



---

# Itsas maskorrak eta infografia

---

Gradu Amaierako Lana  
Matematikako Gradua

Judith Echevarrieta Ibarra

Javier Gutiérrez García  
Josu Arroyo Olea  
Irakasleek zuzendutako lana

Leioa, 2020ko iraila



# Gaien Aurkibidea

<b>Sarrera</b>	<b>v</b>
<b>1 Eredu geometrikoaren oinarria</b>	<b>1</b>
1.1 Egiturazko kurbaren eraikuntza . . . . .	1
1.1.1 Egiturazko kurbaren proiektzioa . . . . .	2
1.1.2 Egiturazko kurba . . . . .	7
1.1.2.1 Beta parametroaren esanahi geometrikoa . . . . .	8
1.1.2.2 Lortutako adierazpenak betetzen dituen propietateak .	10
1.2 Kurba sortzailearen eraikuntza . . . . .	11
<b>2 Eredu geometriko orokorra</b>	<b>15</b>
2.1 Elipsearen orientazioa . . . . .	15
2.2 Parametroen esanahi geometrikoa . . . . .	18
<b>3 Eredu geometriko osatua I</b>	<b>21</b>
3.1 Noduludun kurba sortzaile orokorraren eraikuntza . . . . .	21
3.2 Kurba sortzaileen noduluen luzera periodikoa . . . . .	23
3.3 Noduludun kurba sortzailea helize konikoaren gainean . . . . .	24
3.4 Bost parametro berrien esanahi geometrikoa . . . . .	25
<b>4 Eredu geometriko osatua II</b>	<b>27</b>
4.1 Kurba sortzaile orokorraren eraikuntza . . . . .	27
4.2 Kurba sortzaileen noduluen luzera periodikoa . . . . .	30
4.3 Kurba sortzailea helize konikoaren gainean . . . . .	31
4.4 Parametro berrien esanahi geometrikoa . . . . .	31
<b>5 Eredu geometrikoaren aplikazioak</b>	<b>33</b>
<b>6 Itsas maskorren irudikapena</b>	<b>37</b>
6.1 Landutako maskorren irudikapen errealista . . . . .	37
6.2 Adibide gehiago . . . . .	39
6.2.1 $\beta = \frac{\pi}{2}$ baliiodun itsas maskorrak . . . . .	39
6.2.2 $\beta$ handidun, $\alpha$ txikidun eta noduludun itsas maskorrak	40
6.2.3 Testuren esanahi biologikoa . . . . .	40

A Lehenengo bost kapituluetakoko argazkien irudikapen errealistak	41
B Adibide gehigarrien irudikapen errealistak	43
Bibliografia	45

# Sarrera

Naturan era askotako egiturak aurki daitezke, eta sarritan betetzen dituzten propietateengatik imitatzen edota horien kopiak sortzen saiatu da gizakia. Hala ere, egitura horien artean batzuk oso konplexuak eta landuak direnez, pentsa daiteke horiek deskribatzeko eredu geometriko korapilatsuak behar direla, eta ondorioz, eredu horiek ulertzeko ezagutza matematiko berezia behar dela. Lan honen bitartez erakutsiko da pentsamendu hori kasu guztietan betetzen ez dela, hain zuzen itsas maskor gehienak ezagutza berezirik behar ez duten eredu matematiko sinpleekin deskribatu daitezkeela ikusiko da.

Itsas maskorrek itsas hondoko presio altuak, olatuen talka bortitzak eta harrapakarien erasoak jasateko prest dauden egitura naturalak dira. Beraz, interesgarria izango litzateke egitura horiek imitatzea; esaterako gizakiei maskorrek moluskuei eskaintzen dioten babes berdina eskainiko dioten ibilgailuak sortzeko, edota lapek duten itsasgarritasun berdina duten eraikinak eraikitzeko (fenomeno naturalei aurre egiteko prest egongo direnak).

Horregatik guztiagatik, lan honen helburua zenbait itsas maskorren gainazalak imitatzea izango da. Horretarako, lehenik ahal denik eta itsas maskor gehien gainazalak deskribatzeko gai izango den eredu geometrikoa eraiki eta azalduko da. Ondoren, hori erabiliz, zenbait itsas maskorren irudi errealistak lortuko dira benetako irudiak imitatuz.

Lanaren lehenengo zatian eredu geometrikoa eraikiko da. Lehendabizi, 1. kapituluan eredu geometrikoaren oinarria izango diren bi kurben adierazpenak lortuko dira. 2. kapituluan aurreko kapituluko adierazpenak erabiliz, zenbait parametroren menpeko lehen eredu geometrikoa lortzen da (hasierako bi kapitulu horiek [4] eta [5] artikuluetan oinarrituta daude). Hala ere, lehen eredu horrekin deskribatu ezin daitezkeen zenbait maskor daudenez, parametro berri batzuk gehituz 3. eta 4. kapituluetan eredu osatu egiten da ([3] lanean oinarrituta). Lau kapitulu horietan zehar agertzen diren irudi laguntzaile guztiak  $\text{\LaTeX}$ -ek duen  $\text{\textit{TikZ}}$  izeneko paketearekin eginda daude, lortutako eredu geometrikoen benetako adierazpenak erabiliz.

3. eta 4. kapituluek egitura berdina dute. Biak hasten dira aurreko kapituluko ereduak deskribatu ezin dezakeen naturako maskor batzuen argazkiekin. Kapitulu zehar, aurreko kapituluko ereduari parametroak gehituz,

argazkietako maskorrentzako eredu berria eraikitzen da. Azkenik, kapitulu-  
luei amaiera emateko, eredu berria erabiliz eta *Mathematica* programaren  
bitartez hasierako argazkietako maskorrak modelizatu egiten dira (argazkiak  
aukeratzeko eta parametroen estimazioak egiteko [11] eta [12] web orrialdeak  
erabili dira).

Naturako itsas maskorren irudiak lortzeaz gain, 5. kapitulan aurrean  
lortutako ereduari esker espezie batzuen eboluzio hipotetikoaren simulazioa  
eta animazioa egiten da ([2] lanean oinarrituz), *Mathematica* programa era-  
biliz.

Lanaren azken zatian, nahiz eta aurreko kapituluetan itsas maskorren  
irudiak eta animazioak sortzen diren, lanaren helburua naturako itsas mas-  
korrak imitatzea denez, 6. kapitulan *POV-Ray* programaren bitartez irudi  
errealistak lortzen dira eta lanean zehar jarraitutako prozesua modu ikus-  
garri batean laburbiltzen duen bideoa eraikitzen da. *POV-Ray* programak  
argi izpiengatik sortutako islapenen eta itzalen simulazioa baimentzen du.  
Horri esker, bizitza errealeko eguzkiaren argiak edota argi artifizial batek  
objektuetan duen eragina simulatu daiteke. Ondorioz, *Mathematica*-rekin  
lortutakoak baino askoz irudi errealistagoak lortzen dira.

Amaitzeko, hasieran aipatu bezala, lanean eraikitako eredu geometri-  
koak ulertzeko ez da beharrezkoa ezagutza matematiko berezirik. Hortaz,  
lana bideratuta dago baita ere matematikariak ez direnentzako ikusgarria  
eta erakargarria izateko. Horregatik, lanean zehar eredu osatzen duten pa-  
rametroen esanahi geometrikoa azaltzearekin batera, esanahi biologikoa ere  
aipatzen da (1.1.1 azpiatalaren amaieran, 2.2 eta 4.4 ataletan eta 5. kapitu-  
luaren amaieran, [7] eta [1] idatzietan oinarrituta). Gainera, *Mathematica*-  
rekin lortutako irudietan eta *POV-Ray*-rekin egindako bideoan (TikZ-ekin  
egindako irudietan ez bezala), angeluak adierazten dituzten parametroen  
balioak graduetan ematen dira radianetan eman beharrean.

# 1. Kapitulu

## Eredu geometrikoaren oinarria

Itsas maskorrak helize koniko batean zehar tamainaz handitzen doan kurba itxi bat mugitzerakoan lortzen diren hiru dimentsiotako gainazalak dira. Helize konikoa itsas maskorraren *egiturazko kurba* da (forma orokorra zehazten duena) eta kurba itxia gainazalaren *kurba sortzailea* da (maskorren sekzioak osatzen dituztenak). Bi kurba horiek itsas maskorraren eredu geometrikoaren oinarria osatzen dute.

Moluskuek haztean, oskolaren materiala azkarrago sortzen dute maskorraren kanpoaldean barnealdean baino, hau da, maskorra ez da handitzen modu uniforme batean. Hori dela eta, egiturazko kurbatzat helize zirkularra hartu beharrean, helize konikoa hartzen da. Bestalde, kurba sortzailetzat itxia den edozein kurba har daiteke leuna den bitartean (naturako kurbak horrelakoak baitira) (*cf.* [4, 5]).

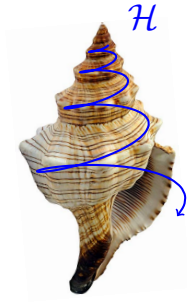
Kapitulu honetan helize konikoaren adierazpen egokia lortzeaz gain, kurba sortzaile sinpleenaren adierazpena lortuko da (sinpleena hurrengo kapituluetan bertatik abiatuz, kurba sortzaile konplexuagoak eraikiko direlako).

### 1.1 Egiturazko kurbaren eraikuntza

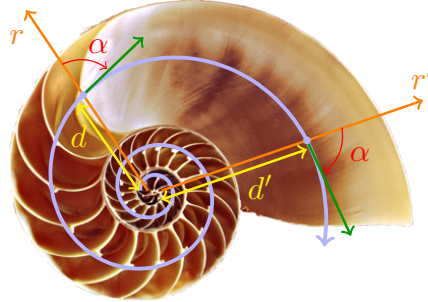
Itsas maskorren eredu geometriko orokorrera heltzeko eman beharreko lehenengo urratsa horren forma orokorra zehazten duen egiturazko kurbaren adierazpena lortzea da. Aurrean esan bezala, egiturazko kurbatzat helize konikoa hartuko da eta  $\mathcal{H}$  izena izango du (begiratu 1.1.a irudia). Atal honetan  $\mathcal{H}$ -ren ekuazio parametrikokoak lortuko dira.

### 1.1.1 Egiturazko kurbaren proiektzioa

Helize konikoaren  $OXY$  planoaren gaineko proiektzioa kiribil logaritmiko bat da (begiratu 1.6.a irudia). Kiribil honen berezitasuna hurrengoa da: koordinatu-jatorritik eta kiribilaren edozein puntutik igarotzen den zuzenerdiaren eta puntu horretako bektore ukitzalearen arteko angelu zeinuduna,  $\alpha$ , konstante mantentzen da, koordinatu-jatorritik kiribilerainoko distantzia handitzen den heinean (begiratu 1.1.b irudia, bertan  $d < d'$  da eta  $\alpha$  konstantea da). Hori dela eta, kiribila koordinatu-jatorritik igaroko balitz, kiribilaren puntu horretako irudiko  $r$  zuzena ez litzateke bakarria izango eta ondorioz  $\alpha$  ere ez. Hortaz, kiribil logaritmikoa jatorritik igarotzen ez den kurba bat izango da.



(a) Egiturazko kurba [26]



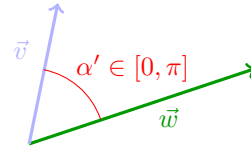
(b) Goitiko bista [27]

### 1.1. Irudia

**Oharra 1.1.1** (Bi bektoreen arteko angelu zeinuduna).

Izan bitez  $OXY$  planoko  $\vec{v}$  eta  $\vec{w}$  bi bektore. Orduan beraien arteko angelua

$$\alpha' = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}\right) \in [0, \pi] \text{ izango da.}$$



$\vec{v}$  eta  $\vec{w}$  bektoreen arteko angelu zeinuduna definitzeko,  $\alpha'$  angelua positiboa kontsideratuko da baldin eta erloju orratzen norabidedun angelua bada. Hau da,  $\vec{v}$ -tik  $\vec{w}$ -rako  $\alpha'$  angelua erloju orratzen norabidean aurkitzen bada, orduan  $\alpha = \alpha' \in [0, \pi]$  izango da (1.3.a eta 1.4.a irudietakoak), bestela  $\alpha = -\alpha' \in [-\pi, 0)$  izango da (1.3.b eta 1.4.b irudietakoak).

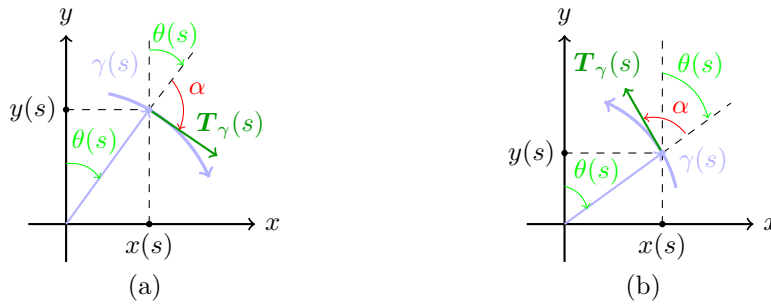




### 1.3. Irudia

Azpiatal honetan definituko diren angelu guztiak zeinudunak kontsideratuko dira eta beraien norabide positiboa erloju orratzen norabidea izango da, kontrakoa esaten ez den bitartean.

Betetzen duen propietate horretan oinarrituz, kiribil logaritmikoaren abiadura unitariodun  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizazioa lortuko da, kurbaren norabidea 1.4.a irudian irudikatutakoa izan dadin, hau da,  $\alpha$  angeluaren balio positiboetarako (kurbaren norabidea 1.4.b irudikoa izateko, jarraitu beharreko prozesua guztiz antzekoa da).



### 1.4. Irudia

Izan bitez  $\rho(s) = \|\gamma(s)\| = \sqrt{x(s)^2 + y(s)^2}$  eta  $\theta(s)$  angelua  $OY$  ardatzak eta  $\gamma(s)$  bektoreak osatzen duten angelua  $s \in \mathbb{R}$  guztietarako. Kasu honetan ere,  $\theta(s)$  angeluaren norabide positibotzat erloju orratzen norabidea kontsideratuko da (erreparatu 1.4 irudia).

Alde batetik,  $\gamma$  kurba parametrikokoaren adierazpena  $\rho$  eta  $\theta$  koordenatu polarrak erabiliz:

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = \rho(s)(\sin \theta(s), \cos \theta(s)).$$

Beraz,

$$\gamma'(s) = (\rho'(s) \sin \theta(s) + \rho(s)\theta'(s) \cos \theta(s), \rho'(s) \cos \theta(s) - \rho(s)\theta'(s) \sin \theta(s)).$$

Bestetik,  $\gamma(s)$  eta  $\mathbf{T}_{\gamma}(s)$  bektoreen arteko angelua  $\alpha$  denez:

$$\gamma'(s) = \mathbf{T}_{\gamma}(s) = (\sin(\alpha + \theta(s)), \cos(\alpha + \theta(s))).$$

Lortutako  $\gamma'(s)$ -ren bi adierazpenak berdinduz:

$$\begin{cases} \rho'(s) \sin \theta(s) + \rho(s)\theta'(s) \cos \theta(s) = \sin \alpha \cos \theta(s) + \cos \alpha \sin \theta(s) \\ \rho'(s) \cos \theta(s) - \rho(s)\theta'(s) \sin \theta(s) = \cos \alpha \cos \theta(s) - \sin \alpha \sin \theta(s) \end{cases}$$

Lehenengo ekuazioari  $\sin \theta(s)$  biderkatuz, bigarrenari  $\cos \theta(s)$  biderkatuz eta biak batuz, beheko sistemako lehen ekuazioa lortzen da. Eta lehenengo ekuazioari  $\cos \theta(s)$  biderkatuz, bigarrenari  $\sin \theta(s)$  biderkatuz eta biak kenduz, beheko sistemako bigarren ekuazioa lortzen da.

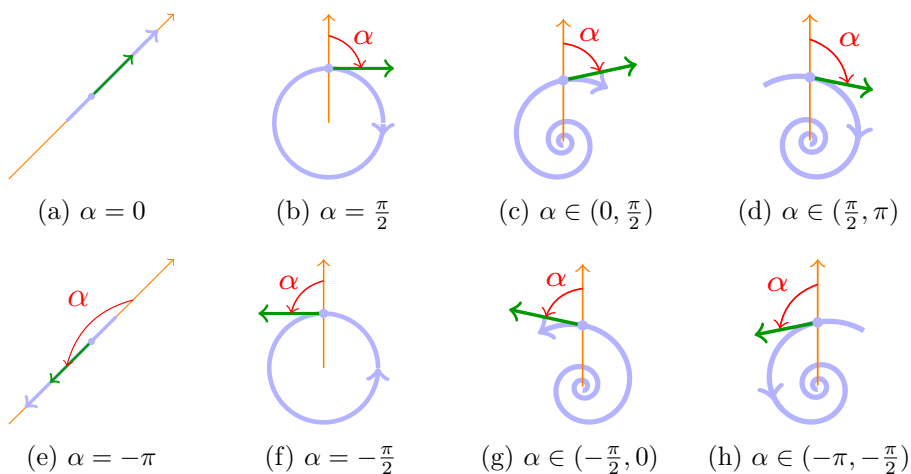
$$\begin{cases} \rho'(s) = \cos \alpha \\ \rho(s)\theta'(s) = \sin \alpha \end{cases}$$

Lehenengo ekuaziotik,  $\rho(s) = s \cos \alpha + \rho_0$  lortzen da  $s \in \mathbb{R}$  guztietarako non  $\rho_0 = \rho(0) = \|\gamma(0)\|$  den. Eta emaitza bigarrean ordezkatuz,

$$(s \cos \alpha + \rho_0)\theta'(s) = \sin \alpha, \quad (1.1)$$

ekuazioa lortzen da.

Aldiz, kurbaren norabidea 1.4.b irudikoa izateko, aurreko prozesua errepikatuz (1.1) ekuazio berdina lortzen da. Bi kasuetan aldatzen den gauza bakarra hurrengoa da: 1.4.b irudiko kasuan  $\alpha \in [-\pi, 0)$  dago eta  $\theta(s)$  angelua beherakorra da ( $\theta'(s) < 0$  da  $s$  guztietarako), eta 1.4.a irudiko kasuan aldiz,  $\alpha \in [0, \pi)$  dago eta  $\theta(s)$  angelua gorakorra da ( $\theta'(s) > 0$  da  $s$  guztietarako). Ondoren  $\alpha$  angeluaren araberako sailkapena egingo da:



### 1.5. Irudia

$\alpha = 0$  bada orduan (1.1) ekuazioa  $(s + \rho_0)\theta'(s) = 0$  izango da. Beraz  $\theta'(s) = 0$  izango da  $s \neq -\rho_0$  guztietarako, baina  $\theta'$  jarraitua denez  $\theta' = 0$  izan behar da. Ondorioz,  $\theta(s) = \theta_0$  izango da. Hortaz,

$$\gamma(s) = (s + \rho_0)(\sin \theta_0, \cos \theta_0).$$

$\alpha = -\pi$  deneko kasuan argudio berdinak erabiliz

$$\gamma(s) = (-s + \rho_0)(\sin \theta_0, \cos \theta_0)$$

lortzen da. Edozein kasutan,  $\gamma'$  konstantea denez,  $\gamma$  zuzen baten parte da (ikusi 1.5.a eta 1.5.e irudiak). Hau da,  $\alpha = 0$  eta  $\alpha = -\pi$  denerako  $\mathcal{H}$  plano baten barreneko kurba da eta hau ez dator bat itsas maskorren eredu geometrikoarekin.

Aldiz,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  bada orduan (1.1) ekuazioa  $\rho_0\theta'(s) = 1$  izango da, eta  $\rho_0 > 0$  denez  $\gamma$  jatorritik igarotzen ez den kurba bat delako,  $\theta(s) = \frac{s}{\rho_0} + \theta_0$  izango da. Hortaz

$$\gamma(s) = \rho_0 \left( \sin\left(\frac{s}{\rho_0} + \theta_0\right), \cos\left(\frac{s}{\rho_0} + \theta_0\right) \right).$$

$\alpha = -\frac{\pi}{2}$  denerako argudio berdinak erabiliz

$$\gamma(s) = \rho_0 \left( \sin\left(-\frac{s}{\rho_0} + \theta_0\right), \cos\left(-\frac{s}{\rho_0} + \theta_0\right) \right)$$

lortzen da. Beraz,  $\gamma$  zirkunferentzia baten parte da bi kasuetan (erreparatu 1.5.b eta 1.5.f irudiak). Hau da,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  eta  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$  denerako  $\mathcal{H}$  zilindro baten barreneko kurba da eta hau ere ez dator bat itsas maskorren eredu geometrikoarekin.

Hortaz, lau kasu posible gelditzen dira aztertzeko (ikusi 1.5 irudia):

- $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  deneko kasuan, kurbak erloju orratzen norabidea izango du eta jatorritik kurbarainoko distantzia txikituz joango da (erreparatu 1.5.d irudia).
- $\alpha \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$  deneko kasuan, kurbak erloju orratzen aurkako norabidea izango du eta jatorritik kurbarainoko distantzia txikituz joango da (erreparatu 1.5.h irudia).
- $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  deneko kasuan, kurbak erloju orratzen norabidea izango du eta jatorritik kurbarainoko distantzia handituz joango da (erreparatu 1.5.c irudia).
- $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  deneko kasuan, kurbak erloju orratzen aurkako norabidea izango du eta jatorritik kurbarainoko distantzia handituz joango da (erreparatu 1.5.g irudia).

Lehenengo bi kasuek ez dute kurbaren hazkuntza baimentzen, beraz kiribil logaritmikoaren kasuan  $\alpha$  angeluak ez ditu balio horiek hartuko. Aldiz, azken bi kasuetan kiribil logaritmikoaren propietatea betetzen denez,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  edo  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$  izango da. Lehenengo kasuan lortutako kurba *eskuin-birakaria* edo *destrogiroa* da eta bigarrenean *ezker-birakaria* edo *lebogihoa* da. Beraz, naturako itsas maskor gehienak destrogiro direnez (informazio gehiago azpiatal honen amaieran) suposatuko da  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  dela.

Hasteko,  $\gamma$  jatorritik igarotzen ez den kurba bat denez,  $s \cos \alpha + \rho_0 = \rho(s) = \|\gamma(s)\| > 0$  da eta beraz (1.1) ekuazioa

$$\theta'(s) = \frac{\sin \alpha}{s \cos \alpha + \rho_0}$$

izango da  $s \in (-\frac{\rho_0}{\cos \alpha}, +\infty)$  denerako. Hortaz

$$\theta(s) = \operatorname{tg} \alpha \ln(s \cos \alpha + \rho_0) + \theta_0, \quad s \in (-\frac{\rho_0}{\cos \alpha}, +\infty),$$

lortzen da non  $\theta_0 = \theta(\frac{1-\rho_0}{\cos \alpha})$  den eta

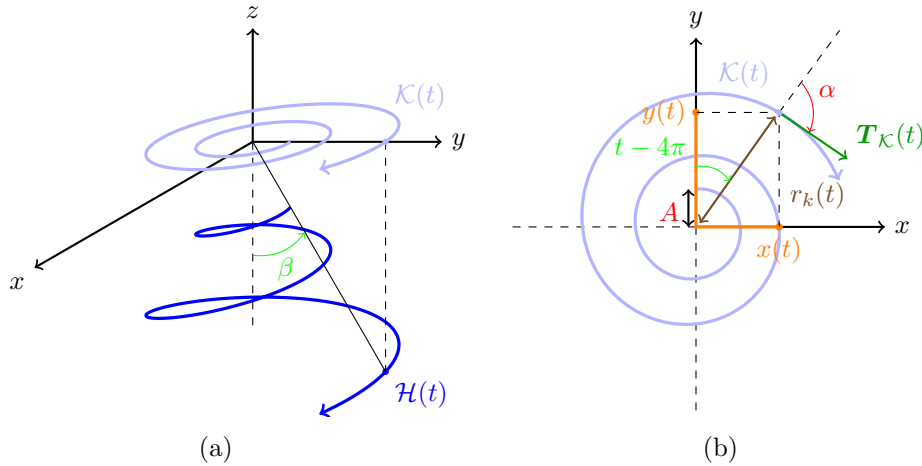
$$\gamma(s) = (s \cos \alpha + \rho_0)(\sin \theta(s), \cos \theta(s)), \quad s \in (-\frac{\rho_0}{\cos \alpha}, +\infty) \text{ izanik.}$$

Modu honetan lortutako  $\gamma$  kurba abiadura unitarioduna da. Hala ere, adierazpen hori ez da kurba deskribatzeko erabiltzen den ohiko adierazpena, baizik eta beste parametrizazio hau:

$\theta: (-\frac{\rho_0}{\cos \alpha}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  aplikazioa diferentziagarria, hertsiki gorakorra eta bijektiboa da. Beraz  $h = \theta^{-1}$  aplikazioa non  $h(t) = \frac{1}{\cos \alpha}(e^{(t-\theta_0)\cot \alpha} - \rho_0)$  den  $t \in \mathbb{R}$  guztietarako, difeomorfismoa da. Hortaz,  $\mathcal{K} = \gamma \circ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  kurba parametrikoa  $\gamma$  kurbaren berparametrizazio hau da:

$$\mathcal{K}(t) = e^{(t-\theta_0)\cot \alpha}(\sin t, \cos t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

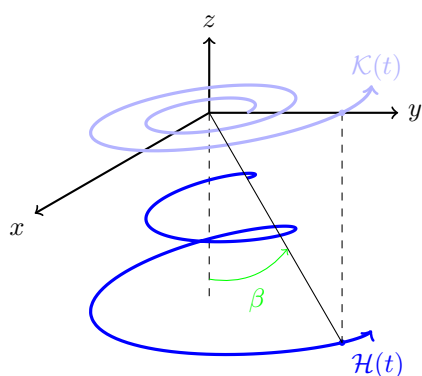
Lortutako emaitza hori kiribil logaritmikoaren ohiko parametrizazioa da.  $r_k(t) = \|\mathcal{K}(t)\| = e^{(t-\theta_0)\cot \alpha}$  denez orduan  $A = r_k(0) = \|\mathcal{K}(0)\| = e^{-\theta_0 \cot \alpha}$  kiribilaren *anplitudea* izango da (kiribiletik jatorrira dagoen distantzia,  $t = 0$  deneko unean) eta  $r_{ht}(t) = e^{t \cot \alpha}$  kiribilaren erradioaren *hazkunde-tasa* izango da, erreparatu 1.6.b irudia.



### 1.6. Irudia

Amaitzeko, azpiatalaren hasieran aipatu da  $\alpha \in [-\pi, 0)$  deneko kasurako jarraitu beharreko prozesua guztiz antzekoa dela. Zehazki lortuko litzatekeen kiribilaren adierazpena (1.2) adierazpenarekin bat dator, desberdintasun bakarra da orain  $\alpha$  angelu negatiboa dela eta  $\theta$  aplikazioa beherakorra. Ondorioz, kasu horretan lortzen den  $\mathcal{H}$  kurba ezker-birakaria edo lebegioira da (erreparatu 1.7.a irudia).

Naturan egiturazko kurba lebogirola duten maskorrek oso urriak dira, gehienak eskuin-birakariak edo destrogiorak baitira (1.6.a irudiko kasua). Maskorrei dagokien kiribilaren norabidearen jatorria ezezaguna da, ez dago argi garapenean zeharreko gabezi baten ondorioa den edota ezaugarri hereditario bat den. Hala ere, jadanik frogatu da *Lymnaea stagnalis* izeneko itsas maskorretan (erreferatu 1.7.b irudia) zehazki zortzi zeluladun enbrioia manipulatu, hasiera batean destrogiora izan behar zen maskorra lebogirola den maskor batean bilakatu daitekeela (1.7.b irudian elkarren aurkako norabidean kiribildutako *Lymnaea stagnalis* izeneko bi barraskilo ikus daitezke, ezkerrekoa lebogirola da eta eskuinekoa destrogiora) (cf. [7]).



(a)

(b) *Lymnaea stagnalis* [28]

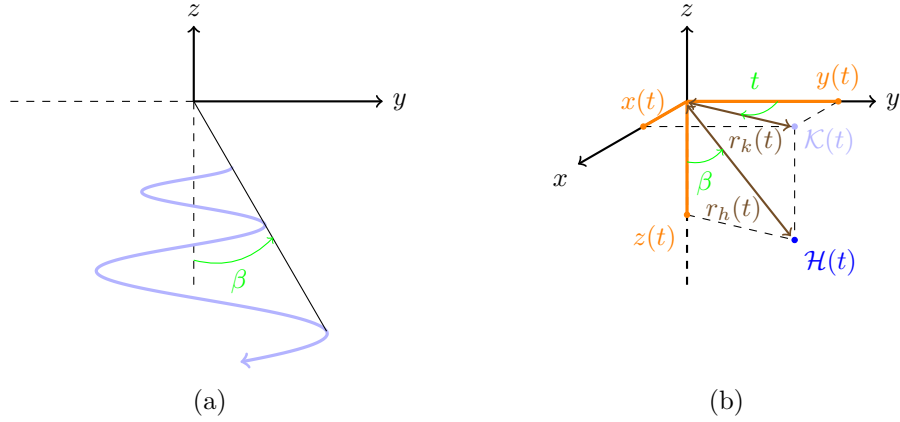
## 1.7. Irudia

**Oharra 1.1.2** (Angelu zeinudunak irudietan).

Hemendik aurrera irudietan geizien bitartez irudikatuta agertuko diren angeluen norabideak, angeluen norabide positiboak izango dira. Hau da, angeluen norabide positiboa ez da zertan izan behar erloju orratzen norabidea. Esaterako, 1.6.b irudian  $t$  angeluaren norabide positiboa erloju orratzen norabidea da ( $t = \theta(s)$  baita), hala ere, 1.6.a irudiko  $\beta$  angeluaren norabide positiboa ez da erloju orratzen norabidea (angelu hori hurrengo azpiatalean definituko da).

### 1.1.2 Egiturazko kurba

Behin  $\mathcal{H}$ -ren proiektzioaren adierazpena lortuta, proiektzioaren puntu bakoitzari altuera egokia esleituz  $\mathcal{H}$  kurbaren ekuazio parametrikokoak lor daitezke. Horretarako, kontuan hartu beharra dago  $\mathcal{H}$  kono baten gaineko kurba dela, beraz  $OZ^-$  ardatzerdiak eta kurbako edozein puntu eta koordinatu-jatorria lotzen dituen segmentuak angelu bat osatzen dute,  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Angelu hori konstantea da  $\mathcal{H}$  kurbako puntu guztietan eta helize konikoaren *handipen angelua* deritzo (erreferatu 1.8.a irudia, bertan helize konikoaren  $OYZ$  planoaren gaineko proiektzioa agertzen da).



### 1.8. Irudia

$\beta$  parametroa erabiliz,  $\mathcal{H}$  kurbako puntuak eta proiektzioarenak erlaziona daitezke, hain zuzen:  $r_h(t) \sin \beta = r_k(t)$  non  $r_h(t) = \|\mathcal{H}(t)\|$  den  $t \in \mathbb{R}$  guztietarako. Gainera,  $\beta = 0$  izango balitz,  $\mathcal{H}$ -ren kurba geometrikoa  $OZ^-$  zuzenerdia izango litzateke, eta beraz bere proiektzioa  $OXY$  planoaren gainean jatorria izango litzateke ( $\mathcal{K}$ -ren kurba geometrikoa jatorria litzateke). Baina hori ezinezkoa da, kiribila jatorritik igarotzen ez den kurba bat baita. Hortaz,  $\sin \beta \neq 0$  dela suposatuko dugu eta  $r_h(t) = \frac{r_k(t)}{\sin \beta}$  jar daiteke.

Informazio hori guztia erabiliz eta 1.8.b irudian oinarrituz,  $\mathcal{H}$ -ren puntu baten koordenatuak hurrengoak direla ikus daiteke:

$$\begin{cases} x^{\mathcal{H}}(t) = r_k(t) \sin t = Ae^{t \cot \alpha} \sin t \\ y^{\mathcal{H}}(t) = r_k(t) \cos t = Ae^{t \cot \alpha} \cos t \\ z^{\mathcal{H}}(t) = -r_h(t) \cos \beta = -Ae^{t \cot \alpha} \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = -Ae^{t \cot \alpha} \cot \beta \end{cases} \quad (1.3)$$

Hortaz,  $\mathcal{H}(t) = (x^{\mathcal{H}}(t), y^{\mathcal{H}}(t), z^{\mathcal{H}}(t))$  adierazpena lortzen da, non  $x^{\mathcal{H}}(t)$ ,  $y^{\mathcal{H}}(t)$  eta  $z^{\mathcal{H}}(t)$  goian adierazitakoak diren. Hau da:

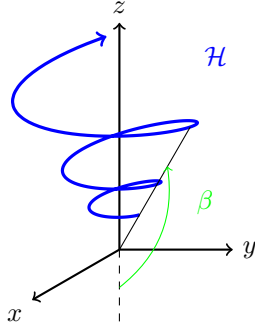
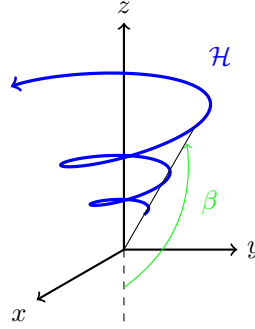
$$\mathcal{H}(t) = Ae^{t \cot \alpha} (\sin t, \cos t, -\cot \beta) = e^{(t-\theta_0) \cot \alpha} (\sin t, \cos t, -\cot \beta)$$

da  $\mathcal{H}$ -ren parametrizazio bat, non  $t \in \mathbb{R}$  den.

#### 1.1.2.1 Beta parametroaren esanahi geometrikoa

$\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  kontsideratzearen arrazoia da  $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  kasua guztiz antzekoa dela. Azpialt honetan  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  deneko eta  $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  deneko kasuen arteko erlazioa aztertuko da.

1.9 irudian  $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  deneko kasua ikus daiteke. Ohartu, 1.9.a irudian  $\alpha$  angelu positiboa den arren, egiturazko kurba lebo giro dela eta 1.9.b irudian  $\alpha$  angelu negatiboa izanda, egiturazko kurba destrogio dela. Hau da, egoera hau  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  deneko kasuko aurkako egoera da.

(a)  $\beta = 150^\circ$  eta  $\alpha = 84.3^\circ$ (b)  $\beta = 150^\circ$  eta  $\alpha = -84.3^\circ$ 

### 1.9. Irudia

$\alpha$  finko baterako (kasu honetan berdin da positiboa edo negatiboa den), izan bedi  $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ , orduan  $\pi - \beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  izango da. Egoera honetan hurrengoak ondorioztatzen dira:

- $\alpha$  eta  $\beta$  parametrodun egiturazko kurba ( $\mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}$ )  $OY$  ardatzaren inguruan 180 gradu biratuz gero,  $-\alpha$  eta  $\pi - \beta$  parametrodun egiturazko kurba lortzen da ( $\mathcal{H}_{-\theta_0, -\alpha, \pi - \beta}$ ).

Izan bedi  $\mathcal{M}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $OY$  ardatzaren inguruko 180 graduko biraketa. Orduan  $\mathcal{M}(x, y, z) = (-x, y, -z)$  da, beraz:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}(t) &= e^{(t-\theta_0) \cot \alpha} (\sin t, \cos t, -\cot \beta) \\ &= e^{(t-\theta_0) \cot \alpha} (\sin t, \cos t, \cot(\pi - \beta)) \\ &= \mathcal{M}(e^{(t-\theta_0) \cot \alpha} (-\sin t, \cos t, -\cot(\pi - \beta))) \\ &= \mathcal{M}(e^{(\theta_0-t) \cot(-\alpha)} (\sin(-t), \cos(-t), -\cot(\pi - \beta))) \\ &= \mathcal{M}(\mathcal{H}_{-\theta_0, -\alpha, \pi - \beta}(-t)). \end{aligned}$$

Beraz  $\mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}(\mathbb{R}) = (\mathcal{M} \circ \mathcal{H}_{-\theta_0, -\alpha, \pi - \beta})(\mathbb{R})$ . Hori dela eta, 1.9.a irudiko  $\mathcal{H}$  kurba  $OY$  ardatzaren inguruan 180 gradu biratuz,  $\alpha = -84.3^\circ$  eta  $\beta = 30^\circ$  parametrodun egiturazko kurba lortzen denez, 1.9.a irudiko  $\mathcal{H}$  kurba lebo-giro da (1.9.b irudian antzeko gauza gertatzen da).

- $\alpha$  eta  $\beta$  parametrodun egiturazko kurba ( $\mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}$ )  $OX$  ardatzaren inguruan 180 gradu biratuz gero,  $-\alpha$  eta  $\pi - \beta$  parametrodun egiturazko kurba lortzen da ( $\mathcal{H}_{\pi - \theta_0, -\alpha, \pi - \beta}$ ).

Izan bedi  $\mathcal{M}': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $OX$  ardatzaren inguruko 180 graduko biraketa. Orduan  $\mathcal{M}'(x, y, z) = (x, -y, -z)$  da, beraz:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}(t) &= \mathcal{M}'(e^{(t-\theta_0) \cot \alpha} (\sin t, -\cos t, -\cot(\pi - \beta))) \\ &= \mathcal{M}'(e^{(\theta_0-t) \cot(-\alpha)} (\sin(\pi - t), \cos(\pi - t), -\cot(\pi - \beta))) \\ &= \mathcal{M}'(\mathcal{H}_{\pi - \theta_0, -\alpha, \pi - \beta}(\pi - t)). \end{aligned}$$

Beraz  $\mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}(\mathbb{R}) = (\mathcal{M}' \circ \mathcal{H}_{\pi - \theta_0, -\alpha, \pi - \beta})(\mathbb{R})$ .

- $\alpha$  eta  $\beta$  parametrodun egiturazko kurbaren ( $\mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}$ ) jatorriarekiko simetria eginez gero,  $\alpha$  eta  $\pi - \beta$  parametrodun egiturazko kurba lortzen da ( $\mathcal{H}_{\pi + \theta_0, \alpha, \pi - \beta}$ ).

Izan bedi  $\mathcal{M}'': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jatorriarekiko simetria. Orduan

$\mathcal{M}''(x, y, z) = (-x, -y, -z)$  da, beraz:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}(t) &= \mathcal{M}''(e^{(t-\theta_0)\cot\alpha}(-\sin t, -\cos t, -\cot(\pi - \beta))) \\ &= \mathcal{M}''(e^{(t-\theta_0)\cot\alpha}(\sin(\pi + t), \cos(\pi + t), -\cot(\pi - \beta))) \\ &= \mathcal{M}''(\mathcal{H}_{\pi + \theta_0, \alpha, \pi - \beta}(\pi + t)). \end{aligned}$$

Beraz  $\mathcal{H}_{\theta_0, \alpha, \beta}(\mathbb{R}) = (\mathcal{M}'' \circ \mathcal{H}_{\pi + \theta_0, \alpha, \pi - \beta})(\mathbb{R})$ .

Beraz,  $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$  deneko edozein kasu beti dago erlazionatuta  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  deneko kasu batekin. Erlazioa  $OX$  ardatzarekiko biraketa,  $OY$  ardatzarekiko biraketa edota jatorriarekiko simetria dira. Lehenengo biak mugimendu zurrunak dira (orientazioa mantentzen dutelako), hirugarrena aldiz ez (ez baita orientazioa mantentzen).

Hori guztia hobeto ulertzeko asmoz, *Mathematica*<sup>\*</sup> programaren bitartez animazio batzuk eraiki daitezke: [13]-en  $OX$  ardatzarekiko biraketa ikus daiteke, [14]-en  $OY$  ardatzarekiko biraketa eta [15]-en jatorriarekiko simetria (bertan urdin ilunez jatorrizko  $\mathcal{H}$  kurba eta urdin argiz bere simetria ikus daitezke).

### 1.1.2.2 Lortutako adierazpenak betetzen dituen propietateak

Amaitzeko, erraz frogatu daiteke lortutako adierazpena zuzena dela, izan ere prozesuan zehar  $\mathcal{H}$  eraikitzeke erabilitako baldintzak betetzen ditu. Hain zuzen,  $t$  finko baterako:

- $\mathcal{K}(t)$  bektorearen eta  $\mathcal{K}'(t)$  puntuko bektore ukitzailaren arteko angelua  $\alpha$  angelu zeinuduna da.

Lehenik,  $\mathcal{H}(t) = Ae^{t\cot\alpha}(\sin t, \cos t, -\cot\beta)$  adierazpenetik ondorioztatzen da,  $\mathcal{K}(t) = Ae^{t\cot\alpha}(\sin t, \cos t, 0)$  dela, bere  $OXY$  planoko proiektzioa baita. Adierazpena deribatuz,

$$\mathcal{K}'(t) = Ae^{t\cot\alpha}(\cot\alpha \sin t + \cos t, \cot\alpha \cos t - \sin t, 0).$$

Hortaz,

$$\cos(\widehat{\mathcal{K}(t), \mathcal{K}'(t)}) = \frac{\mathcal{K}(t) \cdot \mathcal{K}'(t)}{\|\mathcal{K}(t)\| \|\mathcal{K}'(t)\|} = \frac{A^2 e^{2t\cot\alpha} \cot\alpha}{\frac{A^2 e^{2t\cot\alpha}}{\sin\alpha}} = \cot\alpha \sin\alpha = \cos\alpha.$$

Bestalde,  $\mathcal{K}(t) \times \mathcal{K}'(t) = A^2 e^{2t\cot\alpha}(0, 0, -1)$  da. Beraz,  $\mathcal{K}(t)$ -tik eta  $\mathcal{K}'(t)$ -rako angelu zeinuduna  $\alpha$  da eta bere norabide positiboa erloju orratzen norabidea da.



- $OZ^-$  ardatzerdiaren eta  $\mathcal{H}(t)$  bektorearen arteko angelua  $\beta$  da.

$OZ^-$  ardatzerdiaren bektore zuzentzailea  $(0, 0, -1)$  denez,

$$\cos(\widehat{OZ^-, \mathcal{H}(t)}) = \frac{(0, 0, -1) \cdot \mathcal{H}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|} = \frac{Ae^{t \cot \alpha} \cot \beta}{\frac{Ae^{t \cot \alpha}}{\sin \beta}} = \cot \beta \sin \beta = \cos \beta.$$

Gainera,  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  denez,  $OZ^-$  ardatzerdiaren eta  $\mathcal{H}(t)$  bektorearen arteko angelua  $\beta$  da.

## 1.2 Kurba sortzailearen eraikuntza

Behin maskorraren egitura zehazten duen kurbaren parametrizazioa lortuta, hurrengo urratsa gainazalaren “hormak” zehaztuko dituen kurba sortzailearen adierazpena lortzea da,  $\mathcal{S}$  izena izango duena. Naturako itsas maskorrei kurba sortzaile ezberdinak dagozkie, hala ere elipsea erabiliz (erreferatu 1.10 irudia) eta hurrengo kapituluan aipatuko diren parametro batzuekin jokatuz, maskor gehien adierazpenak lor daitezke.



(a) *Turritella* [29]



(b) *Babylonia spirata* [30]



(c) *Pleurotomariidae* [31]

### 1.10. Irudia

Hasteko,  $a$  eta  $b$  ardatzerdidun elipse kanonikoaren ohiko  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizazioa  $\|\gamma(u)\|$  eta  $u$  koordenatu polarrak erabiliz

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}}} (\cos u, \sin u)$$

da  $u \in [0, 2\pi)$  izanik. Beraz,  $\|\gamma(u)\| = r_{eo}$  koordenatu polarraren adierazpena hurrengo da (ikusi 1.11.a irudia):

$$r_{eo}(u) = \|\gamma(u)\| = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}}} \quad u \in [0, 2\pi) \text{ izanik.} \quad (1.4)$$

**Oharra 1.2.1** (Koordenatu polarren orientazio berria).

Ohartu 1.1.1 azpiatalean erabilitako koordenatu polarretako  $\theta$  angeluaren norabide positiboa erloju orratzen norabidea zela. Kasu honetan aldiz, 1.11 irudian adierazten den bezala,  $u$  angeluaren norabide positiboa aurkakoa izango da.

$\mathcal{H}$  kurbako puntu bakoitzean, puntu horretan zentratutako eta puntu horren proiektzioaren ( $\mathcal{K}$  kurbako puntua) plano normalaren barne dagoen elipsea eraikiz gero, tutu deformatu bat lortuko litzateke. Hala ere, moluskuen hazkuntza baimentzeko, elipsea  $\mathcal{H}$  kurban zehar mugitu ahala handitu egin behar da. Horregatik, elipseari kiribil logaritmikoaren erradioaren hazkunde-tasa berdina esleituko zaio:  $r_{ht}(t) = e^{t \cot \alpha}$  non  $t$  angelua  $\mathcal{H}$  kurbaren parametroa den. Hortaz,  $t$  aldiuneari dagokion  $\mathcal{S}_t$  kurba sortzailearen  $u$  angeluaren menpeko ekuazioa ondokoa da:

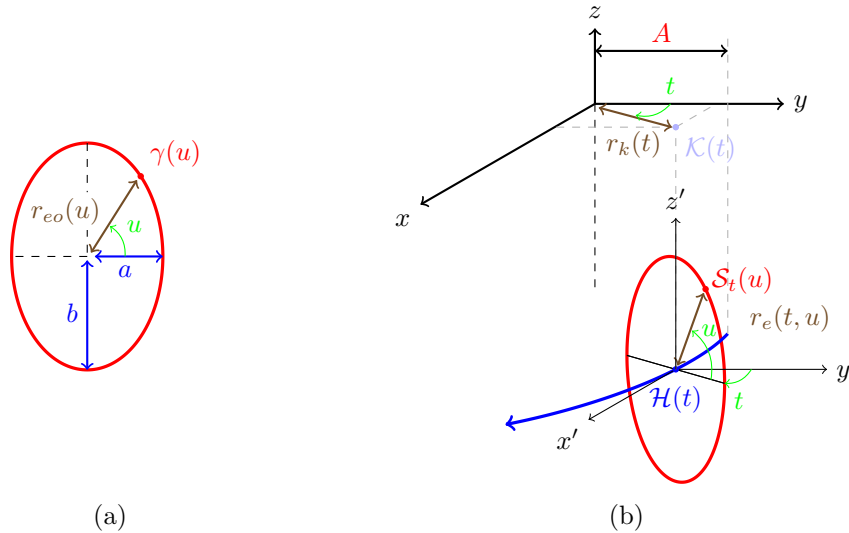
$$r_e(t, u) = r_{eo}(u)r_{ht}(t) = r_{eo}(u)e^{t \cot \alpha}, \quad t \in \mathbb{R}, u \in [0, 2\pi)$$

non  $r_e(t, u) = \|\mathcal{S}_t(u)\|$  den.

**Oharra 1.2.2** (Kurba sortzaileak adierazteko notazioa).

Moluskuen hazkuntza ahalbidetzeko, lortutako (1.4) adierazpenari  $\mathcal{K}$  kurbaren hazkunde-tasa biderkatu behar zaio. Hortaz, kurba sortzailearen forma konstante mantentzen den arren, bere tamaina handituz joango da  $t$  handitzen den heinean. Horregatik, hemendik aurrera  $\mathcal{S}$  erabili beharrean,  $t$  aldiuneko kurba sortzailea (elipsea) adierazteko  $\mathcal{S}_t$  notazioa erabiliko da.

Azkenik, 1.11.b irudian oinarrituz  $\mathcal{S}_t$  kurbaren adierazpena koordenatu kartesiarretan lortuko da.



### 1.11. Irudia

$t, \alpha$  eta  $\beta$  parametroen balioak finkatuz gero,  $u$  guztietarako 1.11.b irudian ikus daitekeen  $\mathcal{S}_t(u)$  kurba (kurba sortzailearen eboluzioa) lortzen da. Elipsea  $\mathcal{K}(t)$  puntuko plano normalean dagoenez, jatorrizko erreferentzia sistema  $(XYZ)$   $\mathcal{H}(t)$  puntura lekualdatzean  $(X'Y'Z')$ ,  $\mathcal{K}(t)$  puntuko plano normalak eta  $OY'Z'$  planoak  $t$  angelua osatzen dute. Hori kontuan hartuz,

erraz ondorioztatu daiteke:

$$\begin{cases} x^{\mathcal{S}t}(u) = r_e(t, u) \cos u \sin t \\ y^{\mathcal{S}t}(u) = r_e(t, u) \cos u \cos t \\ z^{\mathcal{S}t}(u) = r_e(t, u) \sin u \end{cases} \quad (1.5)$$

Hortaz,  $\mathcal{S}_t(u) = (x^{\mathcal{S}t}(u), y^{\mathcal{S}t}(u), z^{\mathcal{S}t}(u))$  adierazpena lortzen da, non  $x^{\mathcal{S}t}(u)$ ,  $y^{\mathcal{S}t}(u)$  eta  $z^{\mathcal{S}t}(u)$  goian adierazitakoak diren.

**Oharra 1.2.3** (Elipsea aurkitzen den planoaren aukeraketa I).

Goian erabaki da  $t$  puntuko elipsea  $\mathcal{H}(t)$  puntuan zentratuta eta  $\mathcal{K}(t)$  puntuko plano normalaren barne egotea. Hala ere, antzeko gauza egin ahalko litzateke  $t$  puntuko elipsea aurkituko den planotzat  $\mathcal{H}(t)$  puntuko plano normala hartuz.

Gainera,  $\mathcal{H}(t)$  eta  $\mathcal{K}(t)$  puntuetako plano normalek angelu konstantea ( $\alpha$  eta  $\beta$  parametroen menpekoa) osatzen dutela frogatu daiteke  $t \in \mathbb{R}$  guztietarako. Hori frogatzeko, nahikoa da frogatzea bi plano normalen bektore normalek ( $\mathcal{H}(t)$  eta  $\mathcal{K}(t)$  puntuetako bektore ukitzailleek) angelu konstantea osatzen dutela.

Alde batetik,  $\mathcal{K}'(t) = Ae^{t \cot \alpha} (\cot \alpha \sin t + \cos t, \cot \alpha \cos t - \sin t, 0)$  eta  $\|\mathcal{K}'(t)\| = Ae^{t \cot \alpha} \frac{1}{\sin \alpha}$  direnez,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{K}}(t) = \sin \alpha (\cot \alpha \sin t + \cos t, \cot \alpha \cos t - \sin t, 0).$$

Bestetik,  $\mathcal{H}'(t) = Ae^{t \cot \alpha} (\cot \alpha \sin t + \cos t, \cot \alpha \cos t - \sin t, -\cot \alpha \cot \beta)$  eta  $\|\mathcal{H}'(t)\| = \frac{Ae^{t \cot \alpha}}{\sin \alpha \sin \beta} \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$  direnez,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{H}}(t) = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} (\cot \alpha \sin t + \cos t, \cot \alpha \cos t - \sin t, -\cot \alpha \cot \beta).$$

Hortaz,

$$\cos(\widehat{\mathbf{T}_{\mathcal{H}}(t), \mathbf{T}_{\mathcal{K}}(t)}) = \frac{\mathbf{T}_{\mathcal{H}}(t) \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{K}}(t)}{\|\mathbf{T}_{\mathcal{H}}(t)\| \|\mathbf{T}_{\mathcal{K}}(t)\|} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}.$$

Ondorioz,

$$\widehat{\mathbf{T}_{\mathcal{H}}(t), \mathbf{T}_{\mathcal{K}}(t)} = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha \cot^2 \beta}} \right) = \arctan(\cos \alpha \cot \beta).$$

Ohartu,  $\arctan(\cos \alpha \cot \beta) = 0$  dela baldin eta soilik baldin  $\beta = \frac{\pi}{2}$  bada. Beraz,  $\mathcal{K}(t)$  eta  $\mathcal{H}(t)$  puntuetako plano normalak berdina izango dira  $\beta = \frac{\pi}{2}$  denean soilik. 6.2.2 azpiatalean baldintza hau betetzen duten zenbait itsas maskor aztertzen dira.

2.1.1 oharrean orain egindakoan oinarrituz,  $\mathcal{K}(t)$  puntuko edo  $\mathcal{H}(t)$  puntuko plano normala kontsideratzea egoera baliokideak direla ondorioztatuko da.



## 2. Kapituluia

# Eredu geometriko orokorra

Aurreko kapituluan lortutako itsas maskorren gainazala osatzen duten funtsezko osagaien adierazpenak erabiliz ((1.3) eta (1.5) adierazpenak), itsas maskorren eredu orokorra lor daiteke. Nahikoa da  $XYZ$  eta  $X'Y'Z'$  erreferentzia sistemen koordenatuen arteko erlazioa aurkitzea. Bigarren erreferentzia sistema lehenengoa  $\mathcal{H}$  kurbako puntuetara lekualdatuz lortu denez,  $X'Y'Z'$  erreferentzia sistemako edozein  $(x^{\mathcal{S}_t}(u), y^{\mathcal{S}_t}(u), z^{\mathcal{S}_t}(u))$  puntuk,  $XYZ$  erreferentzia sisteman  $(x^{\mathcal{H}}(t), y^{\mathcal{H}}(t), z^{\mathcal{H}}(t))$  koordenatuak izango ditu. Hortaz, itsas maskorren eredu orokorraren adierazpena  $\mathcal{M}(t, u) = \mathcal{H}(t) + \mathcal{S}_t(u) = (x^{\mathcal{M}}(t, u), y^{\mathcal{M}}(t, u), z^{\mathcal{M}}(t, u))$  da  $t \in \mathbb{R}$  eta  $u \in [0, 2\pi)$  guztietarako non  $x^{\mathcal{M}}(t, u)$ ,  $y^{\mathcal{M}}(t, u)$  eta  $z^{\mathcal{M}}(t, u)$  hurrengoak diren:

$$\begin{cases} x^{\mathcal{M}}(t, u) = e^{t \cot \alpha} (A \sin t + r_{eo}(u) \cos u \sin t) \\ y^{\mathcal{M}}(t, u) = e^{t \cot \alpha} (A \cos t + r_{eo}(u) \cos u \cos t) \\ z^{\mathcal{M}}(t, u) = e^{t \cot \alpha} (-A \cot \beta + r_{eo}(u) \sin u) \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.1 Elipsearen orientazioa

Lehen eredu hori gehiago orokortu daiteke, elipsearen espazioko orientazioa zehaztuko duten hiru parametro gehituz (erreparatu 1.10.b eta 1.10.c irudiak, bertan elipseak biratuta agertzen dira):

$\xi$ : elipsearen planoarekiko ortogonalaren den bektorearekiko biraketa angelua;

$\varphi$ : elipsearen ardatz horizontalarekiko biraketa angelua;

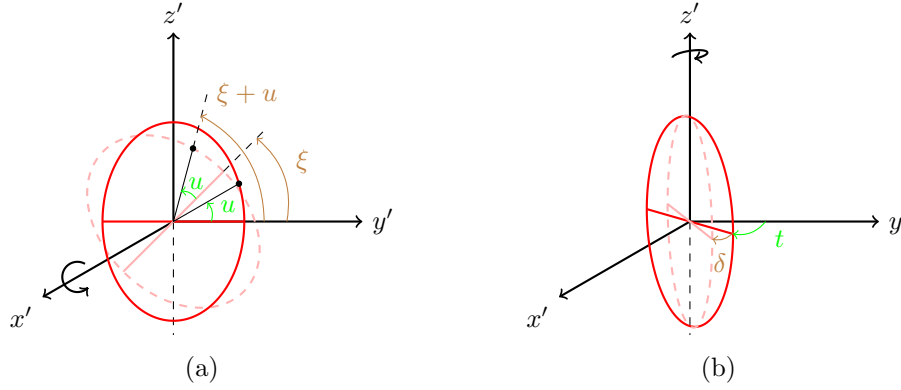
$\delta$ :  $OZ'$  ardatzarekiko elipsearen biraketa angelua.

Ondoren,  $\xi$ ,  $\varphi$  eta  $\delta$  angeluek (1.5) adierazpenean duten eragina aztertuko da.

Kurba sortzailea bere planoarekiko ortogonalaren den bektorearekiko eskuin eskuaren arauaren norabidean  $\xi$  angelua biratuz, nahikoa da (1.5) adierazpeneko kosinu eta sinuen  $u$  angeluak  $u + \xi$  angeluagatik ordezkatzeko. Emaitza

hau argi ikusten da 2.1.a irudian, bertan hasierako elipsetzat  $OY'Z'$  planoan dagoen elipsea hartzen da, beraz biraketa  $OX'$  ardatzarekiko egiten da.

Aldiz, elipsea  $OZ'$  ardatzarekiko eskuin eskuaren arauaren aurkako norabidean  $\delta$  angelua biratuz, (1.5) adierazpeneko sinu eta kosinuaren  $t$  angelua  $t + \delta$  angeluagatik aldatu beharko litzateke (ikusi 2.1.b irudia).

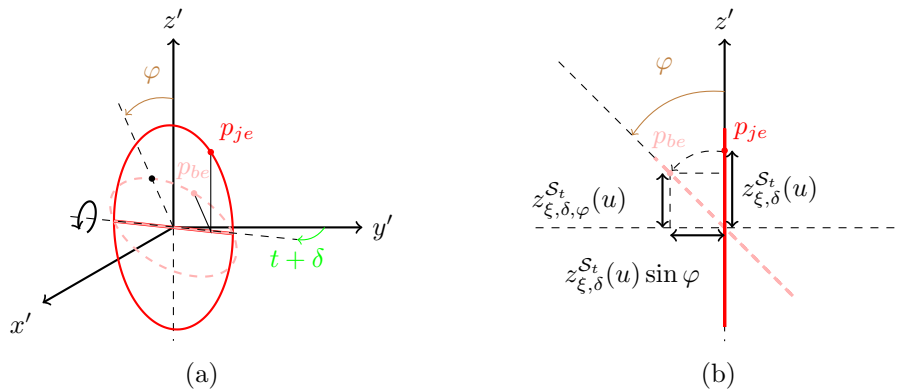


### 2.1. Irudia

Hortaz, aurreko bi biraketa horiek batera eginez gero, (1.5) adierazpena hurrengo eran geldituko litzateke:

$$\begin{cases} x_{\xi,\delta}^{S_t}(u) = r_e(t, u) \cos(u + \xi) \sin(t + \delta) \\ y_{\xi,\delta}^{S_t}(u) = r_e(t, u) \cos(u + \xi) \cos(t + \delta) \\ z_{\xi,\delta}^{S_t}(u) = r_e(t, u) \sin(u + \xi) \end{cases} \quad (2.2)$$

Demagun orain, elipsea ardatz horizontalarekiko eskuin eskuaren arauaren norabidean  $\varphi$  angelua biratzen dela. Biratutako elipsearen koordinatuak zehazteko, 2.2.a irudia erabiliko da. Irudia elipsearen biraketa ardatzetik begiratzuz (2.2.b irudia), biratutako elipsearen puntuen hirugarren koordinatua  $z_{\xi,\delta,\varphi}^{S_t}(u) = z_{\xi,\delta}^{S_t}(u) \cos \varphi$  dela ondorioztatzen da.

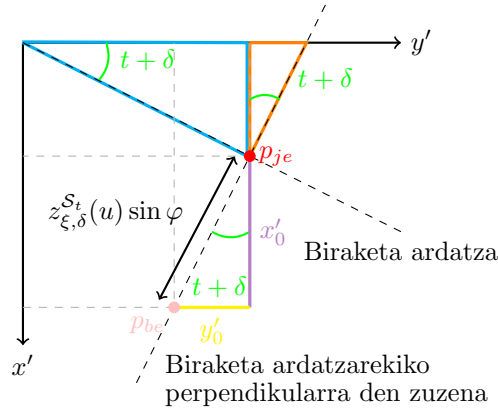


### 2.2. Irudia

**Oharra 2.1.1** (Elipsea aurkitzen den planoaren aukeraketa II).

1.2.3 oharrean frogatu da,  $\mathcal{K}(t)$  eta  $\mathcal{H}(t)$  puntuetako plano normalek angelu konstantea osatzen dutela  $t \in \mathbb{R}$  guztietarako. Orduan, kontuan hartuz azpiatal honetan definitutako  $\varphi$  angelua, ondorioztatu daiteke  $\mathcal{H}$  kurbako puntu bakoitzean puntu horretan zentratutako eta puntu horretako plano normalaren barne dagoen elipsea eraikiz gero, (1.5) adierazpenarekiko balio-kidea den adierazpena lortzen dela. Izan ere, nahikoa da (1.5) adierazpena duen elipsea  $\varphi = \arctan(\cos \alpha \cot \beta)$  angelu konstanteaz biratzea,  $\mathcal{H}(t)$  puntuko plano normalean aurkitzen den elipsea lortzeko.

Lehen eta bigarren koordenatuak zehazteko, 2.2.a irudiko biratutako elipsearen puntuaren ( $p_{be}$ ) eta jatorrizko elipsearen puntuaren ( $p_{je}$ ) goitiko bista erabiliko da, hau da 2.3 irudia.



### 2.3. Irudia

$p_{je}$  puntua biraketa ardatzarekiko  $\varphi$  angelua biratzean,  $p_{be}$  puntua lortzen da. Beraz, biraketa ardatza eta bi puntuetatik igarotzen den zuzena perpendikularrak izango dira. Hortaz, irudiko triangelu urdina eta triangelu laranja antzekoak dira. Gainera, biraketa ardatzak  $OY'$  ardatzarekiko  $t + \delta$  angelua osatzen duenez, ondorioztatzen da  $x'_0$  eta  $y'_0$  katetoak dituen irudiko triangelu zuzenaren  $p_{je}$  erpinari dagokion angelua  $t + \delta$  izan behar dela. Ondorioz, zehazteko gelditzen diren koordenatuen adierazpenak:

$$\begin{cases} x_{\xi, \delta, \varphi}^{S_t}(u) = x_{\xi, \delta}^{S_t}(u) + x'_0 = x_{\xi, \delta}^{S_t}(u) + z_{\xi, \delta}^{S_t}(u) \sin \varphi \cos(t + \delta) \\ y_{\xi, \delta, \varphi}^{S_t}(u) = y_{\xi, \delta}^{S_t}(u) - y'_0 = y_{\xi, \delta}^{S_t}(u) - z_{\xi, \delta}^{S_t}(u) \sin \varphi \sin(t + \delta) \end{cases}$$

Horretatik guztitik ondorioztatzen da,  $t$  aldiuneko kurba sortzailearen adierazpena  $\xi$ ,  $\varphi$  eta  $\delta$  angeluen menpe

$$\mathcal{S}_{t, \xi, \delta, \varphi}(u) = (x_{\xi, \delta, \varphi}^{S_t}(u), y_{\xi, \delta, \varphi}^{S_t}(u), z_{\xi, \delta, \varphi}^{S_t}(u))$$

dela. Beraz, itsas maskorraren eredu orokorra  $t \in \mathbb{R}$  eta  $u \in [0, 2\pi)$  guztietarako

$$\mathcal{M}_{\xi, \delta, \varphi}(t, u) = \mathcal{S}_{t, \xi, \delta, \varphi}(u) + \mathcal{H}(t) = (x_{\xi, \delta, \varphi}^{\mathcal{M}}(t, u), y_{\xi, \delta, \varphi}^{\mathcal{M}}(t, u), z_{\xi, \delta, \varphi}^{\mathcal{M}}(t, u)),$$

non koordenatuak hurrengoak diren:

$$\begin{cases} x_{\xi, \delta, \varphi}^{\mathcal{M}}(t, u) = e^{t \cot \alpha} (A \sin t + r_{eo}(u) \cos(u + \xi) \sin(t + \delta) \\ \quad + r_{eo}(u) \sin(u + \xi) \sin \varphi \cos(t + \delta)) \\ y_{\xi, \delta, \varphi}^{\mathcal{M}}(t, u) = e^{t \cot \alpha} (A \cos t + r_{eo}(u) \cos(u + \xi) \cos(t + \delta) \\ \quad - r_{eo}(u) \sin(u + \xi) \sin \varphi \sin(t + \delta)) \\ z_{\xi, \delta, \varphi}^{\mathcal{M}}(t, u) = e^{t \cot \alpha} (-A \cot \beta + r_{eo}(u) \sin(u + \xi) \cos \varphi) \end{cases} \quad (2.3)$$

non  $r_{eo}$ -ri 1.2 atalean lortutako (1.4) adierazpena dagokion.

## 2.2 Parametroen esanahi geometrikoa

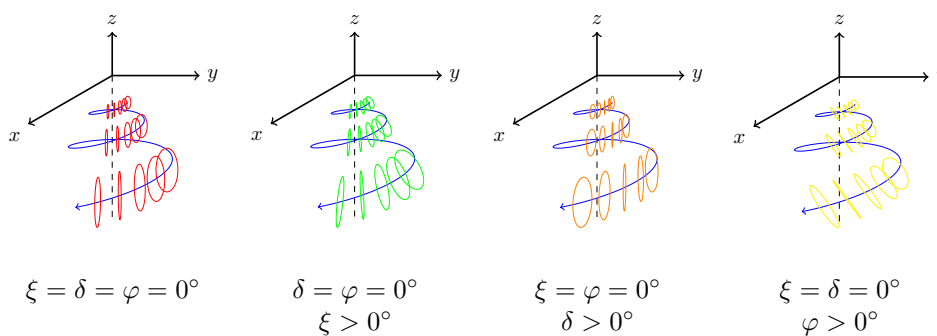
Orain arte zortzi parametro definitu dira. Azpiatal honetan, horiekin jokatuz naturako itsas maskorren gainazalak modu errealista batean modelizatu daitezkeela ikusiko da. Hala ere, kontuan hartu beharra dago, naturako maskorren egitura animalien bizilekura eta bizi-baldintzetara egokituta dagoela. Hortaz, parametroek eraikitako ereduaren esanahi geometriko bat edukitzeaz gain, esanahi biologiko bat ere izango dute.

Lan honetan itsas maskorrei buruz orokorrean hitz egiten den arren, itsas maskor guztien bizilekua eta bizi-baldintzak ez dira berdinak. Bi taldetan sailka daitezke beraien lehentasunen arabera: olatuen indarra jasan behar duten maskorrak eta harrapakarietatik babestu behar direnak etengabe bizirauteko. Lehenengo taldekoak 5. kapituluaren landuko dira eta bigarren taldekoak kapitulu honetan eta hurrengo bi kapituluetan.

Badaude bi parametro lanean planteatuko diren eredu guztietan garrantzitsuenak direnak, hain zuzen  $\alpha$  eta  $\beta$  parametroak, horiek ereduaren oinarria den helize konikoaren forma zehazten baitute. Harrapakarietatik babesteko, maskorrek egitura gogor bat izan behar dute. Era horretako egitura modu indartsu batean kiribildutako maskorrek dute. Forma hori  $\alpha$  parametroaren balio handietarako eta  $\beta$  parametroaren balio txikietarako lortzen da (*cf.* [1]). Esaterako, 1.10 irudiko maskorrek horrelako egitura bat dute.

1.10 irudiko maskorrak modelizatzeko asmoz, kurba sortailearen orientazioa zehazten duten  $\xi$ ,  $\delta$  eta  $\varphi$  parametroen esanahi geometrikoa aztertuko da. 2.4 irudian hiru angelu horiek ereduaren eragina ikus daiteke:



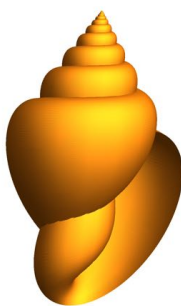


## 2.4. Irudia

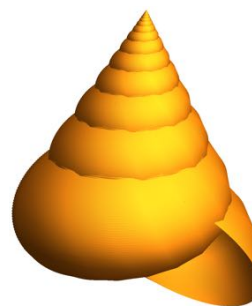
Horretan oinarrituz eta (2.3) adierazpena erabiliz, *Mathematica*<sup>®</sup> programaren bitartez 1.10 irudiko maskorren irudiak lor daitezke, hain zuzen 2.5 irudian ikus daitezkeenak.



(a)  $A = 0.1$ ,  $\beta = 5^\circ$ ,  
 $\alpha = 88^\circ$ ,  $\xi = 0^\circ$ ,  
 $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  
 $a = 0.15$ ,  $b = 0.15$



(b)  $A = 0.1$ ,  $\beta = 8^\circ$ ,  
 $\alpha = 86^\circ$ ,  $\xi = -30^\circ$ ,  
 $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  
 $a = 0.2$ ,  $b = 0.35$



(c)  $A = 0.1$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  
 $\alpha = 87^\circ$ ,  $\xi = 60^\circ$ ,  
 $\varphi = 30^\circ$ ,  $\delta = 15^\circ$ ,  
 $a = 0.2$ ,  $b = 0.25$

## 2.5. Irudia

Hortaz, argi gelditzen da eredu bakarra erabiliz eta parametroen balio desberdinerako, naturako itsas maskor asko lor daitezkeela.



## 3. Kapituluia

# Eredu geometriko osatua I

Aurreko kapituluan lortutako (2.3) adierazpena nahiko orokorra den arren, badaude naturan itsas maskor batzuk adierazpen horrekin adierazi ezin daitezkeenak. Esaterako 3.1 irudiko bi maskorrek noduluak dituzte, beraz horrelakoetan ez da nahikoa kurba sortzailezat elipsea hartzea. Kapitulu honetan noduludun itsas maskorrek adierazi ahal izateko  $t$  aldiuneari dagokion beste kurba sortzaile bat eraikiko da,  $\mathcal{S}_t^n$  izena izango duena.



(a) *Epitoniidae* [32]



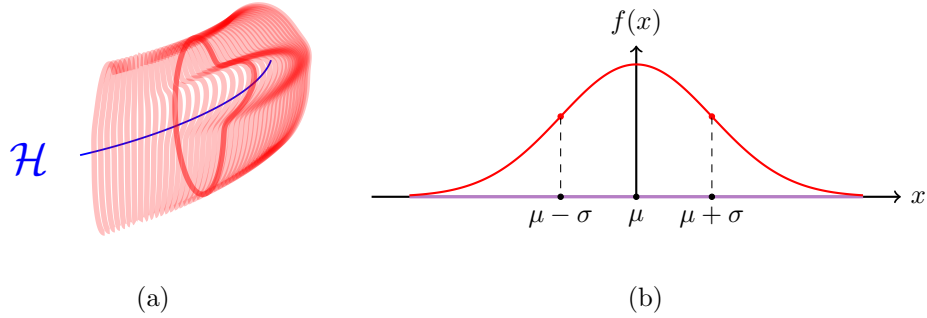
(b) *Pleuroploca* [33]

### 3.1. Irudia

3.1 irudian ikusi daitekeen moduan, noduludun maskor baten kurba sortzailea  $\mathcal{H}$  kurban zehar mugitzean ez da beti berdina izango.  $\mathcal{H}$  kurban  $t$  parametroa handitzen den heinean  $\mathcal{S}_t^n$  kurba sortzailea handitzeaz gain, bere forma periodikoki aldatuko da (noduluen arteko bereizketa ahalbidetzeko).

### 3.1 Noduludun kurba sortzaile orokorraren eraikuntza

3.2.a irudian periodo batean zeharreko kurba sortzailearen eboluzioa ikus daiteke. 3.2.a irudiko ideia behin eta berriz  $\mathcal{H}$  kurban zehar errepikatuz, noduludun maskor bat eraikitzea posible izango litzateke. Horretarako, lehenik 3.3 irudiko  $\mathcal{S}_t^n$  kurba gorriaren adierazpen orokorra lortu behar da.



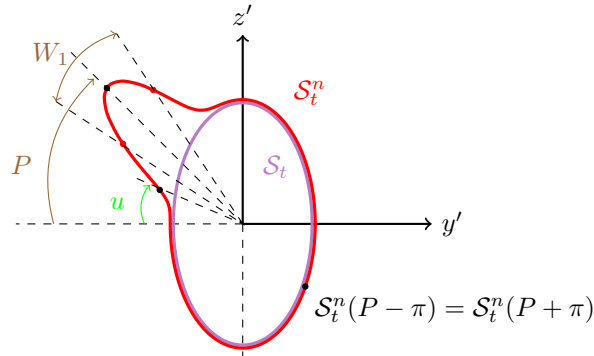
### 3.2. Irudia

3.3 irudiko  $\mathcal{S}_t^n$  kurbaren forma lortzeko Gauss-en kanpaia erabiliko da. Gauss-en kanpaiarentzako estatistikan erabiltzen den adierazpena koordenatu kartesianetan hurrengoa da (erreferatu 3.2.b irudia):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

non  $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  kanpaiaren altuera eta  $(\mu - \sigma, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}})$  eta  $(\mu + \sigma, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}})$  kanpaiaren inflexio puntuak diren.

Erabilitako  $x$  parametroaren ordez 1.2 atalean definitutako  $u$  angelua erabiltzen bada,  $r_{eo}(u) + f(u)$  eginez  $OX$  ardatz gisa  $r_{eo}(u)$  elipsea duen Gauss-en kanpaia lortzen da (hain zuzen 3.3 irudian agertzen den kurba gorriaren forma duen kurba bat, zeinaren inflexio puntuak gorritz marraztuta daudenak izango diren).



**3.3. Irudia:**  $t = \pi$  aldiuneko  $\mathcal{H}$  kurbaren gaineko noduludun kurba sortzaile,  $P = \frac{\pi}{4}$  eta  $W_1 = \frac{\pi}{8}$  parametroduna.

Gauss-en kanpaiaren itxura duen kurba horren elipsearen gaineko posizioa zehazteko, bi parametro definituko dira:  $W_1$  eta  $P$  angeluak. Lehenengoa bi inflexio puntuen arteko angelua izango da eta bigarrena elipsearen ardatz horizontalaren eta Gauss-en kanpaiaren puntu maximoaren arteko angelua izango da (begiratu 3.3 irudia). Lortutako kurba itxia izateko

$u$  angeluaren definizio eremua aldatu behar da. Kasu honetan, Gauss-en kanpaia simetrikoa denez,  $u \in [P - \pi, P + \pi]$  hartuz eta  $t$  finko baterako  $\mathcal{S}_t^n(P - \pi) = \mathcal{S}_t^n(P + \pi)$  betetzen da. Beraz kurba itxia da eta gainera leuna izango da Gauss-en kanpaia leuna delako.

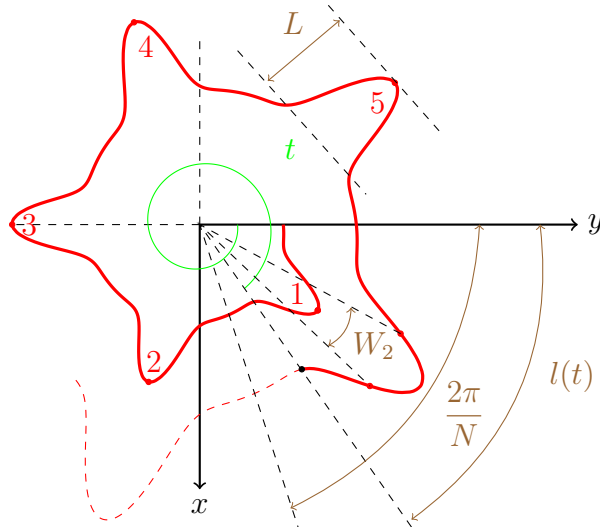
Definitutako parametro berri horiek (3.1) ekuazioaren parametroekin alderatuz,  $\mu = P$  eta  $\sigma = \frac{W_1}{2}$  identifikazioak egin daitezke. Beraz,  $t$  aldiuneko noduludun kurba sortzaile orokorraren  $u$  angeluari dagokion puntutik  $\mathcal{H}(t)$  puntura dagoen distantzia hurrengoa da:

$$r_{no}(t, u) = r_{eo}(u) + F(t)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2(u-P)}{W_1}\right)^2}, \quad u \in [P - \pi, P + \pi], t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

non  $F(t)$  balioak  $t$  aldiuneko Gauss-en kanpaia “deformatuari” dagokion altuera zehazten duen.

### 3.2 Kurba sortzaileen noduluen luzera periodikoa

Gauss-en kanpaiaren altuera  $t$  parametroaren menpe definitzea ezinbestekoa da, izan ere noduluen bereizketa posiblea izateko altuera periodikoki aldatu behar da  $t$  angeluaren arabera.  $u$  angelua finkatuz lortu nahi den emaitza 3.4 irudikoa da. Bertan  $\mathcal{H}$  kurban ematen den bira bakoitzeko 5 nodulu dituen maskorraren kasua irudikatuta dago.  $F$  funtzioaren adierazpena zehazteko asmoz, beste parametro bat definituko da:  $N$ , bira oso batean maskorrak dituen nodulu kopurua. Hortaz hemendik ondorioztatzen da,  $\frac{2\pi}{N}$  goitik begiratuta nodulu oso batek osatzen duen angelua dela.



**3.4. Irudia:**  $u = \frac{\pi}{4}$  finkorako maskorraren goitiko bista,  $P = \frac{\pi}{4}$ ,  $W_1 = \frac{\pi}{8}$  eta  $W_2 = \frac{\pi}{12}$  parametroduna.

Izan bedi  $t$  angeluaren menpeko hurrengo funtzioa:

$$l(t) = \frac{2\pi}{N} \left( \frac{Nt}{2\pi} - \left[ \frac{Nt}{2\pi} \right] \right), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{izanik.}$$

Funtzio horrek  $t$  aldiuneari dagokion noduluan, aldiune horretako posizioari dagokion angelua ematen du  $[0, \frac{2\pi}{N})$  tartean neurtuta. Erreparatu 3.4 irudia, bertan  $t$  aldiuneari bigarren birako lehenengo nodulua dagokio, eta  $l(t)$  nodulu horretan aldiune horri dagokion angelua da.

Ondoren, Gauss-en kanpaiaren altueraren aldakuntza ( $F$  funtzioaren portaera) aztertuko da  $l$  funtzioaren arabera:

- $l(t)$  funtzioak zerora jotzen duenean,  $F(t)$  zerora jo behar du. Horrela, noduluaren hasieran kurba sortzailea elipsea izango da.
- $l(t) \in (0, \frac{\pi}{N})$  denerako,  $F(t)$  gorakorra izango da. Hau da, denbora tarte horretan noduluaren altuera handituz joango da.
- $l(t) = \frac{\pi}{N}$  denerako,  $F(t)$  funtzioak balio maximoa hartuko du. Demagun noduluaren altuera  $L$  dela, orduan kasu honetan  $F(t) = L$  izan behar da.
- $l(t) \in (\frac{\pi}{N}, \frac{2\pi}{N})$  denerako,  $F(t)$  beherakorra izango da. Hau da, denbora tarte horretan noduluaren altuera txikituz joango da.
- $l(t)$  funtzioak  $\frac{2\pi}{N}$  baliora jotzen duenean,  $F(t)$  zerora jo behar du. Nodulua amaitzeko, beharrezkoa baita kurba sortzailea berriz elipsea izatea.

Baldintza horiek Gauss-en kanpaiak betetzen ditu, beraz  $F$  Gauss-en kanpai bat da  $[k\frac{2\pi}{N}, (k+1)\frac{2\pi}{N})$  tartean  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  guztietarako.  $F$  funtzioaren adierazpena zehazteko azken parametro bat definituko da:  $W_2$ ,  $F$  funtzioaren periodo bakoitzaren Gauss-en kanpaiaren inflexio puntuek osatzen duten angelua (ikusi 3.4 irudia). (3.1) ekuazioan oinarrituz eta  $\mu = \frac{\pi}{N}$  eta  $\sigma = \frac{W_2}{2}$  identifikazioak eginez, hurrengo adierazpena lortzen da:

$$F(t) = Le^{-\frac{1}{2} \left( \frac{2l(t)}{W_2} - \frac{2\pi}{W_2 N} \right)^2}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{izanik.} \quad (3.3)$$

Ohartu  $F$  funtzioak goiko lehenengo eta bosgarren puntuetako ezaugarriak betetzeko,  $W_2 < \frac{2\pi}{N}$  bete behar dela eta  $W_2$  zenbat eta txikiagoa izan hobe dela (ezaugarri hau hobeto azalduta dago 3.4.1 oharrean).

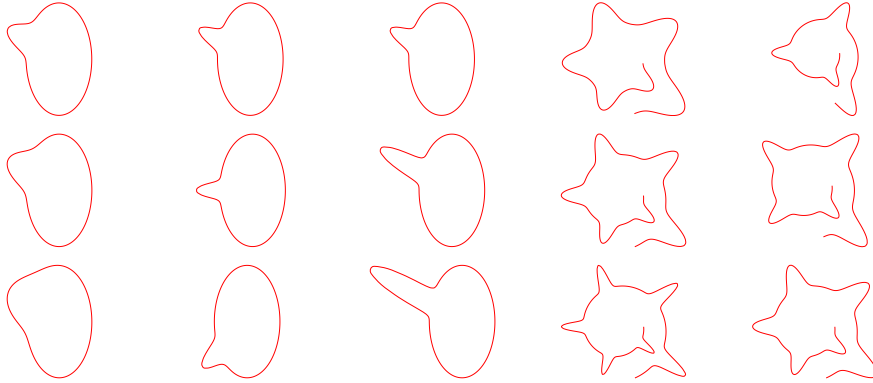
### 3.3 Noduludun kurba sortzailea helize konikoaren gainean

Orain arte lortutako  $r_{no}$  adierazpena periodikoki aldatuz joango da  $t$  angeluaren arabera. Beraz bakarrik falta da kurba sortzailea handituz joatea  $\mathcal{H}$

kurban zehar mugitzerakoan. Horretarako kiribil logaritmikoaren erradioaren hazkunde-tasa berdina erabiliko da. Beraz,  $t$  aldiuneko noduludun kurba sortzailearen  $u$  angeluari dagokion puntutik  $\mathcal{H}(t)$  puntura dagoen distantzia  $r_n(t, u) = r_{no}(t, u)r_{ht}(t)$  izango da  $u \in [P - \pi, P + \pi]$  eta  $t \in \mathbb{R}$  izanik.

Hortaz,  $\mathcal{S}_t^n$  kurbaren adierazpena lortzeko nahikoa da (2.2) adierazpeneko  $r_e$  adierazpena orain lortutako  $r_n$  adierazpenagatik ordezkatzea. Ondorioz, itsas maskorren eredu osatuaren adierazpena (2.3) adierazpenaren berdina izango da, baina  $r_{eo}$  adierazpenaren ordez  $r_{no}$  adierazpena izango du. Gainera,  $u$  angeluaren definizio tartea  $[0, 2\pi)$  izan beharrean,  $[P - \pi, P + \pi]$  izango da.

### 3.4 Bost parametro berrien esanahi geometrikoa



(a)  $P = \frac{\pi}{6}$   
 $L = 0.5$

(b)  $W_1 = \frac{\pi}{8}$   
 $L = 0.5$

(c)  $W_1 = \frac{\pi}{8}$   
 $P = \frac{\pi}{6}$

(d)  $N = 5$   
 $L = 1$

(e)  $W_2 = \frac{\pi}{12}$   
 $L = 1$

### 3.5. Irudia

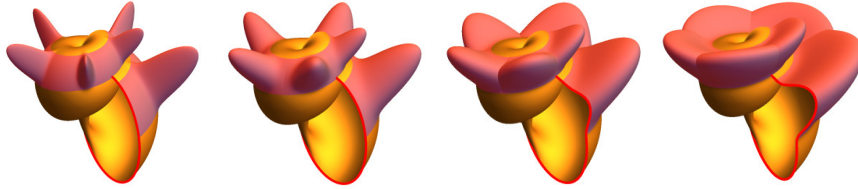
Goiko irudiko (a), (b) eta (c) zutabeetan noduludun kurba sortzaileak agertzen dira eta (d) eta (e) zutabeetan  $u$  finko baterako maskorren goitiko bistak agertzen dira, parametroen balio desberdinetarako. Hurrengo eran aldatzen dira parametroak zutabeka:

- (a)  $P$  eta  $L$  finko mantentzen diren bitartean,  $W_1$  handitzen da.
- (b)  $W_1$  eta  $L$  finko mantentzen diren bitartean,  $P$  txikitzen da.
- (c)  $W_1$  eta  $P$  finko mantentzen diren bitartean,  $L$  handitzen da.
- (d)  $N$  eta  $L$  finko mantentzen diren bitartean,  $W_2$  txikitzen da.
- (e)  $W_2$  eta  $L$  finko mantentzen diren bitartean,  $N$  handitzen da.

**Oharra 3.4.1** ( $W_2$  parametroaren eragina noduluen bereizketan).

3.5.d irudian ikus daiteke,  $W_2$  parametroaren balioa handitzen doan heinean noduludun kurba sortzaileen kopurua handitu egiten dela. Hau da, 3.5.d irudiko hiru kurbetan  $t = k\frac{2\pi}{N}$  non  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  angeluei dagozkien kurba sortzaileak elipseak diren arren,  $t$ -ren ingurune batean ere kurba sortzaileak elipseak dira, baina  $W_2$  handitu ahala ingurune hori txikiagoa dela ikusten da.

Ideia berdina beheko 3.6 irudiko maskor hipotetikoetan ikus daiteke. *Mathematica*<sup>\*</sup> programarekin irudikatuta daude, parametroen hurrengo balioetarako:  $A = 0.5$ ,  $\alpha = 84.3^\circ$ ,  $\beta = 15^\circ$ ,  $a = 0.7$ ,  $b = 1$ ,  $\xi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  $P = 45^\circ$ ,  $W_1 = 22.5^\circ$ ,  $L = 1$  eta  $N = 5$ . 3.6.a eta 3.6.b irudietako maskorretan ondoz ondoko bi noduluren artean beti aurki daiteke nodulurik gabeko kurba sortzaile bat, 3.6.c eta 3.6.d irudietako maskorretan aldiz ez (erreparatu arrosa koloreko ingurunea eta 6. noduluaren amaierako kurba sortzaileen forma).



(a)  $W_2 = 9^\circ$       (b)  $W_2 = 22.5^\circ$       (c)  $W_2 = 45^\circ$       (d)  $W_2 = 90^\circ$

### 3.6. Irudia

Ohartu, 2. kapituluaren lortutako eredua noduludun maskorren eredua kasu partikular bat izango dela. Hain zuzen,  $L = 0$  den kasuetarako 2. kapituluko adierazpena lortzen da.

Bost parametroen esanahi geometrikoa kontuan hartuz, 3.7 irudian kapitulu honen hasierako 3.1 irudiko maskorrak ikus daitezke *Mathematica* programaren bitartez irudikatuta. Bertan ikus daiteke parametroei balio desberdinak emanez, zerikusirik ez duten bi maskor lor daitezkeela.



(a)  $A = 0.5$ ,  $\alpha = 84.3^\circ$ ,  $\beta = 17^\circ$   
 $a = 0.5$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 0.2$ ,  $N = 8$   
 $\xi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$   
 $P = 0^\circ$ ,  $W_1 = 180^\circ$ ,  $W_2 = 3^\circ$

(b)  $A = 0.1$ ,  $\alpha = 84.3^\circ$ ,  $\beta = 9^\circ$   
 $a = 0.15$ ,  $b = 0.3$ ,  $L = 0.1$ ,  $N = 8$   
 $\xi = -30^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$   
 $P = 72^\circ$ ,  $W_1 = 15^\circ$ ,  $W_2 = 15^\circ$

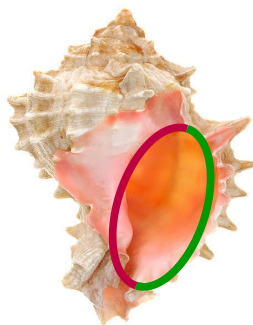
### 3.7. Irudia



## 4. Kapitulua

# Eredu geometriko osatua II

Aurreko atalean nodulu bakarreko kurba sortzailedun maskorren adierazpen geometrikoa lortu da. Hala ere, badaude naturan nodulu bat baino gehiagoko kurba sortzailedun maskorrak, esaterako 4.1 irudikoa. Kapitulua honetan, aurreko kapituluko teknikak kontuan hartuz, itxura horretako itsas makorrentzako eredu geometrikoa lortuko da. Bereziki, kurba sortzaile berriarentzako adierazpena eraikiko da,  $\mathcal{S}_t^{mn}$  izena izango duena.



4.1. Irudia: *Murex* arrosa [34]

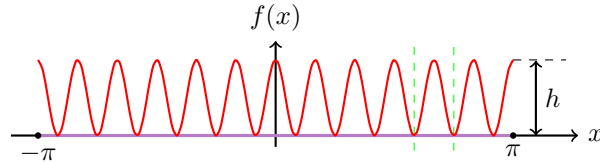
### 4.1 Kurba sortzaile orokorraren eraikuntza

3.1 atalean nodulu bakarreko kurba sortzaile orokorra lortzeko, ezaguna den eta lortu nahi den antzeko forma leuna duen  $OY$  ardatzarekiko simetrikoa den Gauss-en kanpaia erabiltzen da. Kasu honetan, zenbait nodulu lortu nahi direnez, kosinu funtzioa erabiliz gero lortu nahi den emaitzara heltzea posible izango litzateke. Gainera, kosinu funtzioa leuna eta simetrikoa da  $OY$  ardatzarekiko.

Izan bedi lekualdatutako kosinuaren hurrengo adierazpena (erreparatu 4.2 irudia):

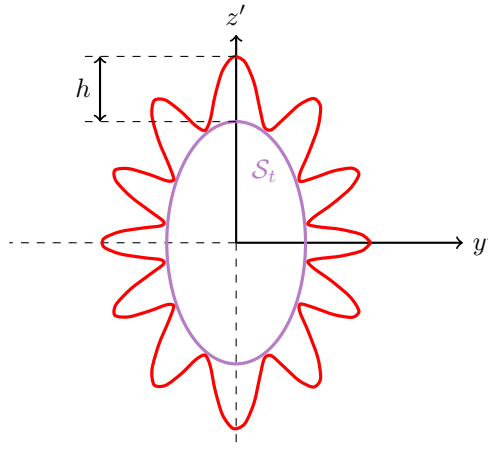
$$f(x) = \frac{h}{2}(\cos(N_1x) + 1), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

non  $h$  parametroa  $f$  funtzioaren grafoaren altuera den eta  $N_1$  parametroa  $[-\pi, \pi]$  tartean grafoak dituen nodulu osoen kopurua (esaterako 4.2 irudian, bi segmentu eten bertikal berdeek mugatzen duten grafoaren zatia nodulu oso bat da eta muturretako bi nodulu erdiek beste nodulu bat osatzen dute).



**4.2. Irudia:**  $h = 1$  eta  $N_1 = 12$  parametrodun  $f$  funtzioaren grafoa.

Orain, 3.1 ataleko prozesua jarraituz,  $x$  aldagaia 1.2 atalean definitutako  $u$  angeluagatik ordezkatzeko bada,  $r_{eo}(u) + f(u)$  adierazpena  $OX$  ardatz gisa  $r_{eo}(u)$  elipsea duen lekualdatutako kosinu funtzioa izango da (ikus 4.3 irudiko kurba gorria). Gainera,  $f$  funtzioa simetrikoa denez  $OY$  ardatzarekiko bere definizio tartean,  $u \in [-\pi, \pi]$  hartuz lortutako kurba berria itxia izango da  $f(\pi) = f(-\pi)$  betetzen delako.



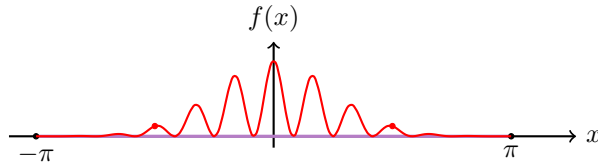
**4.3. Irudia:** (2.1) adierazpenean  $r_{eo}(u)$  adierazpenaren ordez  $r_{eo}(u) + f(u)$  jarritz lortutako emaitza,  $t = \pi$  denerako eta  $h = 0.3$  eta  $N_1 = 12$  parametroen balioetarako.

Hala ere, kurba gorri hori benetako maskorraren kurba sortzailetik asko aldentzen da. Izan ere, 4.1 irudian ikus daitekeen moduan maskorrak barkarik ditu noduluak kanpoaldean (marraztutako elipsearen zati berdean) eta noduluen tamaina aldatuz doa (elipsearen zati morera heltzean noduluak desagertzen dira). Beraz,  $h$  parametroa  $u$  angeluaren menpeko funtzioa izango da.

Koordenatu kartesiarretara bueltatuz,  $f$  funtzioaren grafoaren altuera zehaztuko da lehenik. Kurba sortzaileko noduluen altuerak bete behar dituzten ezaugarriak  $h(x)$  altuera funtzioa Gauss-en kanpai gisa definituz lor daitezke. (3.1) adierazpenean oinarrituz hurrengo adierazpena lortzen da:

$$h(x) = He^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

non  $H = h(0)$  Gauss-en kanpaiaren altuera izango den.



**4.4. Irudia:**  $f(x) = \frac{h(x)}{2}(\cos(N_1x) + 1)$  funtzioaren grafoa,  $\mu = 0$ ,  $\sigma = \frac{\pi}{2}$  eta  $N_1 = 12$  parametroen balioetarako.  $(-\sigma, f(-\sigma))$  eta  $(\sigma, f(\sigma))$  puntuak gorritz agertzen direnak dira, Gauss-en kanpailari dagozkion inflexio puntuak  $f$  funtzioaren grafoaren gainean irudikatuta.

Erabilitako  $x$  aldagaia  $u$  angeluagatik ordezkatzean,

$$r_{eo}(u) + f(u) = r_{eo}(u) + \frac{h(u)}{2}(\cos(N_1u) + 1)$$

kurba  $f(x) = \frac{h(x)}{2}(\cos(N_1x) + 1)$  kurba izango litzateke  $r_{eo}(u)$  elipsearen gainean kokatuta (erreparatu 4.5 irudia).

Bestalde, kurba sortzaile bakoitzean nodulu luzeenaren kokapena zehazteko asmoz, bi parametro definituko dira:  $P$  eta  $W_1$  angeluak. Lehenengoa ardatz horizontalak eta nodulu luzeenaren gailurrak osatzen duten angelua da eta bigarrena noduluen altuerari dagokion Gauss-en kanpaiaren inflexio puntuek kurba berrian osatzen duten angelua. Bi parametro horien esanahi kontuan hartuz,  $\mu = P$  eta  $\sigma = \frac{W_1}{2}$  identifikazioak egin daitezke. Hor-taz, horrela gelditzen da 4.5 irudiko kurba gorriaren adierazpen orokorra  $u \in [P - \pi, P + \pi]$  guztietarako:

$$r_{eo}(u) + f(u) = r_{eo}(u) + \frac{H}{2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2(u-P)}{W_1}\right)^2}(\cos(N_1u) + 1). \quad (4.1)$$

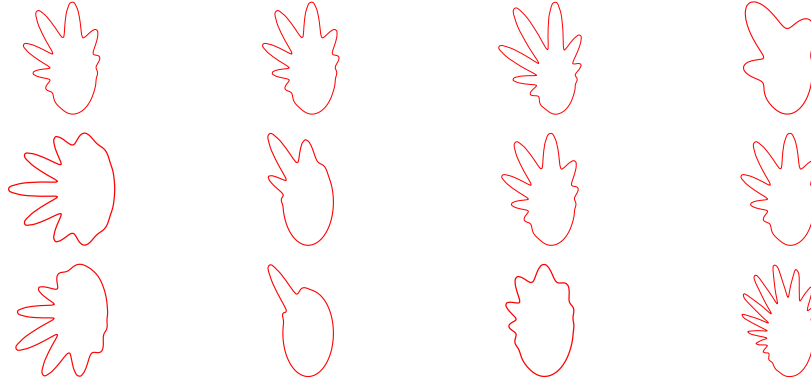


### 4.3 Kurba sortzailea helize konikoaren gainean

Amaitzeko, kurba sortzailea  $\mathcal{H}$  egiturazko kurban zehar mugitzean handituz joan behar denez,  $r_{nno}$ -ren adierazpenari egiturazko kurbaren hazkundetasuna berdina ezarriko zaio. Hortaz,  $t$  aldiuneko zenbait noduludun kurba sortzailearen  $u$  angeluari dagokion puntutik  $\mathcal{H}(t)$  puntura dagoen distantzia hurrengoa da:  $r_{nn}(t, u) = r_{nno}(t, u)r_{ht}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  eta  $u \in [P - \pi, P + \pi]$  guztietarako.

Dagoeneko lortu dira eredu berria eraikitzeko behar ziren aldaketa guztien adierazpenak. Izan ere, orain (2.2) adierazpenean  $r_e$  adierazpena  $r_{nn}$  adierazpenagatik ordezkaturaz  $\mathcal{S}_t^{nn}$  kurba sortzaile berriaren adierazpena lortzen da eta (2.3) adierazpenean  $r_{eo}$  adierazpenaren ordezkaturaz  $r_{nno}$  adierazpena jarritz, 4.1 irudiko maskorren egitura duten itsas maskorrenzako eredu geometrikoa lortzen da.

### 4.4 Parametro berrien esanahi geometrikoa



(a)  $N_1 = 12$   
 $W_1 = \frac{\pi}{2}$   
 $L = 0,6$

(b)  $N_1 = 12$   
 $L = 0,6$   
 $P = \frac{\pi}{3}$

(c)  $N_1 = 12$   
 $P = \frac{\pi}{3}$   
 $W_1 = \frac{\pi}{2}$

(d)  $P = \frac{\pi}{3}$   
 $L = 0,6$   
 $W_1 = \frac{\pi}{2}$

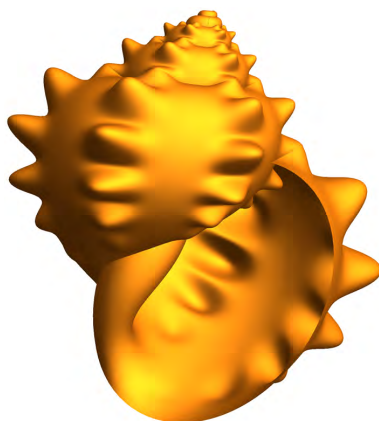
#### 4.6. Irudia

Goiko irudian zenbait noduludun kurba sortzaileak agertzen dira, 4. kapituluaren landutako parametroen balio desberdinetarako. Hurrengo eran aldatzen dira parametroak zutabeka goitik behera:

- (a)  $N_1$ ,  $W_1$  eta  $L$  finko mantentzen diren bitartean,  $P$  txikitzen da.
- (b)  $N_1$ ,  $L$  eta  $P$  finko mantentzen diren bitartean,  $W_1$  txikitzen da.
- (c)  $N_1$ ,  $P$  eta  $W_1$  finko mantentzen diren bitartean,  $L$  txikitzen da.
- (d)  $P$ ,  $L$  eta  $W_1$  finko mantentzen diren bitartean,  $N_1$  handitzen da.

Hemen aipatu ez diren  $N_2$  eta  $W_2$  parametroek, 3. kapituluko  $N$  eta  $W_2$  parametroen esanahi geometriko berdina dute. Lortutako emaitzak kontuan hartuz,  $N_1 = 0$  deneko kasurako 3. kapituluko adierazpen orokorra berreskuratzen dela ikus daiteke.

Parametro berrien esanahi geometrikoa kontuan hartuz eta parametroei balio egokiak emanez, kapitulu honen hasierako 4.1 irudiko maskorraren *Mathematica*<sup>\*</sup> programaren bidezko irudikapena egin daiteke. Lortutako emaitza beheko irudia da:



**4.7. Irudia:**  $A = 0.1$ ,  $\beta = 15^\circ$ ,  $\alpha = 84.3^\circ$ ,  $\xi = -30^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  
 $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $W_1 = 90^\circ$ ,  $W_2 = 15^\circ$ ,  $L = 0.07$ ,  $N_1 = 12$ ,  $N_2 = 6$ ,  
 $P = 45^\circ$

2.2 atalean aipatu den bezala, erduan parte hartzen duten parametroek esanahi biologiko bat ere badute. Atal honetan modelizatutako *Murex* izeneko maskorrek  $\alpha$  parametroaren balio handia eta  $\beta$  parametroaren balio txikia dituzenez, egitura gogor bat du. Hala ere, badu beste ezaugarri bat harrapakariekiko babesa eskaintzen diona, hain zuzen noduluak.

Maskor batzuek hastean noduluak garatzen dituzte. Nodulu horiek babesa emateaz gain, maskorrek lurzoruan posizio egokia edukitzea ahalbidetzen dute. Hau da, arrazoiren batengatik maskorra altuera batetik erortzen bada edota astindua baldin bada, noduluei esker maskorra irekiduraren gainean geldituko da berriz lurzorura iristean. Horrelako maskorrek  $L$  parametroaren balio handia (noduluen luzera) eta  $W_2$  parametroaren balio txikia (noduluen zabalera) izango dute. Izan ere, noduluak zenbat eta luzeagoak eta zorrotzagoak izan, babesa handiagoa izango da (*cf.* [1]).

## 5. Kapitulua

# Eredu geometrikoaren aplikazioak

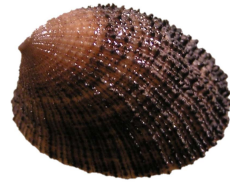
Aurreko kapituluetan gaur egun naturan aurki daitezkeen itsas maskorren gainazalaren oinarrituz, beraien eredu geometrikoak eraiki dira. Gainera, eredu geometrikoak erabiliz eta parametroekin jokatzuz, *Mathematica* bezalako programekin era askotako maskorrak irudika daitezkeela ikusi da. Kapitulu honetan, eredu geometriko horiek aplikazio gehiago dituztela erakutsiko da, zehazki maskor jakin batzuen eboluzio hipotetikoak adierazteko baliogarriak direla ikusiko da.

Badaude itsas maskor batzuk orain arte aipatu ez direnak, lapak. Beraien itxuragatik pentsa daiteke horiei dagokien eredu geometrikoa ez dela aurreko ataleko bat ere ez, ez baitute helize konikoaren egiturarik. Hala ere, 2. kapituluko ereduarekin eta  $\alpha$  parametroaren balio txikietarako lapak bezalako gainazalak lor daitezke.

Uste da lapen arbasoak  $80^\circ$  baino gehiagoko  $\alpha$  parametrodun maskorrak izan direla, gainazalen zati batzuen antzekotasunagatik. Eboluzio horren emaitza  $30^\circ$  baino gutxiagoko  $\alpha$  parametrodun lapak dira. Hala ere, guzti hori hipotesi bat baino ez da, ez baitira aurkitu  $30^\circ$  eta  $60^\circ$  bitarteko  $\alpha$  parametrodun espezie ugarririk. Horren arrazoia izan daiteke bitarteko espezie horien eboluzioa arina izan zela eta ondorioz espezie horietako animalia gutxi egon zirela. Hori dela eta, gaur egun espezie gutxi horien fosilak aurkitzea ez da batere erreza.

Suposatzen da prozesu horri hasiera ematen dion maskorra beheko 5.1.a irudiko *Trochidae* dela (cf. [2]), 5.1.b irudian aldiz gaur egun naturan aurki daitezkeen lapa bat ikus daiteke. 5.1.b irudiko laparen gainazala ez da leuna, hau da noduluaren antzeko formak ikus daitezke. Horrentzako noduludun eredu bat eraikitzea posible izango litzateke 4. kapituluan lortutako eredutik abiatuz. Lapa horren kasuan, kurba sortzaile bakoitzak nodulu bat baino gehiago du, baina kurba sortzaileen artean noduluak ez dira bereizten. Beraz nahikoa izango litzateke 4.1 atalean planteaturiko kurba sortzaile

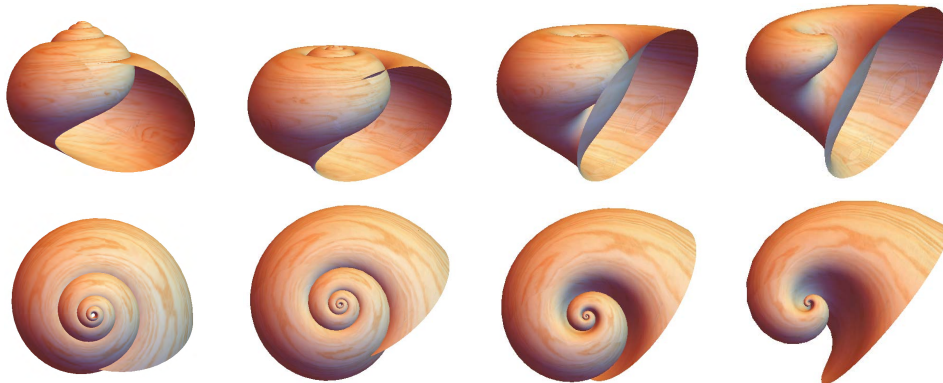
orokorra erabiltzea eta noduluen altuera  $t$  angeluaren arabera periodikoki aldatu beharrean, altuera finko bat zehaztea (honen antzeko adibidea 6.2.2 azpiatalean lantzen da). Hala ere, atal hau lantzeko 2. kapituluko eredia erabiliko da.

(a) *Trochidae* [35](b) *Patella vulgata* [36](c) *Helcion* [37]

### 5.1. Irudia

5.1 irudiko gainazal ezagunetan oinarrituz eta 2. kapituluan lortutako adierazpena erabiliz, *Mathematica*<sup>®</sup> programaren bitartez 5.3 irudiko (a) eta (h) irudiak lor daitezke. Bertan maskorren aurretiko eta goitiko bistak agertzen dira, parametroen balioen hurrengo estimazioetarako kasu bakoitzean: (a) irudian  $\alpha = 83^\circ$ ,  $\beta = 20^\circ$ ,  $A = 9$ ,  $a = 20$ ,  $b = 18$ ,  $\xi = -50^\circ$ ,  $\delta = -10^\circ$  eta  $\varphi = 40^\circ$ , eta (h) irudian  $\alpha = 3^\circ$ ,  $\beta = 89^\circ$ ,  $A = 20$ ,  $a = 20$ ,  $b = 18$ ,  $\xi = 1^\circ$ ,  $\delta = -80^\circ$  eta  $\varphi = 1^\circ$ .

Beheko irudiko (b) eta (g) zutabeen bitartean, eboluzioaren prozesu hipotetikoaren sei urrats ikus daiteke *Mathematica*<sup>®</sup> programarekin irudikatuta, esan beharra dago (g) urratsari dagokion gainazala naturan aurkitu den bakarra dela (erreparatu 5.1.c irudia). Horiek irudikatzeko,  $a$  eta  $b$  parametroen estimazio berdinak erabili dira. Gainontzeko parametroen balioak estimatzeko interpolazio lineala erabili da,  $\alpha$  parametroaren kasuan izan ezik, horretan interpolazio koadratikoa erabili baita.



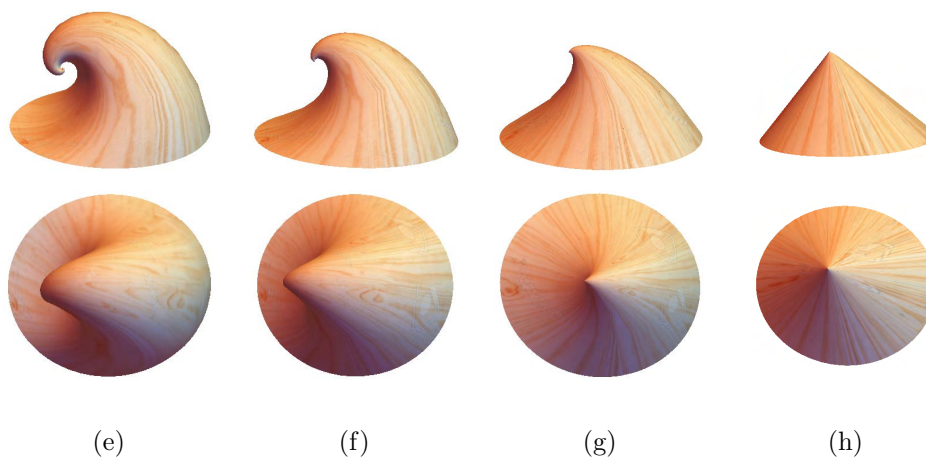
(a)

(b)

(c)

(d)





### 5.3. Irudia

5.3 irudian eboluzioaren zortzi urrats baino ez dira agertzen, baina prozedura berdina jarraituz urrats gehiago egin daitezke eta lortutako irudi guztiekin eboluzio prozesu hipotetikoaren animazio bat sor daiteke (*vid.* [16]).

Amaitzeko, kontuan hartu beharra dago estimatutako 5.1.b irudiko laparen  $\alpha$  parametroaren balioa txikia eta  $\beta$  parametroaren balioa handia direla. Beraz kasu hau orain arte aztertutako maskorren aurkako kasua da, baina horrek ez du esan nahi lapen gainazala ahulagoa denik. Lapek, orain arte aztertutako gainontzeko maskorrek ez bezala, olatuen indarra jasateko prest egon behar diren gainazalak dira. Hori dela eta, beraien gainazalek altuera txikiagoa izan behar dute eta irekidura handiagoa ( $a$  eta  $b$  parametroen balio handiak). Modu honetan beraien itsasgarritasuna arroketa edo bestelako egituretara askoz handiagoa da gainontzeko maskorrena baino (*cf.* [1]).



## 6. Kapituluua

# Itsas maskorren irudikapena

Aurreko kapituluetan *Mathematica*<sup>®</sup> programaren bitartez lortu diren itsas maskorren irudietan batez ere argazkietako maskorren forma imitatu da, itxura hainbeste kontuan hartu gabe. Azken kapitulu honetan argazkietako maskorren formaz gain *POV-Ray* programa erabiliz itxura ere imitatuko da, argazkien kopia errealistak lortuz.

Bestalde, aurreko kapituluetan gainetik landuta gelditu diren kasu edota azalpen batzuentzako adibideak aztertuko dira.

### 6.1 Landutako maskorren irudikapen errealista

Orain arte landutako 1.10, 3.1, 4.1 eta 5.1 irudietako argazkien kopia errealistak lortu nahi direnez, hoberena izango litzateke bizitza errealean objektu bati argazkia ateratzean erabiltzen den prozesu berdina errepikatzea. Horretarako, *POV-Ray* programak erabiltzen duen “*ray tracing*” edo *izpi marraketa* izeneko teknika erabiliko da.

Teknika horrek eszena baten argazkia lortzen du, mundu errealeko argizpien portaera simulatuz. Bizitza errealean argi-iturri batek objektuak argizatzen ditu eta objektuek zenbait argi-izpi islatzen dituzte. Islatutako argi-izpi horietako batzuk gizakien begietara edota argazki kamera batera iristen dira, eta horri esker objektuak ikus daitezke edota beraien argazki bat lor daiteke.

Hala ere, objektuek ez dituztenez islatzen argi-iturritik jasandako izpi gehienak, lana aurrezteko *POV-Ray* bezalako programek (“*ray tracing*” teknikan oinarritutakoak) alderantzizko prozesua erabiltzen dute. Lehendabizi, kameraren posizioa, kameraren ikusmen norabidea, argi-iturriaren posizioa eta eszenan parte hartzen duten objektuak (beraien testurarekin, gardentasunarekin, islapen ahalmenarekin... batera) definitzen dira. Ondoren, izpi marraketa bat egiten da. Izpi horietako bakoitzari *ikusmen-izpi* deritzo eta argazki kameraren posiziotik eszenan parte hartzen duten objektuetaraino



ka hori erabiliz [20] bideoa eraiki da ([17] bideoan oinarrituta, audioa [18] eta [19] bideoetako audioak nahastuta sortuz eta bideoa osatzen duten argazkiak eraikitzeko [10] web gunea erabiliz). *POV-Ray* programarekin bideoa osatzen duten argazkiak eta *Audacity* programarekin audioa sortu ostean, *Movavi Video Editor* programa erabili da bideoa muntatzeko.

**Oharra 6.1.1** ( $t$  angeluaren definizio tartea irudietan).

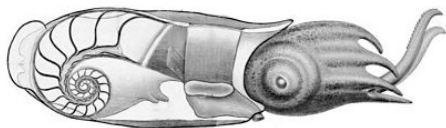
Hasierako lau kapituluetan eredu geometrikoak eraikitzean  $t$  angelua  $\mathbb{R}$  osoan definitzen da. Hala ere, parametroen balio jakin batzuentzako  $t$  angeluaren definizio tartea mugatu egin behar da, konpilatzean arazorik ez edukitzeko. Esaterako, A.3.b irudiaren kasuan  $\alpha$  parametroaren balio txikiekin lan egiten denez,  $t$ -ren balio handietan kiribil logaritmikoa koordenatu-jatorritik oso urrun dago. Hori dela eta, irudiak oso handiak direnez konpilatzeo arazoak sortzen dira. Ondorioz, A.3.b irudian  $t \in [-8\pi, 0]$  dago eta gainontzekoetan  $t \in [-4\pi, 12\pi]$ .

## 6.2 Adibide gehiago

### 6.2.1 $\beta = \frac{\pi}{2}$ baliodun itsas maskorrak

1.2.3 oharrean  $\beta = \frac{\pi}{2}$  deneko kasua aipatu da, baina ez dira adibiderik eman. Naturan badaude  $\beta = \frac{\pi}{2}$  baliodun itsas maskorrak, erreparatu B eranskineko B.1 eta B.2 irudiak: eskuinaldean maskorren argazkiak ikus daitezke, eta ezkerrean argazki horien imitazioak *POV-Ray* programarekin eraikita.

Orain arte aztertutako itsas maskor guztiak moluskuen “bizilekuak” dira, hau da animaliaren kanpoaldean daude. Aldiz, B.2 maskorra animaliaren barrualdean kokatuta dago (erreparatu 6.2 irudia). Hori dela eta, maskor honen ezaugarri biologikoak ez dira aurreko kasuetan aipatutakoak. Kasu honetan, maskorrak animaliaren flotagarritasuna ahalbidetzen du (*cf.* [6]).



(a) Animaliaren marrazkia [42]



(b) Animaliaren argazkia [43]

### 6.2. Irudia

### 6.2.2 $\beta$ handidun, $\alpha$ txikidun eta noduludun itsas maskorrak

5. kapituluaren 5.1.b argazkiko maskorra modelizatzeko 2. kapituluko eredu geometrikoa erabiltzen da. Hala ere, kapitulu horretan aipatzen den bezala, 5.1.b irudiko maskorrak noduluak ditu eta adierazteko eredu zehatzago bat eraiki daiteke 4. kapituluko ereduaren modifikazio batzuk eginez.

B.3 irudian 4.2 atalean lortutako adierazpena erabiliz *Acanthocardia tuberculata* izeneko maskorraren irudikapen errealista ikus daiteke, *POV-Ray* programarekin eginda. 4.2 ataleko ereduaren aldaketa bakarra egin da,  $H$  funtzioa  $t$ -ren menpeko adierazpena izan beharrean funtzio konstantea da. Izan ere, B.3.b argazkian ikus daitekeen moduan, kurba sortzaileak nodulu bat baino gehiagoz osatuta daude, baina kurba sortzaileen artean noduluak ez dira bereizten.

### 6.2.3 Testuren esanahi biologikoa

Orain arte parametroen esanahi biologikoa aipatu da, hau da itsas maskorren formaren esanahi biologikoa. Baina landutako itsas maskor guztiek testura desberdinak dituzte, eta horietako batzuk esanahi biologiko berezia dute.

B.4.a irudian *Conidae* izeneko maskorra ikus daiteke *POV-Ray* programarekin irudikatuta. Maskor horrek  $\alpha$  parametroaren balio handia eta  $\beta$  parametroaren balio txikia ditueneguz, egitura gogorra du. Hala ere, irekidura estua duenez ( $b$  parametroaren balioa  $a$  parametroaren balioarekin alderatuz txikia delako), animalia oso motel mugitzen da. Horregatik, harrapakin arinak harrapatzeko espezie horrek duen arpoi pozoitsuak erabiltzen du.

Beraz *Conidae* deituriko moluskuak pozoitsuak dira. Hori dela eta, maskorren testura oso deigarria da (erreferatu B.4 irudia). Kasu honetan, testura moluskuaren defentsa-mekanismo bat da. Izan ere, horrela harrapakariei ohartarazten die potentzialki pozoitsuak diren animaliak direla edota substantzia bereziki toxikoak dituztela (*cf.* [8]).

## A. Eranskina

### Lehenengo bost kapituluetakoko argazkien irudikapen errealistak



(a) *Turritella*



(b) *Babylonia spirata*



(c) *Pleurotomariidae*

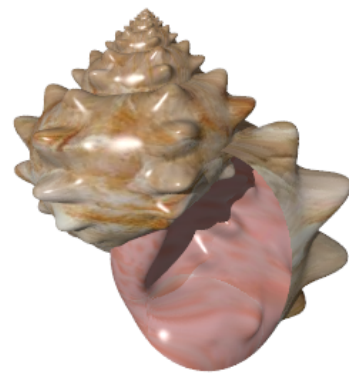
#### A.1. Irudia: Nodulu gabeko itsas maskorrek



(a) *Epitoniidae*



(b) *Pleuroploca*



(c) *Murex arrosa*

#### A.2. Irudia: Noduludun itsas maskorrek



(a) *Trochidae*



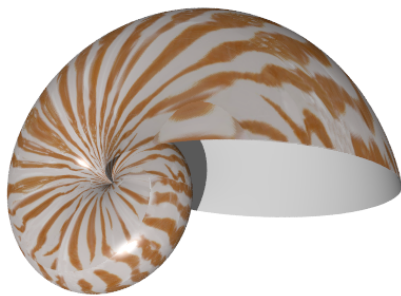
(b) *Patella vulgata*

**A.3. Irudia:** Lapekin lotutako itsas maskorrak



## B. Eranskina

# Adibide gehigarrien irudikapen errealistak

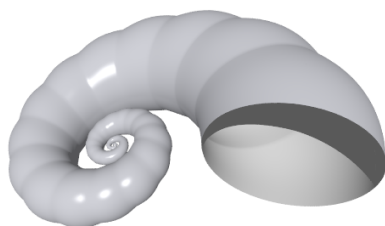


(a)  $A = 2$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\alpha = 80^\circ$ ,  $\xi = 0^\circ$ ,  
 $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1.5$



(b) *Nautilus pompilius* [39]

### B.1. Irudia

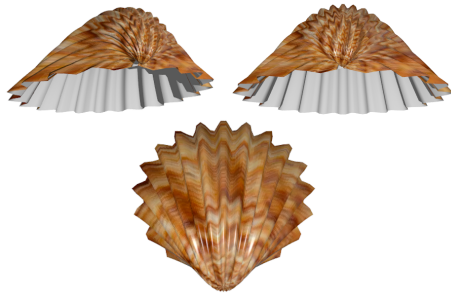


(a)  $A = 2$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\alpha = 78^\circ$ ,  $\xi = 0^\circ$ ,  
 $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  $a = 0.8$ ,  $b = 0.8$ ,  
 $P = 0^\circ$ ,  $W_1 = 180^\circ$ ,  $W_2 = 25^\circ$ ,  
 $N = 14$ ,  $L = 0.2$



(b) *Spirulidae* [40]

### B.2. Irudia

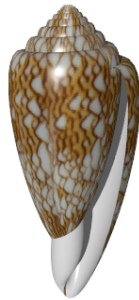


- (a)  $A = 10000$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  
 $\xi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  
 $a = 8500$ ,  $b = 9000$ ,  $H = 2000$ ,  
 $P = 0^\circ$ ,  $N_1 = 20$ ,  $W_1 = 270^\circ$



- (b) *Acanthocardia tuberculata* [41]

### B.3. Irudia



- (a)  $A = 2$ ,  $\beta = 7^\circ$ ,  $\alpha = 87^\circ$ ,  $\xi = 78^\circ$ ,  
 $\varphi = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ,  $a = 4.3$ ,  $b = 1$



- (b) *Conidae* [38]

### B.4. Irudia

# Bibliografia

## Artikuluak eta lanak

- [1] CORTIE, Michael: *Models for mollusc shell shape*, South African Journal of Science, 85 (1989), 454-460.
- [2] CORTIE, Michael: *The form, function, and synthesis of the molluscan shell*. In: *Spiral Symmetry*, World Scientific Publishing, Singapore, 1992, 369-387.
- [3] CORTIE, Michael: *Modelling the Surface Bumps and Spikes of Molluscan Shells*. In: *Proceedings of the first international conchology conference*, Hadronic Press, Australia, 1995, 46-65.
- [4] PICADO, Jorge: *Seashells: the plainness and beauty of their mathematical description*, Loci (Journal of the MAA Mathematical Sciences Digital Library), 1 (2009).
- [5] PICADO, Jorge: *Das formas às fórmulas: estrutura e geometria das conchas marinhas*, 2014.
- [6] WARNKE, Kerstin: *Spirula-a window to the embryonic development of ammonoids? Morphological and molecular indications for a palaeontological hypothesis*, 2005.
- [7] El País: *Caracoles simétricos*, Madrid, 2009.
- [8] PIPER, Rosse: *Extraordinary Animals: An Encyclopedia of Curious and Unusual Animals*, Greenwood Press, United States, 2007.

## Web orrialdeak

- [9] The POV-Team: *POV-Ray Documentation*.
- [10] LOHMÜLLER, Andrea; LOHMÜLLER, Friedrich: *POV-Ray Tutorials and 3D Animation Tutorial*.

- [11] Atractor: *Temas matemáticos. Conchas*.
- [12] PICADO, Jorge: *Conchas marinhas: a simplicidade e beleza da sua descrição matemática*, 2007.

## Bideoak

- [13] ECHEVARRIETA, Judith: *Egiturazko kurbaren OX ardatzarekiko biraketa*, Youtube, 2020.
- [14] ECHEVARRIETA, Judith: *Egiturazko kurbaren OY ardatzarekiko biraketa*, Youtube, 2020.
- [15] ECHEVARRIETA, Judith: *Egiturazko kurbaren jatorriarekiko simetria*, Youtube, 2020.
- [16] ECHEVARRIETA, Judith: *Lapen jatorria*, Youtube, 2020.
- [17] AtractorMI: *The math of the shells/A Matemática das conchas*, Youtube, 2017.
- [18] Toksound: *La Música Instrumental de Piano Mas Inspiradora para Estudiar y Concentrarse, Trabajar, Leer*, Youtube, 2019.
- [19] Sonoterapia: *Olas del mar con Piano Relajante - Música Relajante para Calmar la Mente y Eliminar el Estrés*, Youtube, 2017.
- [20] ECHEVARRIETA, Judith: *Itsas maskorak*, Youtube, 2020.

## Programak

- [21] Wolfram Research: *Mathematica*®, Version 10.4, Champaign, 2016.
- [22] The POV-Team: *POV-Ray*, Version 3.7, Australia, 2013.
- [23] The GIMP Development Team: *GIMP*, Version 2.10.12, 2019.
- [24] Audacity Team: *Audacity*®, Version 2.4.2, 2020.
- [25] Movavi Team: *Movavi Video Editor*, Version 20.3.0, 2020.

## Argazkiak

- [26] *Helize konikoa.*
- [27] *Kiribil logaritmikoa.*
- [28] *Lymnaea stagnalis.*
- [29] *Turritella.*
- [30] *Babylonia spirata.*
- [31] *Pleurotomariidae.*
- [32] *Epitoniidae.*
- [33] *Pleuroploca.*
- [34] *Murex arrosa.*
- [35] *Trochidae.*
- [36] *Patella vulgata.*
- [37] *Helcion.*
- [38] *Conidae.*
- [39] *Nautilus pompilius.*
- [40] *Spirulidae.*
- [41] *Acanthocardia tuberculata.*
- [42] *Spirulidae animaliaaren marrazkia.*
- [43] *Spirulidae animalia.*

