalo de Δt (ms).	Orden de int.	Error	CPU (s)
HHT	MSC Adams	variable	0,5-10	2	1e-8	2
GSTIFF	MSC Adams	variable	5-10	6	1e-8	1
WSTIFF	MSC Adams	variable	5-10	6	1e-8	1
DIMCD	GNU Octave	fijo	10	2	1e-8	23

Tabla 8.7: Simulaciones del cuadrilátero para diferentes integradores.

8.5 Cuadrilátero articulado con resorte y amortiguador

Una vez validado el mecanismo del cuadrilátero articulado se puede emplear para introducir un resorte y un amortiguador de forma que permita verificar estos apartados. En la figura 8.21 se aprecia el sistema formado por el muelle y el amortiguador situado entre el origen del sistema de coordenadas global y el punto p . A diferencia del problema anterior, se va a eliminar el par de entrada y en este caso se va a introducir como condición inicial la velocidad del punto p en dirección x . Las características del modelo pueden verse en la tabla 8.8.

En primer lugar se va a mostrar el desplazamiento del punto p en la coordenada x para diferentes pasos de cálculo pero sin introducir el amortiguador. El movimiento debe ser un balanceo respecto de la posición inicial tal y como se ve en la figura 8.22.

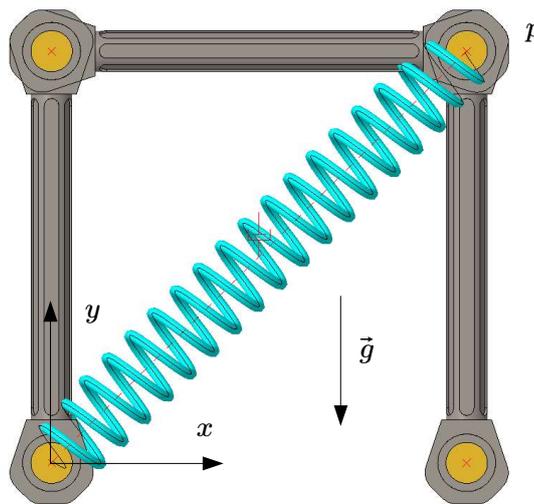


Figura 8.21: Cuadrilátero articulado con muelle y amortiguador.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	VARIABLES DE INTERÉS
Plano con resorte y amortiguador	5 seg.	Rotación	Gravedad	Desplazamiento y velocidad del punto p .

Tabla 8.8: Características del cuadrilátero articulado con elementos discretos.

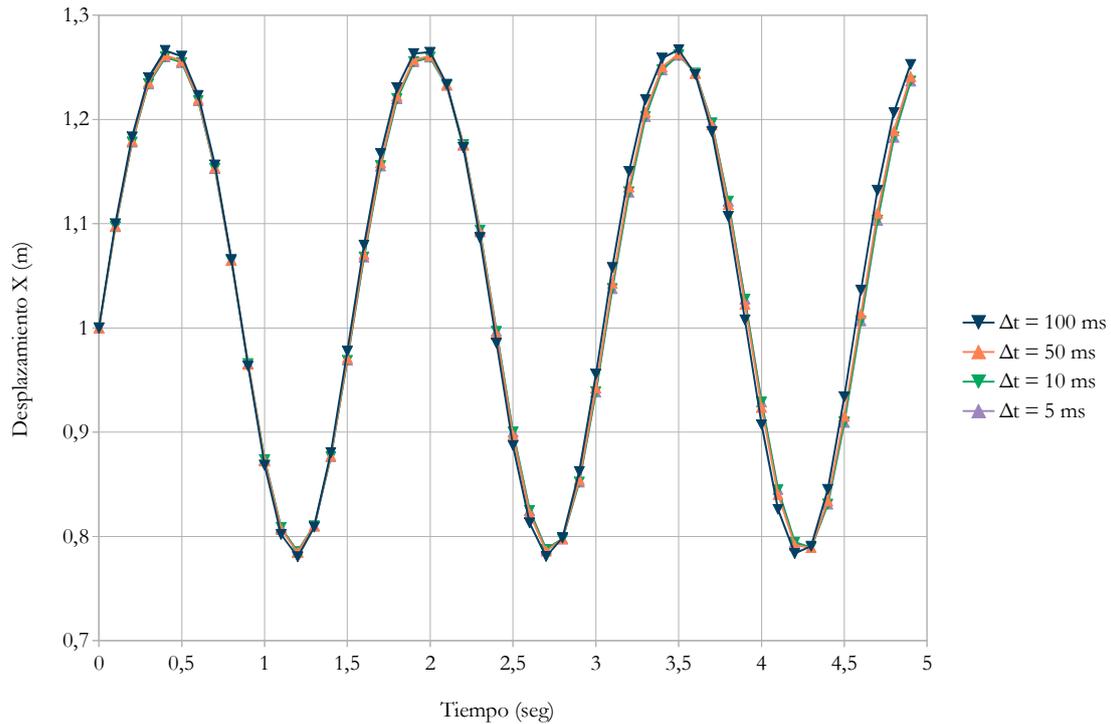


Figura 8.22: Desplazamiento en x del punto p para el mecanismo sin amortiguación.

Si se introduce el amortiguador esa energía inicial se irá disipando de manera paulatina hasta alcanzar la posición de equilibrio. Este efecto se muestra en las figuras 8.23 y 8.24. La constante de amortiguamiento es de 5 Ns/m y se corresponde con un amortiguamiento subcrítico y oscila con una frecuencia dinámica de 4,18 rad/seg, aproximadamente. Se puede ver como con un incremento de tiempo de 10 ms las soluciones convergen lo suficiente como para considerarlas aceptables. Bajo esas condiciones las restricciones a nivel de posición se cumplen con un error del orden de $1e-14$, como se muestra en la figura 8.25.

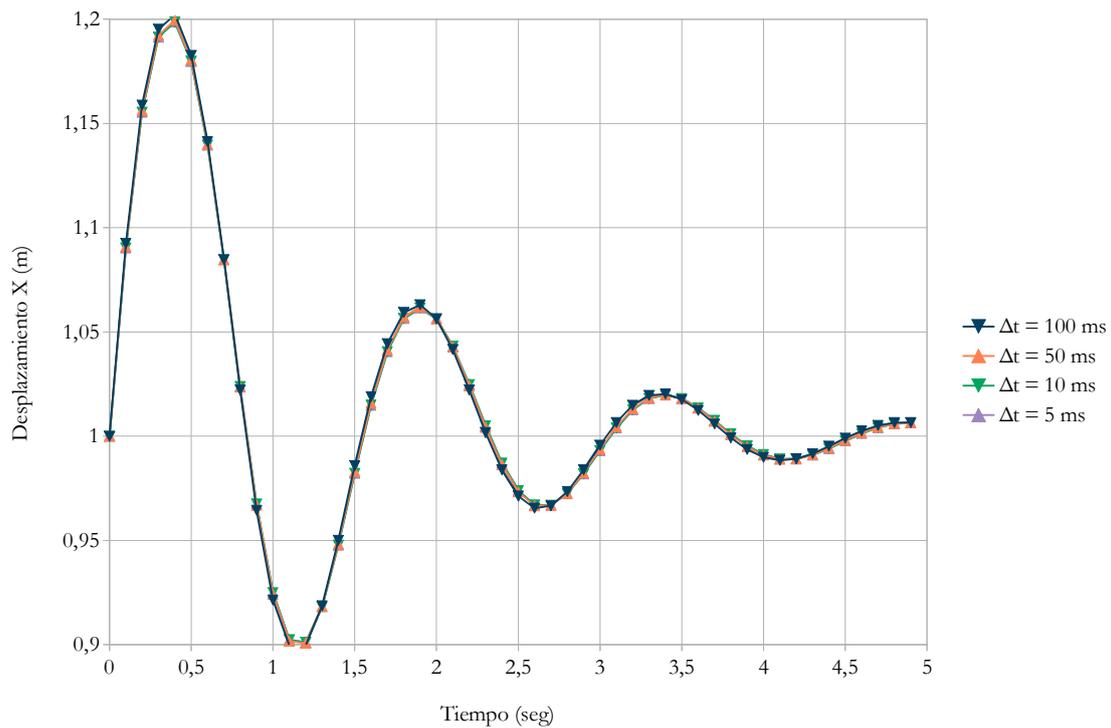


Figura 8.23: Desplazamiento en x del punto p para el mecanismo con amortiguación.

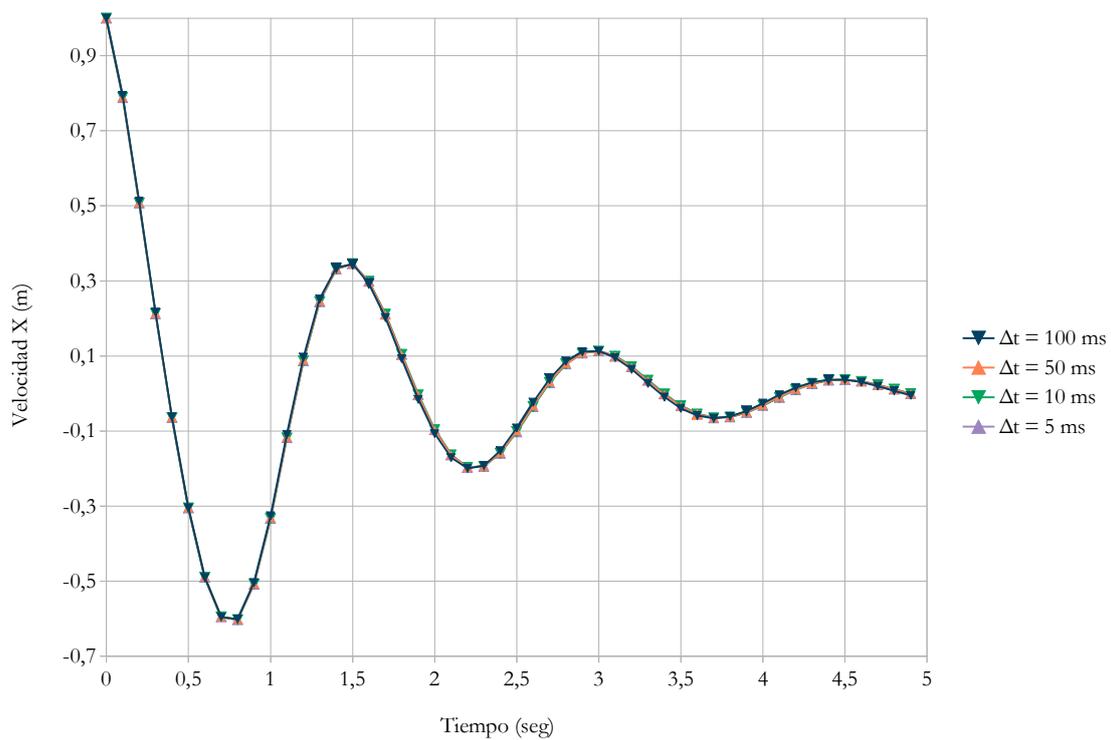


Figura 8.24: Velocidad en x del punto p para el mecanismo con amortiguación.

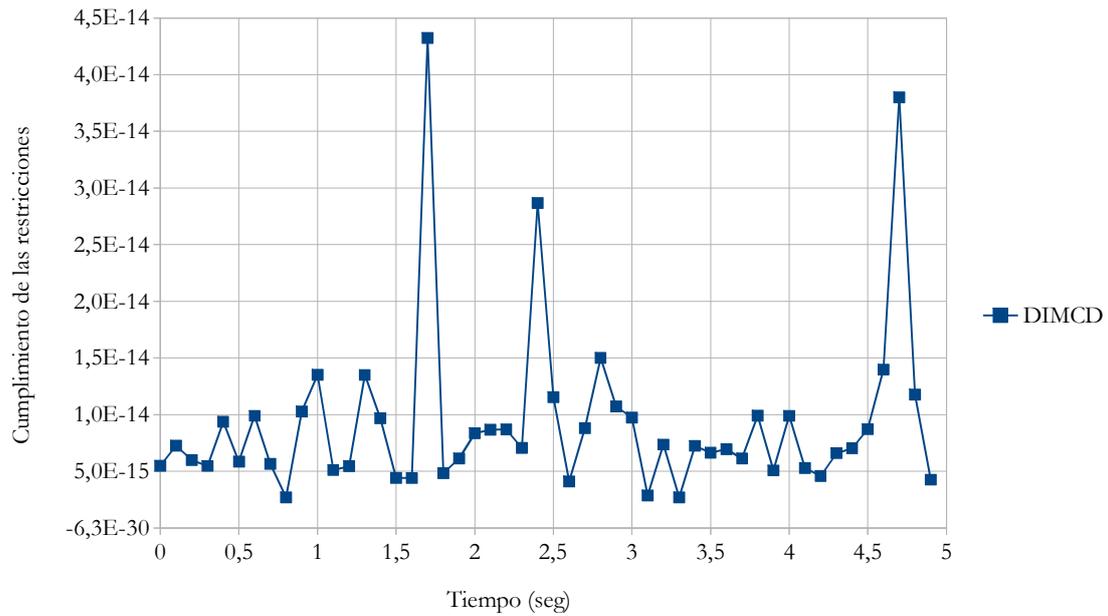


Figura 8.25: Cumplimiento de las restricciones a nivel de posición.

Se ha simulado el problema en MSC Adams y se ha comprobado la validez de los resultados con el sistema muelle-amortiguador. Las características de las simulaciones se recogen en la tabla 8.9. Se observa que el integrador GSTIFF emplea un orden de integración 5 y mantiene el paso en 10 ms, así mismo WSTIFF tiene que aumentar el orden de integración a 6. Por su parte HHT al ser de un orden de integración de 2 necesita reducir el paso de cálculo hasta 1,7 ms. En cuanto al método DIMCD, la solución se ha obtenido con un paso fijo de 10 ms y un integrador de orden 2 y aún así la respuesta es idéntica como se comprueba en las figuras 8.26 y 8.27. Esto pone de manifiesto la importancia y la repercusión de resolver el sistema de manera analítica que aún sin haber reducido el paso de cálculo y con un orden de integración menor se consiguen respuestas de gran precisión.

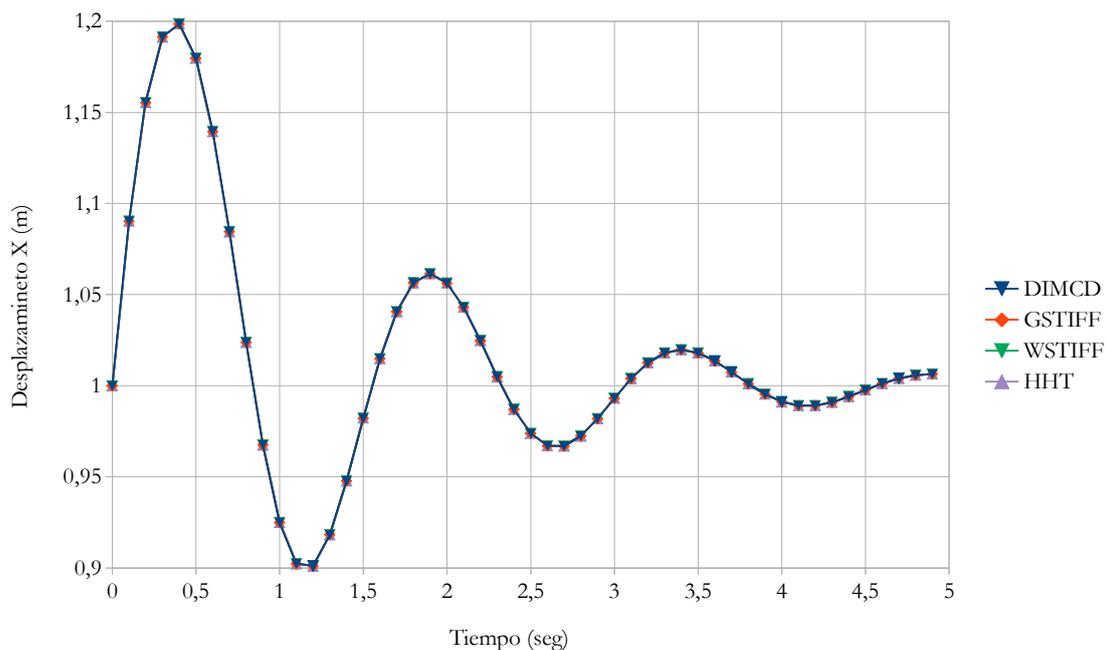


Figura 8.26: Desplazamiento en x del punto p para diferentes integradores.

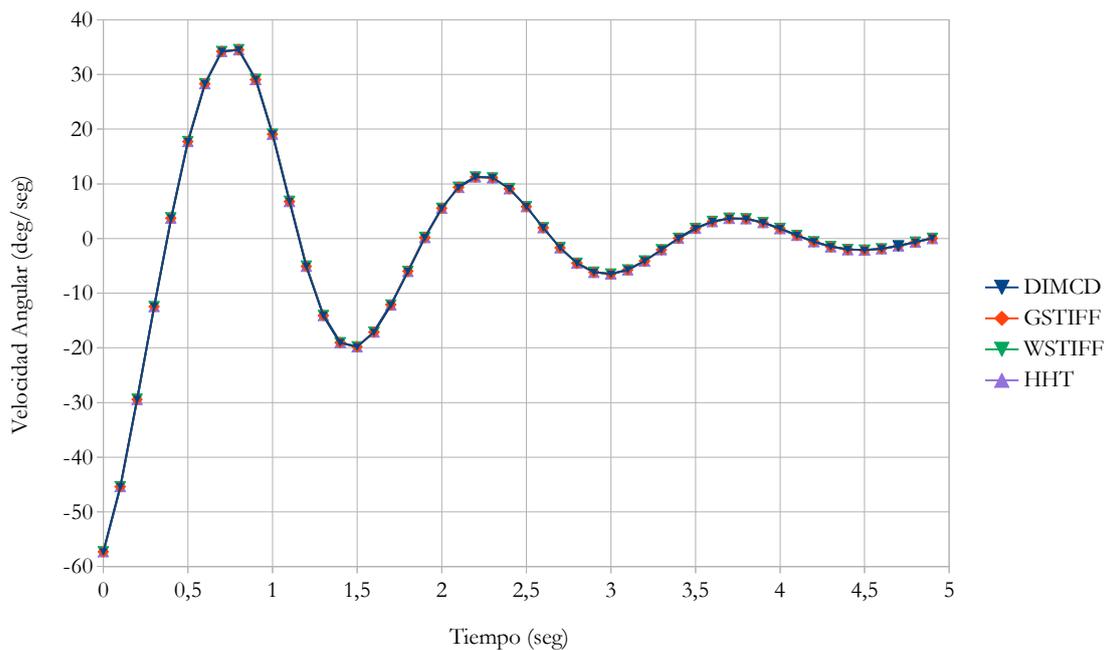


Figura 8.27: Velocidad angular de la barra de salida para diferentes integradores.

Método	Modelo	Paso	Intervalo de Δt (ms).	Orden de int.	Error	CPU (s)
HHT	MSC Adams	variable	1,7-10	2	1e-8	1
GSTIFF	MSC Adams	variable	10	5	1e-8	1
WSTIFF	MSC Adams	variable	10	6	1e-8	1
DIMCD	GNU Octave	fijo	10	2	1e-8	20

Tabla 8.9: Simulaciones con el cuadrilátero articulado con muelle y amortiguador.

8.6 Doble cuadrilátero articulado

El doble cuadrilátero articulado es un ejemplo clásico de mecanismo con posiciones singulares. Como se puede apreciar en la figura 8.28 cuando el mecanismo alcanza la posición horizontal el número de grados de libertad del modelo pasa de 1 a 3, lo que provoca que no pocas formulaciones tengan dificultades para superar este inconveniente. Este problema fue propuesto por Bayo y Avello [131] y las características del problema se pueden ver en la tabla 8.10.

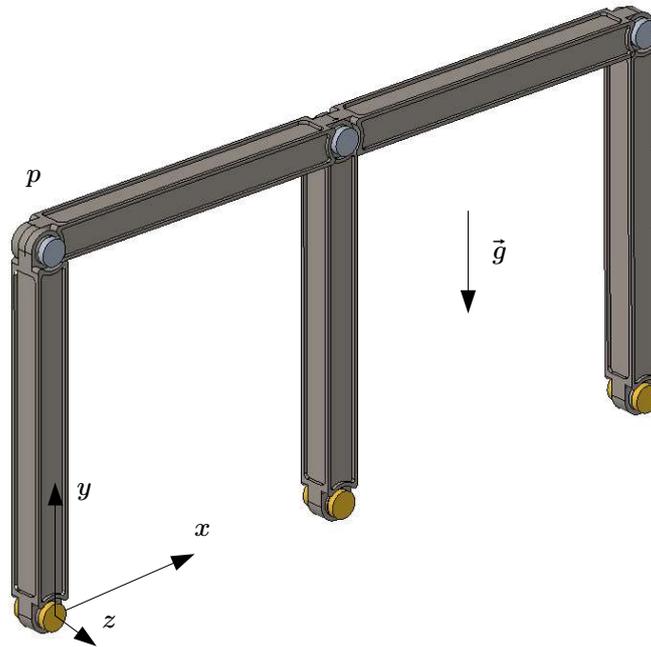


Figura 8.28: Doble cuadrilátero articulado.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Plano	10 seg.	Rotación	Gravedad	Desplazamiento y velocidad del punto p . Conservación de la energía mecánica.

Tabla 8.10: Datos del modelo de doble cuadrilátero articulado.

El mecanismo parte con una velocidad inicial del punto P , siendo la gravedad la única fuerza que interviene en el proceso. Ya que todas las fuerzas que intervienen son conservativas, la energía mecánica del sistema se debe mantener constante por lo que es un buen indicador para medir la calidad de la simulación. Los autores del problema indican que una buena simulación es aquella en que la desviación de la energía mecánica no supera los 0,1 J. En este sentido, se han llevado a cabo diferentes simulaciones variando el paso de integración en GNU Octave con el método de integración directa con diferencias centrales (DIMCD) las cuales se muestran en la gráfica 8.29. En ellas puede verse que las simulaciones con un paso de cálculo inferior a 10 ms

pueden considerarse adecuadas. Para estas condiciones las restricciones de posición se muestran en la figura y se cumplen con un error del orden de $3e-14$.

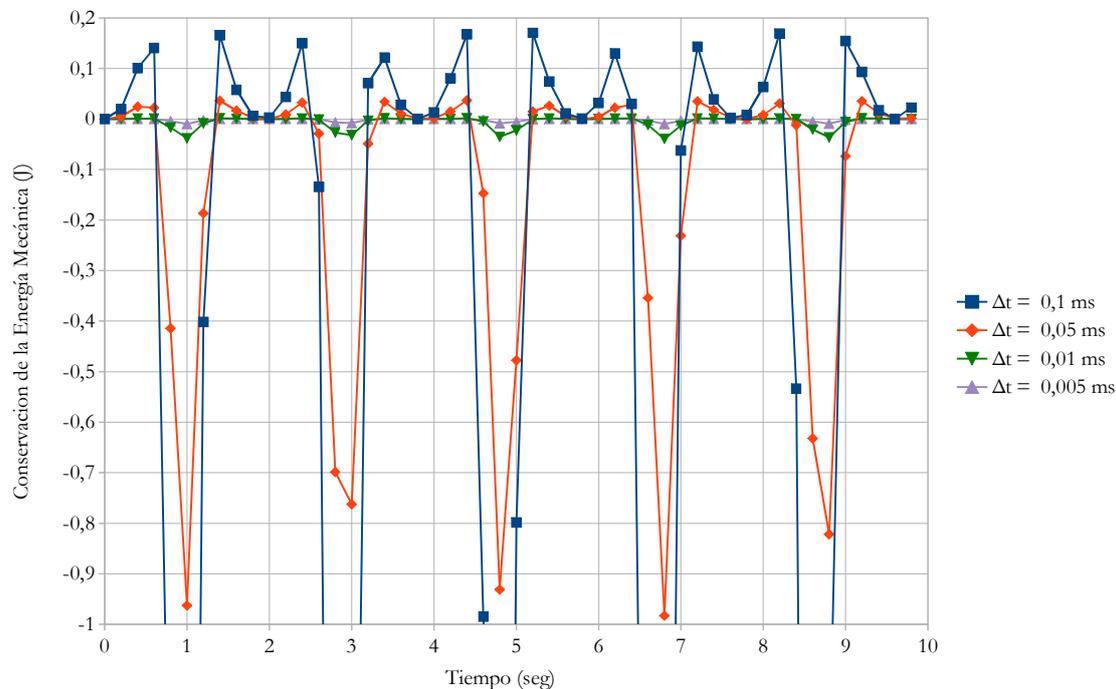


Figura 8.29: Cumplimiento de la conservación de la energía para el doble cuadrilátero.

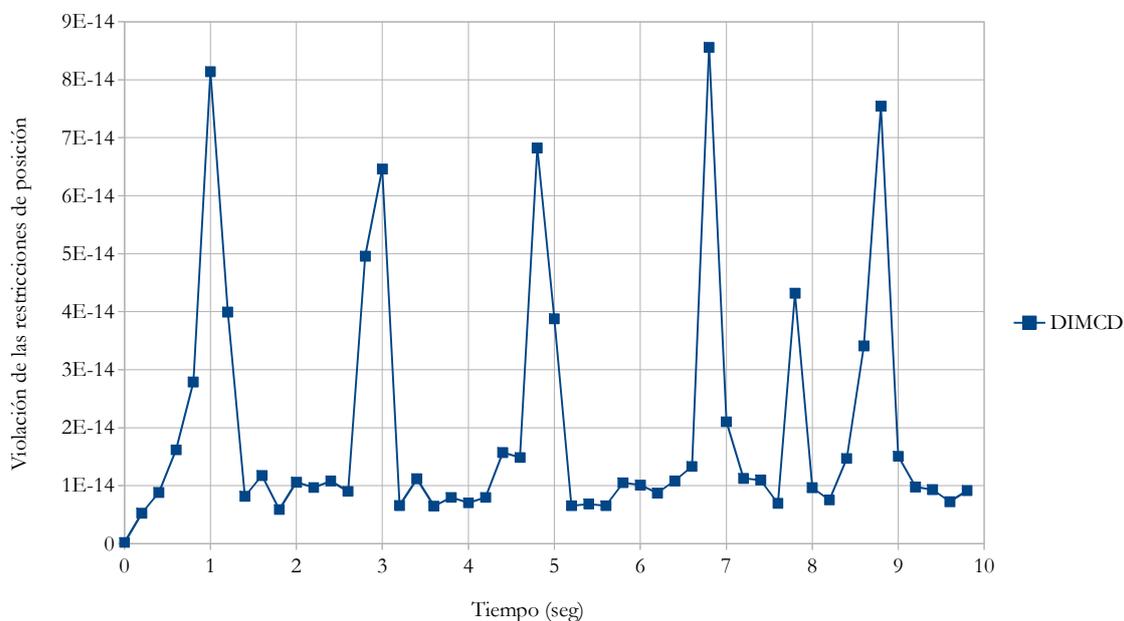


Figura 8.30: Violación de las restricciones de posición.

Para verificar la solución se va a resolver el problema con MSC Adams para diferentes integradores. Como se ha comentado es un ejercicio muy conocido por lo que es fácil obtener una solución de la web del IFToMM que sirva de

referencia para calcular un error total como se ha indicado en el apartado 8.1. Siguiendo el criterio de conservación de la energía se ha tomado como solución de referencia unos valores cuyas desviación no excede $3,2e-7$ J, siendo el desplazamiento y la velocidad del punto P en dirección x las variables empleadas para computar el error total. En las figuras 8.31 y 8.32 se observa el resultado para diferentes integradores de MSC Adams y DIMCD de las variables mencionadas. Los detalles de las simulaciones y el error total se incluyen en la tabla 8.11.

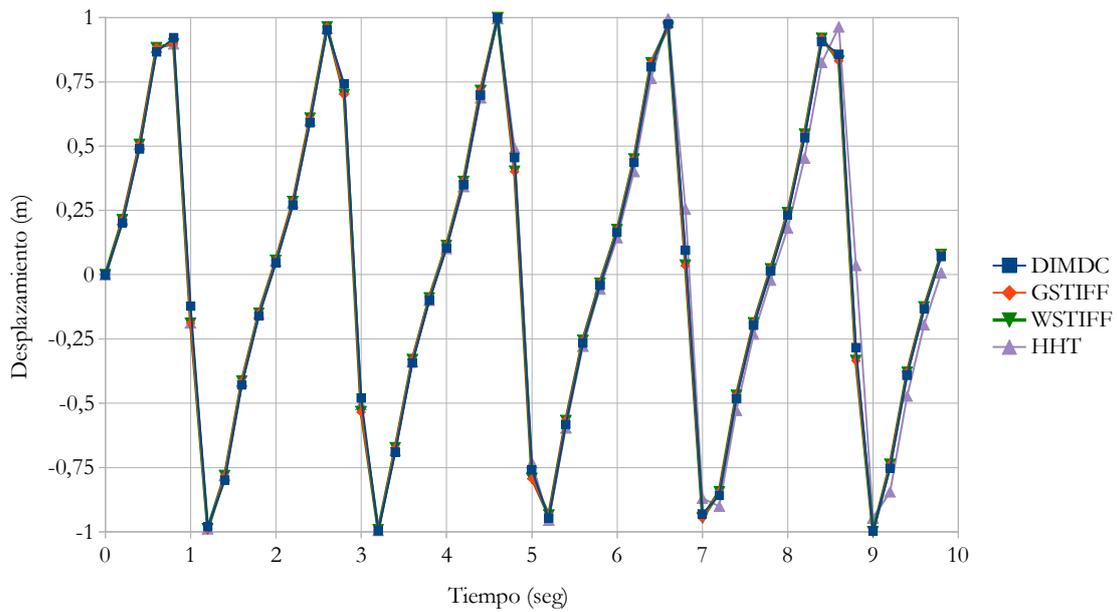


Figura 8.31: Desplazamiento del punto p en el eje x del Doble Cuadrilátero.

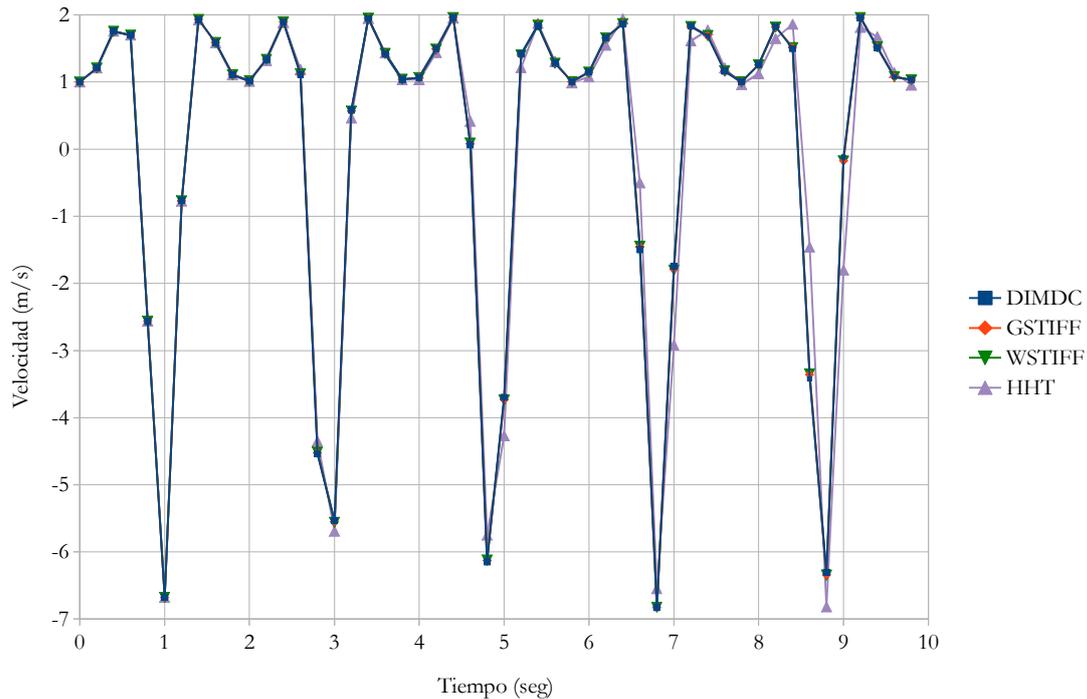


Figura 8.32: Velocidad del punto p en x del Doble Cuadrilátero.

Método	Modelo	Paso	Intervalo de Δt (ms).	Orden de int.	Error	CPU (s)	Error total
HHT	MSC Adams	variable	3-10	2	1e-6	1	1,12
GSTIFF	MSC Adams	variable	5-10	6	1e-6	1	0,57
WSTIFF	MSC Adams	variable	5-10	6	1e-6	1	0,58
DIMCD	GNU Octave	fijo	10	2	1e-6	98	0,48

Tabla 8.11: Simulaciones del doble cuadrilátero articulado.

En la figura 8.33 se muestra la conservación de la energía de las simulaciones de la tabla 8.11. Lo primero que se observa es que la solución del integrador HHT no cumple con el requisito proporcionado por los autores del problema y la desviación de energía supera los 0,1 J, lo cual se refleja en los resultados. Probablemente, la tolerancia de integración debería ser menor para cumplir con el requerimiento. De todas maneras, ya que HHT es un integrador de orden 2 es un buen indicador para medir la precisión del método descrito en este trabajo. Por su parte los integradores GSTIFF y WSTIFF cuando el mecanismo se aproxima a la singularidad, disminuyen el paso de cálculo y aumentan el orden de integración, proporcionando buenos resultados en cuanto a precisión y conservación de la energía siendo el error total similar al de DIMCD. Estos tres integradores están lejos de su límite en cuanto al desvío de la conservación de la energía se refiere lo que indica que la

tolerancia de integración podría relajarse para mejorar la eficiencia de la simulación.

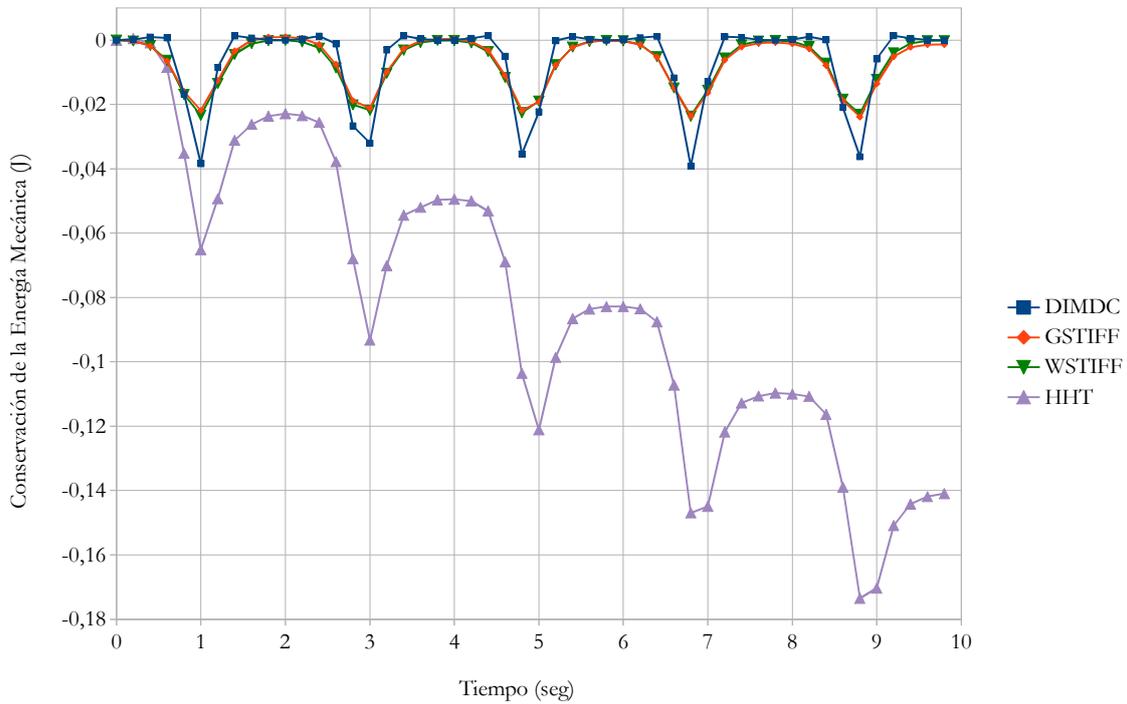


Figura 8.33: Desvío de la conservación de la energía mecánica para diferentes integradores para el doble cuadrilátero.

Sabiendo que se trata de un ejemplo de la librería de IFToMM se pueden obtener soluciones de diferentes autores. La solución 1 es la aportada por el autor del problema, se ha realizado con la formulación de Lagrange aumentado de índice-3 con proyección de velocidades y aceleraciones. La solución 2 también ha empleado la misma formulación salvo que el valor del factor de penalización es de $8e-8$, mientras que el de la referencia es $1e-9$. La principal característica de la solución 3, es que resuelve el sistema de ecuaciones DAE directamente con un paso de integración fijo de 8 ms. Finalmente, en la solución 4 usa el software OpenSim 3.2, el método de integración de Runge-Kutta-Feldberg (RKF) y un paso de integración variable entre 0,1 y 1 ms. En la tabla 8.12, se recogen los detalles de las simulaciones así como el desvío de la conservación de la energía mecánica cometido por cada una de ellas, e_{mec} .

Modelo	Método	Integrador	Lenguaje	Paso	Intervalo Δt (ms).	e_{mec}	CPU (s)
Solución 1	Lagrange aumentado	TR	Matlab	fijo	10	0,0917	0,6
Solución 2	Lagrange aumentado	TR	C++	fijo	10	0.0877	0.1278
Solución 3	Integración directa DAE	-	-	fijo	8	0,09	0,325
Solución 4	OpenSim 3.2	RKF	C++	variable	1-10	3,2e-7	0,455
DIMCD	DIMCD	DC	GNU Octave	fijo	10	0,039	98

Tabla 8.12: Detalles de las simulaciones para diferentes formulaciones.

8.7 Mecanismo de Bricard

El mecanismo de Bricard está formado por barras ligadas mediante pares de rotación formando un conjunto espacial. La peculiaridad es que si bien según la fórmula de Malishev el conjunto no tiene ninguna capacidad de movimiento debido a la situación de los elementos en el mecanismo adquiere un grado de libertad. Nuevamente, la formulación tiene que afrontar la simulación de un mecanismo con restricciones redundantes, la particularidad de este ejercicio es que se trata de un sistema espacial. En la figura 8.34 se muestra el mecanismo de Bricard.

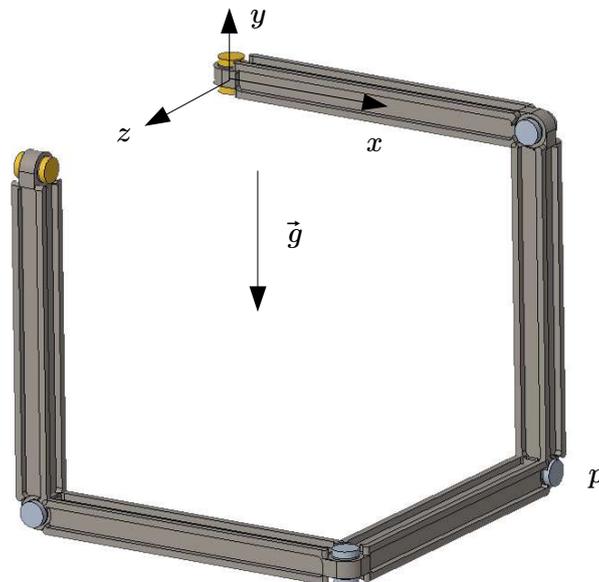


Figura 8.34: Imagen del mecanismo de Bricard.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Espacial	10 seg.	Rotación	Gravedad	Desplazamiento del punto p . Conservación de la energía mecánica.

Tabla 8.13: Características del problema del mecanismo de Bricard.

Al igual que en el doble cuadrilátero articulado, el mecanismo tiene como condiciones iniciales la velocidad del punto p y se deja actuar bajo el efecto de la gravedad, de manera que se debe conservar la energía mecánica del sistema. Los autores del problema recomiendan que el desvío en la conservación de la energía no sea superior a 0,001 J. Con estas premisas se han realizado diferentes simulaciones con DIMCD en GNU Octave para diferentes pasos de cálculo. En la figura 8.35 se observa el desvío de la energía mecánica y como se puede apreciar la simulación con el paso de 10 ms cumple con el requisito marcado. Con dicho paso las restricciones de posición se cumplen con un error del orden de $1e-14$ como puede verse en la figura 8.36.

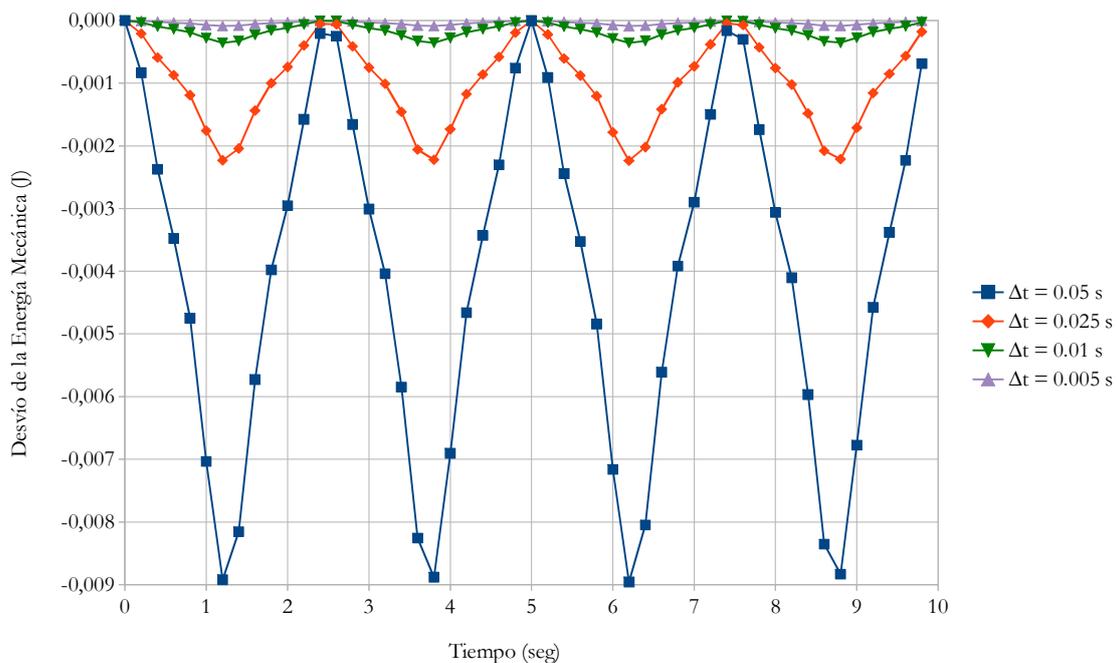


Figura 8.35: Desvío de la energía mecánica del mecanismo de Bricard para diferentes Δt con DIMCD.

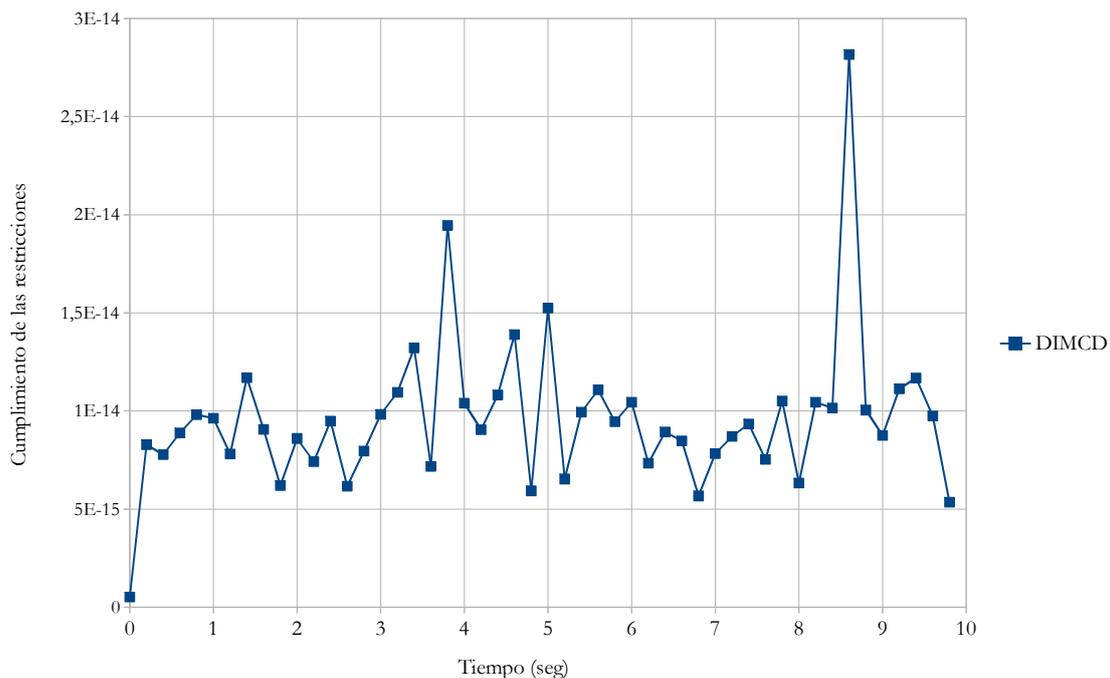


Figura 8.36: Violación de las restricciones de posición para el mecanismo de Bricard.

Para comprobar la validez de los resultados se van a comparar con MSC Adams. Las variables escogidas son el desplazamiento en dirección x y en dirección z del punto p y por ser un problema de referencia puede encontrarse una solución que sirva para obtener el error total. En este caso la solución de referencia se ha escogido siguiendo el criterio de conservación de energía y su desvío no excede de $9,6e-7$ J. Los resultados se muestran en las figuras 8.37 y , en ellas se puede apreciar como las soluciones divergen a medida que avanza la simulación.

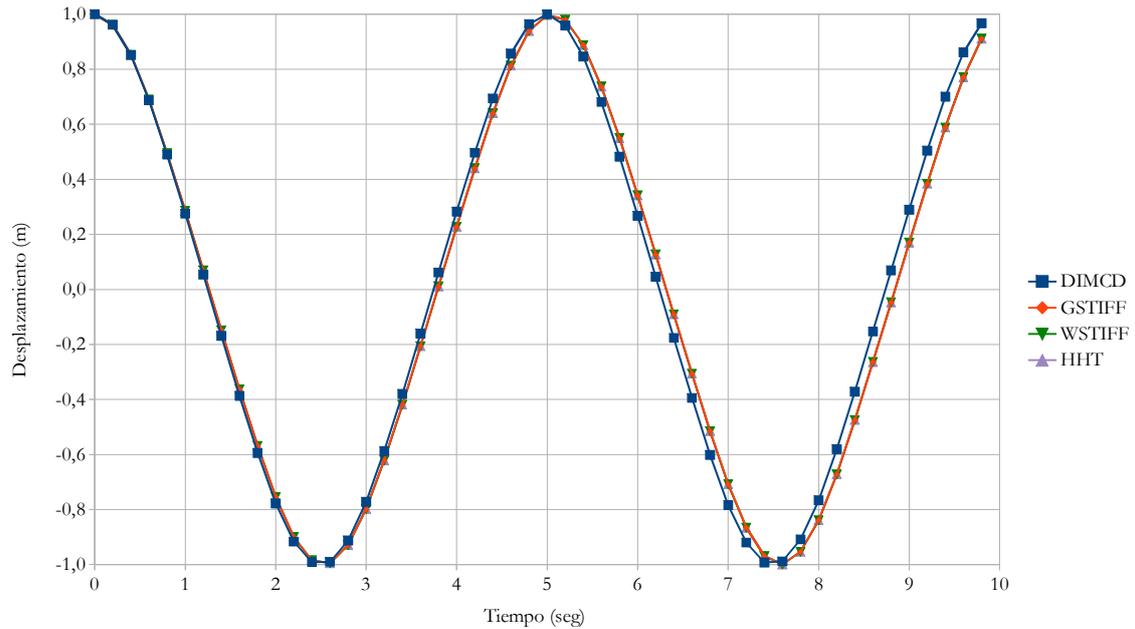


Figura 8.37: Posición del punto p en x del mecanismo de Bricard para diferentes integradores.

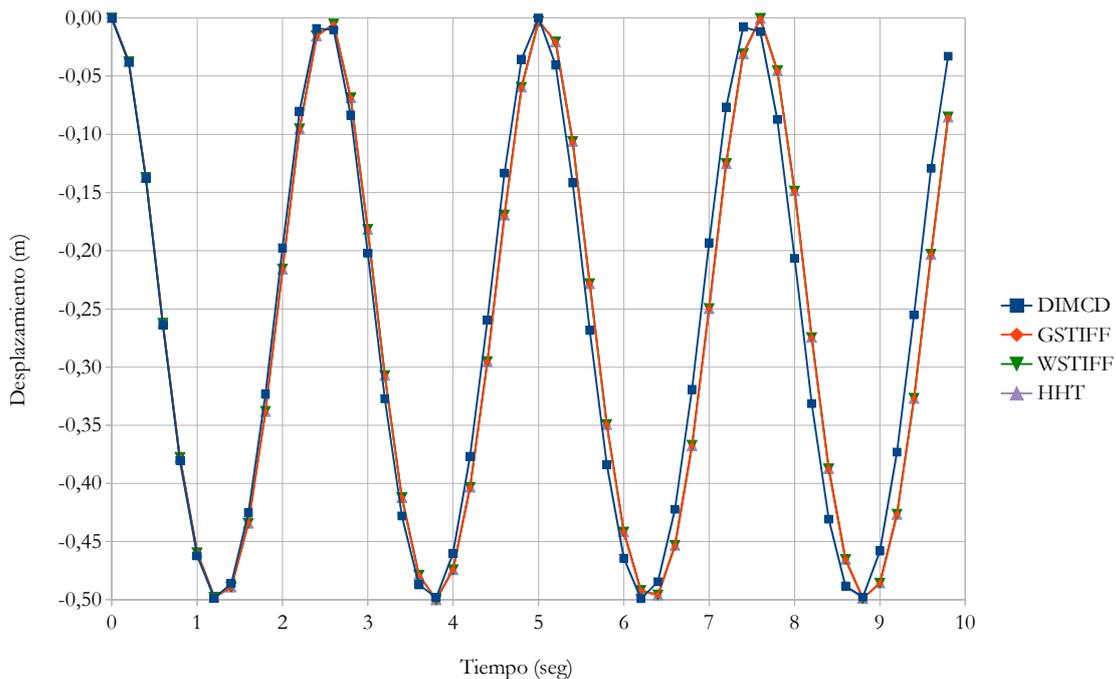


Figura 8.38: Desplazamiento del punto p en z del mecanismo de Bricard.

Los parámetros de las simulaciones se recogen en la tabla 8.14 donde también se incluye el error total. Se puede observar que el error total del integrador GSTIFF, WSTIFF y HHT es elevado comparado con el del DIMCD y en consecuencia esta circunstancia se refleja en la conservación de la energía mostrada en el figura 8.39. Por lo tanto, el error de la tolerancia de integración para estos tres integradores debería ser más restrictivo para

ajustarse a los requerimientos de calidad. En cualquier caso, la precisión alcanzada por el método DIMCD en comparación con los integradores de MSC Adams es bastante significativa. Esta circunstancia es reflejo de emplear derivadas analíticas en vez de derivadas aproximadas.

Método	Modelo	Paso	Intervalo de Δt (ms).	Orden de int.	Error	CPU (s)	Error total
HHT	MSC Adams	variable	1,7-10	2	1e-8	3	0,99
GSTIFF	MSC Adams	variable	5-10	6	1e-8	2	0,98
WSTIFF	MSC Adams	variable	10	6	1e-8	2	0,98
DIMCD	GNU Octave	fijo	10	2	1e-8	89	0,01

Tabla 8.14: Comparación de diferentes integradores del mecanismo de Bricard.

En la tabla 8.15, se ha realizado una comparativa con las soluciones encontradas en la librería de problemas del IFToMM. La solución 1 se ha realizado usando la formulación de Lagrange aumentado con proyección de velocidades y aceleraciones para un tamaño de paso de 5 ms. Por su parte la solución 2 se calcula mediante OpenSim 3.2 y emplea el BDF como método de integración. En la figura 8.40, se ha representado el desvío de la energía mecánica, e_{mec} , para las diferentes formulaciones.

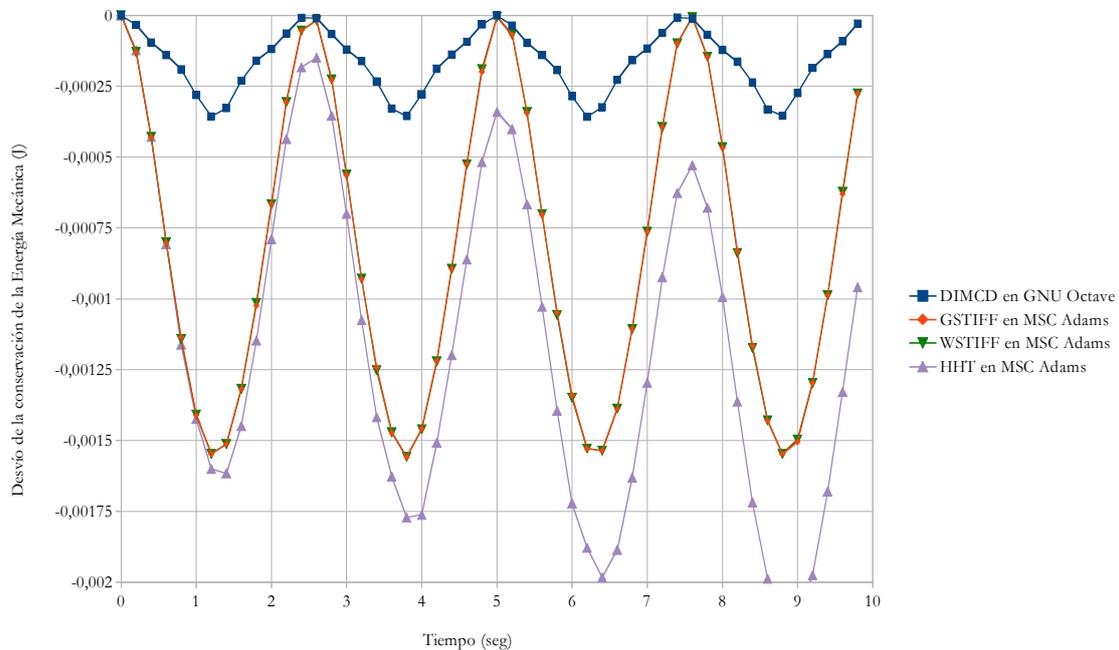


Figura 8.39: Conservación de la energía del mecanismo de Bricard para diferentes integradores.

Modelo	Método	Integrador	Lenguaje	Paso	Δt (ms)	e_{mec}	CPU (s)
Solución 1	Lagrange aumentado	TR	C++	fijo	5	8e-4	0,125
Solución 2	OpenSim 3.2	BDF	C++	variable	10-1	9,6e-7	0,258
DIMCD	DIMCD	DC	GNU Octave	fijo	10	3,6e-4	89

Tabla 8.15: Detalles de las simulaciones para diferentes formulaciones.

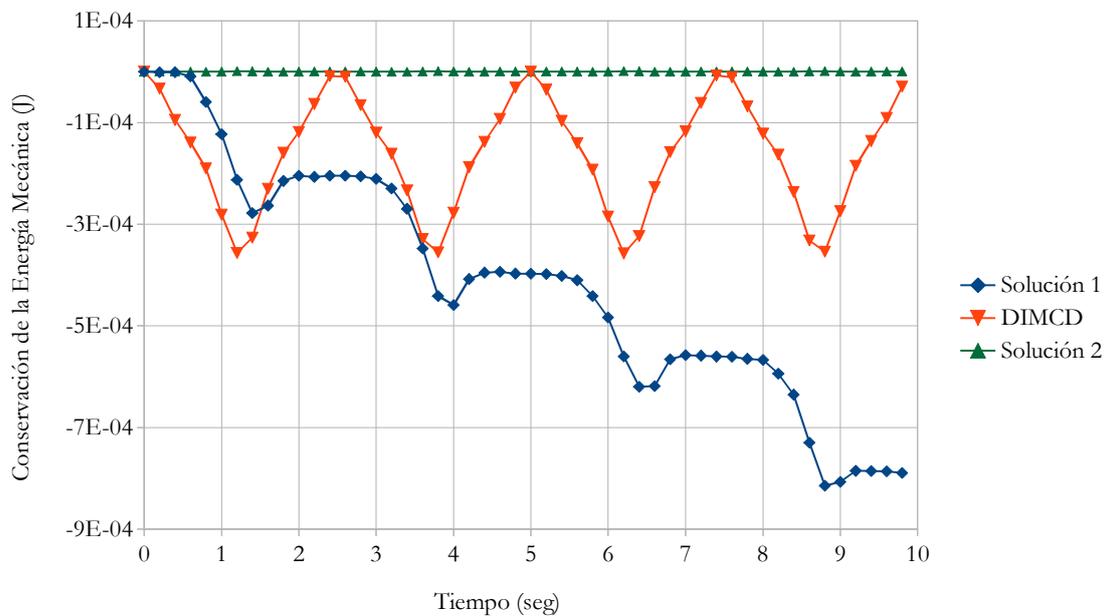


Figura 8.40: Desvío de la energía mecánica del mecanismo de Bricard para diferentes formulaciones.

8.8 Mecanismo de biela-manivela

El mecanismo de Biela-Manivela surge de una degeneración del cuadrilátero articulado. Es un mecanismo que transforma el movimiento de rotación en traslación y se puede encontrar en numerosas aplicaciones. Se trata de un sistema plano con tres pares de rotación y un par prismático que limitan el movimiento a un grado de libertad. Una imagen de este mecanismo se muestra en la figura 8.41. Las características del ejemplo se resumen en la tabla 8.16.

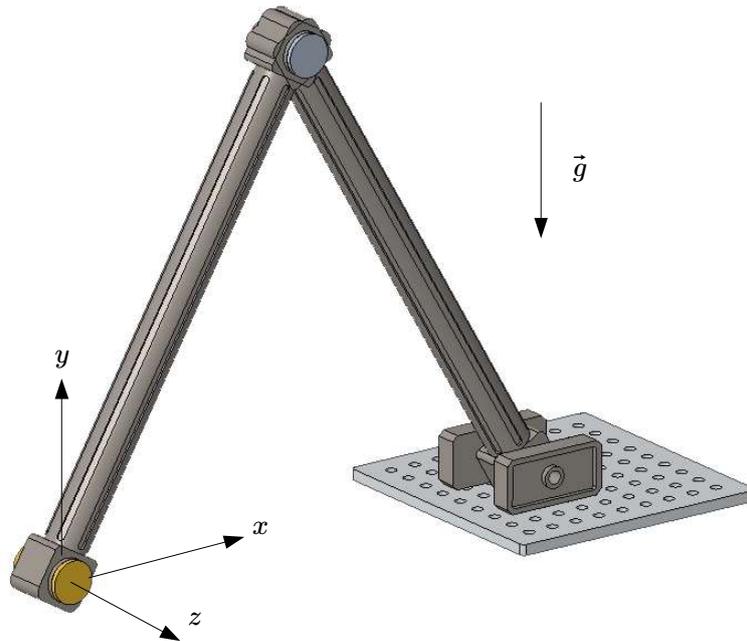


Figura 8.41: Mecanismo de Biela-Manivela.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Plano	5 seg.	Rotación Prismático	Par exterior y gravedad	Velocidad y aceleración de la deslizadera. Fuerzas de restricciones en la deslizadera. Velocidad angular de la barra de entrada.

Tabla 8.16: Datos del problema de Biela-Manivela.

En el ejercicio se va a simular un motor que proporciona un par constante en la barra de entrada y como salida se obtiene el movimiento de la deslizadera. El objetivo del problema es comprobar que se ha definido correctamente el par prismático y obtener las fuerzas de restricción en la deslizadera.

En las figuras 8.42 y 8.43 se muestran la velocidad y la aceleración de la deslizadera obtenidos mediante el método DIMCD implementado en GNU Octave. Según puede verse, los valores de las gráficas de velocidad son bastante próximos y prácticamente no se aprecia diferencia. Por otra parte, atendiendo a la aceleración ahí sí se puede ver cierta diferencia en el entorno de los 4,5 segundos. Entre la solución de 5 ms y 1 ms existe muy poca diferencia por lo que puede considerarse que la simulación con un paso de 5 ms es suficiente.

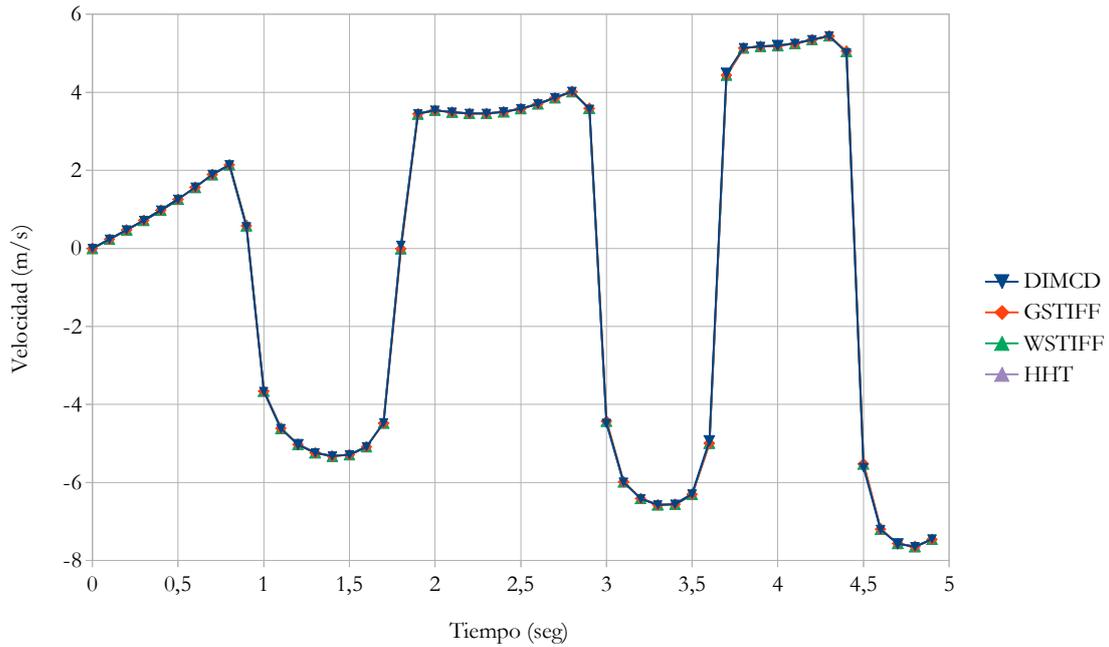


Figura 8.42: Velocidad de la deslizadera del mecanismo Biela-Manivela.

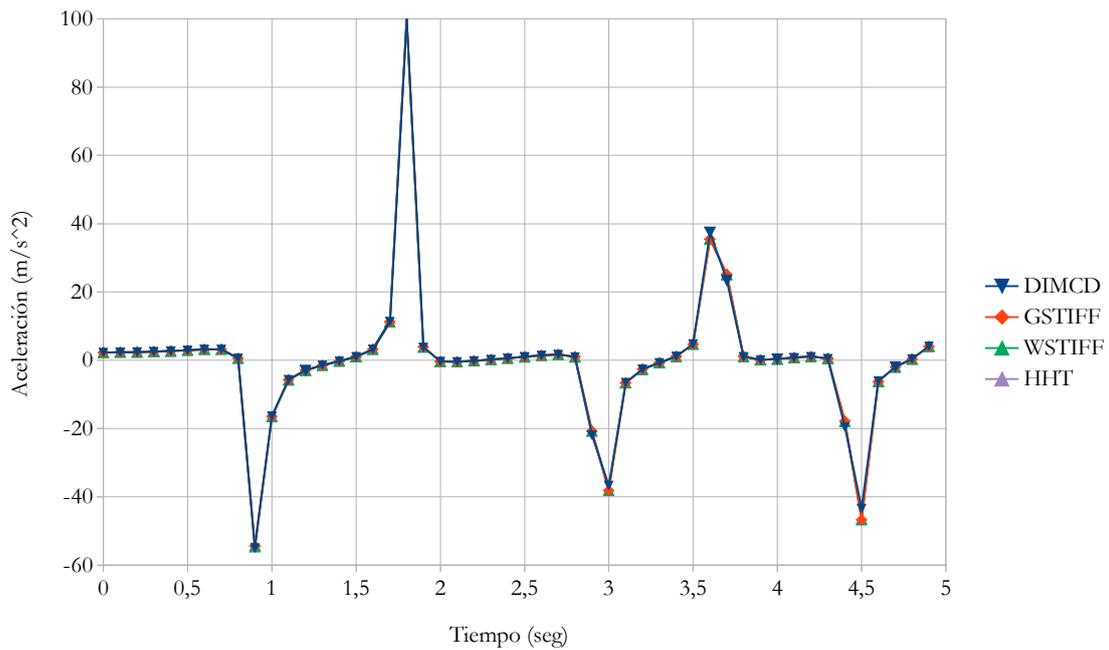


Figura 8.43: Aceleración de la deslizadera en el mecanismo Biela-Manivela.

Con un paso de 5 ms las ecuaciones de restricción a nivel de posición se cumplen con un error del orden de $8e-15$. En la figura 8.44 se muestran el vector normalizado de las restricciones para 50 instantes de tiempo equidistantes.

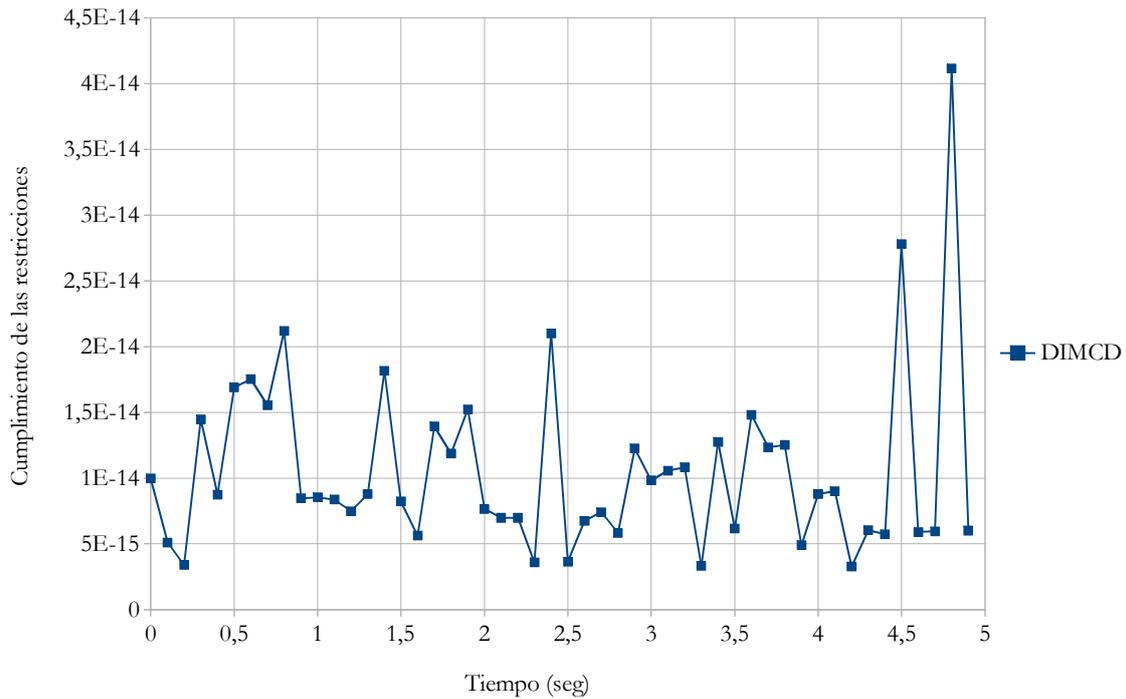


Figura 8.44: Cumplimiento de las ecuaciones de restricción para el mecanismo biela-manivela.

Para verificar estos resultados se va a resolver el problema con MSC Adams para diferentes integradores y se van a comparar con los obtenidos por DIMCD. En la figura 8.45 se observa la velocidad angular de la barra de entrada. Las soluciones son muy parecidas y apenas se puede ver diferencia. En la figura 8.46 se ha graficado la fuerza que se ejerce sobre la deslizadera en la dirección x , aquí se aprecia alguna variación pero poco significativa. Se ha comprobado que las soluciones son similares. Sin embargo, la forma de obtenerlas es diferente. En la tabla 8.17, se recogen los detalles de las simulaciones. Puede verse que con el integrador HHT es necesario reducir el paso hasta 0,2 ms para obtener la misma solución, mientras que las formulaciones de orden de integración superior como GSTIFF y WSTIFF reducen el Δt hasta 1 y 0,8 ms respectivamente. Es común en todas las simulaciones que cuando el sistema se aproxima a la posición horizontal, se producen mayores dificultades por tratarse de un punto de singularidad y por tanto requieren disminuir el paso de cálculo. El instante 4,5 segundos corresponde a una de estas situaciones y en ellas se aprecian las mayores diferencias. Al no tener unos resultados de referencia es difícil cuantificar el error pero sí que se puede observar la precisión de los resultados del método DIMCD a pesar de haberse calculado con paso de mayor tamaño.

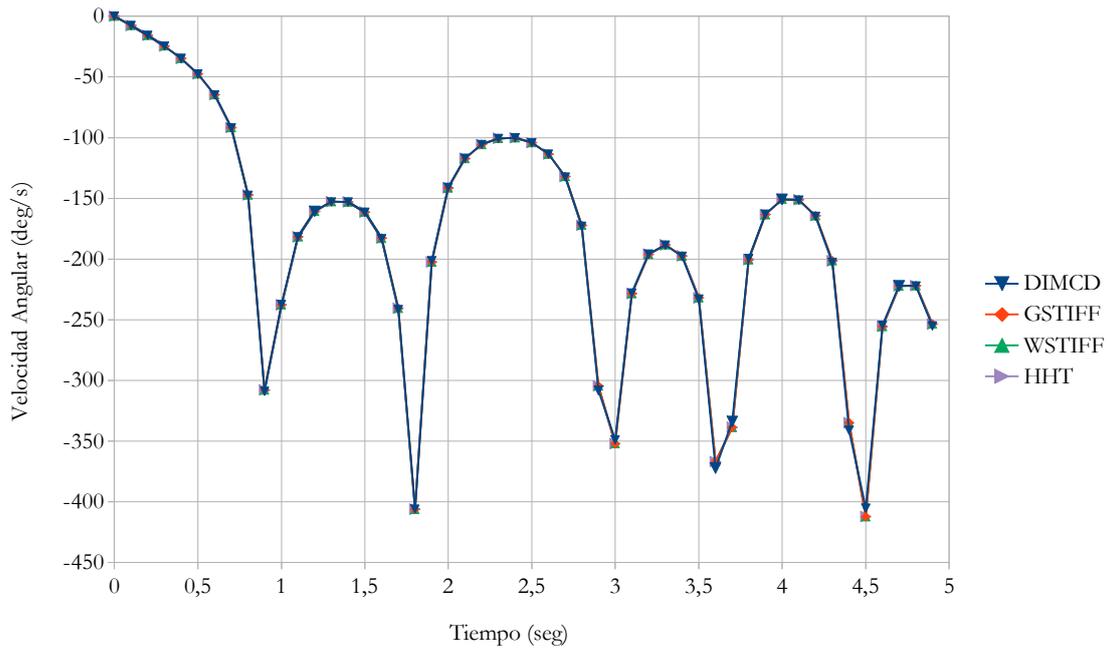


Figura 8.45: Velocidad angular de la barra de entrada en la biela-manivela.

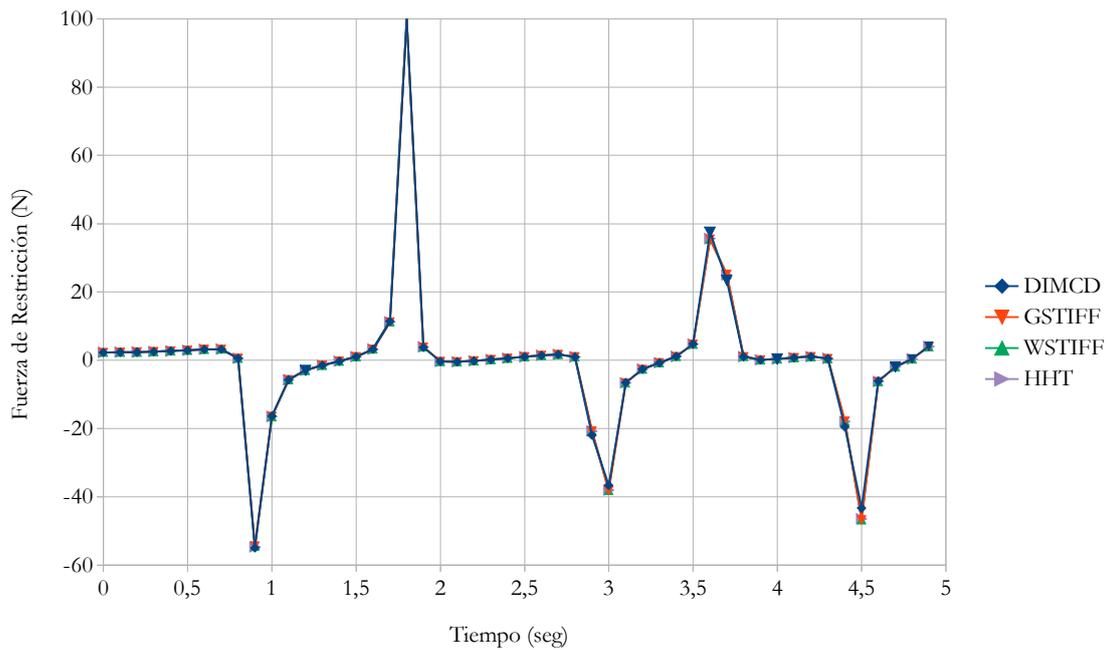


Figura 8.46: Fuerza de restricción sobre la deslizadera en dirección x .

Método	Modelo	Paso	Intervalo de Δt (ms).	Orden de int.	Error	CPU (s)
HHT	MSC Adams	variable	0,2-5	2	1e-8	1
GSTIFF	MSC Adams	variable	1-5	6	1e-8	1
WSTIFF	MSC Adams	variable	0,8-5	6	1e-8	1
DIMCD	GNU Octave	fijo	5	2	1e-8	56

Tabla 8.17: Comparación entre diferentes integradores para simular la biela-manivela.

8.9 Mecanismo biela-manivela con cardan

Se trata de una variante del mecanismo del punto anterior que adaptado a 3 dimensiones adquiere una mayor complejidad. En el plano el mecanismo Biela-Manivela únicamente tenía pares de revolución, en cambio, en el espacio combina varios tipo de pares diferentes lo que hace que sea un sistema interesante para incluir este apartado. A parte de esto, como novedad se introduce una junta universal de manera que va a permitir comprobar si su definición es correcta. En la figura 8.47 se muestra el detalle del mecanismo construido con tres elementos móviles unidos entre sí por 4 pares diferentes. Además de la junta cardan, también se incorporan un par de rotación, un par esférico y un par prismático que según la ecuación de Malishev resulta en un mecanismo de 1 grado de libertad. El sistema únicamente está sometido a la fuerza de gravedad y en el instante inicial se conoce la velocidad de rotación de la Biela. El sistema, por tanto, carece de elementos de generación o disipación de energía por lo que la energía mecánica del sistema se debe conservar durante toda la simulación. En la tabla 8.18 se pueden ver las características del problema de la biela-manivela con cardan.

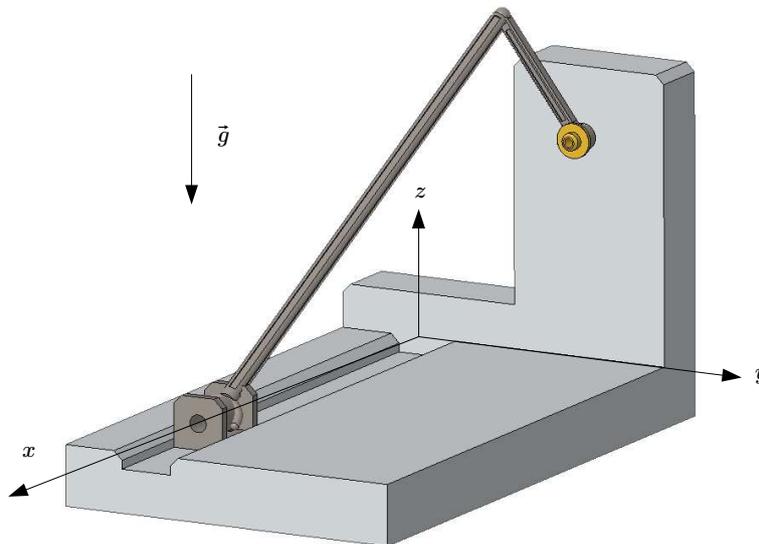


Figura 8.47: Mecanismo biela-manivela con cardan.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Espacial	5 seg.	Rotación Prismático Junta Cardan	Gravedad	Desplazamiento y aceleración de la deslizadera. Fuerzas de restricción de la deslizadera. Conservación de la energía mecánica. Ángulo de la barra de entrada.

Tabla 8.18: Datos del problema de biela-manivela con cardan.

En las figuras 8.48 y 8.49 se muestra el desplazamiento y la fuerza de restricción de la deslizadera en dirección de la guía del par prismático para diferentes pasos de integración calculados con el método DIMCD en GNU Octave. Se comprueba que para un paso de 5 ms las soluciones se aproximan y con pasos inferiores a 1 ms las soluciones son indistinguibles.

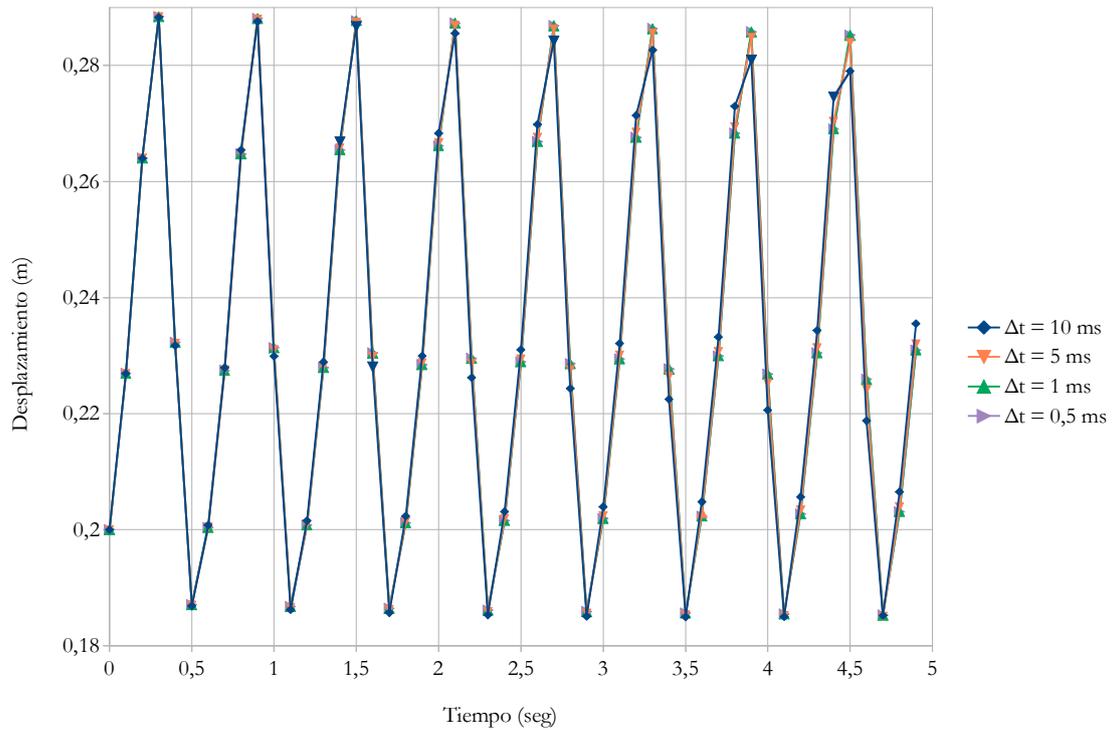


Figura 8.48: Desplazamiento de la deslizadera en el mecanismo biela-manivela con cardan.

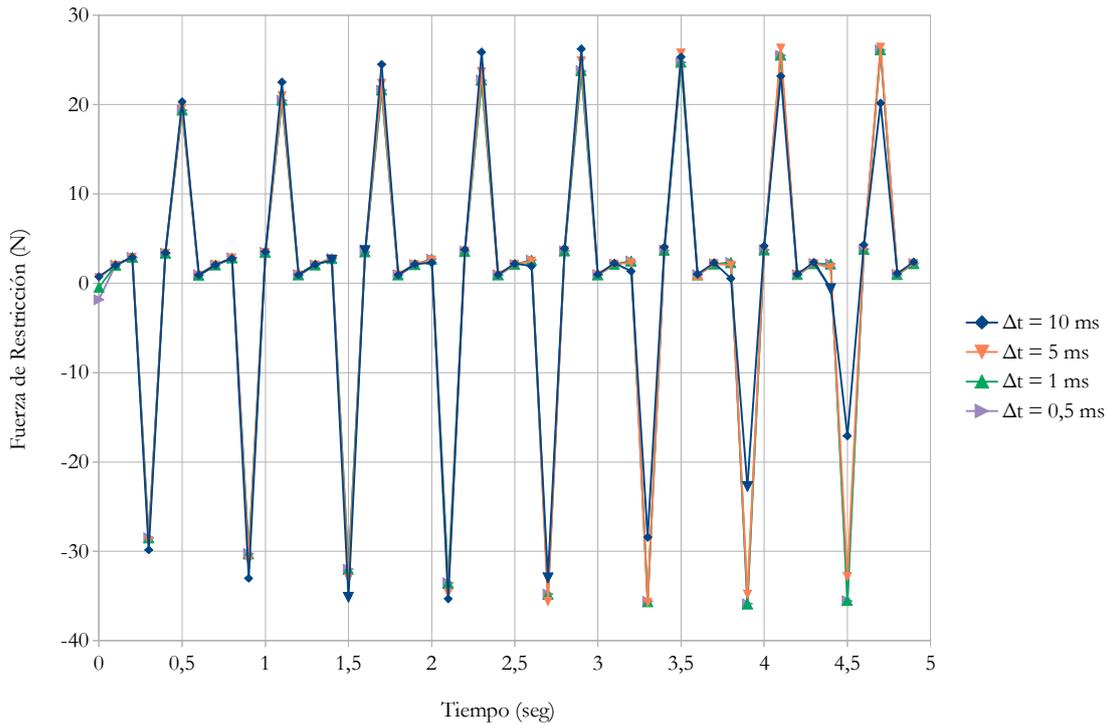


Figura 8.49: Fuerza de restricción en la deslizadera para el mecanismo biela-manivela con cardan.

Para poder validar las simulaciones se va a resolver el problema con MSC Adams. En las figuras 8.50 y 8.51 se muestra la aceleración de la deslizadera y la conservación de la energía para un paso de cálculo de 1 ms con un error de tolerancia de $1e-6$. En la figura 8.50, no se aprecian grandes diferencias entre los métodos DIMCD, GSTIFF y WSTIFF en cambio, en los puntos donde la aceleración es mayor el método HHT se queda lejos de alcanzar esos valores. En la figura 8.51, se observa que el integrador WSTIFF ofrece los mejores resultados en cuanto a conservación de la energía, por su parte GSTIFF, siendo también un integrador de orden 6, no logra la misma precisión. El método DIMCD tiene buenos resultados aunque se aprecia que en ciertos valores el desvío se hace mayor. Precisamente estas posiciones coinciden con los puntos de mayor aceleración. En la figura 8.52, por su parte se ha limitado el orden de integración a 2 y se ha comparado la capacidad de conservar la energía del sistema. En este caso es evidente que el método DIMCD ofrece mejor respuesta a pesar de que los integradores GSTIFF, WSTIFF y HHT trabajan con pasos de cálculo más pequeños. Es de resaltar como el integrador WSTIFF que lograba los mejores resultados se muestra muy inestable e incluso se ha visto superado en este caso por GSTIFF. El integrador HHT como era de suponer por lo visto en la figura 8.50, no consigue conservar la energía del sistema de forma tan eficiente.

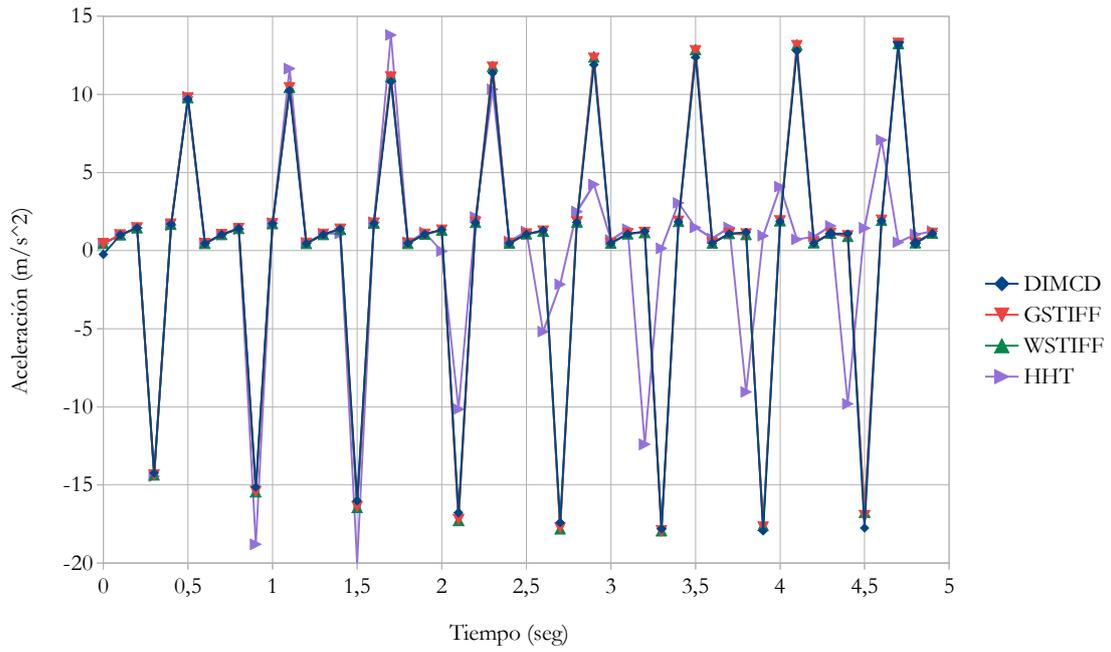


Figura 8.50: Aceleración de la deslizadera para diferentes integradores.

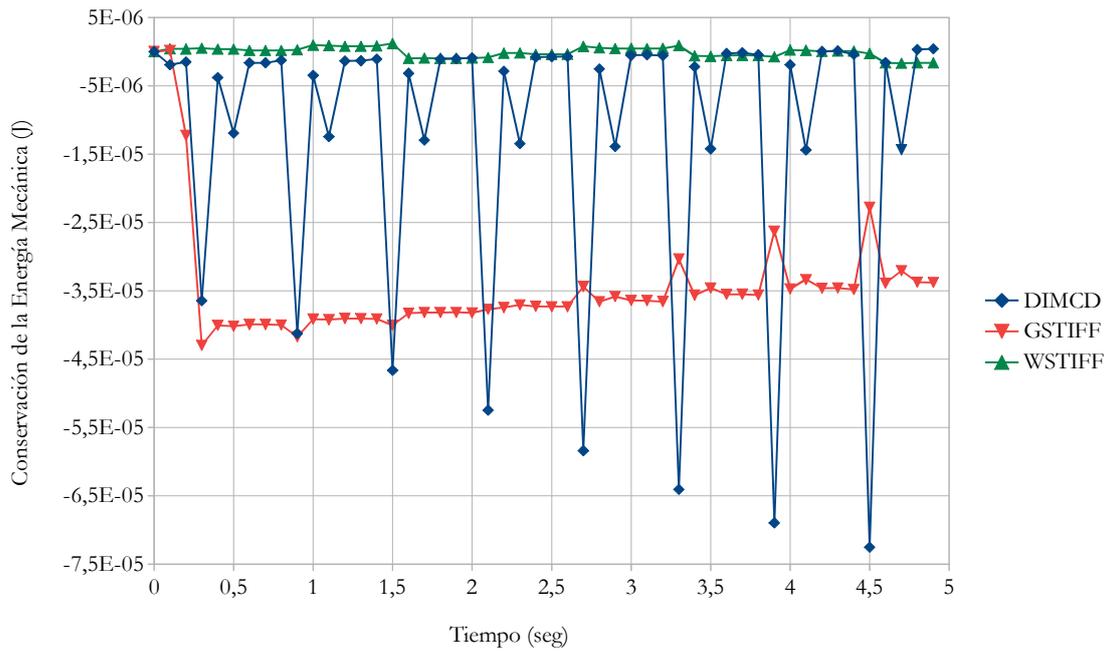


Figura 8.51: Conservación de la energía para diferentes integradores.

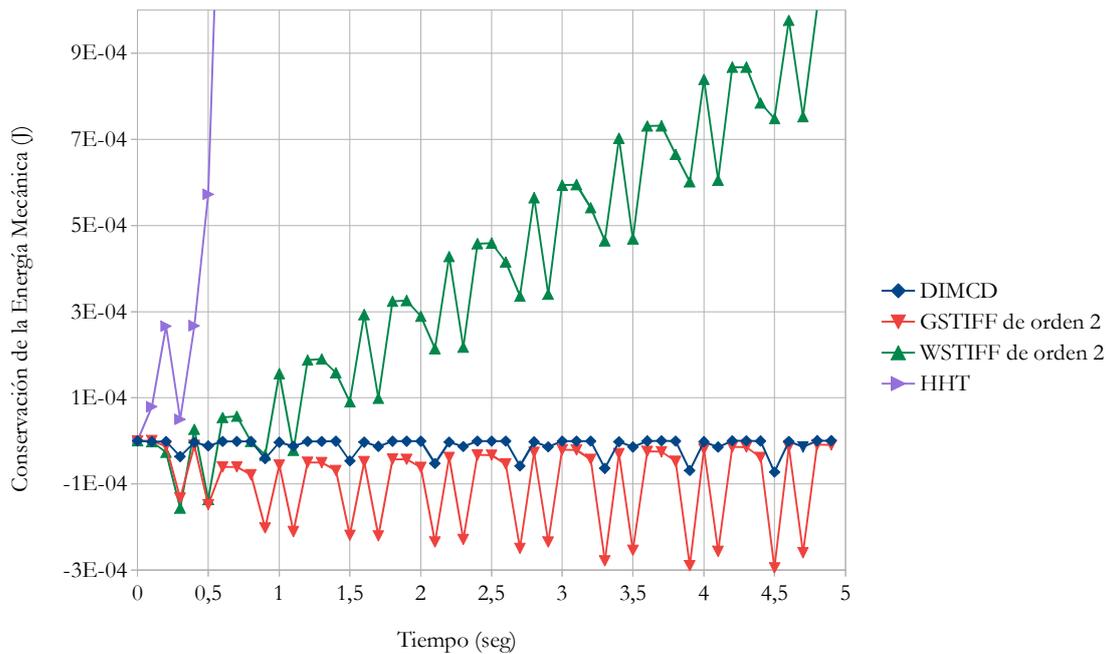


Figura 8.52: Conservación de la energía limitando el orden de los integradores a 2.

En la tabla 8.19 se muestran los detalles de las simulaciones. La 2ª y 3ª fila corresponden a las simulaciones realizadas con los integradores GSTIFF y WSTIFF limitando el orden de integración a 2. Se observa que para compensar este hecho el método tiene que reducir el paso de cálculo. Por el contrario, en la 4ª y 5ª fila el orden de integración se deja libre. Puede verse que GSTIFF no usa el máximo orden posible mientras que WSTIFF si lo hace. Es importante comentar que el intervalo de incremento de tiempo mostrado en la tabla refleja el paso usado durante la simulación sin tener en cuenta los primeros pasos de cálculo donde MSC Adams emplea unos incrementos menores. Habiendo fijado el error de tolerancia queda claro que el orden de integración tiene una gran influencia en la precisión de los resultados. En cuanto al método DIMCD, se obtiene que la conservación de la energía mecánica es del orden de $2,3e-5$ J, sólo superado por el método WSTIFF de orden 6 y comparando con integradores de orden 2 la diferencia es significativa.

Método	Modelo	Paso	Intervalo Δt (ms).	Orden de int.	Error	CPU (s)	Conser. Emec (J)
HHT	MSC Adams	variable	0,15-1	2	1e-6	2	7,8e-3
GSTIFF	MSC Adams	variable	0,2-1	2	1e-6	2	1,3e-4
WSTIFF	MSC Adams	variable	0,16-1	2	1e-6	6	5,1e-4
GSTIFF	MSC Adams	variable	0,5-1	4	1e-6	2	3,5e-5
WSTIFF	MSC Adams	variable	1	6	1e-6	3	7,8e-7
DIMCD	GNU Octave	fijo	1	2	1e-6	150	2,3e-5

Tabla 8.19: Resumen de las simulaciones del mecanismo biela-manivela con cardan.

El mecanismo biela-manivela con cardan forma parte de la colección de problemas de referencia. Es posible, por tanto, encontrar resultados realizados con otras formulaciones y comparar los resultados. En este sentido aparte de validar la solución con un software comercial también puede compararse el método con el trabajo de otros investigadores lo que aporta una visión más global. En este caso no se da ningún criterio de calidad como puede ser la conservación de la energía mecánica, a cambio se tienen datos de la posición de la deslizadera y el ángulo de entrada. En la figura 8.53 se muestra el resultado de la comparación. La solución 1 corresponde a la propuesta por el autor, está realizada con una formulación conocida como “*Linear Graph*” [168], un tipo de paso variable y un error de tolerancia de $1e-4$. La solución 2 se resuelve con el método MBDyn, desarrollado por la Universidad Politécnica de Milán, emplea un paso de cálculo variable y un error de tolerancia de $1e-9$. Por su parte la solución 3 se ha resuelto con el software Solidworks, empleando el integrador GSTIFF, un paso fijo de 20 ms y una tolerancia de $1e-4$. La solución con el método DIMCD se ha resuelto empleando un paso fijo de 10 ms y un error de tolerancia de $1e-4$. En la tabla 8.20 se resumen las condiciones de las simulaciones. Como se ha comentado, en este caso no se da ningún criterio de calidad, por lo que simplemente se muestran los detalles de las simulaciones. En la figura 8.53, se puede ver el desplazamiento de la deslizadera para las formulaciones de la tabla 8.20.

Modelo	Método	Integrador	Lenguaje Programación	Paso	Intervalo Δt (ms).	Error	CPU (s)
Solución 1	Linear Graph	Rosenbrock	MapleSim	variable	-	$1e-4$	0,25
Solución 2	MBDyn	-	-	variable	4-16	$1e-9$	0,39
Solución 3	Solidworks	GSTIFF	-	variable	20	$1e-4$	14,2
DIMCD	DIMCD	CD	GNU Octave	fijo	10	$1e-4$	14

Tabla 8.20: Resultados de las simulaciones de diferentes fuentes.

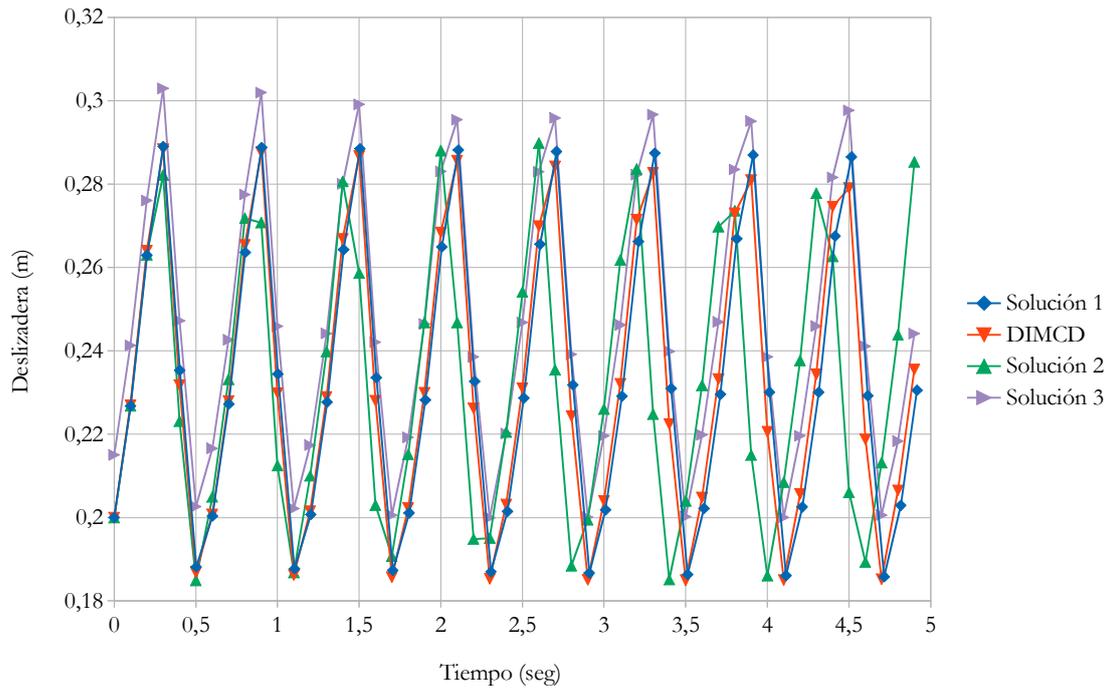


Figura 8.53: Desplazamiento de la deslizadera del mecanismo biela-manivela con cardan para diferentes formulaciones.

8.10 Mecanismo de Andrew

En la figura 8.54 se muestra el sistema conocido como *Andrew's squeezer mechanism*, se trata de un modelo plano formado por 7 elementos conectados por pares de rotación. Una descripción más detallada puede encontrarse en la bibliografía [169]. La dificultad del modelo radica en que usa una escala de tiempo muy pequeña lo que obliga a emplear incrementos de tiempo inferiores a 1 ms para la integración. En la tabla 8.21 se resumen los detalles del problema.

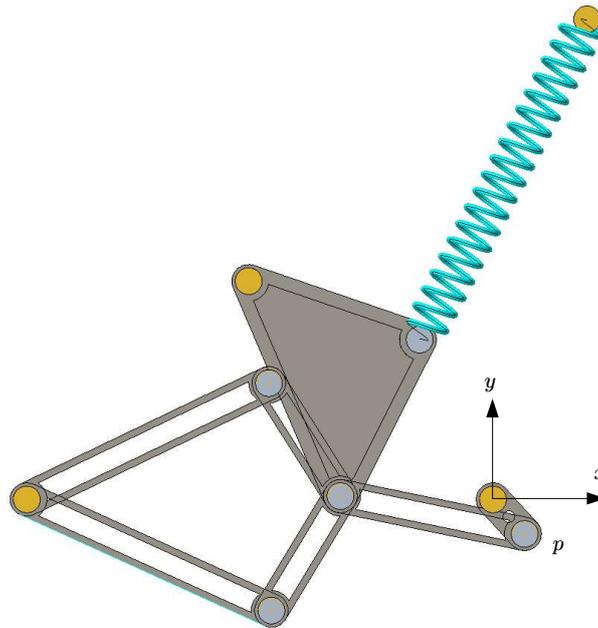


Figura 8.54: Imagen del mecanismo de Andrew.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Plano	0,05 seg.	Rotación	Par	Desplazamiento del punto p . Velocidad del punto p . Balance de Energía.

Tabla 8.21: Características del problema del mecanismo de Andrew.

Este ejemplo se incluye dentro de los problemas de referencia del IFToMM. En la descripción, se ofrece la posición de cada CdG y la posición de los puntos de enlace respecto a un triedro de referencia local situado en una ligadura. Esto más el hecho de emplear magnitudes muy pequeñas dificultan obtener las posiciones iniciales, y sobre todo las orientaciones del mecanismo. Según las condiciones iniciales calculadas, el error de ensamblaje obtenido es del orden de $1e-3$. Este error de posición se traduce en un salto del desplazamiento en el segundo paso de cálculo, y en un incremento importante de la energía cinética del sistema en el instante t_1 , como se puede ver en las figuras 8.55 y 8.56. Este error se acentúa a medida que se reduce el Δt , si bien es cierto que a partir del tercer paso de cálculo la simulación transcurre de manera habitual.

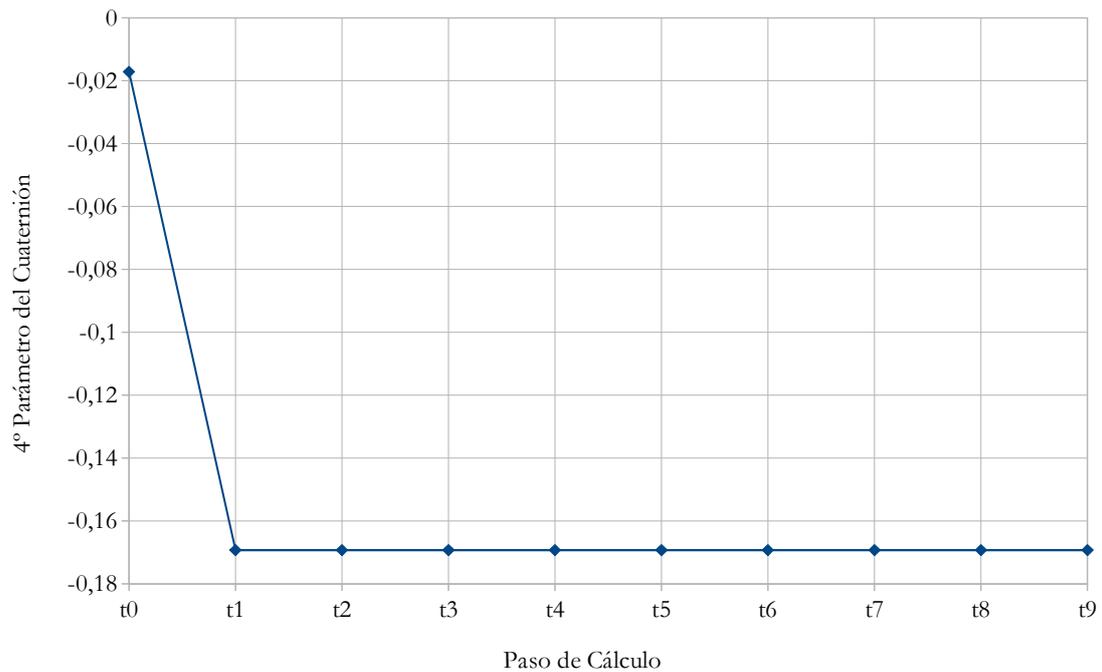


Figura 8.55: Valor del término q_4 de un elemento del mecanismo de Andrew.

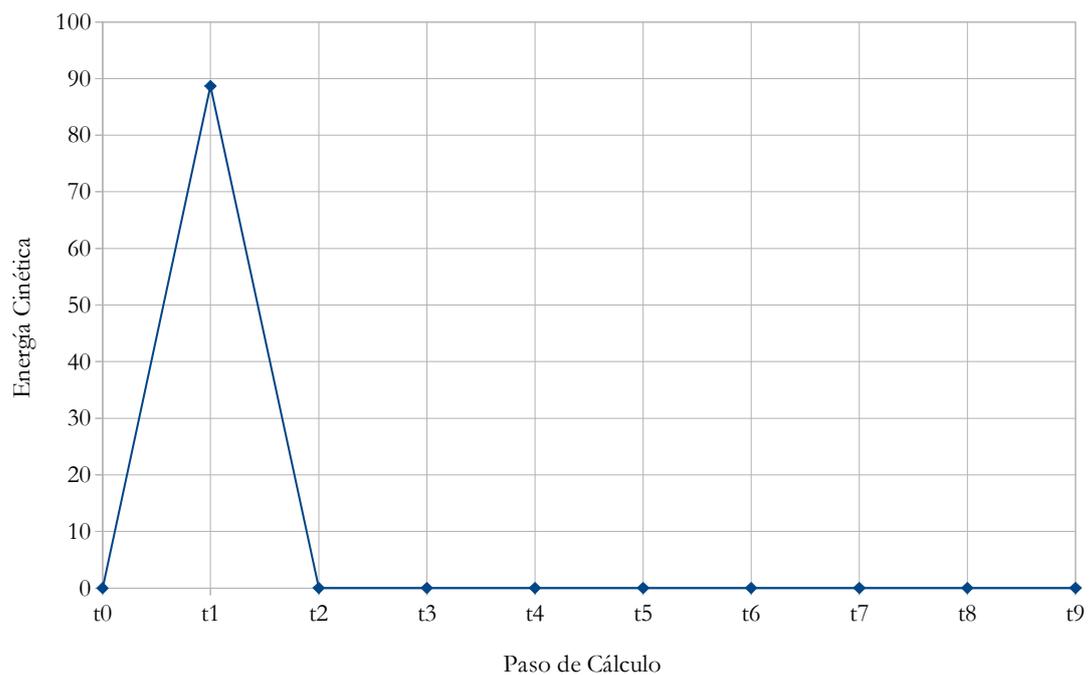


Figura 8.56: Energía cinética del sistema.

Para solucionar el error de ensamblaje inicial, se debe resolver el problema de posición (PP) en dicho instante, tal y como se ha expuesto en el capítulo 6.4. En la tabla se incluye el error de ensamblaje para los 5 primeros pasos, aplicando y sin aplicar el problema de posición.

Paso Δt	1	2	3	4	5
Resuelto el PP	7,39e-15	5,74e-15	6,34e-15	7,95e-15	8,25e-15
Sin resolver el PP	9,43e-3	5,37e-15	5,56e-15	8,5e-15	9,12e-15

Tabla 8.22: Error de ensamblaje.

Los autores del ejemplo especifican un criterio de calidad para las simulaciones estableciendo el desvío de la conservación de la energía inferior a $1e-5$ J. Se trata de un problema con un par exterior, de forma que para incorporar la energía producida por el trabajo del par exterior se realiza con la siguiente ecuación.

$$W_{par} = \tau(\beta - \beta_0) \quad (8.3)$$

Donde τ es el valor del par exterior, β es el ángulo girado por la barra de entrada y β_0 es el ángulo de la barra de entrada en la posición inicial. Con todo esto la ecuación que define la conservación de la energía del sistema es:

$$E_M - E_M^0 = W_{par} \quad (8.4)$$

Siendo E_M la energía mecánica del sistema en el instante t y E_M^0 la energía mecánica en el instante inicial. En la figura 8.57 se muestra la velocidad del punto p en la dirección x , obtenida por el método DIMCD implementado en GNU Octave. En la gráfica no se observan grandes diferencias para desestimar ninguna simulación. Por el contrario, si se calcula la conservación de la energía según la ecuación (8.4), se observa que la única simulación que cumple la condición de calidad, si bien con 0,01 ms se queda cerca, es la que se ha realizado con un incremento de tiempo de 0,005 ms, tal y como se muestra en la figura 8.58.

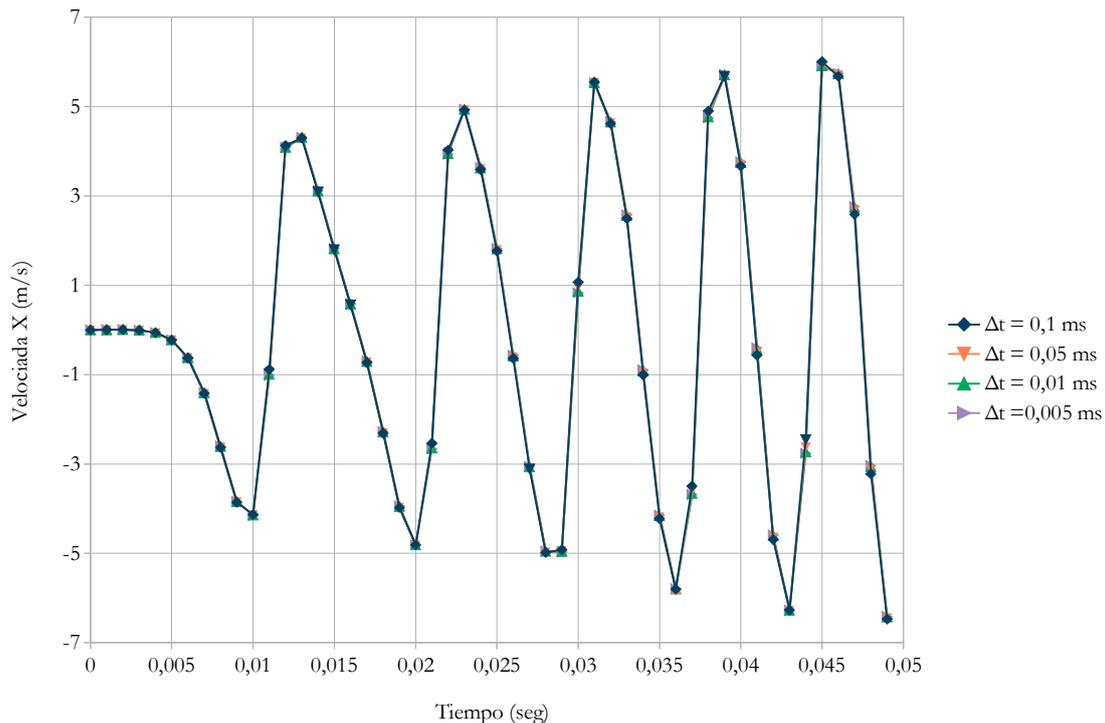


Figura 8.57: Velocidad del punto p para el mecanismo de Andrew con diferentes Δt .

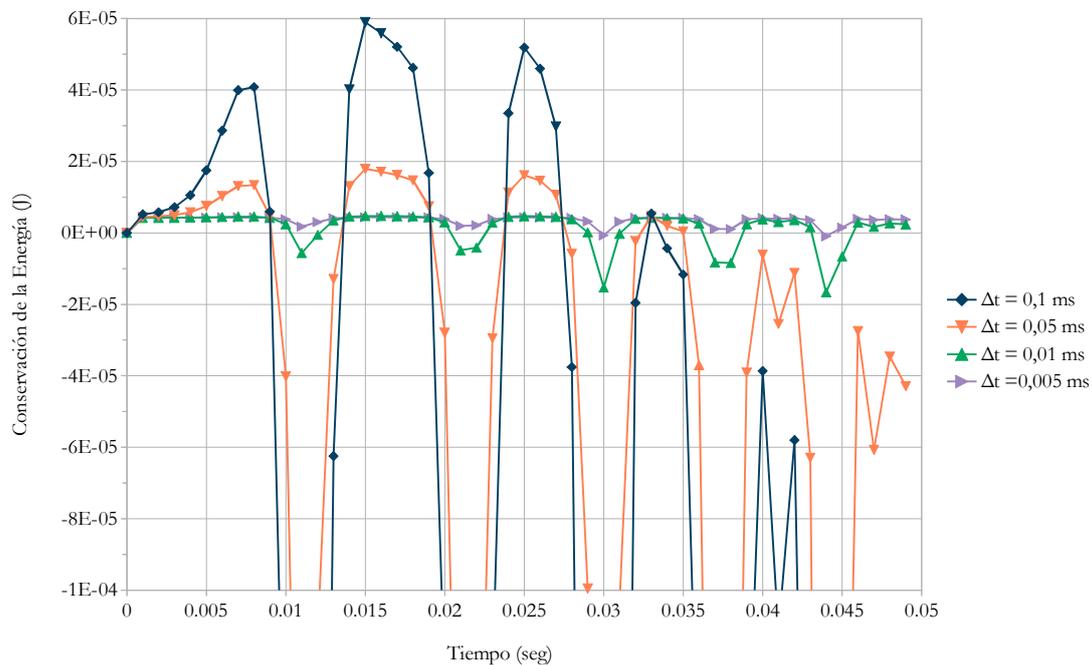


Figura 8.58: Conservación de la energía del sistema para diferentes Δt .

Para validar los resultados se van a emplear las soluciones que aparecen en la página del IFToMM. La solución 1 es la ofrecida por los autores y está realizada mediante la formulación de Lagrange aumentado con proyecciones de velocidad y aceleración. En esta simulación se ha empleado un paso de cálculo fijo de $1e-6$ segundos y una tolerancia de integración de $1e-12$. La

solución 2 por su parte, se ha realizado con el software OpenSim 3.2 y un paso variable con valores de $1e-4$ y $1e-5$. En la figura 8.59 se compara el desplazamiento en y del punto P de estas dos soluciones con la obtenida por el método DIMCD para $5e-6$ ms. Mientras que en la figura 8.60 se ha calculado la conservación de la energía del sistema de las tres simulaciones.

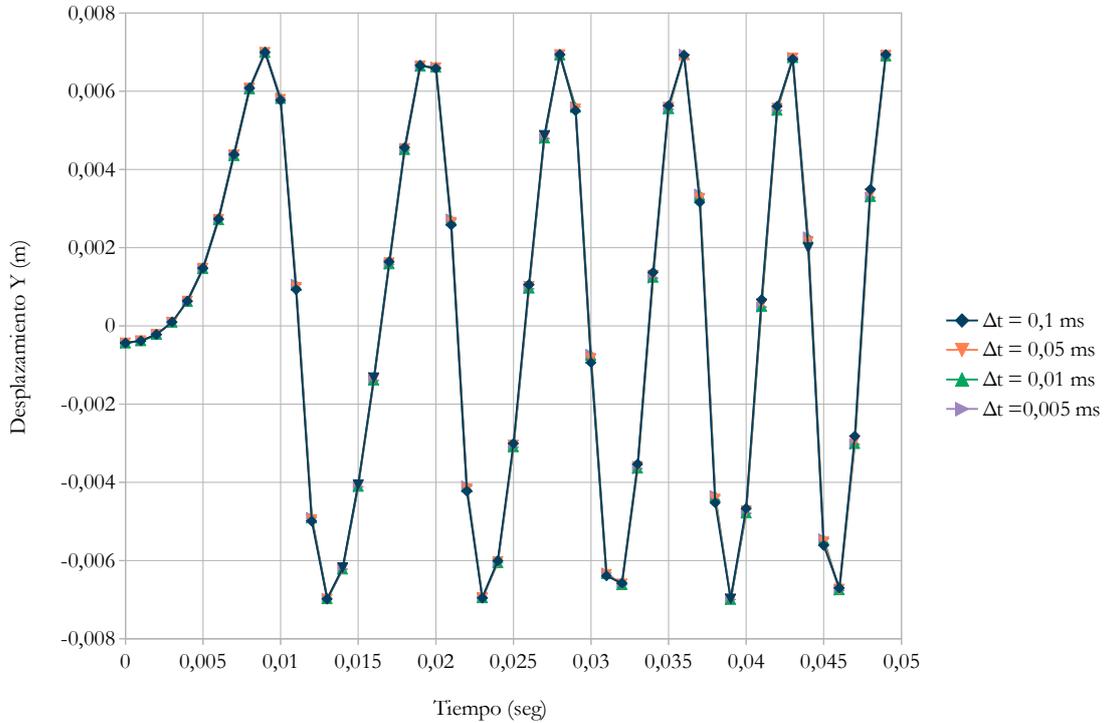


Figura 8.59: Posición del punto p del mecanismo de Andrew para diferentes formulaciones.

De la figura 8.60, lo primero que se puede observar es que las 3 simulaciones cumplen el criterio de calidad establecido. En cuanto al método DIMCD, se mantiene dentro de un rango salvo en ciertos puntos que corresponden con picos de aceleración del mecanismo. Los detalles de las simulaciones se resumen en la tabla 8.23 en la que se ha incluido el valor del desvío de la energía mecánica, e_{mec} .

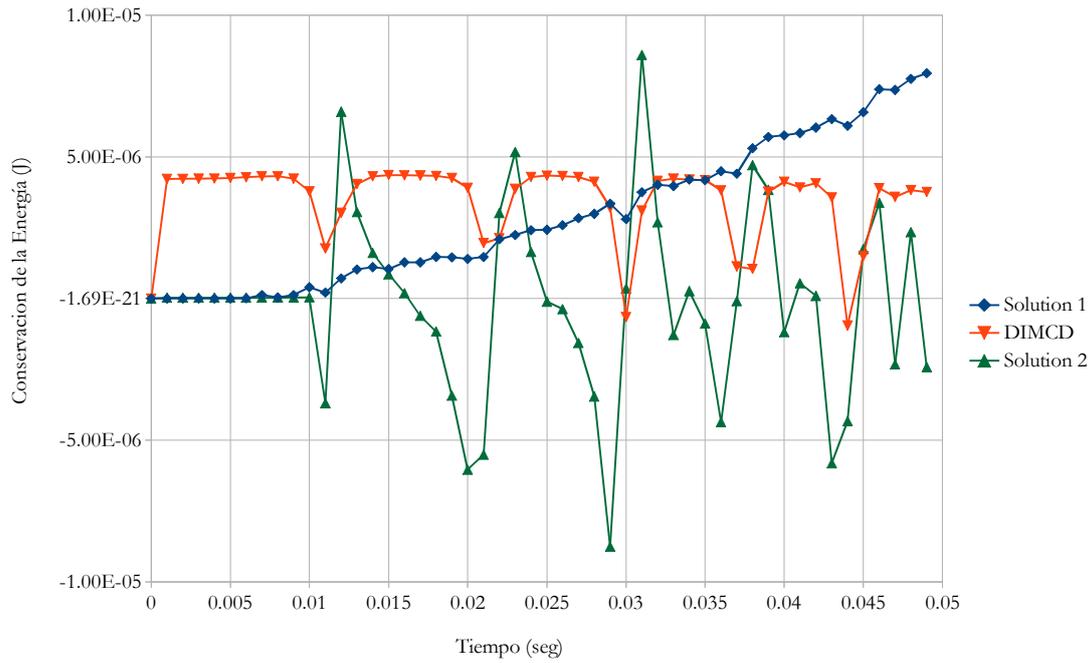


Figura 8.60: Conservación de la energía del sistema para diferentes formulaciones.

Modelo	Método	Integrador	Lenguaje	Paso	Δt (ms)	Error	e_{mec}	CPU (s)
Solución 1	Lagrange aumentado	TR	C++	Fijo	0,001	1e-12	2,2e-6	1,1
Solución 2	OpenSim 3.2	RKF	C++	Variable	0,1-0,001	-	3,7e-7	0,384
DIMCD	DIMCD	CD	GNU Octave	Fijo	0,005	1e-8	7,3e-6	986

Tabla 8.23: Detalles de las simulaciones.

En la figura 8.61 se muestra el cumplimiento de las restricciones de posición para el método DIMCD con 0,005 ms de paso de cálculo.

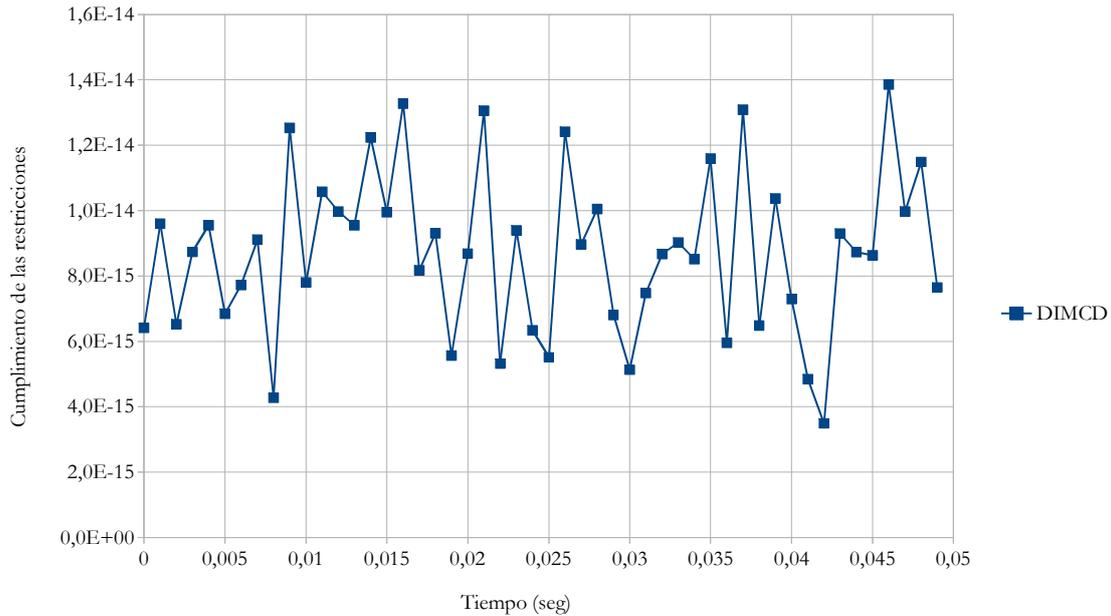


Figura 8.61: Cumplimiento de las restricciones para el método DIMCD.

8.11 Regulador centrífugo

El mecanismo de regulación centrífugo inventado por Huygens en el siglo XVII, se empleaba para ajustar la distancia y la presión entre las muelas en los molinos de viento. Posteriormente ya en el siglo XVIII, James Watt lo adaptó para emplearlo en el sistema de regulación del motor de vapor. Este mecanismo fue parte fundamental del desarrollo de la industria moderna y se conoce como “*Flyball Governor*”. El problema es una variación de aquel antiguo mecanismo, donde se han sustituido las barras por un sistema de muelle-amortiguador como se ve en la figura 8.62. Parte con una velocidad angular y se mueve bajo la acción de la gravedad. En la tabla 8.24 se han incluido las características fundamentales del ejercicio.

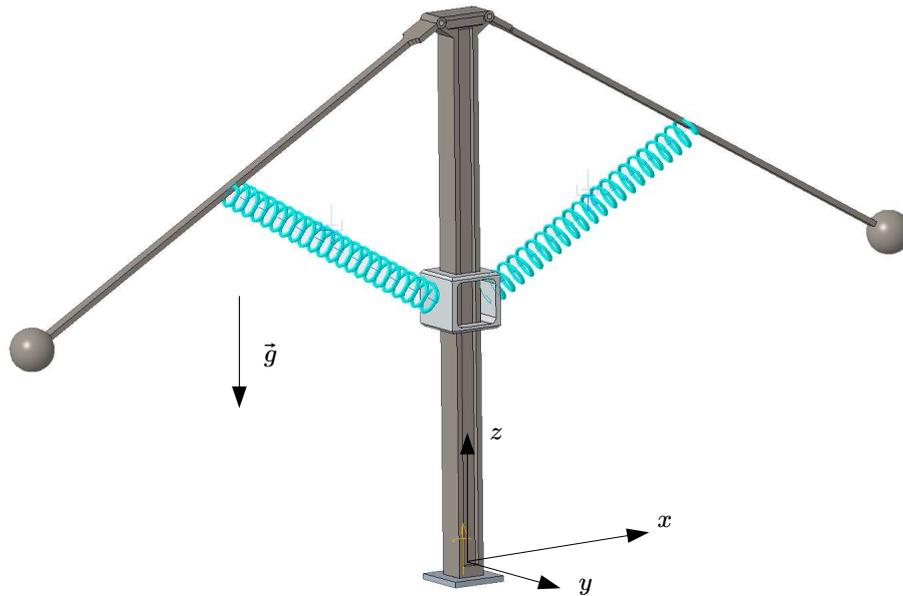


Figura 8.62: Imagen del Regulador centrífugo de bolas.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	VARIABLES DE INTERÉS
Espacial	10 seg.	Rotación Prismático	Gravedad	Desplazamiento de la deslizadera. Velocidad de la deslizadera. Aceleración de la deslizadera.

Tabla 8.24: Datos de la simulación del Regulador centrífugo.

Para comprobar la convergencia de la solución en las figuras 8.63 y 8.64, se muestran la velocidad y la aceleración de la deslizadera para diferentes pasos de cálculo obtenidas por el método DIMCD implementado en GNU Octave. Debido a que el error de integración es alto, la solución con 10 ms no representa correctamente la respuesta del mecanismo. Lo mismo ocurre en la solución para un paso de 5 ms, como se observa en la figura 8.64. A partir de 2,5 ms las respuestas se aproximan más a la solución supuesta.

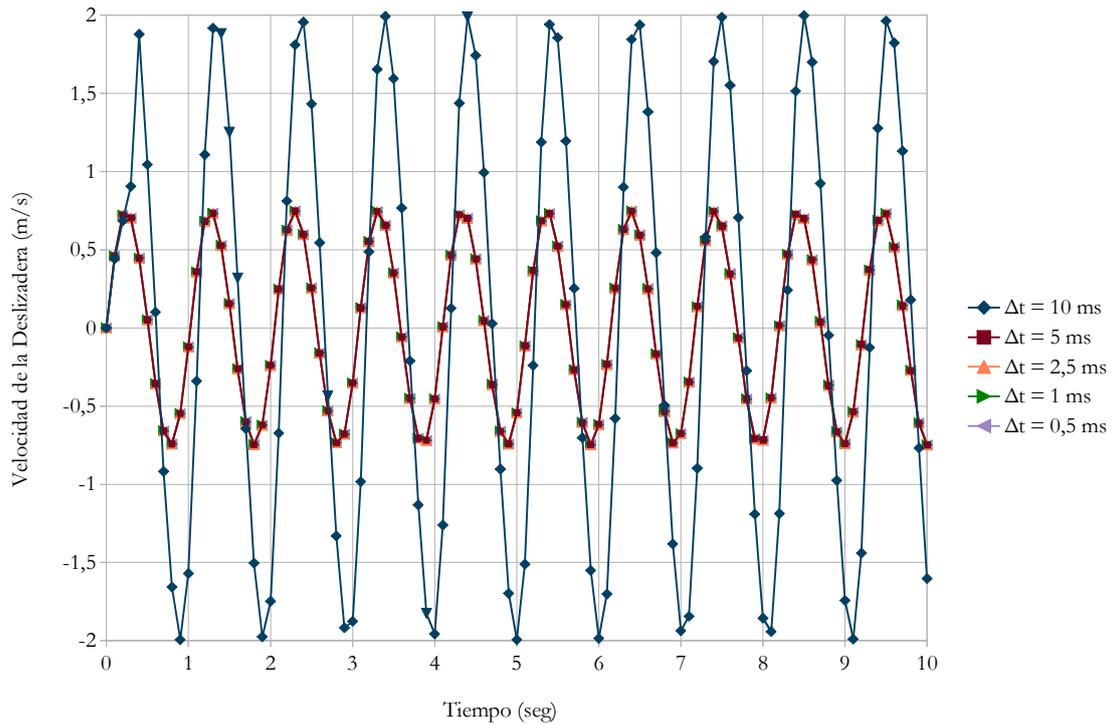


Figura 8.63: Velocidad de la deslizadera variando Δt en el método DIMCD.

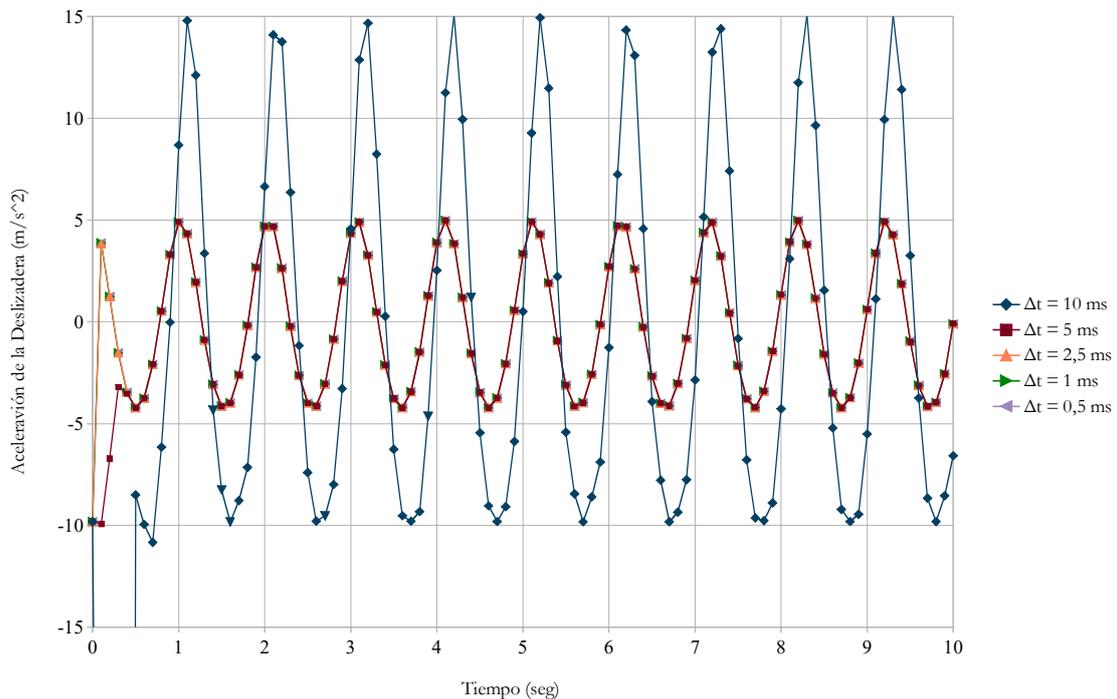


Figura 8.64: Aceleración de la deslizadera variando Δt en el método DIMCD.

El Regulador de vapor o “*Stiff Flyball Governor*”, se encuentra en la colección de problemas de referencia del IFToMM. Los autores del ejercicio sugieren un criterio de calidad, se ofrece la posición de la deslizadera desde el instante $t=0$ al $t=10$, para cada 0,1 s lo que representa 101 posiciones. Estos datos

obtenidos mediante Adams/Solver 12F77 sirven como valores de referencia para computar el error, a través de las ecuaciones (8.1) y (8.2), con $n=101$ y $m=1$. Este error e no debe ser superior a $1e-5$. En la figura 8.65 se muestra el valor de la solución de referencia del ejercicio.

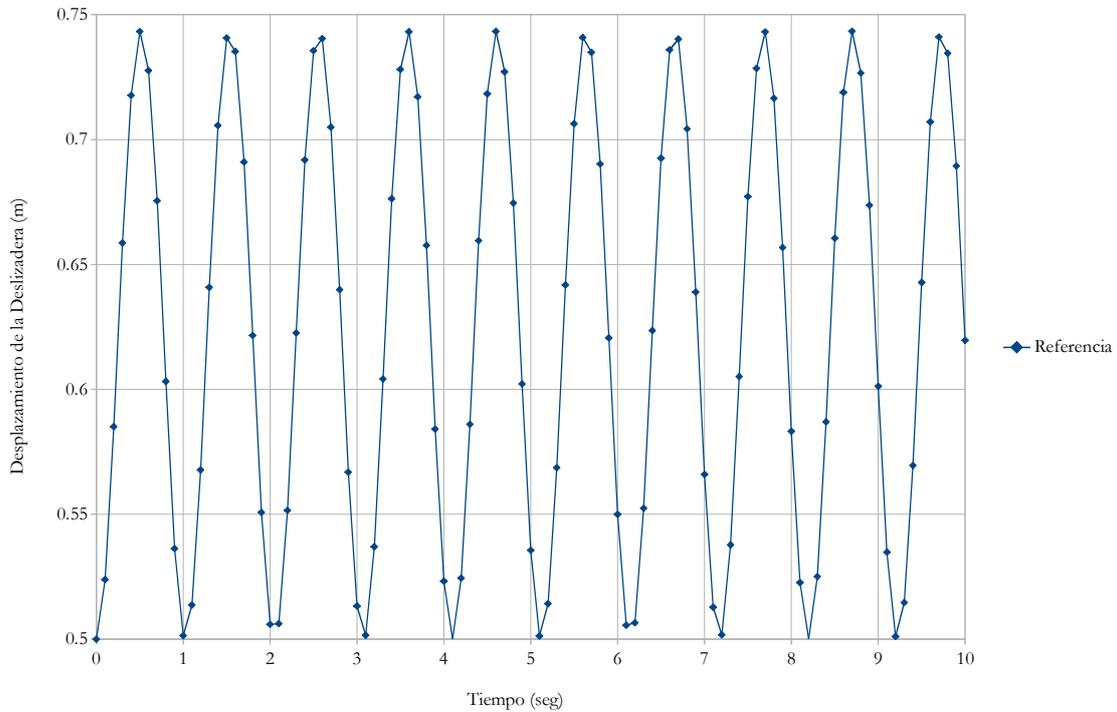


Figura 8.65: Datos de referencia para calcular el error e .

Si se calcula el error e con la solución obtenida para 2,5 ms, se obtiene un valor de $9,5e-5$ por lo que no cumple con el requisito de calidad. Para la solución con 1 ms el error es de $1,2e-5$, que a pesar de encontrarse muy cerca sigue siendo superior a $1e-5$. Finalmente, si se emplea el paso de cálculo de 0,5 ms el error tiene un valor de $4,7e-6$. Como se ha comprobado, atendiendo al requerimiento de calidad, la solución aceptable es la obtenida con un paso de cálculo de 0,5 ms. Resolviendo el problema con un software de carácter general como MSC Adams para diferentes integradores, el error obtenido con ellos no es inferior a $7e-4$, lo que queda lejos de lo exigido. En MSC Adams se ha buscado mejorar la calidad de la solución restringiendo el error de tolerancia de integración y disminuyendo el tiempo de paso de integración. Al emplear un paso pequeño el programa actúa disminuyendo el orden de integración en los métodos GSTIFF y WSTIFF por lo que no se aprecia una gran mejora. Si por el contrario, se relaja el tamaño de paso, el integrador actúa con un orden mayor pero al aumentar el paso no se consigue alcanzar la precisión requerida. Teniendo en cuenta estos aspectos, se ha mostrado el

mejor resultado alcanzado. Para el integrador HHT, al disminuir el paso de integración la precisión de los resultados aumenta; sin embargo, existe una limitación a la hora de escoger el mínimo valor del paso de integración, probablemente debido a que se emplea un enfoque basado en diferencias finitas. Esta limitación se manifiesta de la misma manera en los integradores GSTIFF y WSTIFF, al emplear un Δt menor que $1e-4$ los resultados empeoran sensiblemente. En la tabla 8.25, se recogen los detalles de las simulaciones, en ella también se ha incluido la solución 1 de la web del IFToMM, la cual ha sido desarrollada en el entorno MBSLab [170], mediante la formulación de Lagrange aumentado con un paso fijo de $5e-4$ s.

Modelo	Método	Integrador	Lenguaje Programación	Paso	Δt (ms).	Error	CPU (s)	e
Referencia	ABAM con parti. de coord.	-	-	Variable	-	-	0,195	0
Solución 1	Lagrange aumentado	TR	C++	Fijo	0,5	$1e-7$	0,853	$3,5e-6$
GSTIFF	MSC Adams	GSTIFF	-	Variable	0,1	$1e-8$	21	$7e-4$
WSTIFF	MSC Adams	WSTIFF	-	Variable	0,1	$1e-8$	27	$7,3e-4$
HHT	MSC Adams	HHT	-	Variable	0,1	$1e-8$	10	$7,6e-4$
DIMCD	DIMCD	CD	GNU Octave	Fijo	0,5	$1e-6$	2010	$4,6e-6$

Tabla 8.25: Resumen de las simulaciones del regulador de vapor.

El método DIMCD cumple las ecuaciones de posición en un orden de $1,4e-14$. En la figura 8.66 se muestra la violación de las ecuaciones de restricción para 101 puntos de la simulación.

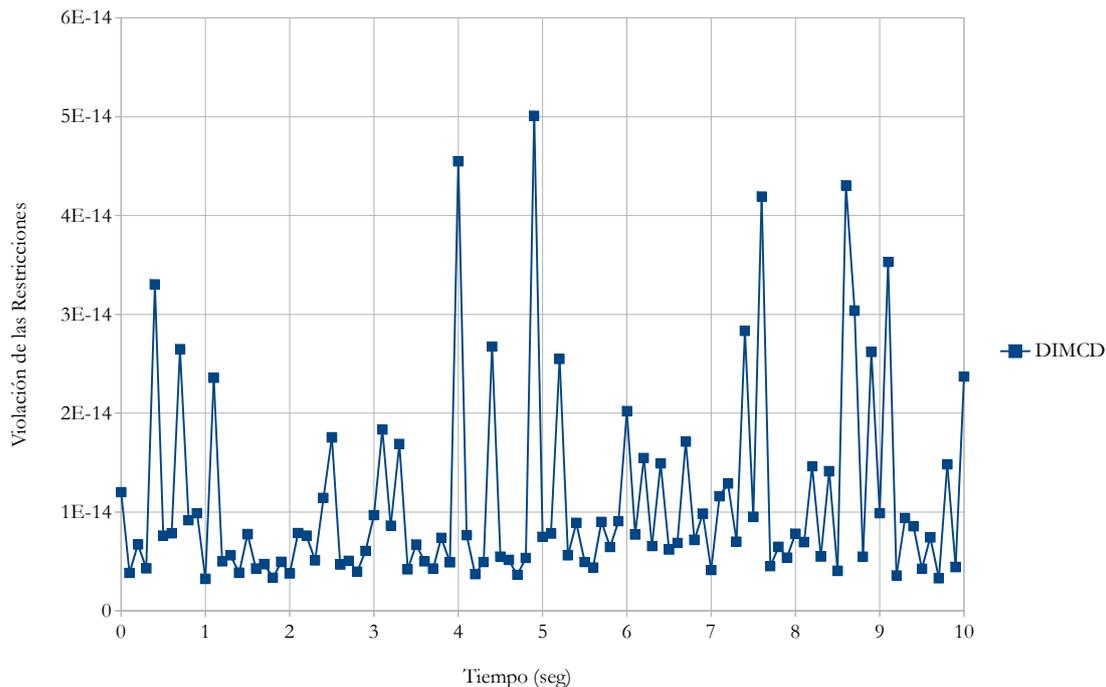


Figura 8.66: Cumplimiento de las restricciones a nivel de posición.

8.12 Bicicleta

Este ejemplo trata de simular el comportamiento dinámico de un bicicleta como la que se muestra en la figura 8.67. Se compone de cuatro elementos; la rueda trasera, el chasis, el manillar y la rueda delantera. El sistema de referencia global se sitúa en el contacto de la rueda trasera con el suelo, con el eje x en el sentido longitudinal y el eje z en dirección perpendicular al suelo y sentido descendente. Los elementos se unen entre sí mediante pares de revolución salvo el contacto de las ruedas con el asfalto que se ha modelizado con un par de rodadura. Bajo estas condiciones el sistema posee 3 grados de libertad; la velocidad de avance (“*forward velocity*”), el ángulo de inclinación (“*roll angle*” y el giro del manillar (“*steer angle*”).



Figura 8.67: Imagen de una bicicleta.

El sistema no gobernado, parte con unas condiciones iniciales bajo la acción únicamente de la gravedad. Según los autores del problema, la bicicleta es estable cuando la velocidad de avance se sitúa dentro del rango 4.29238253634111 y 6.02426201538837 m/s. Este modelo se encuentra dentro de los problemas de referencia del IFToMM y se trata de un buen ejemplo de sistema conservativo.

Siendo conocido el rango de estabilidad del modelo se propone realizar 3 maniobras. En todos los supuestos se parte con la bicicleta en posición vertical y con el ángulo del manillar recto para seguidamente, lanzar la bici con una velocidad de avance inicial y una velocidad angular de inclinación inicial que simula el efecto de la perturbación. En el primer análisis el valor de la velocidad de avance está por debajo del rango de estabilidad, en la segunda maniobra se sitúa dentro del rango y en la tercer el valor es superior. En la tabla 8.26 se recogen los detalles de las 3 maniobras. Mientras que en la tabla 8.27, se han resumido las características generales del problema.

Maniobra	Vel. Avance inicial	Vel. Ang. de inclinación inicial	Estabilidad
Maniobra 1	4,0	0,05	Por debajo del rango
Maniobra 2	4,6	0,5	Dentro del rango
Maniobra 3	8,0	0,05	Por encima del rango

Tabla 8.26: Características de las maniobras de la simulación.

Tipo	Duración	Pares	Fuerzas	Variables de interés
Espacial	20 seg.	Rotación Rodadura	Gravedad	Ángulo de inclinación. Giro del manillar Velocidad de avance. Energía mecánica.

Tabla 8.27: Detalles del problema.

Los autores del ejemplo especifican el siguiente criterio de calidad. Basándose en un porcentaje de la variación de la energía mecánica se establece que para la maniobra 2, el valor e calculado mediante la ecuación (8.5), debe ser inferior a $1e-3$.

$$e = 100 \cdot \frac{(\max(E_{mec}) - \min(E_{mec}))}{E_{mec}^0} \quad (8.5)$$

En las figuras 8.68 y 8.69, se muestran el ángulo de inclinación y la velocidad de giro del manillar obtenidas por el método DIMCD implementado en GNU Octave para diferentes incrementos de tiempo. Siguiendo el criterio de calidad establecido, la simulación con un incremento de tiempo de 25 ms obtiene un valor de $4,6e-3$. Este valor es superior al requisito marcado, sin embargo, sabiendo que el orden de precisión es de dos, si se reduce el paso de integración a 10 ms, el error debe dividirse del orden de 6,25. En efecto, se comprueba que el valor que toma la e para un paso de 10 ms es de $6,9e-4$, que ya cumple con la condición de calidad. A pesar de que la simulación con 10 ms es válida, se han realizado otras dos simulaciones con 5 y 1 ms, dando como resultado un error e de $1,6e-4$ y $6,2e-6$, respectivamente.

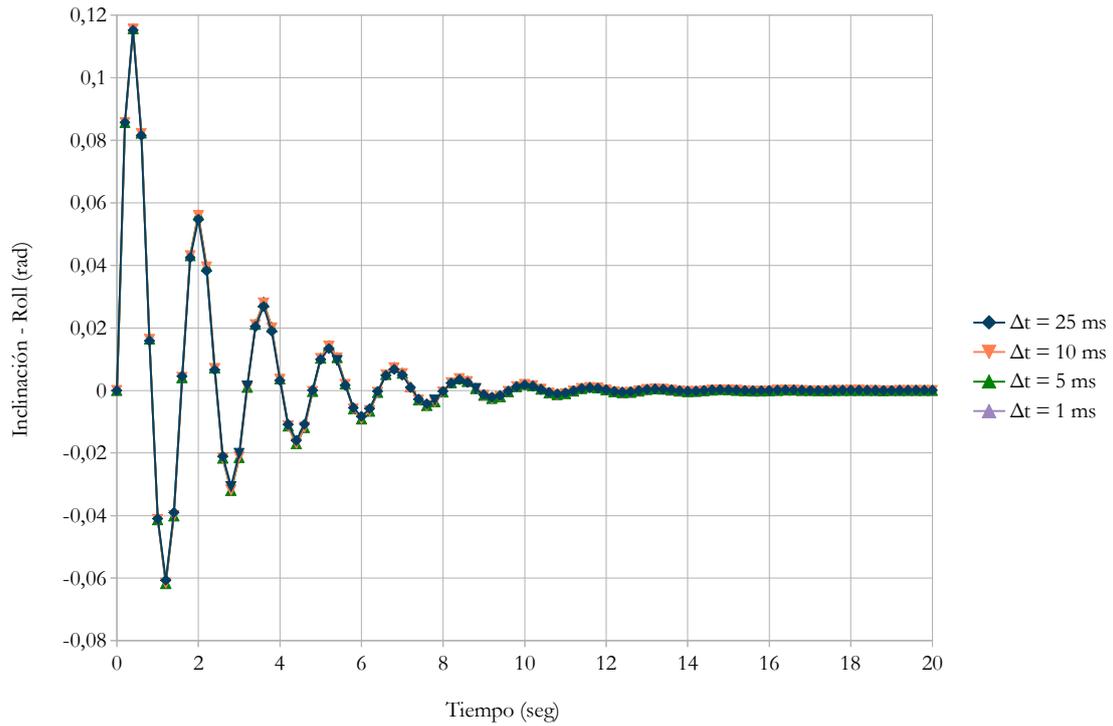


Figura 8.68: Ángulo de inclinación obtenido para diferentes Δt con el método DIMCD en la maniobra 2.

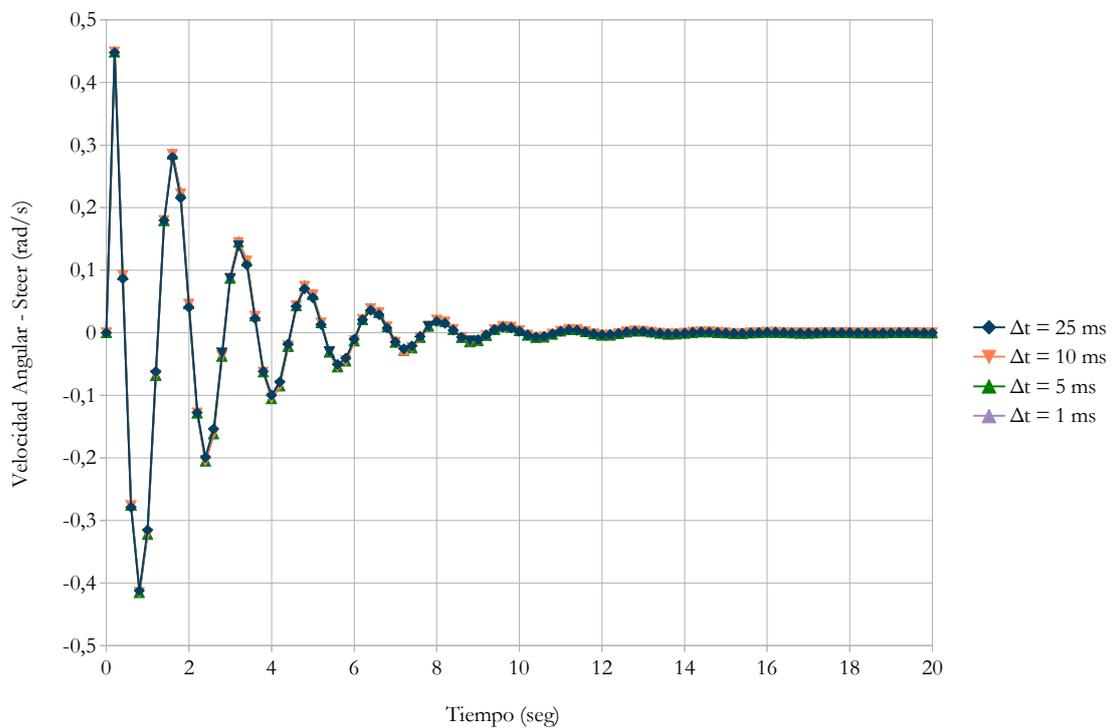


Figura 8.69: Velocidad de giro del manillar obtenida para diferentes Δt con el método DIMCD en la maniobra 2.

Aprovechando que se trata de un problema de referencia se puede cotejar los resultados con la solución 1, que es la proporcionada por el autor y con

una propuesta realizada por un segundo investigador, la cual se ha denominado solución 2. La solución 1, se ha obtenido con la biblioteca de simulación MBSLIM v2, con la formulación de matriz R y paso de cálculo de $1e-2$ s. Por su parte la solución 2 se ha realizado con MbsLab, empleando la formulación de Lagrange aumentado y un paso de cálculo de $1e-5$ s. En la figura 8.70, se muestra la velocidad de avance de estas dos soluciones y la obtenida por el método DIMCD para un paso de integración de $1e-2$ s.

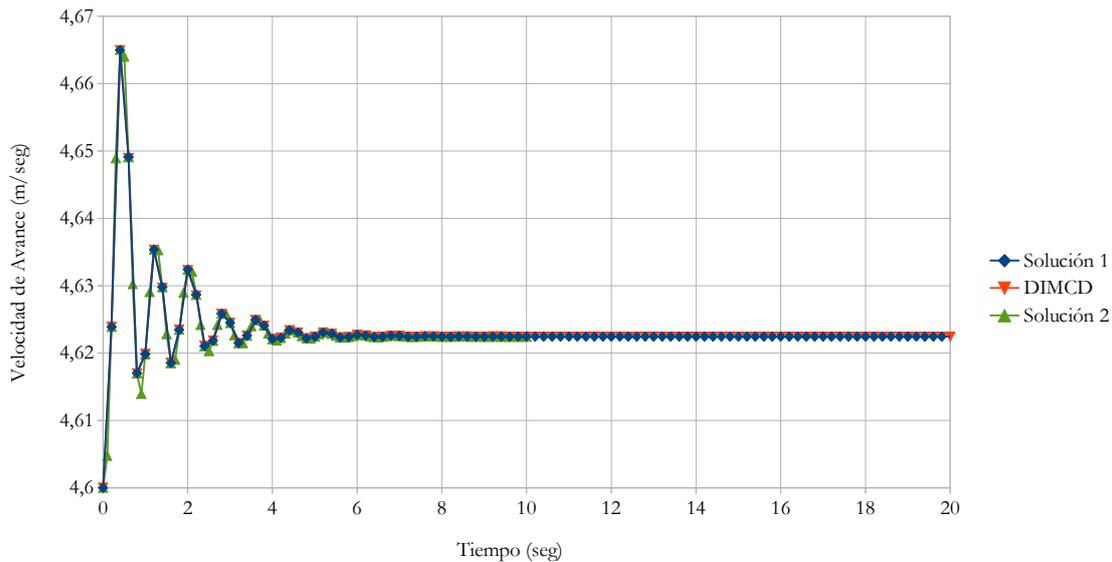


Figura 8.70: Velocidad de avance para la maniobra 2 .

De esta manera, se verifica la validez de los resultados obtenidos por el método DIMCD. En la tabla 8.28, se resumen los detalles de las simulaciones realizadas. Se observa que los resultados del método DIMCD se han mostrado muy competitivos en cuanto a precisión se refiere.

Modelo	Método	Integrador	Lenguaje	Paso	Δt (ms).	e	CPU (s)
Solución 1	Matriz R	TR	Fortran	Fijo	10	$9e-4$	0,681
Solución 2	Lagrange aumentado	TR	C++	Fijo	0,01	$8,5e-4$	26,2
DIMCD	DIMCD	CD	GNU Octave	Fijo	10	$6,9e-4$	362

Tabla 8.28: Comparación de las diferentes simulaciones.

Las ecuaciones de restricción a nivel de posición se cumplen con un error del orden de $4e-12$, como se observa en la figura 8.71. Para validar la maniobra 1, en las figuras 8.72 y 8.73 se compara el giro del manillar y el ángulo de inclinación del método DIMCD para 10 ms y la simulación de referencia. Se comprueba que para esa velocidad de avance, al introducir una pequeña perturbación la bicicleta se comporta de forma inestable.

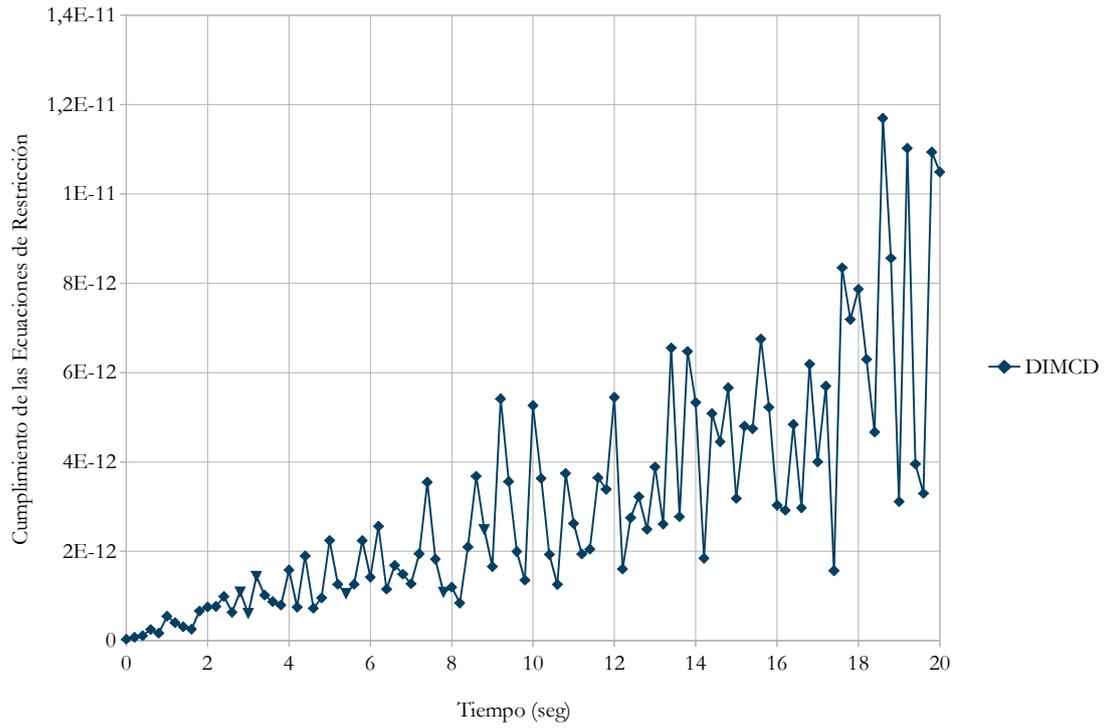


Figura 8.71: Cumplimiento de las ecuaciones de restricción en la maniobra 2.

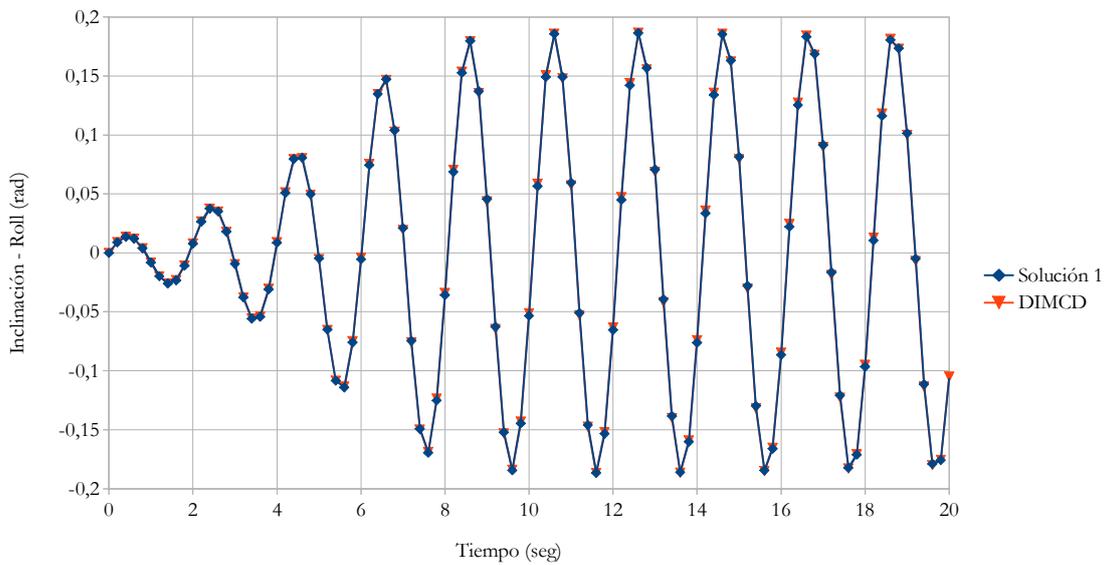


Figura 8.72: Ángulo de inclinación durante la maniobra 1.

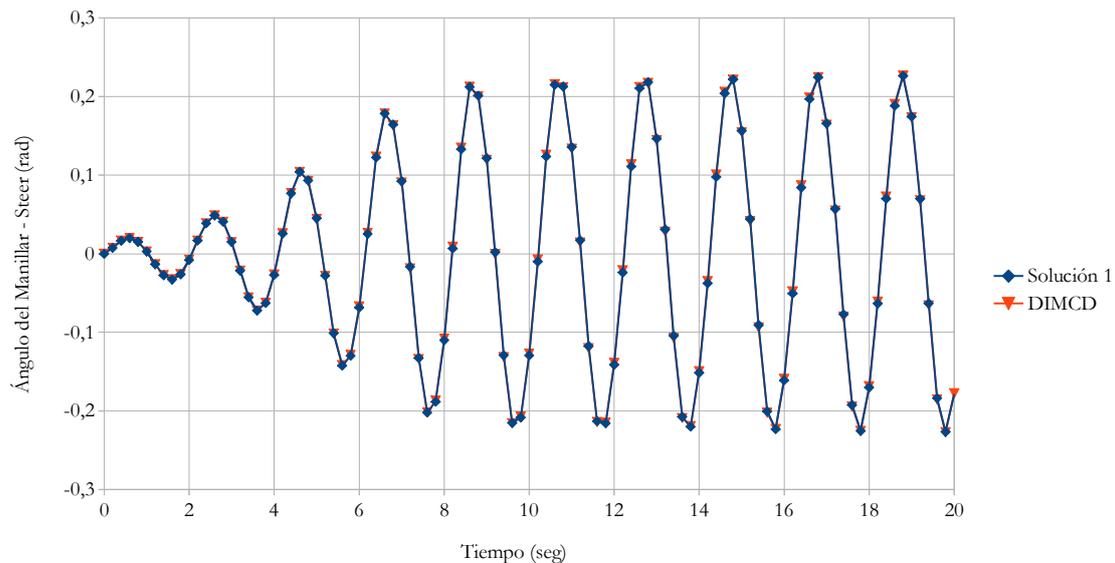


Figura 8.73: Giro del manillar durante la maniobra 1

Para la maniobra 3, la velocidad de avance estaba por encima del rango de estabilidad y de la misma manera el sistema debe ser inestable ante cualquier perturbación. En las figuras 8.74 y 8.75 se muestra la velocidad de avance y el ángulo de inclinación de las simulaciones de referencia y del método DIMCD para 10 ms. Se verifica la validez de la simulación y a su vez se observa como el ángulo de inclinación crece suavemente confirmando que el comportamiento del sistema tiende a desestabilizarse.

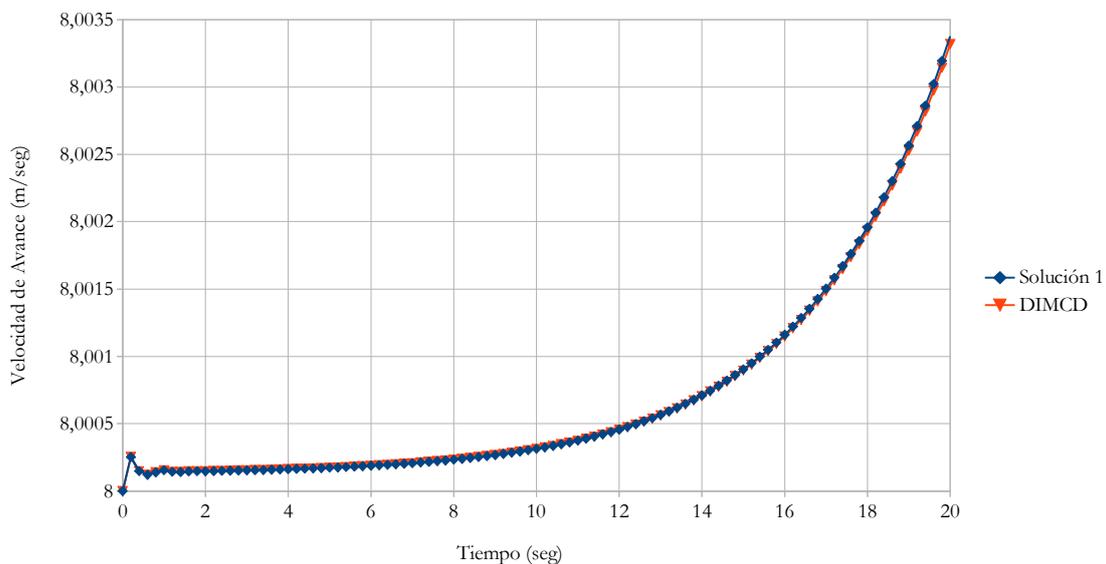


Figura 8.74: Velocidad de avance durante la maniobra 3.

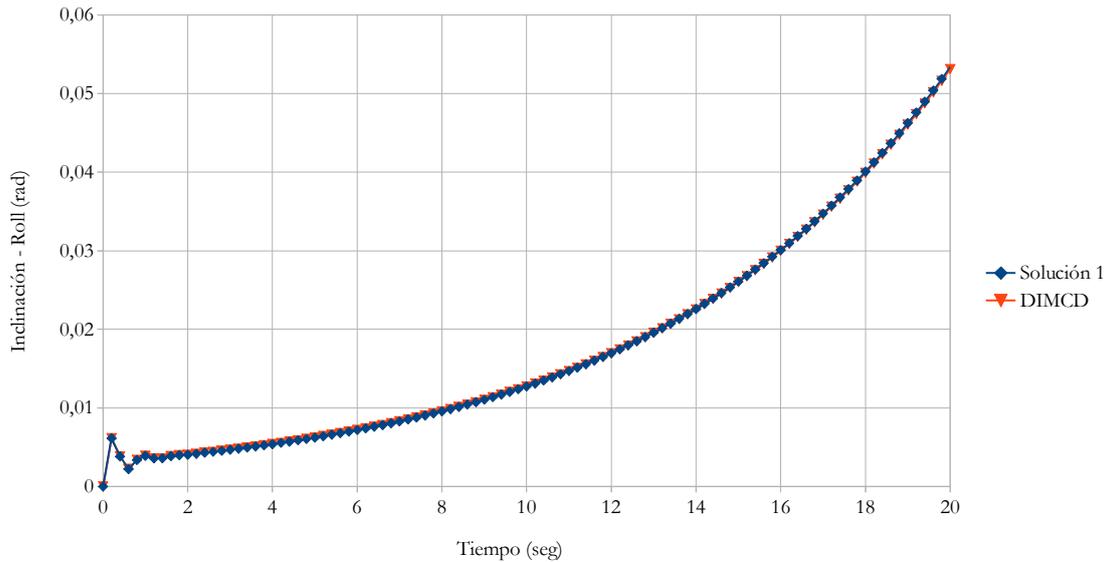


Figura 8.75: Ángulo de inclinación durante la maniobra 3.

8.13 Implementación en el lenguaje C

Se ha comprobado la validez de la metodología desde un punto de vista de la calidad de los resultados. Sin embargo, hasta ahora el desarrollo se ha centrado en la verificación del método y en la estabilidad. Por lo tanto, para comprobar que además de proporcionar soluciones correctas es también competitivo en términos de eficiencia computacional se ha implementado la metodología en un lenguaje compilado. Dicha implementación se ha realizado según se ha descrito en el capítulo 7 dedicado a la optimización, empleando matrices densas. Únicamente se ha incluido, hasta el momento, el par esférico y el par de rotación; sin embargo, esto es suficiente para comprobar la eficiencia del método descrito en esta tesis doctoral.

Para comprobar la eficiencia se han resuelto tres ejemplos de referencia de la colección de problemas del IFToMM: el péndulo, el mecanismo de Bricard y el doble cuadrilátero articulado. De estos tres ejemplos se van a aportar los datos de soluciones realizadas por otros investigadores. También se ha añadido un cuarto problema que es el de la peonza. En las tablas 8.29, 8.31, 8.33 y 8.35 se muestran las características de los computadores en los cuales se han ejecutado las simulaciones. Como parámetro indicativo, se incluye una medida del comportamiento del procesador según la prueba de rendimiento GeekBench 4, así como el ratio comparativo tomando como referencia el computador Intel Xeon E5345, siendo éste el usado para simular el método DIMCD. Existen otras pruebas de rendimiento más adecuadas como

SPECfp; sin embargo, no se han encontrado datos referentes al rendimiento con un solo núcleo para todos los ordenadores.

8.13.1 Peonza

En la tabla 8.30 se muestran los resultados de las simulaciones del método DIMDC en GNU Octave y en lenguaje C. Se puede apreciar que el tiempo de computación se ha reducido de 59 a 0,82 segundos. Además, se han incluido las simulaciones realizadas con MSC Adams para los integradores GSTIFF y WSTIFF.

Método	CPU	Fecha	Geekbench	Ratio	Sistema operativo
GSTIFF	Intel Xeon E5345 @ 2.33 GHz 32 Gb RAM	2008	1500	1	Windows 10 Pro 64 bit
WSTIFF	Intel Xeon E5345 @ 2.33 GHz 32 Gb RAM	2008	1500	1	Windows 10 Pro 64 bit
DIMCD	Intel Xeon E5345 @ 2.33 GHz 32 Gb RAM	2008	1500	1	Windows 10 Pro 64 bit

Tabla 8.29: Características de la computadora para el problema del peonza.

Método	Modelo	Coord.	Paso	Δt (ms)	Lenguaje	Orden de int.	Error tol.	CPU (s)
GSTIFF	MSC Adams	Generales	variable	0,2-0,5	-	6	1e-6	3
WSTIFF	MSC Adams	Generales	variable	0,1-0,5	-	6	1e-6	3
DIMCD	DIMCD	Generales	fijo	0,5	Octave	2	1e-6	59
DIMCD	DIMCD	Generales	fijo	0,5	C	2	1e-8	0,08

Tabla 8.30: Resumen de las simulaciones de la peonza.

Los dos integradores de Adams tienen un orden de precisión variable desde 2 a 6 y emplean tamaños de paso también variable aunque se ha fijado el máximo en 0,5 ms. El computador ha sido el mismo para todas las simulaciones siendo los tiempos de CPU de las realizadas con Adams bastante más lentos que las del método DIMCD.

8.13.2 Péndulo

Los detalles de las simulaciones se han resumido en la tabla 8.32, donde la magnitud e_{mec} representa la conservación de la energía mecánica del sistema. Se trata de un problema ideal para resolver por coordenadas independientes debido a su simplicidad.

Método	CPU	Fecha	GeekBench	Ratio	Sistema operativo
Solución 1	Intel Core i5-4250U @ 1.30 GHz 1.90 GHz 8 Gb RAM	-	3000	2	Windows 8.1 Pro 64 bit
Solución 2	Intel Core i5-4570 @ 3.2 GHz	-	4100	2.73	Windows 8.1 64 bit
Solución 3	Intel Core-i7-4790K @ 4.00 GHz	-	5000	3,33	Windows 10 Pro 64 bit
DIMCD	Intel Xeon E5345 @ 2.33 GHz 32 Gb RAM	2008	1500	1	Windows 10 Pro 64 bit

Tabla 8.31: Características de las computadoras en el problema del péndulo.

Método	Modelo	Coord.	Integrador	Paso	Δt (ms)	Lenguaje	e_{mec}	CPU (s)
Solución 1	MbsLab	Naturales	TR	fijo	1	C++	6e-4	0,53
Solución 2	OpenSim	Naturales	BDF	variable	1-1e-3	C++	4e-11	0,637
Solución 3	Biolim alpha	Relativas	TR	fijo	1	C++	9,17e-6	0,0254
DIMCD	DIMCD	Generales	DC	fijo	1	Octave	3,6e-5	150
DIMCD	DIMCD	Generales	DC	fijo	1	C	2,8e-5	0,23

Tabla 8.32: Detalles de las simulaciones del péndulo.

La solución 3, Biolim alpha emplea coordenadas independientes relativas, como ya se ha comentado es un acierto para este tipo de problema pero no es aplicable para una metodología de propósito general. La solución 2 ofrece un buen comportamiento gracias en gran parte al uso de tamaños de paso variable. Este hecho también dificulta establecer una comparación con un método de paso fijo. El resultado de DIMDC es bastante bueno, superior a las soluciones 1 y 2, si bien es cierto que la solución 3 debe realizar un mayor número de iteraciones.

8.13.3 Doble cuadrilátero articulado

En la tabla 8.34 se detallan las características de las simulaciones. De la misma manera que para el problema del péndulo, se incluye el valor de la conservación de la energía mecánica e_{mec} . De este ejercicio existe un gran número de contribuciones en la web del IFToMM; sin embargo, la mayoría de ellas son realizadas mediante algoritmos específicos para este problema basados en coordenadas mínimas, por lo que no se puede hacer una comparación equitativa y no se han incluido toda ellas.

Modelo	CPU	Fecha	GeekBench	Ratio	Sistema operativo
Solución 1	Intel Core 2 DUO E6550 @ 2.33 GHz	-	1400	0,93	Windows XP SP3
Solución 2	Intel Core 2 Duo E8400 @ 3.00 GHz	-	1900	1,26	Windows 7 Enterprise SP1
Solución 3	BeagleBone Black – ARM Cortex A8 @ 1GHz	-	-	-	Ubuntu 13.10
Solución 4	Intel(R) Core(TM) i7-2620M CPU @ 2.70GHz	-	3000	2	Ubuntu 11.10 64 bit
Solución 5	Intel Core i5-4570 @ 3.2 GHz	-	4000	2,66	Windows 8.1 64 bit
DIMCD	Intel Xeon E5345 @ 2.33 GHz 32 Gb RAM	2008	1500	1	Windows 10 Pro 64 bit

Tabla 8.33: Características de las computadoras para el doble cuadrilátero articulado.

Modelo	Método	Coord.	Integrador	Lenguaje	Paso	Δt (ms)	e_{mec}	CPU (s)
Solución 1	MbsLab	Naturales	TR	Matlab	fijo	10	0,0917	0,6
Solución 2	MbsLab	Naturales	TR	C++	fijo	10	0,0917	0,145
Solución 3	OpenMBS	Naturales	TR	C++	fijo	10	0.0877	0,1278
Solución 4	MBDyn	-	-	-	fijo	8	0,09	0,325
Solución 5	OpenSim 3.2	Naturales	RKF	C++	variable	1-10	3,2e-7	0,455
DIMCD	DIMCD	Generales	DC	Octave	fijo	10	0,039	98
DIMCD	DIMCD	Generales	DC	C	fijo	15	0,088	0,26

Tabla 8.34: Detalles de las simulaciones del doble cuadrilátero articulado.

La solución 5 es la que menor error comete pero el haber reducido el desvío en la conservación de la energía mecánica le penaliza en el coste computacional. En este sentido el que menor tiempo consume es la solución 3, el cual emplea coordenadas naturales en 2D lo que es una ventaja considerable. Las soluciones 1 y 2 son las más adecuadas para comparar con DIMCD. De estas dos la solución 2 es más eficiente que DIMCD, aunque hay que destacar que trabaja con coordenadas naturales y en principio su número de incógnitas es 18 frente a las 42 de DIMCD. Además las prestaciones del computador son algo mejores.

8.13.4 Mecanismo de Bricard

Los datos de las simulaciones del mecanismo de Bricard se resumen en la tabla 8.36.

Modelo	CPU	Fecha	Geekbench	Ratio	Sistema operativo
Solución 1	Intel Core i7-3770 @ 3.40 GHz	-	4000	2,66	Windows 7 Enterprise SP1 64 bit
Solución 2	Intel Core i5-4570 @ 3.2 GHz	-	4100	2,73	Windows 8.1 64 bit
DIMCD	Intel Xeon E5345 @ 2.33 GHz 32 Gb RAM	2008	1500	1	Windows 10 Pro 64 bit

Tabla 8.35: Características de las computadores para el mecanismo de Bricard.

Modelo	Método	Coord.	Integrador	Lenguaje	Paso	Δt (ms)	e_{mec}	CPU (s)
Solución 1	Lagrange aumentado	Naturales	TR	C++	fijo	5	8e-4	0,125
Solución 2	OpenSim 3.2	Naturales	BDF	C++	variable	10-1	9,6e-7	0,258
DIMCD	DIMCD	Generales	DC	Octave	fijo	10	3,6e-4	89
DIMCD	DIMCD	Generales	DC	C	fijo	10	3,5e-4	0,32

Tabla 8.36: Resumen de las simulaciones del mecanismo de Bricard.

La solución 2 usa un tamaño de paso variable lo que hace difícil establecer una comparación. Tanto la solución 1 como la 2 emplean coordenadas naturales que implican unas 18 incógnitas, por su parte DIMCD usa coordenadas generales con el cuaternión unitario lo que son 42 incógnitas para este problema. Esto más las diferencias de las características de los computadores hacen que sus tiempos sean más eficientes, pero en cualquier caso queda acreditada la competitividad del método DIMCD.

PARTE IV: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

9 Conclusiones

Una vez expuesta la metodología y tras ser verificada mediante varios ejemplos numéricos, en este apartado se van a comentar ciertos aspectos que destacan en el proceso:

- Se ha desarrollado una metodología para la integración de las ecuaciones de la dinámica de sistemas compuestos por sólidos rígidos. El sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden se resuelve directamente aplicando el método de diferencias centrales como método de integración de orden dos. Como resultado, se logra plantear las ecuaciones de equilibrio en función únicamente del valor de los desplazamientos en tres instantes de tiempo consecutivos. Con ello se mantiene las dimensiones del sistema sin tener que duplicarlo para reducir el orden diferencial.

Ahora el vector de variables está compuesto solo por desplazamientos y una vez resuelto el problema de posición, las velocidades se obtienen sustituyendo los valores de los desplazamientos en la correspondiente ecuación del método de diferencias centrales. Las aceleraciones se pueden calcular de la misma forma, si bien es cierto que a diferencia de las velocidades, no es necesario conocer el valor de la aceleración en cada instante de tiempo para la resolución numérica del problema.

- En este procedimiento, las ecuaciones de restricción se implementan en el sistema de ecuaciones exclusivamente a nivel de posición. Dichas ecuaciones son, en la mayoría de los casos, función de las variables de posición, de forma que se cumplen en cada paso de integración hasta donde la precisión de la máquina permite. Esto es posible debido a que el vector de variables no contiene velocidades ni aceleraciones, en cuyo caso hubiera sido necesario introducir las ligaduras en términos de velocidad o aceleración. Por tanto, no es imprescindible aplicar técnicas de estabilización para suprimir errores de ensamblajes.

Adicionalmente, este hecho no impide introducir restricciones de velocidad. Como se ha visto en el par de rodadura, cuando las restricciones afecten a la velocidad, ésta se puede plantear en función de los desplazamientos e introducir en el sistema como una restricción de posición más.

- El equilibrio de las ecuaciones no lineales de la dinámica se resuelve en cada instante de tiempo aplicando el método de Newton exacto. En el esquema de diferencias centrales la velocidades dependen de los desplazamientos en el siguiente paso de integración, de modo que la no linealidad es consecuencia del producto cruzado de las velocidades angulares. Matemáticamente, el método de Newton se aproxima a la solución con una convergencia cuadrática, lo que significa que con cada nueva iteración se dobla el número de decimales exactos. Dicha convergencia permite alcanzar el error de tolerancia de integración con un número relativamente bajo de iteraciones. De tal modo que se aumenta la precisión de la solución sin que ello suponga una disminución de la eficiencia. El orden de convergencia del método de Newton se ha podido verificar mediante la resolución de varios ejemplos.

No obstante, la convergencia de dicho método no está asegurada, es decir, no se garantiza que las soluciones converjan si se parte de un valor inicial muy alejado de la raíz. Para evitar este problema se puede calcular primera aproximación del valor $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ usando los valores del instante t . Aunque, como se ha comprobado en los problemas resueltos, el valor del desplazamiento en el instante anterior está lo suficientemente próximo para usarlo como valor inicial y garantizar la convergencia.

- Se ha verificado a través de diferentes aplicaciones numéricas que el rango de estabilidad del método de integración es suficientemente amplio para no generar problemas. En condiciones lineales, la estabilidad de un método de integración explícito está condicionada por el valor de la frecuencia natural más alta del sistema. A falta de un estudio para funciones no lineales, se pueden extrapolar los resultados de dicho análisis de estabilidad a condiciones de no linealidad. En este sentido, los tamaños de paso empleados, similares a los usados por integradores implícitos, se han mantenido lejos del límite de estabilidad.

En los problemas resueltos, el paso de cálculo viene establecido por la representación de la respuesta, es decir, el máximo tamaño de paso está determinado por el error de integración. Para el método de diferencias centrales el error se reduce de manera cuadrática al disminuir el tamaño del paso, hecho éste que ha sido verificado.

- El conjunto de restricciones, formadas por ecuaciones algebraicas no lineales, se introducen en el sistema aplicando el método del subespacio nulo. Para poder implementarlas correctamente sin afectar a la convergencia del proceso, se han linealizado sustituyendo las funciones de restricción por su desarrollo en series de Taylor truncado. Ya que las restricciones afectan a los desplazamientos en el siguiente instante de tiempo, se deben actualizar para cada nueva aproximación surgida del proceso iterativo dentro del instante de tiempo t .

El cumplimiento de la norma del cuaternión unitario es un aspecto importante para el desarrollo del método. Por consiguiente, la norma se ha implementado como una ligadura más, debido a que las restricciones imperan sobre las ecuaciones de equilibrio. Es importante tener en cuenta que durante el proceso iterativo dentro del instante t , cuando se obtiene una nueva aproximación de $\mathbf{x}(t+\Delta t)$, puede que esos parámetros del cuaternión no cumplan estrictamente la norma. Es decir, las soluciones se aproximan hacia la norma pero por el camino existe un error. Este error afecta a las restricciones de coordenadas, principalmente a la matriz de rotación. Por ello, al ir obteniendo las nuevas aproximaciones de $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ es interesante normalizar los cuaterniones sobre todo cuando en las restricciones aparecen productos de matrices de rotación.

- Las fuerzas de restricción se han eliminado de la ecuación de equilibrio planteando un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, cuya matriz está formada por los vectores de las direcciones de los esfuerzos de restricciones en función de los desplazamientos y de los giros. La solución de dicho sistema son todos los posibles desplazamientos infinitesimales compatibles con las restricciones del sistema. De tal forma que el subespacio nulo de dicha matriz permite proyectar las ecuaciones de equilibrio sobre los grados de libertad del sistema, eliminando las reacciones que producen las ligaduras y las ecuaciones afectadas por dichas reacciones.

Al haber empleado un método explícito, el equilibrio se plantea en el instante t , donde la variable $\mathbf{x}(t)$ es conocida. Los esfuerzos y por consiguiente, las direcciones de esos esfuerzos son válidos para todo el instante t y no hay que recalcularlos en el proceso iterativo.

El sistema de ecuaciones resultante tras introducir las condiciones de contorno y eliminar las ecuaciones afectadas por las ligaduras tiene las mismas dimensiones que el número de grados de libertad del sistema.

- Los elementos discretos se han implementado como una fuerza generada entre dos puntos. La fuerza producida por los elementos elásticos dependen del valor del desplazamiento en el instante t , el cual es conocido, por lo que su implementación no plantea ningún problema. Sin embargo, en términos de estabilidad, cuando aumenta la constante de rigidez también aumenta la frecuencia natural del sistema, lo que podría afectar a la estabilidad del método de integración. En este aspecto, no ha sido necesario reducir el tamaño de paso en ninguno de los ejemplos numéricos realizados por motivos de estabilidad.

La fuerza generada por los elementos disipativos en cambio dependen de la velocidad, la cual depende del valor de los desplazamientos en el siguiente paso de integración. De manera que es preciso introducirlos en el sistema de forma matricial, extrayendo el vector de velocidad y agrupando en un matriz las componentes proporcionales a ésta.

- La implementación de la metodología en GNU Octave ha permitido verificar la validez del método, centrándose principalmente en la precisión y la estabilidad. Adicionalmente al propio desarrollo del método, se han detectado ciertas relaciones entre matrices y vectores dentro del esquema de diferencias centrales, las cuales posibilitan optimizar la implementación. En tal sentido, para poder demostrar la eficiencia, se ha implementado en un lenguaje de programación compilado.
- Los resultados de la implementación en lenguaje C han demostrado que se trata de un método de resolución de las ecuaciones de la dinámica para sistemas multicuerpo enormemente competitivo. Pese a tratarse de una metodología de propósito general, en la cual cada sólido se define con siete variables y de haberse empleado matrices densas, el comportamiento en problemas con un número reducido de elementos es muy bueno. Resulta palpable que aspectos como la aplicación de un

método explícito y la integración directa de las ecuaciones diferenciales de segundo orden contribuyen a reducir el coste computacional.

10 Líneas futuras

Evidentemente, el campo de la dinámica de sistemas multicuerpo abarca una gran cantidad de aspectos, alguno de los cuales ha quedado fuera del alcance del presente documento. En este capítulo se van a enumerar cuales serán los siguientes pasos derivados de la presente investigación:

- El método ha sido implementado en GNU Octave para verificar su validez y en este sentido, ha quedado garantizada con varios ejemplos numéricos. Adicionalmente, el método también se ha implementado en lenguaje C; sin embargo, todavía no se han introducido todos los pares. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, los primeros pasos tienen que ir encaminados a ir desarrollando los pares restantes e introducir elementos discretos en la implementación en C.
- Según se ha planteado la metodología el incremento de tiempo es fijo, lo cual supone un inconveniente en casos donde la variación de las fuerzas sea muy brusca. En tales casos sería muy útil contar con un tamaño de paso que varíe en función de las características del problema. Para ello, una de las alternativas es realizar el planteamiento en función de las velocidades. De este planteamiento surge un problema, las restricciones habría que aplicarlas al término $\dot{x}(t)$ y, por consiguiente, las restricciones impuestas serían en velocidad y no en desplazamientos.

Una segunda opción es plantear las diferencias centrales teniendo en cuenta esa variación de Δt . De esta manera las ecuaciones de equilibrio se plantean en función de los desplazamientos y, por lo tanto, las restricciones se introducen únicamente en términos de posición.

- Cuando se plantean sistemas con varios elementos, la dimensión de las matrices aumenta linealmente; sin embargo, el número de ceros de estas matrices lo hace de manera más o menos cuadrática. Desde un punto de vista de la eficiencia, resulta una opción interesante aplicar algún tipo

de técnicas de matrices dispersas sobre todo en sistemas formados por un gran número de cuerpos.

- Hasta ahora se ha integrado la ecuación con un método explícito, es conocido que en general los métodos explícitos tienen menor rango de estabilidad que los implícitos. Por ello puede resultar interesante desarrollar una metodología con un integrador implícito como el método de Newmark y comparar ambos métodos.

La desventaja radica en que para mantener la convergencia cuadrática, la no linealidad afecta a un mayor número de términos por lo que el proceso de linealización es más laborioso.

- Se ha usado el cuaternión unitario para definir la orientación del cuerpo. Las ventajas del cuaternión unitario son la ausencia de singularidades, evitar tener que emplear funciones trigonométricas y que en el proceso de linealización no aparece un producto de las velocidades cruzadas para la segunda derivada. En cambio, se trabaja con cuatro parámetros más la ecuación de la norma, la cual se debe cumplir en todo momento para no padecer problemas con la matriz de rotación y con el rango de la matriz de restricciones. Para disminuir el número de incógnitas resultaría interesante plantear una manera diferente de definir la orientación como pueden ser los ángulos de Euler o usar coordenadas naturales y realizar un estudio sobre su influencia.

Bibliografía

- [1] J.E. Shigley, Shigley's mechanical engineering design, Tata McGraw-Hill Education, 2011.
- [2] R.C. Juvinall, K.M. Marshek, Fundamentals of machine component design, Wiley New York, 2000.
- [3] R. Avilés, J. Vallejo, I.F. de Bustos, J. Aguirrebeitia, G. Ajuria, Optimum synthesis of planar linkages using a strain–energy error function under geometric constraints, *Mech. Mach. Theory.* 45 (2010) 65–79. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.08.002>.
- [4] I.F. de Bustos, G. Urkullu, V.G. Marina, R. Ansola, Optimization of planar mechanisms by using a minimum distance function, *Mech. Mach. Theory.* 138 (2019) 149–168. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.04.002>.
- [5] A. Hernández, Cinemática de mecanismos: análisis y diseño, Síntesis, 2010.
- [6] J. García de Jalon, E. Bayo, Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems, 1st ed., Springer-Verlag New York, 1994. doi:[10.1007/978-1-4612-2600-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2600-0).
- [7] A.A. Shabana, Computational dynamics, John Wiley & Sons, 2009.
- [8] J. Wittenburg, Dynamics of multibody systems, Springer Science & Business Media, 2007.
- [9] R. Featherstone, Rigid body dynamics algorithms, Springer, 2014.
- [10] R. Avilés, Métodos de análisis para diseño mecánico: diseño mecánico, análisis estático, elementos finitos en estática, elementos finitos en dinámica, análisis de fatiga, Escuela Superior de Ingenieros, 2003.

- [11] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York London, 1970.
- [12] R. Avilés, *Métodos de cálculo de fatiga para ingeniería: metales*, Paraninfo, 2015.
- [13] A.C. Ugural, S.K. Fenster, *Advanced mechanics of materials and applied elasticity*, Pearson Education, 2011.
- [14] I.A. Karnovsky, O. Lebed, *Advanced methods of structural analysis*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [15] D.J. Inman, *Engineering vibration*, Prentice Hall New Jersey, 2008.
- [16] V.B. Bhandari, *Design of machine elements*, Tata McGraw-Hill Education, 2010.
- [17] T.J.R. Hughes, *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, Courier Corporation, 2012.
- [18] M. Abasolo, J. Aguirrebeitia, I. Coria, I. Heras, *Guía práctica de elementos finitos en estática*, Bilbao, 2017.
- [19] O.C. Zienkiewicz, *El método de los elementos finitos*, Reverté, 1981.
- [20] J. Cuadrado, J. Cardenal, E. Bayo, *Modelling and Solution Methods for Efficient Real-Time Simulation of Multibody Dynamics*, *Multibody Syst. Dyn.* 3 (1997) 259–280.
- [21] F.C. Park, J. Choi, S.R. Ploen, *Symbolic formulation of closed chain dynamics in independent coordinates*, *Mech. Mach. Theory.* 34 (1999) 731–751. doi:10.1016/S0094-114X(98)00052-4.
- [22] B. Paul, D. Krajinovic, *Computer Analysis of Machines With Planar Motion: Part 1—Kinematics*, *J. Appl. Mech.* 37 (1970) 697–702.
- [23] P.N. Sheth, J.J. Uicker, *IMP (Integrated Mechanisms Program), a computer-aided design analysis system for mechanisms and linkage*, *J. Eng. Ind.* 94 (1972) 454–464.
- [24] D.A. Smith, M.A. Chace, A.C. Rubens, *The automatic generation of a mathematical model for machinery systems*, *J. Eng. Ind.* 95 (1973) 629–635.
- [25] F. Freudenstein, *Approximate synthesis of four-bar linkages*, *Resonance.* 15 (2010) 740–767.

-
- [26] F. Freudenstein, An analytical approach to the design of four-link mechanisms, *Trans. ASME*. 76 (1954) 483–492.
- [27] F. Freudenstein, *Design of four-link mechanisms*, University Microfilms, 1954.
- [28] V. Aslanov, G. Kruglov, V. Yudinsev, NewtonEuler equations of multibody systems with changing structures for space applications, *Acta Astronaut.* 68 (2011) 2080–2087. doi:10.1016/j.actaastro.2010.11.013.
- [29] J.G. de Jalon, M.A. Serna, R. Avilés, Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms—I velocities and accelerations, *Mech. Mach. Theory*. 16 (1981) 543–556.
- [30] M.A. Serna, R. Avilés, J.G. de Jalón, Dynamic analysis of plane mechanisms with lower pairs in basic coordinates, *Mech. Mach. Theory*. 17 (1982) 397–403.
- [31] J.G. De Jalon, J. Unda, A. Avello, Natural coordinates for the computer analysis of multibody systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 56 (1986) 309–327.
- [32] J.G. de Jalon, J. Unda, A. Avello, J.M. Jiménez, Dynamic analysis of three-dimensional mechanisms in “natural” coordinates, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 109 (1987) 460–465.
- [33] V. Cossalter, R. Lot, A Motorcycle Multi-Body Model for Real Time Simulations Based on the Natural Coordinates Approach, *Veh. Syst. Dyn.* 37 (2002) 423–447. doi:10.1076/vesd.37.6.423.3523.
- [34] M.G. Coutinho, *Dynamic simulations of multibody systems*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [35] G. Gilardi, I. Sharf, Literature survey of contact dynamics modelling, *Mech. Mach. Theory*. 37 (2002) 1213–1239.
- [36] F. Pfeiffer, Unilateral problems of dynamics, *COURSES Lect. Cent. Mech. Sci.* (2000) 225–262.
- [37] P. Dupont, V. Hayward, B. Armstrong, F. Altpeter, Single state elastoplastic friction models, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 47 (2002) 787–792.

- [38] A. Bloch, J. Baillieul, P. Crouch, J.E. Marsden, D. Zenkov, P.S. Krishnaprasad, R.M. Murray, *Nonholonomic mechanics and control*, Springer, 2003.
- [39] J. Argyris, An excursion into large rotations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 32 (1982) 85–155.
- [40] M.A. Pucheta, C.J. Paz, M.E. Pereyra, Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación, *Mecánica Comput.* 22 (2014) 2303–2324.
- [41] A. Barrientos, *Fundamentos de robótica*, e-libro, Corp., 2007.
- [42] N. Orlandea, M.A. Chace, D.A. Calahan, A sparsity-oriented approach to the dynamic analysis and design of mechanical systems—Part 1, *J. Eng. Ind.* 99 (1977) 773–779.
- [43] J.L. Junkins, *Introduction to dynamics and control of flexible structures*, Aiaa, 1993.
- [44] W. Li, T. Howison, J. Angeles, On the use of the dual Euler–Rodrigues parameters in the numerical solution of the inverse-displacement problem, *Mech. Mach. Theory.* (2017).
- [45] C. Jizheng, Y. Jianping, F. Qun, Flight vehicle attitude determination using the modified rodrigues parameters, *Chinese J. Aeronaut.* 21 (2008) 433–440.
- [46] X. Kong, Reconfiguration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method, *Mech. Mach. Theory.* 74 (2014) 188–201.
- [47] M. Géradin, A. Cardona, *Flexible multibody dynamics: a finite element approach*, Wiley, 2001.
- [48] M. Géradin, A. Cardona, Kinematics and Dynamics of Rigid and Flexible Mechanisms using Finite Elements and Quaternion Algebra, *Comput. Mech.* 4 (1989) 115–135. doi:10.1007/BF00282414.
- [49] J. Sola, Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter, *ArXiv Prepr. ArXiv1711.02508.* (2017).
- [50] Y.-B. Jia, Quaternions and rotations, *Com S.* 477 (2008) 15.

- [51] W.R. Hamilton, LXXVIII. On quaternions; or on a new system of imaginaries in Algebra: To the editors of the Philosophical Magazine and Journal, *Philos. Mag. Ser. 3.* 25 (1844) 489–495.
- [52] P. Betsch, R. Siebert, Rigid body dynamics in terms of quaternions: Hamiltonian formulation and conserving numerical integration, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 79 (2009) 444–473.
- [53] N.D. Zorić, M.P. Lazarević, A.M. Simonović, Multi-body kinematics and dynamics in terms of quaternions: Langrange formulation in covariant form: Rodriguez approach, *FME Trans.* 38 (2010) 19–28.
- [54] B. Paul, Analytical dynamics of mechanisms—A computer oriented overview, *Mech. Mach. Theory.* 10 (1975) 481–507.
- [55] R.M.M. Orsino, T.A. Hess-Coelho, A contribution on the modular modelling of multibody systems, *Proc. R. Soc. A.* 471 (2015) 20150080.
- [56] E. Jarzębowska, Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.* 71 (2009) e118–e131.
- [57] J.M. Maruskin, A.M. Bloch, The Boltzmann-Hamel equations for optimal control, in: *Decis. Control. 2007 46th IEEE Conf., IEEE, 2007*: pp. 554–559.
- [58] S.K. Soltakhanov, M. Yushkov, S. Zegzhda, *Mechanics of non-holonomic systems: A new class of control systems*, Springer Science & Business Media, 2009.
- [59] A.B. Byachkov, V.M. Suslonov, Maggi's equations in terms of quasi-coordinates, *Regul. Chaotic Dyn.* 7 (2002) 269–279.
- [60] S.K. Saha, J. Angeles, Dynamics of nonholonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement, *J. Appl. Mech.* 58 (1991) 238–243.
- [61] O.A. Bauchau, A. Laulusa, Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems, *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 3 (2008) 11005.
- [62] T.R. Kane, D.A. Levinson, *Dynamics, theory and applications*, McGraw Hill, 1985.

- [63] T.R. Kane, D.A. Levinson, Dynamics Theory and Applications, (n.d.). doi:10.1016/0094-114X(86)90059-5.
- [64] H. Baruh, Analytical dynamics, WCB/McGraw-Hill Boston, 1999.
- [65] M. Borri, C. Bottasso, P. Mantegazza, Equivalence of Kane's and Maggi's equations, *Meccanica*. 25 (1990) 272–274.
- [66] J.-C. Piedboeuf, Kane's equations or Jourdain's principle?, in: *Circuits Syst. 1993.*, Proc. 36th Midwest Symp., IEEE, 1993: pp. 1471–1474.
- [67] Q. Hu, Y. Jia, S. Xu, A new computer-oriented approach with efficient variables for multibody dynamics with motion constraints, *Acta Astronaut.* 81 (2012) 380–389.
- [68] P.C. Mitiguy, T.R. Kane, Motion variables leading to efficient equations of motion, *Int. J. Rob. Res.* 15 (1996) 522–532.
- [69] F.E. Udwadia, R.E. Kalaba, On the foundations of analytical dynamics, *Int. J. Non. Linear. Mech.* 37 (2002) 1079–1090.
- [70] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Pearson Education India, 2011.
- [71] D. Baraff, Linear-time dynamics using lagrange multipliers, in: *Proc. 23rd Annu. Conf. Comput. Graph. Interact. Tech.*, ACM, 1996: pp. 137–146.
- [72] R. Featherstone, Efficient factorization of the joint-space inertia matrix for branched kinematic trees, *Int. J. Rob. Res.* 24 (2005) 487–500.
- [73] J.L. Escalona, J.F. Aceituno, Multibody simulation of railway vehicles with contact lookup tables, *Int. J. Mech. Sci.* (2018).
- [74] M. McGrath, D. Howard, R. Baker, A lagrange-based generalised formulation for the equations of motion of simple walking models, *J. Biomech.* 55 (2017) 139–143.
- [75] M. Konz, J. Rudolph, Equations of motion with redundant coordinates for mechanical systems on manifolds, *IFAC-PapersOnLine*. 48 (2015) 681–682.
- [76] J. Naudet, D. Lefeber, General formulation of an efficient recursive algorithm based on canonical momenta for forward dynamics of closed-loop multibody systems, in: *ASME 2005 Int. Des. Eng. Tech. Conf.*

- Comput. Inf. Eng. Conf., American Society of Mechanical Engineers, 2005: pp. 177–185.
- [77] J.W. Gibbs, On the fundamental formulae of dynamics, *Am. J. Math.* 2 (1879) 49–64.
- [78] P. Appell, Sur une forme generale des equations de la dynamique., *J. Für Die Reine Und Angew. Math.* 121 (1900) 310–319.
- [79] E.A. Desloge, The Gibbs–Appell equations of motion, *Am. J. Phys.* 56 (1988) 841–846.
- [80] O.A. Bauchau, *Flexible multibody dynamics*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [81] S. Wright, J. Nocedal, *Numerical optimization*, Springer Sci. 35 (1999) 7.
- [82] R.L. Fox, *Optimization methods for engineering design*, Addison-Wesley Pub. Co., 1971.
- [83] H. Hemami, F.C. Weimer, Modeling of nonholonomic dynamic systems with applications, *J. Appl. Mech.* 48 (1981) 177–182.
- [84] F.E. Udwardia, R.E. Kalaba, A new perspective on constrained motion, *Proc. R. Soc. London. Ser. A Math. Phys. Sci.* 439 (1992) 407–410.
- [85] R.E. Kalaba, F.E. Udwardia, Lagrangian mechanics, Gauss’ principle, quadratic programming, and generalized inverses: new equations for non-holonomically constrained discrete mechanical systems, *Q. Appl. Math.* 52 (1994) 229–241.
- [86] C. Gear, Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations, *IEEE Trans. Circuit Theory.* 18 (1971) 89–95.
- [87] E.C. Steeves, W.C. Walton Jr, A new matrix theorem and its application for establishing independent coordinates for complex dynamical systems with constraints, (1969).
- [88] P.E. Nikravesh, Is. Chung, Application of Euler parameters to the dynamic analysis of three-dimensional constrained mechanical systems, *J. Mech. Des.* 104 (1982) 785–791.
- [89] R.A. Wehage, E.J. Haug, Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems, *J. Mech. Des.* 104 (1982) 247–255.

- [90] N.K. Mani, E.J. Haug, K.E. Atkinson, Application of singular value decomposition for analysis of mechanical system dynamics, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 107 (1985) 82–87.
- [91] R.P. Singh, P.W. Likins, Singular value decomposition for constrained dynamical systems, *J. Appl. Mech.* 52 (1985) 943–948.
- [92] C. Wampler, K. Buffinton, J. Shu-Hui, Formulation of equations of motion for systems subject to constraints, *J. Appl. Mech.* 52 (1985) 465–470.
- [93] S.S. Kim, M.J. Vanderploeg, QR decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 108 (1986) 183–188.
- [94] C.G. Liang, G.M. Lance, A differentiable null space method for constrained dynamic analysis, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 109 (1987) 405–411.
- [95] J. García de Jalón, J. Unda, A. Avello, J.M. Jiménez, Dynamic Analysis of Three-Dimensional Mechanisms in “Natural” Coordinates, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 109 (1987) 460–465.
- [96] A. Avello, J.M. Jiménez, E. Bayo, J.G. de Jalón, A simple and highly parallelizable method for real-time dynamic simulation based on velocity transformations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 107 (1993) 313–339. doi:10.1016/0045-7825(93)90072-6.
- [97] A. Kurdila, J.G. Papastavridis, M.P. Kamat, Role of Maggi’s equations in computational methods for constrained multibody systems, *J. Guid. Control. Dyn.* 13 (1990) 113–120. doi:10.2514/3.20524.
- [98] T. Kane, C. Wang, On the Derivation of Equations of Motion, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 13 (1965) 487–492. doi:10.1137/0113030.
- [99] J.W. Kamman, R.L. Huston, Constrained multibody system dynamics an automated approach, *Comput. Struct.* 18 (1984) 999–1003. doi:https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90143-3.
- [100] J.W. Kamman, R.L. Huston, Dynamics of constrained multibody systems, *J. Appl. Mech.* 51 (1984) 899–903.
- [101] M. Borri, C.L. Bottasso, P. Mantegazza, Acceleration projection method in multibody dynamics, *Eur. J. Mech. A, SOLIDS.* 11 (1992) 403–418.

-
- [102] J. Unda, J. García de Jalón, F. Losantos, R. Enparantza, A Comparative Study on Some Different Formulations of the Dynamic Equations of Constrained Mechanical Systems, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 109 (1987) 466–474.
- [103] J.C. Chiou, K.C. Park, C. Farhat, A natural partitioning scheme for parallel simulation of multibody systems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 36 (1993) 945–967. doi:10.1002/nme.1620360605.
- [104] I.F. de Bustos, V. García-Marina, G. Urkullu, M. Abasolo, An efficient LDU algorithm for the minimal least squares solution of linear systems, *J. Comput. Appl. Math.* 344 (2018) 346–355.
- [105] G. Peters, J.H. Wilkinson, The least squares problem and pseudo-inverses, *Comput. J.* 13 (1970) 309–316. doi:10.1093/comjnl/13.3.309.
- [106] W. Sautter, Fehleranalyse für die Gauß-Elimination zur Berechnung der Lösung minimaler Länge, *Numer. Math.* 30 (1978) 165–184. doi:10.1007/BF02042943.
- [107] A. Arabyan, F. Wu, An Improved Formulation for Constrained Mechanical Systems, *Multibody Syst. Dyn.* 2 (1998) 49–69. doi:10.1023/A:1009724704839.
- [108] W. BLAJER, Projective formulation of Maggi’s method for nonholonomic systems analysis, *J. Guid. Control. Dyn.* 15 (1992) 522–525. doi:10.2514/3.20866.
- [109] W. Blajer, W. Schiehlen, W. Schirm, A projective criterion to the coordinate partitioning method for multibody dynamics, *Arch. Appl. Mech.* 64 (1994) 86–98. doi:10.1007/BF00789100.
- [110] W. Blajer, An orthonormal tangent space method for constrained multibody systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 121 (1995) 45–57. doi:https://doi.org/10.1016/0045-7825(94)00682-D.
- [111] C.W. Gear, B. Leimkuhler, G.K. Gupta, Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints, *J. Comput. Appl. Math.* 12 (1985) 77–90.
- [112] C.W. Gear, Differential-algebraic equation index transformations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 9 (1988) 39–47.

- [113] P. Lötstedt, L. Petzold, Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints. I. Convergence results for backward differentiation formulas, *Math. Comput.* 46 (1986) 491–516.
- [114] E. Eich, Convergence results for a coordinate projection method applied to mechanical systems with algebraic constraints, *SIAM J. Numer. Anal.* 30 (1993) 1467–1482.
- [115] J. Yen, Constrained equations of motion in multibody dynamics as ODEs on manifolds, *SIAM J. Numer. Anal.* 30 (1993) 553–568.
- [116] J. Yen, E.J. Haug, T.O. Tak, Numerical methods for constrained equations of motion in mechanical system dynamics, *J. Struct. Mech.* 19 (1991) 41–76.
- [117] F.A. Potra, J. Yen, Implicit Numerical Integration for Euler-Lagrange Equations via Tangent Space Parametrization*, *Mech. Struct. Mach.* 19 (1991) 77–98. doi:10.1080/08905459108905138.
- [118] J. Yen, L. Petzold, An Efficient Newton-Type Iteration for the Numerical Solution of Highly Oscillatory Constrained Multibody Dynamic Systems, *SIAM J. Sci. Comput.* 19 (1998) 1513–1534. doi:10.1137/S1064827596297227.
- [119] J. Yen, L. Petzold, S. Raha, A time integration algorithm for flexible mechanism dynamics: The DAE α -method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 158 (1998) 341–355.
- [120] M. Borri, L. Trainelli, A. Croce, The Embedded Projection Method: A general index reduction procedure for constrained system dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) 6974–6992. doi:<https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.03.010>.
- [121] J. Baumgarte, Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1 (1972) 1–16.
- [122] P.E. Nikravesh, R.A. Wehage, O.K. Kwon, Euler parameters in computational kinematics and dynamics. Part 1, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 107 (1985) 358–365.
- [123] T.W. Park, E.J. Haug, A hybrid numerical integration method for machine dynamic simulation, *J. Mech. Transm. Autom. Des.* 108 (1986) 211–216.

-
- [124] K.C. Park, J.C. Chiou, Stabilization of computational procedures for constrained dynamical systems, *J. Guid. Control. Dyn.* 11 (1988) 365–370.
- [125] E. Bayo, J.G. De Jalon, M.A. Serna, A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 71 (1988) 183–195.
- [126] E. Bayo, J.G. de Jalón, A. Avello, J. Cuadrado, An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully Cartesian coordinates, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 92 (1991) 377–395.
- [127] S. Yoon, R.M. Howe, D.T. Greenwood, Geometric Elimination of Constraint Violations in Numerical Simulation of Lagrangian Equations, *J. Mech. Des.* 116 (1994) 1058–1064.
- [128] W. Blajer, A Geometric Unification of Constrained System Dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 1 (1997) 3–21. doi:10.1023/A:1009759106323.
- [129] W. Blajer, Elimination of Constraint Violation and Accuracy Aspects in Numerical Simulation of Multibody Systems, *Multibody Syst. Dyn.* 7 (2002) 265–284. doi:10.1023/A:1015285428885.
- [130] Z. Terze, D. Lefebvre, O. Muftić, Null space integration method for constrained multibody systems with no constraint violation, *Multibody Syst. Dyn.* 6 (2001) 229–243.
- [131] E. Bayo, A. Avello, Singularity-free augmented Lagrangian algorithms for constrained multibody dynamics, *Nonlinear Dyn.* 5 (1994) 209–231.
- [132] E. Bayo, R. Ledesma, Augmented lagrangian and mass-orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics, *Nonlinear Dyn.* 9 (1996) 113–130. doi:10.1007/BF01833296.
- [133] W. Schiehlen, Computational aspects in multibody system dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 90 (1991) 569–582. doi:https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90172-3.
- [134] A.A. Shabana, Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments, *Multibody Syst. Dyn.* 1 (1997) 189–222. doi:10.1023/A:1009773505418.

- [135] T.M. Wasfy, A.K. Noor, Computational strategies for flexible multibody systems, *Appl. Mech. Rev.* 56 (2003) 553–613.
- [136] A. Cardona, M. Geradin, Time integration of the equations of motion in mechanism analysis, *Comput. Struct.* 33 (1989) 801–820.
- [137] O.A. Bauchau, G. Damilano, N.J. Theron, Numerical integration of non-linear elastic multi-body systems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38 (1995) 2727–2751.
- [138] O.A. Bauchau, C.L. Bottasso, L. Trainelli, Robust integration schemes for flexible multibody systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003) 395–420.
- [139] O.A. Bauchau, N.J. Theron, Energy decaying scheme for nonlinear elastic multi-body systems, *Comput. Struct.* 59 (1996) 317–331.
- [140] O. Gonzalez, Mechanical systems subject to holonomic constraints: Differential–algebraic formulations and conservative integration, *Phys. D Nonlinear Phenom.* 132 (1999) 165–174.
- [141] S. Leyendecker, P. Betsch, P. Steinmann, The discrete null space method for the energy-consistent integration of constrained mechanical systems. Part III: Flexible multibody dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 19 (2008) 45–72.
- [142] P. Betsch, P. Steinmann, A DAE approach to flexible multibody dynamics, *Multibody Syst. Dyn.* 8 (2002) 365–389.
- [143] L. Petzold, P. Lötstedt, Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints II: Practical implications, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7 (1986) 720–733.
- [144] M. Arnold, A perturbation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems, *Appl. Numer. Math.* 18 (1995) 37–56.
- [145] C.L. Bottasso, O.A. Bauchau, A. Cardona, Time-step-size-independent conditioning and sensitivity to perturbations in the numerical solution of index three differential algebraic equations, *SIAM J. Sci. Comput.* 29 (2007) 397–414.
- [146] R.L. Burden, J.D. Faires, *Análisis numérico*, Thomson Learning, 2002.

- [147] J.C. Butcher, Numerical methods for ordinary differential equations, John Wiley & Sons, 2016.
- [148] J.D. Lambert, Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [149] E. Eich-Soellner, C. Führer, Numerical methods in multibody dynamics, Springer, 1998.
- [150] G.G. Dahlquist, A special stability problem for linear multistep methods, BIT Numer. Math. 3 (1963) 27–43.
- [151] B. Carnahan, H.A. Luther, J.O. Wilkes, Applied numerical methods, John Wiley & Sons, Inc, 1969.
- [152] S.D. Conte, C. De Boor, Elementary numerical analysis: an algorithmic approach, SIAM, 2017.
- [153] K.J. Bathe, E.L. Wilson, Stability and accuracy analysis of direct integration methods, Earthq. Eng. Struct. Dyn. 1 (1972) 283–291.
- [154] L. Komzsik, What every engineer should know about computational techniques of finite element analysis, CRC Press, 2016.
- [155] T.J.R. Hughes, Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics, Comput. Struct. 6 (1976) 313–324.
- [156] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, Earthq. Eng. Struct. Dyn. 5 (1977) 283–292.
- [157] H.M. Hilber, Analysis and design of numerical integration methods in structural dynamics., (1978).
- [158] E.L. Wilson, A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures, CALIFORNIA UNIV BERKELEY STRUCTURAL ENGINEERING LAB, 1968.
- [159] G.L. Goudreau, R.L. Taylor, Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2 (1973) 69–97.
- [160] B. Gavrea, D. Negrut, F.A. Potra, The Newmark integration method for simulation of multibody systems: Analytical considerations, Proc. ASME

- Des. Eng. Div. 2005, Pts A B. (2005) 1079–1092. doi:10.1115/IMECE2005-81770.
- [161] D. Negrut, R. Rampalli, G. Ottarsson, A. Sajdak, On an implementation of the Hilber-Hughes-Taylor method in the context of index 3 differential-algebraic equations of multibody dynamics (DETC2005-85096), *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 2 (2007) 73–85.
- [162] M.A. Chace, Methods and experience in computer aided design of large-displacement mechanical systems, in: *Comput. Aided Anal. Optim. Mech. Syst. Dyn.*, Springer, 1984: pp. 233–259.
- [163] C.W. Gear, L.R. Petzold, ODE methods for the solution of differential/algebraic systems, *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984) 716–728.
- [164] M.F. Steigerwald, BDF Methods for DAEs in Multi-body Dynamics: Shortcomings and Improvements, in: *Real-Time Integr. Methods Mech. Syst. Simul.*, Springer, 1990: pp. 345–352.
- [165] J.C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*, Siam, 2004.
- [166] M. González, D. Dopico, U. Lugiés, J. Cuadrado, A benchmarking system for MBS simulation software: Problem standardization and performance measurement, *Multibody Syst. Dyn.* 16 (2006) 179–190. doi:10.1007/s11044-006-9020-8.
- [167] R.W. John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg, GNU Octave version 4.4.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations., (2017). <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.4.1/>.
- [168] J.J. McPhee, On the use of linear graph theory in multibody system dynamics, *Nonlinear Dyn.* 9 (1996) 73–90.
- [169] W. Schiehlen, *Multibody systems handbook*, Springer, 1990.
- [170] M. González, J. Cuadrado, Mbslab: a New Collaborative Simulation Environment of Multibody System Analysis [J], *Proc. ACMD.* (2004) 383–389.

Nomenclatura y acrónimos

Abreviaturas en texto

IFTToMM:	International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science
MBS:	Sistemas Multicuerpo, “ <i>MultiBody System</i> ”
FEM:	Método de Elementos Finitos, “ <i>Finite Elements Method</i> ”
CAE:	Ingeniería Asistida por Computador, “ <i>Computer Aided Engineering</i> ”
DAE:	Ecuación Diferencial Algebraica, “ <i>Differential Algebraic Equation</i> ”
ODE:	Ecuación Diferencial Ordinaria, “ <i>Ordinary Differential Equation</i> ”
SVD:	Descomposición en Valores Singulares, “ <i>Singular Value Decomposition</i> ”
COD	Descomposición Ortogonal Completa, “ <i>Complete Orthogonal Decomposition</i> ”
DoF:	Grados de Libertad, “ <i>Degrees of Freedom</i> ”
HHT:	Hilber-Hughes-Taylor
BDF:	Formulación con Diferencias Regresivas, “ <i>Backward Difference Formulation</i> ”
BDM:	Método de Diferencias Regresivas, “ <i>Backward Difference Method</i> ”
IRK:	Runge-Kutta Implícito, “ <i>Implicit Runge-Kutta</i> ”
CD:	Diferencias Centrales, “ <i>Central Difference</i> ”
TR	Regla Trapezoidal, “ <i>Trapezoidal Rule</i> ”
DIMCD:	Método de Integración Directa con Diferencias Centrales, “ <i>Direct Integration Method with Central Difference</i> ”
CdG:	Centro de Gravedad, “ <i>Centre of Gravity</i> ”
CoM:	Centro de Masas, “ <i>Centre of Mass</i> ”
RKF	Runge-Kutta-Feldberg
PP	Problema de Posición, “ <i>Position Problem</i> ”

Nomenclatura en texto y ecuaciones

t :	Tiempo
\mathbf{q}_k :	$\{\mathbf{q}_{k0}, \mathbf{q}_{k1}, \mathbf{q}_{k2}, \mathbf{q}_{k3}\}^T$; Cuaternión unitario del cuerpo k
\mathbf{r}_k :	$\{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k\}^T$; Coordenadas cartesianas del CdM del cuerpo k
\mathbf{x}_k :	$\{\mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k\}^T$; Variables del cuerpo k
\mathbf{r}_{ck} :	$\{\mathbf{x}_{ck}, \mathbf{y}_{ck}, \mathbf{z}_{ck}\}^T$; Coordenadas cartesianas del punto c del elemento k
$\bar{\mathbf{r}}_{ck}$:	$\{\bar{\mathbf{x}}_{ck}, \bar{\mathbf{y}}_{ck}, \bar{\mathbf{z}}_{ck}\}^T$; Coordenadas cartesianas del punto c del elemento k en el sistema local

Nomenclatura en texto y ecuaciones	
$R(\mathbf{q}_k)$:	Matriz de rotación homogénea del cuerpo k
$\Omega(\mathbf{q}_k)$:	Matriz de velocidad angular del cuerpo k
$\dot{\Omega}(\mathbf{q}_k)$:	Matriz de aceleración angular del cuerpo k
$\omega(\mathbf{q}_k)$:	Vector de velocidad angular del cuerpo k
$\dot{\omega}(\mathbf{q}_k)$:	Vector de aceleración angular del cuerpo k
$P_{kc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz de cambio de coordenadas locales de un punto c del cuerpo k a globales
$S_p(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz resultante del proceso de linealización de cambio de coordenadas locales del punto c del elemento k a globales, sin incluir los desplazamientos
$S_s(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz resultante del proceso de linealización de cambio de coordenadas locales del punto c del elemento k a globales, incluyendo los desplazamientos
$S_v(\mathbf{q}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k)$:	Matriz resultante del proceso de linealización de cambio de coordenadas locales de un vector del elemento k a globales, incluyendo los desplazamientos
e	Mínima distancia entre el plano y el sistema de referencia
d :	Mínima distancia de una línea al sistema de referencia
$S_{sp}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz que relaciona la velocidad del punto c de elemento k con la velocidad del cuaternión del elemento $\dot{\mathbf{q}}_k$
$S_{ab}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz que relaciona la velocidad del punto c de elemento k con el campo de velocidad del elemento $\dot{\mathbf{x}}_k$
$\mathbf{f}_{ck}(t)$:	Fuerza aplicada en el punto c del cuerpo k
$\boldsymbol{\tau}_k(\bar{\mathbf{r}}_{ck})$	Momento generado en el CdM del cuerpo k debido a la fuerza \mathbf{f}_{ck}
$\mathbf{t}_k(t)$	Momento exterior aplicado en el cuerpo k
$\mathbf{f}_k(t)$	Fuerza exterior en el CoM del cuerpo k
$\mathbf{f}_{ek}(t)$:	$\{\mathbf{f}_k, \boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{t}_k\}^T$; Esfuerzos exteriores aplicados sobre el cuerpo k referidos al CdM
$U_{ck}(\mathbf{r}_{ck})$:	Matriz de transformación de una fuerza aplicada en el punto c del cuerpo k en su equivalente en el CoM del elemento k incluyendo los momentos correspondientes
I_{gk}	Tensor de inercia del cuerpo k respecto del centro de gravedad
$\mathbf{t}_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k)$:	Vector de fuerzas indirectas surgido del proceso de linealización de la ecuación de Euler para el cuerpo k
$M_{Rk}(\mathbf{q}_k)$:	Matriz de masa del cuerpo k de la ecuación de Euler.
$C_{CRk}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k)$:	Matriz donde se agrupan las componentes procedentes de la linealización de la ecuación de Euler proporcionales a la velocidad del cuerpo k
$R_A^T(\mathbf{q}_k)$:	Matriz de rotación de dimensión 4
m_k	Masa del elemento k
$\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$:	$\{\mathbf{0}, \mathbf{t}_{CRk}\}^T$; Vector de fuerzas indirectas ampliado a todas las coordenadas del sólido k

Nomenclatura en texto y ecuaciones	
$M_k(\mathbf{x}_k)$:	Matriz de masa del cuerpo k
$C_{ik}(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$:	Matriz donde se agrupan las componentes procedentes de la linealización de la ecuación de Euler proporcionales a la velocidad y ampliado a las componentes lineales del cuerpo k
$\mathbf{f}_e(t)$:	Vector de esfuerzos exterior del sistema
$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:	Vector de fuerzas indirecta del sistema completo
$\mathbf{f}_r(t)$:	Vector donde se agrupan las fuerzas generadas por las ligaduras
$M(\mathbf{x})$:	Matriz de masa del sistema completo
$C_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:	Matriz donde se agrupan las componentes procedentes de la linealización de la ecuación de Euler proporcionales a la velocidad del sistema completo
k_{oc} :	Constante de rigidez del muelle entre los puntos o y c
\hat{k}_{oc} :	Constante de rigidez equivalent del muelle entre los puntos o y c
K_{oc} :	Matriz de rigidez del muelle que une los puntos o y c
K :	Matriz de rigidez del sistema incluyendo todos los resortes
c_{oc} :	Constante de amortiguación del amortiguador que colocado entre los puntos o y c
C_{oc} :	Matriz de amortiguación del amortiguador entre los puntos o y c
C_d :	Matriz de amortiguación del sistema incluyendo todos los amortiguadores
$A(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:	Matriz donde se agrupan los términos proporcionales a $\mathbf{x}(t+\Delta t)$
$B(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:	Matriz donde se agrupan los términos proporcionales a $\mathbf{x}(t-\Delta t)$
$D(\mathbf{x})$:	Matriz donde se agrupan los términos proporcionales a $\mathbf{x}(t)$
$\mathbf{e}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:	Vector donde se agrupan los vectores $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ y $\mathbf{f}_e(t)$
Φ :	Ecuaciones de restricción
H :	Matriz de restricción de coordenadas. En ella se agrupan los coeficientes de las variables del sistema que surgen del proceso de linealización de la ecuaciones de restricción
\mathbf{x}_p :	Una solución particular del sistema indeterminado formado tras la linealización de las ecuaciones de restricción
\mathbf{b} :	Vector de los términos independientes surgido de la linealización de las ecuaciones de restricción
N_H :	Subespacio nulo de la matriz H
α :	Vector formado por las coordenadas linealmente independientes del sistema
G :	Matriz de restricción de esfuerzos. Surge de someter a las ecuaciones de restricción a un movimiento infinitesimal. Sus filas están formadas por las direcciones de las fuerzas de restricción en función de los desplazamientos y los giros
N_G :	Subpacio nulo de la matriz G
$S_q(\mathbf{q}_k)$:	Matriz de que agrupa a los coeficientes surgidos de la linealización de la norma del cuaternión
$H_q(\mathbf{q}_k)$:	Matriz de restricción de coordenadas de la norma del cuaternión

Nomenclatura en texto y ecuaciones	
$\mathbf{b}_q(\mathbf{q}_k)$:	Vector independiente tras la linealización de la norma del cuaternión
$H_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})$:	Matriz de coordenadas del par esférico entre los los cuerpos k y m
$\mathbf{b}_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})$:	Vector independiente tras la linealización del par esférico
$Q_s(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras el aplicar un desplazamiento infinitesimal al par esférico
$G_s(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del par esférico
$H_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})$:	Matriz de restricción de coordenadas de la la restricción de vector
$\mathbf{b}_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})$:	Vector independiente tras la linealización de la restricción del vector
$H_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Matriz de restricción de coordenadas del par de rotación
$\mathbf{b}_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Vector independiente tras la linealización del par de rotación
$Q_v(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_{ck})$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras el aplicar un desplazamiento infinitesimal de la restricción del vector
$G_v(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos de la ecuación del vector
$G_r(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del par de rotación
$S_e(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k)$:	Matriz de que agrupa a los coeficientes surgidos de la linealización de la ecuación de igualdad de distancia e
$H_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e)$:	Matriz de restricción de coordenadas de la restricción de distancia e
$\mathbf{b}_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e)$:	Vector independiente tras la linealización de la restricción de la distancia e
$H_{pl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e, \mathbf{p})$:	Matriz de restricción de coordenadas del par de plano
$\mathbf{b}_{pl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e, \mathbf{p})$:	Vector independiente tras la linealización del par plano
$Q_g(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k)$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras el aplicar un desplazamiento infinitesimal a una magnitud en globales a partir de las locales
$Q_e(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k)$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras aplicar un desplazamiento infinitesimal a la ecuación de la distancia e
$G_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e)$:	Matriz de restricciones de esfuerzos de la restricción de la distancia e
$G_{pl}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, e, \mathbf{p})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del par plano
$S_d(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k)$:	Matriz de que agrupa a los coeficientes surgidos de la linealización de la ecuación de igualdad de d
$H_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d})$:	Matriz de restricción de coordenadas de la restricción de distancia d
$\mathbf{b}_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d})$:	Vector independiente tras la linealización de la restricción de la distancia d
$H_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p})$:	Matriz de restricción de coordenadas del par cilíndrico
$\mathbf{b}_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p})$:	Vector independiente tras la linealización del par cilíndrico
$Q_d(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{p}}_k, \bar{\mathbf{d}}_k)$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras el aplicar un desplazamiento infinitesimal a la restricción de la distancia d
$G_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos de la restricción de la distancia d
$G_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del par cilíndrico
$H_p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$:	Matriz de restricción de coordenadas del par prismático

Nomenclatura en texto y ecuaciones	
$\mathbf{b}_p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$:	Vector independiente tras la linealización del par prismático
$G_p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{d}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del par prismático
$H_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})$:	Matriz de restricción de coordenadas de un producto escalar
$\mathbf{b}_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})$:	Vector independiente tras la linealización de la restricción de un producto escalar
$H_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Matriz de restricción de coordenadas del par de junta universal
$\mathbf{b}_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Vector independiente tras la linealización del par de junta universal
$Q_{esc}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{p}}_k)$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras el aplicar un desplazamiento infinitesimal a la restricción de un producto escalar
$G_{esc}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{p})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del producto escalar
$G_{cr}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del par de junta cardan
$H_{vel}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})$:	Matriz de restricción de coordenadas del par de velocidades
$\mathbf{b}_{vel}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r})$:	Vector independiente tras la linealización del par de velocidades
$H_{roll}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Matriz de restricción de coordenadas del par de rodadura
$\mathbf{b}_{roll}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p})$:	Vector independiente tras la linealización del par de rodadura
$Q_{sp}(\mathbf{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras el aplicar únicamente una rotación infinitesimal a la ecuación de velocidad
$Q_{vel}(\mathbf{x}_k, \bar{\mathbf{r}}_{ck})$:	Matriz que agrupa los coeficientes tras el aplicar un desplazamiento infinitesimal a la restricción de velocidad
$G_{vel}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{r}})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos de la restricción de velocidad
$G_{roll}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_m, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \bar{\mathbf{r}})$:	Matriz de restricciones de esfuerzos del par de rodadura
$A_{Rk}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:	Matriz donde se agrupan los términos proporcionales a $\mathbf{q}_k(t+\Delta t)$ tras aplicar la linealización y el método de diferencias centrales a la ecuación de Euler para el cuerpo k
$B_{Rk}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:	Matriz donde se agrupan los términos proporcionales a $\mathbf{q}_k(t-\Delta t)$ tras aplicar la linealización y el método de diferencias centrales a la ecuación de Euler para el cuerpo k
$D_{Rk}(\mathbf{q})$:	Matriz donde se agrupan los términos proporcionales a $\mathbf{q}_k(t)$ tras aplicar la linealización y el método de diferencias centrales a la ecuación de Euler para el cuerpo k
\mathbf{b}_k :	Vector que agrupa todos los términos que no son proporcionales a $\mathbf{q}_k(t+\Delta t)$ tras aplicar la linealización y el método de diferencias centrales a la ecuación de Euler para el cuerpo k
$\mathbf{b}_{ck}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t-\Delta t))$:	Vector que agrupa los términos constantes durante toda la iteración interna en el instante t , del producto $B_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)\mathbf{x}_k(t-\Delta t)$
$\mathbf{b}_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{x}_k(t-\Delta t), \dot{\mathbf{x}}_k(t))$:	Vector que agrupa los términos variables durante toda la iteración interna en el instante t , del producto $B_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)\mathbf{x}_k(t-\Delta t)$
$\mathbf{d}_{ck}(\mathbf{x}_k(t))$:	Vector que agrupa los términos constantes durante toda la iteración interna en el instante t , del producto $D_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k(t)$
$\mathbf{f}_{ivk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t))$:	Vector que agrupa los términos variables durante toda la iteración interna en el instante t , del producto $\mathbf{f}_{ik}(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$

Nomenclatura en texto y ecuaciones

$A_{ck}(\mathbf{x}_k(t)):$	Matriz que agrupa los términos constantes durante toda la iteración interna en el instante t , del producto $A_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$
$A_{vk}(\mathbf{x}_k(t), \dot{\mathbf{x}}_k(t)):$	Matriz que agrupa los términos variables durante toda la iteración interna en el instante t , del producto $A_k(\mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k)$