



---

# Las funciones cnoidales y sus aplicaciones en algunas ecuaciones de la física matemática

---

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas

Carmen Bonilla Urturi

Trabajo dirigido por  
Virginia Muto Foresi

Leioa, 17 de Junio de 2021



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Funciones Cnoidales</b>	<b>1</b>
1.1. Funciones elípticas de Jacobi . . . . .	2
1.2. Fórmulas de adición-sustracción. . . . .	7
1.3. Derivadas de las funciones elípticas de Jacobi. . . . .	11
1.4. Integrales elípticas . . . . .	13
<b>2. Aplicaciones de las funciones cnoidales para las ecuaciones de Boussinesq y KdV</b>	<b>17</b>
2.1. Deducción de la ecuación KdV a partir de las ecuaciones de Boussinesq . . . . .	19
2.2. Soluciones Onda viajera . . . . .	22
2.2.1. Solución solitaria KdV . . . . .	23
2.2.2. Solución solitaria de Boussinesq . . . . .	25
2.2.3. Soluciones periódicas KdV . . . . .	29
<b>3. Simulaciones numéricas para la ecuación KdV</b>	<b>35</b>
3.1. Soluciones solitarias . . . . .	35
3.2. Soluciones periódicas . . . . .	37
<b>A. Transformada de Fourier y el método del Factor Integral</b>	<b>41</b>
<b>B. Código en <i>Mathematica</i></b>	<b>43</b>



# Introducción

Este trabajo de fin de grado tiene como finalidad el estudio de las ondas cnoidales, siendo éstas una solución particular de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV).

En primer lugar indicamos la solución en cuestión, pero resulta incomprendible para el lector, incluso siendo éste graduado en matemáticas, si se desconocen las funciones elípticas de Jacobi. Por ello se dedica el primer capítulo al estudio de dichas funciones y sus principales propiedades.

Comenzamos dando su definición a través de la inversa de integrales elípticas e introduciendo las distintas relaciones existentes entre ellas, las cuales resultarán cruciales en futuras demostraciones. Proseguimos analizando las fórmulas de adición-sustracción y las expresiones de las derivadas de las principales funciones. Por último se presentan las integrales elípticas de primera especie y la relación que albergan con las funciones elípticas de Jacobi.

Destacamos la importancia de este primer capítulo dado que contiene las demostraciones de cada una de las propiedades, a diferencia de la mayoría de la literatura que podemos encontrar acerca de las funciones elípticas de Jacobi en la que principalmente se presentan únicamente tablas y gráficos sin explicación alguna.

El segundo capítulo guarda como objetivo final la obtención de soluciones para la ecuación KdV. Previamente se presentan las ecuaciones de Boussinesq dado que resultan anteriores cronológicamente hablando y de ellas podemos deducir la propia KdV.

Ya conocidas las expresiones de ambas ecuaciones, buscamos soluciones de éstas para ondas viajeras. En primer lugar obtenemos las soluciones para *ondas solitarias* tanto de la ecuación KdV como de las de Boussinesq, corroborando así la estrecha relación existente entre ambas. Finalmente hallamos las soluciones periódicas, o más conocidas como *ondas cnoidales*, para la ecuación KdV, las cuales ya habían sido presentadas al inicio del trabajo.

En el tercer y último capítulo se analizan las simulaciones numéricas realizadas escribiendo un código en el lenguaje de programación *Mathematica* para las soluciones obtenidas en el capítulo anterior. Visualizándose así

la diferencia entre las soluciones solitarias y periódicas. Además estudiamos de forma analítica bajo que condiciones éstas se asemejan entre sí y se comprueba también por medio de las simulaciones.

# Capítulo 1

## Funciones Cnoidales

Para una buena comprensión del concepto a introducir de Función cnoidal, presentamos previamente las siguientes definiciones básicas junto con el siguiente gráfico aclaratorio

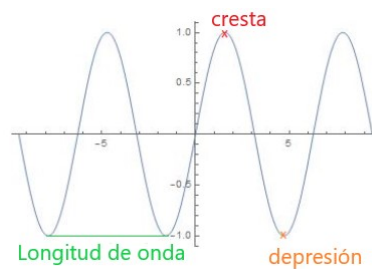


Figura 1.1: Función seno entre los puntos  $x \in [-3\pi, 3\pi]$ .

**Definición 1.0.1.** Llamamos *Onda* [1] a la propagación originada por la perturbación de alguna propiedad del espacio implicando un transporte de energía sin transporte de materia. Quedan descritas en una dimensión por la ecuación  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  (tipo hiperbólica), donde  $c$  denota la velocidad.

**Definición 1.0.2.** La *Longitud de Onda* ( $\lambda$ ) [1] es el periodo espacial de una onda periódica (ver Figura 1.1).

**Definición 1.0.3.** Las *Ondas de gravedad* [1] son aquellas producidas en un medio en el que la fuerza de la gravedad intenta restablecer el equilibrio.

**Definición 1.0.4.** Denominamos *Velocidad de Fase* [2] a la velocidad en la que la onda periódica se propaga, guardando la siguiente relación  $v_f = \frac{\lambda}{T}$ , indicando  $T$  el periodo. En el caso del seno, por ser  $\lambda = 2\pi$  su longitud de onda, su velocidad de fase será  $2\pi/T$ .

**Definición 1.0.5.** La *cresta y depresión* [1] de una onda indican su punto máximo y mínimo, respectivamente (ver Figura 1.1).

Ahora ya estamos en condiciones de centrarnos en el tema concerniente a este trabajo. La teoría acerca de las ondas cnoidales es apropiada para el estudio de aquellas ondas de gravedad superficiales cuya longitud de onda es considerablemente larga, en comparación con la profundidad de la superficie. Su solución se caracteriza por la siguiente ecuación obtenida a través de las ecuaciones de Korteweg-De Vries (KdV) en 1895 [3]

$$y_s(x, t) = -a_d + Hcn^2 \left[ 2K(k) + \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right), k \right]. \quad (1.1)$$

En la expresión (1.1)  $a_d$  expresa la distancia vertical desde el punto de equilibrio hasta la depresión de la onda.  $H$  indica la altura de la ola, si denotamos por  $y_c$  e  $y_d$  a la distancia vertical desde el fondo hasta la cresta y depresión de la onda respectivamente, entonces tenemos que  $H = y_c - y_d$ . En cuanto al término  $cn$  corresponde a la función elíptica de Jacobi y  $K(k)$  es la integral completa del primer tipo.

Con el objetivo de un análisis óptimo de la expresión (1.1) hacemos un alto introduciendo las funciones elípticas de Jacobi y sus principales propiedades.

## 1.1. Funciones elípticas de Jacobi

Mientras que las funciones trigonométricas vienen definidas refiriéndose al círculo, las de Jacobi toman la elipse como referencia, como su propio nombre indica. Las funciones principales son tres, el *seno elíptico* -  $sn(x, k)$ , *coseno elíptico* -  $cn(x, k)$  y la *amplitud delta* -  $dn(x, k)$ , donde  $sn : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e idénticamente para  $cn$  y  $dn$ . Aunque posteriormente veremos que el espacio imagen de  $sn$  y  $cn$  se restringe realmente a  $[-1, 1]$ .

**Definición 1.1.1.** Una de las formas de definir las es a través de la inversa de integrales elípticas [4][5]

$$x = \int_0^{sn(x, k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (1.2)$$

$$x = \int_{cn(x, k)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2t^2)}}, \quad (1.3)$$

$$x = \int_{dn(x, k)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 - k'^2)}}, \quad (1.4)$$

siendo  $k$  el *módulo de la función elíptica*, y  $k'$  al que denominamos *módulo complementario* que cumple

$$k' := \sqrt{1 - k^2}. \quad (1.5)$$



El resto de funciones se generan de la relación

$$fg(x, k) = \frac{fe(x, k)}{ge(x, k)} \quad f, g = s, c, d, n; \quad ff(x, k) = 1$$

Así fijando  $e = n$  obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Si } f = n ; g = s &\longrightarrow ns(x, k) = \frac{nn(x, k)}{sn(x, k)} = \frac{1}{sn(x, k)} \\ \text{Si } f = n ; g = c &\longrightarrow nc(x, k) = \frac{nn(x, k)}{cn(x, k)} = \frac{1}{cn(x, k)} \\ \text{Si } f = n ; g = d &\longrightarrow nd(x, k) = \frac{nn(x, k)}{dn(x, k)} = \frac{1}{dn(x, k)} \\ \text{Si } f = s ; g = c, d &\longrightarrow sc(x, k) = \frac{sn(x, k)}{cn(x, k)}, \quad sd(x, k) = \frac{sn(x, k)}{dn(x, k)} \\ \text{Si } f = c ; g = s, d &\longrightarrow cs(x, k) = \frac{cn(x, k)}{sn(x, k)}, \quad cd(x, k) = \frac{cn(x, k)}{dn(x, k)} \\ \text{Si } f = d ; g = s, c &\longrightarrow ds(x, k) = \frac{dn(x, k)}{sn(x, k)}, \quad dc(x, k) = \frac{dn(x, k)}{cn(x, k)}. \end{aligned}$$

**Proposición 1.1.1.** *Tenemos las siguientes identidades*

$$\begin{aligned} sn^2(x, k) + cn^2(x, k) &= 1, \\ dn^2(x, k) + k^2 sn^2(x, k) &= 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

*Demostración.* Para la primera identidad, sea  $0 \leq x \leq 1$ , denotamos  $u = sn(x, k)$ ,  $v = cn(x, k)$ . Por la definición (1.3)

$$x = \int_v^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}} = \int_1^v \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}$$

Con los cambios de variables  $\left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{1-s^2} \Rightarrow (1-t^2) = s^2 \\ -dt = \frac{sds}{\sqrt{1-s^2}} \end{array} \right\}$ , y en cuanto

a los límites de integración tendremos que  $\left\{ \begin{array}{l} t_1 = v \rightarrow s_1 = \sqrt{1-v^2} \\ t_0 = 1 \rightarrow s_0 = \sqrt{1-1^2} = 0 \end{array} \right\}$

$$= \int_0^{\sqrt{1-v^2}} \frac{\frac{sds}{\sqrt{1-s^2}}}{\sqrt{s^2(k'^2 + k^2(1-s^2))}} = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{k'^2 + k^2(1-s^2)}}.$$

Aplicando la definición del módulo complementario  $k' = \sqrt{1-k^2}$

$$= \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2 + k'^2 - (ks)^2)}} = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}.$$

Podemos observar que esta última expresión tiene el mismo integrando que el de la definición (1.2) de donde deducimos que  $u = s_1 = \sqrt{1-v^2} \Rightarrow v^2 + u^2 = 1$ , y por tanto,  $sn^2(x, k) + cn^2(x, k) = 1$ .

En cuanto a la segunda identidad, de manera análoga denotamos  $u = sn(x, k)$ ,  $v = dn(x, k)$ . Esta vez usamos la definición (1.4)

$$x = \int_v^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}} = \int_1^v \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}} =$$

Con los cambios de variables  $\left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{1-(ks)^2} \Rightarrow (1-t^2) = (ks)^2 \\ dt = -\frac{k^2 s ds}{\sqrt{1-(ks)^2}} \end{array} \right\}$ , y  
respecto a los límites de integración  $\left\{ \begin{array}{l} t_1 = v \rightarrow s_1 = \frac{1}{k}\sqrt{1-v^2} \\ t_0 = 1 \rightarrow s_0 = \frac{1}{k}\sqrt{1-1^2} = 0 \end{array} \right\}$ .

$$= \int_0^{\frac{1}{k}\sqrt{1-v^2}} \frac{\frac{k^2 s ds}{\sqrt{1-(ks)^2}}}{\sqrt{(ks)^2(1-(ks)^2-k'^2)}} = \int_0^{s_1} \frac{k ds}{\sqrt{1-(ks)^2}\sqrt{1-(ks)^2-k'^2}}.$$

Nuevamente por la definición del módulo complementario  $k' = \sqrt{1-k^2}$

$$= \int_0^{s_1} \frac{k ds}{\sqrt{(1-(ks)^2)(1-(ks)^2+k^2-k'^2)}} = \int_0^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

De forma que llegamos a una expresión con el mismo integrando que el de la definición (1.2), por tanto  $u = s_1 = \frac{1}{k}\sqrt{1-v^2} \Rightarrow k^2u^2 + v^2 = 1$ , o lo que es lo mismo,  $dn^2(x, k) + k^2sn^2(x, k) = 1$ . □

### Corolario 1.1.2.

$$sn(x, k) \in [-1, 1]; \quad cn(x, k) \in [-1, 1].$$

*Demostración.* Partiendo de la primera identidad de (1.6) expresamos

$$cn^2(x, k) = 1 - sn^2(x, k).$$

Teniendo en cuenta que se trata de un número real elevado al cuadrado podemos afirmar que  $cn^2(x, k) \geq 0$ , esto es

$$(1 - sn^2(x, k)) \geq 0 \Leftrightarrow sn^2(x, k) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq sn(x, k) \leq 1.$$

De este modo que queda demostrado que  $sn(x, k) \in [-1, 1]$ .

Y dada la simetría de la igualdad es análogo ver que  $cn(x, k) \in [-1, 1]$ . □

**Proposición 1.1.3.** *Tenemos las siguientes identidades*

$$\begin{aligned} sn(x, 0) &= \text{sen } x; & cn(x, 0) &= \text{cos } x; & dn(x, 0) &= 1; \\ sn(x, 1) &= \tanh x; & cn(x, 1) &= \text{sech } x; & dn(x, 1) &= \text{sech } x. \end{aligned} \quad (1.7)$$

*Demostración.* Demostramos la primera identidad, haciendo uso de la definición (1.2) y teniendo en cuenta que  $k = 0$

$$x = \int_0^{sn(x,0)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sen}(sn(x, 0)) - \text{arc sen}(0) = \text{arc sen}(sn(x, 0)).$$

Usando la función inversa del arc sen tenemos  $sn(x, 0) = \text{sen}(x)$ .

En cuanto a la segunda identidad, empleamos la definición (1.3) y el valor particular  $k = 0$

$$\begin{aligned} x &= \int_{cn(x,0)}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sen}(1) - \text{arc sen}(cn(x, 0)) = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen}(cn(x, 0)) \\ &\Rightarrow \text{arc sen}(cn(x, 0)) = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow cn(x, 0) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right). \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cos(b) - \text{sen}(b) \cos(a)$ , tenemos

$$cn(x, 0) = \text{sen}\frac{\pi}{2} \cos(x) - \text{sen}(x) \cos\frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos(x) - \text{sen}(x) \cdot 0 = \cos(x).$$

Y por tanto  $cn(x, 0) = \cos(x)$ , como queríamos.

Para ver la tercera igualdad basta emplear la segunda expresión de (1.6)

$$dn^2(x, k) = 1 - k^2 sn^2(x, k) \Rightarrow dn^2(x, 0) = 1 \Rightarrow dn(x, 0) = 1.$$

En cuanto a la cuarta igualdad, por la definición (1.2) y usando que el módulo toma el valor  $k = 1$

$$x = \int_0^{sn(x,1)} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{|sn(x, 1) + 1|}{|sn(x, 1) - 1|} - \ln(1) \right) \Leftrightarrow \frac{|sn(x, 1) + 1|}{|sn(x, 1) - 1|} = e^{2x}.$$

Teniendo en cuenta el Corolario 1.1.2 donde queda reflejado que  $sn(x, k) \in [-1, 1]$ , obtenemos que

$$|sn(x, 1) + 1| = 1 + sn(x, 1); \quad |sn(x, 1) - 1| = 1 - sn(x, 1).$$

De forma que, como queríamos demostrar

$$\begin{aligned} (1 - sn(x, 1))e^{2x} &= sn(x, 1) + 1 \\ sn(x, 1) &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{(e^{2x} - 1)/e^x}{(e^{2x} + 1)/e^x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x). \end{aligned}$$

Proseguimos con la quinta identidad, para ello hacemos uso de la primera igualdad de (1.6)

$$cn^2(x, k) = 1 - sn^2(x, k) \Rightarrow cn^2(x, 1) = 1 - \tanh^2(x) = sech^2(x).$$

Y deducimos así que  $cn(x, 1) = sech(x)$ .

Por último demostramos la sexta identidad haciendo uso de la segunda igualdad de (1.6)

$$dn^2(x, k) = 1 - k^2 sn^2(x, k) \Rightarrow dn^2(x, 1) = 1 - \tanh^2(x) = sech^2(x).$$

Es decir,  $dn(x, 1) = sech(x)$ .

□

Además de la demostración formal, contamos con la Figura 1.2 cuyos gráficos han sido creados con el programa *Mathematica* a través de los comandos: *JacobiSN*[ $x, k$ ], *JacobiCN*[ $x, k$ ], *JacobiDN*[ $x, k$ ], que ilustran las igualdades de la Proposición 1.1.3 para  $k$  fijo y  $x \in [-2\pi, 2\pi]$ .

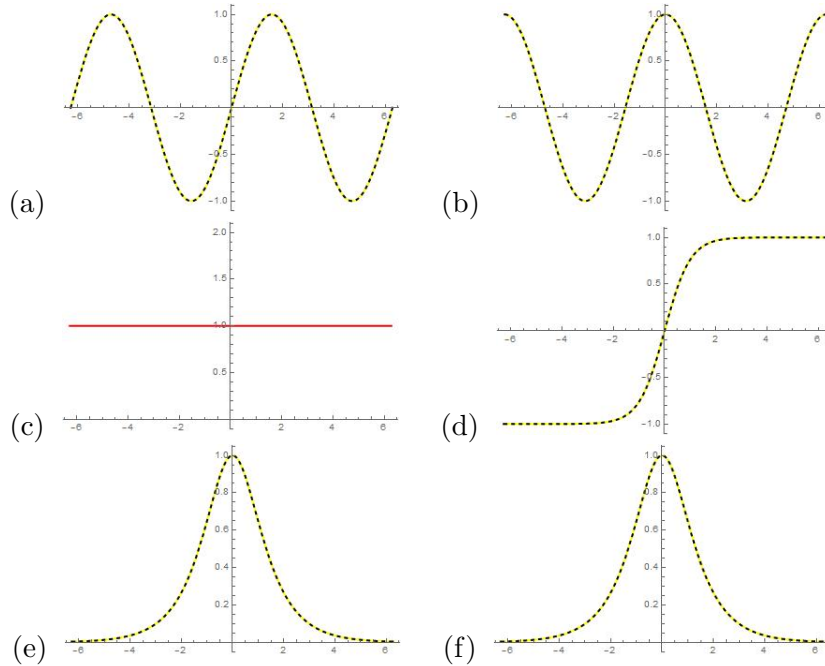


Figura 1.2: Apreciamos las igualdades (a)  $sn(x, 0) = \operatorname{sen}(x)$ , (b)  $cn(x, 0) = \operatorname{cos}(x)$ , (c)  $dn(x, 0) = 1$ ,  $sn(x, 1) = \operatorname{tanh}(x)$ , (d)  $cn(x, 1) = \operatorname{sech}(x)$  y (e)  $dn(x, 1) = \operatorname{sech}(x)$ .

También mostramos en la Figura 1.3 la evolución de las funciones  $sn(x, k)$ ,  $cn(x, k)$  y  $dn(x, k)$  para valores arbitrarios del módulo  $k$ .

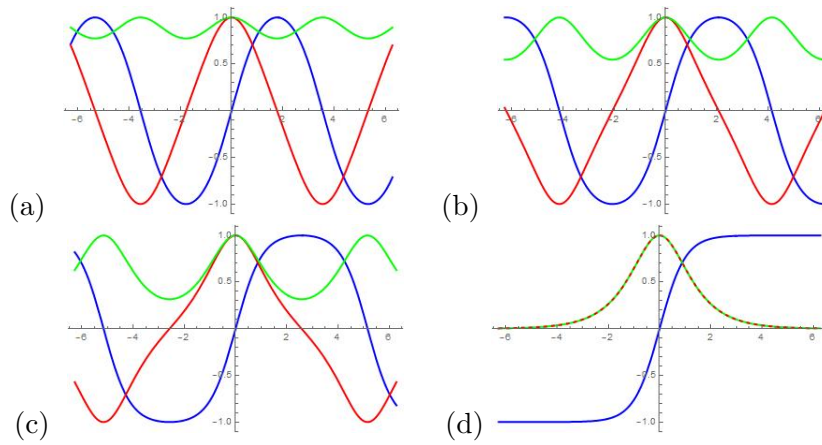


Figura 1.3: Funciones  $sn(x, k)$  (azul),  $cn(x, k)$  (rojo) y  $dn(x, k)$  (verde), para los valores particulares (a)  $k = 0.4$ , (b)  $k = 0.7$ , (c)  $k = 0.9$  y (d)  $k = 0.999999$ .

Como podemos observar para valores de  $k$  más cercanos a 0 las funciones  $sn$  y  $cn$  toman un comportamiento cercano a las funciones trigonométricas y a medida que  $k$  se acerca a 1  $cn$  y  $dn$  son prácticamente indistinguibles.

## 1.2. Fórmulas de adición-sustracción.

Una vez introducidas las funciones elípticas de Jacobi y sus propiedades básicas, nos disponemos a estudiar su comportamiento para la variación del argumento  $x$  bien a  $x + y$  o bien a  $x - y$ , mientras que el valor del módulo  $k$  se mantiene constante. Para ello nos centramos en las tres funciones principales, es decir, en  $sn(x, y)$ ,  $cn(x, y)$  y  $dn(x, y)$ .

En primer lugar introducimos el siguiente Teorema que nos proporcionará una manera sencilla de demostrar las formulas de adición-sustracción de las funciones elípticas de Jacobi.

**Teorema 1.2.1.** *Euler's Addition Theorem* \* Sea  $f(t) := (1 - t^2)(1 - k^2t^2)$ , entonces

$$\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{f(s)}} + \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{f(s)}} = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{f(s)}}; \text{ para } z = \frac{x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)}}{1 - k^2x^2y^2}.$$

\*Su demostración puede verse en [5]

**Corolario 1.2.2.**

$$\operatorname{sn}(x \pm y, k) = \frac{\operatorname{sn}(x, k)\operatorname{cn}(y, k)\operatorname{dn}(y, k) \pm \operatorname{cn}(x, k)\operatorname{dn}(x, k)\operatorname{sn}(y, k)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x, k)\operatorname{sn}^2(y, k)}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{cn}(x \pm y, k) = \frac{\operatorname{cn}(x, k)\operatorname{cn}(y, k) \mp \operatorname{sn}(x, k)\operatorname{dn}(x, k)\operatorname{sn}(y, k)\operatorname{dn}(y, k)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x, k)\operatorname{sn}^2(y, k)}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{dn}(x \pm y, k) = \frac{\operatorname{dn}(x, k)\operatorname{dn}(y, k) \mp k^2\operatorname{sn}(x, k)\operatorname{cn}(x, k)\operatorname{sn}(y, k)\operatorname{cn}(y, k)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x, k)\operatorname{sn}^2(y, k)}. \quad (1.10)$$

*Demostración.* Para la primera fórmula basta aplicar el Teorema de Euler con  $x = \operatorname{sn}(x, k)$  y  $y = \operatorname{sn}(y, k)$ . Denotando  $\operatorname{sn}(x, k) = \operatorname{sn}(x)$ , es decir olvidándonos de  $k$  para simplificar la escritura, veamos que efectivamente, usando la definición (1.2)

$$\int_0^{\operatorname{sn}(x+y)} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = x + y = \int_0^{\operatorname{sn}(x)} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} + \int_0^{\operatorname{sn}(y)} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{f(t)}},$$

para  $f(t) = (1 - t^2)(1 - k^2t^2)$ .

Aplicando el Teorema 1.2.1

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x + y) = z &= \frac{\operatorname{sn}(x)\sqrt{f(\operatorname{sn}(y))} + \operatorname{sn}(y)\sqrt{f(\operatorname{sn}(x))}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)\operatorname{sn}^2(y)} = \\ &= \frac{\operatorname{sn}(x)\sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2(y))(1 - k^2\operatorname{sn}^2(y))} + \operatorname{sn}(y)\sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2(x))(1 - k^2\operatorname{sn}^2(x))}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)\operatorname{sn}^2(y)}. \end{aligned}$$

Ahora aplicando las dos igualdades de (1.6)

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x + y) &= \frac{\operatorname{sn}(x)\sqrt{\operatorname{cn}^2(y)\operatorname{dn}^2(y)} + \operatorname{sn}(y)\sqrt{\operatorname{cn}^2(x)\operatorname{dn}^2(x)}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)\operatorname{sn}^2(y)} \\ &= \frac{\operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(y)\operatorname{dn}(y) + \operatorname{sn}(y)\operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)\operatorname{sn}^2(y)}, \end{aligned}$$

que es (1.8) con signo positivo.

Para el signo opuesto tenemos en cuenta que

$$f(-s) = (1 - (-s)^2)(1 - k^2(-s)^2) = (1 - s^2)(1 - k^2s^2) = f(s).$$

Por tanto, de manera análoga

$$\int_0^{\operatorname{sn}(x-y)} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = x - y = \int_0^{\operatorname{sn}(x)} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} + \int_0^{\operatorname{sn}(-y)} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}.$$

Aplicando el Teorema 1.2.1

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x - y) = z &= \frac{\operatorname{sn}(x)\sqrt{f(-\operatorname{sn}(y))} - \operatorname{sn}(y)\sqrt{f(\operatorname{sn}(x))}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)(-\operatorname{sn}(y))^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sn}(x)\sqrt{f(\operatorname{sn}(y))} - \operatorname{sn}(y)\sqrt{f(\operatorname{sn}(x))}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)\operatorname{sn}^2(y)} = \frac{\operatorname{sn}(x)\operatorname{cn}(y)\operatorname{dn}(y) - \operatorname{sn}(y)\operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(x)\operatorname{sn}^2(y)}, \end{aligned}$$

que es (1.8) con signo negativo.

En segundo lugar de la primera identidad de (1.6) tenemos que  $cn(x \pm y) = \sqrt{1 - sn^2(x \pm y)}$ . Entonces

$$\begin{aligned} cn^2(x \pm y) &= 1 - sn^2(x \pm y) = 1 - \left( \frac{sn(x)cn(y)dn(y) \pm cn(x)dn(x)sn(y)}{1 - k^2 sn^2(x)sn^2(y)} \right)^2 \\ &= \frac{(1 - k^2 sn^2(x)sn^2(y))^2 - (sn(x)cn(y)dn(y) \pm cn(x)dn(x)sn(y))^2}{(1 - k^2 sn^2(x)sn^2(y))^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Desarrollamos el numerador ( $\alpha^2$ )

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1 + k^4 sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2 sn^2(x)sn^2(y) - [sn^2(x)cn^2(y)dn^2(y) \\ &\quad + cn^2(x)dn^2(x)sn^2(y) \pm 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y)] \\ &= 1 + k^4 sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2 sn^2(x)sn^2(y) - sn^2(x)cn^2(y)dn^2(y) \\ &\quad - cn^2(x)dn^2(x)sn^2(y) \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y). \end{aligned}$$

Aplicando ambas identidades de (1.6) para escribir un mayor número de términos en función de  $sn$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1 + k^4 sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2 sn^2(x)sn^2(y) \\ &\quad - sn^2(x)[(1 - sn^2(y))(1 - k^2 sn^2(y))] \\ &\quad - sn^2(y)[(1 - sn^2(x))(1 - k^2 sn^2(x))] \\ &\quad \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\ &= 1 + k^4 sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2 sn^2(x)sn^2(y) \\ &\quad - sn^2(x)[1 - k^2 sn^2(y) - sn^2(y) + k^2 sn^4(y)] \\ &\quad - sn^2(y)[1 - k^2 sn^2(x) - sn^2(x) + k^2 sn^4(x)] \\ &\quad \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\ &= 1 + k^4 sn^4(x)sn^4(y) - \cancel{2k^2 sn^2(x)sn^2(y)} - sn^2(x) + \cancel{k^2 sn^2(x)sn^2(y)} \\ &\quad + sn^2(x)sn^2(y) - k^2 sn^2(x)sn^4(y) - sn^2(y) + \cancel{k^2 sn^2(x)sn^2(y)} \\ &\quad + sn^2(x)sn^2(y) - k^2 sn^4(x)sn^2(y) \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y). \end{aligned}$$

Reordenando y usando las igualdades de (1.6) cuando sea necesario

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= [1 - sn^2(x) - sn^2(y) + sn^2(x)sn^2(y)] + [sn^2(x)sn^2(y) - k^2 sn^2(x)sn^4(y) \\ &\quad - k^2 sn^4(x)sn^2(y) + k^4 sn^4(x)sn^4(y)] \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\ &= [(1 - sn^2(x))(1 - sn^2(y))] + [(sn^2(x) - k^2 sn^4(x))(sn^2(y) - k^2 sn^4(y))] \\ &\quad \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\ &= cn^2(x)cn^2(y) + [sn^2(x)(1 - k^2 sn^2(x))sn^2(y)(1 - k^2 sn^2(y))] \\ &\quad \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\ &= cn^2(x)cn^2(y) + sn^2(x)dn^2(x)sn^2(y)dn^2(y) \\ &\quad \mp 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\ &= (cn(x)cn(y) \mp sn(x)dn(x)sn(y)dn(y))^2. \end{aligned}$$

De esta manera, volviendo a la expresión completa de  $cn^2(x \pm y)$

$$cn^2(x \pm y) = \frac{(cn(x)cn(y) \mp sn(x)dn(x)sn(y)dn(y))^2}{(1 - k^2sn^2(x)sn^2(y))^2} \Rightarrow$$

$$cn(x \pm y) = \frac{cn(x)cn(y) \mp sn(x)dn(x)sn(y)dn(y)}{1 - k^2sn^2(x)sn^2(y)}.$$

Obteniendo la igualdad (1.9).

Razonando de forma análoga para  $dn$ , partimos de (1.6) teniendo en cuenta que  $dn(x \pm y) = \sqrt{1 - k^2sn^2(x \pm y)}$

$$dn^2(x \pm y) = 1 - k^2sn^2(x \pm y) = 1 - k^2 \left( \frac{sn(x)cn(y)dn(y) \pm cn(x)dn(x)sn(y)}{1 - k^2sn^2(x)sn^2(y)} \right)^2$$

$$= \frac{(1 - k^2sn^2(x)sn^2(y))^2 - k^2(sn(x)cn(y)dn(y) \pm cn(x)dn(x)sn(y))^2}{(1 - k^2sn^2(x)sn^2(y))^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Desarrollamos el numerador ( $\alpha^2$ )

$$\alpha^2 = 1 + k^4sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2sn^2(x)sn^2(y) - k^2[sn^2(x)cn^2(y)dn^2(y)$$

$$+ cn^2(x)dn^2(x)sn^2(y) \pm 2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y)]$$

$$= 1 + k^4sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2sn^2(x)sn^2(y) - k^2sn^2(x)cn^2(y)dn^2(y)$$

$$- k^2cn^2(x)dn^2(x)sn^2(y) \mp 2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y).$$

Aplicando ambas identidades de (1.6) para escribir un mayor número de términos en función de  $sn$

$$\alpha^2 = 1 + k^4sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2sn^2(x)sn^2(y)$$

$$- k^2sn^2(x)[(1 - sn^2(y))(1 - k^2sn^2(y))]$$

$$- k^2sn^2(y)[(1 - sn^2(x))(1 - k^2sn^2(x))]$$

$$\mp 2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y)$$

$$= 1 + k^4sn^4(x)sn^4(y) - 2k^2sn^2(x)sn^2(y)$$

$$- k^2sn^2(x)[1 - k^2sn^2(y) - sn^2(y) + k^2sn^4(y)]$$

$$- k^2sn^2(y)[1 - k^2sn^2(x) - sn^2(x) + k^2sn^4(x)]$$

$$\mp 2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y)$$

$$= 1 + k^4sn^4(x)sn^4(y) - \cancel{2k^2sn^2(x)sn^2(y)} - k^2sn^2(x) + k^4sn^2(x)sn^2(y)$$

$$+ \cancel{k^2sn^2(x)sn^2(y)} - k^4sn^2(x)sn^4(y) - k^2sn^2(y) + k^4sn^2(x)sn^2(y)$$

$$+ \cancel{k^2sn^2(x)sn^2(y)} - k^4sn^4(x)sn^2(y) \mp 2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y).$$

Reordenando y usando las igualdades de (1.6) cuando sea necesario

$$\alpha^2 = [1 - k^2sn^2(x) - k^2sn^2(y) + k^4sn^2(x)sn^2(y)] + k^4[sn^2(x)sn^2(y)$$

$$- sn^2(x)sn^4(y) - sn^4(x)sn^2(y) + sn^4(x)sn^4(y)]$$

$$\mp 2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y)$$



$$\begin{aligned}
 &= dn^2(x)dn^2(y) + k^4[sn^2(x)(1 - sn^2(x))sn^2(y)(1 - sn^2(y))] \\
 &\mp 2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\
 &= dn^2(x)dn^2(y) + k^4sn^2(x)cn^2(x)sn^2(y)cn^2(y) \\
 &\mp 2k^2sn(x)sn(y)cn(x)cn(y)dn(x)dn(y) \\
 &= (dn(x)dn(y) \mp k^2sn(x)cn(x)sn(y)cn(y))^2.
 \end{aligned}$$

De esta manera volviendo a la expresión completa de  $dn^2(x \pm y)$

$$\begin{aligned}
 dn^2(x \pm y) &= \frac{(dn(x)dn(y) \mp k^2sn(x)cn(x)sn(y)cn(y))^2}{(1 - k^2sn^2(x)sn^2(y))^2} \Rightarrow \\
 dn(x \pm y) &= \frac{dn(x)dn(y) \mp k^2sn(x)cn(x)sn(y)cn(y)}{1 - k^2sn^2(x)sn^2(y)}.
 \end{aligned}$$

Obteniendo así la igualdad (1.10). □

### 1.3. Derivadas de las funciones elípticas de Jacobi.

A continuación tratamos la derivación de las funciones elípticas de Jacobi. Una vez más para su demostración nos basaremos en las propiedades principales de la primera sección del capítulo.

**Proposición 1.3.1.** *Para las principales funciones elípticas de Jacobi obtenemos sus derivadas*

$$\frac{d}{dx}(sn(x, k)) = cn(x, k)dn(x, k), \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dx}(cn(x, k)) = -sn(x, k)dn(x, k), \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dx}(dn(x, k)) = -k^2sn(x, k)cn(x, k). \quad (1.13)$$

*Demostración.* Para la demostración de las igualdades debemos en primer lugar tener en cuenta la siguiente consecuencia del *Teorema Fundamental del Cálculo Integral* al que designamos por *TFCI*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad a \in \mathbb{R}.$$

Si denotamos  $\left\{ \begin{array}{l} x = F(x) \\ \int_0^{sn(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = G(sn(x,k)) = G(g(x)) \end{array} \right\}$  por la definición (1.2) tenemos que

$$F(x) = G(g(x)).$$

Diferenciamos cada parte de la identidad de manera individual.

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1.$$

Por otro lado, aplicamos la regla de la cadena para  $G(g(x))$

$$\frac{d}{dx}[G(g(x))] = \frac{d}{dx}G(g(x))\frac{d}{dx}g(x).$$

Aplicando el *TFCI* y usando las igualdades de (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[G(g(x))] &= \frac{1}{\sqrt{1 - sn^2(x, k)}\sqrt{1 - k^2 sn^2(x, k)}} \frac{d}{dx}(sn(x, k)) \\ &= \frac{1}{cn(x, k)dn(x, k)} \frac{d}{dx}(sn(x, k)). \end{aligned}$$

De esta forma ya que  $F(x) = G(g(s)) \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}[G(g(x))]$ , es decir,

$$1 = \frac{1}{cn(x, k)dn(x, k)} \frac{d}{dx}(sn(x, k)) \Rightarrow \frac{d}{dx}(sn(x, k)) = cn(x, k)dn(x, k).$$

Obteniendo la identidad (1.11).

Para demostrar (1.12) basta con emplear la primera identidad de (1.6), esto es, que  $cn(x, k) = \sqrt{1 - sn^2(x, k)}$ . Así

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}cn(x, k) &= \frac{d}{dx}\sqrt{1 - sn^2(x, k)} = \frac{1}{2}(1 - sn^2(x, k))^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(1 - sn^2(x, k)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{-2sn(x, k)}{\sqrt{1 - sn^2(x, k)}} \frac{d}{dx}(sn(x, k)) = -\frac{sn(x, k)}{cn(x, k)} \frac{d}{dx}(sn(x, k)). \end{aligned}$$

Aplicando (1.11) para la derivada de  $sn(x, k)$  llegamos a la expresión que buscamos

$$\frac{d}{dx}cn(x, k) = -\frac{sn(x, k)}{cn(x, k)} \cancel{cn(x, k)} dn(x, k) = -sn(x, k)dn(x, k).$$

Para terminar con (1.13) esta vez empleamos la segunda identidad de (1.6), esto es,  $dn(x, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(x, k)}$ . Así

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}dn(x, k) &= \frac{d}{dx}\sqrt{1 - k^2 sn^2(x, k)} = \frac{1}{2}(1 - k^2 sn^2(x, k))^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(1 - k^2 sn^2(x, k)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{-2k^2 sn(x, k)}{\sqrt{1 - k^2 sn^2(x, k)}} \frac{d}{dx}(sn(x, k)) = -\frac{k^2 sn(x, k)}{dn^2(x, k)} \frac{d}{dx}(sn(x, k)). \end{aligned}$$

Usando nuevamente (1.11) para la derivada de  $sn(x, k)$  tenemos la expresión deseada

$$\frac{d}{dx}dn(x, k) = -\frac{k^2 sn(x, k)}{dn(x, k)} \cancel{dn(x, k)} cn(x, k) = -k^2 sn(x, k)cn(x, k).$$

□

## 1.4. Integrales elípticas

Seguimos analizando las funciones elípticas de Jacobi y para ello pasamos a estudiar dichas funciones en valores particulares. Concretamente estos valores son las integrales elípticas de primera especie, tanto la completa como la incompleta. Además sin su comprensión sería inviable el desarrollo de ciertos aspectos del próximo capítulo.

**Definición 1.4.1.** *Integral elíptica completa de primera especie*

$$K = K(k) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (1.14)$$

**Proposición 1.4.1.** *Siendo  $K$  la integral elíptica completa de primera especie, se cumplen las siguientes identidades*

$$\operatorname{sn}(K, k) = 1; \quad \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}. \quad (1.15)$$

*Esto es,  $K(k)$  juega el papel de  $\frac{\pi}{2}$  para la función seno de Jacobi.*

*Demostración.* La primera identidad,  $\operatorname{sn}(K, k) = 1$ , es una consecuencia directa de la definición (1.2).

Veamos ahora que  $\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}$ . Nuevamente por comodidad denotamos  $\operatorname{sn}(x, k) = \operatorname{sn}(x)$ . Aplicando la fórmula (1.8)

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}\right) = \operatorname{sn}\left(K - \frac{K}{2}\right) = \frac{\operatorname{sn}(K)\operatorname{cn}(K/2)\operatorname{dn}(K/2) - \operatorname{cn}(K)\operatorname{dn}(K)\operatorname{sn}(K/2)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(K)\operatorname{sn}^2(K/2)}.$$

Teniendo en cuenta que  $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn}(K, k) = 1 \\ \operatorname{cn}(K, k) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(K, k)} = 0 \end{array} \right\}$  entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}\right) &= \frac{\operatorname{cn}(K/2)\operatorname{dn}(K/2)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2(K/2)} = \frac{\operatorname{cn}(K/2)\operatorname{dn}(K/2)}{\operatorname{dn}^2(K/2)} = \frac{\operatorname{cn}(K/2)}{\operatorname{dn}(K/2)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(K/2)}}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2(K/2)}}, \end{aligned}$$

habiendo usado (1.6). Seguimos operando elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}\right) \left(1 - k^2\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}\right)\right) &= 1 - \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}\right) \Rightarrow \\ k^2\operatorname{sn}^4\left(\frac{K}{2}\right) - 2\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}\right) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Llegamos a una ecuación bicuadrada. Resolviéndola

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k^2}}{2k^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - k^2}}{k^2}.$$

Ahora, como hemos operado elevando al cuadrado tendremos una solución extra, o lo que es lo mismo debemos descartar una solución. Veamos que al tomar la raíz positiva llegamos a una contradicción. Teniendo en cuenta que  $k^2 = 1 - k'^2$ , tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}\right) &= \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{k^2} = \frac{1 + k'}{1 - k'^2} = \frac{1 + k'}{(1 + k')(1 - k')} = \frac{1}{1 - k'} \Rightarrow \\ \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - k'}}. \end{aligned}$$

Si evaluamos la función en  $k = 0$ , entonces  $k' = \sqrt{1 - k^2}|_{k=0} = 1$ , así

$$\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \infty.$$

Pero por el Corolario 1.1.2 sabemos que  $\operatorname{sn}(x, k) \in [-1, 1]$ . Es decir, llegamos a una contradicción.

De modo que tomamos la raíz negativa. Operando

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{k^2} = \frac{1 - k'}{1 - k'^2} = \frac{1 - k'}{(1 - k')(1 + k')} = \frac{1}{1 + k'}.$$

Concluyendo así que

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}.$$

□

**Corolario 1.4.2.** *Siendo  $K$  la integral elíptica de completa de primera especie se cumplen las siguientes identidades*

$$\operatorname{cn}(K, k) = 0; \quad \operatorname{cn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1 + k'}}; \quad (1.16)$$

$$\operatorname{dn}(K, k) = k'; \quad \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2}, k\right) = \sqrt{k'}. \quad (1.17)$$

*Demostración.* Para las identidades relativas a  $\operatorname{cn}(x, k)$  basta con tener en cuenta la primera igualdad de (1.6), es decir, que  $\operatorname{cn}^2(x, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(x, k)$ . Así aplicando la Proposición 1.4.1

$$\operatorname{cn}^2(K, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(K, k) = 1 - (1)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{cn}(K, k) = 0,$$

$$\begin{aligned} cn^2\left(\frac{K}{2}, k\right) &= 1 - sn^2\left(\frac{K}{2}, k\right) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+k'}}\right)^2 = \frac{1+k'-1}{1+k'} = \frac{k'}{1+k'} \Rightarrow \\ &cn\left(\frac{K}{2}, k\right) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}, \end{aligned}$$

obteniendo ambas igualdades de (1.16).

Para las identidades relativas a  $dn(x, k)$  hacemos uso esta vez de la segunda igualdad de (1.6), es decir, usamos que  $dn^2(x, k) = 1 - k^2 sn^2(x, k)$ . Así aplicando nuevamente la Proposición 1.4.1

$$dn^2(K, k) = 1 - k^2 sn^2(K, k) = 1 - k^2 \Rightarrow dn(K, k) = \sqrt{1 - k^2} = k',$$

que es la primera identidad de (1.17).

$$\begin{aligned} dn^2\left(\frac{K}{2}, k\right) &= 1 - k^2 sn^2\left(\frac{K}{2}, k\right) = 1 - k^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+k'}}\right)^2 = \frac{1+k'-k^2}{1+k'} \\ &= \frac{(1+k') - (1+k')(1-k')}{1+k'} = \frac{(1+k')(1-1+k')}{(1+k')} = k'. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que  $k^2 = 1 - k'^2$ . Por tanto

$$dn\left(\frac{K}{2}, k\right) = \sqrt{k'},$$

obteniendo finalmente ambas igualdades de (1.17). □

Terminamos esta sección con la definición de la integral elíptica incompleta de primera especie para poder así relacionar las funciones cnoidales con las funciones trigonométricas.

**Definición 1.4.2.** *Integral elíptica incompleta de primera especie*

$$F = F(\phi, k) := \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} = \int_0^{\text{sen}(\phi)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}. \quad (1.18)$$

Tomando la segunda expresión de  $F$  es trivial ver que  $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k)$ , ya que  $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$  y la expresión (1.18) coincide con la (1.14) de la definición 1.4.1 de la integral elíptica completa de primera especie  $K$ .

A continuación introducimos la siguiente proposición que adelantamos resultará necesaria en el Capítulo 2.

**Proposición 1.4.3.** *Sea  $F(\phi, k) = x$ , entonces contamos con las siguientes relaciones*

$$\text{sen}(\phi) = sn(x, k); \quad \text{cos}(\phi) = cn(x, k).$$

*Demostración.* Efectivamente por la definición (1.2) tenemos que

$$x = \int_0^{\text{sn}(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Como por hipótesis  $F(\phi, k) = x$ , si consideramos la segunda expresión de la definición (1.18)

$$F(\phi, k) = x \Leftrightarrow \int_0^{\text{sen}(\phi)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\text{sn}(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

podemos por tanto identificar  $\text{sen}(\phi) = \text{sn}(x, k)$ , como queríamos ver.

Para el caso del coseno tenemos en cuenta que  $\text{sen}^2(\phi) = 1 - \text{cos}^2(\phi)$  y la primera igualdad de (1.6), es decir, que  $\text{sn}^2(x, k) = 1 - \text{cn}^2(x, k)$ . Así

$$\text{sen}(\phi) = \text{sn}(x, k) \Leftrightarrow 1 - \text{cos}^2(\phi) = 1 - \text{cn}^2(x, k) \Leftrightarrow \text{cos}^2(\phi) = \text{cn}^2(x, k).$$

Por lo que  $\text{cos}(\phi) = \text{cn}(x, k)$ .

□

## Capítulo 2

# Aplicaciones de las funciones cnoidales para las ecuaciones de Boussinesq y KdV

La ecuación KdV [6][7] es uno de los ejemplos típicos para modelos de solución exacta, es decir, sus soluciones pueden ser halladas de forma exacta y precisa. Fue primeramente formulada en 1895 como parte del análisis de olas en canales poco profundos. Cabe destacar que pese a recibir el nombre KdV, aparentemente fue previamente obtenida por Boussinesq (1877), de hecho, a continuación estudiaremos cómo se deduce la ecuación KdV a partir de la de Boussinesq.

Las ecuaciones de Boussinesq [7][8] aproximan el comportamiento de ondas largas. Éstas se caracterizan por el ratio  $\frac{h}{\lambda}$  pequeño, siendo  $h$  la profundidad del agua, esto es, la distancia desde el fondo hasta el punto de equilibrio de la onda (ver Figura 2.1), y  $\lambda$  la longitud de onda como de costumbre. Típicamente una onda se considera larga si cuenta con un ratio menor de  $\frac{1}{10}$ , pero existen muchas otras acotaciones en la literatura. Otra forma de caracterizarlas es a través del parámetro  $\mu = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$ , con  $\mu \ll 1$ , ya que si tomamos el ratio de  $\frac{1}{10}$  el mayor valor que alcanzará  $\mu$  es de 0.01. Otro parámetro característico de dichas ecuaciones es  $\epsilon = \frac{a_c}{h}$ , con  $a_c$  la amplitud de la elevación de la onda (ver Figura 2.1). Las ecuaciones se construyen bajo el supuesto de que  $\epsilon \sim \mu$ , o lo que es lo mismo,  $\epsilon/\mu = \mathcal{O}(1)$ , ratio al que denominamos *Parámetro de Stokes*. Adelantamos que precisamente a lo largo del capítulo nos será de gran utilidad el uso de la inversa del parámetro de Stokes la cual se denota por:

$$\nu = \frac{\mu}{\epsilon}. \quad (2.1)$$

El desarrollo de las aproximaciones de Boussinesq tiene como base la eliminación de la coordenada vertical de la ecuación del movimiento de la onda,

en su lugar consideramos  $y = \zeta(x, t)$ , esto es, la coordenada vertical está determinada por el tiempo y su situación en el eje horizontal (ver Figura 2.1). Sin embargo, sí tiene en cuenta la influencia de la aceleración vertical, de hecho las distintas aproximaciones nacen de las diversas maneras en las que se considera dicha aceleración. Teniendo  $u(x, y, t)$  un ejemplo sería considerar la velocidad en el punto de equilibrio,  $u(x, 0, t)$ , es decir, del agua en calma, otra opción es la velocidad en el fondo,  $u(x, -h, t)$ , etcétera.

En lo que sigue emplearemos los términos que se ven reflejados en la siguiente Figura.

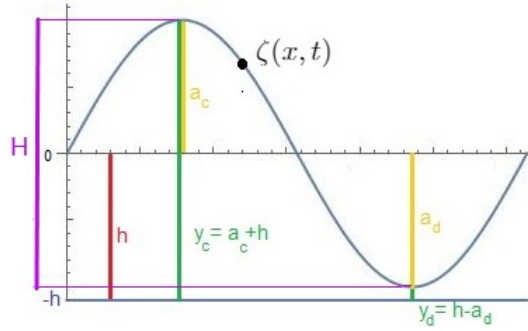


Figura 2.1: Onda periódica cuyo punto de equilibrio se sitúa en el origen.

Introducimos dos colecciones de aproximaciones de Boussinesq que serán de gran utilidad para el desarrollo del capítulo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \epsilon \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \epsilon) \tilde{u}] &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (h \tilde{u})}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $\tilde{u} = \frac{u(x, 0, t)}{\epsilon}$ ;  $\eta = \frac{\zeta(x, t)}{\epsilon}$ . Y recordando que  $\epsilon = \frac{a_c}{h}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \epsilon u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ h \frac{\partial^2 (h u_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \epsilon \eta) u_0] &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (h u_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{3} h^3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $u_0 = \frac{u(x, -h, t)}{\epsilon}$ , con  $\epsilon = \frac{a_c}{h}$  nuevamente.

**Observación 2.0.1.** Para ondas largas, que son con las que trabajamos en este capítulo, tenemos la siguiente relación:

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta(x, t).$$



**Observación 2.0.2.** En las aproximaciones previas es necesario que los términos sean adimensionales, para ello se han realizado las siguientes transformaciones:

$$x' = \frac{x}{\lambda}; \quad t' = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda}t; \quad h' = \frac{h}{h_0}; \quad u' = \frac{u}{\sqrt{gh_0}}; \quad \zeta' = \frac{\zeta}{h_0}.$$

Es decir, las ecuaciones (2.2) y (2.3) están realmente en función de  $x', t' \dots$

## 2.1. Deducción de la ecuación KdV a partir de las ecuaciones de Boussinesq

Dado que trabajaremos en este capítulo con las ecuaciones KdV y de Boussinesq, y como estas últimas son cronológicamente anteriores, veremos su estrecha relación deduciendo la ecuación KdV a partir del conjunto de ecuaciones de Boussinesq (2.2).

Las ecuaciones de Boussinesq admiten ondas propagándose en dos direcciones, como nuestro objetivo es el análisis de una única dirección de propagación especificamos esta obligando a que  $\eta$  y  $\tilde{u}$  estén en función de  $\xi = x - ct$ . Siendo  $c = v_f$ , es decir, la velocidad de fase de la definición 1.0.4, para la propagación positiva en el eje horizontal. Si además consideramos que la onda no varía excesivamente a lo largo de un periodo podemos escribir  $\eta = \eta(\xi, \tau)$  y  $u = u(\xi, \tau)$ . Donde

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \tau = \beta t \end{cases} \quad \beta \ll 1; \quad \beta \sim \epsilon. \quad (2.4)$$

Y por lo tanto

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \end{cases}$$

Si introducimos las nuevas expresiones para las derivadas parciales respecto de  $x$  y de  $t$  en el conjunto de aproximaciones (2.2) tenemos para la primera ecuación

$$\begin{aligned} \left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \tilde{u} + \epsilon \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= 0 \\ \beta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} - c \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}^2\right) + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para la segunda ecuación:

$$\left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \eta + \frac{\partial}{\partial \xi} [(h + \epsilon \eta) \tilde{u}] = -\mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 (h \tilde{u})}{\partial \xi^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \right].$$

Por la Observación 2.0.2  $h' = \frac{h}{h_0} = 1$  si suponemos  $h = h_0$ , y así

$$\beta \frac{\delta \eta}{\delta \tau} - c \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial(\eta \tilde{u})}{\partial \xi} = -\mu \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \xi^3}. \quad (2.6)$$

Sumando (2.5) y (2.6)

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial}{\partial \tau}(\tilde{u} + \eta) - c \frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{u} + \eta) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{u} + \eta) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \tilde{u}^2 + \eta \tilde{u} \right) &= -\mu \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \xi^3} \\ \beta \frac{\partial}{\partial \tau}(\tilde{u} + \eta) + (1 - c) \frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{u} + \eta) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \tilde{u}^2 + \eta \tilde{u} \right) &= -\mu \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \xi^3}. \end{aligned}$$

Asumiendo que podemos expresar la velocidad de fase como

$$c = 1 + \epsilon c_1, \quad (2.7)$$

donde  $c_1$  es una constante de orden 1. Consecuentemente  $1 - c = -\epsilon c_1$ , así obtenemos

$$\beta \frac{\partial}{\partial \tau}(\tilde{u} + \eta) - \epsilon c_1 \frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{u} + \eta) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \tilde{u}^2 + \eta \tilde{u} \right) = -\mu \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \xi^3}. \quad (2.8)$$

Podemos observar como todos los términos de la ecuación (2.8) son lineales para  $\beta$ ,  $\epsilon$  o  $\mu$ . Como tenemos  $\beta \sim \epsilon$  y hemos previamente considerado  $\epsilon \sim \mu$  entonces todos tendrán la misma magnitud. Ahora, para expresar  $\tilde{u}$  en función de  $\eta$  y viceversa, suponemos la relación de orden:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \mathcal{O}(\epsilon, \mu, \beta).$$

Integrando

$$\tilde{u} = \eta + \mathcal{O}(\epsilon, \mu, \beta). \quad (2.9)$$

Cumpléndose una de las siguientes condiciones

$$\begin{cases} \eta = 0 \Rightarrow \tilde{u} = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \eta = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \tilde{u} = 0. \end{cases}$$

De modo que si introducimos en (2.8) la expresión de  $\tilde{u}$  dada en (2.9)

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial}{\partial \tau}(2\eta) - \epsilon c_1 \frac{\partial}{\partial \xi}(2\eta) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \eta^2 \right) &= -\mu \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon, \mu, \beta) \\ 2\beta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - 2\epsilon c_1 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + 3\epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= -\mu \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon, \mu, \beta), \end{aligned}$$

dividiendo entre 2

$$\beta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \epsilon c_1 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = -\mu \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \mathcal{O}(\epsilon, \mu, \beta). \quad (2.10)$$

Debemos deshacer el cambio de variable que viene a raíz de considerar (2.4)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \\ \beta \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}. \end{cases}$$

Aplicándolo a (2.10) para que la ecuación esté en función de  $x$  y  $t$ , tenemos

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} - \epsilon c_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\mu \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}.$$

Como de (2.7) tenemos que  $c = 1 + \epsilon c_1$  entonces  $c - \epsilon c_1 = 1$ , y de este modo

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.11)$$

Llegando a la forma adimensional de la ecuación KdV.

Para obtener la forma dimensional, primero debemos tener en cuenta que como se indica en (2.2) por definición  $\eta = \frac{\zeta}{\epsilon}$ , aplicándolo a (2.11)

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0.$$

Multiplicando por  $\epsilon$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0.$$

En segundo lugar ya hemos destacado que realmente estamos trabajando con  $x'$ ,  $t'$ ,  $h'$ ... Por tanto devolvemos los términos a su forma dimensional y de nuevo tenemos en cuenta que  $h_0 = h$ . Así sabiendo también que  $\mu = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$

$$\frac{1}{h} \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{h} \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{1}{h^2} \lambda \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{h} \lambda^3 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0.$$

Multiplicando por  $\frac{h\sqrt{gh}}{\lambda}$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (2.12)$$

Siendo esta la ecuación KdV dimensional.

Si ahora queremos expresarla en términos de  $\tilde{u}$ , por la Observación 2.0.1 tenemos que  $u = \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta$ , y por tanto  $\zeta = \sqrt{\frac{h}{g}} u$

$$\sqrt{\frac{h}{g}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \sqrt{\frac{h}{g}} \sqrt{gh} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{3}{2} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} = 0.$$

Multiplicando por  $\sqrt{g/h}$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{3}{2} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{6} h^2 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} = 0. \quad (2.13)$$

## 2.2. Soluciones Onda viajera

En lo que sigue estudiaremos las soluciones de ondas viajeras a través de las expresiones adimensionales de la ecuación KdV y Boussinesq, cuya propagación es en una única dirección. Exigiremos que estas ondas sean permanentes, es decir, que su forma no varíe a lo largo de la propagación. Esto se traduce matemáticamente obligando a que  $\eta = \eta(\xi)$ , siendo una vez más  $\xi = x - ct$ . Por tanto tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -c \frac{1}{d\xi}. \quad (2.14)$$

Introducimos este cambio en la ecuación KdV (2.11) deducida anteriormente

$$-c \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{1}{6} \mu \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = (1-c) \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{1}{6} \mu \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = 0.$$

Considerando de nuevo (2.7), esto es, que  $c = 1 + \epsilon c_1 \Rightarrow (1-c) = -\epsilon c_1$

$$-\epsilon c_1 \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{1}{6} \mu \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = 0.$$

Dividimos entre  $\epsilon$  y denotamos  $\nu = \frac{\mu}{\epsilon}$  como ya se ha adelantado en (2.1)

$$-c_1 \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3}{2} \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{1}{6} \nu \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} = 0.$$

Integramos la ecuación obtenida

$$-c_1 \eta + \frac{3}{4} \eta^2 + \frac{1}{6} \nu \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = k_1 = \frac{1}{4} r, \quad (2.15)$$

siendo  $k_1$  una constante de integración que por tanto podemos expresar en función de  $r$  siendo esta última también una constante. A continuación multiplicamos por  $\frac{d\eta}{d\xi}$  y volvemos a integrar.

$$\begin{aligned} -c_1 \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3}{4} \eta^2 \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{1}{6} \nu \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{1}{4} r \frac{d\eta}{d\xi} \\ -\frac{1}{2} c_1 \eta^2 + \frac{1}{4} \eta^3 + \frac{1}{12} \nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 &= \frac{1}{4} r \eta + k_2 = \frac{1}{4} r \eta + \frac{1}{4} s, \end{aligned}$$

con  $k_2$  constante de integración. Despejando el término de la derivada

$$\frac{1}{12} \nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = -\frac{1}{4} \eta^3 + \frac{1}{2} c_1 \eta^2 + \frac{1}{4} r \eta + \frac{1}{4} s,$$

y finalmente dividiendo por 4, obtenemos la siguiente expresión para la cual  $r$  y  $s$  son constantes sin determinar

$$\frac{1}{3} \nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = -\eta^3 + 2c_1 \eta^2 + r \eta + s \equiv F(\eta). \quad (2.16)$$

La determinación de dichas constantes se obtendrá imponiendo condiciones a la solución. Si determinamos que la elevación es nula al alejarnos de la aglomeración de agua, esto se traduce como

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \eta = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\eta}{d\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0.$$

Por tanto si consideramos la expresión (2.15)

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left( -c_1\eta + \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{6}\nu \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right) = 0 = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{4}r \right) \Rightarrow r = 0.$$

Considerando ahora (2.16)

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{3}\nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right) = 0 = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} (-\eta^3 + 2c_1\eta^2 + r\eta + s) = s \Rightarrow s = 0.$$

Es decir, si exigimos que el agua esté en reposo en el infinito obtenemos que  $r = s = 0$ . A las soluciones resultantes de la ecuación (2.11) se les denomina *Ondas solitarias*.

Sin embargo imponiendo que la solución sea periódica en  $\xi$ , esto se traduce en que  $\frac{d\eta}{d\xi}$  es real y no nulo para  $\eta = 0$ . Por tanto si consideramos  $\eta = 0$  para la ecuación (2.16)

$$\frac{1}{3}\nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = s \Rightarrow s \in \mathbb{R}^+,$$

dato que  $\nu > 0$ . Es decir la constante  $s$  es un número real y positivo. A estas soluciones las denominamos *Soluciones de Ondas Cnoidales*.

A continuación estudiaremos ambas soluciones tanto para la ecuación KdV como para la de Boussinesq. Cabe destacar que esta vez, de forma contraria a cómo hemos razonado al inicio del capítulo partiremos de ecuación KdV para obtener soluciones, y posteriormente basándonos en los resultados obtenidos desarrollaremos las soluciones para las ecuaciones de Boussinesq.

### 2.2.1. Solución solitaria KdV

Partimos de la ecuación (2.16) teniendo en cuenta que  $r = s = 0$ . Así

$$\frac{1}{3}\nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = -\eta^3 + 2c_1\eta^2 = \eta^2(2c_1 - \eta) \equiv F(\eta). \quad (2.17)$$

En primer lugar observamos que si buscamos soluciones reales, necesariamente  $\frac{d\eta}{d\xi}$  ha de ser también real y estar acotado, por tanto buscamos que  $F(\eta) \geq 0$ . Estudiando las raíces de  $F(\eta)$  se nos presentan dos posibles situaciones recogidas en la Figura 2.2.

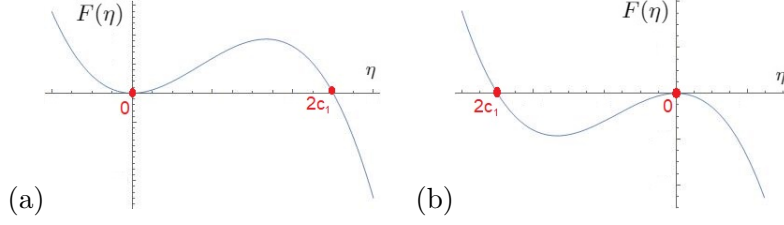


Figura 2.2: Ejemplos de la función  $F(\eta)$  con (a)  $c_1 > 0$ , y con (b)  $c_1 < 0$ .

Destacamos que hemos tenido en cuenta los límites de  $F(\eta)$ , esto es,  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F(\eta) = -\infty$  y  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} F(\eta) = \infty$ . Por tanto es evidente que al imponer que  $F(\eta)$  sea mayor que cero y acotado la única alternativa es tener  $c_1 \geq 0$ , así obteniendo la siguiente cota  $0 \leq \eta \leq 2c_1$ .

Ahora, con el objetivo de hallar soluciones realizamos el siguiente cambio de variable

$$q = \sqrt{\frac{2c_1}{\eta}} \Rightarrow \eta = \frac{2c_1}{q^2} \Rightarrow d\eta = \frac{-4c_1}{q^3} dq. \quad (2.18)$$

Introduciendo el cambio en (2.17)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \nu \frac{16c_1^2}{q^6} \left( \frac{dq}{d\xi} \right)^2 &= \frac{4c_1^2}{q^4} \left( 2c_1 - \frac{2c_1}{q^2} \right) = \frac{8c_1^3}{q^6} (q^2 - 1) \Rightarrow \\ \left( \frac{dq}{d\xi} \right)^2 &= \frac{3c_1}{2\nu} (q^2 - 1) \Rightarrow \frac{dq}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{3c_1}{2\nu} (q^2 - 1)} \Rightarrow \frac{dq}{\sqrt{q^2 - 1}} = \pm \sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} d\xi. \end{aligned}$$

Queremos integrar ambas partes de la igualdad por separado. Pero antes realizamos el siguiente cambio de variable para el término de la izquierda

$$q = \cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \Rightarrow dq = \frac{e^u - e^{-u}}{2} du = \sinh(u) du,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} q^2 - 1 &= \cosh^2(u) - 1 = \frac{(e^u + e^{-u})^2}{4} - 1 = \frac{e^{2u} + e^{-2u} + 2 - 4}{4} \\ &= \frac{e^{2u} + e^{-2u} - 2}{4} = \frac{(e^u - e^{-u})^2}{4} = \sinh^2(u). \end{aligned}$$

Así si integramos aplicando este cambio y deshaciéndolo posteriormente

$$\int \frac{dq}{\sqrt{q^2 - 1}} = \int \frac{\sinh(u)}{\sqrt{\sinh^2(u)}} du = \int du = u = \operatorname{arccosh}(q).$$

Si ahora integramos el término de la derecha:

$$\int \pm \sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} d\xi = \pm \sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \int d\xi = \pm \sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \xi.$$

Consideramos la ecuación al completo y aplicamos que  $\cosh(x) = \cosh(-x)$

$$\operatorname{arccosh}(q) = \pm \sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \xi \Rightarrow q = \cosh\left(\pm \sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \xi\right) = \cosh\left(\sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \xi\right).$$

Deshaciendo el cambio realizado en (2.18) obtenemos

$$q = \sqrt{\frac{2c_1}{\eta}} = \cosh\left(\sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \xi\right),$$

y despejando

$$\eta(\xi) = 2c_1 \cosh^{-2}\left(\sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \xi\right) = 2c_1 \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3c_1}{2\nu}} \xi\right). \quad (2.19)$$

Para terminar como sabemos que  $\eta$  está acotada superiormente por  $2c_1$  y  $H = y_c - y_d = a_c + a_d$  es la altura de la ola, tenemos que  $H = 2c_1$ . Por tanto dado que  $c = 1 + \epsilon c_1$

$$2c = 2 + 2\epsilon c_1 = 2 + \epsilon H \Rightarrow c = 1 + \frac{1}{2}\epsilon H.$$

Y para la identidad (2.19), si denotamos

$$\Delta = \sqrt{\frac{2\nu}{3c_1}} = \sqrt{\frac{4\nu}{6c_1}} = \sqrt{\frac{4\nu}{3H}} \quad (2.20)$$

$$\eta(\xi) = \eta(x - ct) = H \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - ct}{\Delta}\right). \quad (2.21)$$

Siendo esta la solución adimensional de onda solitaria para la ecuación KdV.

### 2.2.2. Solución solitaria de Boussinesq

Dado que se emplean ecuaciones adimensionales queremos trabajar del mismo modo con las ecuaciones de Boussinesq. Para ello partimos del conjunto de ecuaciones (2.3) introducidas al comienzo del capítulo. En primer lugar debemos tener en cuenta que al trabajar considerando el fondo horizontal podemos aproximar  $h = 1$ . De forma que las ecuaciones (2.3) quedan transformadas del siguiente modo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial u_0^2}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \epsilon \eta) u_0] &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}.\end{aligned}$$

Derivando ahora la primera ecuación respecto de  $x$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial t}. \quad (2.22)$$

Por el contrario derivamos la segunda ecuación respecto de  $t$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 (u_0 \eta)}{\partial x \partial t} = \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial t}. \quad (2.23)$$

Ahora restando (2.23) menos (2.22) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial^2 (u_0 \eta)}{\partial x \partial t} - \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial x^2} &= -\frac{1}{3} \mu \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial t} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= -\epsilon \frac{\partial^2 (u_0 \eta)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^3 \partial t}.\end{aligned}$$

Asumiendo de forma análoga a (2.9) y con el objetivo de tener la expresión completa en función de  $\eta$  que  $u_0 = \eta + \mathcal{O}(\epsilon, \mu, \beta)$ . Afectando esto idénticamente tanto a las derivadas respecto de  $x$  como respecto de  $t$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\epsilon \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^3 \partial t}. \quad (2.24)$$

Teniendo presente de nuevo que  $c = 1 + \epsilon c_1$  y que a raíz del cambio de variable expresado en (2.4) hemos obtenido la siguiente relación

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -(1 + \epsilon c_1) \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{O}(\epsilon, \beta).$$

Aplicando dicha relación a la parte derecha de la igualdad (2.24)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \epsilon \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{3}{2} \epsilon \eta^2 + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right],\end{aligned} \quad (2.25)$$

siendo esta la forma adimensional de las ecuaciones de Boussinesq (2.3).

Para la obtención de soluciones de ondas solitarias empleamos al igual que en la ecuación KdV el cambio de variable  $\xi = x - ct$  y las expresiones de las derivadas parciales que vienen expresadas en (2.14). Si consideramos este cambio en la recién obtenida ecuación (2.25) se tiene



$$c^2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = (1 - c^2) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ \frac{3}{2} \epsilon \eta^2 + \frac{1}{3} \mu \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right]$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1 - c^2) \eta + \frac{3}{2} \epsilon \eta^2 + \frac{1}{3} \mu \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right] = 0,$$

agrupando a la izquierda todos los términos de la igualdad. Posteriormente integramos

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 - c^2) \eta + \frac{3}{2} \epsilon \eta^2 + \frac{1}{3} \mu \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right] = k_1.$$

Recordando una vez más que buscamos hallar soluciones solitarias, lo que implica que  $\eta = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0$  cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , es decir, que el agua está en reposo lejos de la elevación, llegamos a que  $k_1 = 0$ . Proseguimos integrando de nuevo

$$(1 - c^2) \eta + \frac{3}{2} \epsilon \eta^2 + \frac{1}{3} \mu \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = k_2 = \frac{1}{2} \epsilon r.$$

Transformando  $k_2$  por tratarse de una constante de integración. Seguimos operando multiplicando por  $\frac{d\eta}{d\xi}$  e integrando por tercera vez

$$(1 - c^2) \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3}{2} \epsilon \eta^2 \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{1}{3} \mu \frac{d\eta}{d\xi} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \frac{1}{2} \epsilon r \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

$$\frac{1 - c^2}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \epsilon \eta^3 + \frac{1}{6} \mu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{2} \epsilon r \eta = k_3 = \frac{\epsilon}{2} s,$$

con  $k_3$  constante de integración y siendo consecuentemente  $s$  también una constante. Multiplicamos por  $\frac{2}{\epsilon}$

$$\frac{1 - c^2}{\epsilon} \eta^2 + \eta^3 + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\epsilon} \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 - r \eta = s.$$

Despejando el término de la derivada

$$\frac{1}{3} \frac{\mu}{\epsilon} \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = -\eta^3 + \frac{c^2 - 1}{\epsilon} \eta^2 + r \eta + s \equiv F(\eta).$$

Una vez más recordamos que estamos buscando soluciones solitarias por lo que  $r = s = 0$ . Dado al introducir el capítulo, en (2.1) hemos denotado el parámetro  $\nu = \frac{\mu}{\epsilon}$ , obtenemos

$$\frac{1}{3} \nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = \eta^2 \left( -\eta + \frac{c^2 - 1}{\epsilon} \right) \equiv F(\eta). \quad (2.26)$$

Buscando que  $\frac{d\eta}{d\xi}$  sea real y esté acotado, es necesario que  $F(\eta) \geq 0$  una vez más. Por tanto de forma análoga al razonamiento realizado para la solución KdV contamos con la siguiente cota  $0 \leq \eta \leq \left(\frac{c^2-1}{\epsilon}\right) = H$ .

Con el objetivo de hallar soluciones realizamos el siguiente cambio de variable análogo al realizado en (2.18)

$$q = \sqrt{\frac{H}{\eta}} \Rightarrow \eta = \frac{H}{q^2} \Rightarrow d\eta = \frac{-2H}{q^3} dq. \quad (2.27)$$

Introduciéndolo en (2.26)

$$\frac{1}{3}\nu \frac{4H^2}{q^6} \left(\frac{dq}{d\xi}\right)^2 = \frac{H^2}{q^4} \left(H - \frac{H}{q^2}\right) = \frac{H^3}{q^6} (q^2 - 1),$$

y simplificando

$$\frac{4}{3}\nu \left(\frac{dq}{d\xi}\right)^2 = H(q^2 - 1) \Rightarrow \frac{dq}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{3H}{4\nu}} \sqrt{q^2 - 1} \Rightarrow \frac{dq}{\sqrt{q^2 - 1}} = \pm \sqrt{\frac{3H}{4\nu}} d\xi.$$

Si integramos, dado que tenemos una expresión análoga a la de la ecuación KdV, repitiendo los cálculos y deshaciendo el cambio de variable (2.27) llegamos a que

$$\arccos(q) = \pm \sqrt{\frac{3H}{4\nu}} \xi \Rightarrow q = \cosh\left(\sqrt{\frac{3H}{4\nu}} \xi\right) = \sqrt{\frac{H}{\eta}}.$$

Por tanto si despejamos  $\eta$  y denotando  $\Delta = \sqrt{\frac{4\nu}{3H}}$  como en (2.20)

$$\eta(\xi) = \eta(x - ct) = H \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - ct}{\Delta}\right). \quad (2.28)$$

Como podemos observar las expresiones (2.21) y (2.28) son aparentemente idénticas, pero en realidad el término  $H$  viene dado de formas distintas y en consecuencia la velocidad  $c$ . Para la solución KdV ya hemos visto que  $c = 1 + \frac{1}{2}\epsilon H$ . Sin embargo para la de Boussinesq al determinar  $\frac{c^2-1}{\epsilon} = H$ , tenemos que  $c = \sqrt{1 + H\epsilon}$ .

Aún así vemos una vez más la estrecha relación entre ambas ecuaciones, ya no solo a la hora de construirlas sino también en las soluciones que aportan.

### 2.2.3. Soluciones periódicas KdV

Partiendo de la ecuación (2.16), la cual recordamos a continuación

$$\frac{1}{3}\nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = -\eta^3 + 2c_1\eta^2 + r\eta + s \equiv F(\eta).$$

ya hemos visto que al exigir que la solución de ésta sea periódica necesitamos que la constante  $s$  sea real y mayor que cero. Ahora, como  $F(\eta)$  es una ecuación de tercer grado contará con 3 raíces  $y_1 \geq y_2 \geq y_3$  y por tanto podemos expresar (2.16) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F(\eta) &= -\eta^3 + 2c_1\eta^2 + r\eta + s = -(\eta - y_1)(\eta - y_2)(\eta - y_3) = \\ &= -\eta^3 + \eta^2(y_1 + y_2 + y_3) - \eta(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) + y_1y_2y_3. \end{aligned}$$

De esta expresión deducimos que  $y_1y_2y_3 = s \in \mathbb{R}^+$ , presentándose así solamente tres alternativas. La primera es que todas las raíces sean reales y positivas, la segunda que una de ellas sea positiva y las dos restantes negativas y por último que dos de ellas sean complejas conjugadas y una última raíz positiva.

En primer lugar descartamos la última de las opciones puesto que buscamos soluciones reales.

Si contamos ahora con las opciones restantes, se presentan dos alternativas recogidas en la Figura 2.3. En ella, al igual que para el desarrollo de las soluciones solitarias, hemos tenido en cuenta que  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F(\eta) = -\infty$  y  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} F(\eta) = \infty$ .

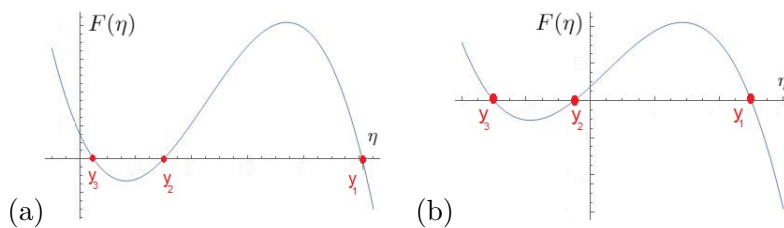


Figura 2.3: Ejemplos de la función  $F(\eta)$  con (a)  $y_1, y_2, y_3 > 0$ , y con (b)  $y_2, y_3 < 0$  y  $y_1 > 0$ .

Consideramos la primera de las opciones que corresponde al gráfico (a), esto es, que  $y_1 \geq y_2 \geq y_3 > 0$ . Como buscamos soluciones periódicas, recordamos que  $\frac{d\eta}{d\xi}$  ha de ser real deduciendo así de la ecuación (2.16) que necesariamente  $F(\eta) \geq 0$ . Ahora, como también exigimos que  $\frac{d\eta}{d\xi}$  esté acotado observando la Figura 2.3 (a) tenemos que consecuentemente  $y_2 \leq \eta \leq y_1$ .

Esto genera una contradicción ya que la elevación de la onda sería siempre positiva resultando esto físicamente imposible.

De modo que por descarte solo podemos considerar que  $F(\eta)$  tiene dos raíces negativas y una positiva, por tanto la situación es la ilustrada en la Figura 2.3 (b) y consecuentemente como  $F(\eta)$  es no negativo obtenemos la siguiente cota:  $y_2 \leq \eta \leq y_1$ . Si ahora denotamos a las raíces del siguiente modo

$$\begin{cases} y_1 = \eta_1 \\ y_2 = -\eta_2 & \eta_2 > 0 \\ y_3 = -\eta_3 & \eta_3 \geq \eta_2 > 0 \end{cases}$$

podemos reescribir  $F(\eta) = -(\eta - y_1)(\eta - y_2)(\eta - y_3) = (\eta_1 - \eta)(\eta + \eta_2)(\eta + \eta_3)$ . Además como los valores de  $\eta$  son siempre menores que  $\eta_1$ , tendremos que precisamente  $\eta_1$  corresponde a la amplitud desde el punto de equilibrio hasta la cresta de la ola, es decir, a lo que en la Figura 2.1 hemos denotado por  $a_c$ . Razonando de manera análoga,  $\eta_2$  corresponde a la amplitud de la depresión de la onda, a lo que denotamos por  $a_d$ .

Supongamos que la solución periódica de (2.16) sea de la forma

$$\eta(\xi) = \eta_1 \cos^2 \chi(\xi) - \eta_2 \sin^2 \chi(\xi). \quad (2.29)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} &= [-2\eta_1 \sin \chi(\xi) \cos \chi(\xi) - 2\eta_2 \sin \chi(\xi) \cos \chi(\xi)] \frac{d\chi}{d\xi} \\ &= -2 \sin \chi(\xi) \cos \chi(\xi) (\eta_1 + \eta_2) \frac{d\chi}{d\xi}. \end{aligned}$$

Además contamos con la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 \cos^2 \chi - \eta_2 \sin^2 \chi = \eta_1 (1 - \sin^2 \chi) - \eta_2 \sin^2 \chi = \eta_1 - (\eta_1 + \eta_2) \sin^2 \chi \\ &\Rightarrow \begin{cases} (\eta_1 - \eta) = (\eta_1 + \eta_2) \sin^2 \chi \\ (\eta + \eta_3) = (\eta_1 + \eta_3) - (\eta_1 + \eta_2) \sin^2 \chi. \end{cases} \end{aligned}$$

De la misma manera

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 \cos^2 \chi - \eta_2 \sin^2 \chi = \eta_1 \cos^2 \chi - \eta_2 (1 - \cos^2 \chi) = -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) \cos^2 \chi \\ &\Rightarrow (\eta + \eta_2) = (\eta_1 + \eta_2) \cos^2 \chi. \end{aligned}$$

Si ahora introducimos el cambio (2.29) y tenemos en cuenta las identidades recién presentadas para la ecuación (2.16) vemos que

$$\frac{1}{3} \nu \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 = F(\eta) = (\eta_1 - \eta)(\eta + \eta_2)(\eta + \eta_3)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\nu \operatorname{sen}^2 \chi \cos^2 \chi (\eta_1 + \eta_2)^2 \left( \frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 &= \\ (\eta_1 + \eta_2) \operatorname{sen}^2 \chi (\eta_1 + \eta_2) \cos^2 \chi [(\eta_1 + \eta_3) - (\eta_1 + \eta_2) \operatorname{sen}^2 \chi] & \\ \frac{4}{3}\nu \left( \frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 &= (\eta_1 + \eta_3) - (\eta_1 + \eta_2) \operatorname{sen}^2 \chi. \end{aligned}$$

Dividimos la ecuación resultante entre  $(\eta_1 + \eta_3)$

$$\frac{4}{3} \frac{\nu}{\eta_1 + \eta_3} \left( \frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 = 1 - \frac{(\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_3)} \operatorname{sen}^2 \chi.$$

Si denotamos

$$\Delta^2 = \frac{4}{3} \frac{\nu}{\eta_1 + \eta_3} \Rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\nu}{\eta_1 + \eta_3}}, \quad (2.30)$$

$$k^2 = \frac{(\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_3)}, \quad (2.31)$$

donde  $k$  ha sido elegido a propósito puesto que jugará el papel de módulo de la función elíptica de la Definición 1.1.1 del Capítulo 1. Además como sabemos que  $\eta_3 \geq \eta_2 > 0$ , es evidente que  $k^2 \in [0, 1]$ , por lo que está elegido adecuadamente. Así

$$\Delta^2 \left( \frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \chi \quad (2.32)$$

$$\Delta \frac{d\chi}{d\xi} = \pm \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \chi}$$

$$\frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \chi}} = \pm \frac{1}{\Delta} d\xi. \quad (2.33)$$

Observamos que si imponemos  $\xi = 0$  en la cresta de la ola, como  $\eta_1 = a_c$  corresponde a la amplitud en dicho punto, entonces tendremos que  $\eta(0) = \eta_1$ . Considerando el cambio realizado en (2.29)

$$\eta(0) = \eta_1 \cos^2 \chi(0) - \eta_2 \operatorname{sen}^2 \chi(0) = \eta_1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \chi(0) = 1 \\ \operatorname{sen}^2 \chi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \chi(0) = \pi k,$$

para  $k \in \mathbb{Z}$ . Nosotros trabajaremos con el valor específico  $k = 0$ .

Podemos de esta forma integrar la ecuación (2.33) de la siguiente manera

$$\int_0^{\chi(\xi)} \frac{d\chi^*}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \chi^*}} = \pm \frac{1}{\Delta} \int_0^\xi d\xi^*.$$

Observamos que el término de la izquierda corresponde a la integral elíptica incompleta de primera especie (1.18), ya definida al final del Capítulo 1. De modo que

$$F(\chi, k) = \pm \frac{\xi}{\Delta}.$$

Teniendo ahora en cuenta la Proposición 1.4.3 y la primera identidad de (1.6), tenemos

$$\begin{aligned} \cos \chi &= cn \left( \frac{\xi}{\Delta}, k \right) \\ \text{sen } \chi &= sn \left( \frac{\xi}{\Delta}, k \right) = \sqrt{1 - cn^2 \left( \frac{\xi}{\Delta}, k \right)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto como hemos supuesto que la solución es de la forma (2.29), sustituyendo en la expresión los valores del seno y del coseno recién determinados

$$\eta(\xi) = \eta_1 cn^2 \left( \frac{\xi}{\Delta}, k \right) - \eta_2 \left[ 1 - cn^2 \left( \frac{\xi}{\Delta}, k \right) \right] = -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) cn^2 \left( \frac{\xi}{\Delta}, k \right).$$

Una vez más recordando que  $-\eta_2 \leq \eta \leq \eta_1$  y que por tanto,  $\eta_1 = a_c$  y  $\eta_2 = a_d$ , claramente recordamos que  $H = a_c + a_d = \eta_1 + \eta_2$ . De modo que reescribimos

$$\eta(\xi) = -a_d + H cn^2 \left( \frac{\xi}{\Delta}, k \right). \quad (2.34)$$

En este punto debemos recordar que estamos realizando el análisis de ondas periódicas. Por tanto consideramos que  $\eta(\xi)$  cuenta con un periodo  $T$ , esto es,  $\eta(\xi) = \eta(\xi + T)$ . Nos disponemos a hallar el valor de dicho periodo, para ello en primer lugar derivamos la ecuación (2.32) obteniendo

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 \frac{d\chi}{d\xi} \left( \frac{d^2\chi}{d\xi^2} \right) &= -2k^2 \text{sen } \chi \cos \chi \frac{d\chi}{d\xi} \\ 2\Delta^2 \left( \frac{d^2\chi}{d\xi^2} \right) &= -k^2 \text{sen } 2\chi. \end{aligned}$$

Donde hemos aplicado la siguiente identidad trigonométrica

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cos(b) + \text{sen}(b) \cos(a) \Rightarrow \text{sen}(2a) = 2 \text{sen}(a) \cos(a)$$

Evidentemente como la función seno es de periodo  $2\pi$ , tenemos que la función  $\text{sen } 2\chi$  cuenta con periodo  $\pi$ . Así llegando a que  $\frac{d\chi}{d\xi}$  toma los mismos valores para un aumento de  $\pi$  para  $\chi$ , puesto que una función y su derivada cuentan con el mismo periodo. De modo que podemos integrar (2.33) con los siguientes límites de integración

$$\int_0^T \frac{1}{\Delta} d\xi = \int_0^\pi \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \chi}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \chi}}.$$

La segunda igualdad viene dada debida a la simetría de la función seno, ésta es simétrica en el intervalo  $[0, \pi]$  respecto al punto  $\frac{\pi}{2}$ . Esto es

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \quad \sin(x) &= \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \forall x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \quad 1 - k^2 \sin^2(x) &= 1 - k^2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \forall x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \quad \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}} &= \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

Así reduciendo el intervalo de integración. Podemos apreciar dicha simetría de manera gráfica a través de la Figura 2.4.

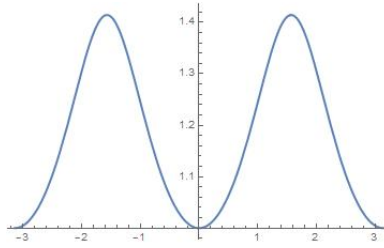


Figura 2.4: Función  $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}}$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Tomamos el valor particular del módulo  $k = 0.5$ , sin afectar esta elección a la simetría.

Si ahora analizamos el término de la derecha que se ha obtenido, apreciamos que corresponde a la integral elíptica incompleta de primera especie (1.18), esta vez para el valor particular  $\phi = \pi/2$ .

$$\frac{1}{\Delta} T = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \Leftrightarrow T = 2\Delta F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Ahora, en la Definición 1.4.2 ya quedó reflejado que para el valor particular de  $\pi/2$  la integral elíptica incompleta de primera especie, coincide con la integral elíptica completa de primera especie  $K$  de la Definición 1.4.1. Es decir, tenemos

$$T = 2\Delta K(k). \tag{2.35}$$

Introduciendo el valor del periodo en la solución (2.34)

$$\eta(\xi) = \eta(\xi + T) = -a_d + Hcn^2\left(\frac{\xi + T}{\Delta}, k\right) = -a_d + Hcn^2\left(\frac{\xi}{\Delta} + \frac{T}{\Delta}, k\right),$$

por lo tanto

$$\eta(x - ct) = -a_d + Hcn^2\left(2K(k) + \frac{x - ct}{\Delta}, k\right), \tag{2.36}$$

siendo esta la solución periódica adimensional para la ecuación KdV.

**Observación 2.2.1.** Para el desarrollo de las ondas periódicas partiendo de las ecuaciones de Boussinesq llegamos a la misma expresión. Pero al igual que en las soluciones solitarias la velocidad vendrá dada de forma diferente a la considerada en la ecuación KdV.



## Capítulo 3

# Simulaciones numéricas para la ecuación KdV

Analizaremos el comportamiento de las soluciones, tanto solitarias como periódicas, obtenidas en el Capítulo 2 para la ecuación KdV. Para ello se hace uso del programa *Mathematica*<sup>\*</sup>. implementando un método numérico que usa la denominada “*Fast Fourier Transform*” (FFT - Transformada rápida de Fourier)<sup>\*\*</sup>.

### 3.1. Soluciones solitarias

Partiendo de la expresión más típica de la ecuación KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx}, \quad (3.1)$$

contamos con las siguientes soluciones solitarias

$$u(t, x) = 3A^2 \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{A}{2}(x - x_0 - A^2 t) \right], \quad \forall A, x_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Donde  $3A^2$  corresponderá a la amplitud de la onda y  $2A^2$  a su velocidad. Pero en el Capítulo 2 a partir de las ecuaciones de Boussinesq hemos obtenido otra expresión para la ecuación KdV en su forma adimensional, con la cual hemos trabajado obteniendo las distintas soluciones. Recordamos (2.11)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

Para emplear en el programa la expresión (3.1) vemos que es equivalente a (2.11) a través del siguiente cambio de variable

$$\begin{cases} \gamma = x - t \\ \tau = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \tau}. \end{cases}$$

---

<sup>\*</sup> Consultar Apéndice B para ver el código implementado.

<sup>\*\*</sup> Consultar Apéndice A.

Ahora considerando este cambio para la ecuación (2.11) y recordando que  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \Rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} = \frac{\partial^3}{\partial \gamma^3}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} - \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^3 \eta}{\partial \gamma^3} &= 0. \\ \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \epsilon \eta \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^3 \eta}{\partial \gamma^3} &= 0 \end{aligned}$$

Obteniendo la misma expresión de (3.1) con distinta notación. Por tanto ya estamos en condiciones de implementar nuestro programa en *Mathematica* empleando la solución (3.2).

En primer lugar estudiamos el caso de una única onda solitaria.

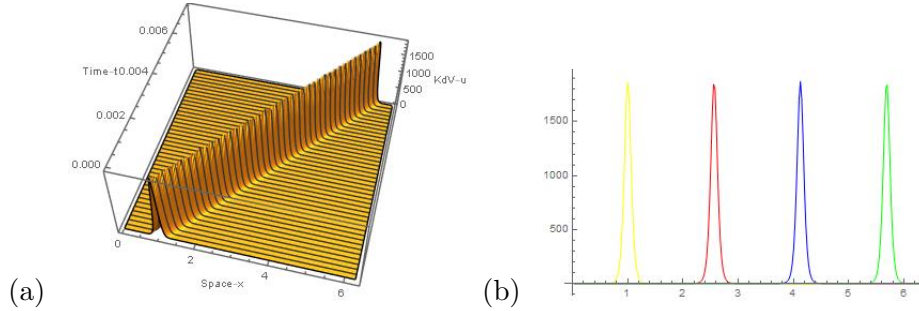


Figura 3.1: Simulación de la solución (3.2) para  $A = 25$ ,  $x_0 = 1$ .

En la imagen (a) vemos la representación tridimensional de la oscilación, mientras que en la (b) se observa el comportamiento de la oscilación para ciertos valores concretos del tiempo ( $t = 0$  - amarillo,  $t = 2.5 \times 10^{-3}$  - rojo,  $t = 5 \times 10^{-3}$  - azul,  $t = 7.5 \times 10^{-3}$  - verde). En ambas imágenes podemos apreciar como la oscilación avanza hacia la derecha, lo cual tiene sentido por ser la velocidad positiva. Además lo hace de forma imperturbable, sin generarse dispersión, lo cual es una importante característica de los solitones y más adelante veremos como esto no ocurre para las ondas periódicas.

En segundo lugar estudiamos la interacción entre dos ondas solitarias, denominadas solitones. Es decir, implementamos en el programa la solución

$$u(t, x) = 3A^2 \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{A}{2} (x - x_a - A^2 t) \right] + 3B^2 \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{B}{2} (x - x_b - B^2 t) \right], \quad (3.3)$$

donde de nuevo  $A, B, x_a, x_b \in \mathbb{R}$ . En esta segunda simulación principalmente nos interesa ver que pasa en la superposición de dos solitones, si el método numérico que hemos tomado es el apropiado, debe reproducirse un choque elástico. Esto es, después de la colisión se reproduce cada una de las crestas

de nuevo con un ligero cambio de fase sin dispersión alguna. En la imagen (a) de la Figura 3.2 vemos la evolución tridimensional de ambas oscilaciones, las dos avanzan hacia la derecha, pero al contar la primero de ellas con mayor velocidad ( $2A^2 > 2B^2$ ) se produce un choque, siendo este elástico como deseábamos. Por otro lado en la gráfica (b) podemos observar la evolución de las oscilaciones para ciertos valores particulares del tiempo ( $t = 0$  - amarillo,  $t = 3 \times 10^{-3}$  - rojo,  $t = 4 \times 10^{-3}$  - azul,  $t = 7.5 \times 10^{-3}$  - verde), apreciándose como se comporta la solución durante la colisión, y también antes y después de la misma, sin haberse generado dispersión.

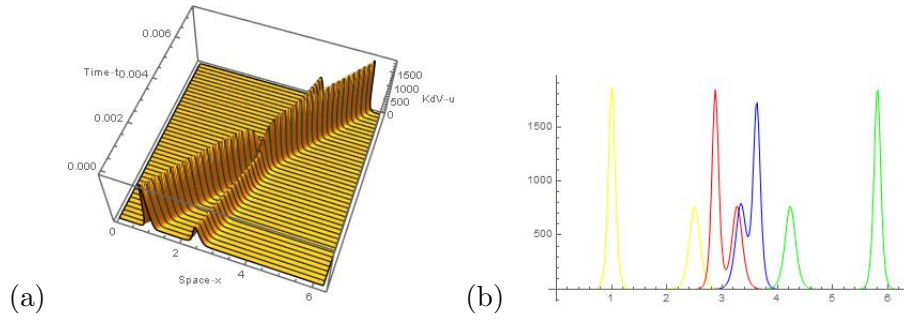


Figura 3.2: Simulación de la solución (3.3) para  $A = 25$ ,  $x_a = 1$ ,  $B = 16$ ,  $x_b = 2.5$ .

### 3.2. Soluciones periódicas

También queremos conocer la evolución de las ondas periódicas de la ecuación KdV. Ya hemos determinado en el Capítulo 2 que para la expresión adimensional (2.11) de la ecuación KdV las soluciones tipo periódicas vienen determinadas en (2.36), que recordamos que es

$$\eta(x - ct) = -a_d + Hcn^2 \left( 2K(k) + \frac{x - ct}{\Delta}, k \right),$$

con  $\Delta = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\nu}{\eta_1 + \eta_3}}$  determinada en (2.30) y  $k^2 = \frac{(\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_3)}$  determinado en (2.31). Siendo  $T = 2\Delta K(k)$  el periodo, ya establecido en (2.35).

En primer lugar, nos interesa ver que para valores del módulo  $k$  cercanos a 1 las soluciones cnoidales toman comportamientos prácticamente idénticos a los de las soluciones solitarias. Pero antes de estudiar esta propiedad a través de las simulaciones véase de forma analítica.

Comenzamos estudiando qué ocurre con la expresión del periodo. Por la Definición 1.4.1, si se evalúa la integral elíptica completa de primera especie en  $k = 1$  tenemos por la expresión (1.14) que

$$\begin{aligned}
K(1) &= \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = - \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t-1)} = \int_0^1 \frac{dt}{2(t+1)} - \int_0^1 \frac{dt}{2(t-1)} \\
&= \frac{\ln|t+1| - \ln|t-1|}{2} \Big|_0^1 = \frac{\ln|2|}{2} + \lim_{t \rightarrow 1} (-\ln|t-1|) - \frac{\ln|1|}{2} + \frac{\ln|-1|}{2}.
\end{aligned}$$

Y como  $\lim_{s \rightarrow 1} \ln(s) = \infty$  tendremos

$$K(k) \xrightarrow[k \rightarrow 1]{} \infty \quad \Rightarrow \quad T = 2\Delta K(k) \xrightarrow[k \rightarrow 1]{} \infty$$

Es decir, la solución pierde la periodicidad por lo que no debemos de considerar el periodo, aplicando esto a la ecuación (2.36) y teniendo en cuenta que en (1.7) se ha visto que  $cn(x, 1) = \operatorname{sech} x$  obtenemos

$$\eta(x-ct) = -a_d + Hcn^2 \left( 2\Delta K(k) + \frac{x-ct}{\Delta}, k \right) \approx -a_d + H \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x-ct}{\Delta} \right), \quad (3.4)$$

cuando  $k$  toma valores muy cercanos a 1. Apreciamos que la expresión resultante es aparentemente idéntica a la del solitón dada en (2.21) si tomamos  $-a_d = -\eta_2 \approx 0$ . Pero hemos de tener en cuenta que las expresiones de  $H$  y  $\Delta$  no son las mismas en (2.21) y (3.4). Denotando  $H$  por  $H'$  y  $\Delta$ , definido en (2.20), por  $\Delta'$  a los parámetros de las soluciones de onda solitaria se tiene

$$H' = 2c_1; \quad \Delta' = \sqrt{\frac{4\nu}{3H}}.$$

Para la segunda, por (2.30) y (2.31), tenemos sin embargo

$$\begin{aligned}
H &= \eta_1 + \eta_2 = \eta_1 \quad \text{por haber tomado } -a_d = 0, \\
k^2 &= \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_3} = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_3} \approx 1 \Rightarrow \eta_1 + \eta_3 = \frac{H}{k^2} \approx H, \\
\Delta &= \sqrt{\frac{4\nu}{3(\eta_1 + \eta_3)}} \approx \sqrt{\frac{4\nu}{3H}}.
\end{aligned}$$

Es decir, basta con tomar  $\eta_2 = 0$  y  $\eta_1 = 2c_1$  para tener una solución solitaria.

Procedemos analizando esta similitud por medio de simulaciones. Para ello tomamos  $\nu = 9$  en primer lugar y los valores particulares  $\eta_1 = 768$ ,  $\eta_2 = 0$  y  $\eta_3 = 1$ , consecuentemente, a través de las expresiones (2.31) y (2.35) hallamos los valores de  $k$  y del periodo respectivamente. Siendo  $k = \sqrt{\frac{768}{769}}$  y  $T \approx 1,263$ . Partiendo de la solución (2.36) e integrando en el intervalo  $[0, 3T]$  se obtiene la simulación (a) de la Figura 3.3, en ella se intuye la interacción entre tres ondas solitarias.

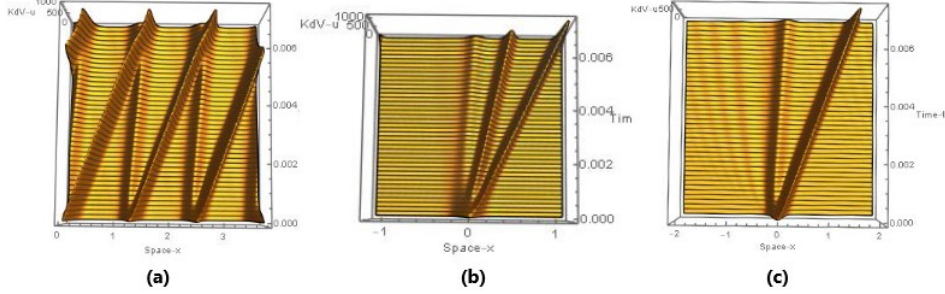


Figura 3.3: Simulaciones cnoidales para valores de  $k$  próximos a 1.

Con el objetivo de analizar mejor el comportamiento de los solitones de forma independiente, realizamos otras dos simulaciones restringiendo el intervalo de integración a  $[-T/2, T/2]$  contando así con una única cresta. Además implementamos un valor  $\eta_3$  menor y en consecuencia  $k$  es más cercano a 1, en la Figura 3.4 se recogen las simulaciones para  $k = \sqrt{\frac{768}{768+10^{-4}}}$  en (b) y  $k = \sqrt{\frac{768}{768+10^{-10}}}$  en (c).

Además para comparar la magnitud de la dispersión generada en cada caso contamos con la Figura 3.4 donde se imprimen los gráficos bidimensionales para  $t$  fijo para los mismos valores de  $k$  de la Figura 3.3. Apreciamos como cuanto más cercano a 1 es  $k$  menor es la dispersión de la elevación y por tanto más cercana es la simulación a la de un solitón que se desplazaba imperturbable. Confirmamos así los resultados obtenidos de forma teórica.

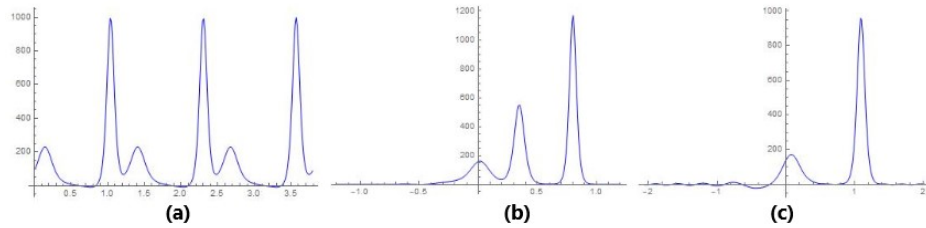


Figura 3.4: Simulaciones cnoidales en  $t = 5 \times 10^{-3}$  con  $k$  próximo a 1.

En segundo lugar hemos realizado diversas simulaciones para distintos valores de  $k$  por medio de la variación de  $\eta_3$ , obteniendo los resultados reflejados en la Figura 3.5. Las imágenes de la obtenidas son prácticamente idénticas, se aprecia tan solo un aumento mínimo de la dispersión a medida que  $k$  disminuye. Esto es debido a que hemos tomado el mismo valor de  $H$ , y pese a que el periodo varíe el intervalo de integración es para las tres simulaciones  $[0, 6T]$ .

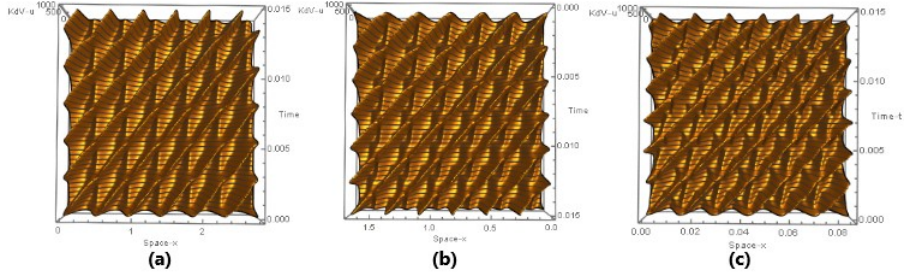


Figura 3.5: Simulaciones para (a)  $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , (b)  $k = \sqrt{\frac{1}{3}}$  y (c)  $k = \sqrt{\frac{1}{769}}$ .

Finalmente simulamos como varía el comportamiento de las perturbaciones tanto al aumentar como al disminuir  $H$ , manteniendo  $k = \sqrt{\frac{1}{3}}$  constante y así contrastando con la imagen (b) de la Figura 3.5.

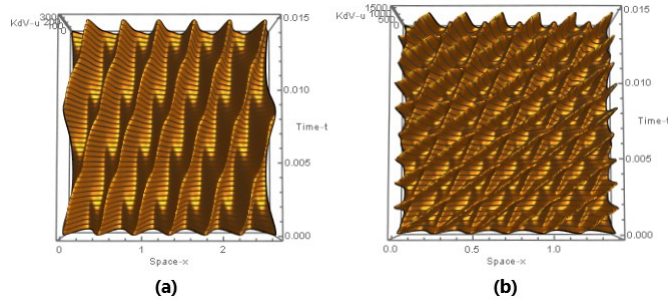


Figura 3.6: Simulaciones para (a)  $k = \sqrt{\frac{1}{3}}$  y  $H = \eta_1 = 300$ , (b)  $k = \sqrt{\frac{1}{3}}$  y  $H = \eta_1 = 1083$ .

Observándose, ahora sí, una variación en las simulaciones para distintos valores de la altura de la perturbación, mientras que la extensión del intervalo de integración es  $[0, 6T]$  una vez más.

Como comentario final y a modo de conclusión destacamos como las ondas periódicas aun tomando valores del módulo  $k$  cercanos a 1 resultan dispersivas a diferencia de las ondas solitarias que permanecen inalterables, incluso cuando colisionan entre ellas. Es decir, las soluciones de las ondas solitarias en el eje real  $x$  resultan altamente potentes a la hora de simularlas haciendo uso de un poderoso método numérico que hace uso de la FFT, frente a las ondas cnoidales. Para las primeras se hace evidente el balance entre la no linealidad ( $uu_x$ ) y la dispersión ( $u_{xxx}$ ) presente en la ecuación KdV cosa que generó el nombre de solitones. Además para las últimas ha de tenerse en cuenta la periodicidad a la hora de tomar el intervalo de integración ya que de manera contraria el programa puede fallar generándose ruido en su ejecución.

## Apéndice A

# Transformada de Fourier y el método del Factor Integral

Para el desarrollo de las simulaciones numéricas nos basamos en el método *Runge-Kutta* de orden 4 y el método del *Factor Integral* [9] (*Integrating Factor method*), combinado con el análisis de Fourier. En primer lugar, para cualquier función  $u(x) \in \mathbb{R}$  se define su *Transformada de Fourier* como sigue

$$\hat{u}(s) = (\mathcal{F}u)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x) dx. \quad (\text{A.1})$$

con  $s$  la variable de Fourier. De igual manera contamos con la inversa de la Transformada de Fourier, siendo esta

$$u(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \hat{u}(s) ds. \quad (\text{A.2})$$

Además las  $r$ -ésimas derivadas a través del análisis de Fourier vienen dadas por la expresión

$$u_{rx} = (is)^r \hat{u}. \quad (\text{A.3})$$

Vemos el desarrollo de la Transformada de Fourier para el caso particular de la ecuación KdV (3.1) la cual puede reescribirse de la forma

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x + u_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier y usando (A.3) se tiene

$$\hat{u}_t + \frac{i}{2}s\hat{u}^2 - is^3\hat{u} = 0.$$

Llegado a este punto, se aplica el método del Factor Integral.

De forma general este se aplica a ecuaciones en derivadas parciales del siguiente tipo

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x),$$

donde  $a(x)$  y  $b(x)$  son funciones continuas. Se construye de la siguiente manera el denominado el *factor integral*

$$e^{\int a(x)dx}.$$

Trasladando esto a nuestra ecuación consideramos  $\frac{dy}{dx} = \hat{u}_t$  y  $a(x) = -is^3$ . De forma que multiplicaremos a la ecuación por el factor integral  $e^{-\int is^3 dt} = e^{-is^3 t}$ . Así

$$e^{-is^3 t} \hat{u}_t + \frac{i}{2} e^{-is^3 t} s \hat{u}^2 - i e^{-is^3 t} s^3 \hat{u} = 0.$$

Si denotamos

$$\begin{aligned} \hat{U} &= e^{-is^3 t} \hat{u}, \\ \hat{U}_t &= -is^3 e^{-is^3 t} \hat{u} + e^{-is^3 t} \hat{u}_t = -is^3 \hat{U} + e^{-is^3 t} \hat{u}_t \Rightarrow \\ e^{-is^3 t} \hat{u}_t &= \hat{U}_t + is^3 \hat{U}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\hat{U}_t + is^3 \hat{U} + \frac{i}{2} e^{-is^3 t} s \hat{u}^2 - is^3 \hat{U} = 0.$$

Desapareciendo de esta manera el término lineal. Como debemos trabajar en el espacio de Fourier aplicamos (A.1) y (A.2) para  $\hat{u}^2$ . Tenemos en cuenta los dos siguientes aspectos

$$\begin{aligned} e^{is^3} \hat{U} &= e^{is^3} e^{-is^3} \hat{u} = \hat{u}, \\ \mathcal{F}^{-1} \hat{u} = u &\Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} \hat{u})^2 = \hat{u}^2. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos la siguiente expresión la cual es implementada en las simulaciones de *Mathematica*

$$\hat{U}_t + \frac{i}{2} e^{-is^3 t} s (\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(e^{is^3} \hat{U}))^2) = 0.$$



## Apéndice B

# Código en *Mathematica*

A continuación se presentan los programas de *Mathematica* empleados.

A través del primer cuaderno se han obtenido los resultados de ondas solitarias, tanto en solitario como la interacción entre dos de ellas.

En segundo lugar, se presenta el segundo cuaderno en el que se analizan las ondas cnoidales cuando el valor del módulo  $k$  tiende a 1. Apreciándose como el comportamiento se asimila al de las ondas solitarias. Este mismo cuaderno se ha empleado para valores aleatorios del módulo  $k$  modificando el mismo.

## Simulaciones ondas solitarias: CUADERNO 1

### Una sola cresta: condición inicial $u_0[x]$

### Dos crestas: condición inicial $u_1[x]$

```

In[87]:= Clear["Global`*"]
         borra

In[88]:= t0 = TimeUsed[]; (*Inicializamos el tiempo*)
         tiempo usado
NTERM = 256; (*Número de intervalos para el eje x*)
MTERM = NTERM/2;
L = 2 Pi; (*Extensión del eje x xn-x0=L=2π*)
         número pi
Δx = L / NTERM; (*Extensión de cada intervalo de x x(j+1)-xj=Δx*)
nfin = 1500; (*Número de intervalos para el eje t*)
Δt = 5 * 10^(-6); (*Extensión de cada intervalo de t t(i+1)-ti=Δt*)
tfin = Δt * nfin; (*Valor final de t *)
A = 25;
xa = 1;
B = 16;
xb = 2.5;
(*Condición inicial una cresta, t=0*)
u0[x_] := u0[x] = 3 * A^2 * Sech[(A/2) * (x - xa)]^2;
         secante hiperbólica

(*Condición inicial dos crestas, t=0*)
u01[x_] :=
  u01[x] = 3 * A^2 * Sech[(A/2) * (x - xa)]^2 + 3 * B^2 * Sech[(B/2) * (x - xb)]^2;
         secante hiperbólica         secante hiperbólica

In[95]:= (*Graficamos la Condición inicial para una cresta,
Amplitud 3A^2=3*25^2=1.875 - Posición inicial= xa=1 *)
Plot[u0[x], {x, 0, L}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick]
         representación gráfica         rango de rep... todo         estilo de repr... grueso

(*Graficamos la Condición inicial,
Primera onda: Amplitud 3A^2=3*25^2=1.875 - Posición inicial= xa=1 ,
Segunda onda: Amplitud 3B^2=3*16^2= 768 - Posición inicial= xb=2.5 *)
Plot[u01[x], {x, 0, L}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick]
         representación gráfica         rango de rep... todo         estilo de repr... grueso

```

2 | ondas\_solitarias.nb

En lo que sigue, el desarrollo del programa se lleva a cabo para una única cresta, esto es, tomando  $u_0[x]$ . Para obtener las simulaciones de dos crestas se hace de forma idéntica sustituyendo tan solo la condición inicial.

```
In[97]:= (*Inicializamos las iteraciones.
Además graficamos la condición inicial para cada xj y vemos que se satisface.
Por tanto en ese sentido el programa está funcionando bien *)
T[j_, n_] := T[j, n]
T[j_, 0] = u0[x] /. x -> j Δx;
Plot0 = ListPlot[Table[{j Δx, T[j, 0]}, {j, 1, NTERM}],
  [representar...] [tabla]
  [unido] [ver...] [rango de rep...] [todo] [estilo de repre...] [rojo] [grueso]
  Joined -> True, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Red, Thick}]

In[100]:= (*Construimos la función Fk a trozos de forma que si j <
128 toma el valor j (1,2,3,...,127)
y por el contrario si j > 128 toma el valor j-256 (-127,-126,-125,...) ,
de este modo contamos con todos los valores del intervalo [-127,127],
es decir con 255 valores*)
Fk[j_] := Piecewise[{{j, j < MTERM}, {j - NTERM, j > MTERM}}];
[función a trozos]

(*Creamos la lista Fkdata con los valores de la función Fk,
Fdatapar1 = valores de Fk[j] con j = 0,1,2,...,127 ;
Fdatapar2 = valores de Fk[j] con j = 129,130,131,...,255 ;
Fdatapar3 = añadimos el valor 0 a la Fpar1;
Fkdata = unión de la lista 3 y 2 = [-127,-126,...]*)
Fdatapar1 = Table[N[Fk[j]], {j, 0, MTERM - 1}];
[tabla] [valor numérico]
Fdatapar2 = Table[N[Fk[j]], {j, MTERM + 1, NTERM - 1}];
[tabla] [valor numérico]
Fdatapar3 = Append[Fdatapar1, 0];
[añade]
Fkdata = Join[Fdatapar3, Fdatapar2];
[junta]
ik3 = 1 I * (Fkdata^3); (*Factor de iteración FFT*)
[número i] [factoriza]
```

```

In[106]:= For[n = 1, n ≤ nfin, n++, {
  para cada
    u = Table[N[T[j, n - 1]], {j, 1, NTERM}];
      tabla | valor numérico
    v = Fourier[u, FourierParameters → {1, -1}];
      transformad... | parámetros de transformada de Fourier
    t = n * Δt;
    g = -0.5 I * Δt * Fkdata;
      número i
    EE = Exp[Δt * ik3 / 2];
      exponencial
    E2 = EE^2;
    (*Runge Kutta de orden 4*)
    a = g * Fourier[Re[InverseFourier[v, FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      transfor... | p... | transformada de Fourier | parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      parámetros de transformada de Fourier
    b = g * Fourier[Re[InverseFourier[EE * (v + a / 2), FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      transfor... | p... | transformada de Fourier discreta inversa | parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      parámetros de transformada de Fourier
    c = g * Fourier[Re[InverseFourier[EE * v + b / 2, FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      transfor... | p... | transformada de Fourier discreta inv... | parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      parámetros de transformada de Fourier
    d = g * Fourier[Re[InverseFourier[E2 * v + EE * c, FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      transfor... | p... | transformada de Fourier discreta inve... | parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      parámetros de transformada de Fourier
    v = E2 * v + (E2 * a + 2 * EE * (b + c) + d) / 6;
    IFdata = InverseFourier[v, FourierParameters → {1, -1}];
      transformada de Fourie... | parámetros de transformada de Fourier
    For[j = 1, j ≤ NTERM, j++, T[j, n] = Re[IFdata[[j]]];
      para cada | parte real
  }
}

In[107]:= (*Dibujamos una de cada 100 simulaciones pero en plots distintos*)
Table[ListPlot[Table[{Δx j, T[j, k]}, {j, 1, NTERM}],
  tabla | represent... | tabla
  Joined → True, PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "t"},
  Unido | verd... | rango de rep... | todo | etiqueta de ejes
  PlotLabel → "T[x,t], t=" <> ToString[Δt k] " k=" <> ToString[k], {k, 0, nfin, 100}
  etiqueta de representación | convierte a cadena de caract... | convierte a cadena de caracteres

In[108]:= (*Dibujamos una de cada 10 simulaciones en 3D*)
  deriva
Data3D = Table[{Δx j, 0, T[j, 0]}, {j, 1, NTERM}];
  tabla
Do[Data3D = Join[Data3D, Table[{Δx j, Δt k, T[j, k]}, {j, 1, NTERM}]], {k, 1, nfin, 10}
  repite | junta | tabla
ListPlot3D[Data3D, PlotRange → All,
  representación 3D de lista | rango de rep... | todo
  Mesh → {0, 40}, AxesLabel → {"Space-x", "Time-t", "KdV-u"}
  malla | etiqueta de ejes | espacio

```

4 | ondas\_solitarias.nb

```
In[111]:= (*Vemos la evolución 2D para los valores 0,500,1000 y 1500*)
          |deriva
Plot2 =
ListPlot[{{Table[{Δx j, T[j, 0]}, {j, 1, NTERM}], Table[{Δx j, T[j, 500]}, {j, 1, NTERM}],
|representac... |tabla |tabla
          Table[{Δx j, T[j, 1000]}, {j, 1, NTERM}], Table[{Δx j, T[j, nfin]}, {j, 1, NTERM}]},
|tabla |tabla
          Joined → True, PlotRange → All, PlotStyle → {Yellow, Red, Blue, Green}]
|unido |verd... |rango de rep... |todo |estilo de repre... |amarillo |rojo |azul |verde

In[112]:= t1 = TimeUsed[]; t1 - t0
          |tiempo usado
```

## Simulaciones ondas periódicas: CUADERNO 2.

$$k^2 = 768/769, 3 \text{ crestas}$$

```

In[ ]:= Clear["Global`*"]
borra

In[ ]:= t0 = TimeUsed[]; (*Inicializamos el tiempo*)
tiempo usado
NTERM = 256; (*Número de intervalos para el eje x*)
MTERM = NTERM/2;
nfin = 1500; (*Número de intervalos para el eje t*)
Δt = 5*10^(-6); (*Extensión de cada intervalo de t t(i+1)-ti=Δt*)
tfin = Δt*nfin; (*Valor final de t *)
A = 16;
n1 = 3*A^2;
n2 = 0; (*Lo tomamos tan pequeño que es despreciable*)
n3 = 1;
v = 9;
H1 = n1 + n2;
k1 = Sqrt[H1 / (n1 + n3)] // N
raíz cuadrada valor numérico
Δ = Sqrt[(4*k1^2*v) / (3*H1)] // N;
raíz cuadrada valor numérico
T1 = 2*Δ*EllipticK[k1] (*Periodo*)
K elíptica

In[ ]:= L = 3 T1; (*Obligamos a que esta sea la extensión
del intervalo para tener en cuenta la preiodicidad*)
Δx = L / NTERM;
u0[x_] := u0[x] = H1 * (JacobiCN[2 * EllipticK[k1] + (x / Δ), k1]) ^2;
cn de Jacobi K elíptica

(*Graficamos la condición inicial*)
Plot[u0[x], {x, 0, L}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick]
representación gráfica rango de rep... todo estilo de repre... grueso

In[ ]:= T[j_, n_] := T[j, n]
T[j_, 0] = u0[x] /. x -> j Δx;
Plot0 = ListPlot[Table[{j Δx, T[j, 0]}, {j, 1, NTERM}],
represent... tabla
Joined -> True, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Red, Thick}]
unido verd... rango de rep... todo estilo de repre... rojo grueso

```

2 | ondas\_periodicas.nb

```

In[ ]:= Fk[j_] := Piecewise[{{j, j < MTERM}, {j - NTERM, j > MTERM}}];
      |función a trozos
Fdatapar1 = Table[N[Fk[j]], {j, 0, MTERM - 1}];
      |tabla |valor numérico
Fdatapar2 = Table[N[Fk[j]], {j, MTERM + 1, NTERM - 1}];
      |tabla |valor numérico
Fdatapar3 = Append[Fdatapar1, 0];
      |añade
Fkdata = Join[Fdatapar3, Fdatapar2];
      |junta
ik3 = 1 I * (Fkdata^3);
      |número i

In[ ]:= For[n = 1, n ≤ nfin, n++, {
      |para cada
  u = Table[N[T[j, n - 1]], {j, 1, NTERM}];
      |tabla |valor numérico
  v = Fourier[u, FourierParameters → {1, -1}];
      |transformad... |parámetros de transformada de Fourier
  t = n * Δt;
  g = -0.5 I * Δt * Fkdata;
      |número i
  EE = Exp[Δt * ik3 / 2];
      |exponencial
  E2 = EE^2;
  (*Runge Kutta de orden 4*)
  a = g * Fourier[Re[InverseFourier[v, FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      |transfor... |p... |transformada de Fourier |parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      |parámetros de transformada de Fourier
  b = g * Fourier[Re[InverseFourier[EE * (v + a / 2), FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      |transfor... |p... |transformada de Fourier discreta inversa |parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      |parámetros de transformada de Fourier
  c = g * Fourier[Re[InverseFourier[EE * v + b / 2, FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      |transfor... |p... |transformada de Fourier discreta inv... |parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      |parámetros de transformada de Fourier
  d = g * Fourier[Re[InverseFourier[E2 * v + EE * c, FourierParameters → {1, -1}]]^2,
      |transfor... |p... |transformada de Fourier discreta inve... |parámetros de transformada de Fourier
      FourierParameters → {1, -1}];
      |parámetros de transformada de Fourier
  v = E2 * v + (E2 * a + 2 * EE * (b + c) + d) / 6;
  IFdata = InverseFourier[v, FourierParameters → {1, -1}];
      |transformada de Fourier |parámetros de transformada de Fourier
  For[j = 1, j ≤ NTERM, j++, T[j, n] = Re[IFdata[[j]]];
      |para cada |parte real
  }}

```

```

In[ ]:= Table[ListPlot[Table[{ $\Delta x$  * j, T[j, k]}, {j, 1, NTERM}],
  [tabla [representación 2D de lista [rango de rep... [todo [etiqueta de ejes
  Joined → True, PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "t"},
  [unido [verd... [rango de rep... [todo [etiqueta de ejes
  PlotLabel → "T[x,t], t=" <> ToString[ $\Delta t$  k] " k=" <> ToString[k]], {k, 0, nfin, 100}]
  [etiqueta de representación [convierte a cadena de caract... [convierte a cadena de caracteres

In[ ]:= Data3D = Table[{ $\Delta x$  j, 0, T[j, 0]}, {j, 1, NTERM}];
  [tabla
Do[Data3D = Join[Data3D, Table[{ $\Delta x$  j,  $\Delta t$  k, T[j, k]}, {j, 1, NTERM}]], {k, 1, nfin, 10}]
  [repite [junta [tabla
ListPlot3D[Data3D, PlotRange → All,
  [representación 3D de lista [rango de rep... [todo
  Mesh → {0, 40}, AxesLabel → {"Space-x", "Time-t", "KdV-u"}]
  [malla [etiqueta de ejes [espacio

In[ ]:= (*Vemos la evolución 2D para los valores 0,500,1000 y 1500 *)
  [deriva
Plot2 =
ListPlot[{{Table[{ $\Delta x$  j, T[j, 0]}, {j, 1, NTERM}], Table[{ $\Delta x$  j, T[j, 500]}, {j, 1, NTERM}],
  [representación 2D de lista [etiqueta de ejes [etiqueta de ejes
  Table[{ $\Delta x$  j, T[j, 1000]}, {j, 1, NTERM}], Table[{ $\Delta x$  j, T[j, nfin]}, {j, 1, NTERM}],
  [tabla [etiqueta de ejes [etiqueta de ejes
  Joined → True, PlotRange → All, PlotStyle → {Yellow, Red, Blue, Green}}]
  [unido [verd... [rango de rep... [todo [estilo de repre... [amarillo [rojo [azul [verde

In[ ]:= t1 = TimeUsed[]; t1 - t0
  [tiempo usado

```

El resto de simulaciones de ondas periódicas se han generado de forma análoga variando  $k$  a través de los valores  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  y  $\eta_3$ . También se toman distintos intervalos de integración y se aumenta la extensión de  $\Delta t$  cuando sea conveniente.



# Bibliografía

- [1] M. E. Raffino, Concepto.de, 19 de noviembre de 2020. (<https://concepto.de/onda-2/>).
- [2] Crawford Jr., Frank S. (1968). Waves (Berkeley Physics Course, Vol. 3), Chapter 4, McGraw-Hill. (<https://diegoclimbing.files.wordpress.com/2014/06/berkeley3-waves.pdf>).
- [3] R. L. Wiegel, A presentation of cnoidal wave theory for practical application, Department of Engineering, University of California, Berkeley. ([https://ceprofs.civil.tamu.edu/jkaihatu/teaching/ocen675/wiegel\\_1960.pdf](https://ceprofs.civil.tamu.edu/jkaihatu/teaching/ocen675/wiegel_1960.pdf)).
- [4] W. P. Reinhardt and P. L. Walker, Digital Library of Mathematical Functions, Chapter 22. (<https://dlmf.nist.gov/22>).
- [5] V. G. TKACHEV, Elliptic functions: Introduction course, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology. (<https://users.mai.liu.se/vlatk48/teaching/lect2-agm.pdf>)
- [6] Tian Xiang, A Summary of the Korteweg-de Vries Equation, Institute for Mathematical Sciences, Renmin University of China. ([https://www.researchgate.net/publication/277156623\\_A\\_Summary\\_of\\_the\\_Korteweg-de\\_Vries\\_Equation](https://www.researchgate.net/publication/277156623_A_Summary_of_the_Korteweg-de_Vries_Equation))
- [7] Alwyn C. Scott, The Nonlinear Universe: Chaos, Emergence, Life... Chapter 3. Springer, 2007.
- [8] M. W. Dingemans, Water wave propagation over uneven bottoms, Chapter 4 and Chapter 5. World Scientific, 1997.
- [9] Lloyd N. Trefethen, Spectral Methods in MATLAB, Chapter 10, SIAM, 2000.

\*Todos los enlaces han sido consultados a 16 de junio de 2021.

