



---

# Modelos dinámicos para las relaciones románticas

---

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas

Virginia Munoa Urruticoechea

Trabajo dirigido por  
Virginia Muto Foresi

Leioa, 17 de junio de 2020



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Modelo Inicial basado en la historia entre Romeo y Julieta</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del modelo . . . . .	1
1.2. Tipos de personas en las relaciones . . . . .	3
1.3. Puntos de equilibrio y caso general . . . . .	4
1.4. Casos especiales . . . . .	5
1.4.1. No hace caso a su corazón . . . . .	5
1.4.2. ¿Los opuestos se atraen? . . . . .	7
1.4.3. Almas gemelas . . . . .	9
1.4.4. Romeo, el robot . . . . .	11
1.4.5. Conclusiones . . . . .	14
<b>2. Modelo no-lineal y la aparición del caos</b>	<b>15</b>
2.1. Planteamiento del modelo no lineal . . . . .	15
2.2. Puntos de equilibrio y análisis de las distintas relaciones . . .	16
2.3. Aparición de fuerzas externas y del caos . . . . .	22
2.4. Análisis del fenómeno del caos . . . . .	22
2.4.1. Conclusiones . . . . .	28
<b>3. Triángulos amorosos</b>	<b>29</b>
3.1. Planteamiento del modelo . . . . .	29
3.2. Puntos de equilibrio y análisis de las distintas relaciones . . .	31
3.3. Efectos de la no-linealidad . . . . .	35
3.4. Análisis del nuevo modelo . . . . .	36
3.5. Conclusiones . . . . .	38
<b>4. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A. Teorías sobre la evolución de las especies</b>	<b>41</b>
A.1. Teoría malthusiana . . . . .	41
A.2. Modelo logístico . . . . .	42

<b>B. Resumen sobre ecuaciones diferenciales</b>	<b>43</b>
B.1. Definiciones básicas . . . . .	43
B.2. Clasificación de los puntos de equilibrio en sistemas lineales . . . . .	44
<b>C. Resultados del capítulo 3</b>	<b>47</b>
C.1. Programa de Mathematica del modelo 3.5 . . . . .	47
C.2. Pruebas para el modelo 3.5 . . . . .	48
C.3. Macro y resultados para las pruebas C.2 . . . . .	49
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>

# Introducción

Este documento tiene como finalidad plantear y analizar distintos modelos que describan el amor entre dos personas, cada cual un poco más complejo, y todos ellos basados en la famosa historia de amor entre Romeo y Julieta. El amor es una serie de sentimientos que crean un fuerte vínculo emocional con otra persona. Existen muchos tipos de amor: amor romántico, amor hacia nuestra familia o amigos, amor por la vida, y el más importante, el amor por uno mismo. En este trabajo nos centraremos en el amor romántico.

Se han incluido tres capítulos. En el primero, se plantea el modelo básico, en el segundo se introducen el comportamiento no-lineal y las fuerzas externas, y en el tercero, los triángulos amorosos lineales y no-lineales. De esta forma, analizaremos, mediante sistemas de ecuaciones diferenciales, el comportamiento de las dos personas, o tres en el caso del tercer capítulo, involucradas en una relación, llegando a distintas conclusiones en cada uno de ellos.

Estudiar las dinámicas del amor mediante las matemáticas no es algo muy común, ya que es complicado relacionar números con sentimientos. De hecho, es cierto que existe una cierta dificultad en definir qué es el amor y en cuantificarlo. Sin embargo, en este trabajo se ha intentado ser lo más realista posible, tomando de base el modelo inicial planteado en el capítulo uno y complicándolo poco a poco. Por ejemplo, al introducir la no-linealidad y las fuerzas externas, nos encontramos con situaciones más realistas e incluso con la aparición de comportamientos caóticos, bastante recurrentes en el amor.

En el Capítulo 1 definiremos el modelo inicial de amor entre dos personas planteado por Strogatz [1] y basado en la relación entre Romeo y Julieta. En este modelo solo se toman en cuenta los sentimientos que Romeo tiene hacia Julieta y el amor que Julieta siente hacia Romeo. Primero, plantearemos el modelo paso a paso y después, definiremos los 4 estilos de personas que diferencia Sproull [2], lo cual nos será muy útil en todo el trabajo. A continuación, estudiaremos los puntos de equilibrio y cuatro relaciones concretas mediante un programa de *Mathematica* que nos permite reproducirlas en

distintos gráficos.

En el Capítulo 2 introduciremos la no-linealidad al modelo inicial, como hacen Sprott [2] y Bae [3], y estudiaremos todas las relaciones posibles entre dos personas, teniendo en cuenta sus personalidades. Para ello, reproduciremos en cada caso los planos de fases. Después, plantearemos un modelo más complejo teniendo en cuenta distintas fuerzas externas y observaremos como estas pueden generar la aparición del caos [3]. Al igual que en el capítulo anterior, utilizaremos el programa de *Mathematica* para crear los planos de fases y estudiar el amor entre Romeo y Julieta.

En el Capítulo 3 tomaremos de nuevo de base el modelo inicial, e introduciremos a una tercera persona en la relación [2], Guinevere, la amante de Romeo. En este caso, plantearemos un sencillo experimento estadístico para conocer las probabilidades de los distintos comportamientos amorosos del trío. Realizaremos 100 pruebas en *Mathematica*, tomando valores aleatorios y recreando mediante gráficas las relaciones. Estos resultados los anotaremos en un Excel y ejecutaremos una macro que nos devuelva distintos porcentajes, como por ejemplo, la probabilidad de que Romeo ame tanto a Julieta como a Guinevere. Por último, introduciremos la no-linealidad [2] y estudiaremos la existencia de atractores caóticos.

# Capítulo 1

## Modelo Inicial basado en la historia entre Romeo y Julieta

El modelo básico que se plantea en este capítulo fue originalmente propuesto por Strogatz [1] con la intención de motivar a sus alumnos en los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinales, más que para describir una historia de amor y, sin embargo, hace una serie de interesantes predicciones.

### 1.1. Planteamiento del modelo

La idea principal de este modelo consiste en lo siguiente: analizar el amor que sienten dos personas, teniendo en cuenta solamente los sentimientos que tienen el uno por el otro; sin considerar ningún otro factor adicional. Para ello, Strogatz introduce un modelo dinámico lineal utilizando como ejemplo la aventura entre Romeo y Julieta, donde  $R(t)$  es el amor u odio que siente Romeo hacia Julieta en el instante  $t$  y  $J(t)$  es el amor u odio de Julieta hacia Romeo en el mismo momento. Los valores positivos que toman  $R(t)$  y  $J(t)$  representan el amor y, en cambio, los valores negativos el odio. Entonces, utilizaremos los conceptos explicados en el Apéndice A sobre la teoría maltusiana (A.1).

Primero, vamos a centrarnos en los sentimientos de Romeo hacia Julieta, donde se pueden dar dos situaciones:

- La ausencia de los sentimientos de ella hacia él, por lo que simplemente tendremos en cuenta el amor u odio de Romeo hacia Julieta, esto es:

$$\frac{dR}{dt} = aR(t) \tag{1.1}$$

donde la constante  $a$  define la reacción de Romeo hacia sus propios sentimientos. Si  $a$  es positiva y Romeo ama a Julieta, se intensificará o atenuará su amor; pero seguirá amándole, al igual que si le odia, en menor o mayor medida continuará odiándole. Por otro lado, si  $a$  es negativa, sus sentimientos cambiarán, es decir, si Romeo, por ejemplo, ama a Julieta, luchará contra su amor y empezará a odiarle.

- Julieta tiene sentimientos hacia Romeo (positivos o negativos), por lo que estos se tomarán en cuenta a la hora de crear la ecuación:

$$\frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t) \quad (1.2)$$

donde aparece un nuevo parámetro  $b$ , el cual define la reacción de Romeo ante los sentimientos que tiene Julieta hacia él. En el caso en el que  $b$  sea positivo, Romeo imitará los sentimientos de Julieta hacia él, pero si  $b$  es negativa, actuará de forma contraria a ella.

A continuación, vamos a analizar los sentimientos de Julieta hacia Romeo de la misma manera, diferenciando dos situaciones posibles:

- La ausencia de los sentimientos de él hacia ella, por lo que simplemente tendremos en cuenta el amor u odio de Julieta hacia Romeo, esto es:

$$\frac{dJ}{dt} = dJ(t) \quad (1.3)$$

donde la constante  $d$  define la reacción de Julieta hacia sus propios sentimientos. Este parámetro actúa de forma similar a la constante  $a$  pero para el caso de Julieta.

- Romeo tiene sentimientos hacia Julieta, por lo que estos se tomarán en cuenta a la hora de crear la ecuación:

$$\frac{dJ}{dt} = cR(t) + dJ(t) \quad (1.4)$$

donde aparece un nuevo parámetro  $c$ , el cual define la reacción de Julieta a los sentimientos que tiene Romeo hacia ella. Este parámetro actúa de forma similar a la constante  $b$  pero para el caso de Julieta.

Por lo tanto, el modelo lineal planteado es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t) \\ \frac{dJ}{dt} = cR(t) + dJ(t). \end{cases} \quad (1.5)$$



Los resultados de estas dinámicas son bidimensionales y están influenciados tanto por las condiciones iniciales como por los cuatro parámetros, los cuales pueden ser positivos o negativos. Gottman [4] utiliza los términos “inercia de comportamiento” para los parámetros  $a$  y  $d$  y “función de influencia” para  $b$  y  $c$ .

## 1.2. Tipos de personas en las relaciones

Desde la perspectiva de Romeo existen cuatro tipos distintos de romanticismos [3], dependiendo de los signos de  $a$  y de  $b$ , y son los siguientes:

- (i) El entusiasta: cuando  $a > 0$  y  $b > 0$ . Romeo está estimulado por sus propios sentimientos al igual que por los de Julieta.
- (ii) El narcisista: cuando  $a > 0$  y  $b < 0$ . Romeo está estimulado por sus propios sentimientos, pero reacciona negativamente ante los sentimientos de Julieta.
- (iii) El amante seguro: cuando  $a < 0$  y  $b > 0$ . Romeo reacciona negativamente ante sus propios sentimientos, pero se estimula con los sentimientos de Julieta hacia él.
- (iv) El solitario: cuando  $a < 0$  y  $b < 0$ . Romeo reacciona negativamente ante sus propios sentimientos y ante los de Julieta.

Sprott utiliza el término “seguro” para hacer referencia a aquellos individuos con la constante  $a$  negativa y el parámetro  $b$  positivo. Dichas personas representan, además, a la mayoría de la población. Por otro lado, los individuos narcisistas son aquellos que odian ser amados, pero les encanta ser odiados, es decir, actúan de forma contraria a lo que sienten por ellos. Además, como para el caso de Julieta también existen estos 4 tipos de romanticismos, en total se pueden crear 16 tipos distintos de parejas, con comportamientos totalmente diferentes:

		<b>Julieta</b> ( $c, d$ )			
		<b>Entusiasta</b>	<b>Narcisista</b>	<b>Seguro</b>	<b>Solitario</b>
<b>Romeo</b> ( $a, b$ )	<b>Entusiasta</b>	$a > 0$ $b > 0$ $c > 0$ $d > 0$	$a > 0$ $b > 0$ $c < 0$ $d > 0$	$a > 0$ $b > 0$ $c > 0$ $d < 0$	$a > 0$ $b > 0$ $c < 0$ $d < 0$
	<b>Narcisista</b>	$a > 0$ $b < 0$ $c > 0$ $d > 0$	$a > 0$ $b < 0$ $c < 0$ $d > 0$	$a > 0$ $b < 0$ $c > 0$ $d < 0$	$a > 0$ $b < 0$ $c < 0$ $d < 0$
	<b>Seguro</b>	$a < 0$ $b > 0$ $c > 0$ $d > 0$	$a < 0$ $b > 0$ $c < 0$ $d > 0$	$a < 0$ $b > 0$ $c > 0$ $d < 0$	$a < 0$ $b > 0$ $c < 0$ $d < 0$
	<b>Solitario</b>	$a < 0$ $b < 0$ $c > 0$ $d > 0$	$a < 0$ $b < 0$ $c < 0$ $d > 0$	$a < 0$ $b < 0$ $c > 0$ $d < 0$	$a < 0$ $b < 0$ $c < 0$ $d < 0$

### 1.3. Puntos de equilibrio y caso general

A continuación, vamos a calcular los puntos de equilibrio igualando a cero las dos ecuaciones del sistema planteado (1.5). En el apéndice B, apartado B.1, se definen los puntos de equilibrio y cómo obtenerlos. Por tanto,

$$aR(t) + bJ(t) = 0 \quad (1.6)$$

$$cR(t) + dJ(t) = 0. \quad (1.7)$$

De la ecuación (1.7) obtenemos que  $R = -\frac{d}{c}J$  ( $c \neq 0$ ) y sustituyendo en la ecuación (1.6) deducimos lo siguiente:

$$J\left(-\frac{ad}{c} + b\right) = 0,$$

es decir, salvo en los casos donde se cumple la igualdad  $-\frac{ad}{c} + b = 0$ , el único punto de equilibrio es el  $(0, 0)$ , lo que corresponde a un estado de apatía por parte de ambos. Por otro lado, calculamos la matriz jacobiana del sistema, con el fin de determinar los valores propios, como se explica en el apéndice B.1. Entonces, consideremos la siguiente matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Seguimos calculando el determinante de  $(J - \lambda I)$  e igualándolo a cero:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0. \quad (1.9)$$

Por lo tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)}. \quad (1.10)$$

Por consiguiente, existen soluciones reales si  $(a + d)^2 \geq 4(ad - cb)$ , y complejas en caso contrario. Dentro de las soluciones reales habría 4 casos posibles:

1. Si  $a + d > 0$  y  $ad > cb$ : Los dos autovalores son positivos, por lo que se trata de un nodo inestable.
2. Si  $a + d > 0$  y  $ad < cb$ : Un autovalor es positivo y el otro es negativo, por lo que se trata de un punto silla.
3. Si  $a + d < 0$  y  $ad > cb$ : Los dos autovalores son negativos, por lo que se trata de un nodo estable.
4. Si  $a + d < 0$  y  $ad < cb$ : Un autovalor es positivo y el otro es negativo, por lo que se trata de un punto silla.

Dentro de las soluciones complejas, habría 2 casos posibles:

1. Si  $a + d > 0$ : La parte real es positiva, por lo que se trata de un foco inestable.
2. Si  $a + d < 0$ : La parte real es negativa, por lo que se trata de un foco estable.

## 1.4. Casos especiales

Sprott [3] considera 4 casos especiales en los que analiza los distintos destinos de las relaciones, teniendo en cuenta los autovalores, los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  y las condiciones iniciales.

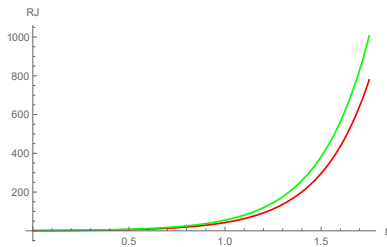
### 1.4.1. No hace caso a su corazón

Consideramos el caso donde Romeo y Julieta no hacen caso a sus propios sentimientos, sino que solamente responden ante los sentimientos del otro, esto es,  $a = d = 0$ . Por lo tanto, los autovalores (1.10) en este caso serán:

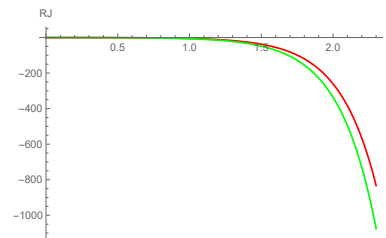
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{cb}.$$

Luego, tendremos tres combinaciones posibles:

1. Los dos entusiastas:  $b > 0$  y  $c > 0$ . Al obtener dos valores propios reales de signo contrario, se crearía un punto silla. Esta relación terminará con amor u odio mutuo, en función de las condiciones iniciales, como se muestra en la figura 1.1 (evolución temporal) y en el correspondiente plano de fases de la figura 1.2. En la figura 1.1, las líneas roja y verde representan el amor de Romeo y Julieta respectivamente. En la figura 1.2, el punto de equilibrio está marcado con un punto negro y las trayectorias magenta son los casos particulares de la figura 1.1. Las flechas indican la evolución temporal. Claramente, en este caso, el punto de equilibrio es un punto inestable.



(a) Amor.  $R_0 = 1$  y  $J_0 = 1$ .



(b) Odio.  $R_0 = -1$  y  $J_0 = 1$ .

Figura 1.1: Relación entre dos entusiastas, con  $b = 3$  y  $c = 5$ , y distintas condiciones iniciales.

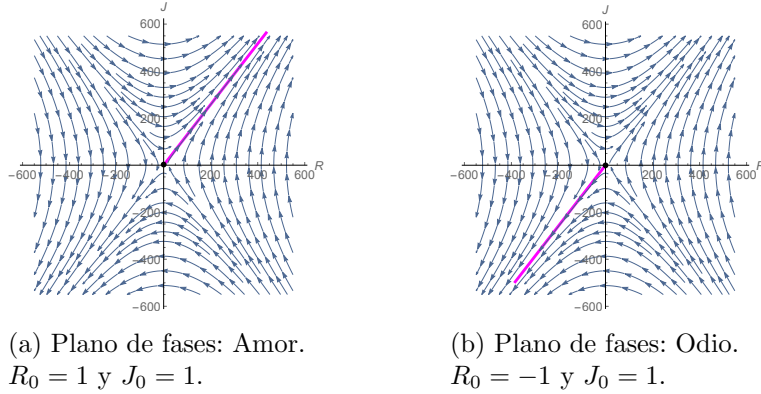


Figura 1.2: Planos de fases de los casos de la figura 1.1, con  $b = 3$  y  $c = 5$ .

2. Los dos narcisistas:  $b < 0$  y  $c < 0$ . Al obtener dos valores propios reales de signo contrario, se crearía también un punto silla. Esta relación terminará con uno de ellos enamorado y el otro no, en función de las condiciones iniciales, como se muestra en la figura 1.3, con la evolución temporal a la izquierda y el plano de fases a la derecha. Esta es una situación a la que denominaremos como “conflicto”. En este caso, de nuevo, el punto de equilibrio es un punto inestable.

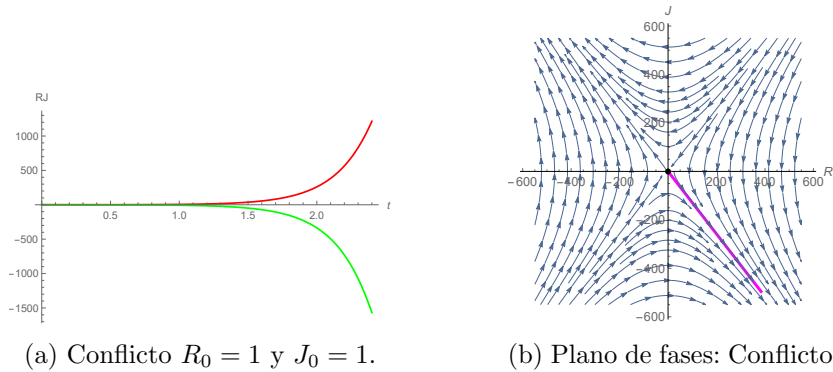


Figura 1.3: Relación entre dos narcisistas, con  $b = -3$  y  $c = -5$ .

3. El entusiasta y el narcisista:  $bc < 0$ . Al obtener dos valores propios complejos sin parte real, es decir, un número imaginario puro, nos encontraríamos ante un centro. En otras palabras, esta relación genera un ciclo interminable de amor-odio, como apreciamos en la figura 1.4, con la evolución temporal a la izquierda y el plano de fases a la derecha.

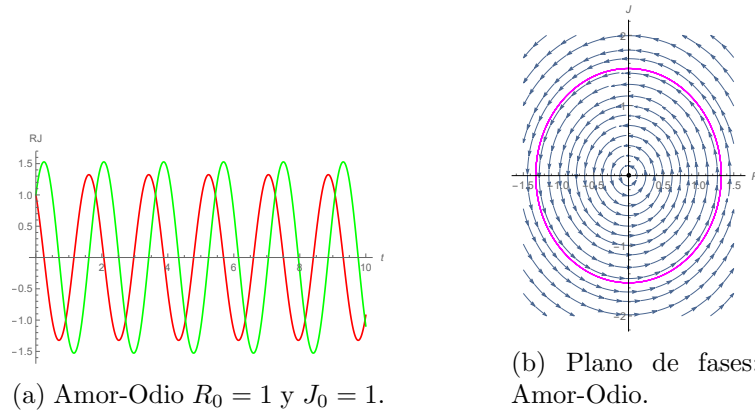


Figura 1.4: Relación entre el entusiastas y el narcisista, con  $b = -3$  y  $c = 4$ .

### 1.4.2. ¿Los opuestos se atraen?

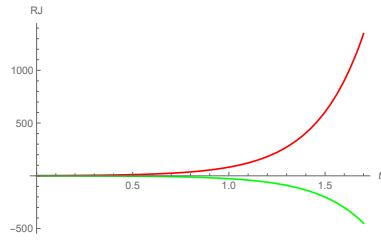
En esta sección consideramos el caso en el que dos amantes son opuestos, es decir,  $c = -b$  y  $d = -a$ . Además observamos como si  $a$  y  $b$  son positivos,  $c$  y  $d$  serán negativos, con que tendríamos una relación entre un amante entusiasta y un individuo solitario. Lo mismo ocurre si  $a$  y  $b$  son negativos. En cambio, si los valores de  $a$  y  $b$  tienen distinto signo, estaríamos tratando una relación entre un narcisista y un amante seguro. En resumen, en esta sección solo existen dos combinaciones posibles de personas.

Bajo las condiciones,  $c = -b$  y  $d = -a$ , los autovalores (1.10) son ahora

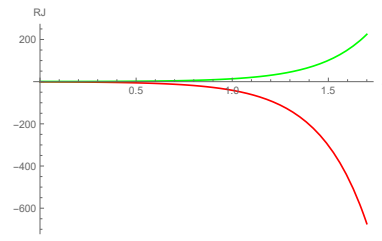
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$$

De nuevo, diferenciamos varios casos, en función de los valores de  $a$  y  $b$ :

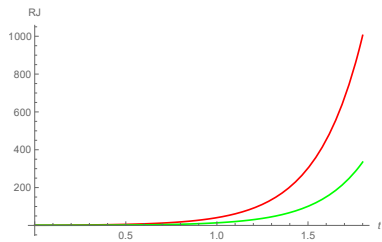
1. Cuando el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él:  $|a| > |b|$ . Esto significa que los dos valores propios obtenidos son reales y de signo contrario, por lo que se generará un punto silla. Si analizamos las dos relaciones posibles, concluimos que la relación entre el entusiasta y el solitario termina en un conflicto, es decir, uno de ellos enamorado de su pareja mientras que esta le odia (figura 1.5 (a) y (b)). En cambio, en la relación entre el narcisista y el seguro termina en amor (figura 1.5 (c)) o en odio mutuo (figura 1.5 (d)). En la figura 1.6 se muestran los planos de fases de estos casos.
2. Cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios:  $|a| < |b|$ . Esto significa que los dos valores propios obtenidos son complejos puros, por lo que se generará un centro (figura 1.7), es decir un amor-odio continuo.



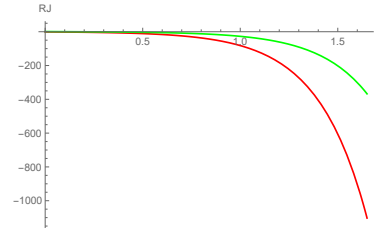
(a) Conflicto:  $a = 5$  y  $b = 3$ .  
 $R_0 = 1$  y  $J_0 = 1$ .



(b) Conflicto:  $a = 5$  y  $b = 3$ .  
 $R_0 = -1$  y  $J_0 = 1$ .

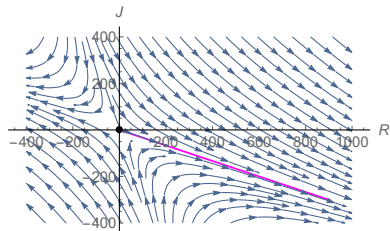


(c) Amor:  $a = 5$  y  $b = -3$ .  
 $R_0 = 1$  y  $J_0 = 1$ .

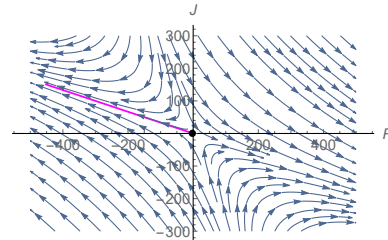


(d) Odio:  $a = 5$  y  $b = -3$ .  
 $R_0 = -1$  y  $J_0 = 1$ .

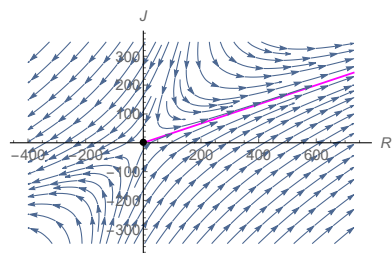
Figura 1.5: Relaciones con distintos finales cuando  $|a| > |b|$ .



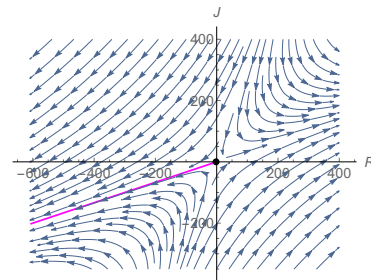
(a) Conflicto:  $a = 5$  y  $b = 3$ .  
 $R_0 = 1$  y  $J_0 = 1$ .



(b) Conflicto:  $a = 5$  y  $b = 3$ .  
 $R_0 = -1$  y  $J_0 = 1$ .

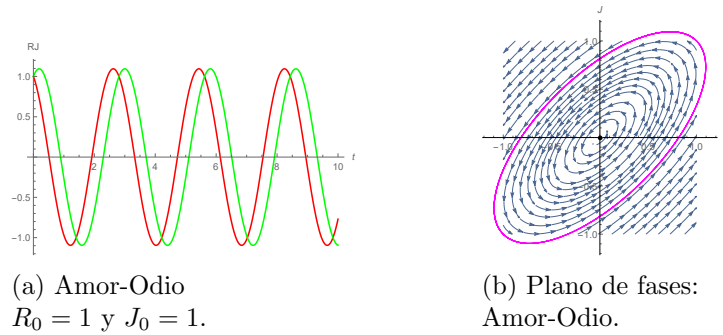


(c) Amor:  $a = 5$  y  $b = -3$ .  
 $R_0 = 1$  y  $J_0 = 1$ .



(d) Odio:  $a = 5$  y  $b = -3$ .  
 $R_0 = -1$  y  $J_0 = 1$ .

Figura 1.6: Planos de fases para los casos de la figura 1.5.



(a) Amor-Odio  
 $R_0 = 1$  y  $J_0 = 1$ .

(b) Plano de fases:  
Amor-Odio.

Figura 1.7: Relación  $|a| < |b|$ , cuando  $a = 2$  y  $b = -3$ .

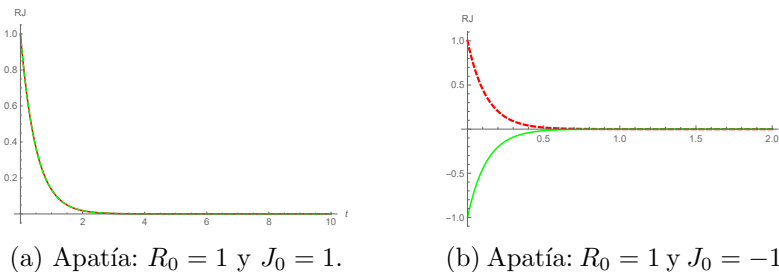
### 1.4.3. Almas gemelas

Por otro lado, vamos a considerar a dos personas exactamente iguales en el amor, es decir,  $c = b$  y  $d = a$ . En este nuevo caso, existirán 4 posibles parejas formadas por dos entusiastas, dos narcisistas, dos seguros o dos solitarios. Ahora los autovalores (1.10) son

$$\lambda_{1,2} = a \pm b.$$

De nuevo, diferenciamos varios casos, en función de los valores de  $a$  y  $b$ :

1. Cuando el individuo responde más hacia sus sentimientos que hacia los que tienen por él:  $|a| > |b|$ . Los dos valores propios reales obtenidos tienen el mismo signo, por lo que se genera un nodo. En las relaciones entre dos amantes seguros o dos solitarios ( $a < 0$ ), al ser los dos valores propios negativos, dicho nodo es estable. En las figuras 1.8 y 1.9 observamos como Romeo y Julieta terminan en un estado de apatía. Sin embargo, en las relaciones entre dos narcisistas o dos entusiastas ( $a > 0$ ), los dos valores propios son positivos, por lo tanto se creará cierta inestabilidad. En estos casos, la relación puede acabar en amor, figura 1.10 (a), odio mutuo, figura 1.10 (b), o hasta en conflicto, figura 1.10 (c). En la figura 1.11 se muestran los planos de fases.



(a) Apatía:  $R_0 = 1$  y  $J_0 = 1$ .

(b) Apatía:  $R_0 = 1$  y  $J_0 = -1$ .

Figura 1.8: Relación con  $a = -5$  y  $b = 3$

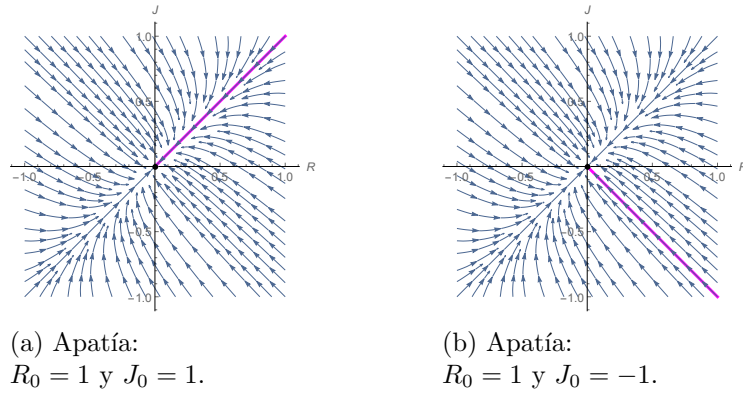


Figura 1.9: Planos de fases de la figura 1.8.

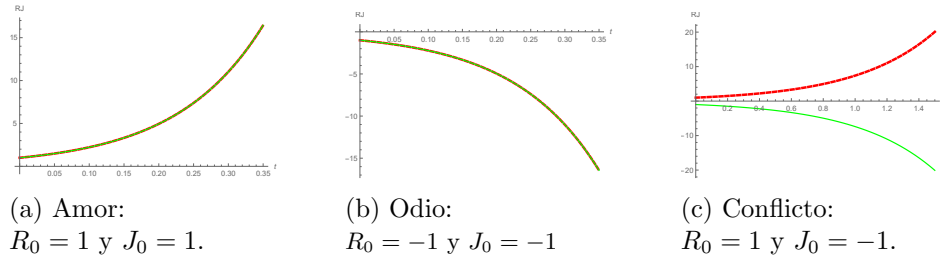
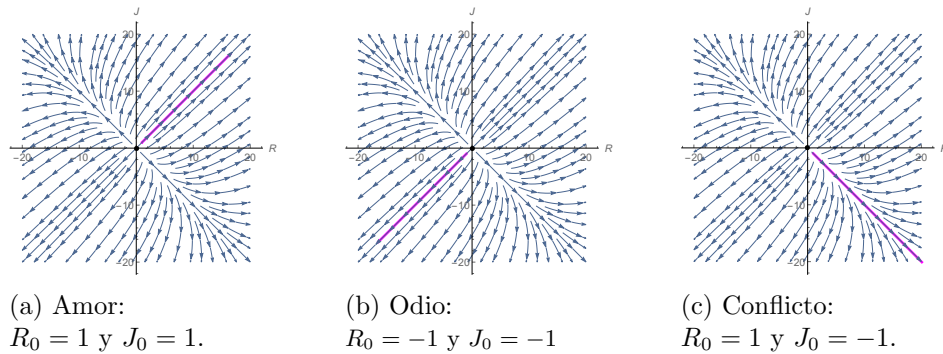
Figura 1.10: Relaciones con  $a = 5$  y  $b = 3$ : dos entusiastas.

Figura 1.11: Planos de fases de la figura 1.10.

2. Cuando el individuo responde más hacia los sentimientos que tienen por él que hacia los suyos propios:  $|a| < |b|$ . Los dos autovalores obtenidos tienen signos contrarios, por lo que se generará un punto silla. En consecuencia, nuestro punto de equilibrio  $(0, 0)$  será inestable y por tanto, la pareja no alcanzará la apatía mutua. Por un lado, las relaciones entre dos individuos seguros o dos amantes entusiastas terminarán en amor (figura 1.12 (a)) o en odio mutuo (figura 1.12 (b)), sin límite.



En cambio, las relaciones entre dos amantes narcisistas o dos individuos solitarios terminarán con un estado de conflicto (figura 1.12 (c)). En la figura 1.13 se muestran los planos de fases para estos casos.

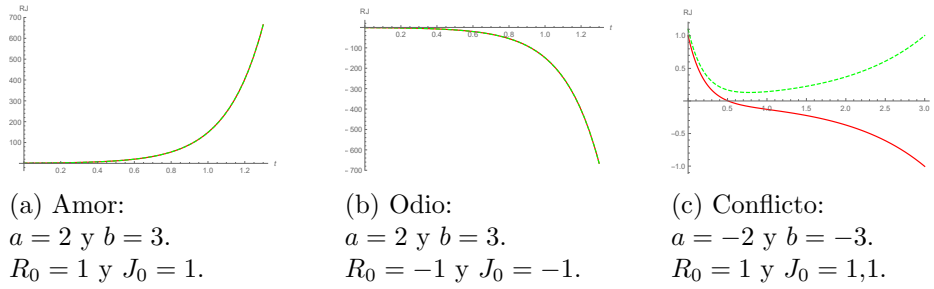


Figura 1.12: Relaciones cuando  $|a| < |b|$ .

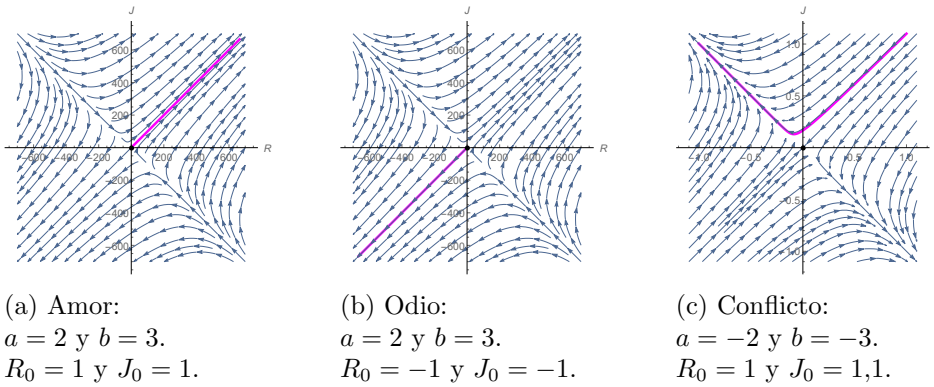


Figura 1.13: Plano de fases de la figura 1.11.

#### 1.4.4. Romeo, el robot

Este es el último caso que analizaremos en este modelo; se trata de un caso poco común. Suponemos que los sentimientos de Romeo hacia Julieta no se ven afectados ni por sus propios sentimientos ni por los de Julieta, esto es  $R$  es constante ( $a = b = 0$ ). De este modo, los autovalores (1.10) serán

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = d.$$

Asimismo, en este caso, el punto de equilibrio que obtenemos al igualar la segunda ecuación del sistema (1.5) a 0 es  $(R_0, \frac{-c}{d}R_0)$ , dependiente del valor de  $R_0$ . Por tanto, todos los puntos de equilibrio están en la recta  $J = \frac{-c}{d}R_0$ , la cual representaremos en amarillo en todas las gráficas de esta sección.

Por último, diferenciamos varios casos, en función de  $c$ ,  $d$  y  $R_0$ :

1. Cuando  $d > 0$  y  $c > 0$ , tenemos un autovalor positivo y otro nulo, lo que genera inestabilidad. Dependiendo de las condiciones iniciales y de los valores de los parámetros  $c$  y  $d$ , esta relación acabará con Julieta amando u odiando a Romeo sin fin (figuras 1.14 y 1.15). Nunca habrá oscilaciones. Por otro lado, para  $c$  negativa la situación es análoga a las figuras 1.14 y 1.15.

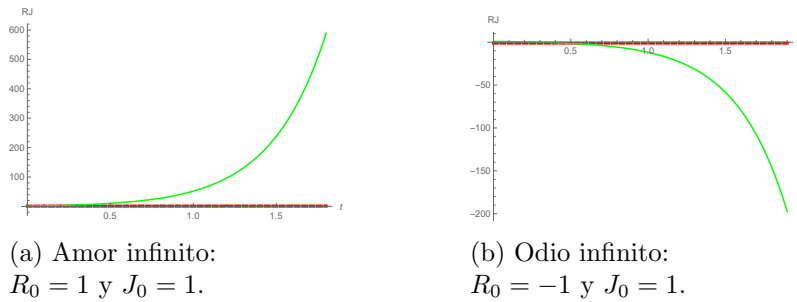


Figura 1.14: Los sentimientos de ella nunca mueren con  $c = 5$  y  $d = 3$ .

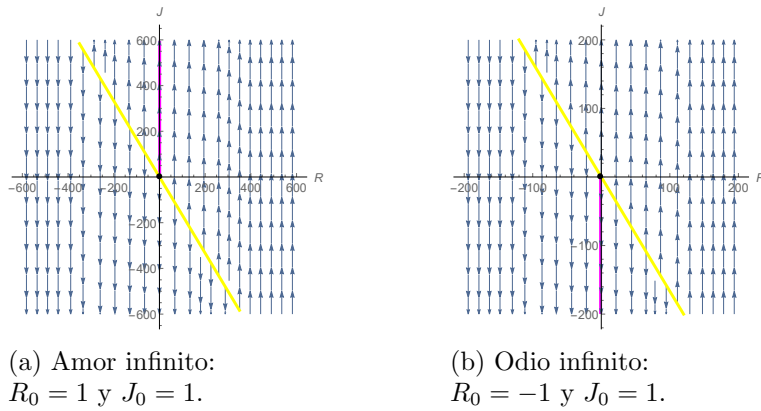


Figura 1.15: Los planos de fases de las soluciones de la figura 1.14.

2. Cuando  $d < 0$  y  $c > 0$ , hay un autovalor real negativo. En este caso, siendo ella una amante “segura”, siempre se alcanza un equilibrio, tanto de odio como de amor, tomando  $R_0 > 0$  o  $R_0 < 0$ . Como podemos observar en las figuras 1.16 (a) y 1.17 (a), la relación se estabiliza en el punto de equilibrio  $(1, 5/3)$ , donde ambos se aman. Por otro lado, en las figuras 1.16 (b) y 1.17 (b), la relación se estabiliza en el punto de equilibrio  $(-1, -5/3)$ , donde la pareja se odia mutuamente.

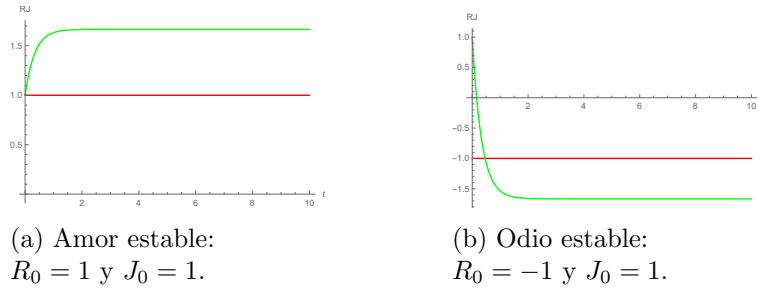


Figura 1.16: Equilibrio estable con  $c = 5$  y  $d = -3$ .

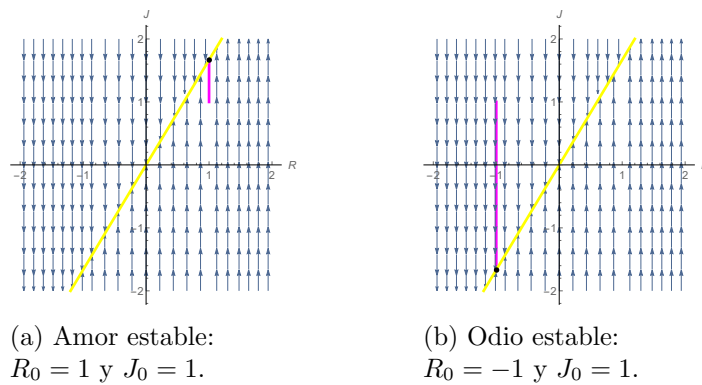


Figura 1.17: Plano de fases para los casos de la figura 1.16.

3. Cuando  $d < 0$  y  $c < 0$ , hay un autovalor real negativo. Aquí se vuelve a alcanzar la estabilidad, pero la relación acaba con uno de ellos enamorado y el otro no, dependiendo del valor de  $R_0$ . En el caso de las figuras 1.18 (a) y 1.19 (a), se estabiliza la relación en el punto de equilibrio asintóticamente estable  $(1, -5/3)$ , donde Romeo ama a Julieta pero Julieta odia a Romeo. Por otro lado, cuando  $R_0 = -1$  y  $J_0 = 1$  (figuras 1.18 (b) y 1.19 (b)), se estabiliza la relación en el punto de equilibrio asintóticamente estable  $(-1, 5/3)$ , donde Romeo odia a Julieta, mientras que Julieta ama a Romeo.

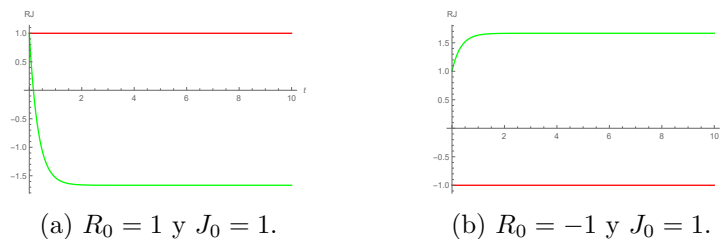


Figura 1.18: Equilibrio estable de amor-odio con  $c = -5$  y  $d = -3$ .

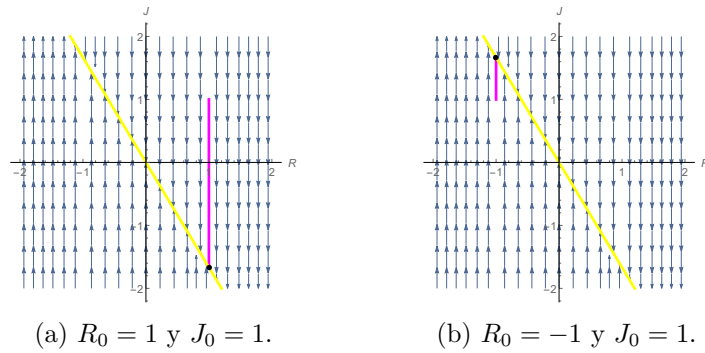


Figura 1.19: Plano de fases de la figura 1.18.

### 1.4.5. Conclusiones

En general, hemos observado que, dependiendo de la personalidad de cada individuo, las relaciones tienen un destino u otro, como era de esperar. Este modelo contiene unas ecuaciones muy sencillas, ya que solo toma en cuenta los sentimientos de la pareja y, aun así, hemos visto como se pueden llegar a producir resultados complejos, como en el caso de la figura 1.7. Sin embargo, en este modelo se da por hecho que tanto Romeo como Julieta responden de forma mecánica, sin dejarse influenciar por nada que ocurra en el exterior y llegando a amar u odiar hasta el infinito. En cambio, la realidad es que, en general, somos muy influenciados y espontáneos. Por tanto, en el siguiente capítulo modificaremos nuestro modelo de manera que sea más aplicable a las situaciones cotidianas.

## Capítulo 2

# Modelo no-lineal y la aparición del caos

El modelo anterior solo tiene en cuenta las relaciones lineales entre dos personas, pero cualquiera que haya tenido alguna relación sabe que esto no es realista. Las relaciones de pareja deberían analizarse mediante modelos no lineales, puesto que son comportamientos complejos y, en muchas ocasiones, caóticos. Por ello, en este capítulo analizaremos el comportamiento no lineal del modelo y estudiaremos la intervención de fuerzas externas, lo que nos llevará al fenómeno del caos.

### 2.1. Planteamiento del modelo no lineal

Sprott [2], una vez visto las limitaciones del modelo lineal (1.5), decide analizar los efectos de las no-linealidades. En esta sección, utilizaremos los conceptos del apéndice A sobre el modelo logístico (A.2). Partiendo del modelo básico, nos centraremos primero en los sentimientos de Romeo,

$$\frac{dR}{dt} = aR(t) + bJ(t)$$

- Si  $b > 0$ , hemos visto que Romeo responde positivamente a los sentimientos que Julieta tiene hacia él, es decir, su amor hacia Julieta crece si ella le ama. Sin embargo, ahora queremos representar el hecho de que si los sentimientos de ella son demasiado intensos, él se asfixia y reacciona negativamente. Para ello, multiplicamos a  $bJ$  por  $(1 - |J|)$ , de forma que si  $J > 1$ , Romeo se sienta ahogado y su amor hacia ella se apague.
- Si  $b < 0$ , hemos visto que Romeo responde negativamente a los sentimientos que Julieta tiene hacia él, es decir, su amor se apaga si ella le quiere. En cambio, ahora representaremos que si el amor de Julieta es

muy intenso, llamará la atención de Romeo y los sentimientos de este se encenderán. Para ello, al multiplicar a  $bJ$  por  $(1 - |J|)$ , si  $J > 1$ , Romeo se sentirá atraído por Julieta.

En el caso de Julieta ocurre exactamente lo mismo, por lo que multiplicaremos a  $cR$  por  $(1 - |R|)$  y obtendremos los efectos recién explicados para el caso de Romeo. Luego, el modelo propuesto por Sprott [2] es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR + bJ(1 - |J|) \\ \frac{dJ}{dt} = cR(1 - |R|) + dJ. \end{cases} \quad (2.1)$$

Además, observamos como  $J = 1$  y  $R = 1$  son los valores para los cuales Romeo y Julieta dejan de verse afectados por el amor del otro y simplemente reaccionan en base a sus propios sentimientos.

## 2.2. Puntos de equilibrio y análisis de las distintas relaciones

A continuación, vamos a calcular los puntos de equilibrio igualando a cero las dos ecuaciones del sistema (2.1), como se explica en el apéndice A.1. Por tanto,

$$aR + bJ(1 - |J|) = 0 \quad (2.2)$$

$$cR(1 - |R|) + dJ = 0. \quad (2.3)$$

Dado que el sistema es algo complicado de resolver, se ha recurrido al programa *Mathematica*. Para ello, utilizamos el comando *Solve* y obtenemos 13 puntos de equilibrio, incluyendo el punto  $(0, 0)$ .

Todos los puntos obtenidos, menos el  $(0, 0)$ , tienen expresiones muy complicadas para estudiar analíticamente la matriz jacobiana y los autovalores de cada uno de los puntos de equilibrio. Por tanto, primero vamos a estudiar, de forma general, únicamente la estabilidad del punto de equilibrio  $(0, 0)$  en función de sus autovalores. Después, analizaremos casos particulares de las 10 relaciones posibles, tomando distintos valores para los parámetros y estudiando también sus autovalores.

Calculamos entonces la matriz jacobiana del sistema, con el fin de determinar los valores propios, como se explica en el apéndice B.1. Consideramos la siguiente matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} a & b(1 - 2|J|) \\ c(1 - 2|R|) & d \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Como queremos estudiar el punto  $(0, 0)$ , sustituimos en la matriz jacobiana y calculamos el determinante de  $(J(0, 0) - \lambda I)$  igualándolo a cero:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0. \quad (2.5)$$

Por lo tanto,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)}. \quad (2.6)$$

Los dos autovalores (2.6) obtenidos son los mismo que los valores propios (1.10), por consiguiente, las conclusiones son las mismas. Existen soluciones reales si  $(a + d)^2 \geq 4(ad - cb)$  y complejas, en caso contrario. Dentro de las soluciones reales tenemos 4 casos posibles:

1. Si  $a + d > 0$  y  $ad > cb$ : Los dos autovalores son positivos, por lo que se trata de un nodo inestable.
2. Si  $a + d > 0$  y  $ad < cb$ : Un autovalor es positivo y el otro es negativo, por lo que se trata de un punto silla.
3. Si  $a + d < 0$  y  $ad > cb$ : Los dos autovalores son negativos, por lo que se trata de un nodo estable.
4. Si  $a + d < 0$  y  $ad < cb$ : Un autovalor es positivo y el otro es negativo, por lo que se trata de un punto silla.

Dentro de las soluciones complejas habría 2 casos posibles:

1. Si  $a + d > 0$ : La parte real es positiva, se trata de un foco inestable.
2. Si  $a + d < 0$ : La parte real es negativa, se trata de un foco estable.

A continuación, analizaremos casos particulares de las 10 parejas posibles, teniendo en cuenta los signos de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

- Cuando ambos individuos son entusiastas, narcisistas, seguros o solitarios, es decir, cuando los signos de  $a$  y  $d$  y los de  $c$  y  $b$  son iguales, hemos obtenido, en cada uno de los casos particulares estudiados, 3 puntos de equilibrio. Estos generan dos puntos sillas y un nodo:

1. Primero, analizaremos el amor entre dos entusiastas, tomando  $a = b = 1$  y  $c = d = 1$ . Los puntos de equilibrio correspondientes a este caso son  $(2, 2)$ ,  $(-2, -2)$  y  $(0, 0)$ . Los autovalores de los dos no triviales son  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = -2$ , por lo que al ser un valor positivo y otro negativo, generan cada uno un punto silla. Por consiguiente, los puntos son inestables y nos encontramos tanto con órbitas que se acercan al

punto como con otras que se alejan de él. En ambos casos, la relación termina en un conflicto. Por ejemplo, en la figura 2.1 (a) Romeo ama a Julieta sin límite, mientras que Julieta sigue odiando a Romeo; en cambio, en la figura 2.1 (b), Julieta es la que ama a Romeo sin ser correspondida. Por otro lado, los autovalores del punto  $(0,0)$  son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 2$ , generando así un nodo inestable (figura 2.1 (c)) donde la relación terminará en conflicto y nunca en apatía.

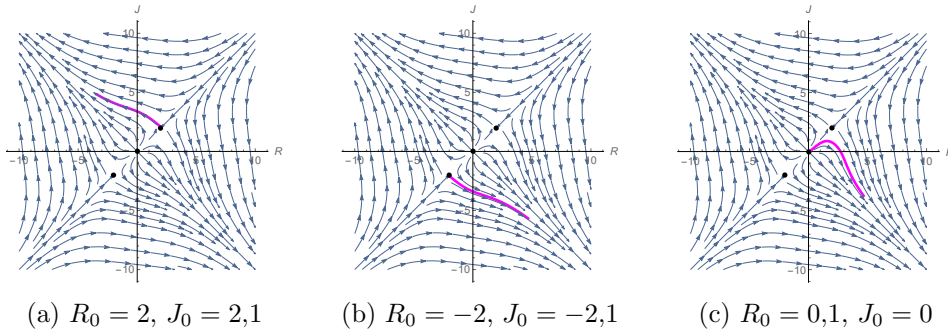


Figura 2.1: Resultados del amor entre dos entusiastas:  $a = b = 1$  y  $c = d = 1$ .

2. Ahora, analizaremos el amor entre dos narcisistas para  $a = 1, b = -1, c = -2$  y  $d = 2$  y obtenemos los puntos de equilibrio  $(-2, 2)$ ,  $(2, -2)$  y  $(0, 0)$ . Los autovalores de los puntos no triviales son reales de distinto signo,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{73})$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{73})$ , de manera que generan, cada uno, un punto silla, inestable. Como podemos observar en las figuras 2.2 (a) y 2.2 (b), la relación termina en amor u odio mutuo, dependiendo de las condiciones iniciales. Por otro lado, los autovalores del punto  $(0,0)$  son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 3$  y se genera, por tanto, un nodo inestable (figura 2.2 c), es decir, dependiendo  $J_0$  y  $R_0$ , la pareja se odiará o amará, pero nunca terminará en apatía.

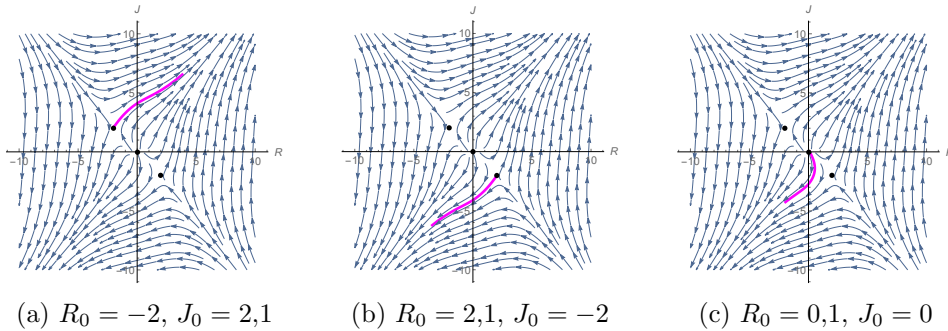


Figura 2.2: Resultados del amor entre dos narcisistas:  $a = 1 = -b, c = -2 = -d$ .

3. Continuamos analizando el amor entre dos amantes seguros para  $a = -2, b = 2, c = 1$  y  $d = -1$ , obteniendo así los puntos de equilibrio



$(-2, 2)$ ,  $(2, -2)$  y  $(0, 0)$ . Los dos puntos no triviales generan, cada uno, un punto silla, dado que los autovalores correspondientes son  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{73})$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{73})$ , es decir, valores reales de distinto signo. Por lo tanto, son puntos inestables. Las figuras 2.3 (a) y 2.3 (b) nos muestran como la pareja se amará u odiará mutuamente, dependiendo de las condiciones iniciales. Sin embargo, los autovalores del punto  $(0, 0)$  son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -3$ , generando así un nodo estable (figura 2.3 (c)). Si los valores de  $R_0$  y  $J_0$  son cercanos al punto  $(0, 0)$ , los individuos sentirán una apatía mutua.

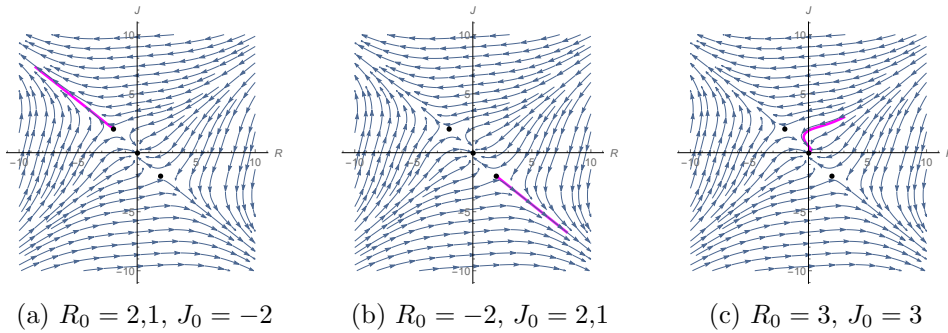


Figura 2.3: Resultados del amor entre dos seguros:  $a = -2, b = 2, c = 1$  y  $d = -1$ .

4. Por último, analizamos el amor entre dos solitarios para  $a = b = -1$  y  $c = d = -2$ , donde los puntos de equilibrio son  $(2, 2)$ ,  $(-2, -2)$  y  $(0, 0)$ . Los autovalores de los dos puntos no triviales son  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{73})$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{73})$ , por lo que generan, cada uno, un punto silla inestable. Entonces, dependiendo de la condiciones iniciales, la relación puede terminar en amor u odio mutuo. Por ejemplo, en la figura 2.4 (a) se aman sin límite, mientras que, en la figura 2.4 (b), se odian sin límite. Por otro lado, el punto  $(0, 0)$  genera un nodo estable, siendo los autovalores  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -3$ . La figura 2.4 (c) nos muestra la apatía que alcanzan ambos individuos.

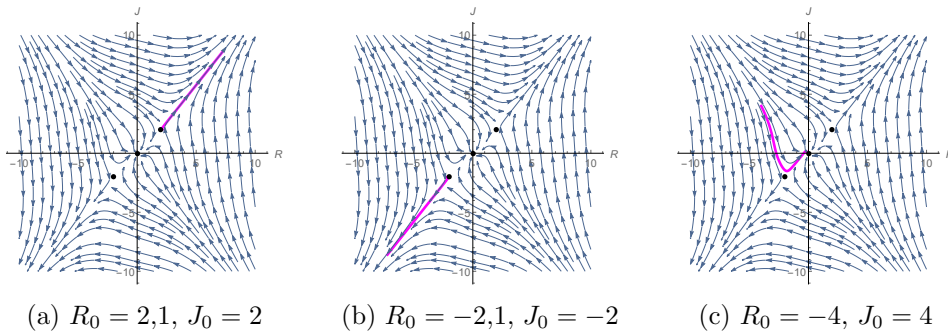


Figura 2.4: Resultados del amor entre dos solitarios:  $a = b = -1$  y  $c = d = -2$ .

- Cuando la pareja está formada por un individuo entusiasta y otro narcisista o un individuo solitario y otro seguro, es decir, cuando los signos de  $a$  y  $d$  son iguales pero los de  $c$  y  $b$  no, obtenemos un foco en el origen. En el primer caso analizado,  $a = 2$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$  y  $d = 1$ , los autovalores son complejos con parte real positiva,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + i\sqrt{7})$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{7})$ , por lo que dicho foco es inestable. Observamos en la figura 2.5 (a) como los sentimientos de ambos individuos se alejan del punto de equilibrio  $(0, 0)$ . En cambio, en el segundo caso, para  $a = 2$ ,  $b = -2$ ,  $c = 1$  y  $d = -1$ , dicho foco es estable ya que los autovalores correspondientes son complejos con parte real negativa,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{7})$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{7})$ . Por consiguiente, independientemente de las condiciones iniciales el amor acaba muriendo. La figura 2.5 (b) nos muestra como en el punto  $(0, 0)$  se logra la estabilidad.

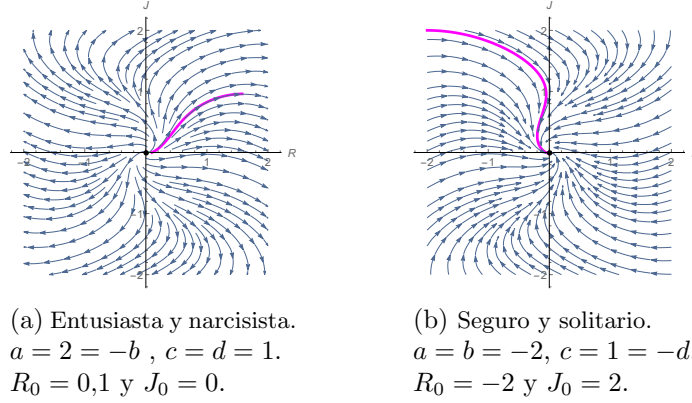
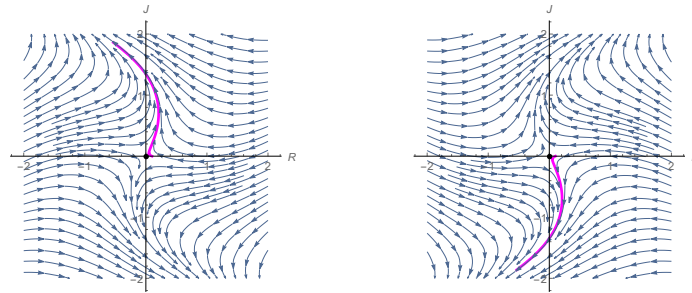


Figura 2.5: Resultados cuando  $ad > 0$  y  $bc < 0$ .

- Cuando los signos de  $a$  y  $d$  son distintos pero los de  $c$  y  $b$  iguales, hemos analizado dos casos particulares donde hemos obtenido como único punto de equilibrio el  $(0, 0)$ . Si la pareja está formada por un individuo entusiasta y otro seguro y tomamos los parámetros  $a = -2$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$  y  $d = 1$ , obtenemos los autovalores  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17})$ , ambos reales con signos distintos. Por tanto, nos encontramos ante un punto silla, donde no se alcanza la estabilidad. Además, observamos en la figura 2.6 (a) como Julieta ama a Romeo, pero su amor no es correspondido, es decir, la relación termina en conflicto. Por otro lado, en el caso del individuo solitario y el amante narcisista, tomando  $a = -2$ ,  $b = -2$ ,  $c = -1$  y  $d = 1$ , los autovalores son exactamente los mismos, es decir,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$  y  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17})$ , generándose de nuevo un punto silla inestable. Para las condiciones iniciales de la figura 2.6 (b), la pareja termina odiándose mutuamente.

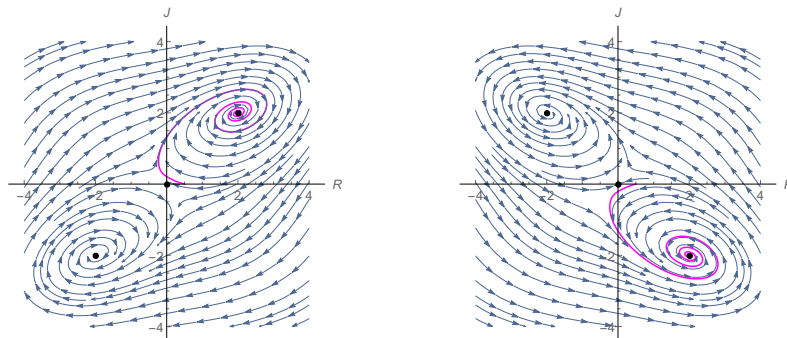


(a) Entusiasta y seguro.  
 $a = -2 = -b, c = d = 1$   
 $R_0 = 0,1$  y  $J_0 = 0$

(b) Narcisista y solitario.  
 $a = b = -2, c = -1 = -d.$   
 $R_0 = 0,1$  y  $J_0 = 0$

Figura 2.6: Resultados cuando  $ad < 0$  y  $bc > 0$ .

- Por último, analizaremos los casos cuando los signos de  $a$  y  $d$  y los de  $c$  y  $b$  son distintos. La pareja formada por un entusiasta y un solitario, analizada por Sprott [2] ( $a = -2, b = -2, c = 1$  y  $d = 1$ ) tiene como puntos de equilibrio a  $(-2, -2), (2, 2)$  y  $(0, 0)$ . Por otro lado, la relación entre un seguro y un narcisista ( $a = -2, b = 2, c = -1$  y  $d = 1$ ), tiene como puntos de equilibrio a  $(2, -2), (-2, 2)$  y  $(0, 0)$ . Los autovalores de los puntos no triviales de ambas relaciones son  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm 3i\sqrt{7})$ , por lo que al ser valores complejos con parte real negativa, se generan dos espirales estables. En cambio, en  $(0, 0)$ , los autovalores son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -1$ , generándose así un nodo estable. En la figura 2.7 (a) observamos como la relación se estabiliza en  $(2, 2)$ , donde ambos se aman. Por otro lado, en la figura 2.7 (b) la relación se estabiliza en  $(2, -2)$ , donde Romeo ama a Julieta sin ser correspondido por ella. En todo caso, ambas relaciones terminarán siendo estables.



(a) Entusiasta y solitario.  
 $a = -2 = b$  y  $c = d = 1,$   
 $R_0 = 0,5$  y  $J_0 = 0.$

(b) Narcisista y seguro.  
 $a = -b = -2$  y  $c = -1 = -d$   
 $R_0 = 0,5$  y  $J_0 = 0.$

Figura 2.7: Resultados cuando  $ad < 0$  y  $bc < 0$ .

### 2.3. Aparición de fuerzas externas y del caos

El modelo (2.1), sin embargo, no es del todo realista, ya que en una relación el amor no basta. En nuestro día a día nos rodeamos de amigos, familiares, compañeros, etc, que consciente o inconscientemente influyen en nuestras opiniones y decisiones. Además, existen otros muchos factores, como circunstancias impredecibles o nuestro propio estado mental, que alteran nuestros sentimientos. Por ello, Bae [3] propuso un modelo alternativo, en el que introdujo unas fuerzas externas que simbolizan todos aquellos factores que no están en nuestra mano. De ese modo, definimos  $f(t)$  como las fuerzas externas que afectan a los sentimientos de Romeo y  $g(t)$ , aquellas que afectan a los de Julieta; generando así el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = aR + bJ(1 - |J|) + f(t) \\ \frac{dJ}{dt} = cR(1 - |R|) + dJ + g(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Tanto el modelo inicial (1.5), como el modelo no-lineal básico (2.1), no admiten ningún tipo de caos, puesto que son sistemas bidimensionales y autónomos. Si queremos observar el fenómeno del caos, nuestro modelo debe ser un sistema de tercer orden o no autónomo, como este caso, o debe contener, al menos, un término no-lineal. Por tanto, en este nuevo modelo (2.7) sí vamos a poder observar la aparición del caos, como demuestra Bae [3] para diferentes fuerzas externas. Bae [3] utiliza para  $f(t)$  y  $g(t)$  funciones de senos, triángulos, rectángulos y cuadrados, mediante la simulación en el programa *MATLAB*; sin embargo, en la siguiente sección, nosotros utilizaremos el programa *Mathematica* y estudiaremos algunos casos distintos a los utilizados por Bae.

### 2.4. Análisis del fenómeno del caos

A continuación, vamos a analizar el fenómeno caótico para distintas fuerzas externas, mediante la simulación en el programa *Mathematica*. En la sección 2.2 hemos diferenciado 4 casos distintos, en función de los signos que toman  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , por lo que a continuación, veremos los efectos de las fuerzas externas en cada uno de ellos.

Primero, consideraremos el caso donde  $ad < 0$  y  $bc < 0$ . Para ello, estudiaremos con detalle la relación entre un individuo entusiasta y un amante solitario, como hace Bae [3] para distintas fuerzas externas y distintos valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . En la relación entre un individuo narcisista y un amante seguro las conclusiones son las mismas.

(i) En este caso, tomamos los valores  $a = b = -2$  y  $d = c = 1$ , al igual que en la figura 2.7 (a),  $g(t) = \sin\pi t$  y dos fuerzas externas  $f(t)$  distintas. Vamos a considerar

- $f(t) = \text{TriangleWave}\{-10, 10\}, t$ :

La onda triangular [5] es un tipo de señal periódica que presenta unas velocidades de subida y bajada constantes. Por tanto, esta fuerza puede simbolizar todas las opiniones posibles que nos llegan cuando estamos en una relación, tanto positivas como negativas.

- $f(t) = \text{SquareWave}\{-4, 4\}, t$ :

La onda cuadrada [6] alterna su valor entre dos valores extremos sin pasar por los valores intermedios (al contrario de lo que sucede con la onda la onda triangular). Por tanto, esta fuerza en concreto simboliza las opiniones que inicialmente son positivas y constantes durante un periodo de tiempo. Sin embargo, luego, debido a alguna circunstancia específica, esas opiniones se vuelven negativas durante otro periodo de tiempo. Después, estas malas opiniones desaparecen y regresan las positivas iniciales, y así constantemente.

- $g(t) = \sin\pi t$ :

La función seno [7] es una curva que describe una oscilación repetitiva y suave. Por tanto, esta fuerza simboliza las opiniones que se repiten, una y otra vez, de forma constante.

Es decir, consideramos fuerzas externas totalmente distintas para Romeo y Julieta y como resultado obtenemos el fenómeno del caos.

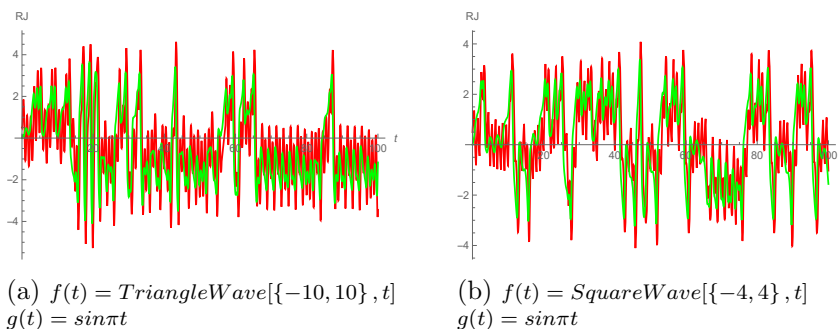


Figura 2.8: Resultados cuando  $a = b = -2$ ,  $c = d = 1$  en función del  $t$  y con condiciones iniciales  $R_0 = 0,5$  y  $J_0 = 0$ .

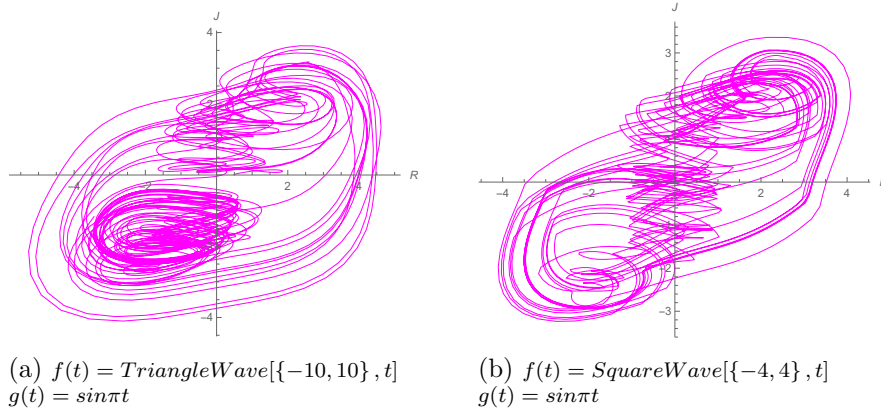


Figura 2.9: Plano de fases de los resultados de la figura 2.8.

Observando las figuras 2.8 y 2.9, y comparándolas con la figura 2.7 (a), es evidente que el hecho de añadir en nuestro modelo dichas fuerzas externas, genera la aparición del caos. Asimismo, si comparamos los gráficos (a) y (b) de las figuras 2.8 y 2.9, podemos apreciar como cambia la trayectoria de la evolución de una relación simplemente variando la fuerza externa  $f(t)$ . Por tanto, podemos concluir que las fuerzas externas, como las opiniones de amigos o familiares, son decisivas en la relación entre dos personas.

- (ii) En este caso, cambiaremos el valor de  $a$  por  $a = -3$  y mantendremos el resto de valores de las figuras 2.8 y 2.9, es decir,  $b = -2$  y  $d = c = 1$ . Por otro lado, volveremos a tomar  $g(t) = \sin \pi t$  y las mismas dos fuerzas externas  $f(t)$  que en (i).

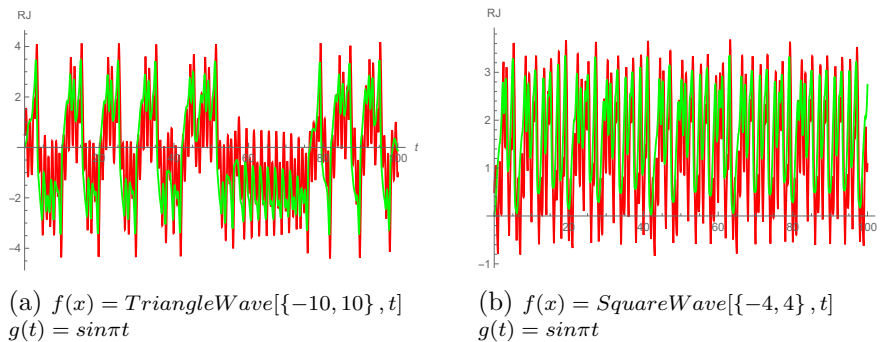


Figura 2.10: Resultados cuando  $a = -3$ ,  $b = -2$ ,  $c = d = 1$  en función de  $t$  y con condiciones iniciales  $R_0 = 0,5$  y  $J_0 = 0$ .

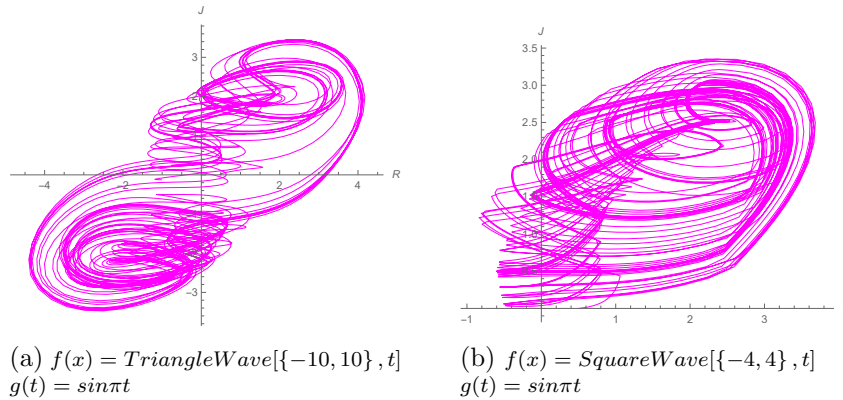


Figura 2.11: Plano de fases de los resultados de la figura 2.10.

Las figuras 2.10 y 2.11 nos muestran, de nuevo, la aparición del caos al tener en cuenta las fuerzas externas. Además, si comparamos las figuras 2.8 y 2.9 con 2.10 y 2.11, respectivamente, vemos como el recorrido es distinto, habiendo variado simplemente el valor de un solo parámetro ( $a$ ). Por ejemplo, en la figura 2.11 (b), aún siendo un comportamiento caótico, la mayor parte del tiempo los sentimientos de Romeo y Julieta se sitúan en el primer cuadrante, es decir, ambos se aman mutuamente, sin embargo, en la figura 2.9 (b) observamos como la pareja tiene muchos altibajos en su relación. En conclusión, el amor que siente cada uno de los individuos se ve extremadamente afectado por la personalidad o estado mental de ambos.

- (iii) En este caso, aplicamos la misma fuerza externa a ambos individuos, esto es, tomamos  $f(t) = g(t) = \text{SquareWave}[\{-4, 4\}, t]$ . Por otro lado, tomamos los mismos parámetros que en el caso (i), es decir,  $a = b = -2, c = d = 1$ .

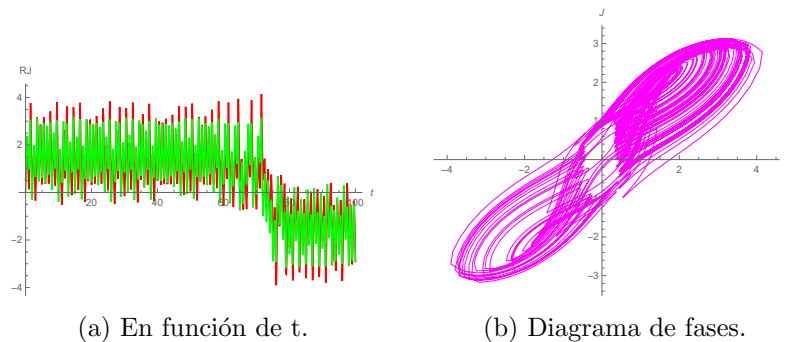


Figura 2.12: Resultados cuando  $a = b = -2, c = d = 1$  y  $f(t) = g(t) = \text{SquareWave}[\{-4, 4\}, t]$ , con condiciones iniciales  $R_0 = 0,5$  y  $J_0 = 0$

En la figura 2.12 observamos como, a pesar de que la pareja se ve afectada por las mismas fuerzas externas, sigue generándose el fenómeno del caos. Además, la figura 2.12 es totalmente distinta a la figura 2.7 (a) y a cualquier otra de las anteriores, por lo que deducimos que el mínimo cambio modifica totalmente el rumbo de la relación.

- (iv) En el último caso, aplicamos una fuerza externa solamente a uno de los individuos, esto es, tomamos  $f(t) = \text{SquareWave}\{-4, 4\}, t$  y  $g(t) = 0$ . Por otro lado, mantenemos los mismos parámetros que en el caso (i), es decir,  $a = b = -2$ ,  $c = d = 1$ .

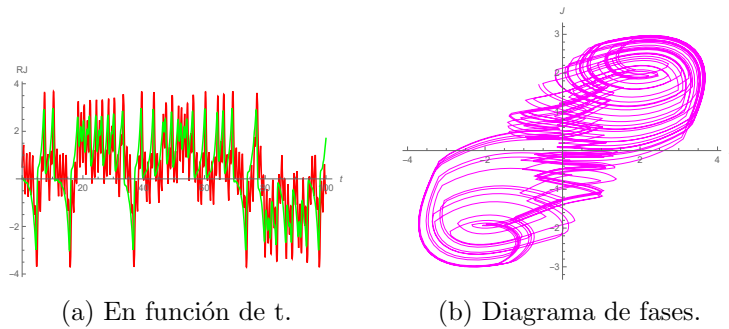


Figura 2.13: Resultados cuando  $a = b = -2$ ,  $c = d = 1$  y  $f(t) = \text{SquareWave}\{-4, 4\}, t$  y  $g(t) = 0$ , con  $R_0 = 0,5$  y  $J_0 = 0$ .

En la figura 2.13 observamos como, aunque uno de los individuos no se ve afectado por fuerzas externas, sigue generándose un comportamiento caótico. Además, la figura 2.13 vuelve a ser totalmente distinta a la figura 2.7 (a) y a cualquier otra de las anteriores, por lo que deducimos que no tienen por qué verse ambos afectados por las opiniones y circunstancias de su entorno para generarse el caos en la relación.

En la relación entre un individuo narcisista y un amante seguro, las conclusiones obtenidas realizando distintas simulaciones son similares.

A continuación, en este trabajo analizaremos también el resto de relaciones. Les aplicaremos distintas fuerzas externas, y veremos que resultados y conclusiones obtenemos en cada caso.

- Primero, estudiaremos la relación entre un solitario y un seguro (figura 2.14). En este caso aplicaremos una nueva fuerza externa:

$$* f(t) = \text{SawtoothWave}\{-1, 1\}, t/10]:$$

La función de sierra [8] es un tipo de función que se levanta en forma de rampa. Por tanto, dicha fuerza simboliza las opiniones que, al principio, son negativas, pero con el tiempo, se van convirtiendo en positivas.



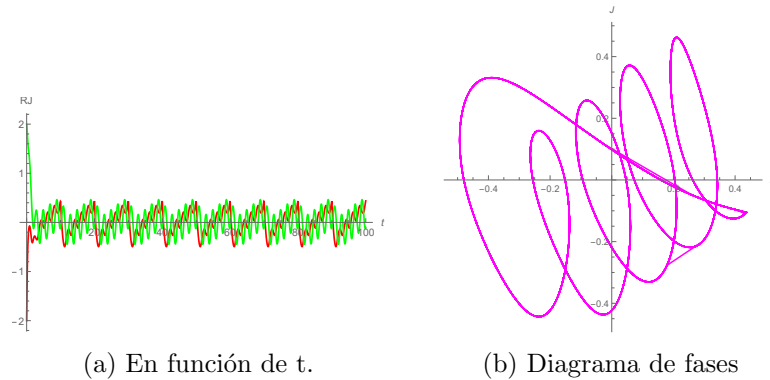


Figura 2.14: Resultados cuando  $a = b = -2$ ,  $c = 1$ ,  $d = -1$ ,  $f(t) = \text{SawtoothWave}[\{-1, 1\}, t/10]$  y  $g(t) = \text{Sin}[\pi t]$ , con  $R_0 = -2$  y  $J_0 = 2$ .

En cuanto a la relación entre el individuo solitario y el amante seguro, antes de incluir fuerzas externas, observábamos como terminaban en una apatía, al crearse en el punto  $(0, 0)$  un foco estable (figura 2.5 (b)). En cambio, en la figura 2.14 vemos como se pierde dicha estabilidad y nos encontramos ante un comportamiento periódico, donde la pareja cambiará de sentimientos constantemente.

- Ahora, analizaremos las relaciones formadas por dos amantes seguros y por dos amantes solitarios:

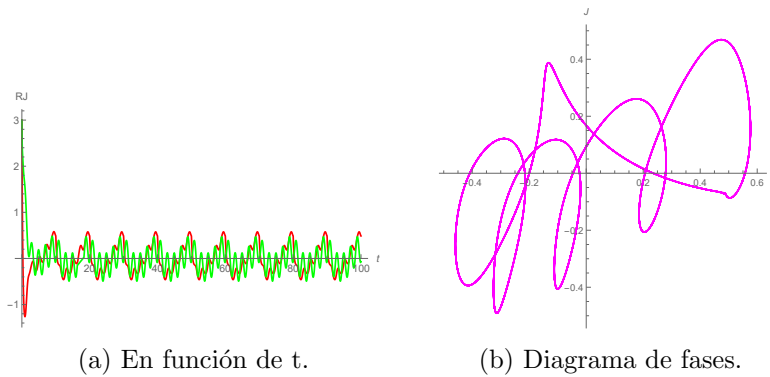


Figura 2.15: Resultados cuando  $a = -b = -2$ ,  $c = -d = 1$  (Dos seguros),  $f(t) = \text{SawtoothWave}[\{-1, 1\}, t/10]$  y  $g(t) = \text{Sin}[\pi t]$ , con  $R_0 = 3$  y  $J_0 = 3$ .

En el caso de los dos individuos seguros, observábamos, antes de tener en cuenta las fuerzas externas, como para  $R_0 = 3$  y  $J_0 = 3$  la relación moría (figura 2.3), al generar el punto  $(0, 0)$  un foco estable. Ahora, sin embargo, el amor de la pareja no desaparece y nos encontramos, otra vez, ante un comportamiento periódico (figura 2.15). En cuanto a los dos amantes solitarios, obtenemos las mismas conclusiones.

- Por último, estudiaremos el resto de relaciones, es decir, las parejas formadas por dos entusiastas, dos narcisistas, un entusiasta y un narcisista, un entusiasta y un seguro y un narcisista y un solitario. En la sección 2.2, para estos casos obteníamos inestabilidad, como puntos sillas o nodos y focos inestables. Por tanto, al aplicarles distintas fuerzas externas, simplemente lo que hacemos es acelerar dicha inestabilidad, sin generar comportamientos caóticos ni periódicos.

### 2.4.1. Conclusiones

Hay muchos factores que afectan en el amor entre Romeo y Julieta, como sus propias personalidades u opiniones y acontecimientos externos. Hemos analizado inicialmente, para el modelo (2.1), las distintas relaciones posibles, concluyendo que los sentimientos varían en función de sus personalidades. En algunos casos, como el individuo solitario y el amante seguro, el amor de ambos muere al crearse un foco estable en el origen. Otras parejas, como la formada por el entusiasta y el solitario, se estabilizan en un punto donde ambos se aman o donde ambos se odian. Sin embargo, en muchos de los casos estudiados la relación es inestable.

Una vez aplicadas ciertas fuerzas externas (modelo 2.7), observamos como, dependiendo de cuales sean dichas fuerzas, los resultados cambian totalmente. Asimismo, si variamos el valor de un solo parámetro, manteniendo las mismas funciones externas, el recorrido de la relación es distinto. Es decir, el mínimo cambio genera un nuevo rumbo para la pareja. Por tanto, si se quiere mantener una relación, ambos tienen que poner todo su empeño en ella, ya que si nos dejamos llevar solo por lo que sentimos en cada momento, pocas relaciones seguirían en pie.

Por otro lado, hemos observado la aparición del fenómeno del caos en alguna de las relaciones, cuando tenemos en cuenta las fuerzas externas. Es algo lógico, puesto que dependiendo de lo que ocurra en nuestro alrededor, podemos pasar de amor a odio, o viceversa, en un instante. Además, en general, los humanos nos dejamos influir por las distintas opiniones de nuestro entorno, muchas veces de forma inconsciente.

Finalmente, también nos hemos encontrado con situaciones donde no existen ni comportamientos caóticos ni periódicos. Analizando el porqué, hemos concluido que cuando la relación, antes de aplicarle funciones externas, era inestable (puntos sillas o focos y nodos inestables de la sección 2.2), simplemente se acelera dicha inestabilidad.

## Capítulo 3

# Triángulos amorosos

En este capítulo, nos centraremos en algo muy común hoy en día: la aparición de una tercera persona en una relación. Para ello, utilizaremos, de nuevo, el modelo inicial (1.5) de referencia y lo modificaremos para incluir a este tercer individuo en la relación, que puede ser tanto un hijo, un amigo, o un amante, como en el caso que analizaremos a continuación. Después, volveremos a hacer unas pequeñas modificaciones a este nuevo modelo lineal, para convertirlo en no-lineal, y así tener un sistema más complejo y realista.

### 3.1. Planteamiento del modelo

Sprott [2] supuso que Romeo tenía una amante, Guinevere. De esta manera, nuestro modelo pasaría de ser bidimensional a uno de hasta seis dimensiones, ya que cada uno tiene sentimientos hacia las otras dos personas, tanto de amor como de odio. Sin embargo, vamos a analizar el caso donde ni Guinevere ni Julieta tengan conocimiento alguno de la existencia de la otra y donde Romeo muestre la misma manera de querer tanto a Julieta como a Guinevere, es decir, los mismos valores de  $a$  y  $b$ .

A continuación, explicaremos brevemente el nuevo modelo :

- Si nos centramos en los sentimientos de Romeo hacia Julieta, a lo que llamaremos ahora  $R_J$ , simplemente modificaremos la ecuación correspondiente al amor de Romeo hacia Julieta del modelo (1.5), teniendo en cuenta a Guinevere. Entonces, lo que haremos es restar a esta ecuación el amor que siente Guinevere ( $G$ ) hacia Romeo. Además, también multiplicaremos este valor por  $b$ , puesto que estamos suponiendo que la manera que Romeo tiene de querer a Julieta (es decir,  $a$  y  $b$ ) es la misma que tiene con Guinevere. Consecuentemente, tenemos

$$\frac{dR_J}{dt} = aR_J + b(J - G) \quad (3.1)$$

- Ahora, nos centraremos en los sentimientos de Romeo hacia Guinevere, a lo que llamaremos  $R_G$ . Tomamos de referencia la ecuación correspondiente al amor de Romeo del modelo (1.5) y cambiamos  $J$  por  $G$ , es decir,  $\frac{dR_G}{dt} = aR_G + bG$ . A continuación, restaremos a esta ecuación el amor que siente Julieta hacia Romeo. Además, también multiplicaremos este valor por  $b$ , puesto que estamos suponiendo que la manera que Romeo tiene de querer a Guinevere (es decir,  $a$  y  $b$ ) es la misma que tiene con Julieta. Consecuentemente, tenemos

$$\frac{dR_G}{dt} = aR_G + b(G - J) \quad (3.2)$$

- Los sentimientos de Julieta hacia Romeo, los representaremos exactamente igual que en el modelo inicial (1.5). Simplemente cambiaremos  $R$  por  $R_J$ , ya que en este modelo hemos diferenciado el amor de Romeo tal que  $R = R_J + R_G$ . Consecuentemente, tenemos

$$\frac{dJ}{dt} = cR_J + dJ \quad (3.3)$$

- Los sentimientos de Guinevere hacia Romeo, los representaremos de forma similar al amor de Julieta hacia Romeo. Simplemente cambiaremos  $R_J$  por  $R_G$  y  $J$  por  $G$ . Además, tomaremos nuevos parámetros  $e$  y  $f$ , que representan la reacción de Guinevere a los sentimientos que tiene Romeo hacia ella y la reacción de Guinevere hacia sus propios sentimientos, respectivamente. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{dG}{dt} = eR_G + fG \quad (3.4)$$

De esta manera, si  $a$  es positivo el amor total de Romeo ( $R = R_J + R_G$ ) crece sin límite, en cambio, si  $a$  es negativo, el amor total de Romeo muere. Asimismo, si, por ejemplo, Guinevere quiere más a Romeo que Julieta y  $b$  es positivo, los sentimientos que tiene Romeo hacia Julieta se irán apagando, sin embargo, el amor de Romeo hacia Guinevere se encenderá. Por otro lado, ante esa misma situación, si  $b$  es negativo, el amor de Romeo hacia Julieta crecerá, mientras que sus sentimientos hacia Guinevere se apagarán.

Por tanto, nuestro nuevo sistema será 4-dimensional, lineal y cuenta con 6 parámetros:

$$\begin{cases} \frac{dR_J}{dt} = aR_J + b(J - G) \\ \frac{dR_G}{dt} = aR_G + b(G - J) \\ \frac{dJ}{dt} = cR_J + dJ \\ \frac{dG}{dt} = eR_G + fG. \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.2. Puntos de equilibrio y análisis de las distintas relaciones

A continuación, vamos a calcular los puntos de equilibrio igualando a cero las cuatro ecuaciones del sistema planteado, como se explica en el apéndice A.1. Por tanto,

$$aR_J + b(J - G) = 0 \tag{3.6}$$

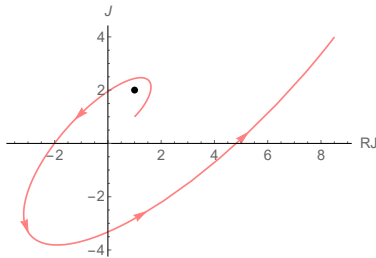
$$aR_G + b(G - J) = 0 \tag{3.7}$$

$$cR_J + dJ = 0 \tag{3.8}$$

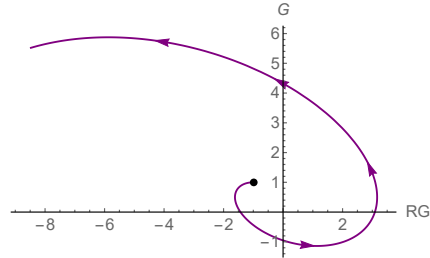
$$eR_G + fG = 0. \tag{3.9}$$

Al ser un sistema lineal homogéneo, la solución es la trivial, por lo que el único punto de equilibrio que obtenemos es el  $(0, 0, 0, 0)$ , correspondiente a un estado de apatía por parte de los tres.

Con el fin de encontrar dinámicas más interesantes buscaremos una combinación de los parámetros de manera que el sistema sea compatible indeterminado y así, obtener una solución no trivial. Por tanto, de las ecuaciones (3.8) y (3.9) despejamos  $R_J = -\frac{d}{c}J$  y  $R_G = -\frac{f}{e}G$ . Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (3.6) y (3.7), deducimos que si  $adf - bde - bcf = 0$  obtendremos otros puntos de equilibrio, además del trivial. Mediante *Mathematica* reproduciremos un caso que cumpla dicha expresión para observar el comportamiento de la pareja.



(a) Amor entre Romeo y Julieta.



(b) Amor entre Romeo y Guinevere.

Figura 3.1: Resultados cuando  $a = 1, b = -1, c = 2, d = -1, e = 1$  y  $f = 1$  y condiciones iniciales  $R_{J_0} = 1, R_{G_0} = -1, J_0 = 1$  y  $G_0 = 1$ .

El caso de la figura 3.1 representa a Romeo y Julieta como unos individuos narcisistas y a Guinevere como una amante entusiasta. Dado que cumple la expresión  $adf - bde - bcf = 0$ , obtenemos otros puntos de equilibrios de la forma  $(R_J, -R_J, 2R_J, R_J)$ . Además, como los autovalores correspondientes, obtenidos mediante *Mathematica*, son complejos conjugados y tienen parte real no nula negativa, se genera un foco inestable, como observamos en la figura 3.1.

Por otro lado, calculamos la matriz jacobiana del sistema, con el fin de determinar los valores propios, como se explica en el apéndice B.1. Entonces, consideremos la siguiente matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & b & -b \\ 0 & a & -b & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & f \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Continuamos calculando el determinante de  $(J - \lambda I)$  e igualándolo a cero:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & b & -b \\ 0 & a - \lambda & -b & b \\ c & 0 & d - \lambda & 0 \\ 0 & e & 0 & f - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a) [\lambda^3 + (a + f + d)\lambda^2 + \\ + (ad + af + df - bc - be)\lambda + bcf + bde - adf] = 0. \quad (3.11)$$

De esta forma, obtenemos que  $a$  es una raíz del polinomio característico. Para estudiar la naturaleza del punto de equilibrio según las distintas situaciones que se pueden dar, utilizaremos el teorema de Routh-Hurwitz [9] para polinomios de tercer grado. Un polinomio de tercer grado  $F(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$  tiene tres raíces negativas o con parte real negativa si y solo si se verifican las condiciones

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0 \quad \text{y} \quad a_1a_2 > a_3. \quad (3.12)$$

Luego, si se satisfacen dichas condiciones y  $a < 0$ , las cuatro raíces correspondientes al polinomio (3.11) tendrán parte real negativa y por lo tanto, concluiremos que el punto de equilibrio es asintóticamente estable (atractor). A continuación veremos un caso donde se alcanza la estabilidad.

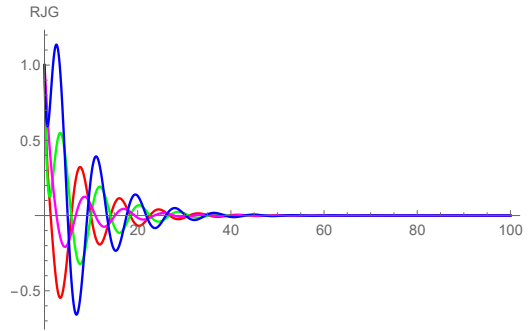


Figura 3.2: Resultados cuando  $a = -2, b = 1, c = 1/2, d = -1, e = -5/2$  y  $f = 1$  y  $R_{J_0} = 1, R_{G_0} = 1, J_0 = 1$  y  $G_0 = 1$ .

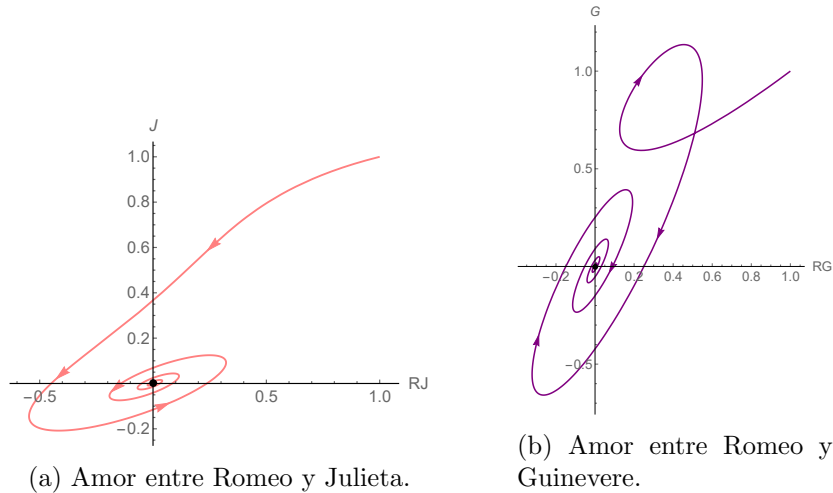


Figura 3.3: Planos de fases de la figura 3.2.

Los valores elegidos para las figuras 3.2 y 3.3, por un lado, no verifican la expresión  $adf - bde - bcf = 0$ , por lo que es sistema compatible determinado con un único punto de equilibrio, el  $(0, 0, 0, 0)$ . Por otro lado, como dichos valores satisfacen las condiciones (3.12) y  $a < 0$ , alcanzamos la estabilidad en dicho punto. Por tanto, observamos en las figuras 3.2 y 3.3 como la relación se estabiliza cuando logra un estado apatía. Además, no va a ser posible obtener un punto asintóticamente estable distinto del  $(0, 0, 0, 0)$ , visto que para obtener un punto de equilibrio distinto se tiene que verificar la expresión  $adf - bde - bcf = 0$ . Teniendo en cuenta que una de las condiciones necesarias (3.12) para alcanzar la estabilidad es  $a_3 = bcf + bde - adf > 0$ , concluimos que es imposible. Sin embargo, con el fin de obtener conclusiones más generales, en este capítulo vamos a utilizar un nuevo método.

Sprott [2] analizó las distintas reacciones de Romeo para distintos tipos de personas (estilos románticos) y distintas condiciones iniciales. Para ello, toma los parámetros  $a, b, c, d, e, f$  y las condiciones iniciales  $(R_{J_0}, R_{G_0}, J_0, G_0)$  de una distribución gaussiana aleatoria de media cero y varianza 1. Sprott concluye que Romeo termina amando a Julieta y odiando a Guinevere, o viceversa, el 82% de los casos, mientras que el porcentaje de acabar odiando o amando a ambas es un 8%. En el resto de los casos, es decir, un 10%, se crea una apatía por parte de los tres. También le parece interesante que solamente en el 43% de los casos se experimenta el amor mutuo.

Entonces, siguiendo el método de Sprott, en esta sección hemos ejecutado en *Mathematica* un programa (apéndice C.1) que define tanto los parámetros  $a, b, c, d, e, f$  como las condiciones iniciales  $(R_{J_0}, R_{G_0}, J_0, G_0)$  tomando números aleatorios de la distribución gaussiana de media cero y varianza

uno. Después, una vez comprobado que no se trata de una matriz singular ( $\det \neq 0$ ), es decir, que el único punto de equilibrio es el  $(0, 0, 0, 0)$ , se resuelve el sistema y representamos los sentimientos de los tres individuos mediante gráficas en función del tiempo  $t$  y planos de fases. Observando dichas gráficas deducimos a quien ama u odia cada individuo.

Hemos ejecutado este programa (apéndice C.1) 100 veces para distintos parámetros  $(a, b, c, d, f, e)$  y condiciones iniciales  $(R_{J_0}, R_{G_0}, J_0, G_0)$ , obtenidos, como hemos mencionado anteriormente, de forma aleatoria. De esta manera, se han realizado sucesivas pruebas (cuyos resultados están en el apéndice C.2), y se ha creado un documento Excel con los resultados de cada una de ellas en *Mathematica*. Asimismo, con el fin de obtener conclusiones de forma más rápida y clara, hemos creado una macro (apéndice C.3) dentro del mismo Excel. Esta macro nos devuelve, a su vez, un documento de texto (apéndice C.3) con los porcentajes de distintos casos que hemos creído interesantes, como por ejemplo, si es más probable que el amor de Romeo sea correspondido o no.

Las conclusiones a las que hemos llegado son muy similares a las descritas por Sprott [2]. Primero, hemos obtenido que Romeo termina amando a una de ellas (Julieta o Guinevere) y odiando a la otra el 81 % de las veces, frente a un 82 % que mencionaba Sprott. Por otro lado, concluimos que el 9 % de las veces (Sprott, 8 %), Romeo ama u odia a ambas a la vez y el 10 % restante corresponde a los casos donde los tres individuos son apáticos, es decir, a todos ellos les es indiferente el resto. Observando los resultados obtenidos, deducimos que si una persona es apática, el resto también lo es, como comenta Sprott [2]. Nunca va a ocurrir que, por ejemplo, Romeo no sienta nada hacia Guinevere y ella hacia él sí, puesto que si Romeo no tiene sentimientos, tampoco los van a tener Guinevere y Julieta. Asimismo, estos casos son los que cumplen las condiciones (3.12) y  $a < 0$ , de forma que el punto de equilibrio  $(0, 0, 0, 0)$  es asintóticamente estable y por tanto, el amor de los tres individuos muere.

Al igual que Sprott [2], hemos deducido que solamente en el 2 % de los casos terminan todos enamorados, los unos de los otros, ya que solo obtenemos este resultado en dos de las 100 pruebas realizadas. Lo mismo ocurre en el caso donde todos terminan odiándose, que se da el 2 % de las veces. Finalmente, hemos analizado cual es la probabilidad de que el amor de Romeo sea correspondido y su porcentaje es un 40 % (Sprott, 43 %). Por tanto, concluimos que cuando una relación involucra a tres personas, es mas probable que la relación termine en fracaso, antes que con un "final feliz".

Por último, hemos querido analizar también cual es la probabilidad de que ambas, tanto Julieta como Guinevere, estén enamoradas de Romeo y el resultado es un 26 %. Por otro lado, el porcentaje que obtenemos si analiza-



mos la probabilidad de que ambas terminen odiando a Romeo, es un 35 %. Por consiguiente, parece ser que es más común que ambas odien a una misma persona a que le amen. Este resultado es lógico debido a la desconfianza e inseguridad que puede generar el hecho de estar en un relación romántica en la que estén implicadas tres personas. A pesar de que ni Julieta sepa de la existencia de Guinevere, ni viceversa, el comportamiento de Romeo sí se ve afectado, lo que genera este resultado.

### 3.3. Efectos de la no-linealidad

Como hemos explicado en el capítulo 2, las relaciones de pareja es mejor analizarlas mediante modelos no lineales, ya que los resultados obtenidos se asemejan más a la realidad. Por ello, en esta sección, analizaremos el comportamiento no lineal en el modelo (3.5), que corresponde a los triángulos amorosos. Además, utilizaremos, de nuevo, los conceptos explicados en el apéndice A sobre el modelo logístico (A.2).

Partiendo del modelo (3.5), primero analizaremos el amor de Romeo hacia Julieta, es decir,

$$\frac{dR_J}{dt} = aR_J + b(J - G) \quad (3.13)$$

- Sea  $b > 0$ , sabemos que si Julieta ama a Romeo más que Guinevere, el amor de Romeo hacia Julieta crece (ecuación (3.13)). Sin embargo, ahora queremos representar el hecho de que si los sentimientos de Julieta son mucho mayores que los de Guinevere, él se asfixia y reacciona negativamente. Para ello, nos basta con multiplicar a  $b(J - G)$  por  $(1 - |J - G|)$ , como ya se ha explicado en el capítulo 2.
- Sea  $b < 0$ , observamos que el amor de Romeo hacia Julieta decrece si los sentimientos que Julieta tiene hacia él son mayores que los de Guinevere. En cambio, ahora, queremos representar que si el amor de Julieta es mucho más intenso que el amor de Guinevere hacia Romeo, llamará la atención de él y los sentimientos de este hacia Julieta se encenderán. Para ello, si multiplicamos a  $b(J - G)$  por  $(1 - |J - G|)$ .

En los casos del amor de Romeo hacia Guinevere y del amor de Julieta y Guinevere hacia Romeo ocurre exactamente lo mismo, por lo que los desarrollaremos análogamente. De esta forma, representaremos las distintas reacciones que hemos mencionado para el caso de Romeo.

Luego, el nuevo modelo no-lineal propuesto por Sprott [2] es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dR_J}{dt} = aR_J + b(J - G)(1 - |J - G|) \\ \frac{dR_G}{dt} = aR_G + b(G - J)(1 - |G - J|) \\ \frac{dJ}{dt} = cR_J(1 - |R_J|) + dJ \\ \frac{dG}{dt} = eR_G(1 - |R_G|) + fG. \end{cases} \quad (3.14)$$

### 3.4. Análisis del nuevo modelo

En esta sección, primero, vamos a ver qué ocurre con la dinámica del nuevo sistema no-lineal para los parámetros  $a, b, c, d, e, f$  y las condiciones iniciales  $(R_{J_0}, R_{G_0}, J_0, G_0)$  considerados en las figuras 3.2 y 3.3, donde la relación se estabilizaba en el punto  $(0, 0, 0, 0)$ . Con el fin de comparar los resultados de los sistemas (3.5) y (3.14) para dichos valores, utilizaremos el programa del apéndice C.1 cambiando las ecuaciones del modelo (3.5) por las nuevas.

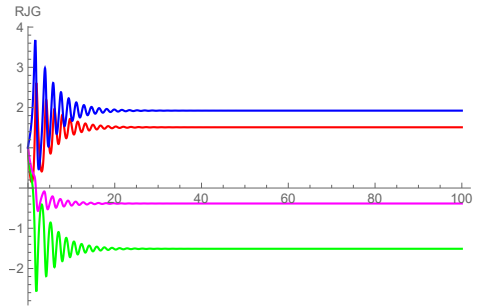


Figura 3.4: Resultados cuando  $a = -2, b = 1, c = 1/2, d = -1, e = -5/2$  y  $f = 1$  y  $R_{J_0} = 1, R_{G_0} = 1, J_0 = 1$  y  $G_0 = 1$ .

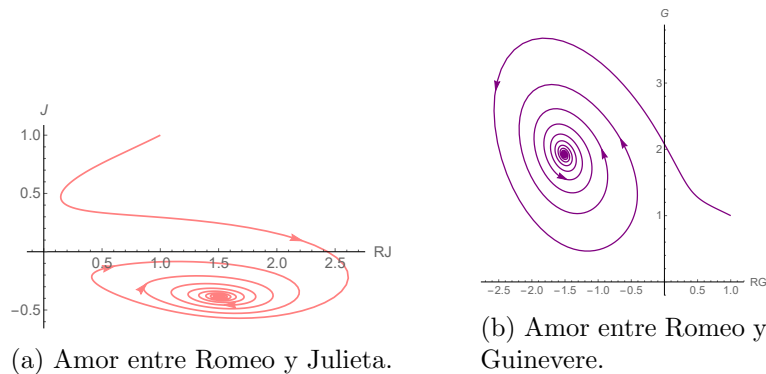


Figura 3.5: Planos de fases de la figura 3.4.

Como podemos observar, una vez aplicada la no-linealidad al sistema (3.5), cambia totalmente el rumbo de la relación. Para este ejemplo, veámos en las figuras 3.2 y 3.3 como los tres individuos eran apáticos, siendo la relación asintóticamente estable en el punto  $(0, 0, 0, 0)$ . Sin embargo, en el sistema (3.14), se sigue manteniendo la estabilidad, pero no en  $(0, 0, 0, 0)$ , sino en  $(1, 5, -1, 5, -0, 38, 1, 9)$ . Ahora Romeo se mantiene en un estado de amor hacia Julieta, sin serle ella correspondida, y de odio hacia Guinevere, mientras que Guinevere le sigue amando. Por lo tanto, para este modelo concluimos que sí es posible alcanzar la estabilidad en puntos distintos al  $(0, 0, 0, 0)$ .

Por otro lado, el nuevo sistema puede presentar casos donde se genere el fenómeno del caos con atractores extraños y con el fin de observar dicho fenómeno, representaremos el caso que muestra Sprott [2].

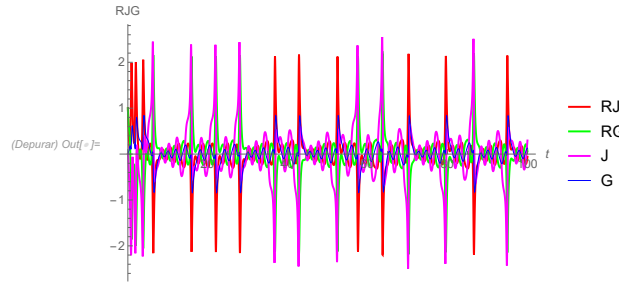
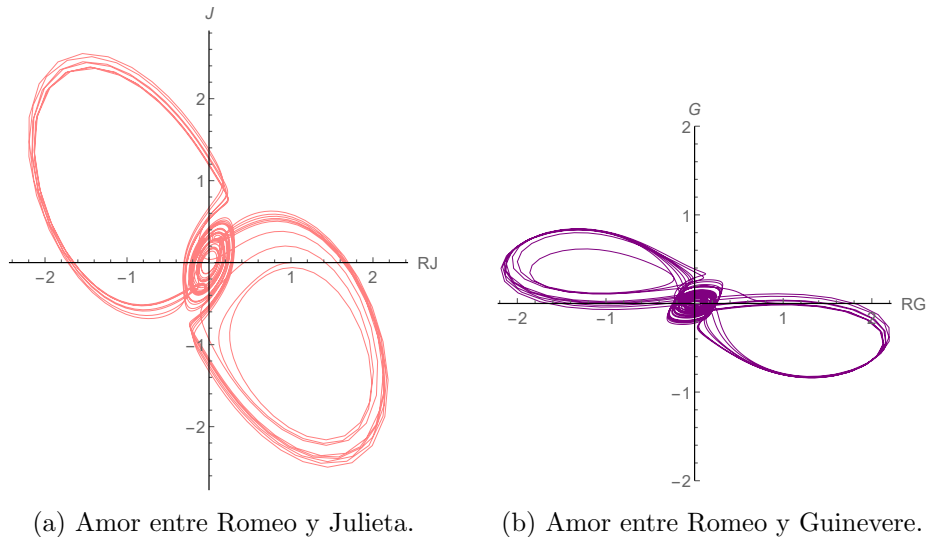


Figura 3.6: Resultados cuando  $a = -3, b = 4, c = -7, d = 2, e = 2$  y  $f = -1$  y  $R_{J_0} = 1, R_{G_0} = 1, J_0 = 0$  y  $G_0 = 0$ .



(a) Amor entre Romeo y Julieta.

(b) Amor entre Romeo y Guinevere.

Figura 3.7: Planos de fases de la figura 3.6.

En las figuras 3.6 y 3.7 estudiamos un caso entre un Romeo y una Guinevere seguros y una Julieta narcisista, obteniendo así atractores caóticos. Sin embargo, Sprott [2] comenta cómo las regiones del espacio que admiten caos son relativamente pequeñas.

### 3.5. Conclusiones

Primero, en cuanto al modelo lineal (3.5) que involucra a tres personas en una misma relación, observamos como Romeo es bastante más propenso a amar solamente a una persona, pudiendo ser esta su pareja o su amante. Por otro lado, puede ocurrir, en un 10 % de los casos, que los tres participantes de este triángulo amoroso terminen en un estado de apatía, apagándose los sentimientos de todos. También es interesante el hecho de que en este tipo de relaciones la probabilidad de terminar con amores no correspondidos es mayor. Además, puede suceder que todos se amen o que todos se odien, siendo este porcentaje mínimo.

Por último, en el modelo (3.14), es decir, una vez aplicada la no-linealidad, hemos estudiado por un lado, cómo cambia totalmente el rumbo de una relación, pudiendo alcanzar también la estabilidad en algún punto distinto del  $(0, 0, 0, 0)$ . Para terminar, hemos observado cómo pueden llegar a generarse ciertos atractores caóticos.

## Capítulo 4

# Conclusiones

En general, hemos observado cómo, dependiendo de la personalidad de cada individuo, es decir, de los parámetros, y de las condiciones iniciales, las relaciones toman una dirección u otra. Ya simplemente analizando el modelo inicial, que solo toma en cuenta los sentimientos que Romeo tiene hacia Julieta y el amor que Julieta siente hacia Romeo, se pueden llegar a producir resultados más complejos de lo que esperábamos. Sin embargo, este modelo no es del todo realista, para empezar, porque un sistema lineal no es la manera más objetiva de cuantificar el amor. Hemos supuesto que los individuos, a pesar de ser seres muy influenciables, responden de forma mecánica, sin dejarse influenciar por nada que ocurra en el exterior.

Por lo tanto, en el segundo capítulo hemos modificado nuestro modelo de manera que tomemos en cuenta las fuerzas externas y hemos interpretado el amor como un comportamiento no-lineal. Hemos observado como existen otros factores que afectan en el amor entre Romeo y Julieta, como sus propias personalidades o las opiniones de su entorno. Por un lado, hemos concluido que pequeñas variaciones en los parámetros llevan a comportamientos muy distintos. Por otro lado, hemos observado la aparición del fenómeno del caos en algunas de las relaciones, cuando tenemos en cuenta las fuerzas externas. En otras palabras, hemos estudiado como podemos amar a alguien, y en un instante, empezar a odiarla. Nuestros sentimientos dependen mucho de lo que ocurra en nuestro alrededor, y nos dejamos influir por nuestros familiares y amigos, generando así un comportamiento caótico.

Las conclusiones obtenidas en el tercer capítulo son un tanto diferentes, puesto que ya no intervienen fuerzas externas, sino que nos encontramos ante triángulos amorosos. Sin haber aplicado la no-linealidad, vemos como Romeo termina amando a Julieta y odiando Guinevere, o viceversa, el 81 % de las veces, mientras que la posibilidad de que ame u odie a ambas a la vez, es de un 9%. Por consiguiente, concluimos que lo más común es que

un individuo ame solamente a una persona, siendo esta su pareja inicial o su amante. Además, los sentimientos de las tres personas involucradas en la relación acaban desapareciendo el 10% de las veces y la posibilidad de que todos ellos terminen enamorados es muy poco probable, pero plausible, así como de que se odien mutuamente.

Asimismo, analizando si el amor de Romeo es correspondido, concluimos que, cuando una relación involucra a tres personas, es más probable que la relación termine en fracaso que con un final “feliz”. Por otra parte, hemos comprobado cómo es más habitual que Guinevere y Julieta odien a una misma persona a que le amen. A pesar de que no haya competición, el comportamiento de Romeo es distinto al tener sentimientos hacia dos personas distintas. Por ello, se refuerza la idea de que en el momento en el que las inseguridades intervienen, el odio supera al amor. Por último, una vez aplicada la no-linealidad, se ha observado que se pueden llegar a generar atractores caóticos.

En definitiva, es importante resaltar que si se quiere mantener una relación, ambos individuos tienen que poner todo su empeño en ella. En nuestro día a día vivimos expuestos a las críticas de nuestro entorno y, a menudo, se dan circunstancias que nos hacen cambiar de opinión constantemente. Por esa razón, si nos dejáramos llevar solamente por lo que sentimos en cada instante, pocas relaciones seguirían en pie.

## Apéndice A

# Teorías sobre la evolución de las especies

### A.1. Teoría malthusiana

El malthusianismo o maltusianismo [10] es una teoría demográfica, económica y sociopolítica, desarrollada por el economista británico Thomas Robert Malthus (1766-1834) durante la revolución industrial, según la cual el ritmo de crecimiento de la población responde a una progresión geométrica, mientras que el ritmo de aumento de los recursos para su supervivencia lo hace en progresión aritmética. Así, ningún aumento en la disponibilidad de alimentos básicos para la supervivencia del ser humano podrá compensar el crecimiento de una población. Por tanto, el crecimiento de una población tiene que ser frenado ya sea por limitaciones naturales, como hambrunas o las enfermedades epidémicas, o por acciones humanas, como las guerras. Las teorías de Malthus, inicialmente de carácter exclusivamente económico, influyeron profundamente sobre Charles Darwin (1809-1882), quien aplicó sus razonamientos a los animales y plantas.

Entonces, dado que la idea inicial de Malthus era que las poblaciones tienden a crecer o decrecer en progresión exponencial, concluyó que el ritmo de crecimiento de una población es directamente proporcional a su tamaño. Por tanto, la idea de Malthus en lenguaje matemático se escribe:

$$\frac{dp}{dt} = ap, \quad a = cte.,$$

siendo  $a$  la constante de proporcionalidad,  $p(t)$  la población y  $t$  el tiempo transcurrido desde el comienzo del experimento.

En nuestro trabajo, ocurre lo mismo con la evolución de las relaciones. En el caso de Romeo, si no se tienen en cuenta los sentimientos de Julieta, su amor crece o decrece de forma exponencial, en función de  $a$ . En el caso de Julieta, sucede lo mismo.

## A.2. Modelo logístico

Pierre-François Verhulst (1804-1849) [11] fue un matemático belga que generalizó el modelo maltusiano, teniendo en cuenta el hecho de que los elementos de una población confinados en un ambiente limitado compiten entre sí, y esta competencia hace que disminuya el nivel de crecimiento. Su idea [10] era que el porcentaje de crecimiento es menor a medida que la población crece, convirtiéndose este porcentaje en una función decreciente de la población.

La competición sucede cuando un miembro de la población se encuentra con otro miembro, y compite con él por recursos como alimentos, la tierra, el agua, etc. Entonces, si una población tiene  $p$  elementos, como cada elemento se puede encontrar con los  $p - 1$  restantes, el número de encuentros posibles entre dos elementos distintos es  $\frac{p(p-1)}{2}$ . Por tanto, combinando estas ideas con las de Malthus, se ajustó la ecuación de crecimiento (o decrecimiento) restándole la competición. Se tiene de esta forma

$$\frac{dp}{dt} = ap - c \frac{p(p-1)}{2},$$

donde  $a$  y  $c$  son constantes,  $p$  la población y  $t$  el tiempo transcurrido desde el comienzo del experimento.

Nosotros ajustaremos esta ecuación para el modelo no-lineal básico analizado en el capítulo 2. En sí, no hablamos de una competencia, sino que queremos representar de alguna manera el hecho de que dependiendo de la intensidad con que ame un individuo, los sentimientos del otro individuo pueden apagarse o encenderse. Es decir, no tomamos en cuenta solamente si su pareja le ama o no, sino cuánto le ama u odia. Nuestra idea es evitar el crecimiento exponencial. Para ello nos basamos en las ideas del modelo logístico.



## Apéndice B

# Resumen sobre ecuaciones diferenciales

### B.1. Definiciones básicas

Un sistema diferencial de dos ecuaciones [10] con dos incógnitas de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}\tag{B.1}$$

en el que la variable independiente  $t$  no aparece explícitamente en las funciones  $F$  y  $G$  del segundo miembro se denomina **sistema autónomo**.

Cuando se interpreta  $t$  como un parámetro, la solución  $(x(t), y(t))$  define una curva en el plano de fases  $xy$  que se denomina trayectoria del sistema. Además, los puntos  $(\bar{x}, \bar{y})$  solución del sistema

$$\begin{aligned}F(x, y) &= 0 \\ G(x, y) &= 0\end{aligned}\tag{B.2}$$

se denominan **puntos de equilibrio** o puntos estables del sistema autónomo.

Por otro lado, definimos también **la matriz jacobiana** en el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , que tendría la siguiente forma:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial G}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}.\tag{B.3}$$

Esta matriz es útil para el cálculo de los autovalores, haciendo el determinante de  $(J - \lambda I)$  e igualándolo a 0.

Finalmente, vamos a definir los conceptos de estabilidad e inestabilidad:

- (i) Se dice que el punto crítico del sistema (B.1) es estable si una órbita que está cerca del punto de equilibrio, se mantiene cerca a lo largo del tiempo.
- (ii) Se dice que el punto crítico del sistema (B.1) es asintóticamente estable si las órbitas no solo se mantienen cerca del punto de equilibrio, sino que se aproximan al punto de equilibrio a lo largo del tiempo.
- (iii) Se dice que el punto crítico del sistema (B.1) es inestable si las órbitas que empiezan cerca del punto, se van alejando del punto de equilibrio a lo largo del tiempo.

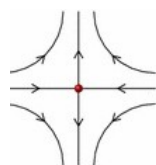
## B.2. Clasificación de los puntos de equilibrio en sistemas lineales

Vamos a suponer que los puntos críticos del sistema son aislados y el punto que vamos a estudiar es el  $(0,0)$ , que casualmente coincide con el punto de equilibrio de nuestro modelo inicial. En función del comportamiento de las órbitas en relación con el punto crítico aislado  $(0,0)$ , este se denominará [10]: nodo, punto silla, centro o foco.

### Definición 1

- a) El punto crítico es un **nodo** si los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales y del mismo signo. El diagrama de fases tiene las siguientes características:
  - (i) Cuando los autovalores son negativos, todas las órbitas se acercan al origen. Es asintóticamente estable.
  - (ii) Cuando los autovalores son positivos, todas las órbitas se alejan del origen. Es inestable.
- b) El punto crítico es un **punto silla** cuando los autovalores son reales y de distinto signo. En este caso, nos encontramos con órbitas que se acercan al origen y otras que se alejan de él. Esto nos permite concluir que el punto silla es inestable.
- c) El punto crítico es un **centro** cuando los autovalores son imaginarios puros. En este caso, nos encontramos con que las órbitas son curvas cerradas que rodean al origen, por lo que ninguna órbita tiende a él. Estos puntos son estables, pero no asintóticamente estables.
- d) El punto crítico es un **foco** cuando los autovalores son complejos conjugados y tienen parte real no nula. Las órbitas son curvas en forma de espiral y puede ocurrir:

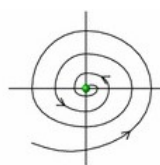
- (i) Cuando la parte real de los autovalores es negativa, todas las órbitas se acercan al origen. Es asintóticamente estable.
- (ii) Cuando la parte real de los autovalores es positiva, todas las órbitas se alejan del origen. Es inestable.



**(a) Saddle**

$$R_1 < 0, R_2 > 0$$

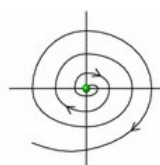
$$I_1 = I_2 = 0$$



**(b) Attracting Focus**

$$R_1 = R_2 < 0$$

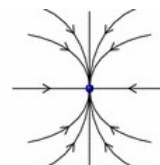
$$I_1 = -I_2 \neq 0$$



**(c) Repelling Focus**

$$R_1 = R_2 > 0$$

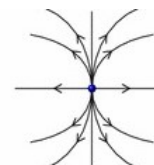
$$I_1 = -I_2 \neq 0$$



**(d) Attracting Node**

$$R_1, R_2 < 0$$

$$I_1 = I_2 = 0$$



**(e) Repelling Node**

$$R_1, R_2 > 0$$

$$I_1 = I_2 = 0$$

0.34



# Apéndice C

## Resultados del capítulo 3

### C.1. Programa de Mathematica del modelo 3.5

```
RV = RandomVariate[NormalDistribution[0, 1], 10];
a = RV[[1]];
b = RV[[2]];
c = RV[[3]];
d = RV[[4]];
e = RV[[5]];
f = RV[[6]];
p1 = Solve[{a RJ + b (J - G) == 0, a RG + b (G - J) == 0, c RJ + d J == 0, e RG + f G == 0}, {RJ, RG, J, G}]
Eigenvalues[{{a, 0, b, -b}, {0, a, -b, b}, {c, 0, d, 0}, {0, e, 0, f}}]
Det[{{a, 0, b, -b}, {0, a, -b, b}, {c, 0, d, 0}, {0, e, 0, f}}]
s1 = NDSolve[{RJ'[t] == a RJ[t] + b (J[t] - G[t]), RG'[t] == a RG[t] + b (G[t] - J[t]), J'[t] == c RJ[t] + d J[t],
G'[t] == e RG[t] + f G[t], RJ[0] == RV[[7]], RG[0] == RV[[8]], J[0] == RV[[9]], G[0] == RV[[10]]},
{RJ, RG, J, G}, {t, 0, 100}];
pt = Plot[Evaluate[{RJ[t], RG[t], J[t], G[t]} /. s1], {t, 0, 100}, AxesLabel -> {t, RJG}, Axes -> True,
AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {{Red}, Green, {Magenta}, Blue}]
d1 = Table[{i, i}, {i, 0, 0}];
pJ = ParametricPlot[Evaluate[{RJ[t], J[t]} /. s1], {t, 0, 100}, AxesLabel -> {RJ, J}, Axes -> True,
AxesStyle -> Directive[FontSize -> 14], AxesOrigin -> {0, 0}, Epilog -> {PointSize[0.02], Point[d1]},
PlotRange -> All, PlotStyle -> {Pink}]
pG = ParametricPlot[Evaluate[{RG[t], G[t]} /. s1], {t, 0, 100}, AxesLabel -> {RG, G}, Axes -> True,
AxesStyle -> Directive[FontSize -> 14], AxesOrigin -> {0, 0}, Epilog -> {PointSize[0.02], Point[d1]},
PlotRange -> All, PlotStyle -> {Purple}]
```



- 79.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \nrightarrow J, J \nrightarrow R$
- 80.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \nrightarrow R$
- 81.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \rightarrow R$
- 82.  $R \rightarrow G, G \rightarrow R, R \nrightarrow J, J \nrightarrow R$
- 83.  $R \rightarrow G, G \nrightarrow R, R \nrightarrow J, J \rightarrow R$
- 84.  $RG, G, RJ, J$  apatía
- 85.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \nrightarrow R$
- 86.  $R \nrightarrow G, G \rightarrow R, R \nrightarrow J, J \rightarrow R$
- 87.  $R \nrightarrow G, G \rightarrow R, R \rightarrow J, J \rightarrow R$
- 88.  $R \rightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \nrightarrow R$
- 89.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \rightarrow R$
- 90.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \rightarrow R$
- 91.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \nrightarrow R$
- 92.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \nrightarrow R$
- 93.  $R \rightarrow G, G \rightarrow R, R \nrightarrow J, J \rightarrow R$
- 94.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \rightarrow R$
- 95.  $R \nrightarrow G, G \rightarrow R, R \rightarrow J, J \rightarrow R$
- 96.  $R \nrightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \nrightarrow R$
- 97.  $R \rightarrow G, G \rightarrow R, R \nrightarrow J, J \nrightarrow R$
- 98.  $R \rightarrow G, G \nrightarrow R, R \rightarrow J, J \nrightarrow R$
- 99.  $R \rightarrow G, G \nrightarrow R, R \nrightarrow J, J \nrightarrow R$
- 100.  $R \rightarrow G, G \rightarrow R, R \nrightarrow J, J \rightarrow R$

### C.3. Macro y resultados para las pruebas C.2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	RG	G	RJ	J	Una/Ambas	Mutuo	Apatía	Amor	Odio					
2		0	1	1	1 Si	Si					Fichero:	C:\Users\Virginia\Documents\TFG\Pruebas1.txt		
3		1	0	0	1 Si						Pruebas:	100		
4		1	0	1	0 No									
5		0	0	1	0 Si									
6		2	2	2	2		Si							
7		1	0	0	1 Si									
8		1	0	0	1 Si									
9		1	1	0	1 Si	Si								
10		2	2	2	2		Si							
11		1	2	1	1 No	Si		Si						
12		1	1	0	1 Si	Si								
13		2	2	2	2		Si							
14		2	2	2	2		Si							
15		0	0	1	1 Si	Si								
16		0	0	1	0 Si									
17		0	1	1	1 Si	Si								
18		1	0	0	1 Si									
19		1	1	0	0 Si	Si								
20		2	2	2	2		Si							
21		0	0	1	0 Si									
22		0	1	1	1 Si	Si								
23		1	0	0	0 Si									
24		1	1	0	1 Si	Si								
25		1	0	0	1 Si									
26		1	1	0	0 Si	Si								
27		0	0	1	0 Si									
28		0	0	1	0 Si									

```

Sub Conclusiones()
'
' Conclusiones Macro
'
Dim FicheroTexto As String
FicheroTexto = Cells(2, 11)
Dim n_pruebas, R_loves_and_hates, R_loves_or_hates, Mutual_love, Hate, Love, apathy As Integer
Dim ambas_odian, ambas_quieren As Integer
Dim i As Integer
n_pruebas = Cells(3, 11)
Open FicheroTexto For Output As #1
'
'
Print #1, "Número de pruebas: " & n_pruebas
R_loves_and_hates = 0
R_loves_or_hates = 0
Mutual_love = 0
Hate = 0
Love = 0
apathy = 0
ambas_quieren = 0
ambas_odian = 0

```

```

For i = 2 To (n_pruebas + 1)
If Cells(i, 1) <> Cells(i, 3) Then Cells(i, 5) = "Si"
If Cells(i, 1) = Cells(i, 3) And Cells(i, 1) <> 2 Then Cells(i, 5) = "No"
If Cells(i, 1) = 1 And Cells(i, 2) = 1 Then Cells(i, 6) = "Si"
If Cells(i, 3) = 1 And Cells(i, 4) = 1 Then Cells(i, 6) = "Si"
If Cells(i, 1) = 2 Then Cells(i, 7) = "Si"
If Cells(i, 1) = 1 And Cells(i, 2) = 1 And Cells(i, 3) = 1 And Cells(i, 4) = 1 Then Cells(i, 8) = "Si"
If Cells(i, 1) = 0 And Cells(i, 2) = 0 And Cells(i, 3) = 0 And Cells(i, 4) = 0 Then Cells(i, 9) = "Si"
Next i

For i = 2 To n_pruebas + 1
If Cells(i, 5) = "Si" Then R_loves_and_hates = R_loves_and_hates + 1
If Cells(i, 5) = "No" Then R_loves_or_hates = R_loves_or_hates + 1
If Cells(i, 6) = "Si" Then Mutual_love = Mutual_love + 1
If Cells(i, 7) = "Si" Then apathy = apathy + 1
If Cells(i, 8) = "Si" Then Love = Love + 1
If Cells(i, 9) = "Si" Then Hate = Hate + 1
If Cells(i, 2) = 1 And Cells(i, 4) = 1 Then ambas_quieren = ambas_quieren + 1
If Cells(i, 2) = 0 And Cells(i, 4) = 0 Then ambas_odian = ambas_odian + 1
Next i

Print #1, "Romeo ama a una y odia a la otra: " & R_loves_and_hates / n_pruebas * 100 & "%"
Print #1, "Romeo ama o odia a ambas: " & R_loves_or_hates / n_pruebas * 100 & "%"
Print #1, "Amor correspondido: " & Mutual_love / n_pruebas * 100 & "%"
Print #1, "Apatia: " & apathy / n_pruebas * 100 & "%"
Print #1, "Todos están enamorados: " & Love / n_pruebas * 100 & "%"
Print #1, "Todos se odian: " & Hate / n_pruebas * 100 & "%"
Print #1, "Ambas aman a Romeo en el " & ambas_quieren / n_pruebas * 100 & "%" & " de los casos"
Print #1, "Ambas odian a Romeo en el " & ambas_odian / n_pruebas * 100 & "%" & " de los casos"

Close #1

End Sub

Número de pruebas: 100
Romeo ama a una y odia a la otra: 81%
Romeo ama o odia a ambas: 9%
Amor correspondido: 40%
Apatia: 10%
Todos están enamorados: 2%
Todos se odian: 2%
Ambas aman a Romeo en el 26% de los casos
Ambas odian a Romeo en el 35% de los casos

```



# Bibliografía

- [1] S. H. Strogatz, “Love Affairs and Differential Equations”, Harvard University. Mathematics Magazine (1988) Vol.61 (1),35
- [2] J.C.Sprott, “Dynamical Models of Love”, University of Wisconsin, Madison, Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Science (2004) Vol.8(3), 303-313 .
- [3] Y. Bae, “Chaotic Behavior in a Dynamic Love Model with Different External Forces”, Chonnam National University, Yeosu, Korea. International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems, Vol.5, No 4, Diciembre 2015, pp. 285-288.
- [4] J.M.Gottman, J.D.Murray, C.C. Swanson, R.Tyson, and K.R. Swanson: “The Mathematics of Marriage: Dynamic Nonlinear Model”, Cambridge, M.A.: MIT Press (2002).
- [5] Colaboradores de Wikipedia, “Onda triangular”, Wikipedia, La enciclopedia libre, 29 enero 2020, [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Onda\\_triangular&oldid=123167286](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Onda_triangular&oldid=123167286).
- [6] Colaboradores de Wikipedia, “Onda cuadrada”, Wikipedia, La enciclopedia libre, 31 agosto 2019, [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Onda\\_cuadrada&oldid=118764579](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Onda_cuadrada&oldid=118764579).
- [7] Colaboradores de Wikipedia, “Sinusoide”, Wikipedia, La enciclopedia libre, 30 abril 2020, <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Sinusoide&oldid=125649441>.
- [8] Colaboradores de Wikipedia, “Onda de sierra”, Wikipedia, La enciclopedia libre, 30 octubre 2019, [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Onda\\_de\\_sierra&oldid=126220685](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Onda_de_sierra&oldid=126220685).
- [9] K. Ogata, “Ingeniería de Control Moderno”, Pearson, 2010, pp. 212-218.
- [10] M. Braun, “Differential Equations and Their Applications”, fourth edition. Springer-Verlag, New York, 1993, pp. 437-442.

- [11] P.F. Verhulst, “Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement”, *Correspondance mathématique et physique*, 10 (1838), pp. 113-121.