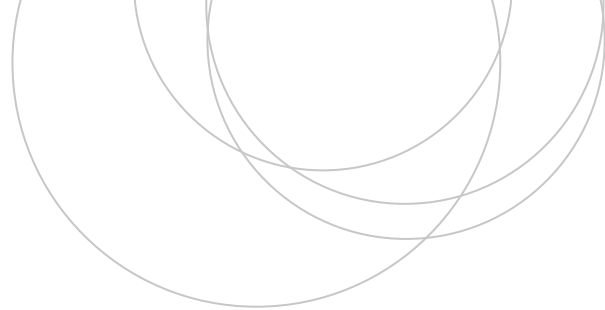




Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA



Trabajo Fin de Grado
Grado en Física

Mecánica cuántica con hamiltonianos no hermíticos

Hamiltonianos PT simétricos

Autora:
Lucía Fernández Casado
Director:
David Brizuela Cieza

© 2021, "Lucía Fernández Casado"

Leioa, 18 de junio de 2021

Resumen

En el marco de la mecánica cuántica, se han estudiado profundamente los espectros y las funciones de onda de los hamiltonianos hermíticos, ya que proporcionan un espectro de energías real y una evolución temporal unitaria. Sin embargo, en este trabajo de fin de grado se trata cierta familia de hamiltonianos no hermíticos, que ha despertado gran interés durante estas últimas décadas. En particular, se analizarán las propiedades de los hamiltonianos que presentan invariancia bajo inversiones espaciales y temporales. Se demostrará que, al igual que los hamiltonianos hermíticos, estos hamiltonianos también poseen un espectro de energía real y que determinan una evolución temporal unitaria.

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Simetría \mathcal{PT} | 2 |
| 2.1. Teorías Cuánticas | 2 |
| 2.1.1. Hermiticidad | 2 |
| 2.1.2. Unitariedad | 3 |
| 2.2. Inversión espacial | 4 |
| 2.3. Inversión temporal | 4 |
| 2.4. Hamiltonianos \mathcal{PT} simétricos | 5 |
| 3. Autovalores de un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico | 7 |
| 3.1. Ruptura de simetría \mathcal{PT} | 8 |
| 4. Partícula clásica sujeta a fuerzas complejas | 8 |
| 4.1. Oscilador armónico. Caso $\epsilon = 0$ | 9 |
| 4.2. Caso $\epsilon = 1$ | 11 |
| 4.3. Caso $\epsilon = 2$ | 12 |
| 4.4. Valores de ϵ negativos | 14 |
| 5. Condiciones de contorno y autovalores para distintas familias de hamiltonianos \mathcal{PT} simétricos | 14 |
| 5.1. Hamiltonianos del tipo $H_I = p^2 + x^2(ix)^\epsilon$, con $\epsilon > 0$ | 16 |
| 5.2. Hamiltonianos del tipo $H_{II} = p^2 + (x^2)^\delta$, $\delta > 0$ | 19 |
| 5.3. Hamiltonianos del tipo $H_{III} = p^2 - (x^2)^\mu$, $\mu > 0$ | 19 |
| 6. El caso destacable del potencial $-x^4$ | 20 |
| 6.1. Anomalía en la paridad | 22 |
| 7. Mecánica cuántica \mathcal{PT} simétrica | 23 |
| 7.1. Formalismo para una teoría cuántica definida por un hamiltoniano hermítico | 23 |
| 7.2. Formalismo para una teoría cuántica definida por un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico | 25 |
| 7.3. Comparación de ambas teorías | 28 |
| 7.4. Observables | 29 |
| 8. Ejemplo ilustrativo de una matriz 2×2 de un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico | 29 |
| 9. Conclusiones | 32 |
| A. Apéndice A: Operadores hermíticos y autoadjuntos | 33 |

1. Introducción

Como muchas áreas de investigación en ciencia, el estudio de los hamiltonianos no hermíticos comenzó de forma desordenada y difusa. En 1980, Caliceti et al. quedaron sorprendidos al encontrar autovalores reales de un hamiltoniano de un oscilador armónico con un término de interacción cúbico imaginario [1]

$$H = \hat{p}^2 + \hat{x}^2 + i\beta\hat{x}^3. \quad (1.1)$$

En 1982, Andrianov estaba haciendo estudios perturbativos de potenciales de la forma

$$H = \hat{p}^2 - \hat{x}^4,^1 \quad (1.2)$$

y obtuvo evidencias de que tales teorías podrían tener valores propios reales [2].

Hollowood y Scholtz et al. en 1992 también obtuvieron ejemplos de hamiltonianos no hermiticos con espectros reales [3,4].

En 1993, Bessis y Zinn-Justin trabajando únicamente con cálculo numérico encontraron ciertos valores reales positivos para la energía de un hamiltoniano de la siguiente forma:

$$H = \hat{p}^2 + i\hat{x}^3. \quad (1.3)$$

Por tanto, se preguntaron si todo el espectro sería real.

El campo de la mecánica cuántica con hamiltonianos no hermíticos se estableció finalmente en 1998, cuando Bender y Boettcher descubrieron que los resultados numéricos de Bessis y Zinn-Justin, además de ser válidos, eran un ejemplo de una enorme clase de hamiltonianos no hermíticos [5]. Un conjunto de problemas de autovalores de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo cuyos espectros son completamente reales y positivos. Bender y Boettcher demostraron que la causa del espectro positivo no es más que un principio de simetría, concretamente, la condición de una simetría de reflexión espacio-temporal. Esto iba a poder sustituir a la condición de la hermiticidad de Dirac (la cual más adelante analizaremos) que se conoce como:

$$H = H^{\dagger 2}. \quad (1.4)$$

El objetivo de este trabajo es introducirse en este nuevo campo de la mecánica cuántica, analizando estos estudios previos y recopilando la información, tal y como han hecho varios autores en sus artículos. Se seguirá especialmente uno de los artículos de Bender, que recopila la mayoría de sus estudios en este campo [6].

¹Al no contener la unidad imaginaria podría parecer un operador hermítico, no obstante, no es hermítico ya que hay una sutil distinción entre operador hermítico y operador autoadjunto (ver apéndice A.)

²El símbolo \dagger representa la operación conjugación hermítica.

2. Simetría \mathcal{PT}

2.1. Teorías Cuánticas

Toda teoría cuántica tiene unos axiomas fundamentales que definen y caracterizan dicha teoría. Estos axiomas son requisitos físicos que se deben cumplir. Sin embargo, uno de estos axiomas tiene más carácter matemático que físico, que será el que nos permita introducir el objetivo de este trabajo. Los principales axiomas de la mecánica cuántica son los siguientes:

- Cualquier magnitud física u observable se describe a través de un operador lineal hermítico A definido sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , cuyos vectores ψ corresponden a los posibles estados del sistema.
- Los valores que pueden tomar los observables físicos son aquellos que corresponden al espectro del operador hermítico que caracteriza dicha magnitud.
- El valor esperado de una magnitud física x es $\langle \Psi | x | \Psi \rangle$, donde $\langle \quad | \quad \rangle$ representa el producto escalar en el espacio de Hilbert.

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \psi(x) dx, \quad (2.1)$$

siendo ϕ y ψ funciones de onda arbitrarias.

- La evolución temporal de la función de onda viene dada por la ecuación de Schrödinger $\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$.

El axioma matemático al que nos referíamos con anterioridad es el primero. Al aplicarlo al operador hamiltoniano H , que representa la dinámica del sistema cuántico, este debe ser hermítico (1.4). Este principio matemático, que tal vez físicamente no sea muy evidente, nos asegura que:

1. Los valores de la energía son reales.
2. El operador de evolución temporal e^{-iHt} ³ es unitario.

2.1.1. Hermiticidad

Dado un operador A que actúa sobre las funciones de onda, definiremos el adjunto de ese operador, que escribiremos A^\dagger , y que verifica esta expresión:

$$\langle \phi | A\psi \rangle = \langle A^\dagger \phi | \psi \rangle. \quad (2.2)$$

Se denomina espectro al conjunto de sus valores propios $\{a_n\}$

$$A\phi_n = a_n\phi_n. \quad (2.3)$$

De aquí se deduce la primera consecuencia de que un operador sea hermítico. El conjunto de valores propios de un operador hermítico son reales. Estamos hablando de

³Este es operador de evolución temporal que hace evolucionar un estado en el tiempo $\psi(t) = U(t)\psi(0)$, $U(t) = e^{-iHt}$

hermiticidad porque en física se suelen tratar operadores acotados en los cuales un operador hermítico es lo mismo que uno autoadjunto, sin embargo, siendo matemáticamente rigurosos, esta demostración es cierta para operadores autoadjuntos (ver apéndice A).

Demostración: Suponiendo un operador A autoajunto con valor propio a

$$A\psi = a\psi, \quad (2.4)$$

Como A es autoadjunto,

$$\langle \psi | A\psi \rangle = \langle A\psi | \psi \rangle. \quad (2.5)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.4) se llega a que los valores propios son reales

$$a\langle \psi | \psi \rangle = a^* \langle \psi | \psi \rangle \rightarrow a = a^*. \quad (2.6)$$

Por tanto, un operador autoadjunto tiene un espectro de autovalores reales.

2.1.2. Unitariedad

La condición de unitariedad que garantiza la conservación de probabilidad se deduce de la siguiente manera. El operador de evolución temporal y su correspondiente expresión dual son:

$$U(t)|\psi(0)\rangle = |\psi(0+t)\rangle \quad y \quad \langle \psi(0)|U^\dagger(t) = \langle \psi(0+t)|. \quad (2.7)$$

Los estados normalizados en un tiempo t cualquiera cumplen

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1. \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.8) obtenemos

$$\langle \psi(0) | U^\dagger U | \psi(0) \rangle = 1. \quad (2.9)$$

Por tanto, la condición de unitariedad queda:

$$U^\dagger U = 1. \quad (2.10)$$

Que se cumple para el operador de evolución temporal planteado, ya que $H = H^\dagger$:

$$(e^{-iHt})^\dagger (e^{-iHt}) = 1. \quad (2.11)$$

Esta condición de hermiticidad limita el estudio de sistemas físicos que no presentan hermiticidad. Los sistemas físicos que no presentan hermiticidad se suelen emplear para describir procesos disipativos, como por ejemplo la desintegración radiactiva. Un hamiltoniano no hermítico, cuyo propósito es describir una partícula que sufre desintegración radiactiva, predice que la probabilidad de encontrar la partícula disminuye gradualmente en el tiempo. Como sabemos, una partícula no puede simplemente desaparecer porque esto violaría la conservación de probabilidad. Es por ello que durante muchos años se ha asumido que un hamiltoniano no hermítico, en el mejor de los casos, podría describir de manera simplificada y fenomenológica un sistema, pero nunca podría considerarse como una teoría fundamental.

En esta última década se ha demostrado que podemos sustituir la condición de hermiticidad, por una condición de simetría bajo inversión espacial y temporal. Pudiendo de esta manera describir procesos físicos con hamiltonianos no hermíticos.

2.2. Inversión espacial

El operador de inversión espacial, también llamado paridad \mathcal{P} , realiza la siguiente transformación:

$$\mathcal{P}\psi(x) = \psi(-x), \quad (2.12)$$

es decir, el cambio de signo de la coordenada espacial. En tres dimensiones, sería el cambio de signo del vector posición $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$. De modo que el nuevo valor esperado de \hat{x} es

$$\langle \psi | \mathcal{P}^\dagger \hat{x} \mathcal{P} | \psi \rangle = -\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle, \quad (2.13)$$

entonces,

$$\mathcal{P}^\dagger \hat{x} \mathcal{P} = -\hat{x}. \quad (2.14)$$

Se ve claramente que si aplicamos el operador paridad dos veces:

$$\mathcal{P}^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad \text{así que,} \quad \mathcal{P}^2 = 1 \rightarrow \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P} \quad (2.15)$$

\mathcal{P} es un operador lineal y unitario. Entonces la ecuación (2.14) se transforma en

$$\boxed{\mathcal{P} \hat{x} \mathcal{P}^{-1} = -\hat{x}.} \quad (2.16)$$

Al operador momento lineal le ocurre lo mismo porque se construye con la derivada de la coordenada espacial,

$$\boxed{\mathcal{P} \hat{p} \mathcal{P}^{-1} = -\hat{p}.} \quad (2.17)$$

2.3. Inversión temporal

El operador inversión temporal \mathcal{T} invierte el signo de la coordenada temporal, además del signo de la unidad imaginaria ya que \mathcal{T} es un operador antilineal.

$$\mathcal{T}(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha^* \mathcal{T}\psi + \beta^* \mathcal{T}\phi, \quad (2.18)$$

y por ende, antiunitario; un operador antilineal que preserva las probabilidades. La antilinealidad se puede demostrar de la siguiente manera: si el hamiltoniano es invariante bajo inversión temporal, bajo inversión temporal deberá recorrer la misma trayectoria al revés en el tiempo.



Figura 1: Estado de una partícula en $t = 0$ y $t = \delta t$.

En la Fig. 1a observamos que en $t = 0$ el estado es $|\psi\rangle$, mientras que en $t = \delta t$, considerando transformaciones infinitesimales del operador evolución temporal, será $(1 - iH\delta t) |\psi\rangle$.

En la Fig. 1b, donde hemos aplicado la inversión temporal, en $t = 0$ el estado es $\mathcal{T}|\psi\rangle$ y en $t = \delta t$ el estado será $(1 - iH\delta t)\mathcal{T}|\psi\rangle$. Si hay invariancia bajo \mathcal{T} , el estado de color rojo (evolucionado en el tiempo) debería compararse con el primer caso pero en un tiempo anterior al que luego le hemos aplicado la inversión temporal.

$$\begin{aligned}(1 - iH\delta t)\mathcal{T}|\psi\rangle &= \mathcal{T}(1 - iH(-\delta t))|\psi\rangle, \\ -iH\mathcal{T}|\psi\rangle &= \mathcal{T}iH|\psi\rangle\end{aligned}\tag{2.19}$$

Si simplificamos i como si \mathcal{T} fuese lineal llegaríamos a

$$-H\mathcal{T}|\psi\rangle = \mathcal{T}H|\psi\rangle.\tag{2.20}$$

El operador inversión temporal anticonmutaría con el hamiltoniano. Esto implicaría que el hamiltoniano no tendría cota inferior

$$\mathcal{T}H|\psi_n\rangle = -H(\mathcal{T}|\psi_n\rangle) = E_n\mathcal{T}|n\rangle.\tag{2.21}$$

Veríamos que $\mathcal{T}|n\rangle$ es autoestado de H con energía $-E_n$. Habríamos duplicado el espectro y por cada energía E_n , tendríamos su negativa. Esta situación es inaceptable físicamente ya que, como hemos dicho anteriormente, el hamiltoniano debe estar acotado inferiormente, es decir, debe existir un estado fundamental con la energía mínima posible. Se llega a la conclusión de que \mathcal{T} tiene que ser un operador antilineal.

Al igual que ocurría con \mathcal{P} :

$$\mathcal{T}^2 = 1, \quad \text{así que,} \quad \mathcal{T}^2 = 1 \rightarrow \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}.\tag{2.22}$$

Por construcción, este operador deja \hat{x} invariante pero cambia el signo de \hat{p} (ya que su expresión contiene una i : $\hat{p} = -i\frac{d}{dx}$).

$$\boxed{\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x}, \quad \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}. \quad \text{y} \quad \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i.}\tag{2.23}$$

Finalmente, \mathcal{P} y \mathcal{T} conmutan.

2.4. Hamiltonianos \mathcal{PT} simétricos

Definimos el hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico $H^{\mathcal{PT}}$ como

$$H^{\mathcal{PT}} \equiv (\mathcal{PT})^{-1}H(\mathcal{PT}),\tag{2.24}$$

donde $\mathcal{PT}^{-1} = \mathcal{PT}$, por (2.15) y (2.22). Un hamiltoniano es \mathcal{PT} simétrico si el operador \mathcal{PT} conmuta con H

$$H(\mathcal{PT}) - (\mathcal{PT})H = 0,\tag{2.25}$$

es decir, si se cumple

$$H = H^{\mathcal{PT}}.\tag{2.26}$$

Estos son ejemplos de algunos de estos hamiltonianos:

$$H = \hat{p}^2 + i\hat{x}^3 \quad \text{y} \quad H = \hat{p}^2 - \hat{x}^4.\tag{2.27}$$

Se puede comprobar fácilmente. Para el primero de ellos tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}H\mathcal{P} &= \hat{p}^2 - i\hat{x}^3 = H_1 \\ \mathcal{T}H_1\mathcal{T} &= \hat{p}^2 + i\hat{x}^3.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Y para el segundo se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}H\mathcal{P} &= \hat{p}^2 - \hat{x}^4 = H_1 \\ \mathcal{T}H_1\mathcal{T} &= \hat{p}^2 - \hat{x}^4.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Resulta sorprendente que estos hamiltonianos con esta apariencia tan extraña, tengan un espectro real y positivo de energías y una evolución temporal unitaria, a pesar de no ser hermíticos. Concretamente, estos dos hamiltonianos (2.27) son un caso especial de una familia paramétrica de hamiltonianos \mathcal{PT} simétricos

$$H = \hat{p}^2 + \hat{x}^2(i\hat{x})^\epsilon,\tag{2.30}$$

donde el parámetro ϵ es real. Estos hamiltonianos son una extensión compleja del oscilador armónico convencional

$$H = \hat{p}^2 + \hat{x}^2.\tag{2.31}$$

Para la construcción de esta familia de hamiltonianos se parte de hamiltonianos que cumplen la condición de hermiticidad y de simetría \mathcal{PT} , como por ejemplo:

$$H = \hat{p}^2 + \hat{x}^{2N}. \quad \text{donde } N = 1, 2, 3...\tag{2.32}$$

Y después se introduce el parámetro real ϵ que, a medida que aumente de 0, deja de ser hermítico pero mantiene la simetría \mathcal{PT} . Estos hamiltonianos son \mathcal{PT} simétricos porque cumplen la condición (2.26). En 1998 se demostró que cuando $\epsilon \geq 0$ todos los autovalores son reales y positivos. En cambio, cuando $\epsilon < 0$ los autovalores son complejos.

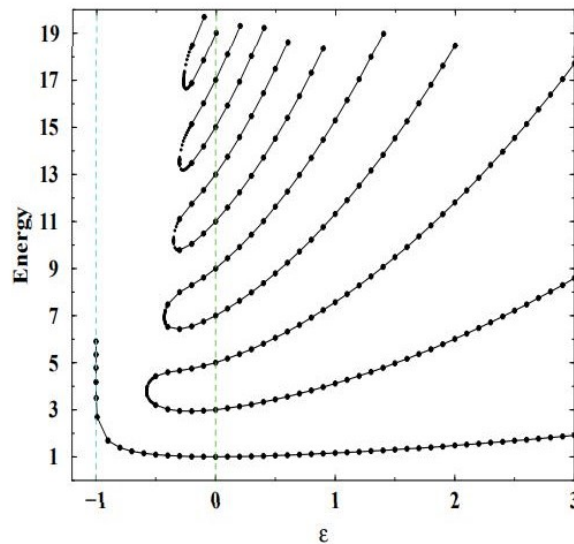


Figura 2: Niveles de energía del hamiltoniano $H = \hat{p}^2 + \hat{x}^2(i\hat{x})^\epsilon$ en función del parámetro ϵ . Se distinguen 3 regiones. Para $\epsilon > 0$ el espectro es real y positivo y los niveles de energía aumentan al aumentar ϵ ($\epsilon = 0$ corresponde al caso del oscilador armónico). Cuando $-1 < \epsilon < 0$ hay un número finito de valores propios positivos reales y un número infinito de pares complejos conjugados. A medida que ϵ disminuye de 0 a -1 , el número de valores propios reales disminuye; cuando $\epsilon \leq -0,57793$, el único valor propio real de la energía es el estado fundamental. A medida que ϵ se aproxima a -1^+ , la energía del estado fundamental diverge. Para $\epsilon \leq -1$ no hay valores propios reales [6].

Esto nos muestra que no es suficiente con que el hamiltoniano sea \mathcal{PT} simétrico para que los autovalores sean reales, ya que para $\epsilon < 0$ no ocurre así. Esto se debe a que el operador \mathcal{PT} no es lineal, lo que se explicará en la Subsec. 3.1.

3. Autovalores de un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico

Antes de intentar determinar los autovalores de un hamiltoniano de esta clase, vamos a empezar por explicar de qué manera el operador hamiltoniano define y determina las propiedades físicas de una teoría cuántica [6].

- I. *El hamiltoniano cuántico H es el observable que representa la energía total del sistema.* Los posibles valores de la energía de un sistema físico vienen dados por los valores propios del operador hamiltoniano (ecuación de Schrödinger independiente del tiempo):

$$H\psi = E\psi. \quad (3.1)$$

Esta ecuación toma la forma de una ecuación diferencial, que se deberá resolver con las adecuadas condiciones de contorno.

- II. *La evolución temporal de los estados cuánticos se obtiene a partir del hamiltoniano, resolviendo la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo*

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H\psi(t). \quad (3.2)$$

En los casos en los que H es independiente del tiempo, se llega a

$$\psi(t) = e^{-iHt}\psi(0). \quad (3.3)$$

Llamamos a e^{-iHt} operador de evolución temporal. Como se ha demostrado en el apartado 2.1.2, la hermiticidad del hamiltoniano asegura que este operador sea unitario. Como consecuencia, la norma del estado $\psi(t)$ permanece constante, es decir, se conserva la probabilidad. En un hamiltoniano no hermítico, pero sí \mathcal{PT} simétrico, como con los que vamos a trabajar, la norma de los estados permanecerá también constante en el tiempo.

- III. *El hamiltoniano lleva consigo las simetrías del sistema.* Para que el hamiltoniano sea invariante bajo cierta transformación de simetría, estos operadores deben conmutar.

Demostración Supongamos un operador unitario A . Si el sistema queda invariante ante la transformación, entonces el estado

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = A|\psi(t)\rangle \quad (3.4)$$

debe satisfacer la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo si $|\psi(t)\rangle$ la cumple:

$$i\frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} = H|\tilde{\psi}(t)\rangle \iff i\frac{dA|\psi(t)\rangle}{dt} = HA|\psi(t)\rangle = Ai\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = HA|\psi(t)\rangle. \quad (3.5)$$

Multiplicando esta expresión por A^{-1} se llega a

$$i\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = A^{-1}HA|\psi(t)\rangle. \quad (3.6)$$

Por tanto, para que se cumpla la ecuación de Schrödinger, A y H deben conmutar.

$$\begin{aligned} HA &= AH \\ [A, H] &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como ejemplo, supongamos el operador paridad \mathcal{P} , que conmuta con H , diríamos que el hamiltoniano es invariante bajo paridad. Al conmutar, los operadores tienen un conjunto de autoestados comunes y como \mathcal{P} es lineal, los autoestados del hamiltoniano lo serán también del operador paridad. No obstante, con el operador \mathcal{PT} es más complicado, ya que no es un operador lineal, en consecuencia, no podemos asegurar que los autoestados de H sean autoestados de \mathcal{PT} . Aquí es donde entra en juego la ruptura de simetría \mathcal{PT} .

3.1. Ruptura de simetría \mathcal{PT}

La región de simetría \mathcal{PT} no rota será la región donde los autoestados del hamiltoniano sean también los del operador \mathcal{PT} , por el contrario, la región \mathcal{PT} rota será la región donde no coincidan. Basándonos en los resultados de la Fig. 2, buscaremos ambas regiones.

Demostración: Supongamos que un autoestado ψ del hamiltoniano es también autoestado del operador \mathcal{PT} . Partimos de la ecuación de autovalores siguiente:

$$\mathcal{PT}\psi = \lambda\psi. \tag{3.8}$$

Multiplicando por \mathcal{PT} y usando que $(\mathcal{PT})^2 = \mathbf{1}$ (2.15) y (2.22):

$$\psi = (\mathcal{PT})\lambda(\mathcal{PT})^2\psi. \tag{3.9}$$

Como \mathcal{T} es antilineal:

$$\psi = \lambda^* \lambda \psi = |\lambda|^2 \psi \rightarrow |\lambda|^2 = 1 \rightarrow \lambda = e^{i\alpha}. \tag{3.10}$$

Repetimos el mismo procedimiento en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo (3.1) y se llega a que $E = E^*$

$$E\lambda\psi = E^*\lambda\psi, \tag{3.11}$$

que no es cierto en un caso general. Para el hamiltoniano dado en (2.30) es cierto en la región donde $\epsilon \geq 0$. Únicamente si estamos en esa región, los autoestados del hamiltoniano serán los autoestados del operador \mathcal{PT} y tendrá todos sus autovalores reales. Es por esto que vamos a llamar a la región $\epsilon \geq 0$ región de simetría \mathcal{PT} no rota, y a la región donde $\epsilon < 0$, región de simetría \mathcal{PT} rota. Se dice que en $\epsilon = 0$ ocurre una transición de fase \mathcal{PT} [7].

4. Partícula clásica sujeta a fuerzas complejas

En esta sección trataremos de estudiar la naturaleza clásica que subyace a esta transición, basándonos en uno de los muchos artículos que han tratado este problema [8]. Para ello, estudiaremos las trayectorias en el plano complejo de partículas clásicas que están sujetas a fuerzas complejas.

En este trabajo, cuyo objetivo es entender las consecuencias de la simetría \mathcal{PT} , recopilaremos algunos de los casos estudiados con el fin de explicar heurísticamente la simetría \mathcal{PT} no rota cuando $\epsilon \geq 0$ para el hamiltoniano

$$H = p^2 + V(x), \quad \text{donde} \quad V(x) = x^2(ix)^\epsilon. \quad (4.1)$$

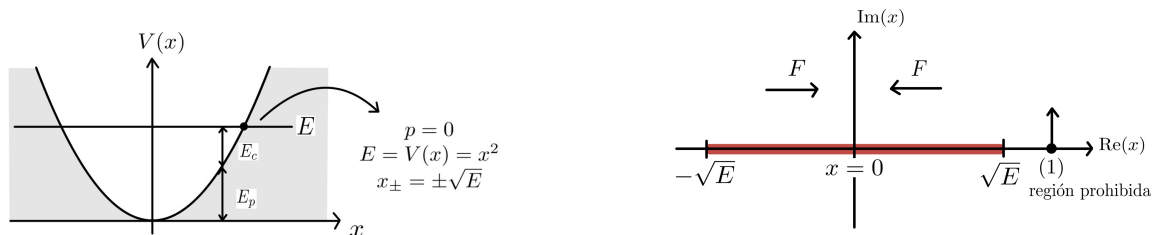
Se tratarán separadamente los valores de ϵ positivos y enteros. En las Subsec. 4.1, 4.2 y 4.3 se analizarán los casos $\epsilon = 0$, que corresponde al oscilador armónico, $\epsilon = 1$ y $\epsilon = 2$ respectivamente. Finalmente, en la Subsec. 4.4 se darán ejemplos de $-1 \leq \epsilon < 0$.

4.1. Oscilador armónico. Caso $\epsilon = 0$

Para $\epsilon = 0$ el potencial toma la forma $V(x) = x^2$, es decir, se obtiene el potencial del oscilador armónico. Tratando el hamiltoniano del oscilador armónico como se haría en un curso de mecánica clásica

$$H = p^2 + x^2 = E, \quad (4.2)$$

la región prohibida clásicamente es bien conocida, es la región donde la energía cinética es menor que 0 (ver Fig. 3a). Para determinar la región prohibida hay que encontrar los “turning points” o puntos de inflexión clásicos, que se dan cuando la energía cinética se anula ($p = 0$), ya que esta no puede ser negativa. Resolviendo la ecuación $E = x^2$, se obtiene $x_{\pm} = \pm\sqrt{E}$.



(a) La zona sombreada corresponde a la región prohibida clásicamente.

(b) Trayectoria en el eje real de la partícula clásica.

Figura 3: Oscilador armónico clásico

La fuerza es $F = -\nabla V = -2x$ y apunta hacia el origen, por tanto la partícula se mueve en el eje x , se va ralentizando hasta llegar al punto de inflexión, da la vuelta (este es el motivo de que se le llame “turning point”) y se dirige hacia el otro punto de inflexión y vuelve a girar. La partícula oscila entre esos dos puntos (ver Fig. 3b). Hasta ahora no hay nada nuevo, no obstante, ¿qué ocurriría si colocásemos inicialmente la partícula en la región prohibida (en el punto (1) de la Fig. 3b por ejemplo)? Como $x > \sqrt{E}$, $x^2 > E$, entonces, $p^2 < 0$, esto nos da una velocidad puramente imaginaria y las trayectorias se desarrollarán en el plano complejo. Para calcular esas trayectorias debemos resolver

$$p = \sqrt{E - x^2} = \frac{dx}{dt}. \quad (4.3)$$

Fijando la energía $E = 1$ sin pérdida de generalidad, se obtiene que

$$x(t) = \sin(t + \arcsin[x(0)]). \quad (4.4)$$

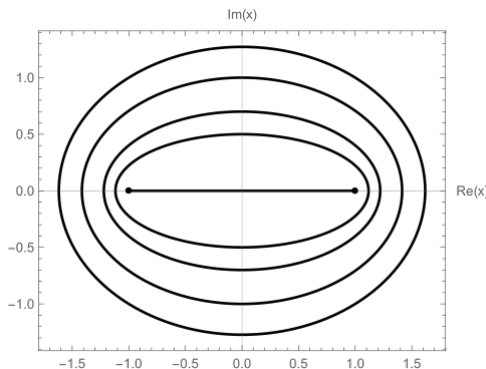


Figura 4: Trayectorias clásicas en el plano complejo x para el oscilador armónico cuyo hamiltoniano es $H = p^2 + x^2$. Estas trayectorias representan las posibles trayectorias para distintas condiciones iniciales (imaginarias) de una partícula cuya energía es $E = 1$.

Como estamos analizando la mecánica clásica en el plano complejo, podemos elegir cualquier punto $x(0)$ en el plano complejo como posición inicial. Si hacemos esto, las trayectorias obtenidas en (4.4) serán elipses, tal y como podemos ver en la Fig. 4.

Las trayectorias son elipses con focos ubicados en los puntos de inflexión $x = \pm 1$. La solución clásica periódica habitual del oscilador armónico es el segmento (elipse degenerada) que conecta los puntos de inflexión. Con un análisis en el plano complejo las partículas pueden estar perfectamente en la región clásicamente prohibida, en esta región tienen una velocidad puramente imaginaria (hacia arriba en el plano complejo). Esto no implica que una partícula clásica pueda sufrir efecto túnel, ya que no está viajando en la dirección paralela al eje real, viaja en la dirección perpendicular a este eje, por lo cual no está penetrando en la región prohibida.

El período de estas trayectorias se puede escribir como

$$T = \oint dt = \oint \frac{dx}{p} = \oint \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4.5)$$

Haciendo uso del teorema integral de Cauchy se llega a la conclusión de que el período es el mismo para todas las trayectorias, debido a que la única singularidad es un corte de rama entre $x = -1$ y $x = 1$; por esta razón, podemos deformar el contorno de integración de un camino a otro y el período será el mismo. El valor que se obtiene es 2π . Finalmente, observamos que todas las trayectorias clásicas son simétricas con respecto a las reflexiones de paridad \mathcal{P} e inversión temporal \mathcal{T} .

Vamos a estudiar el resto de casos de la misma manera, planteando las ecuaciones de movimiento para el hamiltoniano $H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon$, que son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = 2p, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = i(2 + \epsilon)(ix)^{1+\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Combinando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2i(2 + \epsilon)(ix)^{1+\epsilon}, \quad (4.7)$$

que se trata de la versión compleja de la segunda ley de Newton $F = ma$. Esta ecuación se puede integrar una vez, obteniendo

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{E + (ix)^{2+\epsilon}}. \quad (4.8)$$

En virtud de la invariancia \mathcal{PT} del hamiltoniano, parece razonable restringir nuestra atención a los valores reales de E . Tomando $E = 1$ y sin pérdida de generalidad llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{1 + (ix)^{2+\epsilon}}, \quad (4.9)$$

y los puntos de inflexión que son los que cumplen

$$1 + (ix)^{2+\epsilon} = 0. \quad (4.10)$$

4.2. Caso $\epsilon = 1$

El caso $\epsilon = 1$ es más complicado que el caso del oscilador armónico ($\epsilon = 0$). El potencial ahora tiene la expresión $V(x) = ix^3$. Aparecen 3 puntos de inflexión: $x_- = e^{-5i\pi/6}$ y $x_+ = e^{-i\pi/6}$ que son \mathcal{PT} simétricos y $x_0 = i$. El hecho de que dos puntos sean \mathcal{PT} implica que sean simétricos respecto al eje imaginario, que es lo que se obtiene al aplicar el operador paridad y después la conjugación compleja, que viene de aplicar el operador inversión temporal. Resolviendo la ecuación diferencial (4.9) se obtienen las trayectorias de las partículas, que se muestran en la Fig. 5.

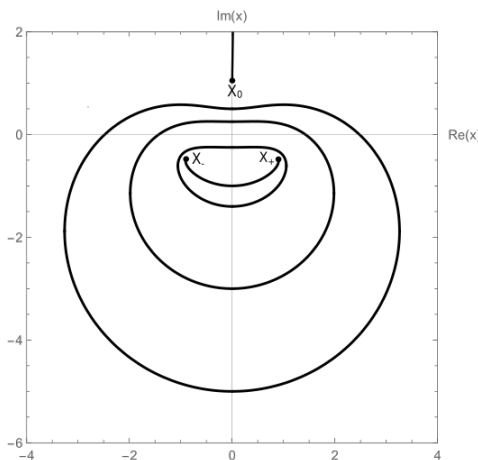


Figura 5: Trayectorias clásicas en el plano complejo x para una partícula descrita por el hamiltoniano $H = p^2 + ix^3$ con energía $E = 1$.

Tal y como ocurre en el caso $\epsilon = 0$, la trayectoria de una partícula cuya posición inicial es x_- sigue una única trayectoria hasta x_+ y posteriormente retrocede de nuevo a x_- . Esta trayectoria, que oscila entre los puntos de inflexión, está encerrada por un conjunto de caminos cerrados y anidados que llenan el plano complejo, excepto para puntos en el eje imaginario por encima del punto de inflexión $x_0 = i$. Las trayectorias originadas en uno de estos puntos van alejar o se acercan a x_0 , se detienen, giran alrededor, y luego se mueven hacia arriba en el eje imaginario hasta $i\infty$. Como ya hemos dicho, el resto de órbitas encierran los puntos de inflexión x_{\pm} y, por el teorema de Cauchy, todas tienen el mismo

período. Para calcular esta integral se han utilizado las propiedades de la función Beta dadas en [9]:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt \quad (4.11)$$

$$\text{y } B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (4.12)$$

El período de estas trayectorias es $2\sqrt{3}\pi\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)/\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$.

El movimiento periódico entre x_\pm es claramente simétrico bajo inversión temporal y espacial. Sin embargo, una partícula que comienza en el tercer punto de inflexión x_0 exhibe un movimiento completamente distinto: viaja por el eje imaginario y llega a $i\infty$ en un tiempo finito: $\pi\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)/\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)$. Este movimiento no es periódico y no es simétrico bajo inversión temporal.

4.3. Caso $\epsilon = 2$

Con $\epsilon = 2$, el potencial es $V(x) = -x^4$. Para este potencial tenemos 4 puntos de inflexión: dos de ellos por encima del eje real y simétricos respecto al eje imaginario: $x_1 = e^{i\pi/4}$ y $x_2 = e^{3i\pi/4}$ y otros dos situados debajo del eje real, también simétricos respecto al eje imaginario: $x_3 = e^{-i\pi/4}$ y $x_4 = e^{-3i\pi/4}$.

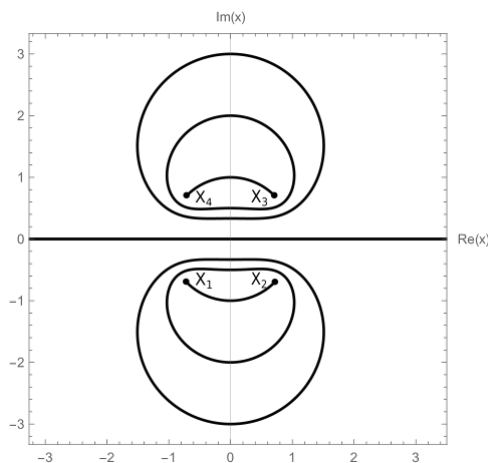


Figura 6: Trayectorias clásicas en el plano complejo x para una partícula descrita por el hamiltoniano $H = p^2 - x^4$ con energía $E = 1$.

Como es de esperar, las trayectorias clásicas oscilan entre estos puntos. El período de las oscilaciones es $2\sqrt{2}\pi\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)/\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$. Todas las trayectorias son periódicas excepto las trayectorias que comienzan en el eje real; una partícula que comienza en el eje real va hacia $\pm\infty$, dependiendo de la signo de la velocidad inicial, y alcanza el infinito en un tiempo finito.

En el libro “ \mathcal{PT} symmetry: In Quantum and Classical Physics” de Bender [7] se plantean dos preguntas interesantes:

1. Si la partícula alcanza el infinito en un tiempo T , ¿dónde se encuentra la partícula en un tiempo $T + 1$? El análisis real no nos da la respuesta, pero el análisis en el

plano complejo sí. Permitiendo que las órbitas en el plano complejo se hagan más y más grandes hasta que se acerquen al eje real, se llega a que una partícula inicialmente en el origen va al ∞ e infinitamente rápido, siguiendo la órbita, llega a $-\infty$ y vuelve a hacer el camino de vuelta hasta el origen. Todo este trayecto se realiza en el mismo tiempo en el que la partícula oscila de un punto de inflexión a otro. Así, la partícula clásica completa periódicamente el camino desde $\pm\infty$ a $\mp\infty$.

2. ¿En qué punto x del eje real es más probable que se encuentre la partícula clásica? Para responder a esta pregunta, debemos tener en cuenta que la densidad de probabilidad clásica es proporcional a la inversa de la velocidad de la partícula en el punto x ; cuanto más rápido se mueva la partícula, es menos probable que esté allí.

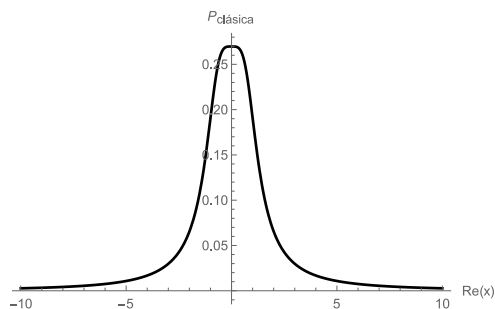


Figura 7: Probabilidad clásica normalizada para el oscilador cuártico descrito por el hamiltoniano $H = p^2 - x^4$. La partícula clásica tiene energía $E = 1$. Este gráfico muestra que mientras la partícula clásica se aleja rápidamente hasta el infinito, pasa casi todo su tiempo (y es más probable que se encuentre) cerca del origen $x = 0$.

En la Fig. 7 vemos como la partícula está localizada en el origen, a pesar sufrir un potencial inestable. Por lo tanto, mientras $x = 0$ es un punto de inestabilidad estática, el movimiento de las partículas es dinámicamente estable.

La diferencia entre las trayectorias cerradas y abiertas es crucial para la versión cuantizada de la teoría. Si la trayectoria clásica es cerrada, para obtener una fórmula aproximada para los niveles de energía cuantizados E_n , podemos usar la fórmula de cuantización de Bohr-Sommerfeld

$$\oint_C \sqrt{E - V(x)} dx \sim \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad (4.13)$$

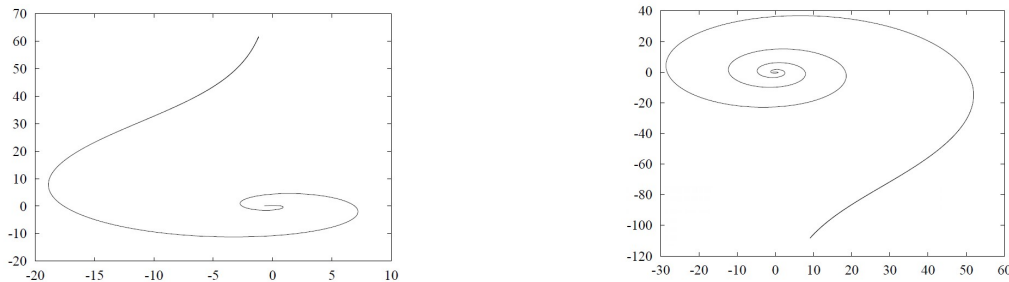
donde C es la trayectoria clásica cerrada. La interpretación semiclassical de la fórmula de Bohr-Sommerfeld es que en mecánica cuántica consideramos una partícula como una onda. Si la partícula está en un órbita cerrada y la órbita consiste en un número entero n de longitudes de onda, la onda interfiere consigo misma de forma constructiva. Este es precisamente el significado de (4.13), que es una condición aproximada para un nivel de energía.

Como consecuencia de la simetría \mathcal{PT} , esta fórmula de cuantización aproximada da valores reales para la energía. Ahora bien, si las trayectorias clásicas son abiertas, la integral de cuantización no se puede utilizar porque, como indica el símbolo \oint , el contorno de integración debe estar cerrado. De hecho, veremos que cuando las trayectorias clásicas son abiertas, la simetría \mathcal{PT} se rompe y los autovalores del hamiltoniano cuántico se vuelven complejos.

4.4. Valores de ϵ negativos

Las trayectorias clásicas para valores negativos de ϵ son completamente diferentes de las presentadas hasta ahora, estos caminos ya no son órbitas cerradas, no exhiben simetría \mathcal{PT} . Todos los caminos giran en espiral hacia el infinito. Esta ruptura de simetría es lo que está detrás de la transición en $\epsilon = 0$. Recordemos la Fig. 2, en la cual se obtenían autovalores reales para $\epsilon \geq 0$ y complejos para $\epsilon < 0$, en esta región decimos que la simetría \mathcal{PT} está rota.

A continuación se presentan algunos ejemplos.



(a) Trayectoria clásica correspondiente a $\epsilon = -0,2$ [8].

(b) Trayectoria clásica correspondiente a $\epsilon = -0,15$ [8].

Figura 8: Trayectorias clásicas en el plano complejo x para valores de ϵ entre $-1 < x < 0$ con energía $E = 1$.

En general, el tiempo que se necesita para que una partícula alcance el infinito es infinito.

Finalmente se presenta el caso de $\epsilon = -1$. Para este caso especial podemos resolver la ecuación (4.9) exactamente. El resultado

$$x(t) = \frac{1}{4} \left(4x(0) - 4i\sqrt{-1 - ix(0)t + it^2} \right), \quad (4.14)$$

representa una familia de parábolas que son simétricas con respecto al eje imaginario. Hay una parábola degenerada correspondiente a $x(0) = 0$, que se encuentra en el eje imaginario positivo por encima de i . Ninguna de estas trayectorias está acotada.

5. Condiciones de contorno y autovalores para distintas familias de hamiltonianos \mathcal{PT} simétricos

Hasta ahora no hemos tratado las condiciones de contorno del problema de autovalores, cuando es crucial para determinar el espectro de energías de los hamiltonianos.

La ecuación de Schrödinger tiene dos soluciones linealmente independientes, una solución decae en ciertos regímenes, mientras que la segunda solución crece en esta región. Esta será la primera tarea, determinar las regiones en las que converge la función de onda en el plano complejo x . Para esto no es necesario conocer la forma exacta de las funciones de onda, es suficiente conocer el comportamiento asintótico para $x \rightarrow \infty$ de estas. Para

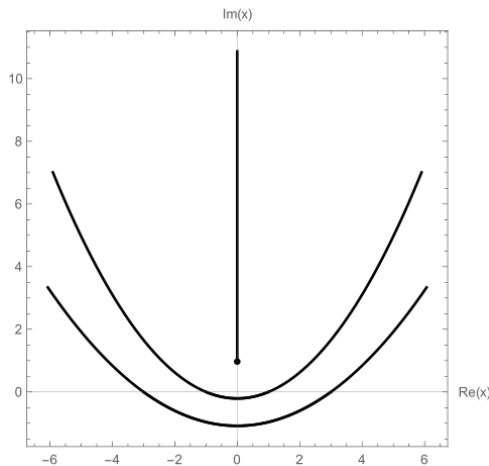


Figura 9: Trayectorias clásicas en el plano complejo para un partícula descrita por el hamiltoniano $H = p^2 - ix$ con una energía $E = 1$.

ello, vamos a usar la aproximación WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) [10], que considera que el potencial varía lentamente con la coordenada de posición, para encontrar el comportamiento asintótico de las soluciones de

$$-y''(x) + V(x)y(x) = 0. \quad (5.1)$$

Con esta aproximación, las soluciones tienen la forma (para $x \rightarrow \infty$)

$$y(x) \sim \exp \left[\pm \int^x dx \sqrt{V(x)} \right]. \quad (5.2)$$

Esta es la forma de las funciones de onda de las cuales debemos determinar las regiones en las que decae una de las soluciones y crece la otra. Para ello, uno debe determinar las líneas en las que la función de onda es puramente oscilatoria, en definitiva, donde su parte real desaparece. A estas líneas las llamaremos líneas de Stokes y se encontrarán evaluando la ecuación (5.2) para el potencial apropiado, estableciendo $x = re^{i\varphi}$, con $|x| = r$, y requiriendo que la parte real se desvanezca al tomar el límite $|x| \rightarrow \infty$. Esta condición conduce al ángulo φ_S de Stokes, que se define como el ángulo formado entre la recta real positiva y la línea de Stokes correspondiente. Para determinar qué solución decae o crece dentro de cada cuña, se deben de buscar las líneas de anti-Stokes. Las líneas anti-Stokes se determinan usando la ecuación (5.2) e imponiendo la condición de que la parte imaginaria de la integral desaparezca. Esto conduce a una condición para φ_A .

Además, haciendo más uso de la aproximación WKB, se llega a la cuantización de Bohr- Sommerfeld (4.13) planteada en la sección anterior

$$\int_{x_-}^{x_+} dx \sqrt{E_n - V(x)} = (n + 1/2)\pi, \quad (5.3)$$

donde x_- y x_+ son los puntos de inflexión clásicos evaluados a través de la condición $E_n = V(x)$. Si x es complejo, puede haber varios puntos de inflexión. En las siguientes subsecciones, mostraremos que si un par de los puntos de inflexión son \mathcal{PT} simétricos, la aproximación WKB conduce a la aparición de valores propios reales. El número de pares de puntos de inflexión \mathcal{PT} simétricos determina así el número de familias de valores

proprios que contienen.

A continuación se van a analizar con este método tres familias diferentes de hamiltonianos $H = p^2 + V(x)$, para diferentes potenciales, siguiendo la división que realizaron Schmidt-Eberle y Klevansky en su artículo [11].

5.1. Hamiltonianos del tipo $H_I = p^2 + x^2(ix)^\epsilon$, con $\epsilon > 0$

En este caso el comportamiento asintótico de la función de onda para $|x| \rightarrow \infty$ es

$$\psi \sim \exp \left[\mp \frac{2}{\epsilon + 4} r^{\frac{\epsilon+4}{2}} e^{i(\frac{\pi}{2} + \varphi) \frac{\epsilon+4}{2}} \right], \quad (5.4)$$

donde hemos escrito la unidad imaginaria como $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$. Las líneas de Stokes son

$$\varphi_S = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{\epsilon + 4} - \frac{\pi}{2}, \quad (5.5)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y las anti-líneas de Stokes se encuentran en los ángulos

$$\varphi_A = \frac{2k\pi}{\epsilon + 4} - \frac{\pi}{2}. \quad (5.6)$$

Los puntos de inflexión, donde la aproximación WKB se rompe, son los que se obtienen resolviendo $E_n = x^2(ix)^\epsilon$. Existen $\epsilon + 2$ soluciones de x_- y x_+ al hacer la raíz $\epsilon + 2$ -ésima,

$$x_+ = E_n^{1/(\epsilon+2)} e^{i\gamma} \quad y \quad x_- = E_n^{1/(\epsilon+2)} e^{i\zeta}, \quad (5.7)$$

donde γ y ζ son ángulos en los que la función de onda converge. Para obtener el espectro de energía recurrimos a la ecuación (5.3) y haciendo las transformaciones necesarias se llega a

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi = E_n^{(\epsilon+4)/(2\epsilon+4)} (e^{i\gamma} - e^{i\zeta}) \int_0^1 dy \sqrt{1 - y^{\epsilon+2}}. \quad (5.8)$$

Se ve claramente que para que el espectro de energías E_n sea real, $\zeta = \pi - \gamma$. Esto demuestra lo que habíamos dicho antes de empezar la subsección; la aproximación WKB nos lleva a un espectro real cuando los puntos de inflexión x_+ y x_- son \mathcal{PT} simétricos, es decir, simétricos bajo reflexión con respecto al eje imaginario. De este modo, si despejamos la expresión anterior, se obtiene la expresión para calcular el espectro de energía

$$E_n(\gamma) = \left[\frac{\Gamma(3/2 + 1/(\epsilon + 2)) \sqrt{\pi} (n + 1/2)}{\cos(\gamma) \Gamma(1 + 1/(\epsilon + 2))} \right]^{(2\epsilon+4)/(\epsilon+4)}. \quad (5.9)$$

Observando el comportamiento asintótico en el plano complejo, se pueden distinguir 3 casos: ϵ impar, $\epsilon = 4n$ (divisible por 4) y $\epsilon = 4n + 2$ (par pero no divisible por 4).

ϵ impar

Empecemos por analizar los gráficos de las cuñas para ϵ impar.

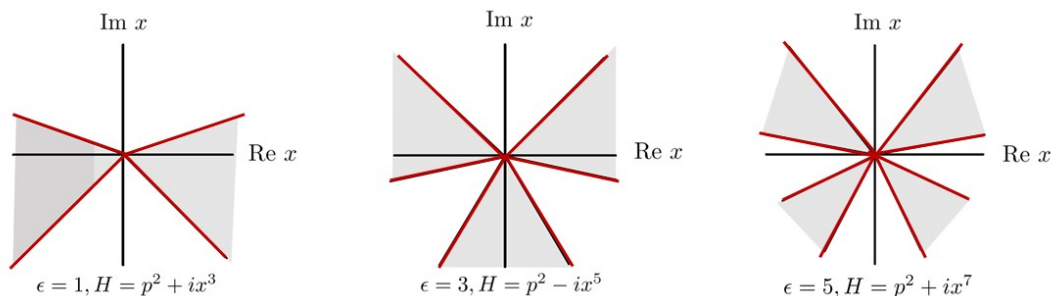


Figura 10: Regiones de convergencia para $\epsilon = 1$, $\epsilon = 3$ y $\epsilon = 5$ respectivamente. Las zonas sombreadas son las cuñas de Stokes determinadas por las líneas de Stokes φ_S .

La primera imagen de la Fig. 10 muestra las cuñas de Stokes para $\epsilon = 1$, con una apertura de 72° para las zonas sombreadas. Para este valor de ϵ el potencial toma la forma $V(x) = ix^3$, y queda en manifiesto la no hermiticidad del hamiltoniano, al igual que en todos los casos de ϵ impar. Los puntos de inflexión son

$$E_n^{1/3} \exp(-i\pi/6), \quad E_n^{1/3} \exp(-i5\pi/6) \quad y \quad E_n^{1/3} \exp(i\pi/2). \quad (5.10)$$

Como hemos demostrado, para obtener un espectro real de energía el par de puntos de inflexión tienen que ser simétricos respecto al eje imaginario. Esto nos lleva a que el par que da lugar a valores reales de la energía es $x_- = E_n^{1/3} \exp(-i5\pi/6)$ y $x_+ = E_n^{1/3} \exp(-i\pi/6)$, que caen en el área sombreada del primer diagrama de la Fig. 10.

Siguiendo con el mismo razonamiento, para $\epsilon = 3$, el potencial $V(x) = -ix^5$ tiene 5 puntos de inflexión:

$$E_n^{1/5} \exp(i\pi/10), \quad E_n^{1/5} \exp(i\pi/2), \quad E_n^{1/5} \exp(-3i\pi/10), \\ E_n^{1/5} \exp(-7i\pi/10) \quad y \quad E_n^{1/5} \exp(-11i\pi/10). \quad (5.11)$$

En este caso tenemos dos pares \mathcal{PT} simétricos: $x_- = E_n^{1/5} \exp(-11i\pi/10)$ con $x_+ = E_n^{1/5} \exp(i\pi/10)$ que se encuentran en las regiones sombreadas y $x_- = E_n^{1/5} \exp(-7i\pi/10)$ con $x_+ = E_n^{1/5} \exp(-3i\pi/10)$ en las no sombreadas de la Fig. 10. Por consiguiente, son dos espectros de autovalores reales para la energía. Con $\epsilon = 5$ el patrón se repite, se obtienen 7 puntos de inflexión y 3 pares son \mathcal{PT} simétricos; 3 distintos espectros de energía reales de acuerdo a la aproximación WKB que hemos realizado.

Generalizando, el número de espectros reales para ϵ impar se puede escribir como $N = (\epsilon + 1)/2$. Finalmente, el espectro de energía se puede calcular con (5.9). Con $\epsilon = 1$ se obtiene $E_n \propto (n+1/2)^{6/5}$, con $\epsilon = 3$, $E_n \propto (n+1/2)^{10/7}$ y con $\epsilon = 5$, $E_n \propto (n+1/2)^{14/9}$.

$$\epsilon = 4n$$

El segundo caso a analizar es cuando ϵ es par y divisible por 4, $\epsilon = 0, 4, 8, \dots$. Los hamiltonianos a los que dan lugar son hermíticos y acotados por debajo: $H_I = p^2 + x^2, p^2 + x^6$ y $p^2 + x^{10}$.

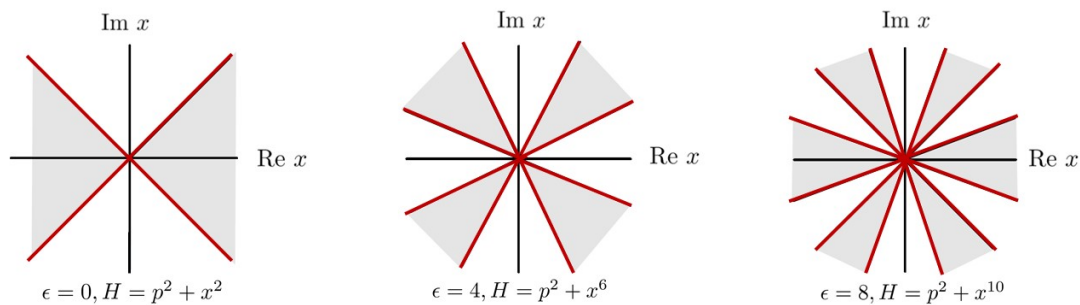


Figura 11: Regiones de convergencia para $\epsilon = 0$, $\epsilon = 4$ y $\epsilon = 8$ respectivamente.

El $\epsilon = 0$ es el caso del oscilador armónico usual, el cual conocemos perfectamente el espectro al que da lugar, no obstante, para valores más altos de ϵ pueden desarrollarse espectros reales adicionales.

Para $\epsilon = 4$, $V(x) = x^6$, hay 6 puntos de inflexión agrupados en 3 parejas de valores \mathcal{PT} simétricos. Sin embargo, como el espectro al que dan lugar los puntos de inflexión en el plano superior es igual al del plano inferior, solo existen 2 espectros diferentes. Esta simetría de reflexión se manifiesta también en el caso de $\epsilon = 8$, $V(x) = x^{10}$, tiene 5 pares de puntos \mathcal{PT} simétricos de inflexión en las cuñas de Stokes \mathcal{PT} simétricas de la Fig. 11. Por la simetría de reflexión se obtienen únicamente 3 espectros diferentes.

Para este grupo de valores de ϵ , el número de familias de espectros es $N = 1 + \epsilon/4$. Las energías son proporcionales a $E_n \propto (n + 1/2)$, $E_n \propto (n + 1/2)^{3/2}$ y $E_n \propto (n + 1/2)^{5/3}$, para $\epsilon = 0, 4$ y 8 respectivamente.

$$\epsilon = 4n + 2$$

Queda por analizar el caso de ϵ par pero no divisible por 4, es decir, $\epsilon = 2, 6, \dots$. Los hamiltonianos no hermíticos (ver apéndice A) correspondientes son $H_I = p^2 - x^4$, $p^2 - x^8, \dots$. Este aspecto está recogido en los patrones de convergencia de la Fig. 12. El eje real es una línea de Stokes, donde la función de onda es puramente oscilatoria. No puede existir un espectro real que surja de las condiciones de contorno dadas en este eje. No obstante, pueden existir espectros que contengan valores propios reales asociados con estos hamiltonianos.

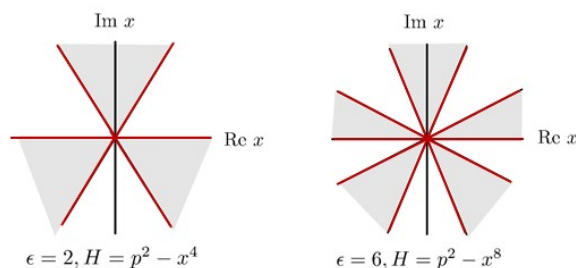


Figura 12: Regiones de convergencia para $\epsilon = 2$ y $\epsilon = 6$ respectivamente.

En la Fig. 12 de $\epsilon = 2$, las cuñas sombreadas que son \mathcal{PT} simétricas nos dan un espectro de autovalores reales $E_n \propto (n + 1/2)^{4/3}$. Con el valor de $\epsilon = 6$, tenemos dos

cuñas de Stokes en el plano superior (sombreada y no sombreada) simétricas por reflexión a las que están por debajo del eje real, esto quiere decir que tenemos 2 espectros reales de energías diferentes $E_n \propto (n + 1/2)^{8/5}$. El número de espectros es $N = (\epsilon + 2)/4$.

5.2. Hamiltonianos del tipo $H_{II} = p^2 + (x^2)^\delta$, $\delta > 0$

Hay algunos hamiltonianos que no han sido analizados en el caso anterior para los valores de ϵ pares, ya que, el signo iba alternándose. Por eso, es necesario el estudio de este segundo tipo H_{II} . El factor que controla el comportamiento asintótico de la función de onda dado por (5.2) es

$$\psi(x) \sim \exp\left(\pm \frac{1}{\delta + 1} x^{\delta+1}\right). \quad (5.12)$$

Escribiendo x como una variable compleja e imponiendo que la parte real de la función de onda desaparezca para $|x|$ grande se obtienen las líneas de Stokes en los ángulos

$$\varphi_S = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\delta + 1}, \quad (5.13)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y las líneas de anti-Stokes están en

$$\varphi_A = \frac{k}{\delta + 1} \pi. \quad (5.14)$$

Las regiones de convergencia se muestran en la Fig. 13.

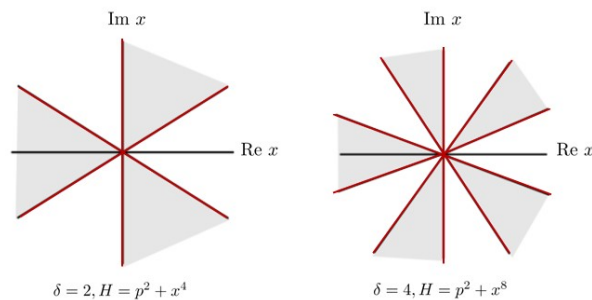


Figura 13: Regiones de convergencia para $\delta = 2$ y $\delta = 6$ respectivamente.

Repitiendo el estudio de la subsección anterior, se obtiene un espectro real para $\delta = 2$ y dos para $\delta = 4$. En general, el número de familias que se encuentran para δ par es $N = \delta/2$. Los valores de δ impar ya han sido discutidos en los casos de $\epsilon = 0, 4, \dots$, $N = (\delta + 1)/4$.

5.3. Hamiltonianos del tipo $H_{III} = p^2 - (x^2)^\mu$, $\mu > 0$

Los últimos hamiltonianos que nos quedan por discutir son de la forma $H_{III} = p^2 - (x^2)^\mu$. El comportamiento asintótico de la función de onda es

$$\psi(x) \sim \exp\left(\pm i \frac{1}{\mu + 1} x^{\mu+1}\right), \quad (5.15)$$

con las líneas de Stokes en los ángulos

$$\varphi_S = \frac{k\pi}{\mu + 1}, \quad (5.16)$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y las líneas de anti-Stokes en

$$\varphi_A = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\mu + 1}. \quad (5.17)$$

Las regiones de convergencia se muestran en la siguiente figura:

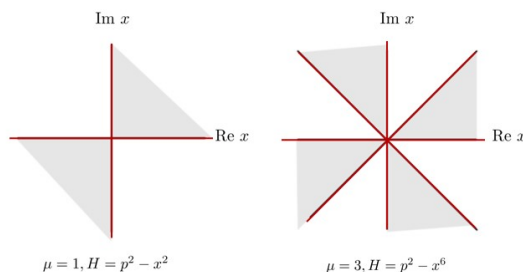


Figura 14: Regiones de convergencia para $\mu = 1$ y $\mu = 3$ respectivamente.

Para $\mu = 1$ los dos puntos de inflexión caen en el eje imaginario, esto es, no son \mathcal{PT} simétricos y no tenemos ningún espectro real y para el valor $\mu = 3$, aparece 1 único espectro real, $E_n \approx 2,81(n + \frac{1}{2})^{3/2}$. El número de espectros es $N = (\mu - 1)/2$ y para los valores pares de μ se obtiene lo mismo que los H_I con $\epsilon = 2, 6, \dots$

6. El caso destacable del potencial $-x^4$

En esta sección trataremos el hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico no hermítico

$$H = \hat{p}^2 - \hat{x}^4, \quad (6.1)$$

que se obtiene al establecer $\epsilon = 2$ en los hamiltonianos de la Sec. 5.1.

El hamiltoniano (6.1) es especialmente interesante porque, a diferencia del hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico $H = \hat{p}^2 + i\hat{x}^3$, por ejemplo, las condiciones de contorno de las funciones propias no se imponen en el eje real x .

A pesar de haber demostrado en la Subsec. 2.4 que es simétrico bajo la reflexión de paridad definida en (2.16) y (2.17), H no respeta la simetría de paridad. Esto se debe a que las funciones propias del hamiltoniano deben desaparecer exponencialmente en un par de cuñas de Stokes en el plano complejo x y estas cuñas no incluyen el eje x real.

Tal y como hemos analizado, la aproximación WKB muestra que las funciones propias son puramente oscilatorias a lo largo de seis líneas separadas por ángulos de 60° y en el eje real (ver Fig. 12). Se requiere que las funciones propias para el hamiltoniano decaigan exponencialmente en el interior de un par de cuñas de Stokes en la mitad inferior del plano x . Estas cuñas, que son simétricas respecto al eje imaginario, se encuentran debajo del eje real positivo y negativo con los bordes superiores de las cuñas sobre este. Bajo reflexión espacial $x \rightarrow -x$, el dominio original de dos cuñas cambia al interior de un par diferente de cuñas de 60° que se encuentran en el semiplano superior. Por lo tanto, mientras que (6.1) puede parecer simétrico bajo paridad, obedece condiciones de frontera que violan la

paridad.

El propósito de esta sección es examinar la conexión entre el hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico no hermítico

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 - g\hat{x}^4 \quad (g > 0), \quad (6.2)$$

y el *equivalente* hamiltoniano hermítico \tilde{H} , cuyo potencial tiene un término cuártico positivo y un término lineal:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + 4g\hat{x}^4 - \hbar\sqrt{\frac{2g}{m}}\hat{x} \quad (g > 0), \quad (6.3)$$

donde hemos incluido las constantes dimensionales m , g y \hbar porque ayudan a dilucidar el significado físico de la equivalencia espectral de estos dos hamiltonianos.

Seguimos el procedimiento descrito en [12] y usamos una transformación simple de variables para establecer que los dos hamiltonianos tienen el mismo problema de valores propios.

Partimos del problema de autovalores unidimensional del hamiltoniano (6.2)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - gx^4\psi(x) = E\psi(x), \quad (6.4)$$

donde las condiciones de contorno han sido analizadas en la sección anterior. Se obtuvo que en las cuñas entre los ángulos $-\pi/3 < \arg(x) < 0$ y $-\pi < \arg(x) < -2\pi/3$ (ver Fig. 12) la función de onda decae a 0 si $|x| \rightarrow \infty$. Estas cuñas no incluyen el eje real, por ende, se requiere que la ecuación diferencial sea resuelta sobre un contorno dentro de estas cuñas. Utilizaremos el siguiente contorno complejo

$$x = -2iL\sqrt{1 + iy/L}, \quad (6.5)$$

donde y pertenece a la recta real y va desde $-\infty$ a ∞ . Este contorno es adecuado porque a medida que $y \rightarrow \pm\infty$, $\arg(x)$ se acerca a $-\pi/4$ y $-3\pi/4$, por tanto, este contorno cae dentro de las cuñas de Stokes. L tiene unidades de longitud, que en términos de los parámetros de los hamiltonianos anteriores es

$$L = \lambda \left(\frac{\hbar^2}{mg} \right)^{1/6}, \quad (6.6)$$

con λ una constante arbitraria adimensional. Vamos a escribir el hamiltonianos (6.2) en términos de la y :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(1 + \frac{iy}{L} \right) \phi''(y) - \frac{i\hbar^2}{4Lm} \phi'(y) - 16gL^4 \left(1 + \frac{iy}{L} \right)^2 \phi(y) = E\phi(y). \quad (6.7)$$

A este resultado le aplicamos la transformada de Fourier definida como

$$\tilde{f}(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iy p/\hbar} f(y). \quad (6.8)$$

Luego la transformada de Fourier de $f'(y)$ es $ip\tilde{f}(p)/\hbar$ y la de $yf(y)$ es $ih\tilde{f}'(p)$. La transformada de Fourier de la ecuación anterior queda

$$\frac{1}{2m} \left(1 - \frac{\hbar}{L} \frac{d}{dp}\right) p^2 \tilde{\phi}(p) + \frac{\hbar}{4Lm} p \tilde{\phi}(p) - 16gL^4 \left(1 - \frac{\hbar}{L} \frac{d}{dp}\right)^2 \tilde{\phi}(p) = E\tilde{\phi}(p). \quad (6.9)$$

Operando llegamos a

$$-16gL^2\hbar^2\tilde{\phi}''(p) + \left(-\frac{\hbar p^2}{2mL} + 32gL^3\hbar\right)\tilde{\phi}'(p) + \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{3p\hbar}{4mL} - 16gL^4\right)\tilde{\phi}(p) = E\tilde{\phi}(p).^4 \quad (6.10)$$

Esta ecuación no es una ecuación de Schrödinger ya que aparece un término proporcional a una derivada de primer orden, sin embargo, podemos eliminar este término realizando una simple transformación:

$$\tilde{\phi}(p) = e^{Q(p)/2}\Phi(p). \quad (6.11)$$

La condición para que $Q(p)$ cumpla que la ecuación en $\Phi(p)$ no tenga un término con una derivada primera es

$$Q(p) = \frac{2L}{\hbar}p - \frac{1}{96gmL^3\hbar}p^3. \quad (6.12)$$

Sustituyendo esta expresión para Q , se obtiene la ecuación de Schrödinger para $\Phi(p)$:

$$-16gL^2\hbar^2\Phi''(p) + \left(-\frac{\hbar p}{4mL} + \frac{p^4}{256gm^2L^4}\right)\Phi(p) = E\Phi(p). \quad (6.13)$$

Finalmente, hacemos la siguiente sustitución para reemplazar la variable p , que tiene unidades de momento, por z , que es una variable de coordenadas con unidades de longitud

$$p = zL\sqrt{32mg}. \quad (6.14)$$

La ecuación de valores propios resultante, en el eje z real, es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Phi''(z) + \left(-\hbar\sqrt{\frac{2g}{m}}z + 4gz^4\right)\Phi(z) = E\Phi(z). \quad (6.15)$$

Se puede observar como este problema de autovalores tiene la misma estructura que el problema (6.3) y esto se ha obtenido de manera exacta, sin hacer ninguna aproximación. Si bien, cabe destacar que la coordenada z a pesar de tener dimensiones de longitud, no es una coordenada espacial convencional porque es impar bajo inversión temporal, ya que está construida a partir de $p(p = i\hbar\frac{d}{dy})$.

El potencial ha adquirido un término lineal y dado que este término lineal es proporcional a \hbar , podemos considerar este término como una anomalía cuántica en la paridad.

6.1. Anomalía en la paridad

En efecto, esta anomalía es algo puramente cuántico. En general, una anomalía es un efecto puramente cuántico (no clásico) si esta se desvanece en el límite clásico $\hbar \rightarrow 0$. El

⁴Téngase en cuenta que la variable p que aparece en esta ecuación no es la misma que la variable p utilizada en (6.2). Aquí representa a un operador $p = -i\hbar\frac{d}{dy}$, mientras que en (6.2), $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$.

término lineal no tiene un análogo clásico porque las ecuaciones clásicas de movimiento son simétricas por paridad.

Tal y como hemos dicho anteriormente, (6.2) no respeta la paridad. Esta violación de la simetría de paridad es sutil porque está contenida en las condiciones de frontera que las funciones propias de la ecuación de Schrödinger deben satisfacer. Dado que estas condiciones de contorno se dan en $|x| = \infty$, la violación de la simetría de paridad no es detectable en ningún dominio finito del plano complejo x y, como el movimiento clásico es un fenómeno local, una partícula clásica que se mueve bajo la influencia de este hamiltoniano actuará como si estuviera sujeto a fuerzas simétricas de paridad. La partícula clásica no puede sentir la influencia de las condiciones de frontera cuántica impuestas en $|x| = \infty$, solo una partícula cuántica se ve afectada por la violación de simetría de paridad.

Para establecer la equivalencia entre los hamiltonianos en (6.2) y (6.3) ha sido necesario realizar una transformada de Fourier. Esta transformación lleva el punto $x = \infty$ al punto en $p = 0$, y esto explica la presencia del término que viola la paridad lineal en el potencial de (6.3). La violación de la paridad es ahora un efecto local visible en el hamiltoniano \tilde{H} .

En su artículo de 2008 [12], Bender et al. establecieron una de las consecuencias directas de la anomalía en la paridad que es la aparición de estados fundamentales, es decir, espectros acotados inferiormente.

7. Mecánica cuántica \mathcal{PT} simétrica

Tras este estudio de algunos hamiltonianos, más exhaustivo para el hamiltoniano dependiente de ϵ (2.30), podríamos preguntarnos si el espectro real y positivo de energías es una mera causalidad matemática que se da para ciertos hamiltonianos o si podemos construir una teoría física de la mecánica cuántica a partir de la simetría \mathcal{PT} .

Una teoría física cuántica debe cumplir: en primer lugar, el espectro de energías debe estar acotado por debajo, en segundo lugar, tener unos vectores de estado en el espacio de Hilbert \mathcal{H} que estén dotados de un producto interno que tiene una norma positiva y en tercer lugar, que su evolución temporal sea unitaria. La condición de $H^\dagger = H$ garantiza estos requisitos y en esta sección explicaremos cómo sustituir esta condición por la de un hamiltoniano que tenga una simetría \mathcal{PT} no rota.

7.1. Formalismo para una teoría cuántica definida por un hamiltoniano hermítico

Con el fin de comparar, resumiremos en esta subsección el procedimiento que se sigue al analizar una teoría definida por un hamiltoniano hermítico convencional y en la siguiente subsección repetiremos el procedimiento para un hamiltoniano no hermítico, tal y como hizo Bender en [6].

- (a) *Funciones propias y valores propios de H .* Dado el hamiltoniano H se puede escribir la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo asociada con H y calcular los

valores propios y las funciones propias $\psi_n(x)$. Por lo general, este cálculo es difícil realizarlo analíticamente, por lo que debe hacerse numéricamente.

- (b) *Ortogonalidad de las funciones propias.* Debido a que H es hermítico, sus autofunciones serán ortogonales con respecto al producto interno usual,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x) \psi(x) dx. \quad (7.1)$$

La ortogonalidad implica que el producto interno de dos funciones propias $\phi_n(x)$ y $\psi_m(x)$, asociadas a diferentes valores propios $E_n \neq E_m$, sea nulo:

$$\langle \phi_n | \psi_m \rangle = 0. \quad (7.2)$$

- (c) *Ortonormalidad de las funciones propias.* Como el hamiltoniano es hermítico, la norma de cualquier vector es positiva. Esto significa que podemos normalizar las funciones propias de H , de modo que la norma de cada función propia sea la unidad

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = 1. \quad (7.3)$$

- (d) *Completitud de las funciones propias.* Las funciones de onda forman una base del espacio de Hilbert. Esto significa que cualquier vector χ en el espacio de Hilbert puede expresarse como una combinación lineal de las funciones propias de H :

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n. \quad (7.4)$$

Con esta base podemos definir la relación de completitud o de cierre del espacio de Hilbert usando la delta de Dirac en el caso continuo o la de Kronecker en el caso discreto

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x)]^* \psi_n(x') = \delta(x - x'). \quad (7.5)$$

- (e) *Reconstrucción del hamiltoniano H y la función de Green G , y cálculo de la función Zeta espectral.* La matriz hamiltoniana en el espacio de coordenadas tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x)]^* \psi_n(x') E_n = H(x, x'). \quad (7.6)$$

La función de Green viene dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x)]^* \psi_n(x') \frac{1}{E_n} = G(x, x'). \quad (7.7)$$

La función de Green es la matriz inversa del hamiltoniano en el sentido de que

$$\int dx' H(x, x') G(x', x'') = \delta(x - x''). \quad (7.8)$$

La fórmula para la función de Green (7.7) nos permite calcular la suma de los inversos de los valores propios de la energía. Simplemente establecemos $x = x'$ en (7.7), integramos con respecto a x , y usando la condición de normalización de (7.3) obtenemos el resultado

$$\int dx G(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E_n}. \quad (7.9)$$

La suma en el lado derecho de (7.9) se llama función zeta espectral. Esta suma es convergente si los niveles de energía E_n aumentan más rápido que linealmente con n .

- (f) *La evolución temporal es unitaria.* Este punto está desarrollado en el apartado 2.1.2
- (g) *Observables.* Un observable está representado por un operador hermítico lineal. El resultado de la medida de esa magnitud física es uno de los valores propios reales de dicho operador.
- (h) *Otros.* Se pueden estudiar varios temas adicionales, como el límite clásico, densidad de probabilidad y de corrientes, cálculos de teorías de perturbaciones, etc.

7.2. Formalismo para una teoría cuántica definida por un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico

La teoría cuántica \mathcal{PT} simétrica no está en conflicto con la teoría cuántica convencional; más bien, es una generalización de la misma. Un importante descubrimiento reciente con respecto a la teoría cuántica \mathcal{PT} simétrica es que si la simetría \mathcal{PT} de la teoría cuántica no se rompe, existe un espacio de Hilbert (métrica positiva) [13]. Este descubrimiento mostró que cuando la simetría \mathcal{PT} no se rompe, la teoría posee una simetría oculta representada por un operador lineal \mathcal{C} , que conmuta con el hamiltoniano. Representa un nuevo número cuántico observable relacionado matemáticamente con la simetría partícula-antipartícula.

A la hora de describir la teoría, la novedad es que no conocemos a priori la definición del producto interno, como lo hacemos en el caso de la mecánica cuántica hermítica habitual. A continuación se explica el procedimiento análogo al realizado en el apartado anterior.

- (a) *Funciones propias y valores propios de H .* Esto ha sido tratado en la Sec. 5.
- (b) *Ortogonalidad de las funciones propias.* Para probar la ortogonalidad de las funciones propias, se debe especificar un producto interno. Por analogía al caso hermítico, uno podría pensar que como el producto interno en (7.1) es apropiado para hamiltonianos hermíticos ($H = H^\dagger$), una buena elección para un producto interno asociado con un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico ($H = H^{\mathcal{PT}}$) podría ser

$$\langle \psi | \phi \rangle \equiv \int_C dx [\psi(x)]^{\mathcal{PT}} \phi(x) = \int_C dx [\psi(-x)]^* \phi(x), \quad (7.10)$$

donde C es un contorno contenido en las cuñas de Stokes. Sin embargo, esta suposición de un producto interno no es correcta para formular una teoría cuántica válida porque la norma de un estado no es necesariamente positiva.

- (c) *El producto interno \mathcal{CPT}* . Para construir un producto interno con una norma positiva para un hamiltoniano no hermítico con una simetría \mathcal{PT} no rota, es necesario construir el operador C mencionado anteriormente y debe conmutar tanto con H como con \mathcal{PT} . El producto interno con respecto a la conjugación \mathcal{CPT} se define como

$$\langle \psi | \phi \rangle^{\mathcal{CPT}} = \int dx \psi^{\mathcal{CPT}}(x) \phi(x), \quad (7.11)$$

donde $\psi^{\mathcal{CPT}}(x) = \int dx' \mathcal{C}(x, x') \phi^*(-x')$. Demostraremos más adelante que este producto interior satisface los requisitos para que la teoría cuántica definida por H tenga un espacio de Hilbert con una norma positiva y una evolución temporal unitaria, pero antes debemos demostrar cómo normalizar.

- (d) *Normalización \mathcal{PT} simétrica de las funciones propias y la extraña relación de completitud*. Demostramos en (3.10) que las funciones propias $\psi_n(x)$ de H también lo son del operador \mathcal{PT} con autovalor $\lambda = e^{i\alpha}$, donde λ y α dependen de n , $\lambda_n = e^{i\alpha n}$. No olvidemos que esto era así para valores positivos de ϵ en el hamiltoniano

$$H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon. \quad (7.12)$$

Sin pérdida de generalidad para cada n , esta fase puede ser absorbida reescalando $\phi_n(x) \rightarrow e^{-i\alpha n/2} \psi_n$ de modo que el nuevo valor propio es la unidad. También se pueden demostrar tanto numéricamente como analíticamente que el signo algebraico de la norma \mathcal{PT} de $\phi_n(x)$ es $(-1)^n$. Por tanto, definimos las funciones propias de modo que las normas \mathcal{PT} son exactamente $(-1)^n$

$$\int_C dx [\phi_n(x)]^{\mathcal{PT}} \phi_n(x) = \int_C dx [\phi_n(-x)]^* \phi_n(x) = (-1)^n. \quad (7.13)$$

donde el contorno C se encuentra en las cuñas de Stokes que se muestran en las figuras de la Sec. 5. En términos de estas funciones propias \mathcal{PT} normalizadas hay una relación simple pero inusual, de completitud:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi_n(x) \phi_n(x') = \delta(x - x'). \quad (7.14)$$

Este es un resultado no trivial que se comprobó numéricamente y finalmente, una prueba matemática se dio en [14]. Con respecto a este producto interior las funciones propias del hamiltoniano deben satisfacer:

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle = (-1)^n \delta_{mn}. \quad (7.15)$$

- (e) *Representación en el espacio de coordenadas de H y G y la función espectral Zeta*. A partir del enunciado de completitud en (7.14) podemos construir representaciones de los operadores lineales en el espacio de coordenadas. Por ejemplo, la representación del operador de paridad en el espacio de coordenadas es $\mathcal{P}(x, x') = \delta(x + x')$, tenemos

$$\mathcal{P}(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi_n(x) \phi_n(-x'). \quad (7.16)$$

También podemos construir las representaciones en el espacio de coordenadas del hamiltoniano y de la función de Green,

$$H(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n E_n \phi_n(x) \phi_n(x'), \quad (7.17)$$

$$G(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{E_n} \phi_n(x) \phi_n(x'). \quad (7.18)$$

Usando (7.14) es sencillo mostrar que G es la función inversa de H : $\int dx' H(x, x') G(x', x'') = \delta(x - x')$. Para la clase de hamiltonianos \mathcal{PT} simétricos que hemos estudiado (7.12), esta ecuación toma la forma de una ecuación diferencial para $G(x, x')$:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2(ix)^\epsilon \right) G(x, y) = \delta(x - y). \quad (7.19)$$

La ecuación (7.19) se puede resolver en términos de las funciones de Bessel en cada una de las dos regiones, $x > x'$ y $x < x'$. Luego, las soluciones se pueden unir en $x = x'$ para obtener una expresión para $G(x, x')$. Finalmente, se usa (7.9) para encontrar un fórmula exacta para la función zeta espectral para todos los valores de ϵ :

$$\sum \frac{1}{E_n} = \left[1 + \frac{\cos\left(\frac{3\epsilon\pi}{2\epsilon+8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4+\epsilon}\right)}{\cos\left(\frac{\epsilon\pi}{4+2\epsilon}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{4+\epsilon}\right)} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4+\epsilon}\right) \Gamma\left(\frac{2}{4+\epsilon}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{4+\epsilon}\right)}{(4+\epsilon)^{\frac{4+2\epsilon}{4+\epsilon}} \Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{4+\epsilon}\right) \Gamma\left(\frac{2+\epsilon}{4+\epsilon}\right)}. \quad (7.20)$$

- (f) *Construcción del operador \mathcal{C}* . La mayor dificultad con la que nos encontramos a la hora de formular la teoría cuántica es que el espacio de Hilbert está lleno de estados propios de energía, de los cuales la mitad tiene norma 1 y la mitad tiene norma -1 . La norma de los estados conlleva una interpretación probabilística y una probabilidad negativa no tiene sentido. El problema de los autoestados de energía con norma positiva y norma negativa es análogo al problema que Dirac encontró al formular la ecuación de onda en teoría cuántica relativista [15]. Para solucionar este problema, Dirac interpretó los estados con norma negativa en términos de antipartículas.

Como se ha mencionado, se observa que en cualquier teoría que tenga una simetría \mathcal{PT} no rota existe una simetría adicional del hamiltoniano representada con el operador lineal \mathcal{C} . Esta simetría está conectada con el hecho de que hay igual número de estados con norma positiva y con norma negativa [13]. Podemos construir el operador \mathcal{C} explícitamente en términos de los estados propios de energía del hamiltoniano. La representación en el espacio de posiciones:

$$\mathcal{C}(x, x') = \sum_n \phi_n(x) \phi_n(x'). \quad (7.21)$$

Obsérvese que esta ecuación es idéntica al enunciado de completitud en (7.14) excepto que no aparece el factor $(-1)^n$. De las ecuaciones (7.14) y (7.15) podemos verificar que el cuadrado de \mathcal{C} es la unidad ($\mathcal{C}^2 = 1$):

$$\int dx' \mathcal{C}(x, x') \mathcal{C}(x', x'') = \delta(x - x''). \quad (7.22)$$

Como $\mathcal{C}^2 = 1$, los valores propios de \mathcal{C} son ± 1 . \mathcal{C} conmuta tanto con el hamiltoniano H y el operador \mathcal{PT} , por tanto las funciones propias de H tienen valores definidos de \mathcal{C} .

Además,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\phi_n(x) &= \int dy \mathcal{C}(x, y) \phi_n(y) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(x) \int dy \phi_m(y) \phi_n(y) = (-1)^n \phi_n(x).\end{aligned}\tag{7.23}$$

Este nuevo operador \mathcal{C} se parece al operador de conjugación de carga en teoría cuántica de campos. El operador \mathcal{C} es el observable que representa la signatura de la norma \mathcal{PT} de un estado.

Los dos operadores \mathcal{P} y \mathcal{C} son raíces cuadradas distintas del operador unitario $\delta(x-x')$. De hecho, el operador paridad \mathcal{P} es real y \mathcal{C} es complejo. Además, estos dos operadores no conmutan; específicamente,

$$(\mathcal{CP})(x, x') = \sum_n \phi_n(x) \phi_n(-x'),\tag{7.24}$$

mientras que

$$(\mathcal{PC})(x, x') = \sum_n \phi_n(-x) \phi_n(x').\tag{7.25}$$

No obstante, \mathcal{C} sí conmuta con \mathcal{PT} .

- (g) *Norma positiva y unitaridad en mecánica cuántica \mathcal{PT} simétrica.* Teniendo construido el operador \mathcal{C} , podemos usar el nuevo producto interno \mathcal{CPT} definido en (7.11). El operador de evolución temporal es e^{iHt} y como H conmuta con \mathcal{PT} y con \mathcal{CPT} , tanto el producto interno \mathcal{PT} y el producto interno \mathcal{CPT} permanece invariante en el tiempo a medida que evolucionan los estados. Sin embargo, a diferencia del producto interno \mathcal{PT} , el producto interno \mathcal{CPT} es definido positivo porque \mathcal{C} aporta un factor de -1 cuando actúa sobre estados con norma \mathcal{PT} negativa. En términos del conjugado \mathcal{CPT} , la condición de completitud es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) [\mathcal{CPT} \phi_n(x')] = \delta(x - x').\tag{7.26}$$

7.3. Comparación de ambas teorías

En la formulación de una teoría cuántica definida por un hamiltoniano hermítico, el espacio de estados de Hilbert se especifica incluso antes de que se conozca el hamiltoniano. El producto interno (7.1) se define con respecto a la conjugación hermítica (conjugación compleja y transposición), luego se elige el hamiltoniano, y los autovectores y autovalores del hamiltoniano están determinados. Por el contrario, el producto interno de una teoría cuántica definida por un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico depende del hamiltoniano en sí mismo y por lo tanto, se determina a medida que se va estudiando. Uno debe calcular los autoestados de H antes conocer el espacio de Hilbert y el producto interno asociado de la teoría, ya que el operador \mathcal{C} se define y construye en términos de los estados propios del hamiltoniano. El espacio de Hilbert, que consta de todas las combinaciones

lineales complejas de los estados propios de H , así como el producto interno \mathcal{CPT} , están determinados por estos autoestados. El operador \mathcal{C} no existe como una entidad distinta en la mecánica cuántica con hamiltonianos hermíticos. De hecho, si permitimos que el parámetro ϵ en (7.12) tienda a 0, el operador \mathcal{C} en este límite se vuelve idéntico a \mathcal{P} y el operador \mathcal{CPT} se convierte en \mathcal{T} . Por lo tanto, el producto interno definido con respecto a la conjugación \mathcal{CPT} se reduce al producto interno de la mecánica cuántica convencional y (7.14) se reduce a la habitual relación de completitud (7.5).

Finalmente, en la mecánica cuántica habitual, la integral del producto interno debe tomarse a lo largo del eje real, sin embargo, el producto interior \mathcal{CPT} es independiente de la elección del contorno de integración C , siempre que C se encuentre dentro de las cuñas de Stokes asociadas con las condiciones de contorno para el problema de los valores propios.

7.4. Observables

En la mecánica cuántica ordinaria la condición para que un operador lineal A sea un observable es que $A = A^\dagger$. En mecánica cuántica \mathcal{PT} simétrica la condición equivalente es que el operador A debe obedecer la condición $A^T = \mathcal{CPT}A\mathcal{CPT}$, donde A^T es la transpuesta de A . Esta condición también garantiza que el valor esperado de A sea real. El propio operador \mathcal{C} satisface este requisito, por lo que es un observable. El hamiltoniano es un observable en ambas teorías, en cambio, los operadores posición y momento lineal no lo son en mecánica cuántica \mathcal{PT} simétrica.

8. Ejemplo ilustrativo de una matriz 2×2 de un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico

En esta sección usaremos un modelo simple, tratado en [16], para explicar de manera intuitiva una transición de fase \mathcal{PT} y para ilustrar la construcción de una teoría cuántica descrita por un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico.

Supongamos una caja en la que está entrando energía. El hamiltoniano de este sistema se puede representar con una matriz 1×1 :

$$H = [a + ib], \quad (8.1)$$

donde b representa la ganancia del sistema. Este hamiltoniano es obviamente no hermítico. Si la energía estuviera saliendo de la caja tendríamos $H = [a - ib]$, de forma que si tuviéramos dos cajas como en la Fig. 16a, el hamiltoniano correspondiente se podría representar con la siguiente matriz 2×2 :

$$H = \begin{bmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

Este hamiltoniano es \mathcal{PT} simétrico, ya que al aplicar el operador paridad intercambiaríamos las cajas de lugar

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

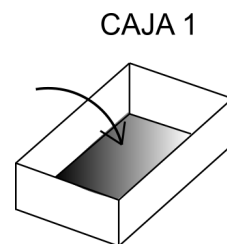
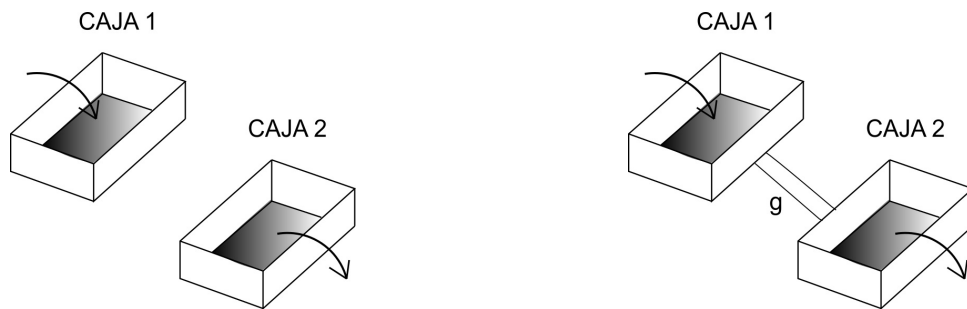


Figura 15: Caja que absorbe energía.

y el operador inversión temporal corresponde a tomar el complejo conjugado.



(a) Sistema de dos cajas. La caja 1 es un sumidero de energía y la caja 2 emite energía.. (b) Sistema de dos cajas (sumidero y fuente) de energía acopladas.

Figura 16: Sistemas de dos cajas \mathcal{PT} simétricos.

A pesar de ser \mathcal{PT} simétricos, los valores propios de (8.2) son complejos, por lo que el sistema se encuentra en una fase de simetría \mathcal{PT} rota. El sistema de dos cajas puede alcanzar el equilibrio si acoplamos las cajas como se indica en la Fig. 16b, lo que se podría interpretar como una pipeta que une las dos cajas. Este acoplamiento permite que el exceso de energía en la caja de la izquierda pase a la caja de la derecha. Escribiendo los elementos de la diagonal en forma polar, el hamiltoniano del sistema sería

$$H = \begin{bmatrix} r e^{i\theta} & g \\ g & r e^{-i\theta} \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

donde g mide la intensidad del acoplo. Las autovalores del hamiltoniano son los que cumplen la ecuación secular real:

$$E_{\pm} = r \cos \theta \pm (g^2 - r^2 \sin^2 \theta)^{1/2}. \quad (8.5)$$

Visto este resultado, hay claramente dos regiones a considerar: una para la cual la raíz cuadrada en (8.5) es real y la otra para la cual es imaginaria. Los autovalores se vuelven reales si $g^2 > r^2 \sin^2 \theta$, por lo tanto, si el acoplamiento es lo suficientemente fuerte, el exceso de energía en la caja de la izquierda puede fluir hacia la caja de la derecha lo suficientemente rápido como para que el sistema permanezca en equilibrio. Cuando esto sucede, el sistema está en una fase \mathcal{PT} no rota. Cuando $g^2 < r^2 \sin^2 \theta$, los valores propios forman un par conjugado complejo. Esta es la región de simetría \mathcal{PT} rota. La transición de fase entre las fases no rota y rota ocurre cuando la constante de acoplamiento g excede el valor crítico dado por $g_{crit}^2 = r^2 \sin^2 \theta$.

Para construir la teoría \mathcal{PT} se seguirá el procedimiento descrito en [6]. En la región \mathcal{PT} no rota, los autoestados simultáneos de los operadores H y \mathcal{PT} son

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} \\ e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |E_-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2 \cos \alpha}} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \\ -e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

donde

$$\sin \alpha = \frac{r}{g} \sin \theta. \quad (8.7)$$

El producto interno \mathcal{PT} nos da

$$\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle^{\mathcal{PT}} = \pm 1 \quad \text{y} \quad \langle E_{\pm} | E_{\mp} \rangle^{\mathcal{PT}} = 0. \quad (8.8)$$

Con respecto al producto interno \mathcal{PT} , el espacio vectorial formado por los estados propios de energía tiene una métrica de signatura $(+, -)$.

A continuación, construimos el operador \mathcal{C} usando (7.21):

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} i \sin \alpha & 1 \\ 1 & -i \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

\mathcal{C} es distinto de H y \mathcal{P} y tiene la propiedad clave:

$$\mathcal{C} |E_{\pm}\rangle = \pm |E_{\pm}\rangle. \quad (8.10)$$

El operador \mathcal{C} conmuta con H y se puede comprobar que $\mathcal{C}^2 = 1$. Los autovalores de \mathcal{C} son precisamente los signos de las normas \mathcal{PT} de los correspondientes estados propios. Usando el operador \mathcal{C} , podemos construir la nueva estructura interna del producto \mathcal{CPT} , de manera que

$$\langle E_{\pm} | E_{\pm} \rangle^{\mathcal{PT}} = 1. \quad (8.11)$$

Por lo tanto, el espacio de Hilbert bidimensional compuesto por $|E_{\pm}\rangle$, con el producto interno $\langle \quad | \quad \rangle^{\mathcal{CPT}}$, tiene la signatura $(+, +)$.

Finalmente, probamos que la norma \mathcal{CPT} de cualquier vector es positiva. Para un vector arbitrario $\psi = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, donde c y d son números complejos,

$$T\psi = \begin{pmatrix} c^* \\ d^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{PT}\psi = \begin{pmatrix} d^* \\ c^* \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{CPT}\psi = \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} c + id \sin \alpha \\ d - ic \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Por lo que

$$\langle \psi | \psi \rangle^{\mathcal{CPT}} = \frac{1}{\cos \alpha} [c^*c + d^*d + i(d^*d - c^*c) \sin \alpha]. \quad (8.13)$$

Si escribimos c como $c = x + iy$ y $d = u + iv$, donde ahora x, y, u y v son reales,

$$\langle \psi | \psi \rangle^{\mathcal{CPT}} = \frac{1}{\cos \alpha} (x^2 + v^2 + 2xv \sin \alpha + y^2 + u^2 - 2yu \sin \alpha) \quad (8.14)$$

es siempre positivo y se anula solo cuando $x = y = u = v = 0$. Como $\langle u |$ denota el conjugado \mathcal{CPT} de $|u\rangle$, la condición de completitud queda

$$|E_+\rangle \langle E_+| + |E_-\rangle \langle E_-| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Es más, usando el conjugado \mathcal{CPT} $\langle E_{\pm}|$, podemos representar \mathcal{C} como

$$\mathcal{C} = |E_+\rangle \langle E_+| - |E_-\rangle \langle E_-|. \quad (8.16)$$

En el límite $\theta \rightarrow 0$, el hamiltoniano (8.4) se convierte en hermítico y el operador \mathcal{C} se convierte en el operador paridad \mathcal{P} . Por tanto, la invariancia \mathcal{P} se reduce a la condición estándar de hermiticidad para una matriz simétrica; $H = H^*$.

Este modelo de fuente y sumidero de dos cajas explica lo realizado en el experimento de la cavidad de microondas descrito en [17]. En este experimento se utilizan dos cavidades de microondas acopladas (una que contiene una fuente y la otra que contiene un sumidero) y a medida que se varía el acoplamiento, se observa la transición de fase \mathcal{PT} . El modelo de fuente y sumidero también explica los experimentos de óptica de dos canales en [18, 19]. En estos experimentos, la luz viaja por un par de guías de ondas acopladas, una con pérdida y otra con ganancia.

9. Conclusiones

El estudio de la mecánica cuántica ha estado limitado durante muchos años por la condición de hermiticidad del hamiltoniano. Ha sido en los últimos años del siglo XX cuando se empezaron a encontrar espectros reales de energía de hamiltonianos no hermíticos. Estos hamiltonianos son simétricos bajo reflexión espacial \mathcal{P} y temporal \mathcal{T} . Los autovalores de un hamiltoniano hermítico son todos reales, no obstante, los autovalores de un hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico pueden ser reales o complejos dependiendo de si se está en una fase \mathcal{PT} simétrica, donde las autofunciones de \mathcal{PT} coinciden con las de dicho hamiltoniano, o si se está en una fase de simetría \mathcal{PT} rota. Esta transición de fase \mathcal{PT} se ha ejemplificado con dos sistemas acoplados, uno con aumento y el otro con pérdida de energía. Se ha visto que si este acoplo es lo suficientemente fuerte, el sistema está en equilibrio y estamos en una fase \mathcal{PT} simétrica y los autovalores son reales. Este sencillo modelo ha servido para explicar varios experimentos que se han hecho recientemente acerca de la ruptura de simetría \mathcal{PT} .

Se ha visto que los hamiltonianos \mathcal{PT} son una deformación compleja de los hamiltonianos hermíticos. El hamiltoniano $H = \hat{p}^2 - \hat{x}^4$ ha sido tratado de manera particular en este trabajo para demostrar que algunos sistemas físicos, que podrían parecer inestables, en el plano complejo pueden ser estables. Extendiendo la mecánica cuántica al plano complejo se consiguen generar nuevas teorías cuánticas \mathcal{PT} simétricas. Estas nuevas teorías cuánticas no están en conflicto con la teoría cuántica convencional, son una generalización de esta última, ya que la condición $H = H^{\mathcal{PT}}$ es menos restrictiva que $H = H^\dagger$. Para ver esto se ha desarrollado un formalismo análogo al de teoría cuántica habitual pero en este caso con hamiltonianos \mathcal{PT} simétricos.

A lo largo del trabajo se ha demostrado cómo respetando esta simetría se obtienen autovalores reales, además de preservarse la probabilidad, requisito imprescindible para una teoría cuántica correcta. También se ha introducido la simetría intrínseca que existe detrás de una simetría \mathcal{PT} no rota; la llamada simetría \mathcal{C} , ya que en física de partículas corresponde al operador conjugación de carga. Esta simetría fue descubierta recientemente y es crucial para poder construir un producto interno, el producto \mathcal{CPT} , y trabajar con un espacio de Hilbert cuyos estados tengan norma positiva y sea posible una interpretación probabilística de esta.

Estudiando las familias de autovalores y las condiciones de contorno de varios hamiltonianos, se ha demostrado que el número de familias de autovalores que puede tener un hamiltoniano depende de las condiciones de contorno y que por lo tanto, un mismo hamiltoniano puede tener distintos espectros de autovalores reales. Además, hemos tratado la aparición de estos autovalores reales observando trayectorias clásicas cerradas de las partículas que, junto con la condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld, nos proporcionan una fórmula aproximada para los niveles de energía.

Es cierto que la simetría \mathcal{PT} inicialmente era un concepto puramente matemático, pero a partir de 2009 se han realizado multitud de experimentos, muchos de ellos realizados con la óptica \mathcal{PT} , como por ejemplo, los ya mencionados [18, 19]. Aún queda mucho por estudiar en este campo emergente de la física y estamos a la espera de desarrollos futuros.

A. Apéndice A: Operadores hermíticos y autoadjuntos

Este apéndice resume los conceptos del artículo [20].

Definición: Decimos que un operador A con dominio $\mathcal{D}(A)$ es hermítico o simétrico si:

$$\langle A\phi|\psi\rangle = \langle\phi|A\psi\rangle, \quad \forall|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{D}(A) \quad (\text{A.1})$$

Al construir el adjunto se hace sobre el dominio más amplio posible, por ende, la hermiticidad requiere que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger)$ y que A^\dagger coincida con A sobre las funciones contenidas en $\mathcal{D}(A)$, o sea $A^\dagger\phi = A\phi, \phi \in \mathcal{D}(A)$.

Definición: Un operador es autoadjunto si este coincide con su adjunto $A = A^\dagger$, y en particular, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\dagger)$.

En definitiva, la diferencia principal es que los dominios de los operadores A y A^\dagger deben coincidir, mientras que la hermiticidad solo exige que el dominio de A este contenido en el de A^\dagger .

Hamiltoniano $H = \hat{p}^2 - \hat{x}^4$

La particularidad esencial de este hamiltoniano es que el potencial no está acotado por debajo. Esto implica que el operador puede no ser autoadjunto. Vamos a demostrar esto en el espacio de funciones suaves, que decaen rápidamente. En este caso, si inicialmente definimos H en dicho dominio, el adjunto será “el mismo” operador (esto es, dado por la misma fórmula) pero en el dominio más amplio posible

$$\mathcal{D}(H^\dagger) = \left\{ \phi \in \mathcal{D}(H^\dagger) : \phi \text{ y } -\frac{d^2\phi}{dx^2} - x^4\phi \in L^2(\mathbb{R}) \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Se puede demostrar que este operador ni siquiera es hermítico en este dominio, por tanto, implica que H no es autoadjunto. Consideremos dos funciones $\phi, \psi \in \mathcal{D}(H^\dagger)$. Para que sea hermítico se tiene que cumplir

$$\langle H^\dagger\phi|\psi\rangle = \langle\phi|H^\dagger\psi\rangle. \quad (\text{A.3})$$

Integrando dos veces por partes el término de la derecha, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (H^\dagger\phi)^*\psi = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \left[-\frac{d\phi^*}{dx}\psi + \phi^*\frac{d\psi}{dx} \right]_a^b + \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^* H^\dagger\psi. \quad (\text{A.4})$$

Para que se cumpla (A.3) el término de frontera tiene que hacerse cero para todas las funciones en el dominio de H ,

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \left[-\frac{d\phi^*}{dx}\psi + \phi^*\frac{d\psi}{dx} \right]_a^b = 0. \quad (\text{A.5})$$

Sin embargo, si consideramos la siguiente función:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -N, (N > 0), \\ g(x), & -N \leq x \leq N, \\ \frac{1}{x} \exp(-ix^3/3), & x > N, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

donde se ha elegido $g(x)$ de forma que $\varphi(x)$ pertenezca a $\mathcal{D}(H^\dagger)$ y hacemos $\phi = \varphi$, el límite queda:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{d\varphi^*}{dx} \varphi + \varphi^* \frac{d\varphi}{dx} \right]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{-ix^3 + 1}{x^3} + \left(\frac{-ix^3 + 1}{x^3} \right)^* \right]_a^b = 2i. \quad (\text{A.7})$$

El término de frontera no es cero y, por tanto, en este dominio el operador H^\dagger no es hermítico, lo que implica que H tampoco es autoadjunto.

Referencias

- [1] E. Caliceti, S. Graffi y M. Maioli, “Perturbation theory of odd anharmonic oscillators,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 75, no. 1, pp. 51–66, 1980.
- [2] A. A. Andrianov, “The large n expansion as a local perturbation theory,” *Annals of Physics*, vol. 140, no. 1, pp. 82–100, 1982.
- [3] T. Hollowood, “Solitons in affine Toda field theories,” *Nuclear Physics B*, vol. 384, no. 3, pp. 523–540, 1992.
- [4] F. G. Scholtz, H. B. Geyer y F. J. W. Hahne, “Quasi-hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle,” *Annals of Physics*, vol. 213, no. 1, pp. 74–101, 1992.
- [5] C. M. Bender y S. Boettcher, “Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 24, p. 5243, 1998.
- [6] C. M. Bender, “Making sense of non-hermitian hamiltonians,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 70, no. 6, p. 947, 2007.
- [7] C. M. Bender, *PT symmetry: In quantum and classical physics*. World Scientific Publishing, 2018.
- [8] C. M. Bender, S. Boettcher y P. N. Meisinger, “PT-symmetric quantum mechanics,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 40, no. 5, pp. 2201–2229, 1999.
- [9] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *et al.*, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. National bureau of standards Washington, DC, 1972.
- [10] D. J. Griffiths y D. F. Schroeter, *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [11] S. Schmidt y S. P. Klevansky, “Generation of families of spectra in PT-symmetric quantum mechanics and scalar bosonic field theory,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 371, no. 1989, p. 20120049, 2013.
- [12] C. M. Bender, D. C. Brody, J. H. Chen, H. F. Jones, K. A. Milton y M. C. Ogilvie, “Equivalence of a complex PT-symmetric quartic hamiltonian and a hermitian quartic hamiltonian with an anomaly,” *Physical Review D*, vol. 74, no. 2, p. 025016, 2006.
- [13] C. M. Bender, D. C. Brody y H. F. Jones, “Complex extension of quantum mechanics,” *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 27, p. 270401, 2002.
- [14] S. Weigert, “Completeness and orthonormality in PT-symmetric quantum systems,” *Physical Review A*, vol. 68, no. 6, p. 062111, 2003.
- [15] P. A. M. Dirac, “A theory of electrons and protons,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, vol. 126, no. 801, pp. 360–365, 1930.

- [16] C. M. Bender, B. K. Berntson, D. Parker y E. Samuel, “Observation of PT phase transition in a simple mechanical system,” *American Journal of Physics*, vol. 81, no. 3, pp. 173–179, 2013.
- [17] S. Bittner, B. Dietz, U. Günther, H. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter y F. Schäfer, “PT symmetry and spontaneous symmetry breaking in a microwave billiard,” *Physical review letters*, vol. 108, no. 2, p. 024101, 2012.
- [18] A. Guo, G. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. Siviloglou y D. Christodoulides, “Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials,” *Physical Review Letters*, vol. 103, no. 9, p. 093902, 2009.
- [19] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev y D. Kip, “Observation of parity-time symmetry in optics,” *Nature physics*, vol. 6, no. 3, pp. 192–195, 2010.
- [20] K. M. Fonseca y F. Torres-Ardila, “De la diferencia entre operadores hermíticos y autoadjuntos,” *MOMENTO*, no. 47, pp. 15–31, 2013.