## ITZULPENAK

# Logikako kalkulu funtzionalaren axiomen osotasuna*[1]

KURT GÖDEL

Die Vollstandigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls.

Monatshefte furMathematikund' Physik, 37, 1930, 349-360 or.

# («Die Vollstandigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls»)

Jakina da Whiteheadek eta Russellek logika eta matematika eraiki dutela ageriko zenbait proposizio axiomatzat hartuz, eta horietatik, zehatz azaldutako inferentzia printzipioetan oinarrituz, logikako eta matematikako teoremak guztiz modu formalean ondorioztatu dituztela (hau da, sinboloen esanahiaren erabilpen gehigarririk egin gabe). Horrelako jardunbideak galdera bat dakarkigu segituan burura, hasieran postulatutako axiomen eta inferentzia printzipioen sistema osoa ote den, hau da, proposizio logiko-matematiko guztiak eratorri ahal izateko nahikoa den edo, akaso, egiazkoak diren eta sistema honetan ondorioztatu ezinak diren proposizioak otu dakizkigukeen. Kalkulu proposizionaleko formulen kasuan galderak baiezko erantzuna jaso du, hau da, erakutsi[2] da, kalkulu proposizionaleko formula zuzen guztiak *Principia Mathematican* emandako axiometatik ondorioztatzen direla. Gauza bera egingo dugu hemen «kalkulu funtzional mugatua»[3] deitutako eremu zabalagoko formulentzat; hau da, ondokoa frogatuko dugu:

---

* Jule Goikoetxeak alemanetik itzulia da lan hau. Eskerrak eman nahi dizkiot lana arretaz irakurri eta zuzenketak egin dituen Enetz Ezenarro lankideari. Itzulpena egiteko Eusko Jaurlaritzaren doktorego aurreko beka baten laguntza izan dut.

1 H. Hahn irakaslearekin zorretan nago artikulu hau idazterakoan lagungarri suertatu zaizkidan hainbat aholku emateagatik.

2 Ikus *Bernays 1926*.

3 Terminologian eta sinbolismoan lan honek *Hilbert eta Ackermann* 1928 du eredutzat. Lan horren arabera, kalkulu funtzional mugatua, X, Y, Z... aldagai proposizionalak eta 1 tipoko F(x), G(x, y), H(x, y, z)... aldagai funtzionalak erabiliz, $\vee$ (edo), — (ez), (x) (guztietarako), (Ex) (existitzen da) eragiketen bidez eraikitako espresio logikoek osatzen dute, non (x) edo (Ex) kuantifikatzaileetako aldagaiak indibidualen gainean soilik mugitzen diren, eta ez funtzioen gainean. Era horretako formula bat baliozkoa (tautologikoa) dela esaten da, X, Y, Z... eta F(x), G(x, y)... aldagaiak, hurrenez hurren, proposizio eta funtzio espezifikoez ordezkatzen diren guztietan egiazko proposizioak lortzen badira (adibidez, $(x)[F(x) \vee \overline{F(x)}]$ ).

I Teorema: *Kalkulu funtzional mugatuko baliozko*[4] *formula oro frogagarria da*

Hurrengo axioma sistema[5] ezarriko dugu oinarritzat:

Oinarrizko nozio indefinituak: $\vee$, —, (x). (Horietatik &, $\rightarrow$, ~, (Ex) ohiko moduan defini daitezke.)

Axioma formalak:

| | |
|---|---|
| 1. $X \vee X \rightarrow X$, | 4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$ |
| 2. $X \rightarrow X \vee Y$, | 5. $(x)F(x) \rightarrow F(y)$, |
| 3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$, | 6. $(x)[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x)F(x)$. |

Inferentzia erregelak[6]:

1. Inferentzia eskema: A eta A $\rightarrow$ B-tik B inferi daiteke.
2. Ordezkapen erregela aldagai proposizional eta funtzionalentzat.
3. A(x)-tik (x)A(x) inferi daiteke.
4. Aldagai indibidualak (askeak edo lotuak) beste batzuengatik ordezkatuak izan daitezke, horrek zeinu berdinarekin adierazitako aldagaien eraginen erdiestaltzerik eragiten ez baldin badu.

Datorrenerako izendapen laburtuak ematea komeni da.

(P), (Q), (R), etab. era batera edo bestera eraikitako aurrizkiak adierazten dituzte, hots, forma honetako zeinu segida finituak: (x)(Ey), (y)(x)(Ez)(u), etab.

$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{b}$ etab. alemaniar letra xeheek aldagai indibidualen n-koteak adierazten dituzte, hau da, honelako forma duten zeinu segidak: x, y, z; $x_2$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ etab., non aldagai bera behin baino gehiagotan ager daitekeen. Era honetan ulertu behar dira $\mathfrak{x}$, (E$\mathfrak{x}$), etab. $\mathfrak{x}$-n aldagai bera behin baino

[4] Zehatzagoak izateko: «indibidualen eremu guztietan baliozkoa» esan beharko genuke, teorema ezagunen arabera «indibidualen eremu zenbakarrian baliozkoa» esan nahiko lukeena. —Aldagai indibidual askeak dituen A(x, y,..., w) formula baten kasuan «baliozkoa» izateak (x)(y)...(w)A (x, y,..., w) baliozkoa dela esan nahi du eta «asegarria» izateak (Ex)(Ey)...(Ew)A(x, y,..., w) asegarria dela; ondokoa, beraz, salbuespenik gabe baiezta daiteke: «A baliozkoa da» eta «$\overline{A}$ ase ezina da» baliokideak dira.

[5] Bat dator (P. Bernaysek erredundantea zela frogatu zuen elkartze-printzipioagatik izan ezik) *Principia Mathematica*, I, *1 eta *10 emandakoarekin.

[6] Russellek eta Whiteheadek ez zituzten erregelok esplizituki azaldu, beren dedukzioetan etengabe erabili bazituzten ere.

gehiagotan agertuko balitz, orduan, noski, $\mathfrak{x}$-n edo $(E\mathfrak{x})$-n behin bakarrik idatzita dagoela pentsatu behar da.

Gainera, hemen batu dugun lema sorta beharko dugu. Frogak ez dira ematen, batetik, ezagunak direlako, eta bestetik, burutzeko errazak direlako:

1. Edozein $\mathfrak{x}$ n-koterentzat ondokoa froga daiteke:

(a) $(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})$,
(b) $(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})$ & $(E\mathfrak{x})G(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x})[F(\mathfrak{x})$ & $G(\mathfrak{x})]$,
(c) $(\mathfrak{x})\overline{F(\mathfrak{x})} \sim \overline{E(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})}$

2. $\mathfrak{x}$ eta $\mathfrak{x}'$ aldagaien ordenean bakarrik desberdintzen badira, orduan, ondokoa froga daiteke:

$$(E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x}')F(\mathfrak{x}).$$

3. x-n aldagai guztiak desberdinak badira eta x'-k x-n osagai kopuru bera baldin badu, orduan, ondokoa froga daiteke:

$$(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (\mathfrak{x}')F(\mathfrak{x}')$$

baita $\mathfrak{x}'$-n aldagai berberak agertzen direnean ere.

4. $(p_i)$-k $(x_i)$ edo $(Ex_i)$ kuantifikatzailea eta $(q_i)$-k $(y_i)$ edo $(Ey_i)$ kuantifikatzailea adierazten baldin badute, orduan $i < k \leq n$, $(p_i)$ $(p_k)$-ren aurretik doala eta $i < k \leq m$, $(q_i)$ $(q_k)$-ren aurretik doala betetzen duten $(p_i)$ eta $(q_i)$-z osatutako edozein (P) aurrizkirentzat,

$$(p_1)(p_2) \ldots (p_n)\, F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\&\; (q_1)(q_2) \ldots (q_m)\, G(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$
$$\sim (P)[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\&\; G(y_1, y_2, \ldots, y_m)]^{7}$$

froga daiteke.

5. Adierazpen guztiak forma normalean eman daitezke; hau da, A adierazpen bakoitzarentzat bada N formula normal bat, A ~ N frogagarria izanik[8].

6. A ~ B frogagarria baldin bada, orduan $\mathfrak{F}(A) \sim \mathfrak{F}(B)$ ere bada, eta $\mathfrak{F}(A)$-k A zatitzat duen edozein espresio adierazten du (ikus *Hilbert eta Ackermann* 1928, III, §7).

7. Baliozkoak diren kalkulu proposizionaleko formula guztiak frogagarriak dira, hots, 1-4 axiomek kalkulu proposizionalarentzat sistema axiomatiko osoa osatzen dute[9].

---

[7] Teorema analogoak, &-ren ordez, v-rentzat balio du.
[8] Ikus *Hilbert eta Ackermann* 1928, III, §8.
[9] Ikus *Bernays* 1926.

I Teoremaren frogarekin jarraituko dugu ondoren, baina kontuan izan lehenik hurrengo modu honetan ere enuntzia daitekeela:

II Teorema: *Murriztutako kalkulu funtzionaleko formula oro ezeztagarria*[10] *edo asegarria da* (eta, are gehiago, indibidualen eremu zenbakarrian asegarria).

I II-tik ondorioztatzen dela, honela ikus daiteke: izan bedi A baliozko adierazpen bat orduan, $\overline{A}$ ez da asegarria, beraz, II-ak esaten duenez ezeztagarria da, hau da, $\overline{\overline{A}}$ frogagarria da, eta ondorioz, A ere bai. Alderantzizko [inplikazioa] begi bistakoa da.

Defini dezagun orain *K* adierazpenez osatutako $\mathfrak{K}$ klase bat finkatutako hurrengo baldintzen bitartez:

1. *K* formula normal bat da.
2. *K*-k ez du askea den aldagai indibidualik.
3. *K*-ren aurrizkia kuantifikatzaile unibertsalaren zeinuarekin hasi eta kuantifikatzaile existentzial batekin amaitzen da.

Hortaz, honako hau dugu:

III Teorema: $\mathfrak{K}$*-adierazpen oro ezeztagarria edo asegarria*[11] *baldin bada, hala izango da edozein adierazpen ere*.

Froga: Izan bedi A $\mathfrak{K}$-n ez dagoen adierazpena. Demagun $\mathfrak{x}$ aldagai askeak dauzkala. Berehala ikus daitekeenez, $(E\mathfrak{x})A$ ezeztagarria izatea A ezeztagarria izatetik ondorioztatzen da, eta alderantziz (1c lemaren eta 3. inferentzia erregelaren edota 5. axiomaren arabera hurrenez hurren); gauza bera gertatzen da 4. oin-oharrean asetasunari buruz finkatutako baldintzen arabera. Izan bedi (P)N $(E\mathfrak{x})A$-ren forma normala, orduan,

$$(E\mathfrak{x})A \sim (P)N \tag{1}$$

froga daiteke. Era berean, izan bedi

$$B = (x)(P)(Ey)\left\{N \,\&\, [F(x) \vee \overline{F(y)}]\right\}.$$[12]

Orduan,

$$(P)N \sim B \tag{2}$$

[10] «A ezeztagarria da»-k «$\overline{A}$ frogagarria da» esan nahi du.

[11] «Asegarria»-k eranskinik ez badarama honela ulertu behar da, hemen eta aurrerakoetan: «asegarria indibidualen eremu zenbakarrian». «Baliozkoa» ere hala ulertu behar da.

[12] x eta y aldagaiak ez dira (P)-n agertu behar.

frogagarria da (4. leman eta $(x)(Ey)[F(x) \vee \overline{F(y)}]$ adierazpenaren frogagarritasunean oinarrituta). B $\mathfrak{K}$-n dago, beraz, finkatutako baldintzen arabera, asegarria edo ezeztagarria da. Baina, (1)-en eta (2)-ren arabera, B-ren asegarritasunak $(E\mathfrak{x})$A-rena dakar, hortaz, A-rena ere bai, eta, berdin gertatzen da ezeztagarritasunarekin. Beraz, A ere asegarria edo ezeztagarria da.

III teorema dela eta, nahikoa da ondokoa frogatzea:

*$\mathfrak{K}$-adierazpen oro asegarria edo ezeztagarria da.*

Horretarako, $\mathfrak{K}$-adierazpen[13] baten gradua bere aurrizkian dagoen kuantifikatzaile unibertsalez osatutako bloke kopuru gisa definituko dugu, bata bestetik kuantifikatzaile existentzialek bereizten dituztenak. Eta, lehenik, hurrengoa frogatuko dugu:

IV Teorema: *k graduko adierazpen oro asegarria edo ezeztagarria bada, hala izango da k+1 graduko edozein adierazpen ere.*

Froga: Izan bedi (P)A k+1 graduko $\mathfrak{K}$-adierazpena. Izan bedi $(P) = (\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})(Q)$ eta $(Q) = (\mathfrak{u})(E\mathfrak{v})(R)$, non (Q)-k K gradua duen eta (R)-k k-1 gradua. Halaber, izan bedi F A-n agertzen ez den aldagai funtzional bat. Jarri dezagun orduan:[14]

$$B = (\mathfrak{x}')(E\mathfrak{y}')F(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}') \;\&\; (\mathfrak{x})(\mathfrak{y})[F(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \rightarrow (Q)A]$$

eta

$$C = (\mathfrak{x}')(\mathfrak{x})(\mathfrak{y})(\mathfrak{u})(E\mathfrak{y}')(E\mathfrak{v})(R)\{F(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') \;\&\; [F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \rightarrow A]\},[15]$$

Hortaz, 4. eta 6. lemak konbinatuta eta bi aldiz aplikatuz ondokoaren frogagarritasuna ematen du,

$$B \sim C; \tag{3}$$

horretaz gain, bistakoa da

$$B \rightarrow (P)A \tag{4}$$

ere baliozkoa dela. Orain, C-k *k* gradua dauka, eta hipotesiaren arabera, asegarria edo ezeztagarria da. Beraz, asegarria baldin bada, (P)A ere bada ((3)

[13] «Aurrizki baten gradua» terminoa zentzu berarekin erabiltzen da.
[14] Skolemek (1920) prozedura analogoa erabili zuen Löwenheimen teorema frogatzeko.
[15] $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ aldagai segidak binaka disjuntuak direla pentsatu behar da, noski.

eta (4) erabiliz). Ezeztagarria baldin bada, B ere bada ((3) erabiliz); hau da, $\overline{B}$ frogagarria da. Kasu horretan $\overline{B}$-n (Q)A jarriz gero F-ren ordez, orduan:

$$\overline{(\mathfrak{x}')(E\mathfrak{y}')(Q)A \,\&\, (\mathfrak{x})(\mathfrak{y})[(Q)A \rightarrow (Q)A]}$$

frogagarria da.

Baina, noski,

$$(\mathfrak{x})(\mathfrak{y})[(Q)A \rightarrow (Q)A]$$

frogagarria denez, hala izango da $\overline{(\mathfrak{x}')(E\mathfrak{y}')(Q)A}$ ere; hots, (P)A kasu horretan ezeztagarria da. Beraz, (P)A ezeztagarria edo asegarria da.

Orain, hurrengo hau frogatzea besterik ez da falta:

V Teorema: *1 graduko formula oro asegarria edo ezeztagarria da.*

Frogatu ahal izateko definizio gutxi batzuk beharrezkoak dira. Izan bedi $(\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})A(\mathfrak{x};\mathfrak{y})$ ((P)A bezala laburtua) 1 graduko edozein formula. $\mathfrak{x}$-rekin aldagai r-kotea eta $\mathfrak{y}$-rekin aldagai s-kotea adieraz ditzagun. r-koteetan pentsatzerakoan, $x_0$, x1, $x_2$,..., x¡,... segidatik hartutako eta azpi-indizeen batura gorakoaren arabera ordenatutakoetan pentsa dezagun:

$\mathfrak{x}_1$ -$(x_o, x_o, \ldots, x_o)$, $\mathfrak{x}_2$-$(x_1, x_o, \ldots, x_o)$, $\mathfrak{x}_3$-$(x_o, x_1, x_o, \ldots, x_o)$, etab.

eta (P)A-tik ondorioztatutako $\{A_n\}$ formulen sekuentzia definitzen dutela horrela:

$$A_1 = A(\mathfrak{x}_1; x_1, x_2, \ldots, x_s)$$
$$A_2 = A(\mathfrak{x}_2; x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{2s}) \,\&\, A_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = A(\mathfrak{x}_n; x_{(n-1)S+1}, X_{(n-1)S+2; \cdots;}\, x_{ns}) \,\&\, A_{n-1}$$

Izan bedi $x_{(n-1\ )s+1}, .., x_{ns}$ s-kotea $\mathfrak{y}_n$-ren bidez adierazia, hortaz, hurrengo hau dugu:

$$A_n = A(\mathfrak{x}_n; \mathfrak{y}_n) \& A_{n-1}. \tag{5}$$

Gainera, finkatutako ondoko baldintzaren bidez definitzen dugu $(P_n)A_n$:

$$(P_n)A_n = (Ex_0)(Ex_1)\ldots(Ex_{ns})A_n$$

Erraz egiazta daitekeenez, $x_0$ eta $x_{ns}$ bitarteko aldagaiak dira, hain zuzen, $A_n$-n agertzen direnak; eta beraz, $(P_n)$-ren bitartez lotuak daude. Halaber, agerikoa da $\mathfrak{x}_{n+i}$ r-koteko aldagaiak jada $(P_n)$-n agertzen direla (hortaz, ziurrenik, $\mathfrak{y}_{n+}$i-en agertzen direnetatik desberdinak dira). $(P'_n)$-ren bitartez denotatzen da $(P_n)$-n soberan geratu dena, $\mathfrak{x}_{n+i}$ r-koteko aldagaiak aipatzen ez direnean, horrela, aldagaien ordenari dagokionez izan ezik, $(E\mathfrak{x}_{n+i})(P_n) = (P_n)$.

Behin notazio hau onartuta, ondokoa dugu:

VI Teorema: *n ororentzat frogagarria da:*

$$(P)A \rightarrow (P_n)A_n.$$

Frogatzeko indukzio matematikoa erabiliko dugu:

I. $(P)A \rightarrow (P_1)A_1$ frogagarria da, ondokoa dugulako:

$$(\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})A(\mathfrak{x};\mathfrak{y}) \rightarrow (\mathfrak{x}_1)(E\mathfrak{y}_1)A(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1)$$

(3. lemaren eta 4. inferentzia erregelaren arabera) eta

$$(\mathfrak{x}_1)(E\mathfrak{y}_1)A(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1) \rightarrow (E\mathfrak{x}_1)(E\mathfrak{y}_1)A(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1)$$

(1a lemaren arabera).

II. *n* ororentzat $(P)A \;\&\; (P_n)A_n \rightarrow (P_{n+1})A_{n+1}$ frogagarria da hurrengoa dugulako:

$$(\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})A(\mathfrak{x};\mathfrak{y}) \rightarrow (\mathfrak{x}_{n+1})(E\mathfrak{y}_{n+1})A(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \qquad (6)$$

(3. lemaren eta 4. inferentzia erregelaren arabera) eta

$$(P_n)A_n \rightarrow (E\mathfrak{x}_{n+1})(P'_n)A_n \qquad (7)$$

(2. lemaren arabera). Horrez gain,

$$(\mathfrak{x}_{n+1)}(E\mathfrak{y}_{n+l})A(\mathfrak{x}_{n+1};\, \mathfrak{y}_{n+l}) \;\&\; (E\mathfrak{x}_{n+l}\; (P'_n)A_n$$

$$(E\mathfrak{x}_{n+1})[(E\mathfrak{y}_{n+1})A(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \;\&\; (P'_n)A_n] \qquad (8)$$

(1b lemaren arabera, F-ren ordez $(E\mathfrak{y}_{n+1})A(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1})$ jarriz eta G-ren ordez $(P'_n)A_n$ jarriz).

(8) inplikazioaren aurrekaria (6) eta (7) atzekarien konjuntzioa dela ohartzen bagara, garbi dago:

$$(P)A \;\&\; (P_n)A_n \rightarrow (E\mathfrak{x}_{n+1})\; [(E\mathfrak{y}_{n+1})A(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1}) \;\&\; (P'_n)A_n] \qquad (9)$$

frogagarria dela.

Halaber, (5)-etik eta 4., 6. eta 2. lemetatik eratortzen da hurrengoaren frogagarritasuna:

$$(E\mathfrak{x}_{n+1})[(E\mathfrak{y}_{n+1})A(\mathfrak{x}_{n+1};\mathfrak{y}_{n+1})\&(P'_n)A_n] \sim (P_{n+1})A_{n+1}] \qquad (10)$$

(9) eta (10)-etik II-a ondorioztatzen da eta II-tik I-arekin batera VI teorema.

Eman dezagun A-n $F_1, F_2,\ldots, F_k$ aldagai funtzionalak eta $X_1, X_2,\ldots, X_l$ aldagai proposizionalak agertzen direla. Orduan, $A_n$ honako forma hau duten oinarrizko osagaiez eraikiko da:

$$F_1, (x_{pl},\ldots, x_{q1}), F_2(x_{p2},\ldots, x_{q2}),\ldots; X_1, X_2,\ldots, X_l$$

$\vee$ eta — eragiketen bidez bakarrik. $A_n$ formula bakoitzari $B_n$ kalkulu proposizionaleko formula bat egokituko diogu, $A_n$-ren oinarrizko osagaien ordez aldagai proposizionalak jarriz eta osagai desberdinak (nahiz eta aldagai indibidualen notazioan baino ez desberdindu) aldagai proposizional desberdinez ordezkatzen ditugula ziurtatuz. Bestalde, «(P)A asetzen duen n mailako sistema» bezala, z ($O \leqslant z \leqslant ns$) osoen eremuan definitutako $f_1^{(n)}, f_2^{(n)},\ldots, f_k^{(n)}$ funtzioen nahiz $w_1^{(n)}, w_2^{(n)},\ldots, w_1^{(n)}$ egibalioen eremuan definitutako $X_1, X_2,\ldots, X_1$ aldagai proposizionalen sistema ulertzen dugu. Sistema honetan $A_n$-n $F_i$-ak $f_i^{(n)}$- ez ordezkatuz, $x_i$ -ak i zenbakiez ordezkatuz eta $X_i$-ak dagokien $w_i^n$ egibalioez ordezkatuz, egiazko proposizio bat lortzen da. Begi bistakoa denez, n mailako sistema asetzaileak existituko dira baldin eta soilik baldin $B_n$ asegarria bada.

$B_n$ bakoitza kalkulu proposizionaleko formula bat denez asegarria edo ezeztagarria da (7. lema). Beraz, bi kasuok baino ezin zaizkigu bururatu:

1. Gutxienez $B_n$ bat ezeztagarria da. Orduan, erraz ikus daitekeenez (2., 3. inferentzia erregelak; 1c lema) dagokion $(P_n)A_n$ ere ezeztagarria da, eta ondorioz, $(P)A \rightarrow (P_n)A_n$-ren frogagarritasuna dela eta, (P)A ere ezeztagarria da.

2. Ez dago ezeztagarria den $B_n$-rik; beraz, denak asegarriak dira. Orduan, maila guztietako sistema asetzaileak daude. Haatik, maila bakoitzeko sistema asetzaile kopuru finitua baino ez dagoenez (indibidualen eremu elkartuak finituak direlako), eta gainera, *n+1* mailako sistema asetzaile orok *n* mailako beste sistema asetzaile bat duenez bere baitan[16] ($A_n$-ak ondoz ondoko & konjuntzioen bitartez eraikitzeak argi uzten duenez), arrazonamen-

[16] $\{f_1, f_2,\ldots, f_k; w_1, w_2,\ldots, w_1\}$ sistema bat $\{g_1, g_2,\ldots, g_k; v_1, v_2,\ldots, v_1\}$ beste baten zati izateak zera esan nahi du:

1. $f_i$-ko indibidualen eremua $g_i$-ko indibidualen eremuaren zati da,
2. $f_i$ eta $g_i$ eremu murriztuagoaren barnean bat datoz,
3. edozein i-rentzat, $v_i = w_i$

du ezagunak jarraituz ondorioztatzen da, kasu honetan badela $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ sistema asetzaileen segida bat ($S_k$ $k$ mailakoa izanik), bakoitzak aurrekoa partetzat duena. Orain, zenbaki osoen eremuan $S = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k ; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_1\}$ sistema bat definituko dugu finkatutako ondorengo baldintzen bitartez:

1. $\phi_p(a_1, \ldots, a_i)$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$ betetzen da, baldin eta soilik baldin, gutxienez goiko segidako $S_m$ batentzat (eta, beraz, hurrengo guztientzat ere bai) $f_p^{(m)}$ $(a_1, \ldots, a_i)$ betetzen bada.
2. $\alpha_i = w_i^{(m)}$ $(1 \leqslant i \leqslant 1)$ gutxienez $S_m$ batentzat (eta, hortaz, ondorengo guztientzat ere bai).

Beraz, agerikoa da, S-k (P)A formula egiazkoa egiten duela. Kasu horretan, gainera, (P)A asegarria da, eta horrekin amaitzen da goian emandako sistema axiomatikoaren osotasunaren froga. Kontuan har dezagun orain frogatutako baliokidetasunak: «baliozkoa = frogagarria» zenbakarria ez denaren zenbakarrirako erredukzioa dakarrela berarekin erabakitze arazori dagokionez, «baliozkoa» zenbakarria ez den funtzioen multzoari buruzkoa delako; «frogagarria» froga formalen multzo zenbakarriaz baino ari ez den bitartean.

Bai I Teorema eta bai II Teorema norabide anitzetan orokortu daitezke. Lehendabizi, erraza da identitate nozioa (indibidualen artekoa) kontuan hartzea, goiko 1-6 axiomei beste bi erantsiz

7. $x = x$          8. $x = y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]$

Goian genuen analogoa gertatzen da formulen hedatutako eremuan ere:

VII Teorema: *Baliozkoa den hedatutako eremuko formula oro* (zehatzago: indibidualen eremu guztietan baliozkoa bada) *frogagarria da*,

eta VII-rekiko baliokidea da hurrengoa:

VIII Teorema: *Hedatutako eremuko formula oro ezeztagarria edo asegarria da* (eta, are gehiago, asegarriak finituak edo zenbakarriak diren indibidualen eremuetan).

Frogatzeko eman dezagun A-k hedatutako eremuko edozein formula adierazten duela. B formula bat eraikiko dugu A, $(x)(x = x)$ eta 8. axioman F aldagai funtzionalaren ordez, A-n agertzen diren aldagai funtzionalak jarriz lortutako formula guztien arteko biderkadura (& konjuntzioa) bezala, hau da, zehatzago esanda:

$$(x)(y)\{x = y \rightarrow [F(x) \rightarrow F(y)]\}$$

A-ko aldagai funtzional monadiko ororentzat,

$$(x)(y)(z)\{x = y \rightarrow [F\,(x,z) \rightarrow F\,(y,z)]\}\ \&$$
$$(x)(y)(z)\{x = y \rightarrow [F\,(z,x) \rightarrow F\,(z,y)]\}$$

A-ko aldagai funtzional diadiko ororentzat («=» bera barne) eta triadikoak nahiz poliadikoak diren A-ko aldagai funtzionalei dagozkien formulak. Izan bedi B′ formula, B formulen «=» zeinua B-n bestela agertzen ez den G aldagai funtzionalaz ordezkatzean lortzen dena. B′ adierazpenean ez da jada «=» zeinua agertzen, beraz, goian frogatutakoaren arabera ezeztagarria edo asegarria da. Ezeztagarria baldin bada, orduan, B ere ezeztagarria da, B′-tik lortzen baita «=» G-z ordezkatuz. Baina B, A eta 7. eta 8. axiometatik berehala ondorioztagarria den azpi-formula baten arteko biderkadura logikoa da. Hortaz, kasu honetan, A ere ezeztagarria da. Eman dezagun orain, B′(S) funtzio sistema jakin baten bitartez zenbakarria den indibidualen $\sum$ eremuan asegarria dela.[17] Begi bistakoa da, B′-ren eraketagatik g (hau da, G-k ordezkatuko duen S sistemako funtzioa) erlazio erreflexiboa, simetrikoa eta iragankorra dela; hortaz, $\sum$-ko osagaien partiketa bat ematen du, gainera, S sisteman dagoen funtzio batengan ezer gutxi aldatuko da klase bereko osagaiak euren artean ordezkatzen direnean. Klase bereko osagai guztiak euren artean identifikatzen baditugu (agian, klaseok indibidualen eremu berri bateko osagaitzat hartuz), g identitate erlazio bihurtzen da eta B-ren sistema asetzaile bat lortzen da; eta beraz, A-rena ere bai. Hortaz, jakina, A asegarria[18] edo ezeztagarria da.

I Teoremaren beste orokortze bat lor daiteke adierazpen logikoen multzo infinitu zenbakarriak kontuan hartuz. I eta II Teoremen analogoak ditugu berarentzat, hau da:

IX Teorema: *kalkulu funtzional murriztuko formulen multzo zenbakarri infinitu oro asegarria da* (hau da, sistemako formula guztiak aldi berean asegarriak dira) *edo badauka azpisistema finitu bat produktu logikoa ezeztagarria duena.*

IX hurrengotik zuzenean ondorioztatzen da:

X Teorema: *Formula sistema infinitu zenbakarri bat asegarria izan dadin, beharrezkoa eta nahikoa da, haren azpisistema finitu oro asegarria izatea.*

X Teorema frogatzeko, lehenik eta behin, 1 graduko formula normalen sistemara muga gaitezkeela ohartu behar dugu, indibidualen formuletarako III eta IV teoremen frogarako erabilitako prozedura behin eta berriz aplika-

[17] A-n ere aldagai proposizionalak agertuz gero, S-k funtzioak ez ezik, egibalioak ere izan beharko ditu, noski, aldagai proposizional horientzako.

[18] Eta, are gehiago, gehienez zenbakarria den eremu batean (indibidualen $\sum$ domeinu zenbakarriko klase disjuntuez osatzen baita).

tuz, $\sum$ formula sistema orori 1 graduko $\sum'$ formula normalen sistema egoki diezaiokegu, $\sum$-ren edozein azpi-sistemaren asegarritasuna dagokion $\sum'$-ren azpisistemaren asegarritasunaren baliokidea izanik.

Izan bedi,

$$(\mathfrak{x}_1)(E\mathfrak{y}_1)A_1(\mathfrak{x}_1;\mathfrak{y}_1),\ (\mathfrak{x}_2)(E\mathfrak{y}_2)A_2(\mathfrak{x}_2;\mathfrak{y}_2),\ldots,\ (\mathfrak{x}_n)(E\mathfrak{y}_n)A_n(\mathfrak{x}_n;\mathfrak{y}_n),\ldots$$

$\sum$ lehen graduko adierazpen normalen sistema zenbakarri bat, izan bedi $\mathfrak{x}_i$ $r_i$-kotea eta $\mathfrak{y}_i$ aldagaien $s_i$-kotea. Izan bedi $\mathfrak{x}_1^i$, $\mathfrak{x}_2^i$,..., $\mathfrak{x}_n^i$,..., $x_0$, $x_1$, $x_2$,..., $x_n$,..., segidatik hartutako eta indizeen batuketa gorakorraren arabera ordenatutako $r_i$-kote guztien segida; are gehiago, izan bedi $\mathfrak{y}_k^i$ goiko sekuentzian aipatutako aldagaien $s_i$-kotea,

$$\mathfrak{y}_1^1,\ \mathfrak{y}_2^1,\ \mathfrak{y}_1^2,\ \mathfrak{y}_3^1,\ \mathfrak{y}_2^2,\ \mathfrak{y}_1^3,\ \mathfrak{y}_4^1,\ldots$$

aldagaien segida $\mathfrak{y}_k^i$ bakoitza dagokion x-ko $s_i$-koteaz ordezkatzean, $x_1$, $x_2$,..., $x_n$,... segidaren berdina bihurtzen dena. Era berean, $\{B_n\}$ formulen segida definituko dugu, goiko modu berean, finkatutako hurrengo baldintzen bitartez:

$$B_1=A_1\,(\mathfrak{x}_1^1;\mathfrak{y}_1^1),$$
$$B_n=B_{n-1}\ \&\ A_1(\mathfrak{x}_n^1;\mathfrak{y}_n^1)\ \&\ A_2\,(\mathfrak{x}_{n-1}^2;\mathfrak{y}_{n-1}^2)\ \&\ldots$$
$$\&\ A_{n-1}\,(\mathfrak{x}_2^{n-1};\mathfrak{y}_2^{n-1})\ \&\ A_n\ A_{n-1}\,(\mathfrak{x}_1^n;\mathfrak{y}_1^n).$$

Begi bistakoa da, $(P_n)B_n$ (hots, $B_n$-tik lortzen den formula bertan agertzen diren aldagai indibidual guztiak kuantifikazio existentzialen bidez lotuak direnean) goian emandako $\sum$ sistemako lehen n adierazpenen ondorioa dela. Beraz, $\sum$-ko azpisistema mugatu oro asegarria bada, orduan edozein $B_n$ ere hala da. Baina, $B_n$ osoa asegarria baldin bada, orduan $\sum$ sistema osoa ere asegarria da (V Teorema frogatzeko -ikus goian 115. orr.- erabilitako arrazonamendua jarraituz) eta horrekin, X Teorema frogatzen da. IX eta X Teoremak zailtasun handirik gabe zabalduak izan daitezke «=» zeinua duten formula sistemetara, VIII Teoremaren frogan erabilitako prozeduraren bidez.

Eman daiteke, oraindik ere, IX Teoremaren beste bertsio bat aldagai proposizionalik gabeko formula sistemetara mugatuz, eta horiek, oinarrizko noziotzat bertan agertzen diren aldagai funtzionalak dituzten sistema axiomatikotzat hartuz. Orduan, IX Teoremak argi baieztatzen du, axioma sistema finitu nahiz zenbakarri bat bere axiometako «guztiak» eta «existitzen da» klase edo erlazioei ez, baizik eta indibidualei[19] bakarrik erreferentzia egiten badiete kontraesankorra dela; hau da, pauso formal eta finituen bidez kontraesan bat eraiki daitekeela edo eredu bat daukala.

---

[19] Hilberten geometriarako axioma sistemak, jarraitasunaren axiomarik gabe, adibide bezala balio lezake, agian.

Bukatzeko, 1-8 axiomen independentziaren auzia eztabaida dezagun. 1-4 axiomei dagokienez, P. Bernaysek[20] jada erakutsi du, bat bera ere ez dela beste hiruretatik ondorioztatzen. 5-8 axiomak eransteak ere beren independentzian eraginik ez duela Bernaysek erabilitako interpretazio berberen bidetik ikus daiteke, horrek aldagai funtzionalak eta «=» zeinua dituzten formuletara hedatzekotan finkatutako ondoko baldintzak onartzen ditugula kontuan hartuz:

1. Kuantifikatzaileak eta aldagai indibidualak kentzen dira.
2. Gainerako formula zatian aldagai funtzionalak aldagai proposizionaltzat hartzen dira.
3. «=» ikurra «bereizitako» balioek baino ezin dezakete ordezkatu.

Bosgarren axiomaren independentzia frogatzeko erlaziona dezagun formula bakoitzarekin, ager litezkeen

$$(x)F(x),\ (y)F(y),\ldots;\ (x)G(x),\ (y)G(y),\ldots;\ldots,$$ [21]

bezalako osagaiak, $X \vee \bar{X}$ -ez ordezkatuz lortzen dugun beste formula bat.

Horrela, 1-4 eta 6-8 baliozko formulak izatera igaroko dira, eta gauza bera gertatuko da, indukzio matematikoaren bitartez frogatu daitekeen bezala, axioma horietatik 1-4 inferentzia erregelen bidez eratorritako formulekin, 5. axiomak edozein modutan ez dauka ezaugarri hori. Zehazki modu berean froga daiteke 6. axiomaren independentzia, (x)F(x), (y)F(y),... etab.en ordez $X \vee \bar{X}$ jarriz. Zazpigarren axiomaren independentzia frogatzeko, esango dugu, 1-6 eta 8 axiomak (eta, beraz, horietatik eratorritako formula guztiak ere bai) baliozkoak izaten jarraitzen dutela identitate erlazioaren ordez erlazio hutsa jarriz gero; 7. axiomarekin, berriz, ez da hala gertatzen. Era berean, 1-7 axiometatik ondorioztatutako formulek baliozkoak izaten jarraitzen dute identitate erlazioaren ordez erlazio unibertsala jarriz; 8. axiomarekin (gutxienez bi indibidual dituen domeinuan), berriz, ez da hala gertatzen. Erraz ikus dezakegu, baita ere, 1-4 inferentzia erregeletako bat bera ere ez dela erredundantea, baina ez dugu hemen gai horretaz zehaztasun handiagoz jardungo.

---

[20] Ikus *Bernays* 1926.

[21] Hau da, F, G,... etab. aldagai funtzional monadikoak, aurretik kuantifikatzaile unibertsal bat dutenak, eta kuantifikatzaile unibertsalaren eragina F, G,...horiez osatutako formulara eta dagokion aldagai indibidualera mugatzen da.