



---

# Sistema dinamikoen egonkortasun analisi, bifurkazioak eta kaosa

---

Gradu Amaierako Lana  
Matematikako Gradua

Iñigo Jimenez Ciga

Carlos Gorria Corres  
Irakasleak zuzendutako lana

Leioa, 2021eko ekainaren 18an



# Aurkibidea

<b>Sarrera</b>	<b>v</b>
<b>1 Sistema dinamikoaren oinarriko kontzeptuak</b>	<b>1</b>
<b>2 Sistema dinamikoaren egonkortasun analisia</b>	<b>3</b>
2.1 Lyapunoven egonkortasuna . . . . .	3
2.2 LaSalleren inbariantza printzipioa . . . . .	7
2.3 Lyapunoven metodo ez-zuzena. Linealizazioa . . . . .	9
<b>3 Sistema dinamikoaren puntu kritikoaren bifurkazioak</b>	<b>11</b>
3.1 Zero balio propio bakarra. Bifurkazioak . . . . .	12
1 Zeladura-nodo bifurkazioa . . . . .	12
2 Bifurkazio transkritikoa . . . . .	13
3 Sardexka bifurkazioa . . . . .	15
3.2 Puntu singularren definizioa eta sailkapena . . . . .	16
1 Puntu bikoitzak . . . . .	18
2 Goi-erpina . . . . .	19
3.3 Hopf bifurkazioa . . . . .	20
3.4 Barietate zentralen teoria . . . . .	23
<b>4 Atraktore arraroak. Lorenzen atraktorea</b>	<b>27</b>
4.1 Poincaré-Bendixsonen teorema . . . . .	27
4.2 Atraktore arraroak . . . . .	28
4.3 Lorenzen atraktorea . . . . .	30
<b>5 Ondorioak eta analisia jarraitzeko aukerak</b>	<b>39</b>
<b>A Ariketa ebatziak</b>	<b>41</b>
A.1 Zero balio propioko sistema dinamikoaren bifurkazioak . . . . .	41
A.2 Lorenzen sistemaren propietateak . . . . .	44
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>



# Sarrera

Fisikaren arloan denboraren kontzeptua oso garrantzitsua da, izan ere, oinarritzko magnitude fisikoen artean dago, masa, luzera, korrante elektrikoa edota molekin batera. Baina gure munduan denbora eta eboluzioa elkarrekin doaz. Ez soilik fisikan, biologiako prozesu gehienetan denborak esangura handia du. Horren adibide nabarmenetako bat dugu populazioen dinamika.

Matematikak gizakion eguneroko bizitza modeliza dezakeela argi badugu ere, are gehiago modeliza daitezke denboraren menpe aldatzen diren fenomeno fisikoak. Aldaketa hitzak eta deribatu hitzak sinonimo bezala jokatu ohi dute matematikaren munduan, eta sistema dinamikoak dira horren adierazpen ezagunenetariko bat.

Kalkulu diferentzialaren aita izan zen Isaac Newton matematikari eta fisikari britaniarrari zor dizkiogu ekuazio diferentzialen lehen sistemak. Newtonek bi gorputzen arteko indar grabitatorioak eragindako higidurak aztertu zituen, sistema dinamikoaren lehenengo erabilera izan zelarik.

Ondoren ekuazio diferentzialak beste milaka esparrutan aplikatu litezkeela ohartu ziren. Meteorologiaren mundura ere iritsi ziren, eguraldia aurre-sateko, esaterako. Ekuazio diferentzialen erabilera dagokionez, sistema dinamikoak berrindatu zituen matematikaria aipatu beharra dago, Henri Poincaré. Esan dugun bezala, Newton izan zen indar grabitatorioaren menpeko bi gorputzen higidura aztertu zuena. Harrezkero, hiru gorputzen higidura aztertzeari ekin zioten, baina garai hartan soluzio determinista bat existituko zela pentsatzen zen. Ordea, Poincaré sistema kaotiko bat atzetik zegoela ondorioztatzeko gai izan zen.

Arestian esan dugun moduan, sistema dinamikoaren bidez eguraldia modeliza daiteke. Edward Lorenzen helburua hori izan zen, 1963an zehaztutako hiru ekuaziotako sistema dinamikoaren bidez. Kalkulu konputazionalak egin ostean, hasierako baldintza oso hurbilek orbita oso desberdinak ziztuztela ohartu zen, eta hau izan zen atraktore arraroetatik aurkitu zen lehenengoa (puntu kritiko zein ziklo limitez gain).

Lan honen helburua sistema dinamikoaren esparruari buruzko ezagutza nagusiak planteatzea da, hala nola, egonkortasuna, bifurkazioak eta kaosa. Matematikako graduan sistema dinamikoaren inguruko irakasgai bat ez dagoenez, oinarritzko kontzeptuak finkatu dira lanean. Ekuazio diferentzialak lantzen dira, eta hirugarren mailan irakatsitako irakasgai baliatuko gara

ekuazio diferentzialen sistemak planteatu eta aztertzeko. Gainera, zenbakizko metodoak erabiliko ditugu sistemen zenbakizko soluzioa kalkulatu ahal izateko, askotan sistema horien soluzioak ez baitira kalkulatzeko orduan sinpleak izango.

Lehenik sistema dinamikoak definituko ditugu, eta baita sistema horien puntu kritikoak. Ondoren, puntu kritikoen egonkortasuna aztertuko dugu, Lyapunoven egonkortasunaren teorema zein beste teorema erabilgarri batzuk enuntziatuz. Egonkortasunaren gaiaren ostean, parametrodun sistema dinamikoetan zentratuko gara, eta sistemetan eman daitezkeen bifurkazio mota batzuk aztertuko ditugu. Azkenik, sistema kaotikoak definitu eta identifikatzeko ezaugarriak emango ditugu.

Lana ez da, ordea, sistema dinamikoen kontzeptu sakabanatu eta elkarren artean erlaziorik gabekoak plazaratzea. Lan honen azken helburua Lorenzen sistema aztertzea da, aurretik azaldutako teoria aplikatuz.

Azkenik, sistema dinamikoen adarra matematika aplikatu zein puruetan koka daiteke, izan ere, sistemak erabilgarriak baitira fenomeno fisikoak lantzeko, baina analisisian eta geometrian oinarritzen dira hauen emaitzak. Bi mundu horiek bateratzeak bereziak egiten ditu sistema dinamikoak, eta horrek eraman nau esparru hau lantzerara.

# 1. kapitulua

## Sistema dinamikoen oinarrizko kontzeptuak

Lehenik eta behin, lan honen aztergaia izango den kontzeptu matematikoa, hots, sistema dinamikoak, definituko dugu. Nahiz eta definizio ugari dauden, [7] liburukoa da orokortuena dagoena.

**Definizioa 1.0.1.** Izan bitez  $(\mathcal{M}, \rho)$  espazio metriko osoa eta  $\mathbb{T}$  hurrengo multzoetako bat:  $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$  edo  $\mathbb{Z}_+$ . Orduan,  $\phi : \mathbb{T} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  aplikazioa bada,  $(\{\phi(t, \cdot)\}_{t \in \mathbb{T}}, \mathcal{M}, \rho)$  sistema dinamikoa dela esango dugu baldin eta hurrengo propietateak betetzen badira:

- (i)  $\phi(0, u) = u$  bada,  $u \in \mathcal{M}$  guztietarako,
- (ii)  $\phi(t + s, u) = \phi(t, \phi(s, u))$  bada,  $t, s \in \mathbb{T}$  eta  $u \in \mathcal{M}$  guztietarako, eta
- (iii) baldin eta  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$  bada,  $(t, u) \mapsto \phi(t, u)$  aplikazioa jarraitua bada; aldiz,  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$  bada,  $u \mapsto \phi(t, u)$  aplikazioa jarraitua bada  $\mathcal{M}$ -n,  $t \in \mathbb{T}$  guztietarako.

Gainera,  $\mathbb{T}$ -ri denbora multzoa eta  $\mathcal{M}$ -ri fase espazioa deritze.

Denbora multzoaren arabera, bi motatako sistema dinamiko defini daitezke.  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$  bada, sistema dinamikoa jarraitua dela esango dugu. Aldiz,  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$  bada, sistema dinamikoa diskretua dela esango dugu.

Lan honetan zehar  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$  motatako fase espazioak aztertuko ditugu, non  $n \in \mathbb{N}$  den, eta sistema dinamiko jarraituak izango dira gure aztergai nagusia.

Nahiz eta definizio orokorra fase espazio metrikoetarako ematen den,  $\mathbb{R}^n$  fase espazioko sistema dinamiko jarraituetan definizioko  $\phi(t, x_0)$  funtzioa ( $t \in \mathbb{T}$  eta  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  izanik)

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x(t), t), & x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{T}, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Cauchyren problemaren soluzioen multzotzat karakteriza daiteke, non  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  den,  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{T})$  izanik.

Ohar gaitezen sistema dinamikoen teorian orokortua dagoela  $\dot{x}$  notazioa erabiltzea  $x'(t)$  deribatua adierazteko.

Beraz, sistema dinamiko jarraituak ekuazio diferentzialen sistemen bidez karakteriza daitezke, sistema hauen soluzioak aztertuz. Cauchyren problemaren soluzio bakoitzari orbita deritzo, eta orbita guztien multzoari fluxua.

**Definizioa 1.0.2.** Izan bedi (1.1) sistema dinamiko jarraitua. Orduan, existitzen bada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funtzioa non  $f(x(t)) = g(x(t), t)$  betetzen den  $t \in \mathbb{T}$  guztietarako, sistema dinamikoa autonomoa dela esango dugu.

Ondorioz, sistema dinamiko jarraitu autonomoak

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T} \quad (1.2)$$

formakoak izango dira, non  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  den,  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  izanik.

Gainera, sistema dinamikoek puntu berezi batzuk dituzte, puntu kritiko deiturikoak, eta ekuazioen sistemaren soluzio konstanteak dira.

**Definizioa 1.0.3.** Izan bitez (1.2) sistema dinamikoa eta  $x = x_0 \in \mathbb{R}^n$  puntua. Orduan,  $x = x_0$  puntu kritikoa dela esango dugu baldin eta  $f(x_0) = 0$  bada.

Sistema dinamikoen oinarri garrantzitsuenetakoa den puntu kritikoen analisiari ekin baino lehen, puntu hauen kokalekua jatorrira garraiatzea komenigarria da. Horretarako, (1.2) sistemaren puntu kritiko bat  $x = x_0$  bada, nahikoa da  $y = x - x_0$  aldagai-aldaketa egitea,  $y$  aldagairako  $y = 0$  puntu kritiko bihurtuz, izan ere,

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(x - x_0) = \frac{dx}{dt} = f(x(t)) = f(y(t) + x_0) = h(y(t)) \quad (1.3)$$

sistema berria lortuko genuke, (1.2) sistemarekiko baliokidea, eta  $h(0) = f(0 + x_0) = 0$  bedintza betetzen duena, hots,  $y = 0$  puntu kritikoa izango da.

Gainera, gerta liteke sistema dinamikoak denbora eta espazio aldagaiak izateaz gain, parametroak agertzea, hau da,

$$\dot{x} = f(x(t), \lambda), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p \quad (1.4)$$

adierazpena duen sistema dinamikoa lortzea, non  $p \in \mathbb{N}$  den. Bifurkazioen gaia aztertzerakoan hauen beharra izango dugu.



## 2. kapitulua

# Sistema dinamikoen egonkortasun analisia

Sistema dinamikoen azterketa sakon batean soluzioen egonkortasunak garrantzi handia du. Kapitulu honetan puntu kritikoen sailkapen bat egingo dugu. Horretarako, puntuen inguruneetan orbiten jarrera aztertuko dugu, hots, orbitak puntuetatik aldendu edo hurbildu egiten diren.

Kapitulu oso honetan zehar [6] erreferentziaren ildo jarraituko dugu, gehien bat, nahiz eta [9] eta [11] erreferentziak ere erabiliko ditugun, lehenengoa Lyapunoven oinarritzko teorema enuntziatzeko, eta bigarrena LaSalleren printzipioa azaltzeko.

### 2.1 Lyapunoven egonkortasuna

Orbiten egonkortasunari buruzko teoria gauzatu eta garatu zuen lehenengoa Aleksandr Lyapunov izan zen, 1899 urtean zehar. Matematikari errusiar honen lan garrantzitsuenak sistema dinamikoen soluzioen egonkortasunaren inguruan zetzaten.

**Definizioa 2.1.1.** Izan bedi  $x = 0$  (1.2) sistema dinamikoaren puntu kritikoa. Orduan,  $x = 0$  egonkorra dela esango dugu baldin eta  $\varepsilon > 0$  guztietarako existitzen bada  $\delta > 0$  non

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0 \text{ guztietarako.} \quad (2.1)$$

Bestalde,  $x = 0$  egongaitza dela esango dugu baldin eta  $x = 0$  egonkorra ez bada.

Azkenik,  $x = 0$  asintotikoki egonkorra izango da baldin eta egonkorra bada eta  $x(t) \rightarrow 0$  bada  $t \rightarrow \infty$  denean,  $\|x(0)\| < \delta$  betetzen duten  $x(t)$  orbita guztietarako.

Aurreko kapituluan ikusi dugun bezala,  $x = x_0$  puntu kritikoa jatorrira garraia daiteke, sistema baliokide bat lortuz. Hori dela eta, aurreko

definizioan, eta hemendik aurrera, soilik  $x = 0$  puntu kritikoaren kasua aipatzen da.

Lyapunovek orbiten egonkortasuna aztertzeko funtzio laguntzaile batzuk erabili zituen, orokorrean ezaugarri berezirik ez dutenak, eta Lyapunoven funtzioak deiturikoak.

Izan bedi

$$V : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

aplikazioa non  $0 \in D$  betetzen den eta  $V \in \mathcal{C}^1(D)$  den. Orduan,  $V(x)$ -ren deribatua aztertuz gero (1.2) sistema dinamikoaren ibilbideetan zehar,  $\dot{V}(x)$  bezala adieraziz,

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \nabla V \cdot f(x) \quad (2.3)$$

adierazpena lortuko genuke.

Gainera, ohar gaitezen  $V$  Lyapunoven funtzioa emanik, eta  $(x_1, \dots, x_n) \in D$  edozein puntu izanik, existitzen dela  $c \in \mathbb{R}$  non  $V(x_1, \dots, x_n) = c$  den. Halaber,  $V$  definitu positiboa bada,  $c \geq 0$  izango da, eta  $V(x) = k$  motatako gainazalak eraiki daitezke,  $k \geq 0$  izanik.

Gainazal horiek itxiak dira  $V$  definitu positiboa bada. Hori frogatzeko nahikoa da  $\mu$  erradioko eta jatorrian zentratutako esfera hartzea. Demagun  $L > 0$  dela  $V$ -k esferan hartzen duen balio minimoa. Orduan,  $V(x) = k \leq L$  gainazala eraikiz, jatorritik igaro eta esfera zeharkatzen duten zuzen guztiek  $V(x) = k$  gainazala mozten dute, jarraitutasuna dela eta. Beraz, gainazalak itxiak dira.

Behin gainazal hori zehaztuta, Lyapunoven egonkortasun teoremaren jatorria ulertzeko, suposa dezagun  $\dot{V}$  definitu negatiboa dela. Orduan,  $\dot{V}(x) < 0$  izango da  $x \in D \setminus \{0\}$  guztietarako, eta horrek esan nahi du puntu horietatik igarotako ibilbideak  $V(x) = k$  motatako gainazalak kanpotik barrura, hau da, jatorrirantz, zeharkatuko dituela. Beraz, hurrengo teorema enuntzia daiteke:

**Teorema 2.1.1** (Lyapunoven egonkortasunaren teorema). *Izan bedi  $x = 0$  (1.2) sistema dinamikoaren puntu kritikoa eta  $V$  (2.2) Lyapunoven funtzioa, non  $V(0) = 0$  eta  $V(x) > 0$  den  $x \in D \setminus \{0\}$  guztietarako eta  $\dot{V}(x) \leq 0$  den  $x \in D$  guztietarako eta  $\dot{V}(0) = 0$  den. Orduan,  $x = 0$  egonkorra da  $D$ -n.*

*Are gehiago,  $\dot{V}(x) < 0$  bada  $x \in D \setminus \{0\}$  guztietarako,  $x = 0$  asintotikoki egonkorra izango da  $D$ -n.*

*Froga.* Izan bedi  $\varepsilon > 0$  eta har dezagun  $r \in (0, \varepsilon]$  non  $\overline{B}(0, r) \subset D$  betetzen den,  $\overline{B}(0, r)$  jatorrian zentratutako eta  $r$  erradioko bola itxia izanik. Defini dezagun  $k = \min\{V(x) : \|x\| = r\}$ , positiboa dena hipotesiz,  $V(x) > 0$  baita  $x \in D \setminus \{0\}$  guztietarako.  $\lambda \in (0, k)$  guztietarako defini daiteke  $\Omega_\lambda =$

$\{x \in \overline{B}(0, r) : V(x) \leq \lambda\}$  multzo trinkoa, itxia baita eta  $\overline{B}(0, r)$ -ren barnean baitago.

Izan bedi  $x(0) \in \Omega_\lambda$ . Orduan, hipotesiz,

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.4)$$

eta ondorioz,  $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \lambda$  dugu.  $V(x)$  funtzioa jarraitua denez, existituko da  $\delta > 0$  non  $\|x\| \leq \delta$  bada,  $|V(x) - V(0)| = V(x) < \lambda$  den.

Orduan,  $\overline{B}(0, \delta) \subset \Omega_\lambda \subset \overline{B}(0, r)$  katea betetzen da. Hortaz,  $x(0) \in \overline{B}(0, \delta) \subset \Omega_\lambda$  izanez gero,  $x(t) \in \Omega_\lambda \subset \overline{B}(0, r)$  izango dugu  $t \geq 0$  guztietarako, hots,  $x = 0$  egonkorra izango da.

Egonkortasun asintotikoa betetzen dela frogatzeko,  $t \rightarrow \infty$  denean  $x(t) \rightarrow 0$  dela frogatu behar dugu, edo baliokidea dena,  $\alpha > 0$  guztietarako existitzen dela  $T > 0$  non  $\|x(t)\| < \alpha$  den  $t > T$  guztietarako. Aurreko argudio berdinak erabiliz, ondoriozta dezakegu  $\alpha > 0$  guztietarako  $\beta > 0$  hauta daitekeela non  $\Omega_\beta \subset \overline{B}(0, \alpha)$  den. Aurrekoa dela eta, nahikoa izango litza-teke  $V(x(t)) \rightarrow 0$  betetzen dela ikustea  $t \rightarrow \infty$  denean.

Hipotesiz  $V(x(t))$  monotonoki beherakorra eta ez-negatiboa denez,  $V(x(t)) \rightarrow c$  beteko da  $t \rightarrow \infty$  denean,  $c \geq 0$  izanik. Absurdora eramanez, demagun  $c > 0$  dela.  $V(x)$  jarraitua denez, existitzen da  $\xi > 0$  non  $\overline{B}(0, \xi) \subset \Omega_c$  den.  $V(x(t)) \rightarrow c$  bada  $t \rightarrow \infty$  denean,  $x(t)$  orbitak ez du  $\overline{B}(0, \xi)$  bola zeharkatuko.

Izan bedi  $\gamma = \min\{-\dot{V}(x) : \xi \leq \|x\| \leq \alpha\}$ , existitzen dena,  $\dot{V}(x)$  jarraitua eta  $\{x \in D : \xi \leq \|x\| \leq \alpha\}$  trinkoa delako. Orduan,

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq -\gamma t, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.5)$$

eta hortaz, existitzen da  $T > 0$  non  $V(x(t)) < 0$  den  $t \geq T$  guztietarako, kontraesana dena.  $\square$

Sistema dinamikoen teoria fisikaren arloan aplikatu daitekeela ikusteko, aurreko teorema solido zurrunen Eulerren ekuazioen adibiderako erabiliko dugu.

**Adibidea 2.1.1.** Eulerren ekuazioek solido zurrunen errotazio higidura deskribatzen dute,

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3, \end{cases} \quad (2.6)$$

non  $I_k$  inertzia momentuak,  $M_k$  momentu dinamiko aplikatu totalak eta  $\omega_k$  solidoaren abiadura angeluarrak diren hiru ardatz nagusietan,  $k = 1, 2, 3$  guztietarako. Baldin eta  $M_k = -h_k \omega_k$  badira,  $h_k > 0$  izanik  $k = 1, 2, 3$

guztietarako, froga dezagun solidoaren errotazioa konstantea izango dela epe luzean, edozein hasierako egoera izanda ere.

Argi dago  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, 0, 0)$  oreka-puntua dela. Baldin eta  $V(\omega) = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$  Lyapunoven funtzioa definitzen badugu, inertzia momentuak positiboak direnez, funtzioa definitu positiboa da, eta deribatua kalkulatu,

$$\dot{V}(\omega) = I_1\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3\dot{\omega}_3\omega_3 = -h_1\omega_1^2 - h_2\omega_2^2 - h_3\omega_3^2 \quad (2.7)$$

lortuko genuke. Beraz,  $\dot{V}$  definitu negatiboa izango da, eta  $\omega = 0$  puntu kritikoa asintotikoki egonkorra da. Are gehiago, globala izango da,  $V$  funtzioa  $\mathbb{R}^3$  osoan definituta baitago. Beraz, edozein hasierako egoera izanik, abiadura angeluarrek zerorantz joko dute, eta solidoak era konstantean errotatuko du epe luzean.

Lyapunoven teoremak egonkortasun zein egonkortasun asintotikoa dagoela frogatzeko balio badu ere, ez da zehazten nola identifika daitezkeen puntu kritiko egongaitzak. Kasu horietan Chetaeven teorema erabil daiteke.

**Teorema 2.1.2** (Chetaeven teorema). *Izan bitez  $x = 0$  (1.2) sistema dinamikoaren puntu kritikoa eta  $V$  (2.2) Lyapunoven funtzioa non  $V(0) = 0$  eta  $V(x) > 0$  den, eta  $x_0$  jatorriaren ingurune bateko puntua izanik. Orduan, existitzen bada  $r > 0$  non  $\overline{B}(0, r) \subseteq D$  eta  $\dot{V}(x) > 0$  den  $x \in U$  guztietarako, non*

$$U = \{x \in \overline{B}(0, r) : V(x) > 0\}$$

*multzoa den,  $x = 0$  egongaitza izango da.*

Ikus dezagun praktikan nola aplikatzen den Chetaeven teorema, adibide simple baten bidez.

**Adibidea 2.1.2.** Izan bedi hurrengo sistema dinamikoa:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + xy^3, \\ \dot{y} = -y + x^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Argi dago  $(x, y) = (0, 0)$  sistemaren puntu kritikoa dela. Defini dezagun  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$  funtzioa.

Ohar gaitezen  $V(x_0, 0) > 0$  dela,  $x_0 \in \mathbb{R}$  edozein izanik. Gainera,

$$U = \{(x, y) \in \overline{B}(0, r) : V(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in B(0, r) : x^2 > y^2\} \quad (2.9)$$

definituz gero, ikus dezagun existitzen dela  $r > 0$  non  $\dot{V}(x, y) > 0$  den,  $(x, y) \in U$  guztietarako.

Horretarako,

$$\dot{V}(x, y) = x(x^3 + xy^3) - y(-y + x^2) = x^4 + x^2y^3 + y^2 - x^2y = x^2(x^2 + y^3 - y) + y^2, \quad (2.10)$$

eta  $U$ -n  $x^2 > y^2$  denez,  $y > -1$  denean  $y^2 + y^3 - y$  positiboa da, eta beraz,  $\dot{V}(x, y)$  ere. Ondorioz,  $r < 1$  hartuz, ziurtatuta dugu Chetaeven teoremako hipotesietako bakoitza, eta  $(x, y) = (0, 0)$  puntu kritiko egongaitza izango da.

## 2.2 LaSalleren inbariantza printzipioa

Lyapunoven funtzioen deribatua definitu negatiboak izan arren, gerta daiteke sistema dinamiko baten puntu kritikoa asintotikoki egonkorra izatea. Ikus dezagun hau ondorioztatzeko beste teknika bat, LaSalleren inbariantza printzipioa. Printzipio honen egileak, Joseph P. LaSalle matematikari estatubatuarra, 1960 urtean Lyapunoven teoria zabaldu zuen "Some extensions of Lyapunov's second method" artikulua argitaratuz.

Lehenik, defini dezagun LaSalleren teoria ulertzeko beharrezkoa zaigun hurrengo terminoa.

**Definizioa 2.2.1.** Izan bitez  $M \subset D \subset \mathbb{R}^n$  eta (1.2) sistemaren  $\phi(\cdot, x_0)$  orbitak,  $x_0 \in D$  guztietarako.  $M$  inbariantea dela esango dugu  $y \in M$  guztietarako,  $\phi(t, y) \in M$  bada  $t \geq 0$  guztietarako.

Behin kontzeptu hau definituta, LaSalleren printzipioa enuntziatuko dugu, multzo inbarianteak erabiltzen dituen.

**Proposizioa 2.2.1** (LaSalleren printzipioa). *Izan bitez (1.2) sistemako  $\phi(\cdot, x_0)$  orbitak,  $x_0 \in D$  izanik,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funtzioa non  $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$  den, eta  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 0\}$  multzoa. Gainera, defini ditzagun  $S = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\}$  multzoa, eta  $M$   $S$ -n dagoen multzo inbariante handiena.*

*Orduan,  $\Omega_c$  bornatua bada eta  $\dot{V}(x) \leq 0$  bada  $x \in \Omega_c$  guztietarako,  $x_0 \in \Omega_c$  guztietarako  $\phi(t, x_0)$   $M$ -rantz doa  $t \rightarrow \infty$  denean.*

Proposizio honetan oinarrituta, puntu kritikoen egonkortasun asintotikoa zehatz daiteke, hurrengo teorema jarraituz.

**Teorema 2.2.2.** *Izan bedi  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  non  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$  multzoa trinkoa den eta  $\dot{V}(x) \leq 0$  den aurreko multzoko puntu guztietarako.*

*$S = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\}$  multzoak ez badu  $x = 0$  ez den orbitarik (1.2) sistemarako,  $x = 0$  asintotikoki egonkorra izango da.*

**Oharra 2.2.1.** Puntu kritiko bat globalki asintotiko egonkorra dela frogatzeko aurreko teorema erabil daiteke, baina  $\Omega_c$  multzoa definitu ordez,  $\mathbb{R}^n$  osoan eman behar dira teoremaren hipotesiak.

Aurreko atalean bezala, fisikan ezaguna den sistema dinamiko baten egonkortasun asintotikoa frogatuko dugu aurreko teoremaren laguntzaz.

**Adibidea 2.2.1.** Izan bedi malguki bati lotuta dagoen eta indargetzaile bat duen masa. Orduan, hurrengo higidura ekuazioa beteko du:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = 0. \quad (2.11)$$

Lehen ordenako ekuazio diferentzialen sistema bezala idatz daiteke  $\dot{x}_1 = x_2$  hartuz,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -f(x_2) - g(x_1) \end{cases} \quad (2.12)$$

sistema lortuz. Gainera, onar dezagun

$$\sigma f(\sigma), \sigma g(\sigma) > 0 \quad (2.13)$$

betetzen dela  $\sigma \in [-\sigma_0, \sigma_0] - \{0\}$  guztietarako,  $\sigma_0$  balio erreal positibo bat izanik. Horrek esan nahi du  $f$  zein  $g$  funtzioak positiboak direla jatorritik hurbil eta erdiplano positiboan, eta balio negatiboak dituztela erdiplano negatiboan.

Defini dezagun hurrengo funtzioa:

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma) d\sigma. \quad (2.14)$$

Funtzioa definitu positiboa da  $[-\sigma_0, \sigma_0] \times [-\sigma_0, \sigma_0]$  tartean, izan ere, lehenengo batugaia beti ez-negatiboa da, eta integralaren azalera positiboa da  $x_1$  positiboa bada, eta  $x_1$  negatiboa izanez gero, azalera negatiboa da, baina integralaren muturrak kontrako ordenean daudenez, integralak balio positiboa hartuko du.

Gainera,  $\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2 f(x_2) \leq 0$  da  $x_2 \in [-\sigma_0, \sigma_0]$  guztietarako. Ohartu Lyapunoven teorema aplikatuz gero, ezin dela egonkortasun asintotikoa ondorioztatu, soilik egonkortasuna baizik.

Har dezagun  $c = \min\{v(-\sigma_0, 0), v(\sigma_0, 0)\}$ . Orduan,

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(\sigma) d\sigma \leq c \Rightarrow \frac{x_2^2}{2} \leq \int_0^{\pm\sigma_0} g(\sigma) d\sigma, \quad (2.15)$$

eta ezinezkoa da  $\frac{\sigma_0^2}{2} < \int_0^{\pm\sigma_0} g(\sigma) d\sigma$  izatea. Ondorioz,  $\dot{V}(x) \leq 0$   $x \in \Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq c\}$  guztietarako, eta  $S = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\} = \Omega_c \cap \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$  dugu. Orduan,  $S$ -n  $x_2(t) = 0$  izan behar da, eta  $\dot{x}_1 = x_2 = 0$  denez,  $x_1(t) = x_{10} \in \mathbb{R}$  konstantea da.

Halaber, hasierako sistematik  $0 = -f(0) - g(x_1(0))$  berdintza dugu, edo baliokideki,  $g(x_1(0)) = 0$ , eta hortaz,  $x_{10} = 0$  da. Ondorioz, Teorema 2.2.2 aplikatuz, jatorria lokalki asintotikoki egonkorra izango da.

### 2.3 Lyapunoven metodo ez-zuzena. Linealizazioa

Aurreko bi ataletan Lyapunoven funtzioen bidez soluzioen egonkortasuna aztertzeke aukera izan dugu, baina gehienetan ez da sinplea funtzio horiek topatzea.

Prozedura desberdin bat Lyapunoven metodo ez-zuzena edo linealizazioa deitu ohi dena da. Kasu honetan, sistema dinamikoari dagokion sistema lineala lortuko dugu puntu kritiko bakoitzerako, eta bertan orbiten egonkortasuna aztertuko dugu.

Azter dezagun (1.2) sistema dinamikoko  $x = 0$  puntu kritikoaren ingurune txiki bateko orbiten jarrera. Har dezagun  $x(t) = 0 + \xi(t)$   $x = 0$  puntuaren perturbazioa. Orduan,

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f(x) = f(0 + \xi) = f(0) + Df(0)\xi + \mathcal{O}(|\xi|^2) = Df(0)\xi + \mathcal{O}(|\xi|^2) \quad (2.16)$$

dugu, Taylorren garapena erabiliz eta  $x = 0$  puntu kritikoa dela jakinik. Gainera,  $x = 0$  puntutik hurbileko orbita denez,  $\mathcal{O}(|\xi|)$  terminoak bazter ditzakegu. Horrenbestez,

$$\dot{\xi} = Df(0)\xi \quad (2.17)$$

sistema lineala lortuko dugu. Ohar gaitezen  $\xi = 0$  sistemaren puntu kritikoa dela, eta puntu honen egonkortasuna zehaztea sinpleagoa dela, jarraian enuntziatzen den proposizioa jarraituz.

**Proposizioa 2.3.1.** *Izan bedi  $\dot{\xi} = A\xi$  sistema lineala, non  $\xi \in \mathbb{R}^n$  eta  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diren,  $n \in \mathbb{N}$  izanik. Orduan,*

- (i) *A-ren balio propio guztien zati erreala negatiboa bada,  $\xi = 0$  puntu kritiko asintotikoki egonkorra da, eta*
- (ii) *existitzen bada gutxienez A-ren balio propio bat non zati erreal positiboa duen, orduan  $\xi = 0$  egongaitza da.*

Ohartu beharra dago gutxienez A-ren balio propio baten zati erreala nulua denean eta besteen zati erreala negatiboa denean aurreko proposizioak ez duela definitzen sistemaren orbiten egonkortasuna. Kasu hau gertatzen ez denean, puntu hiperboliko baten aurrean gaude. Zehatz dezagun puntu mota honen definizioa.

**Definizioa 2.3.1.** *Izan bedi  $x = 0$  (1.2) sistemaren puntu kritikoa. Orduan  $Df(0)$ -ren balio propio guztiek zati erreal ez-nulua badute,  $x = 0$  hiperbolikoa dela esango dugu.*

Aurreko gutzia erabilita, sistema dinamiko baten puntu kritikoen egonkortasuna lokalki linealizazioaren bidez azter daiteke, hurrengo proposizioa erabiliz:

**Proposizioa 2.3.2.** *Izan bedi  $x = 0$  (1.2) sistema ez-linealaren puntu kritikoa. Gainera, defini dezagun  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} = Df(0)$ . Orduan,*

- (i) *jatorria asintotikoki egonkorra da baldin eta  $A$ -ren balio propio guztien zati erreala negatiboa bada, eta*
- (ii) *jatorria egongaitza da baldin eta gutxienez  $A$ -ren balio propio baten zati erreala positiboa bada.*

Lehen adierazi dugun moduan, proposizio honek ez du ziurtatzen orbiten egonkortasun globalik, baina sarritan nahikoa da puntu kritiko horren egonkortasuna ingurune txiki batean aztertzearekin.

Ikus dezagun biologian oso ezaguna den sistema dinamiko baten adibide bat, harrapari-harrapakin erlazioarena, eta erabil dezagun linealizazioa puntu kritiko baten jarrera aztertzeko.

**Adibidea 2.3.1.** Izan bedi  $x(t)$  harraparien populazio bat denboraren menpe, non bere kasa hazkunde logaritmikoa duen, hots,  $\dot{x} = ax - bx^2$  ekuazio diferentziala darraion. Gure kasuan,  $a = 1$  eta  $b = 2$  balioak hartuko ditugu.

Bestalde, izan bedi  $y(t)$  harrapakinen populazio bat, non bere kasa hazkunde esponentziala betetzen duen,  $\dot{y} = 2y$ , konkretuki.

Bi espezie horiek ingurune berdinean bizi behar badute, bien arteko topaketek ( $xy$  faktoreak, alegia) bi populazioen hazkundera eragina izango dute, harrapakinena txikituz eta harrapariena handituz, hurrengo sistema dinamikoa sortuz:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + xy - 2x^2, \\ \dot{y} = 2y^2 - xy. \end{cases} \quad (2.18)$$

Ohar gaitezen  $(x, y) = (2, 3)$  puntu kritikoa dela, eta garraia dezagun puntu hori jatorrira, sistema baliokide bat lortuz, hots,  $u = x - 2$  eta  $v = y - 3$  aldagai-aldaketa eginez,

$$\begin{cases} \dot{u} = f_1(u, v) = -4u - 2u^2 + 2v + uv, \\ \dot{v} = f_2(u, v) = -3u - uv \end{cases} \quad (2.19)$$

lortuko genuke, non  $(u, v) = (0, 0)$  sistemaren puntu kritikoa den. Kasu honetan,  $A = Df(0, 0) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ , eta matrizearen balio propioak  $-2 \pm \sqrt{2}i$  dira. Bien zati erreala negatiboa denez,  $(2, 3)$  puntu kritikoa asintotikoki egonkorra izango da, eta bi espezieen populazioak 2 eta 3 balioetatik hurbil badaude hasieran, denbora aurrera joan ahala harrapariaren populazioa 2-ra joko du, eta harrapakinarena 3-ra.



### 3. kapitulua

# Sistema dinamikoen puntu kritikoen bifurkazioak

Sarritan, naturan gertatzen diren fenomenoak parametro ezberdinen menpe daude, eta hauen aldaketa txikiek fenomenoaren jarrera nabarmen alda dezakete.

Horien adibide nabarmena [10] artikuluan azaltzen da, erreakzio kimikoak ematen direnean, zinetikaren arloan, erreakzioak hainbat parametroren menpe daude. Garrantzitsuenak erreakzionatu behar duten konposatuaren saturazioa, erreakzioaren tenperatura edota erreakzioa azkartu edota moteldu egiten duten konposatuak erreakzioan sartzea dira.

Kapitulu honetan parametrodun sistema dinamikoak aztertuko ditugu, eta hauen puntu kritikoen egonkortasunean parametroaren eragina kualitatiboki neurtuko dugu.

Izan bedi

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{3.1}$$

parametrodun sistema dinamikoa, non  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$  eta  $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$  diren,  $n, p \in \mathbb{N}$  izanik, eta  $r \geq 5$  hartuta.

Kasu honetan,  $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$  puntu kritikoa izan dadin,  $f(x_0, \mu_0) = 0$  bete beharko du. Puntu horren egonkortasuna aztertzeko era sinpleena linealizazioa da, eta hau aplikatuz,

$$\dot{\xi} = D_x f(x_0, \mu_0)\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

sistema dinamiko lineala lortuko dugu.

Puntu kritiko hori hiperbolikoa balitz,  $f(x_0, \mu_0) = 0$  berdintza beteko litzateke, eta  $D_x f(x_0, \mu_0)$  matrizeak ez luke izango balio propioarik ardatz irudikarian. Hori dela eta,  $D_x f(x_0, \mu_0)$  alderanzgarria izango da, eta funtzio inplizituaren teorema aplikatuz, existituko da  $x(\mu) \in \mathcal{C}^r$  soluzio bakarra non  $f(x(\mu), \mu) = 0$  den  $\mu$   $\mu_0$ -tik nahiko hurbil egonda, eta  $x(\mu_0) = x_0$  betetzen duena. Gainera, parametroarekiko balio propioen jarraitutasuna

dela eta,  $D_x f(x(\mu), \mu)$ -ren balio propietako bat bera ere ez da egongo ardatz irudikarian,  $\mu$   $\mu_0$ -tik nahiko hurbil egonda.

Horrenbestez, puntu kritikoa hiperbolikoa bada, honen egonkortasunaren izaera berdina izango da parametroaren aldaketa txikietarako, hots, egonkortasun berdina izango du nahiz eta parametroa pixka bat perturbatu.

Beraz, egonkortasun aldaketa horiek puntu ez-hiperbolikoetarako aztertuko ditugu. Hasteko, horietatik sinpleena hartuko dugu, Jacobiarrak zero balio propio bakarria dueneko, [15] liburua jarraituz.

### 3.1 Zero balio propio bakarria. Bifurkazioak

Bifurkazio terminoaren definizioa parametro bat eta ekuazio bakarreko sistema dinamikoaren kasura murriz daiteke,  $(x, \mu) = (0, 0)$  puntu kritikoa izanik (bestela, orokortasunik galdu gabe, puntu kritikoa jatorrira traslada dezakegu).

**Definizioa 3.1.1.** Izan bedi  $(x, \mu) = (0, 0)$  dimentsio bakarreko eta parametro bakarreko  $\dot{x} = f(x, \mu)$  sistema dinamikoaren puntu kritikoa. Orduan, puntu kritikoak bifurkazio bat duela esango dugu baldin eta bere ingurune batean sistemaren orbitak kualitatiboki berdinak ez badira.

Ikus dezagun zein kasu dauden non orbitak ez diren kualitatiboki berdinak. Kasu guztiek, ordea, ezaugarri komunak izango dituzte, izan ere,  $(x, \mu) = (0, 0)$  puntu kritikoa denez,  $f(0, 0) = 0$  bete beharko da. Era berean, zero balio propioa izan dezan, beharrezkoa da  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  izatea.

#### 1 Zeladura-nodo bifurkazioa

Lehenik, azter dezagun  $\mu(x)$  puntu kritikoen kurba bakarria duen eta  $\mu = 0$  ardatzaren alde bakar batean dagoen sistema motaren bifurkazioa.

Kasu horretan,  $\mu = 0$ -ren aldeetako batean ez dugu puntu kritikorik izango (kurbarik ez dagoen aldean), eta bestean bi puntu kritiko izango ditugu. Hau da, puntu kritikorik ez izatetik bi puntu kritiko izatera aldatuko da sistema jatorritik igarotzean.

Kurba bakarria existi dadin,  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$  izatea eskatuko diogu, funtzio inplizituaren teorema aplikatu ahal izateko.

Bestalde, kurba soilik  $\mu \geq 0$  edo  $\mu \leq 0$  denean definitu ahal izateko (lokalki, gutxienez),  $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}(0) \neq 0$  bete beharko du gure kurbak, jatorria mutur erlatibo bat izan dadin.  $f$  funtzioaren menpe idazteko, ohartu

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2 f}{dx^2}(x, \mu(x)) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \mu(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x, \mu(x)) \left( \frac{d\mu}{dx}(x) \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d^2 \mu}{dx^2}(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

dela, eta  $(x, \mu) = (0, 0)$ -n ebaluatuz eta sinplifikatuz, hurrengo adierazpena lortuko dugu:

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0)}. \quad (3.4)$$

Ondorioz,  $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}(0) \neq 0$  eta  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$  baldintzak baliokideak dira.

Laburtuz, zeladura-nodo bifurkazioa eman dadin,  $f(0, 0) = 0$ ,

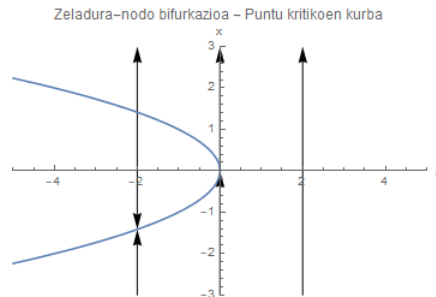
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

baldintzak bete behar dira. Ondorioz,  $f(x, \mu)$  funtzioak hurrengo Taylorren garapena izango du:

$$f(x, \mu) = a_0\mu + a_1x^2 + a_2\mu x + a_3\mu^2 + \mathcal{O}(3), \quad (3.5)$$

$a_0$  eta  $a_1$  ez-nuluak izanik.

**Adibidea 3.1.1.** Izan bedi  $\dot{x} = \mu + x^2$  ekuazio diferentziala. Argi dago zeladura-nodo bifurkazioa ematen dela  $(x, \mu) = (0, 0)$  puntuan, 3.1. irudian ikusten den bezala.



**3.1. irudia:** Urdinez  $\dot{x} = \mu + x^2$  sistemaren puntu kritikoaren kurba. Geziek  $\mu$  finkoetarako orbiten ibilbidea erakusten dute.

$\mu < 0$  denean bi puntu kritiko daude, horietako bat egongaitza eta bestea egonkorra, eta  $\mu > 0$  kasurako ez dugu puntu kritikorik.

## 2 Bifurkazio transkritikoa

Demagun orain kurba bakarra izan beharrean,  $(x, \mu) = (0, 0)$  puntutik puntu kritikoaren bi kurba igarotzen direla, eta  $\mu = 0$ -n puntu kritikoaren egonkortasun mota aldatu egiten dela. Kasu honetan puntu kritikoaren kopurua berdina izango da, baina beren izaera ezberdina  $\mu$ -ren balio desberdinetarako.

Bi kurba existi daitezzen,  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0$  betetzea eskatuko dugu, bestela funtzio implizituaren teorema aplikatuz puntu kritikoen kurbaren bakartasunera iritsiko ginatkeelako.

Bestalde, onar dezagun  $x = 0$  kurba horietako bat dela. Orduan  $f(x, \mu) = xF(x, \mu)$  bezala idatz liteke, non

$$F(x, \mu) = \begin{cases} \frac{f(x, \mu)}{x}, & x \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu), & x = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

den.  $F$ -k soilik puntu kritikoen kurba bat sortu behar du, bestea ( $x = 0$ ), jadanik definituta baitugu. Orduan beharrezkoa da,

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0 \quad (3.7)$$

betetzea,  $F$ -ren definizioa kontuan hartuta. Hari beretik, kurba hori  $x = 0$  izan ez dadin,  $\frac{d\mu}{dx}(0)$ -ren balio absolutua ezin du infinitu izan, ezta 0 ere, kurba hori  $\mu = 0$ -ren bi aldeetan definituta egotea nahi dugulako,

$$0 < \left| \frac{d\mu}{dx}(0) \right| = \left| -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0)} \right| < \infty, \quad (3.8)$$

alegia. Aurreko ataleko prozedura bera jarraituz goiko berdintza lortzen da. Ondorioz, aurreko baldintzez gain,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \quad (3.9)$$

bete beharko da.

Laburtuz, bifurkazio transkritikoa emateko baldintzak  $f(0,0) = 0$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

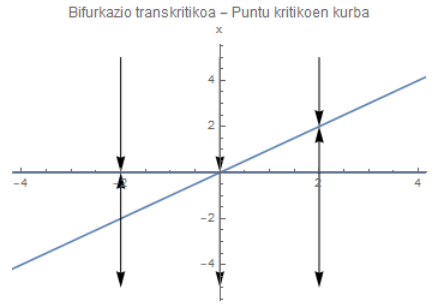
dira. Horrenbestez, bifurkazio transkritikoa ematen den sistemen Taylorren garapena hurrengoa izango da:

$$f(x, \mu) = a_1 x^2 + a_2 \mu x + a_3 \mu^2 + \mathcal{O}(3), \quad (3.10)$$

non  $a_1$  eta  $a_2$  ez-nuluak diren.

**Oharra 3.1.1.** Aurreko garapenean ez dugu egonkortasuna aztertu, beharrezkoa baita lan honetan garatu gabeko teoria erabiltzea.

**Adibidea 3.1.2.** Izan bedi  $\dot{x} = \mu x - x^2$  ekuazio diferentziala. Bifurkazioa transkritikoa da  $(x, \mu) = (0,0)$ -n, izan ere, 3.2. irudian adierazten den bezala, bi puntu kritiko daude  $\mu \in \mathbb{R}$  balio guztietarako, baina  $x = 0$  puntu kritikoa egonkorra da  $\mu < 0$  denean, eta  $\mu > 0$  denean egongaitza. Kontrakoa gertatzen da beste puntu kritikoreen kasuan.



**3.2. irudia:** Urdinez  $\dot{x} = \mu x - x^2$  sistemaren puntu kritikoaren kurba. Geziek  $\mu$  finkoetarako orbiten ibilbidea erakusten dute.

### 3 Sardexka bifurkazioa

Zero balio propioko azken bifurkazioa sardexka bifurkazioa da, eta kasu honetan puntu kritikoaren bi kurba daude, baina bata  $\mu = 0$ -ren bi aldeetan eta bestea alde bakar batean. Aurreko atalean bezala, lehenengo kurba hori  $x = 0$  dela onartuko dugu. Gainera,  $x = 0$ -ko puntu kritikoaren egonkortasuna desberdina izango da  $\mu = 0$ -ren bi aldeetan.

Lehenik, aurreko atalean bezala, bi kurba existi daitezzen, eta funtzio inplizituaren teorema aplikatu ezin dadin,  $\frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0$  eskatu behar dugu.

Halaber,  $x = 0$  puntu kritikoaren kurba bada,  $f(x, \mu) = xF(x, \mu)$  bezala idatz daiteke,  $F$  (3.6)-n bezala definituz.  $F$ -k kurba bakarra izan dezan, (3.7) bete beharko du.

Azkenik, kurba hori  $\mu = 0$ -ren alde bakar batean egon dadin, bertan maximoa edo minimoa izan behar da, hots,

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0 \quad \text{eta} \quad \frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0, \quad (3.11)$$

eta  $f$ -ren menpe idatziz, aurreko bifurkazioarako egin dugun bezala,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0 \quad (3.12)$$

idatziko dugu.

Horrenbestez, sardexka bifurkazio bat izan dadin,  $f(0, 0) = 0$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0,$$

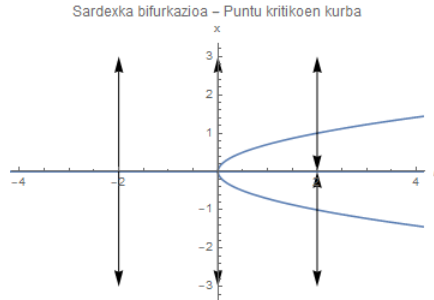
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$$

baldintzak bete behar dira, eta hurrengo Taylorren garapena izango du:

$$f(x, \mu) = a_2 x \mu + a_3 x^3 + a_4 x^2 \mu + a_5 x \mu^2 + a_6 \mu^3 + \mathcal{O}(4), \quad (3.13)$$

non  $a_2$  eta  $a_3$  ez-nuluak diren.

**Adibidea 3.1.3.** Izan bedi  $\dot{x} = -\mu x + 2x^3$  sistema. 3.3. irudian ikus daitekeen bezala,  $(x, \mu) = (0, 0)$ -n sardexka bifurkazioa ematen da.  $\mu < 0$  denean puntu kritiko egongaitz bat du ( $x = 0$ ), eta  $\mu > 0$  denean hiru puntu kritiko ditu,  $x = 0$  puntua, egonkor bihurtzen dena, eta beste bi puntu kritiko egongaitz.



**3.3. irudia:** Urdinez  $\dot{x} = -\mu x + 2x^3$  sistemaren puntu kritikoaren kurba. Geziek  $\mu$  finkoetarako orbiten ibilbidea erakusten dute.

## 3.2 Puntu singularren definizioa eta sailkapena

Atal honetan parametro bakarra duten eta dimentsio batekoak diren sistema dinamikoen puntu kritiko berezi batzuk aztertuko ditugu, puntu singularrak. Puntu horretatik igarotzen diren puntu kritikoaren kurbak sailkatu eta kalkulatzeko pausoak emango ditugu.

**Definizioa 3.2.1.** Izan bedi  $\dot{x} = f(x, \mu)$  parametro bakarreko eta dimentsio bateko sistema dinamikoa.  $(x_0, \mu_0)$  sistemaren puntu singularra dela esango dugu, baldin eta  $(x_0, \mu_0)$  sistemaren puntu kritikoa bada eta puntu horretan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \quad (3.14)$$

berdintzak betetzen badira.

Puntu singularren adibideak bifurkazio transkritikoa eta sardexka bifurkazioa ematen diren puntu kritikoak dira.

Puntu horiek sailka daitezke puntu horretatik igarotzen diren puntu kritikoaren kurben arabera, [5] erreferentzian egiten den bezala. Baldin eta  $f$ -ren bigarren ordenako deribatuetako bat gutxienez ez bada nulua puntu singularrean, honela sailka daitezke:

- puntu hori isolatua bada, hots, ez bada puntu kritikoaren kurbarik igarotzen puntu singular horretatik, puntu konjokatua deritzo;

- puntutik puntu kritikoen bi kurba igarotzen badira, eta ukitzaile desberdina badute puntu horretan, puntu bikoitza deritzo;
- aldiz, bi kurben ukitzailea berdina bada puntu singularrean, goi-erpin puntua deritzo.

Bigarren ordenako deribatu guztiak nuluak badira, ordena altuagoko puntu singularrak lortuko ditugu, aztertuko ez ditugunak.

Izan bedi  $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$  puntu singularra. Orduan,  $(x, \mu)$  puntu singularraren inguru hurbileko puntua bada, hots,  $(x, \mu) = (x_0 + \Delta x, \mu_0 + \Delta \mu)$ ,  $f$ -ren Taylorren garapena eginez,

$$0 = f(x, \mu) = \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx}(x_0, \mu_0) + \Delta x \Delta \mu f_{x\mu}(x_0, \mu_0) + \frac{\Delta \mu^2}{2} f_{\mu\mu}(x_0, \mu_0) + \mathcal{O}(3) \quad (3.15)$$

dugu, eta esan dugun bezala, puntu singularraren ingurune txiki batean  $\Delta x^2 f_{xx}(x_0, \mu_0) + 2\Delta x \Delta \mu f_{x\mu}(x_0, \mu_0) + \Delta \mu^2 f_{\mu\mu}(x_0, \mu_0) = 0$  berdintza beteko da.

Notazioa sinplifikatzeko helburuarekin,  $f_{xx}(x_0, \mu_0) \equiv f_{xx}$ ,  $f_{x\mu}(x_0, \mu_0) \equiv f_{x\mu}$  eta  $f_{\mu\mu}(x_0, \mu_0) \equiv f_{\mu\mu}$  adierazpenak onartuko ditugu.

$f_{\mu\mu} \neq 0$  bada,  $\Delta \mu$ -ri bigarren mailako ekuazioen formula aplikatuz,

$$\Delta \mu = \Delta x \left( -\frac{f_{x\mu}}{f_{\mu\mu}} \pm \frac{\sqrt{f_{x\mu}^2 - f_{xx} f_{\mu\mu}}}{f_{\mu\mu}} \right) \quad (3.16)$$

lortuko dugu, eta kurben malda hurrengo izango da:

$$\mu_x(x_0) = \frac{\Delta \mu}{\Delta x} = -\frac{f_{x\mu}}{f_{\mu\mu}} \pm \frac{\sqrt{f_{x\mu}^2 - f_{xx} f_{\mu\mu}}}{f_{\mu\mu}}. \quad (3.17)$$

Era berean,  $f_{xx} \neq 0$  bada,

$$x_\mu(\mu_0) = \frac{\Delta x}{\Delta \mu} = -\frac{f_{x\mu}}{f_{xx}} \pm \frac{\sqrt{f_{x\mu}^2 - f_{xx} f_{\mu\mu}}}{f_{xx}} \quad (3.18)$$

izango da puntu kritikoen kurben malda.

Orduan,  $D = f_{x\mu}^2 - f_{xx} f_{\mu\mu}$  definituz,  $D < 0$  bada, puntu singularrak ez du puntu kritikoen kurbarik izango, eta beraz, puntu konjokatua izango da.

$D = 0$  bada, kurben malda puntu singularrean (hau da, kurbaren ukitzailea) berdina izango da. Hortaz, puntu hori goi-erpina izango da.

Azkenik,  $D > 0$  bada, bi balio desberdin hartuko dituzte bi maldek, eta beraz bi ukitzaile desberdin izango dituzte bi kurbek. Hortaz, puntu singularra bikoitza izango da.

Azter ditzagun puntu singular mota ezberdinak eta beren puntu kritikoen kurbak. Argi dago puntu konjokatuaren kasuan ez dela ezer aztertu behar, puntu horretatik ez baita igarotzen puntu kritikoen kurbarik.

**Adibidea 3.2.1.**  $\dot{x} = x^2 + \mu^2$  sistema dinamikoa izanik,  $D = -4 < 0$  lortuko genuke, hots,  $(x, \mu) = (0, 0)$  puntua konjokatua da. Sistemaren puntu kritikoak kalkulatu gero,  $x = \pm i\mu$  lortzen dugu, hots,  $\mu \neq 0$  denean sistemak ez du puntu kritikorik.

## 1 Puntu bikoitzak

Puntu bikoitzak aztertzerakoan, bi kasu bereizi ohi dira. Alde batetik,  $f_{xx} \neq 0$  bada, (3.18) adierazpeneko maldak dituzten bi ukitzaileri dagozkien puntu kritikoek kurbak igaroko dira puntu singularretik. Bestalde,  $f_{xx} = 0$  bada, kurba horietako baten malda,  $x$  aldagai bezala hartuta, nulua izango da (hots,  $\mu_x(x_0) = 0$ ), eta bestearren  $x_\mu(\mu_0) = -f_{\mu\mu}/2f_{x\mu}$ .

Azter dezagun kasu konplexuena, hots,  $f_{xx} \neq 0$  denean. Izan bedi  $\nu(\mu)$  gerora zehaztuko dugun funtzioa, non  $x - x_0 = \nu(\mu)(\mu - \mu_0)$  den, eta defini dezagun  $\nu$  non  $\nu_0 = \nu(\mu_0) = x_\mu(\mu_0)$ , non  $x_\mu$  (3.18) balioetako bat den. Ikus dezagun funtzio hori existitzen dela.

Defini dezagun  $G(\nu, \mu)$  funtzio laguntzailea era honetan:

$$G(\nu, \mu) = \frac{2f(x, \mu)}{\Delta\mu^2}. \quad (3.19)$$

Adierazpena garatuz, Taylorren serieak erabiliz,

$$G(\nu, \mu) = \nu^2 f_{xx} + 2\nu f_{x\mu} + f_{\mu\mu} + \frac{1}{3}\Delta\mu(\nu^3 f_{xxx} + 3\nu^2 f_{xx\mu} + 3\nu f_{x\mu\mu} + f_{\mu\mu\mu}) + \mathcal{O}(\Delta\mu^2) \quad (3.20)$$

lortuko genuke. Beraz,  $G$  funtzioa  $(\nu_0, \mu_0)$  puntuan ebaluatuz,

$$G(\nu_0, \mu_0) = \nu_0^2 f_{xx} + 2\nu_0 f_{x\mu} + f_{\mu\mu} = 0 \quad (3.21)$$

dugu, eta nulua da,  $\nu_0 = \frac{\Delta x}{\Delta\mu}$  berdintza bete beharko delako.

Gainera,  $G$   $\nu$ -rekiko deribatuz,

$$G_\nu(\nu, \mu) = 2\nu f_{xx} + 2f_{x\mu} + \frac{1}{3}\Delta\mu(3\nu^2 f_{xxx} + 6\nu f_{xx\mu} + 3f_{x\mu\mu}) + \mathcal{O}(\Delta\mu^2) \quad (3.22)$$

dugu, eta ondorioz,  $G_\nu(\nu_0, \mu_0) = 2(\nu_0 f_{xx} + f_{x\mu})$  adierazpena izango dugu puntu singularretik hurbil. Orduan,  $\nu_0$  (3.18) adierazpenetako bat izan behar denez,

$$G_\nu(\nu_0, \mu_0) = 2 \left( -\frac{f_{x\mu}}{f_{xx}} f_{xx} \pm \frac{\sqrt{f_{x\mu}^2 - f_{xx} f_{\mu\mu}}}{f_{xx}} f_{xx} + f_{x\mu} \right) = \pm 2\sqrt{f_{x\mu}^2 - f_{xx} f_{\mu\mu}} \quad (3.23)$$

adierazpena lortuko dugu, eta  $D > 0$  denez,  $G_\nu(\nu_0, \mu_0) \neq 0$  dugu.

Ondorioz, funtzio implizituaren teorema aplikatuz, existituko dira bi funtzio  $\nu^{(1)}(\mu)$  eta  $\nu^{(2)}(\mu)$  non  $\mu = \mu_0$  puntuan (3.18) balio duten.

Bestalde,  $f_{xx} = 0$  bada,  $G_\nu(\nu_0, \mu_0) = 2f_{x\mu} \neq 0$  da, eta berriro ere funtzio implizituaren teorema aplikatuz, kurba horien adierazpenak lor genitzake.



**Adibidea 3.2.2.** 3.1.2 adibidean ikusi dugun bezala,  $\dot{x} = x\mu - x^2$  sistemak puntu kritikoen bi orbita ditu  $(x, \mu) = (0, 0)$  zeharkatzen dutenak, eta malda ezberdinarekin, 3.2. irudian ikus daitekeen bezala.

Are gehiago,  $D = 1 > 0$  lortzen dugu, eta hortaz, jatorria puntu bikoitza da.

## 2 Goi-erpina

Goi-erpina ezin izango ditugu lortu  $\mu(x)$  edo  $x(\mu)$  motatako adierazpenak, eta soilik ekuazio parametrikoko bezala definitu ahalko ditugu, esaterako,  $\eta$  parametroaren menpe.

Demagun  $(x, \mu) = (0, 0)$  puntu singularra dela, orokortasunik galdu gabe, eta goi-erpina dela. Onar dezagun  $f_{\mu\mu} \neq 0$  dela (bestela,  $f_{xx} \neq 0$  litzateke,  $D = 0$  izan behar duelako). Izan bedi  $\mathcal{F}(\eta) = f(x(\eta), \mu(\eta))$  adierazpena, non  $x(\eta)$  eta  $\mu(\eta)$  puntu kritikoen kurbak diren. Orduan,  $\mathcal{F}(\eta) = 0$  eta  $x(0) = 0 = \mu(0)$  berdintzak beteko dira.

$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_\mu(0, 0) = 0$ enez,  $\mathcal{F}$  bitan deribatuz gero,

$$\mathcal{F}''(0) = (x'(0))^2 f_{xx} + 2(x'(0))(\mu'(0))f_{x\mu} + (\mu'(0))^2 f_{\mu\mu} = 0 \quad (3.24)$$

adierazpena lortuko genuke. Aurreko berdintza betetzen denez,

$$x'(0)f_{xx} + \mu'(0)f_{x\mu} = 0 \quad \text{eta} \quad x'(0)f_{x\mu} + \mu'(0)f_{\mu\mu} = 0 \quad (3.25)$$

berdintzak ondorioztatzen dira.  $\mathcal{F}''$  deribatuz,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'''(0) &= (-f_{\mu\mu\mu}(f_{x\mu})^3 + 3f_{x\mu\mu}(f_{x\mu})^2 f_{\mu\mu} - \\ &- 3f_{xx\mu}f_{x\mu}(f_{\mu\mu})^2 + f_{xxx}(f_{\mu\mu})^2)(x'(0))^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

lortuko genuke. Orokorrean, aurreko adierazpeneko  $(x'(0))^3$ -ren koefizientea ez da nulua izango. Hortaz,  $x'(0) = 0$  izan beharko da. Orduan, (3.25) dela eta,  $\mu'(0) = 0$  izan beharko da.

Gainera,

$$\mathcal{F}^{(iv)}(0) = (\mu''(0))^2 f_{\mu\mu} + 2(x''(0))(\mu''(0))f_{x\mu} + (x''(0))^2 f_{xx} = 0 \quad (3.27)$$

dugu, eta berdintza honetatik

$$x''(0)f_{xx} + \mu''(0)f_{x\mu} = 0 \quad \text{eta} \quad x''(0)f_{x\mu} + \mu''(0)f_{\mu\mu} = 0 \quad (3.28)$$

lortuko genuke. Berrero ere  $\mathcal{F}$  deribatuz,

$$\mathcal{F}^{(v)}(0) = \mu''(0)\mu'''(0)f_{\mu\mu} + (x''(0)\mu'''(0) + x'''(0)\mu''(0))f_{x\mu} + x''(0)x'''(0)f_{xx} = 0 \quad (3.29)$$

dugu, eta (3.28) aplikatuz, adierazpena beti beteko dela ondorioztatzen da. Azkenik, seigarren deribatua kalkulatu,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(vi)}(0) = & (\mu'''(0))^2 f_{\mu\mu} + 2x'''(0)\mu'''(0)f_{x\mu} + (x'''(0))^2 f_{xx} + \frac{3}{2}((\mu''(0))^3 f_{\mu\mu\mu} + \\ & + 3(\mu''(0))^2 x''(0)f_{x\mu\mu} + 3\mu''(0)(x''(0))^2 f_{xx\mu} + (x''(0))^3 f_{xxx}) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

lortuko genuke.  $\eta$  balio txikietarako definituz gero, eta  $x(0) = 0 = x'(0)$  izan behar denez,  $x(\eta) = \frac{1}{2}x''(0)\eta^2$  bezala definituko dugu, non  $x''(0) = 2$  edo  $x''(0) = -2$  den.  $x''(0)$ -ren zeinua zehaztu beharko dugu. Horretarako,  $x(\eta)$ -ren adierazpena eta (3.30) erabiliz,

$$\begin{aligned} & (\mu'''(0))^2 f_{\mu\mu} + \frac{3}{2}((\mu''(0))^3 f_{\mu\mu\mu} + 3(\mu''(0))^2 x''(0)f_{x\mu\mu} + \\ & + 3\mu''(0)(x''(0))^2 f_{xx\mu} + (x''(0))^3 f_{xxx}) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

berdintza dugu. Gainera, (3.28) erabiliz,  $\mu''(0) = -f_{\mu\mu}^{-1} f_{x\mu} x''(0)$  dugunez, (3.31) ekuazioan ordezkatu,

$$\begin{aligned} & (\mu'''(0))^2 f_{\mu\mu}^4 + \frac{3}{2}(-f_{\mu\mu\mu} f_{x\mu}^3 + 3f_{x\mu\mu} f_{\mu\mu} f_{x\mu}^2 - \\ & - 3f_{xx\mu} f_{\mu\mu}^2 f_{x\mu} + f_{xxx} f_{\mu\mu}^2)(x''(0))^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

dugu, eta ekuazio honetatik  $x''(0)$ -ren zeinua eta  $(\mu'''(0))^2$ -ren balioa zehaztu ahalko dugu.  $\mathcal{F}$ -ren deribatu gehiagok  $\mu(\eta)$  kurbaren ordena altuagoko koefizienteen balioak zehaztuko ditu,  $\mu(\eta) = \frac{1}{2}\mu''(0)\eta^2 + \frac{1}{6}\mu'''(0)\eta^3 + \mathcal{O}(\eta^4)$  motatako funtzioa definituz.

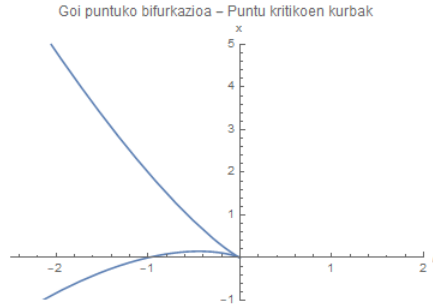
**Adibidea 3.2.3.**  $\dot{x} = x^2 + 2x\mu + \mu^2 + \mu^3$  sistema dinamikoa hartuta,  $D = 0$  lortuko genuke  $(x, \mu) = (0, 0)$  punturako, hau da, goi-puntua izango da. 3.4. irudian ikus daiteke bi kurbek malda berdinarekin iristen direla jatorrira.

### 3.3 Hopf bifurkazioa

Aurreko ataletan puntu kritikoen inguruko bifurkazioak eta beren egonkortasunaren aldaketak aztertu ditugu. Bifurkazio mota honi geldikor deitu ohi zaio, eta ez da bakarra.

[14] erreferentzian azaltzen den bezala, gerta liteke parametrodun sistema dinamiko batek puntu kritiko bat izatetik ziklo limite bat sortzea, parametroaren perturbazio txiki baterako. Fenomeno hau deskribatzen duen bifurkazioari Hopf bifurkazioa deritzo.

Lehenik, ziklo limiteak definituko ditugu. Puntu kritikoen antzera, orbita itxiak dira, inguruko orbitak erakartzen dituen,  $t \rightarrow \infty$  edo  $t \rightarrow -\infty$  denean.



**3.4. irudia:** Urdinez  $\dot{x} = x^2 + 2x\mu + \mu^2 + \mu^3$  sistemaren puntu kritikoaren kurbak.

**Definizioa 3.3.1.** Izan bedi  $\phi(t, x_0)$  (1.2) sistema dinamikoaren orbita itxia. Orduan, ziklo limitea dela esango dugu  $x$  orbitako puntu guztien ingurune batean hasten diren orbitak itxiak ez badira.

Inguruneke orbita guztiak ziklo limitera hurbiltzen badira  $t \rightarrow \infty$  de-nean, egonkorra dela esango dugu. Bestela, egongaitza deritzo orbitari.

Bestalde, garrantzitsua da aztertzea zein kasutan eman daitekeen fenomeno hau. Hurrengo teorema, Hopfeko frogatutakoa, bifurkazio mota honen baldintzak enuntziatzen ditu.

**Teorema 3.3.1.** *Izan bitez (3.1) sistema dinamikoa non  $p = 1$  den, eta  $(x_0, \mu_0)$  sistemaren puntu kritikoa. Orduan,  $f$ -ren Jacobiarrak balio propio irudikari puru bikote bat badu ( $\lambda(\mu_0) = \pm i\beta$ ), beste balio propioen parte erreala ez-nulua badute eta  $\frac{d\text{Re}(\lambda(\mu_0))}{d\mu} \neq 0$  bada,  $(x_0, \mu_0)$ -n ziklo limite bat sortuko da.*

Azter dezagun sistema dinamiko sinpleena. Izan bedi hurrengo sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(z_1, z_2, \mu) \\ g_2(z_1, z_2, \mu) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

non  $(z_1, z_2, \mu) = (0, 0, 0)$  puntu kritikoa den. Gainera, Jacobiarraren balio propioak  $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$  direnez,  $\alpha(0) = 0$  izatea eskatuko diogu. Orduan, forma normalen propietateak erabiliz, sistema honela adieraz daiteke:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \alpha(\mu)z_1 - \omega(\mu)z_2 + (a(\mu)z_1 - b(\mu)z_2)(z_1^2 + z_2^2) + \mathcal{O}(|z_1|^5, |z_2|^5), \\ \dot{z}_2 = \omega(\mu)z_1 + \alpha(\mu)z_2 + (b(\mu)z_1 + a(\mu)z_2)(z_1^2 + z_2^2) + \mathcal{O}(|z_1|^5, |z_2|^5). \end{cases} \quad (3.34)$$

Adierazpenak koordinatu polarretara pasatuz,

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + \mathcal{O}(r^5), \\ \dot{\theta} = \omega(\mu) + b(\mu)r^2 + \mathcal{O}(r^4) \end{cases}$$

lortuko genuke. Gainera,  $\alpha(\mu)$ ,  $\omega(\mu)$ ,  $a(\mu)$  eta  $b(\mu)$  funtzioen Taylorren garapena eginez,  $\mu = 0$ -n zentratuta,

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + \mathcal{O}(\mu^2 r, \mu r^2, r^5), \\ \dot{\theta} = \omega(0) + \omega'(0)\mu + b(0)r^2 + \mathcal{O}(\mu^2, \mu r^2, r^4) \end{cases} \quad (3.35)$$

dugu.  $d = \alpha'(0)$ ,  $a = a(0)$ ,  $\omega = \omega(0)$ ,  $c = \omega'(0)$  eta  $b = b(0)$  notazioa kontuan hartuz, eta ordena altuagoko terminoak baztertuz, hurrengo sistema lortuko genuke:

$$\begin{cases} \dot{r} = d\mu r + ar^3, \\ \dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2. \end{cases} \quad (3.36)$$

Ohar gaitezen  $\mu d/a < 0$  bada, sistemak  $\sqrt{-\frac{\mu d}{a}}$  erradioko orbita periodiko zirkularra duela,  $\dot{r} = 0$  egiten baitu. Gainera, orbita hori egonkorra da  $a < 0$  balioetarako eta  $a > 0$  balioetarako egongaitza,  $\dot{r}$ -ren ekuazioan sardexka bifurkazioa ematen baita.

Sailka dezagun Hopf bifurkazioa  $a$  eta  $d$  koefizienteen arabera, sistema aztertuz.

1. Hopf bifurkazio gainkritikoa deituko da orbita periodikoa egonkorra bada. Bi kasutan gerta daiteke,
  - a.  $d > 0$  eta  $a < 0$  badira, jatorria egonkorra da  $\mu < 0$  denean, eta  $\mu > 0$  denean, aldiz, egongaitza da eta orbita periodiko egonkor batek inguratuko du;
  - b.  $d < 0$  eta  $a > 0$  badira, jatorria egongaitza da  $\mu < 0$  denean eta orbita periodiko egonkor batek inguratuko du, eta  $\mu > 0$  denean soilik jatorria izango dugu puntu kritiko egonkor gisa.
2. Hopf bifurkazio azpikritikoa izango dugu orbita periodikoa egongaitza bada. Berrero ere bi kasu aztertuko ditugu,
  - a.  $d > 0$  eta  $a > 0$  badira, jatorria egonkorra da  $\mu < 0$  denean, eta egongaitza  $\mu > 0$  denean. Lehenengo kasuan, jatorriaren inguruan orbita periodiko egongaitz bat izango dugu.
  - b.  $d < 0$  eta  $a > 0$  badira, jatorria egongaitza da  $\mu < 0$  denean, eta  $\mu > 0$  denean egonkorra, orbita periodiko egongaitz batek inguratzen duelarik.

$\mu$  balio txikietarako, termino altuagoak baztertu aurreko sistemaren kasurako ere ematen dira deskribatutako bifurkazioak.  $a$  balioari kurbaren koefizientea deritza, eta  $d = \alpha'(\mu)$  Hopf bifurkazioari dagokion teoreman agertzen den  $\frac{d\text{Re}(\lambda(\mu_0))}{d\mu}$  terminoa da.

**Adibidea 3.3.1.** Izan bitez  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  eta hurrengo sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + cx^3 + cxy^2, \\ \dot{y} = x + \mu y + cx^2y + cy^3. \end{cases} \quad (3.37)$$

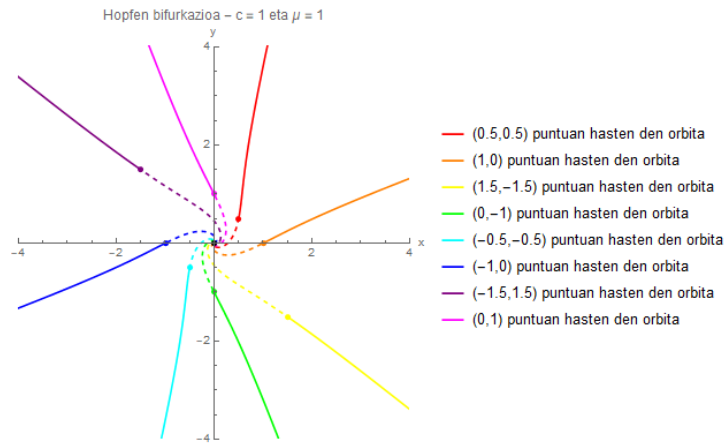
$(x, y) = (0, 0)$  sistemaren puntu kritikoa da, eta haren balio propioak  $\pm i\mu$  dira. Gainera, matrizialki aurreko sistema honela idatz daiteke:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cx(x^2 + y^2) \\ cy(x^2 + y^2) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Bestalde, (3.34) ekuazioarekin konparatuz gero, ohar gaitezten  $c = a(\mu)$  eta  $\alpha(\mu) = \mu$  dela, eta Hopfen bifurkazioaren forma duela.

Jakinda gure adibiderako  $a = c$  eta  $d = \alpha'(0) = 1$  dela jakinda, azter ditzagun  $c$ -ren kasu ezberdinetarako emango den Hopfen bifurkazio mota.

$c > 0$  betetzen bada, orduan  $a$  eta  $d$  positiboak izango dira, eta Hopfen bifurkazio azpikritikoa emango da,  $\mu < 0$  denean jatorria egonkorra izanik, eta  $\mu > 0$  denean egongaitza. Gainera,  $\mu < 0$  denean orbita periodiko egongaitz bat izango dugu (ikusi 3.5. eta 3.6. irudiak).

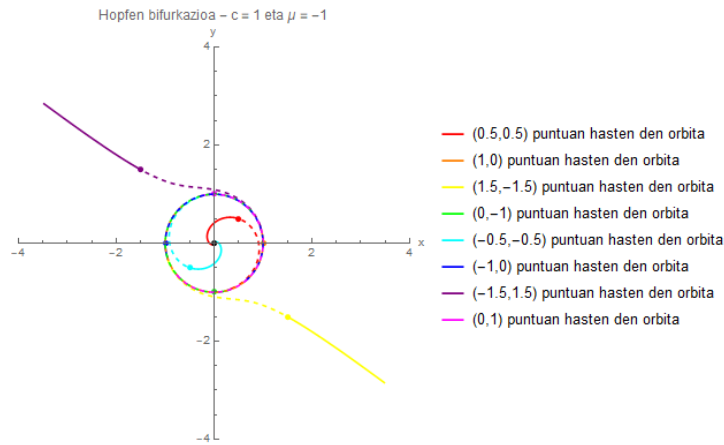


**3.5. irudia:** Koloretan planoko zenbait punturen orbitak  $c = 1$  eta  $\mu = 1$  kasuan. Lerro etenez orbitak  $t < 0$  denbora unetarako.

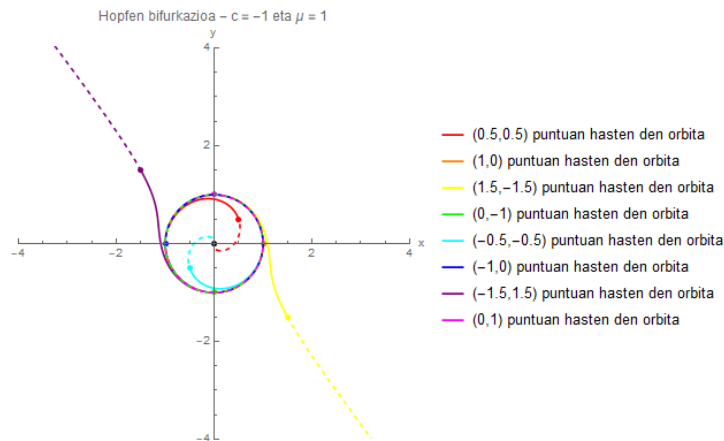
Aldiz,  $c < 0$  bada,  $a < 0$  eta  $d > 0$  izango da, eta Hopfen bifurkazio gainkritikoa emango da. Orduan,  $\mu < 0$  kasurako jatorria egonkorra izango da, eta  $\mu > 0$  denean, ordea, egongaitza, eta azken kasu honetan orbita periodiko egonkor bat izango dugu (ikusi 3.7. eta 3.8. irudiak).

## 3.4 Barietate zentralen teoria

Orain arte soilik ekuazio bakarreko edo bi ekuaziotako sistema dinamikoen bifurkazioak aztertu baditugu ere, aurreko analisia sistema handiagoetara



**3.6. irudia:** Koloretan planoko zenbait punturen orbitak  $c = 1$  eta  $\mu = -1$  kasuan. Lerro etenez orbitak  $t < 0$  denbora uneetarako.



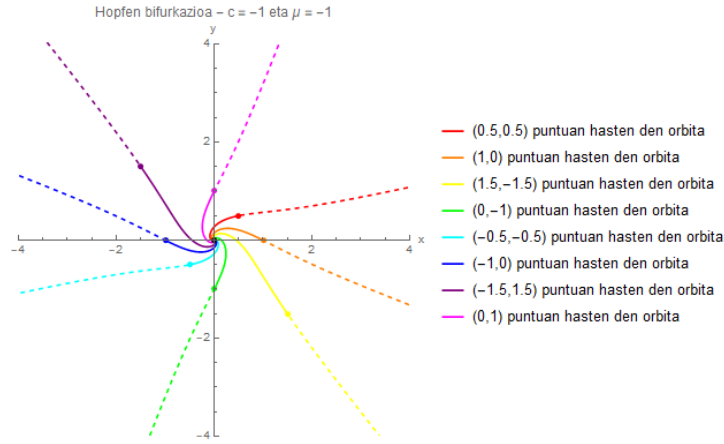
**3.7. irudia:** Koloretan planoko zenbait punturen orbitak  $c = 1$  eta  $\mu = 1$  kasuan. Lerro etenez orbitak  $t < 0$  denbora uneetarako.

heda daiteke, barietate zentralaren teoria erabiliz.

Barietate zentralaren teoria George S. Carr matematikari estatubatuarrek garatu zuen 1981 urtean, [1] erreferentzian argitaratu zuelarik.

Izan bedi (1.2) sistema dinamikoa, jatorria puntu kritiko bezala duena, non sistema linealizatuari dagokion matrizeak soilik zati erreal negatibo eta nulua duten balio propioak dituen. Demagun zati erreal nulua duten  $c$  balio propio daudela, eta zati erreal negatiboa duten  $s$ . Orduan, sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y), \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases} \quad (3.39)$$



**3.8. irudia:** Koloretan planoko zenbait punturen orbitak  $c = 1$  eta  $\mu = -1$  kasuan. Lerro etenez orbitak  $t < 0$  denbora uneetarako.

bezala idatz daiteke, non  $x \in \mathbb{R}^c$ ,  $y \in \mathbb{R}^s$ ,  $A \in \mathbb{R}^{c \times c}$  zati erreal nulua duten balio propioen matrizea eta  $B \in \mathbb{R}^{s \times s}$  zati erreal negatiboa duten balio propioen matrizea diren. Gainera,  $f(0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0) = 0$ ,  $Df(0, 0) = 0$  eta  $Dg(0, 0) = 0$  berdintzak bete behar dira.

Defini dezagun lehenik bariedade zentrala.

**Definizioa 3.4.1.** Aurreko egoeran bariedade inbariante bat lokalki

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \quad (3.40)$$

formakoa bada  $\delta > 0$  txikiatarako, bariedade zentrala dela esango dugu.

Froga daiteke ([1] liburuan frogatzen da) (3.39) sistemarako bariedade zentrala existituko dela, eta ikusiko dugu bariedade zentralak definitutako sistemaren egonkortasuna eta hasierako sistemaren egonkortasuna baliokideak direla.

**Teorema 3.4.1** (Existentziaren teorema). (3.39) sistemarako bariedade zentrala existituko da, eta sistema horren bariedade zentralerako murrizpena

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^c \quad (3.41)$$

da,  $u$  nahiko txikiatarako.

**Teorema 3.4.2.** (i) Demagun (3.41) sisteman jatorria egonkorra dela. Orduan, (3.39) sisteman ere egonkorra izango da.

(ii) Egonkortasunaren orde, jatorria asintotikoki egonkorra edo egongaitza bada (3.41)-n, (3.39) sisteman ere jatorriak beste sistemako izaera mantenduko du.

(iii) Demagun (3.41) sisteman jatorria egonkorra dela. Orduan,  $(x(t), y(t))$  (3.39) sistemaren soluzioa bada,  $(x(0), y(0))$  nahiko txikietarako, existitzen da  $u(t)$  (3.41)-ren soluzioa non  $t \rightarrow \infty$  denean

$$\begin{cases} x(t) = u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \\ y(t) = h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \end{cases} \quad (3.42)$$

betetzen den,  $\gamma > 0$  konstantea izanik.

Hortaz, hasierako sistemak eta barietate zentralako sistemak dinamika berdinak dituzte.

Hala ere, askotan ezin izango dugu barietate zentralari dagokion  $h$  funtzioa kalkulatu, baina hurbiltzeko aukera izango dugu, nahi bezain ordenako zehaztasunarekin, hurrengo teoremaren arabera.

**Teorema 3.4.3** (Hurbilketaren teorema). (3.39) egoeran, izan bedi  $\phi : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$   $C^1$  formako aplikazioa, non  $\phi(0) = 0 = D\phi(0)$  den eta

$$D\phi(x)[Ax + f(x, \phi(x))] - B\phi(x) - g(x, \phi(x)) = \mathcal{O}(|x|^q) \quad (3.43)$$

den. Orduan,  $x \rightarrow 0$  denean,  $|h(x) - \phi(x)| = \mathcal{O}(|x|^q)$  izango da,  $q > 1$  kasurako.

Beraz, nahikoa da (3.43) berdintza betetzen duen funtzioa topatzea, nahi bezain  $q > 1$  ordenarako  $h$  funtzioa  $q$  ordenara hurbiltzeko.

Aurreko egoera gehiago orokor daiteke, sistema linealizatuak zati erreal positiboko balio propioak baditu, edota parametroak agertzen badira. Bi kasu horietan ere froga daiteke hasierako sistema eta barietate zentralako sistemakoak dinamika berdinak dituztela.

A eranskinean barietate zentralaren teoria adibide simple baterako aplikatu dugu, zero balio propio bat duen bi ekuazioko sistema dinamikoaren bifurkazioa aztertzeko, alegia.



## 4. kapitulua

# Atraktore arraroak. Lorenzen atraktorea

Orain arte dimentsio baxuko sistema dinamikoak aztertu ditugu gehien bat, eta baita hauen egonkortasuna puntu kritikoetan. Puntu kritikoak egonkorak edo egongaitzak izan badaitezke ere, batzuetan orbitek portaera arraroak deskribatzen dituzte, norabide zehaztezin baterantz higituz.

Gerta liteke, adibidez, denbora infiniturantz doanean orbitek puntu kritiko zein orbita periodikoetara ez hurbiltzea, ezta infinitura jotzea, baizik eta aurretik zehatz ezin daitekeen portaera izatea.

Hala ere, portaera horiek ezin dira gertatu 2 dimentsioko sistema dinamikoetan. Baieztapen hau Poincaré-Bendixsonen teoremaren ondorioa da, [3] erreferentzian aurkezten den moduan.

### 4.1 Poincaré-Bendixsonen teorema

Lehenik  $\omega$ -limite multzoa eta  $\alpha$ -limite multzoa definituko ditugu, kontzeptu horiek ondoren enuntziatuko dugun teoreman agertzen baitira.

**Definizioa 4.1.1.** Izan bedi  $\phi_t(x_0)$   $t = 0$  denean  $x_0$ -tik igarotzen den (1.2) sistema dinamiko baten orbitaren posizioa  $t$  aldiunean.

$p$  puntua  $x$ -ren  $\omega$ -limite puntua dela esango dugu baldin eta existitzen bada  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  segida non  $\phi_{t_n}(x) \rightarrow p$  eta  $t_n \rightarrow +\infty$  den  $n \rightarrow \infty$  den heinean.

$p$   $x$ -ren  $\alpha$ -limite puntua izango da, aldiz, existitzen bada  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  segida non  $\phi_{t_n}(x) \rightarrow p$  eta  $t_n \rightarrow -\infty$  den  $n \rightarrow \infty$  den heinean.

$x$ -ren  $\omega$ -limite puntuen multzoari  $\omega$ -limite multzoa deritzo, eta  $\alpha$ -limite puntuen multzoari  $\alpha$ -limite multzoa.

Behin definizio horiek zehaztuta, Poincaré-Bendixsonen teorema enuntziatuko dugu. Teorema  $\mathbb{R}^2$ -ko sistema dinamikoaren kasurako enuntziatuta dago, eta puntu kritikorik ez dagoenean infiniturantz ez doazen orbiten portaera deskribatzen du.

**Teorema 4.1.1** (Poincaré-Bendixsonen teorema).  $\mathbb{R}^2$ -ko fluxu baten  $\omega$ -limite multzo edo  $\alpha$ -limite multzo trinko ez-hutsa bada, puntu kritikorik barnean ez duena, orduan multzoa orbita itxia da.

Beraz, multzo trinko batean mantentzen diren orbitak ezin dira kaotikoak izan puntu kritikorik ez badute barnean, orbita itxi baterantz hurbilduko baitira denborak aurrera joan ahala.

Andronovek planoko multzo trinko baten barneko orbitek izan lezaketen portaera guztiz definitu zuen, Poincaré-Bendixsonen teoreman oinarrituta.

**Teorema 4.1.2.** *Planoko fluxu guztietarako,  $\omega$ -limite multzoak soilik hurrengoak izan daitezke:*

(i) *puntu kritikoak;*

(ii) *orbita itxiak; eta*

(iii) *puntu kritikoen bildurak eta hauek konektatzen dituzten ibilbideak.*

Azkeneko aukeraren kasuan, puntu kritikoak ezberdinak badira, orbita heteroklinikoa deituko da, aurrerago ikusiko dugun bezala.

Beraz, aurreko teoremaren arabera, planoan orbitek ezin izango dute portaera kaotikorik izan, infiniturantz doazenean zehaztuta baitute zein izango den hauen portaera. Horrenbestez, dimentsio handiagoetara jo beharko dugu kaosa aztertu ahal izateko.

## 4.2 Atraktore arraroak

Sistema dinamikoetan kaosaren agerpena fenomeno askoren atzean dago. Sistema dinamiko jarraituetan, hau da, lan honetan aztertu ditugun sistema dinamikoaren kasuan, atraktore arraroak dira maizen aztertu ohi direnak kaosaren bila.

Atraktoreen inguruan jardun ahal izateko, beharrezkoa da hauen definizioa ematea. Ideia orokor bat ematearren, atraktoreak multzo inbariante batzuk dira, non multzo inbariante horretako edozein puntutik hasten diren orbitak multzo horretan mantentzen diren. Definizio hori lantzeko, atrakzio multzoen definizioa beharrezkoa zaigu.

**Definizioa 4.2.1.** Izan bitez  $\phi(t, x_0)$  (1.2) sistema dinamiko baten fluxua eta  $A \subset \mathbb{R}^n$  multzo itxi inbariantea.  $A$  atrakzio multzoa izango da baldin eta existitzen bada  $U$   $A$ -ren ingurune bat non

$$t \geq 0 \text{ guztietarako, } \phi(t, U) \subset U \text{ eta } \bigcap_{t>0} \phi(t, U) = A$$

betetzen bada.

Gainera,  $U$  multzo ireki horri atzemate eremua deritzo.

Aurreko atalean fluxuak  $t < 0$  denboran hartutako ibilbidearen zentzua azaldu dugu, eta berriro ere agertuko zaigo orain, izan ere, atrakzio multzo batean jausten diren orbiten  $t = 0$  baino atzeragoko ibilbidea ezagutu nahi dugu. Horren harira, atrakzio domeinua defini daiteke.

**Definizioa 4.2.2.** Izan bitez  $\phi(t, x_0)$  (1.2) sistema dinamiko baten fluxua eta  $A$  atrakzio multzoa,  $U$  atzemate eremua izanik. Orduan,

$$\bigcup_{t \leq 0} \phi(t, U)$$

multzoari atrakzio domeinua deritzo.

Atrakzio domeinuak orbitak bertatik igaroz gero, atrakzio multzora jau-siko direla adieraziko digu.

Gogora dezagun gure helburua atraktoreen definizioa lortzea dela. Atrak-toreak atrakzio multzoak dira, baina ezaugarri topologiko nabarmen bat bete behar dute, trantsibitate topologikoa deritzona.

**Definizioa 4.2.3.** Izan bitez  $\phi(t, x_0)$  (1.2) sistema dinamiko baten fluxua eta  $A$  multzo itxi inbariantea.  $A$  topologikoki trantsitiboa dela diogu baldin eta  $U, V \subset A$  edozein multzo irekitarako existitzen bada  $t \in \mathbb{R}$  non  $\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$  den.

Laburki esanda, multzo itxi inbariante bat topologikoki trantsitiboa dela esaten dugunean,  $U$  edozein multzo ireki hartuta,  $U$ -tik igarotzen diren esan nahi dugu orbitak  $V$  multzo irekira iritsiko direla aldiune batean. Hortaz, multzoko orbita guztiak multzo ireki guztiak zeharkatzen dituzte.

Behin atrakzio multzoa zein trantsibitate topologikoa definituta, atrak-toreen definizioa enuntziatzeko tresna guztiak ditugu.

**Definizioa 4.2.4.** Atrakzio multzo topologikoki trantsitiboari atraktorea deritzo.

Atraktoreen adibide sinpleena puntu kritiko egonkorak dira. Puntua kritikoa bada, multzo itxi inbariante bat osatuko du, eta multzo horren barneko multzo ireki bakarra multzo hutsa denez, berehalakoa da puntu kritikoa atraktorea dela.

[2] liburuan azaltzen den bezala, 60eko hamarkadara arte soilik bi atrak-tore ezagutzen ziren, puntu kritiko egonkorak eta ziklo limite erakargarriak. Baina fisikariak turbulentzia fluxuaren analisia egin ostean, zientzialariak atraktore berezi bat identifikatu zuten, aurreko bi adibideetako bat bera ere ez zena.

Horrela, geroz eta atraktore konplexuagoak topatu ziren. Gehienek egonkortasunarekin erlazio handia zuten, baina Lorenzek 1963an atraktore guztiz ezberdin bat topatu zuen. Atraktore hori atraktore arraro bezala

izendatua izan da gerora, eta ez zeukan egonkortasunarekin erlaziorik, era guztiz kaotiko batean higitzen baitzen.

Kaosaren ideia intuitiboa oso sinplea da. Orbita baten hasierako puntuaren aldaketa txiki batek orbitaren ibilbidea guztiz alda dezakeelako kontzeptuarekin erlazionatuta dago. Beraz, kaosa agertzen denean, oso zaila da orbitaren posizioa zehaztea denbora tarte labur batean, nahiz eta sistema dinamikoa guztiz determinista den, eta probabilitatearen eraginik ez duen.

Atraktore arraroek kaosaren ezaugarri zehatz hori betetzen dute, eta aurreko azalpena formalki adierazteko, hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna deritzon kontzeptua definitu beharko dugu.

**Definizioa 4.2.5.** Izan bitez  $\phi(t, x)$  (1.2) sistema dinamiko bati dagokion fluxua eta  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  multzo trinko inbariantea. Orduan,  $\phi(t, x)$ -k  $\Lambda$ -n hasierako baldintzekiko sentikortasuna duela esango dugu baldin eta existitzen bada  $\varepsilon > 0$  non  $x \in \Lambda$  guztietarako, eta  $x$ -ren  $U$  edozein ingurunetarako, existitzen diren  $y \in U$  eta  $T > 0$  non  $|\phi(T, x) - \phi(T, y)| > \varepsilon$  den.

Behin kontzeptu hauek guztiak definituta, atraktore arraroak definitzeko gai gara.

**Definizioa 4.2.6.** Izan bitez  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  multzo trinko inbariantea eta  $\phi(t, x)$  sistema dinamiko baten fluxua. Orduan,  $\Lambda$  kaotikoa dela esango dugu baldin eta

- (i)  $\phi(t, x)$ -k hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna badu  $\Lambda$ -n, eta
- (ii)  $\phi(t, x)$  topologikoki trantsitiboa bada  $\Lambda$ -n.

Are gehiago,  $\Lambda$  atraktore arraroa dela esango dugu, kaotikoa eta atraktorea bada.

Ohar gaitezen aurreko definiziotik, atraktore bat izanez gero, nahikoa dela fluxuak hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna duen aztertzea, topologikoki trantsitiboa izatera derrigortuta baitago.

Atraktore arraro asko topatu dira azkeneko hamarkadetan, baina horietatik ezagunena (eta lehenengoa) Lorenzen atraktorea da. Hurrengo atalean atraktore hori aztertuko dugu sakonki, bertan ematen diren bifurkazio zein egoera kaotikoak aztertuz.

### 4.3 Lorenzen atraktorea

Lehenik eta behin sistema dinamiko disipatiboen definizioaren ideia intuitiboa emango dugu. Izan bedi  $\phi_t(x)$  fluxuak  $x$  hasierako posizioarekin  $t$  unean duen posizioa. Orduan,  $U \subset \mathbb{R}^n$  sistemaren hasierako posizioen espazioa bada eta sistema dinamikoa disipatiboa bada, orduan  $t \rightarrow \infty$  denean

$\text{Vol}(\phi_t(U)) \rightarrow 0$  beteko du, non  $\text{Vol}(V) > 0$   $V \subset \mathbb{R}^n$  edozein azpiespazioren  $n$ -dimentsiodun bolumena adierazten duen.

Aurrekoa neurtzea ez da beti errazena, izan ere, sistemaren soluzioa lortu beharko genuke. Hala ere, sistema dinamikoa eremu bektorial bezala ikusenezake, eta eremuaren dibergentziaren bidez sistema disipatiboa dela ikusi ahalko genuke.

Lehenik, ekuazio diferentzialen sistemak eremu bektorial bezala ikus daitezkeela azalduko dugu. Orain arte sistema dinamiko jarraitu autonomoak  $\dot{x} = f(x)$  sistemaren bidez adierazi ditugu, non  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  aplikazioa dugun. Ohar gaitezen  $f$  aplikazioa eremu bektorial bezala ikus daitezkeela,  $x \in \mathbb{R}^n$  puntu bakoitzari  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  bektorea egokitzen diona.

Orduan,  $\dot{x} = f(x)$  sistema dinamikoa badugu, non  $\text{div} f < 0$  den, sistema disipatiboa dela ziurtatuta geldituko da.

Sistema disipatiboek atraktoreak definitu ohi dituzte, infiniturantz ez doazen orbitez osatuta baitaude, eta fluxuak geroz eta bolumen txikiagoa baitu.

Laneko sistema garrantzitsua aztertzen hasi aurretik, testuinguru historiko pixka bat emango dugu. Edward Norton Lorenz meteorologo estatubatuarrek eguraldia iragartzeko ekuazio diferentzialen sistema bat sortu zuten, eguraldiaren parametroak erlazionatzen zituenak. Bi hasierako baldintza oso hurbil hartu zituen (hiru zenbaki hamartarretara biribilduta berdinak), eta soluzioek deskribatutako orbitak guztiz desberdinak zirela ohartu zen. Fenomeno hau jadanik ikusia dugu, hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna deiturikoa.

Nahiz eta hasieran sistema konplexuagoa zen, Lorenzek sinplifikatzea lortu zuten, hiru parametroko hurrengo sistema dinamikoa lortu arte:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (4.1)$$

non  $\sigma, r, b > 0$  parametroak diren.

Ikus ditzagun Lorenzen sistemaren zenbait propietate. Lehenik, argi dago sistema simetrikoa dela lehenengo bi koordenatuekiko, hau da,  $(x(t), y(t), z(t))$  (4.1) sistemaren soluzioa bada,  $(-x(t), -y(t), z(t))$  baita ere izango da soluzio. Hori frogatzeko nahikoa da sisteman ordezkatzeari, berdintzak mantentzen direla bermatzeko.

**Proposizioa 4.3.1.** (4.1) Lorenzen sistema disipatiboa da.

*Froga.* Nahikoa da sistemari dagokion eremu bektorialaren dibergentzia kalkulatzeko, hots,  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = F(x, y, z) = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - bz)$  bada,

$$\text{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -(\sigma + 1 + b) < 0, \quad (4.2)$$

parametroak positiboak baitira.  $\square$

Lorenzen sistema hau  $(\sigma, r, b) = (10, 28, 8/3)$  balioetarako aztertu zuen, eta kasu horretan portaera kaotikoa izango du, gerora aztertuko dugun bezala. Hala ere, parametroen balio ezberdinetarako Lorenzen sistemak portaera oso ezberdinak jasango ditu. Azter ditzagun portaera horietatik garrantzitsuenak, lanean zehar egindako analisisia oinarritzat hartuz.

**Proposizioa 4.3.2.** *Izan bedi (4.1) Lorenzen sistema. Orduan  $r < 1$  bada, sistemaren soluzio guztiak jatorrira doaz  $t \rightarrow \infty$  denean.*

*Froga.* Lehenik, lor ditzagun Lorenzen sistemaren puntu kritikoak. Horretarako,  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$  betetzen duten  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  puntuak lortu behar ditugu.  $\dot{x} = 0$  denez,  $\sigma(y - x) = 0$  eta  $x = y$  beteko da. Gainera,  $\dot{z} = x^2 - bz = 0$  berdintzatik  $x = \pm\sqrt{bz}$  lortuko genuke.

Azkenik,  $\dot{y} = (r - 1 - z)x = 0$  denez, bi kasu ditugu.  $x = 0$  bada, aurreko berdintzak direla eta,  $x = y = z = 0$  izango da, eta jatorria puntu kritikoa da. Bestalde,  $z = r - 1$  bada,  $x = y = \pm\sqrt{b(r - 1)}$  izan behar da, baina  $r < 1$  denez, ez dugu  $\mathbb{R}^3$ -ko puntu bat lortuko.

Froga dezagun jatorria asintotikoki egonkorra izango dela  $\mathbb{R}^3$  guztirako. Horretarako, Lyapunoven funtzioak erabiliko ditugu.

Izan bedi  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  funtzioa non

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.3)$$

den. Argi dago  $V(x, y, z) > 0$  dela  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  guztietarako,  $\sigma > 0$  baita. Gainera,  $V(0, 0, 0) = 0$  denez,  $V$  definitu positiboa da  $\mathbb{R}^3$  osoan.

Bestalde,  $\dot{V}$  kalkulatz,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y, z) &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} = 2x(y - x) + 2y(rx - y - yz) + \\ &\quad + 2z(xy - bz) = 2xy(1 + r) - 2x^2 - 2y^2 - 2bz^2 = \\ &= -2\left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - 2\left(1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right)y^2 - 2bz^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

lortuko genuke.  $0 < r < 1$  denez,  $\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 < 1$  da, eta  $\dot{V}(x, y, z) \leq 0$  desberdintza betetzen dela ondorioztatzen dugu  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  guztietarako.

Gainera,  $\dot{V}(x, y, z) = 0$  izan dadin, batugaietako bakoitza nulua izan behar da, hots,  $x - \frac{r+1}{2}y = 0$ ,  $y^2 = 0$  eta  $z^2 = 0$  bete behar da. Orduan,  $x = y = z = 0$  izan behar du derrigor, eta  $\dot{V}$  definitu negatiboa izango da  $\mathbb{R}^3$ -n.

Ondorioz, Lyapuniven egonkortasunaren teorema aplikatuz, jatorria asintotikoki egonkorra izango da  $\mathbb{R}^3$  osorako.  $\square$

Aldiz,  $1 < r < \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$  eta  $\sigma > b + 1$  denean, jatorria lokalki egongaitza da. Hori frogatzeko era sinpleena Lyapunoven metodo ez-zuzena erabiltzea da.

Sistema linealizatuz eta jatorrian ebaluatuz,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ rx - y \\ xy - bz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

sistema linealizatua lortuko genuke, eta matrizearen balio propioak  $-b$  eta

$$\frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2}$$

dira.  $r > 1$  denez,  $(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r) > (\sigma + 1)^2$  beteko da, eta balio propietako bat positiboa izango da. Ondorioz, jatorria egongaitza izango da.

Gainera,  $1 < r < \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$  eta  $\sigma > b + 1$  denean bi puntu kritiko berri sortuko dira,  $\mathcal{C}_+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  eta  $\mathcal{C}_- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$  aurreko proposizioaren frogapenean ikusi dugun bezala. Puntu kritiko horien egonkortasuna aztertuko dugu.

**Proposizioa 4.3.3.** *Izan bedi (4.1) Lorenzen sistema. Baldin eta  $\sigma > b + 1$  eta  $1 < r < \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$  betetzen bada, orduan  $\mathcal{C}_+$  eta  $\mathcal{C}_-$  puntu kritikoak egonkorrak dira.*

*Froga.* Lyapunoven metodo ez-zuzena erabiliko dugu puntuen egonkortasuna aztertzeko. Lehenik, sistemaren Jacobiarra kalkulatu,

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

lortuko genuke.  $(x_0, y_0, z_0) \in \{\mathcal{C}_+, \mathcal{C}_-\}$  bada, hurrengo sistema linealizatua lortuko genuke, kontuan hartuta  $x_0 = y_0$  eta  $z_0 = r - 1$  dela:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x_0 \\ x_0 & x_0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Orduan, matrizearen polinomio karakteristikoa kalkulatu gerora, eta  $x_0^2 = b(r - 1)$  dela kontuan hartuz, polinomioa

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) \quad (4.8)$$

dela lortuko genuke. Polinomioaren erroek zati erreal negatiboa dute  $\sigma > b + 1$  eta  $1 < r < \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$  desberdintzak betetzen badira, nahiz eta ez ditugun kalkuluak garatuko. Hortaz, bi puntu kritikoak egonkorrak izango dira, gutxienez, lokalki.  $\square$

Aurreko analisia dela eta, ohar gaitezke  $\sigma > b+1$  denean  $r = 1$  baliorako Lorenzen sistemak bifurkazio bat duela, puntu kritiko bat izatetik, hiru izatera pasatzen baita. Nahiz eta sistema hiru ekuaziokoa den, ohar gaitezke  $r = 1$  kasurako, jatorrian zentratutako sistema linealizatuak balio propio nulu bat duela, eta bi erreal negatibo. Ondorioz, barietate zentralaren teorema erabili ahal dugu, ekuazio bakarreko sistemara igaroz.

Lorenzen sistemak puntu kritiko bakar bat izatetik hiru izatera pasatzen denez, sardexka bifurkazioa emango da  $r = 1$  parametroaren baliorako.

Alta, ez da Lorenzen sistemak duen bifurkazio bakarra.  $r = r_H = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$  parametroaren baliorako ere jadanik aztertu dugun bifurkazio mota bat agertzen zaigu. Kalkula dezagun  $\mathcal{C}_+$  eta  $\mathcal{C}_-$  puntu kritikoei dagozkien balio propioak  $r = r_H$  baliorako.

Aurreko proposizioaren frogapenean (4.8) polinomioa lortu dugu. Froga dezagun polinomio horrek  $\lambda = i\omega$  motatako bi erro dituela,  $\omega \in \mathbb{R}$  izanik. Horretarako,  $r = r_H$  ordezkatuz, hurrengo berdintza konplexua lortuko genuke:

$$\left[ 2b\sigma \frac{\sigma^2 + \sigma b + 2\sigma + b + 1}{\sigma - b - 1} - (\sigma + b + 1)\omega^2 \right] + i\omega \left[ 2\sigma b \frac{\sigma + 1}{\sigma - b - 1} - \omega^2 \right] = 0. \quad (4.9)$$

Zati erreala zein irudikaria nuluak izan behar dute, eta  $(\sigma + b + 1)(\sigma + 1) = \sigma^2 + \sigma b + 2\sigma + b + 1$  berdintza betetzen denez, bi kasuetarako  $\omega$ -ren balio hauetara iristen gara:

$$\omega = \pm \sqrt{2b\sigma \frac{\sigma + 1}{\sigma - b - 1}}, \quad (4.10)$$

eta  $\mathcal{C}_+$  eta  $\mathcal{C}_-$  puntu kritikoei  $i\omega$  bi balio propio irudikari puru izango dituzte. Demagun  $\alpha \in \mathbb{C}$  beste balio propioa dela. Orduan,

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = \left( \lambda^2 + 2b\sigma \frac{\sigma + 1}{\sigma - b - 1} \right) (\lambda - \alpha) \quad (4.11)$$

berdintza bete behar da, eta eskuineko aldea garatuz, eta koefizienteak berdinduz,  $\alpha = -(\sigma + b + 1)$  lortuko genuke.

Ondorioz, bi balio propio irudikari puru eta balio propio erreal negatibo bat ditugu  $r = r_H$  kasuan. Ondorioz, barietate zentralaren teoriaren arabera, balio propio negatiboa bazter dezakegu eta dinamika baliokideak mantenduko dira. Hortaz, Hopf bifurkazio bat dugu.

Nahiz eta ez dugun Lorenzen sistemaren barietate zentralari dagokion sistema kalkulatu, emaitzak adierazgarriak dira.  $r = r_H$  baliorako Hopfen bifurkazio azpikritikoa dugu  $\mathcal{C}_+$ -n eta  $\mathcal{C}_-$ -n, izan ere,  $r < r_H$  denean, ziklo limite egongaitza dugu, eta puntu kritikoei egonkorak dira, jadanik frogatu dugun bezala. Aldiz,  $r > r_H$  kasuetarako, ziklo limite hori desagertu eta puntu kritikoei egongaitz bihurtzen dira.

Lorenzen sistema oso konplexua da, izan ere, hiru parametroko sistema ez-lineala da, eta aztertu ditugun bi bifurkazioak ez dira bakarrak izango.



Adibidez,  $b = 8/3$  eta  $\sigma = 10$  balioetarako,  $r = 13.926$  denean bifurkazio berri bat dugu, lan honetan aztertu ez duguna, eta bifurkazio homoklinikoa deitzen dena.

**Definizioa 4.3.1.** Izan bedi (1.2) sistema dinamikoa, non  $t \in \mathbb{R}$  den. Demagun  $x = x_0$  sistemaren puntu kritikoa dela.  $x \in \mathbb{R}^n$  izanik,  $\phi_t(x)$  orbita homoklinikoa dela esango dugu baldin eta  $\phi_t(x) \rightarrow x_0$  bada  $t \rightarrow \pm\infty$  denean.

Beraz, orbita homokliniko batek puntu kritiko berdinerara joko du  $t$  aldira  $-\infty$ -rantz edo  $+\infty$ -rantz doanean.

Bifurkazio homoklikoetan, ziklo limitea puntu kritikorantz hurbiltzen da, eta ukitzen duenean orbita homokliniko bihurtzen da. Gure kasuan  $r = 13.926$  baliora eskuinetik ziklo limitea hurbiltzen da, eta  $r < 13.926$  denean orbita homokliniko bihurtzen da.

Azkenik, azter dezagun Lorenzen atraktore famatua, hau da,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  eta  $r = 28$  parametroekin lortzen dena. Nahiz eta Lorenz izan zen ondorioztatu zuena sistema horren atzean atraktore bat zegoela, konputazionalki jarrera hori ikusi baitzuen, 2002ra arte ezin izan zen frogatu analitikoki. Warwick Tucker matematikari australiarrek lortu zuen.

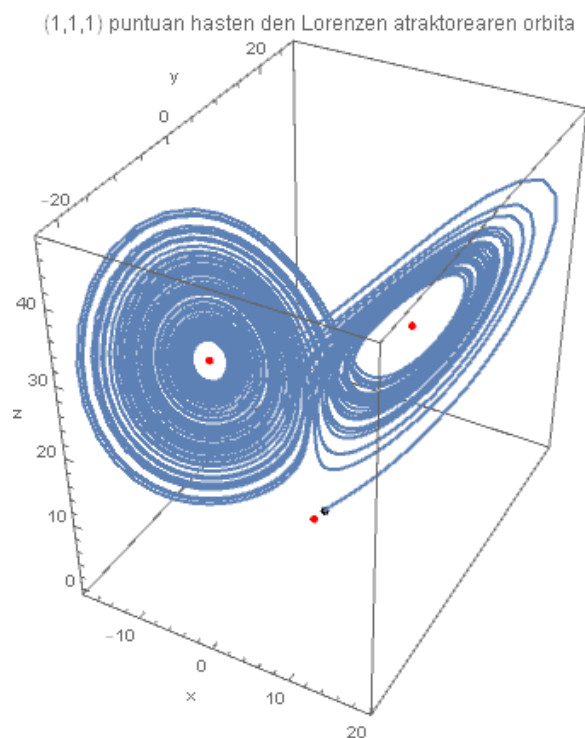
**Teorema 4.3.4.**  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  eta  $r = 28$  balioetarako (4.1) Lorenzen sistemak atraktore bat du. Gainera, atraktorea sendoa da, hots, ez dago parametroen aldaketa txikien menpe.

Lan honen helburua ez da aurreko teorema frogatzea, baina bai ikusiko dugu atraktoreak definitu ditugunean aipatutako ezaugarri nagusi bat betetzen dela, hau da, hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna.

Lehenik eta behin, ikus dezagun  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  eta  $r = 28$  balioetarako Lorenzen atraktoreak deskribatzen dituen orbitak. 4.1. irudian ikus daitezkeen bezala,  $\mathcal{C}_+$  eta  $\mathcal{C}_-$  puntu kritikoen inguruan birarazten du orbitak, baina puntu kritiko batetik bestera biratzen pasatzen da sarritan, inolako irizpiderik gabe. Halaber, ohar gaitezen orbitak ez duela infiniturantz jotzen, eta hori da atraktoreen ezaugarri nagusietako bat, nahiz eta espazioaren eremu murriztu batean mantentzen den, orbitaren portaera ezin da zehaztu.

Azkenik, ikus dezagun adibide batekin Lorenzen atraktoreak hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna duela. Horretarako,  $(1, 1, 1)$  puntuan hasten den Lorenzen atraktorearen orbita hartuz, desplazatu dezagun hasierako balioa  $(1.00001, 1, 1)$  puntura. Bi orbitak irudikatuz gero, 4.2. irudia lortuko genuke.

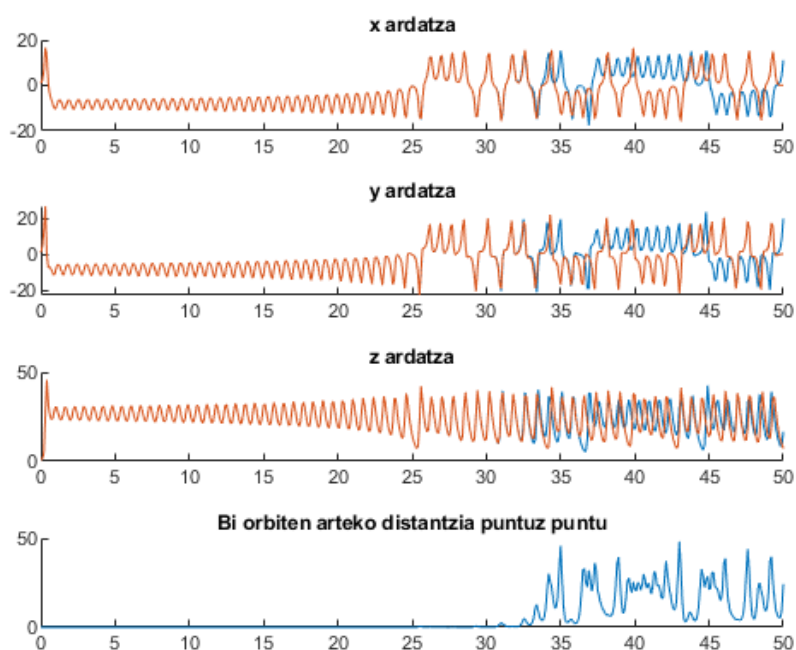
Ohar gaitezen bi orbitak berdinak direla  $t < 32$  denean, baina aldiune horretatik aurrera, bi orbitak guztiz desberdinak dira ardatz guztietan. Fenomeno hau hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna da, kaosaren ezaugarri bereizgarrietako bat.



**4.1. irudia:**  $(1, 1, 1)$  puntuan hasten den (beltzez) Lorenzen atraktoreari dagokion orbita,  $t \in [0, 50]$  tartean. Gorriz sistemaren puntu kritikoak ditugu.

Horrenbestez, Lorenzen sistemaren inguruko ezaugarri nagusiak aztertu ditugu. Sistema disipatiboa da, puntu kritikoak lortu eta hauen egonkortasuna aztertu dugu parametroen balio ezberdinetarako, bifurkazio nagusiak zehaztu ditugu, eta atraktore kaotikoaren ideia bat ikusi dugu, nahiz eta ez dugun frogapen analitiko egin.

Azken aipu gisa, [4] erreferentziatik Lorenzen sistemaren puntu kritikoaren egonkortasuna zein Tuckerren teorema aurkeztu dira, eta beste ezaugarriak [13] erreferentziatik.



**4.2. irudia:**  $(1, 1, 1)$  puntuan (urdinez) eta  $(1.00001, 1, 1)$  puntuan (gorriz) hasten diren Lorenzen atraktoreari dagokion orbita, espazioaren ardatz bakoitzean. Azkeneko grafikoan bi orbiten arteko distantzia. Grafiko guztiak  $t \in [0, 50]$  tartean irudikatuta daude, eta orbiten zenbakizko ebazpena laugarren ordenako Runge-Kutta metodoarekin lortu dira.



## 5. kapitulua

# Ondorioak eta analisisia jarraitzeko aukerak

Sarreran aipatu dugun bezala, lan honen helburua gradu honetan ikusi ez dugun sistema dinamikoen adarraren gaineko oinarritzko ezagutzak plazaratzea izan da. Sistema dinamikoak oso erabiliak dira matematikaren mundutik kanpo, fisika, kimika edota biologian, esaterako, eta ekuazio diferentzialen sistemak definitu eta beren portaera aztertzea oso tresna indartsua da.

Lehenengo ondorioztat, sistema dinamikoen muina denboraren epe luzeko egoera auresatea dela uler daiteke. Are gehiago, puntu kritikoek beren inguruko orbiten izaera zehazten dute epe luzean, eta baita kaosa epe luzeko fenomeno da, izan ere, kaosaren ezaugarri garrantzitsuenetariko bat, hots, hasierako baldintzen menpeko sentikortasuna, denbora aurrera joan ahala ikus daiteke.

Gainera, sistema dinamikoen bidez, eta batez ere bifurkazioen bidez, ohar gaitezke fenomeno fisiko asko guztiz alda daitezkeela parametro baten perturbazio txiki batekin. Eta ez soilik parametroaren perturbazio txikiekin, baita hasierako baldintzak urriki aldatuz gero, guztiz desberdinak diren emaitzak lor genitzake, egoera kaotiko baten aurrean bagaude.

Lorenzek bere atraktorearen berri eman zuen egoitza bati "Aurreikuspena; Brasileko tximeleta baten hegaldiak Texan tornado bat era al dezake?" izena eman zion. Egia da jadanik antzinako Txinan honelako esapide bat existitzen zela, baina harrezkero matematikaren arloan sartu zein behin betiko kaosaren terminoa. Bestalde, Mandelbrot matematikari frantziarrak fraktalen munduarekin topo egin bazuen, kaos diskretuaren adibide izango zena, kaos jarraitu batekin topo egin zuen Lorenzek.

Lan honetan soilik sistema dinamiko jarraituak aztertu ditugu, eta hauen inguruan informazio asko faltako litzateke hauen analisi dotore bat idatzi ahal izateko. Esaterako, sistemen forma normalak lortzeko prozedura, non Lieren aljebra erabiltzen den, edota sistema dinamiko berezi batzuk, hala nola, Lagrangeren sistemak eta Hamiltonenak.

Bestalde, sistema dinamiko diskretuen mundua ere oso zabala da, eta lan honetan ikusitako kontzeptu batzuetarako moldaketak eginez diskretuetarako balio zaizkigun, beste era batera jokatzen dute sistema hauek.

Oro har, sistema dinamikoen esparrua nahiko berria da, azken urteotan aurrerapauso asko eman dira. Horren adibide nabarmen dugu 60ko hamarkadara arte atraktore arraroen berri ez genuela. Hortaz, sistema hauen analisisian oraindik ibilbide luzea dugu, eta kontzeptu zein propietate berriak emango direla ziur gaude, etorkizunera begira.

## A. eranskina

# Ariketa ebatziak

### A.1 Zero balio propioako sistema dinamikoaren bifurkazioak

**Ariketa 1** ([15], 374. orrialdeko 6(f)). Izan bedi hurrengo sistema dinamikoa:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y + \varepsilon x + y^3, \\ \dot{y} = 2x - 3y + x^3, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

non  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  eta  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  parametroa den. Lor ezazu sistemaren barietate zentralari dagokion sistema dinamikoa jatorritik hurbil eta zehatz ezazu zein motatako bifurkazio daukan.

*Ebazpena.* Sistemaren barietate zentrala hurbiltzea izango da gure lehen helburua. Nahiz eta barietate zentralaren teoria parametririk gabeko sistema dinamikoetarako garatu dugun, enuntziatutako teoremek ez dute aldatzen sistema parametrodunetarako.

Hasi baino lehen, berehalakoa da  $(x, y) = (0, 0)$  puntu kritikoa dela (A.1) sistemarako.

Lehenik, enuntziatutako sistema (3.39) moduan idatzi nahi dugu. Horretarako, (A.1) sistema matrizialki idatziko dugu,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon x + y^3 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

moduan. Ohartu beharra dago  $\varepsilon x$  terminoa ez-lineal bezala kontuan hartuko dugula, hots,  $\varepsilon$  parametroa aldagai bezala hartuko dugu,  $\dot{\varepsilon} = 0$  betetzen duelarik.

$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$  bezala izendatuz gero, matrizearen balio propioak 0 eta  $-5$  izango dira. Beraz, balio propioetako bat zero izango da, eta bestea negatiboa. Horrek esan nahi du barietate zentralari dagokion sistema dinamikoak ekuazio bakarria izango duela.

Gainera, 0 eta  $-5$  balio propioei dagozkien bektore propioak

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

izango dira, hurrenez hurren. (3.39) formako sistema lortzeko, nahikoa da hurrengo transformazioa egitea:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

kalkulatutako bektore propioak zutabe bezala erabiliz. Ondorioz,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

berdintza dugu, hasierako (A.1) sisteman ordezkaturako duguna.

Garapena eginez,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon x + y^3 \\ x^3 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \varepsilon x + x^3 + y^3 \\ 2\varepsilon x - 3x^3 + 2y^3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \varepsilon(3u + v) + (3u + v)^3 + (2u - v)^3 \\ 2\varepsilon(3u + v) - 3(3u + v)^3 + 2(2u - v)^3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\varepsilon u/5 + \varepsilon v/5 + 7u^3 + 3u^2v + 3uv^2 \\ 6\varepsilon u/5 + 2\varepsilon v/5 - 13u^3 - 21u^2v - 3uv^2 - v^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

adierazpen matriziala lortuko genuke. Beraz, hurrengo sistema dugu:

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + f(u, v, \varepsilon), \\ \dot{v} = Bv + g(u, v, \varepsilon), \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

non  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = 0$ ,  $B = -5$ ,  $f(u, v, \varepsilon) = \frac{3}{5}u\varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon v + 7u^3 + 3u^2v + 3uv^2$  eta  $g(u, v, \varepsilon) = \frac{6}{5}u\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon v - 13u^3 - 21u^2v - 3uv^2 - v^3$  diren.

Ohar gaitezen (3.39) adierazpenaren eta lortutako adierazpenaren arteko ezberdintasun bakarra dela  $f$  eta  $g$  funtzioetan  $\varepsilon$  parametroa agertzen dela.

Gure helburua da sistemaren barietate zentrala lortzea, edo gutxienez hurbiltzea. Badakigu

$$W^c(0) = \{(u, v, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 : v = h(u, \varepsilon), |u| < \delta_1, |\varepsilon| < \delta_2, h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0\} \quad (\text{A.6})$$



dela barietate zentralaren adierazpen lokala. Lehenik,  $h(u, \varepsilon)$  funtzioaren bigarren ordenako terminoak kalkulatu ditugu. Ohartu beharra dago  $h(0, 0) = 0$  eta  $Dh(0, 0) = 0$  direnez, ez dagoela gai askerik ezta lehenengo ordenako terminorik.

Demagun  $h(u, \varepsilon) = a_1 u^2 + a_2 u\varepsilon + a_3 \varepsilon^2 + \dots$  moduko adierazpena dugula. 3. gailan ikusitako hurbilketa teoremako (3.43) adierazpenean ordezkatu dugu, adierazpen horretan parametroa gehituz  $f$  eta  $g$  funtzioetan, hots,

$$\mathcal{M}(\phi(u, \varepsilon)) := D_u \phi(u, \varepsilon)[Au + f(u, \phi(u, \varepsilon), \varepsilon)] - B\phi(u, \varepsilon) - g(u, \phi(u, \varepsilon), \varepsilon) \quad (\text{A.7})$$

adierazpenean ordezkatu dugu, gure problema partikularreko datuak erabiliz.

Beraz,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(h(u, \varepsilon)) &= (2a_1 u + a_2 \varepsilon + \dots) \left[ \frac{3}{5} u\varepsilon + \frac{1}{5} \varepsilon h + 7u^3 + 3u^2 h + 3uh^2 \right] + \\ &+ 5(a_1 u^2 + a_2 u\varepsilon + a_3 \varepsilon^2 + \dots) - \left( \frac{6}{5} u\varepsilon + \frac{2}{5} \varepsilon h - 13u^3 - 21u^2 h - 3uh^2 - h^3 \right) \end{aligned}$$

adierazpena lortuko genuke.  $\mathcal{M}(h(u, \varepsilon)) = \mathcal{O}(3)$  lortu nahi dugu, eta horretarako nahikoa da aurreko adierazpeneko  $u^2$ ,  $u\varepsilon$  eta  $\varepsilon^2$  terminoen koefizienteak zerorekin berdintzea.

$u^2$ -ren kasuan,  $5a_1 = 0$  dugu, hots,  $a_1 = 0$  izan beharko du.  $u\varepsilon$ -ren kasuan,  $5a_2 - 6/5 = 0$  berdintza bete beharko da, hau da,  $a_2 = 6/25$  izango da. Azkenik,  $\varepsilon^2$ -ren kasuan,  $5a_3 = 0$  berdintza emango da, eta beraz,  $a_3 = 0$  izango dugu. Horrenbestez,  $h(u, \varepsilon) = \frac{6}{25} u\varepsilon + \mathcal{O}(3)$  motatako adierazpena izango dugu.

Aurreko prozedura berdina  $h$ -ren hirugarren ordenako terminoak lortzeko erabil daiteke. Idatz dezagun

$$h(u, \varepsilon) = \frac{6}{25} u\varepsilon + b_1 u^3 + b_2 u^2 \varepsilon + b_3 u\varepsilon^2 + b_4 \varepsilon^3 + \mathcal{O}(4) \quad (\text{A.8})$$

bezala. Baldin eta  $\mathcal{M}(h(u, \varepsilon)) = \mathcal{O}(4)$  lortu nahi badugu,  $u^3$ ,  $u^2 \varepsilon$ ,  $u\varepsilon^2$  eta  $\varepsilon^3$  terminoen koefizienteak zerorekin berdindu behar ditugu.

Horrela,  $5b_1 - 13 = 0$ ,  $5b_2 = 0$ ,  $18/125 + 5b_3 - 12/125 = 0$  eta  $5b_4 = 0$  berdintzak lortuko ditugu, hau da,  $b_1 = 13/5$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 2/625$  eta  $b_4 = 0$  lortuko dugu,

$$h(u, \varepsilon) = \frac{6}{25} u\varepsilon + \frac{13}{5} u^3 + \frac{2}{625} u\varepsilon^2 + \mathcal{O}(4) \quad (\text{A.9})$$

funtzioa lortuz.

$v = h(u, \varepsilon)$  denez,  $v = \frac{6}{25} u\varepsilon + \frac{13}{5} u^3 + \frac{2}{625} u\varepsilon^2 + \mathcal{O}(4)$  izango da, eta  $\dot{u} = Au + f(u, v, \varepsilon)$  ekuazioan ordezkatur,

$$\dot{u} = \frac{3}{5} \varepsilon u + \frac{1}{5} \varepsilon \left( \frac{6}{25} u\varepsilon + \frac{13}{5} u^3 + \frac{2}{625} u\varepsilon^2 + \mathcal{O}(4) \right) + 7u^3 +$$

$$\begin{aligned}
& +3u^2 \left( \frac{6}{25}u\varepsilon + \frac{13}{5}u^3 + \frac{2}{625}u\varepsilon^3 + \mathcal{O}(4) \right) + \\
& +3u \left( \frac{6}{25}u\varepsilon + \frac{13}{5}u^3 + \frac{2}{625}u\varepsilon^3 + \mathcal{O}(4) \right)^2 = \\
& = \frac{3}{5}\varepsilon u + \frac{6}{125}u\varepsilon^2 + 7u^3 + \mathcal{O}(4)
\end{aligned}$$

lortuko genuke.

Beraz, barietate zentralarik dagokion ekuazioa lortu dugu, hots,

$$\dot{u} = F(u, \varepsilon) = \frac{3}{5}\varepsilon u + \frac{6}{125}u\varepsilon^2 + 7u^3 + \mathcal{O}(4). \quad (\text{A.10})$$

Barietate zentralaren teoria aztertu genuenean, barietate zentralako sistema eta hasierako sistema lokalki baliokideak zirela ondorioztatu genuen. Beraz, nahikoa da (A.1) sistemako bifurkazioak aztertzeke, (A.10) ekuazioaren bifurkazioak aztertzea.

Argi dago (A.10) sisteman bifurkazioa ematen dela  $(u, \varepsilon) = (0, 0)$  puntuan, izan ere, balio propio bakarra zero da. Ondorioz, bifurkazioa zeladura-nodo, transkritikoa edo sardexka motatakoa izango da.

Ohar gaitezen hurrengo baldintzak betetzen direla:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) = \frac{3}{5}\varepsilon + \frac{6}{125}\varepsilon^2 + 21u^2 + \mathcal{O}(3) \Big|_{u=0, \varepsilon=0} = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0, 0) = \frac{3}{5}u + \frac{12}{125}u\varepsilon + \mathcal{O}(3) \Big|_{u=0, \varepsilon=0} = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(0, 0) = 42u + \mathcal{O}(2) \Big|_{u=0, \varepsilon=0} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon \partial u}(0, 0) = \frac{3}{5} + \frac{12}{125}\varepsilon + \mathcal{O}(2) \Big|_{u=0, \varepsilon=0} = \frac{3}{5} \neq 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}(0, 0) = 42 + \mathcal{O}(1) \Big|_{u=0, \varepsilon=0} = 42 \neq 0. \quad (\text{A.15})$$

Horrenbestez, (A.10) sistemak sardexka bifurkazioa izango du  $(u, \varepsilon) = (0, 0)$  puntuaren ingurunean, eta ondorioz, hasierako (A.1) sisteman ere sardexka bifurkazioa emango da  $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$  puntuaren ingurunean.  $\square$

## A.2 Lorenzen sistemaren propietateak

**Ariketa 2** ([13], 343. orrialdeko 9.2.2). Froga ezazu existitzen dela  $rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 \leq C$  formako  $E$  eremu elipsoidal bat non Lorenzen sistemaren orbita guztiak bertan sartzen diren eta bertan mantentzen diren betirako.

*Ebazpena.* Lehenik, defini dezagun  $V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$  funtzioa. Lyapunoven funtzioen kasuan egiten genuen bezala,  $V$ -ren deribatua kalkula daiteke Lyapunoven sistemaren orbitetan zehar, hots,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, y, z) &= 2rx\dot{x} + 2\sigma y\dot{y} + 2\sigma(z - 2r)\dot{z} = \\
&= 2rx(\sigma(y - x)) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r)(xy - bz) = \\
&= 2r\sigma xy - 2r\sigma x^2 + 2r\sigma xy - 2\sigma y^2 - \\
&\quad - 2\sigma xyz + 2\sigma xyz - 4r\sigma xy - 2\sigma bz^2 + 4r\sigma bz = \\
&= -2r\sigma x^2 - 2\sigma y^2 - 2\sigma b[(z - r)^2 - r^2] = \\
&= -2\sigma(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2).
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Lortutako azkeneko emaitza kontuan hartuta, defini dezagun

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 \leq br^2\} \tag{A.17}$$

gainazala, hau ere elipsoide bat izanik. Orduan, badakigu existituko dela  $\lambda > 0$  non,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : V(x, y, z) \leq \lambda\} \tag{A.18}$$

definituz gero,  $R \subset E$  betetzen den.

Gainera,  $R$  gainazala hautatzerakoan  $\dot{V}$  funtzioan lortutako emaitza erabili dugu, izan ere,  $(x, y, z) \notin R$  bada, orduan  $\dot{V}(x, y, z) < 0$  beteko da. Ondorioz, orbita bat ez bada  $R$ -n hasten, orbitak izango duen  $V$  funtzioaren balioa geroz eta txikiagoa izango da, orbita  $R$ -ra iritsi arte, eta bertan mantenduko da.

Har dezagun  $(x_0, y_0, z_0) \notin E$  hasierako balio bezala duen Lorenzen sistemaren orbita. Orduan,  $(x_0, y_0, z_0) \notin D$  beteko da, eta  $V(x(t), y(t), z(t))$  balioa geroz eta txikiagoa izango da,  $R$ -ra sartu arte. Hortaz,  $R$ -n sartzen bada, derrigor  $R$ -n ere sartu behar izan du, eta orbita  $R$ -n mantenduko denez, eta  $R \subset E$  denez,  $E$ -n ere mantenduko da, hau da, enuntziatuak frogatzeko eskatzen duena.  $\square$

**Ariketa 3** ([13], 343. orrialdeko 9.2.3). Froga ezazu existitzen dela  $x^2 + \sigma y^2 + (z - r - \sigma)^2 \leq C$  formako  $S$  esfera bat non Lorenzen sistemaren orbita guztiak bertan sartzen diren eta bertan mantentzen diren betirako.

*Ebazpena.* Aurreko ariketaren ildo beretik,  $W(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$  funtzioa definituz, haren deribatua kalkulatu gero Lorenzen sistemaren

orbitetan zehar,

$$\begin{aligned}
\dot{W}(x, y, z) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z - r - \sigma)\dot{z} = \\
&= 2x\sigma(y - x) + 2y(rx - y - xz) + 2(z - r - \sigma)(xy - bz) = \\
&\quad 2\sigma xy - 2\sigma x^2 + 2rxy - 2y^2 - 2xyz + \\
&\quad + 2(xyz - rxy - \sigma xy - bz^2 + rbz + \sigma bz) = \\
&= 2\sigma xy - 2\sigma x^2 + 2rxy - 2y^2 - 2xyz + \quad (A.19) \\
&\quad + 2xyz - 2rxy - 2\sigma xy - 2bz^2 + 2rbz + 2\sigma bz = \\
&= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2b(z^2 - (r + \sigma)z) = \\
&= -2 \left[ \sigma x^2 + y^2 + b \left( z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 - \frac{(r + \sigma)^2}{4} \right].
\end{aligned}$$

Kasu honetan defini dezagun

$$\tilde{R} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sigma x^2 + y^2 + b \left( z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 \leq \frac{(r + \sigma)^2}{4} \right\} \quad (A.20)$$

gainazala, elipsoide bat dena. Orduan, existituko da  $\lambda > 0$  non

$$\tilde{R} \subset S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : W(x, y, z) \leq \lambda\} \quad (A.21)$$

betetzen den.

Ohar gaitezen  $(x, y, z) \notin \tilde{R}$  denean  $\dot{W}(x, y, z) < 0$  dela. Orduan,  $\tilde{R}$ -koa ez den puntu batetik abiatzen diren Lorenzen sistemaren orbiten kasuan,  $W(x, y, z)$ -ren balioa geroz eta txikiagoa izango da,  $\tilde{R}$ -ra iritsi arte, eta bertan mantenduko da.

Horrenbestez,  $(x_0, y_0, z_0) \notin S$  hasierako balio bezala duen Lorenzen sistemaren orbita hartuta,  $(x_0, y_0, z_0) \notin \tilde{R}$  betetzen denez,  $W(x(t), y(t), z(t))$  balioa geroz eta txikiagoa izango da, orbita  $\tilde{R}$ -ra iritsi arte, eta bertan mantenduko da.  $\tilde{R} \subset S$  denez, orbita  $S$  esferara sartuko da, eta bertan mantenduko da.  $\square$

# Bibliografia

- [1] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981, 3-13.
- [2] J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Viking Books, New York, 1987.
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer Science+Business Media, New York, 1983, 34, 44-45.
- [4] B. Hasselblatt, A. Katok, *A First Course in Dynamics with a Panorama of Recent Developments*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 335-339.
- [5] G. Iooss, D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, 2. ed., Springer-Verlag, New York, 1990, 11-15.
- [6] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002, 112-142.
- [7] N. Kuznetsov, V. Reitmann, *Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation*, Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2021, 3.
- [8] M. A. Martín, M. Morán, M. Reyes, *Iniciación al Caos*, Editorial Síntesis, Madrid, 1995, 254.
- [9] D. R. Merkin, *Introduction to the Theory of Stability*, Springer-Verlag, New York, 1997, 29-35.
- [10] S. Rasoulian, M. Shahrokhi, H. Salarieh, *Control of a Chemical Reactor with Chaotic Dynamics*, Iranian Journal of Chemistry and Chemical Engineering, 29 alea, 2010ko azaroa eta abendua, 149-159.
- [11] S. Sastry, *Nonlinear Systems, Analysis, Stability and Control*, Springer Science+Business Media, New York, 1999, 198-200, 315-324.

- [12] J. C. Sprott, *Elegant Chaos*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2010, 61.
- [13] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1994, 311-317.
- [14] R. Seydel, *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Springer Science+Business Media, New York, 2010, 75-81.
- [15] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2. ed., Springer-Verlag, New York, 2003, 10-12, 356-373.