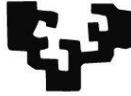


Tesis Doctoral

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UN PROCEDIMIENTO PARA EL DISEÑO MECATRÓNICO DE MANIPULADORES DE CINEMÁTICA PARALELA TIPO COMPLIANT

Presentada por

D. Antonio Ruiz Martín

Dirigida por

Dr. D. Francisco Javier Campa Gómez

Abril de 2022

A Mónica

Agradecimientos

Me gustaría aprovechar estas líneas para agradecer a cada una de las personas que han contribuido a hacer posible este trabajo.

En primer lugar me gustaría dar las gracias a mi director de tesis, Francisco Javier Campa Gómez, por su apoyo a lo largo de todo este proceso. Sus consejos y recomendaciones me han permitido desarrollar esta investigación, facilitándome el poder compaginar ésta con mi carrera profesional y comprendiendo determinadas situaciones por las que he pasado. Gracias de corazón Fran.

También quiero agradecer al conjunto de miembros del grupo de investigación "Compmech" por facilitarme todos los medios y recursos necesarios para desarrollar cada una de las etapas de este trabajo, además de consejos y aportaciones clave para el mismo.

A mis compañeros del aula de doctorandos, darles las gracias por su acogida y su gran compañerismo, el cual fue clave para superar determinadas situaciones. En especial me gustaría acordarme de Constantino, cuyo trabajo ha sido determinante para el desarrollo de esta tesis.

También quiero acordarme de mis compañeros de la zona de taller. Me acogisteis como un miembro más, aun sin estar allí mi puesto de trabajo, brindándome vuestra ayuda siempre que la necesité. Mención especial para Gorka, quien fue clave para el desarrollo del prototipo y cada una de las pruebas que a él realizamos.

Durante el tiempo que ha durado esta tesis, ha sido muy importante la relación mantenida con el "Grupo Egile". En especial me gustaría acordarme de Jorge Presa, cuyas directrices y consejos nos permitieron encauzar esta investigación.

También me gustaría dar las gracias a mis compañeros de "Engranajes Deusto" por permitirme el poder compaginar mi trabajo con esta investigación, facilitándome los tiempos necesarios para su consecución.

Finalmente, me gustaría acordarme de mi gente, sin cuyo apoyo hubiera sido imposible la consecución de este trabajo. De mis amigos, tanto de Castellón, como de Bilbao o Etxebarri, gracias por estar siempre ahí en las buenas, pero sobretodo en las malas ocasiones. Saber que uno tiene detrás un ejército de buena gente no tiene precio. No os nombro a todos porque me faltarían páginas y seguro que me dejaría a alguien. Vosotros ya sabéis quienes sois.

Mención aparte para Álvaro que más que compañero de piso y amigo, ya es familia. A Antonio y a Fefi, por hacerme sentir que soy uno más de su familia, y a Sara por mostrarme que hay luz después de tanta oscuridad.

Y qué decir de mi familia, pues que ese apoyo incondicional de cada uno de ellos ha sido clave para superar todo este proceso. Abuelas, tíos, primos, sobrinos, cuñados... os tengo a todos muy presentes. Mención especial para mi hermana Marta, por demostrarme que siempre podré contar con ella ante cualquier situación, y a mis padres, Manolo y Araceli, por su infinito apoyo y comprensión durante todos estos años.

Y por último nombrar a la persona a la que va dedicada todo este trabajo, Mónica. Tal y como te prometí, he acabado con esta etapa y sé que allá donde estés, seguro que te sentirás orgullosa de mi.

Resumen

El objetivo de este trabajo de investigación ha sido desarrollar una metodología para el diseño mecatrónico de mecanismos de cinemática paralela tipo Compliant, la cual, en base a unos determinados requisitos a cumplir, permita alcanzar el mecanismo óptimo para dicha aplicación. Debido a que en el diseño de estos mecanismos intervienen aspectos tan dispares como el cálculo estructural, la cinemática y dinámica, el sistema de control, los sensores y los actuadores, se hace necesario el planteamiento de un método que aborde todos estos problemas de una forma clara y ordenada, con el fin de llegar a un diseño óptimo en el mínimo tiempo posible. Así, han sido definidas cada una de las etapas que componen dicha metodología.

En una primera instancia, ha sido desarrollada la cinemática para el manipulador seleccionado, resolviendo el problema cinemático inverso y el problema cinemático directo, calculando los movimientos parásitos que presenta el mecanismo, y las coordenadas pasivas del manipulador. Dentro de esta etapa también se determina el espacio de trabajo alcanzado, definiendo el método que permite su consecución. Por último, se resuelve el problema de velocidades, gracias al cual se pueden obtener las relaciones existentes entre las coordenadas propias de cada uno de los elementos que componen el mecanismo, y las coordenadas globales del mismo.

El segundo paso de la metodología consiste en la resolución del problema dinámico del manipulador, el cual es alcanzado por medio de la aplicación del Principio de Equivalencia de Energía. Así, son definidos cada uno de los pasos para su consecución, aplicándose a los distintos elementos que conforman el mecanismo, con el fin de determinar los esfuerzos soportados por cada uno de ellos y para el conjunto del manipulador.

Una vez obtenidas las etapas anteriores, el siguiente paso consiste en el desarrollo del análisis mecatrónico del mecanismo, el cual integra los anteriores cálculos cinemáticos y dinámicos con una etapa de control y actuación, y permite simular las capacidades del mismo para unas determinadas condiciones aplicadas al mismo. Del mismo modo, es definido el modelo mecatrónico del sistema de actuación, donde la etapa de control se realiza a través de tres lazos cerrados en cascada de posición, velocidad y corriente, y para el modelo de los accionamientos se emplea la representación en Espacio de Estados.

En la cuarta etapa de este proceso de diseño, se define la metodología para el cálculo estructural, tanto de las juntas flexibles como para el conjunto del mecanismo. Ésta se basa en un proceso iterativo de cálculos FEM (método de elementos finitos), en base a unos requisitos de desplazamientos y tensiones máximas a alcanzar en las zonas flexibles del manipulador. La resolución de la misma permite determinar la estructura óptima buscada en este proceso de diseño.

Por último se muestran los resultados obtenidos tras la aplicación de diferentes análisis experimentales sobre el prototipo desarrollado, con el fin de demostrar la idoneidad de la metodología de diseño propuesta. Así, en un primer lugar, se define el proceso para la verificación dimensional del prototipo fabricado. A continuación se muestra el procedimiento para verificación cinemática y los resultados alcanzados en el mismo. Y por último se lleva a cabo la validación experimental del modelo mecatrónico, la cual permite comparar los valores

predichos por el modelo mecatrónico con los valores reales extraídos de los actuadores empleados en el prototipo desarrollado.

El presente trabajo de investigación se sitúa dentro del área de la mecatrónica de precisión, la cual aborda la integración de la mecánica de precisión, el control y sistemas para crear productos tecnológicamente avanzados con precisión micro y nanométrica. Los avances alcanzados en este campo han sido constantes en los últimos años, por lo que se observa la potencial aplicabilidad de la metodología propuesta en este trabajo de tesis, en un amplio rango de aplicaciones de alta tecnología.

Índice

1.	Introducción	11
1.1	Contexto industrial.....	11
1.2	Mecanismos Compliant.....	14
1.3	Organización del trabajo	17
2.	Estado del arte	19
2.1	Introducción	19
2.2	Introducción a los Mecanismos Compliant	20
2.2.1	Ventajas.....	23
2.2.2	Inconvenientes	24
2.3	Juntas Flexibles Monolíticas o Flexores: Diseño y cálculo	25
2.3.1	Criterios de diseño	27
2.3.2	Reemplazo articular	29
2.4	Diseño de Juntas flexibles de revolución	30
2.4.1	Juntas tipo muesca.....	30
2.4.2	Juntas de Revolución basadas en vigas/ placas/ laminas	34
2.4.3	Diseño de juntas flexibles esféricas y universales.....	36
2.4.4	Diseño de juntas flexibles prismáticas	38
2.4.5	Comparativa entre juntas flexibles: Resumen	39
2.4.6	Aplicaciones potenciales de las juntas flexibles.....	41
2.5	Manipuladores Compliant. Serie y Paralelos	46
2.5.1	Distinción entre manipuladores serie y paralelos.....	46
2.5.2	Aplicaciones Emergentes para los manipuladores Compliant	54
2.5.3	Posibles desarrollos futuros	58
2.6	Modelado de Manipuladores Compliant	58
2.6.1	Cinemática.....	59
2.6.2	Dinámica: Tipos de formulaciones	61
2.6.3	Modelado de mecanismos Compliant o Mecanismos Flexibles	64
2.6.4	Análisis Estructural	69
2.6.5	Pseudo Solido-Rígido.....	76
2.6.6	Posibles desarrollos futuros en el modelado de Mecanismos Compliant	83

2.7	Diseño Mecatrónico	83
2.7.1	Introducción	83
2.7.2	Modelado mecatrónico.....	85
2.7.3	VDI 2206	86
2.7.4	Introducción al modelado mecatrónico.....	90
2.7.5	Modelo mecatrónico de los actuadores electromecánicos	91
2.7.6	Modelado del control.....	96
2.7.7	Análisis mecatrónico de un manipulador cinemático paralelo compliant.....	98
2.8	Carencias detectadas	99
3.	Metodología para el diseño de mecanismos con juntas flexibles	101
3.1	Planteamiento de la metodología:.....	102
3.2	Requisitos	104
3.3	Requisitos impuestos al manipulador 3-PRS.....	104
3.4	Diseño preliminar del manipulador 3PRS	106
3.5	Análisis cinemático del mecanismo	108
3.6	Análisis cinemático del mecanismo 3-PRS	108
3.6.1	Descripción geométrica del manipulador paralelo 3-PRS.....	108
3.6.2	Movimientos Parásitos.....	109
3.6.3	Problema Cinemático Inverso	112
3.6.4	Problema Cinemático Directo	112
3.6.5	Coordenadas Pasivas.....	116
3.6.6	Espacio de trabajo resultante y dimensiones finales del manipulador	119
3.6.7	Problema de velocidades	123
3.7	Análisis dinámico.....	127
3.8	Problema dinámico inverso del mecanismo 3-PRS.....	127
3.8.1	Plataforma móvil	128
3.8.2	Actuadores	132
3.8.3	Barras $A_i B_j$	133
3.8.4	Modelo dinámico del conjunto del manipulador 3-PRS	134
3.9	Análisis Mecatrónico	135
3.9.1	Modelado mecatrónico de mecanismos paralelos	135
3.9.2	Modelado mecatrónico del mecanismo 3-PRS	137
3.9.3	Modelo mecatrónico del sistema de actuación	138
3.10	Análisis Estructural.....	145

3.11	Análisis Estructural del Mecanismo 3-PRS	146
3.11.1	Requisitos en los pares cinemáticos.....	148
3.11.2	Diseño de las juntas flexibles basándose en cálculos FEM	149
3.11.3	Diseño del manipulador 3-PRS basándose en cálculos FEM	155
3.12	Resumen de la metodología. Conclusiones	158
4.	Validación Experimental.....	159
4.1	Construcción del prototipo	160
4.1.1	Plataforma móvil	161
4.1.2	Barras	162
4.1.3	Bases Actuadores	163
4.1.4	Elemento Fijador	164
4.1.5	Placa modular.....	164
4.1.6	Accionamientos y controlador	165
4.2	Validación dimensional	168
4.3	Validación cinemática	172
4.4	Validación del modelo mecatrónico	174
4.4.1	Caso 1: Movimiento en Z de la plataforma	176
4.4.2	Caso 2: Movimientos desfasados 120°	178
5.	Aportaciones, conclusiones y líneas futuras de trabajo.....	181
5.1	Aportaciones y conclusiones	182
5.2	Líneas futuras de trabajo.....	185
6.	Bibliografía	187

Índice de Figuras

Figura 1. Ejemplo de micro-fabricación. Nano-inyector [1]	12
Figura 2. Campos de aplicación Mecánica de Precisión.....	13
Figura 3 a) Mecanismo formado por juntas convencionales b) Mecanismo Compliant	15
Figura 4. Ejemplo de mecanismo compliant de cierre.....	16
Figura 5. Algunos ejemplos del empleo de la flexibilidad en la naturaleza: una columna vertebral, las alas de la abeja, trompas de elefante, flores, un mosquito, algas marinas y anguilas	20
Figura 6. Ejemplo de arco antiguo	21
Figura 7. Alabeo de alas en los aviones de los hermanos Wright [12].....	21
Figura 8. Ejemplos de mecanismos compliant [14].....	23
Figura 9. Junta convencional mecánica [20]	25
Figura 10. Componentes Básicos de las Juntas Flexibles	26
Figura 11. Ejemplo de bisagra de poca longitud (juntas de revolución).....	27
Figura 12. Criterios para el Diseño de Juntas Flexibles	27
Figura 13. Movimiento parasito en juntas de lámina	28
Figura 14. Conversión de Articulaciones Convencionales a Flexibles en un Mecanismo	29
Figura 15. Algunas de las juntas tipo muescas básicas	30
Figura 16. Variaciones en la transición de las juntas en voladizo a las juntas tipo muesca circular.....	30
Figura 17. Juntas tipo muesca para las cuales Smith proporciona ecuaciones	31
Figura 18. Junta elíptica tipo muesca.....	32
Figura 19. Pivote transversal	34
Figura 20. Rueda de carro	35
Figura 21. Ejemplos de Juntas de hoja en ángulo	36
Figura 22. Flexores con movimientos en más de un eje	37
Figura 23. Ejemplo de mecanismo que emplea resortes de láminas.....	38
Figura 24. Juntas Compliant de Traslación (No Actuada y Flexionada) [30]	38
Figura 25. Ejemplos de un giroscopio MEMS [31].....	42
Figura 26. Dispositivo protésico Compliant para el tobillo [32].....	42
Figura 27. Flexores utilizados en Manipuladores [20]	43
Figura 28. Concepto del micro-mecanismo Compliant estáticamente equilibrado [33]	43
Figura 29. Ejemplo de mecanismo de bisagra.....	44
Figura 30. Ejemplo de mecanismo posicionador en el plano XY [34]	44
Figura 31. Esquema de un Sistema de aislamiento de Vibraciones [35]	45
Figura 32. Mecanismo doblador de espejos de cuatro barras [20]	45
Figura 33. Robot Gargantua – “Bill” Griffith P. Taylor.....	46
Figura 34. Robot Serie Fanuc M-2000iA/1200 [36]	47
Figura 35. Robot explorador [38]	49
Figura 36. Robot paralelo patentado por W.L.V. Pollard [40].....	50
Figura 37. a) (Ejemplo de manipulador MAST [42]. b) Plataforma paralela empleada como simulador de vuelo [43]	50

Figura 38. Ejemplo Robot paralelo tipo Delta de tres barras.....	51
Figura 39. Deformación con configuración serie y paralela.....	53
Figura 40. Espacio de trabajo	53
Figura 41. Aplicaciones de los Mecanismos Compliant	54
Figura 42 . Ejemplo de nano-posicionador basado en flexión [54].....	54
Figura 43. Esquema de funcionamiento de un MFA.....	55
Figura 44. Sensor de fuerza de tres ejes con medición de datos desacoplados [48]	55
Figura 45. Principio de compensación por gravedad [62]. a) Esquema de un mecanismo de fuerza constante de compensación, b) Correspondiente modelo Pseudo-sólido rígido; c) Ejemplo de implementación	56
Figura 46. Ejemplo de un actuador electrostático MEMS.....	56
Figura 47. Ejemplo de una estructura expansible [46]	57
Figura 48. Matriz solar desplegable basada en un patrón de origami [75]	57
Figura 49. Ejemplo de un mecanismo espacial compliant para el aislamiento de vibraciones [76]	58
Figura 50. Mecanismo con flexibilidad concentrada. El estrés se concentra e intensifica en un área pequeña [121].....	64
Figura 51. Diseño de un actuador biestable para un mecanismo de tren de aterrizaje. Pucheta y Cardona [130].....	66
Figura 52. Mecanismo con flexibilidad distribuida. El estrés se distribuye a lo largo de la estructura y permanece en niveles bajos [121].....	66
Figura 53. Comparativa entre la parametrización continua de la densidad del material y la de la estructura de suelo	68
Figura 54. Topología optimizada de un mecanismo 3D calculado con BEVO (izquierda) y el modelo completo resultante (derecha) [145].....	69
Figura 55. Ejemplo de esfuerzo directo	70
Figura 56. Desplazamientos y deformaciones sobre un mecanismo XY [148].....	71
Figura 57. Logo Ansys-Workbench [157]	76
Figura 58. Viga flexible en voladizo con fuerza F_t aplicada en $x=a$ e $y=b$. Extraída de [5]	77
Figura 59. El MPSR de una viga en voladizo flexible. (Ver Figura 58). Extraída de [5]	78
Figura 60. Enlace de viga. a) Movimiento del enlace debido al momento aplicado. b) MPSR para el enlace y error introducido por el modelo respecto al movimiento real. Extraída de [162] ...	80
Figura 61. Enlace de viga. a) Trayectoria descrita en la deformación del enlace. b) Comparativa entre las trayectorias desarrolladas en el Modelo. Extraída de [162]	80
Figura 62. a) Enlace de viga (desarrollado antes). b) Enlace tipo Bisagra. Extraída de [163]	81
Figura 63. Modelo Pseudo Sólido-Rígido desarrollado para el enlace bisagra. Extraída de [163]	81
Figura 64. Mecanismo de cuatro barras con muelles de torsión en cada junta. Extraída de [22]	82
Figura 65. Cuatro configuraciones posibles para un micro-mecanismo. Extraída de [22]	82
Figura 66. Mecanismo paralelo de torsión y su MPSR desarrollado. Extraída de [165]	83
Figura 67. Áreas de la Mecatrónica.....	84
Figura 68. Ciclo de resolución de problemas en el nivel micro. Extraído de [171]	87
Figura 69. Modelo en forma de V en el nivel macro. Extraído de [171]	88
Figura 70. Proceso de diseño con múltiples ciclos. Extraído de [171]	90

Figura 71. Circuito eléctrico de un actuador	92
Figura 72. Modelo de un grado de libertad de un actuador	93
Figura 73. Modelo mecatrónico del sistema de actuación	93
Figura 74. Modelo electromecánico de un actuador con un modelo mecánico de un grado de libertad	94
Figura 75. Modelo de dos grados de libertad de un actuador	94
Figura 76. Modelo mecatrónico con esquema de control del espacio articular	97
Figura 77. Esquema de control del espacio articular	97
Figura 78. Modelo mecatrónico con control de área de trabajo	98
Figura 79. Control del i-ésimo actuador para el control del espacio de trabajo.....	98
Figura 80. Metodología de Diseño propuesta.....	102
Figura 81. Metodología propuesta, paso 1: Requisitos	104
Figura 82. Proceso de microfresado de lentes [172]	105
Figura 83. Izquierda) Matriz típica 4x4 de moldes para microlentes. Derecha) Estrategia de fresado espiral descendente	105
Figura 84. Desplazamientos en las direcciones x, y y z para el fresado de la pieza de trabajo diseñada	106
Figura 85. Metodología propuesta, paso 2: Diseño preliminar	106
Figura 86. Manipulador XY-3PRS	107
Figura 87. Mesa XY ANT95-L y especificaciones [173]	107
Figura 88. Metodología propuesta, paso 3: Análisis Cinemático	108
Figura 89. Esquema de un manipulador 3-PRS	108
Figura 90. Esquema resolutivo del problema cinemático directo	115
Figura 91. Sistemas de referencia empleados para obtener las rotaciones en las juntas esféricas	116
Figura 92. Rotaciones realizadas entre los sistemas S_i y S_{i0}	118
Figura 93. Esquema para cálculo del Espacio de Trabajo	120
Figura 94. Espacio de trabajo. Vista Z - Ψ	121
Figura 95. Espacio de trabajo. Vista Z - θ	121
Figura 96. Espacio de trabajo. Vista Ψ - θ	122
Figura 97. Espacio de trabajo. Vista Z - θ - Ψ	122
Figura 98. Metodología propuesta, paso 4: Análisis Dinámico	127
Figura 99. Esquema del modelo dinámico de los actuadores.....	132
Figura 100. Metodología propuesta, paso 5: Análisis Mecatrónico	135
Figura 101. Representación de los componentes principales de un mecanismo paralelo y sus interacciones	136
Figura 102. Modelo de perturbación entre el manipulador y los actuadores	136
Figura 103. Modelo Mecatrónico.....	137
Figura 104. Esquema del Modelo Mecatrónico	138
Figura 105. Esquema del modelo de Control	139
Figura 106. Modelo de los actuadores.....	140
Figura 107. Modelización polea motora	140
Figura 108. Modelización polea de arrastre	140

Figura 109. Modelización correa entre polea motora y mesa	141
Figura 110. Modelización mesa actuada.....	141
Figura 111. Modelización correa entre mesa y polea de arrastre	141
Figura 112. Modelización correa entre ambas poleas	141
Figura 113. Esquema de los actuadores.....	143
Figura 114. Metodología propuesta, paso 6: Análisis Juntas.....	145
Figura 115. Metodología propuesta, paso 7: Análisis del Mecanismo	145
Figura 116. Estructura 3-PRS. Dimensiones principales de las juntas de revolución y esféricas	146
Figura 117. Esquema del proceso de diseño.....	147
Figura 118. Movimientos en la plataforma (z, Ψ, θ) y desplazamientos en los actuadores (s_i)	148
Figura 119. Rotaciones en las juntas de revolución (α_i) y en las juntas esféricas ($\beta_{mi}, \beta_{ni}, \beta_{li}$)..	149
Figura 120. Modelización de ensayos FEM a las juntas flexibles	153
Figura 121. Mallado de las juntas flexibles	154
Figura 122. Carga y deformación de las juntas flexibles. Arriba) Flexión de la junta de revolución. Medio y Abajo) Flexión y torsión de la junta esférica	154
Figura 123. Mallado del manipulador 3-PRS.....	155
Figura 124. Zonas de las juntas con máxima tensión durante un desplazamiento vertical del manipulador	156
Figura 125. Metodología propuesta, paso 8: Prototipo.....	160
Figura 126. Prototipo desarrollado	160
Figura 127. Componentes del Prototipo	160
Figura 128. Dimensiones Plataforma móvil	161
Figura 129. Fabricación Plataforma móvil.....	161
Figura 130. Ranurado en la Plataforma móvil.....	162
Figura 131. Plano para Barras	162
Figura 132. Arriba) Barras fabricadas. Abajo-Izq.) Junta Revolución. Abajo-Dcha.) Juntas Esférica	163
Figura 133. Dimensiones Base Actuadores	163
Figura 134. Ranurado y Base Actuator final	164
Figura 135. Proceso de impresión 3d y elemento fijador final	164
Figura 136. Placa modular norelem 5106 006 020.....	165
Figura 137. Dcha.) Motor DC RE-40 Maxon; Izqda.) Correa lineal Iigus ZLW-1040-02-S-100....	166
Figura 138. Esquema de control del prototipo	166
Figura 139. Dcha.) NI-PXIe 1062; Izqda.) Maxon EPOS2 50/5.....	166
Figura 140. Metodología propuesta, paso 9: Validación	168
Figura 141. Máquina de medir por coordenadas ZEISS MC850.....	168
Figura 142. Medidas realizadas en las guías lineales	168
Figura 143. Medidas realizadas en las bases de los actuadores	169
Figura 144. Medidas realizadas en las barras del manipulador	170
Figura 145. Medidas realizadas en la plataforma móvil	171
Figura 146. Medidas realizadas en las caras posteriores de las bases de los actuadores	171
Figura 147. Medición de los desplazamientos en la plataforma móvil y los actuadores.....	172
Figura 148. Disposición para ensayos en el prototipo	175
Figura 149. Desplazamiento vertical del manipulador 3-PRS	175

Figura 150. Inclinación obtenida en la plataforma	176
Figura 151. Comparativa entre desplazamientos comandados y simulados en el modelo.....	176
Figura 152. Fuerzas simuladas por el modelo para el desplazamiento en Z de la plataforma.	177
Figura 153. Comparativa entre desplazamientos S_i simulados y experimentales para desplazamiento Z	177
Figura 154. Comparativa entre Pares motor τ_{mi} simulados y experimentales para desplazamiento Z	178
Figura 155. Desplazamientos simulados en el modelo para movimientos desfasados 120° ...	178
Figura 156. Fuerzas simuladas por el modelo para movimientos desfasados 120°	179
Figura 157. Comparativa entre desplazamientos S_i simulados y experimentales para movimientos desfasados 120°	179
Figura 158. Comparativa entre Pares motor τ_{mi} simulados y experimentales para movimientos desfasados 120°	180

Índice de Tablas

Tabla 1. Ecuaciones Juntas rectangulares y Juntas circulares.....	31
Tabla 2. Comparativa entre juntas tipo muesca: rectangular, circular y elíptica	33
Tabla 3. Ecuaciones características del pivote transversal	34
Tabla 4. Ecuaciones características de la junta rueda de carro	35
Tabla 5. Ecuaciones características de la junta Compliant de Traslación	39
Tabla 6. Comparativa Juntas de Revolución Flexibles. (-: pobre, 0: normal, +: bueno).....	40
Tabla 7. Comparativa Juntas de Traslación Flexibles. (-: pobre, 0: normal, +: bueno)	41
Tabla 8. Requisitos del proceso de microfresado de lentes.....	106
Tabla 9. Resultados iteración análisis FEM para la Junta de Revolución	150
Tabla 10. Resultados iteración análisis FEM para la Junta Esférica	152
Tabla 11. Influencia de los parámetros de diseño en el comportamiento del manipulador	156
Tabla 12. Valores obtenidos para la junta de revolución.....	157
Tabla 13. Valores obtenidos para la junta esférica	157
Tabla 14. Fuerzas estáticas, desplazamientos y máximas tensiones en juntas	157
Tabla 15. Características dimensionales de la placa modular norelem® 5106 006 020	165
Tabla 16. Ganancias para los lazos de control de velocidad y corriente en los motores	167
Tabla 17. Parámetros del manipulador 3-PRS: dimensiones, parámetros dinámicos y parámetros de control.	167
Tabla 18. Ángulos medidos entre las guías	169
Tabla 19. Altura e inclinaciones medidas en las bases de los actuadores	169
Tabla 20. Alturas de las barras del manipulador.....	170
Tabla 21. Altura e inclinación de la plataforma móvil.....	171
Tabla 22. Posición de partida para las bases de los actuadores	172
Tabla 23. Comparación entre las medidas MMC, MEF y PCD.....	173
Tabla 24. Errores absolutos en las medidas de la MMC, comparadas con las predicciones de los análisis MEF y PCD.....	173
Tabla 25. Comparación entre las predicciones MEF y PCD.....	174

1. Introducción

1.1 Contexto industrial

La economía global, en la que se encuentran sumergidos los diferentes campos de la ingeniería, está provocando que se sucedan cambios profundos y drásticos en la forma en la que, hasta hace relativamente poco tiempo, se entendía la forma de dirigir la industria.

Gracias a la facilidad y mejoras en las comunicaciones, tanto para pasajeros y mercancías como para los flujos de información, ha propiciado que surjan nuevos sistemas comerciales entre economías muy distantes. Esto ha provocado que la competitividad de las empresas se vea ampliamente afectada, ya que nuevos agentes productivos son introducidos en los mercados económicos.

Son conocidos los bajos salarios que se entregan en los países menos desarrollados, frente a los cuales no pueden competir los países del primer mundo. Es por ello que una forma de luchar en este mercado tan competitivo, es dar un producto de mayor calidad, en la que el grado tecnológico desarrollado en él sea muy superior.

Uno de los factores que aumentan en gran medida este factor de calidad es la **precisión** alcanzada, bien sea en el acabado dimensional que procesa un determinado producto o en el posicionado que se alcanza en una determinada operación. Esto implica que el sector manufacturero mecánico debe transformarse y por consiguiente, la necesidad de una Mecánica de Precisión para obtener mayor competitividad, calidad y eficiencia y así satisfacer las necesidades del mercado.

En los últimos años, la industria de la mecánica de precisión se ha transformado en uno de los sectores con mayores perspectivas de crecimientos y de futuro. Los productos desarrollados se emplean en ámbitos industriales tan variados como la electrónica, las telecomunicaciones, instrumentos de medición, medicina, sector óptico, aeroespacial, científico, entre otros, ver Figura 1.

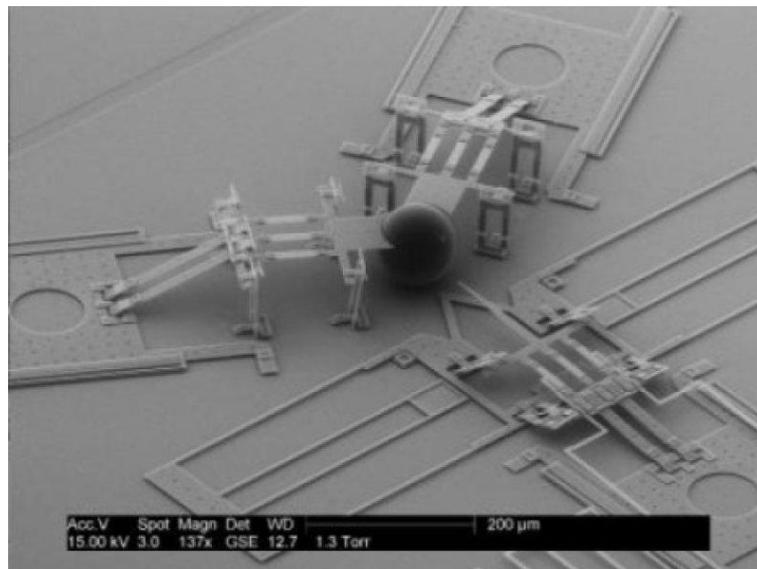


Figura 1. Ejemplo de micro-fabricación. Nano-inyector [1]

La mecánica de precisión debe desarrollar nuevos procesos de diseño y producción de componentes y piezas micrométricas ya que, a consecuencia de su función, estructura y forma, requieren de procesos de producción distintos a los que de la mecánica convencional nos ofrece. El componente dimensional, en la mecánica de precisión, es el factor clave. Superficies con grados de pulido especulares, ensamblajes con exigencias de precisión extremas y elementos que jamás podrían ser producidos en máquinas-herramienta con desprendimiento de viruta, son propios del tema de la mecánica de precisión. Del mismo modo, la metrología dimensional y la graduación de superficies mecánicas, son campos propios de la actividad tecnológica en mecánica de precisión.

Todos estos sectores productivos de elevado grado tecnológico, se hallan presentes en los cimientos de la producción tecnológica de nuestra era. Algunos de ellos están fuertemente interrelacionados e incluso su avance se ha producido en virtud del desarrollo de otros. La microelectrónica ha sido posible gracias al descubrimiento de los semiconductores; los adelantos en Biotecnología no se habrían alcanzado sin el microscopio electrónico que, a su vez, se apoya en los avances en mecánica fina. El dispositivo más importante y necesario de la actualidad para el desarrollo tecnológico, el ordenador, es producto de la combinación de

nuevos materiales, microelectrónica y mecánica de precisión. El ordenador, a su vez, insertado en los procesos automáticos asume el control de muchas tareas peligrosas y difíciles para el hombre, con lo que se alcanza el mundo de la robótica; en la cima de toda esta interrelación estaría la conjugación de estas tecnologías con la biotecnología y obtendríamos la biónica, que ya no es ciencia ficción. En la Figura 2 se observan diferentes ejemplos de estas tecnologías.

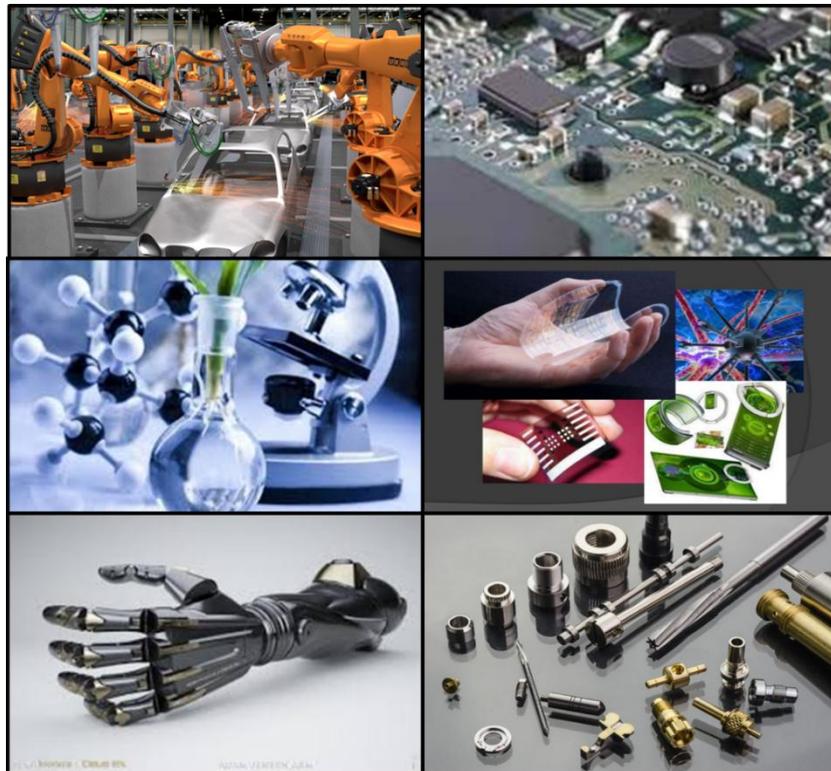


Figura 2. Campos de aplicación Mecánica de Precisión

Existen diferentes organizaciones que fomentan y ayudan al desarrollo de estas nuevas tecnologías basadas en la precisión. A nivel europeo tenemos la Sociedad Europea de Ingeniería de Precisión y Nanotecnología (Euspen), la cual es una comunidad que une a industrias, investigadores, autoridades, a nuevos actores y a aquellos que ya están establecidos en este campo en todo el mundo. Así, proporciona una plataforma que permite a las empresas y a los institutos de investigación promover sus últimos desarrollos tecnológicos, productos y servicios, y mantenerse al día con los expertos en este campo. La misión definida de Euspen es avanzar en las artes, las ciencias y la tecnología de la ingeniería de precisión, la micro-ingeniería y la nanotecnología; promover su difusión a través de la educación y la capacitación; y facilitar su explotación por la ciencia y la industria. Para obtener una mayor información sobre esta organización, se puede visitar la web que aparece en [2].

A nivel local, existen tanto organizaciones públicas como privadas, las cuales están tratando de desarrollar estas tecnologías en nuestro entramado productivo. Así, por ejemplo, existe el centro tecnológico IK4-TEKNIKER, el cual trata de impulsar la capacidad innovadora de sus clientes e incrementar su capital tecnológico para mejorar su competitividad de forma sostenible, a través de la generación y aplicación del conocimiento científico-tecnológico [3].

En él desarrollan distintos campos tecnológicos, algunos de los cuales pueden fomentar el uso de la micro-precisión, tales como la mecatrónica, la automatización y robótica industrial, la inspección y medida, y la sensórica.

Un ejemplo de empresa privada que desarrolla parte de su estructura productiva en el campo de la micro-precisión es Egile Corporation [4] cuya misión la definen como "hacer posible y crear oportunidades de negocio en el ámbito de la mecánica de alta precisión, gracias a nuestra especialización tecnológica y empresarial". Así, Egile actúa como plataforma de actividades de intra-emprendimiento y generación de nuevas empresas. Como resultado, Egile Corporation se ha convertido en una Corporación de Empresas de Base Tecnológica que, partiendo de la Mecánica de Alta Precisión como núcleo competencial, desarrolla Productos, Servicios y Soluciones de Alto Valor para sus Clientes.

De todo esto se desprende la gran importancia que posee la mecánica de precisión en el presente y futuro de la economía global, y la necesidad de desarrollar y evolucionar los procesos productivos en todas sus etapas. En el siguiente apartado se van a introducir un tipo de dispositivos, conocidos como "Mecanismos Compliant", que han surgido con el objetivo de alcanzar los mayores grados de precisión posibles en los sistemas de posicionamiento. Este tipo de dispositivos serán objeto de estudio en esta tesis.

1.2 Mecanismos Compliant

Un mecanismo puede considerarse como un dispositivo formado por elementos rígidos o flexibles unidos entre sí con el fin de permitir la conversión y/o la transmisión de fuerza, movimiento o energía. Estos elementos son llamados con frecuencia como eslabones o enlaces (links) en la literatura clásica. Los mecanismos tradicionales de cuerpos rígidos consisten en elementos rígidos conectados mediante articulaciones móviles y su movimiento se deriva de las traslaciones y / o rotaciones de los cuerpos rígidos que lo componen, ver Figura 3a.

En la actualidad, por el contrario, muchos mecanismos están siendo diseñados gracias a la deformación en una o más de sus juntas flexibles, en lugar de emplear articulaciones móviles. Estos dispositivos son los conocidos como Mecanismos Compliant, los cuales pueden ser considerados como un conjunto monolítico de elementos relativamente rígidos conectados por medio de elementos flexibles (articulaciones flexibles). El objetivo de este tipo de dispositivos es alcanzar un determinado desplazamiento en una parte específica del mismo, por medio de la deformación elástica de sus juntas flexibles. Por tanto, la movilidad de los mismos estará estrechamente relacionada con la capacidad que un determinado material presenta para deformarse elásticamente ante un determinado esfuerzo que le es aplicado, ver Figura 3b.

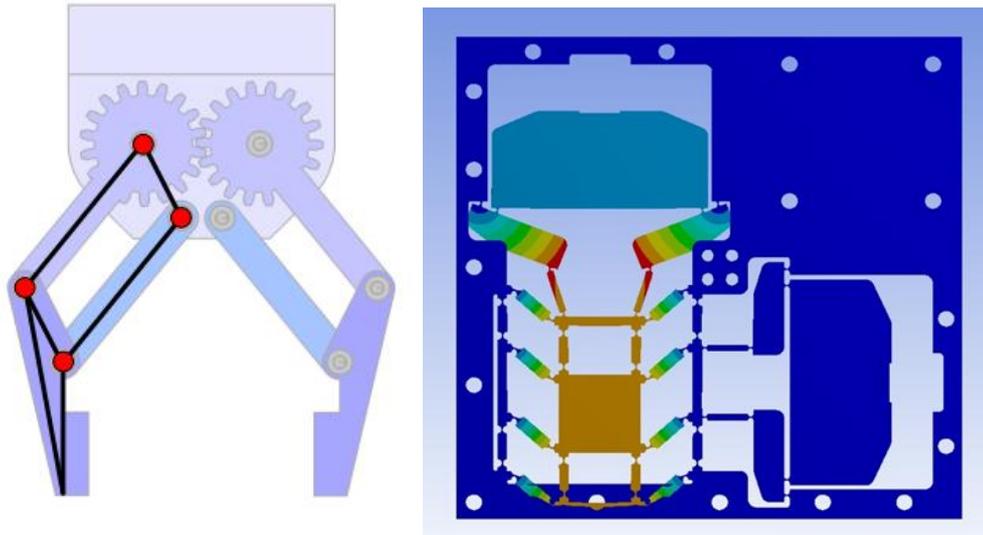


Figura 3 a) Mecanismo formado por juntas convencionales b) Mecanismo Compliant

Si bien un sistema “Compliant” no es propiamente ni una estructura ni un mecanismo, podríamos situarlo en un lugar intermedio de ambos sistemas, ya que presenta ciertas propiedades y retos de ambos tipos de sistemas mecánicos. La característica intrínseca, de uso frecuente en la literatura, para establecer la diferencia entre un mecanismo Compliant y una estructura Compliant, es la capacidad del sistema mecánico en su función de transferencia del movimiento: Si lo hace, es clasificado como un mecanismo y si no lo hace, es clasificado como una estructura [5]. El hecho de que la deformabilidad y la rigidez no sean excluyentes entre sí juega un papel importante en el diseño de sistemas Compliant, ya que permite alcanzar dispositivos que son flexibles y robustos al mismo tiempo [6].

En el marco de la síntesis de mecanismos y estructuras Compliant, el diseño mecánico necesita cumplir con los siguientes requisitos:

- **Requisitos de deformabilidad**, especificando los cambios que el sistema considerado debe realizar.
- **Requisitos de rigidez**, que definen las desviaciones permitidas en la geometría deseada bajo unas determinadas cargas.
- **Requisitos de tensión**, que especifican las cargas que deben aplicarse sin sufrir daños permanentes en la estructura.
- **Requisitos de activación**, que establecen que la deformación deseada se logra mediante la carga a través del sistema de accionamiento.
- **Requisitos adicionales**, relacionados con el peso y el consumo de energía del sistema.

En comparación con los mecanismos de cuerpos rígidos convencionales, los mecanismos Compliant son más simples y permiten reemplazar de su estructura diferentes partes rígidas, articulaciones móviles y resortes. Ejemplos que podemos observar en nuestra vida cotidiana son algunos de los cierres presentes en los botes de champú o en botellas de aceite, ver Figura 4.



Figura 4. Ejemplo de mecanismo compliant de cierre

Además, tienen varias ventajas sobre sus homólogos rígidos como son: no existen rozamientos, ausencia de holguras entre las partes, menor ruido durante las condiciones de trabajo, no se requiere lubricación y, ya que presentan estructura monolítica, carecen de la necesidad de montaje. Los beneficios de la utilización de sistemas Compliant se pueden resumir de la siguiente forma [7]:

- **Montaje:** las estructuras son concebidas para ser monolíticas, por lo que se reduce enormemente el tiempo del montaje. El número de piezas que conforman estos dispositivos es mucho menor en comparación con los mecanismos de cuerpo rígido tradicionales.
- **Sin desgaste y rozamiento:** los mecanismos Compliant alcanzan la movilidad a través de la deformación de sus juntas flexibles y por lo tanto no experimentan ningún tipo de desgaste ni rozamientos entre sus partes. Como tales, no liberan partículas y no existe la necesidad de mantenimiento y ni lubricación en sus componentes.
- **Sin holguras:** debido a la ausencia de juntas móviles, que unen a dos o más elementos en los mecanismos tradicionales, los mecanismos Compliant no presentan holguras entre los elementos que favorecen la aparición de errores de posicionamiento y medida. Como resultado se puede obtener una alta precisión en las operaciones realizadas.
- **Almacenamiento de energía:** los mecanismos Compliant almacenan energía a medida que se deforman, la cual puede ser utilizada para ayudar en aplicaciones que requieren una etapa de retorno. Por tanto, hay una necesidad reducida de resortes en estos dispositivos.

La mayoría de las desventajas de los sistemas Compliant están relacionadas con que sus propiedades mecánicas están totalmente acopladas, ya que al ser un elemento monolítico, sus capacidades están estrechamente relacionadas; en las capacidades de carga que presentan, y las deformaciones que soportan son compartidas por todos los grados de libertad. Mientras que un mecanismo de cuerpo rígido tradicional se mueve con una trayectoria previamente prescrita, independientemente de las fuerzas que actúan, esto no se cumple para los mecanismos Compliant. Otra desventaja es la limitación en la movilidad; un elemento elástico se puede deformar hasta un determinado nivel, más allá del cual se supera la tensión admisible del material. A diferencia de las articulaciones móviles utilizadas en mecanismos de cuerpo rígido, las juntas monolíticas o flexibles no pueden ser diseñadas para alcanzar un

ángulo de rotación ilimitado, debido a la necesidad de mantener los niveles de estrés en todos los elementos del mecanismo dentro del régimen elástico lineal[8].

Para obtener una deformación deseada en un sistema Compliant, se requiere una cantidad determinada de trabajo mecánico, que se almacena en el componente flexible en forma de energía de deformación. Esto se ve generalmente como una desventaja en la literatura clásica de los mecanismos de cuerpo rígido, ya que el propósito principal de un mecanismo consiste en la conversión de un movimiento o la transferencia de una fuerza tan eficientemente como sea posible. Sin embargo, esto puede ser visto desde otra perspectiva, es decir, como una ventaja, ya que los mecanismos Compliant pueden ser utilizados para almacenar y/o transformar la energía, la cual podrá liberarse en un momento posterior o de una manera diferente.

En la sección “2.1 Mecanismos Compliant” del presente documento, se dará una visión más detallada y extendida de este tipo de dispositivos.

1.3 Organización del trabajo

El trabajo que aquí se presenta pretende proporcionar un método para el diseño de mecanismos Compliant, el cual permita solucionar alguno de los problemas existentes en el complejo camino de obtención y síntesis de este tipo de dispositivos. Para ello, se proporcionará una sólida base teórica de los elementos empleados en el desarrollo y se detallará cada uno de los pasos a seguir hasta llegar al mecanismo óptimo, según los requisitos exigidos a nuestro dispositivo.

La estructura del trabajo es la siguiente:

- En el capítulo 2 se realizará una revisión bibliográfica que abordará los estudios realizados hasta la fecha en materia de mecanismos Compliant y diseño de los mismos.
- En el capítulo 3, se abordará la metodología que se ha desarrollado en esta investigación, definiendo cada una de las sub-secciones que la conforman. Así, se especificarán desde los requisitos exigidos, hasta los análisis implementados en el modelo realizado. En el capítulo 3 también se mostrará el caso de estudio que se ha analizado en esta investigación. Concretamente, se ha analizado un mecanismo 3-PRS, cuya principal característica es que se define como un dispositivo híbrido, mezcla de un mecanismo flexible y un mecanismo de cinemática paralela.
- En el capítulo 4 se presentará la validación experimental del método de diseño propuesto, sobre un prototipo fabricado.
- Finalmente, en el capítulo 5 se detallarán las principales aportaciones que se han alcanzado en este trabajo.

2. Estado del arte

2.1 Introducción

En este punto se van a revisar los principales conceptos y campos empleados en esta tesis, para realizar la investigación desarrollada. Así, se comenzará dando una revisión sobre los mecanismos Compliant, definiendo tanto sus componentes como sus diferentes tipologías. A continuación, se mostrarán las principales modalidades de análisis para estos mecanismos Compliant. Asimismo, se definirá la metodología para el análisis estructural de los mismos. El punto siguiente será mostrar el modelado por medio de pseudo-sólidos rígidos, el cual emplea sólidos convencionales conectados por juntas y muelles a torsión para simular los elementos flexibles. Por último, se realizará una revisión sobre la mecatrónica y su empleo en este tipo de mecanismos.

2.2 Introducción a los Mecanismos Compliant

Cuando un elemento se dobla para hacer una acción determinada, realizando por lo tanto un objetivo útil, entonces es un mecanismo “Compliant” [5] o dispositivo flexible. Por tanto, podemos definir a los mecanismos Compliant como mecanismos flexibles capaces de transferir una determinada fuerza o desplazamiento de entrada, aplicados en un punto de la estructura, en una fuerza o un desplazamiento de salida en otro punto del mecanismo, a través de la deformación del cuerpo elástico.

La idea de utilizar mecanismos flexibles en los productos está popularizándose en la actualidad, pero tradicionalmente, cuando los diseñadores han necesitado una máquina que se mueva para realizar una acción, usualmente han utilizado piezas rígidas que están conectadas mediante juntas prismáticas, de revolución o esféricas (como una puerta con su bisagra o una rueda en un eje). Pero cuando se observa la naturaleza, una gran cantidad de elementos realizan sus movimientos de un modo flexible en lugar de mediante elementos rígidos, y el movimiento proviene de doblar estos componentes flexibles [9]. Por ejemplo, consideremos nuestro corazón - es un mecanismo que comenzó a funcionar antes de que naciéramos y trabajará todo el día todos los días durante toda nuestra vida. Pensemos en las alas de una abeja, una anguila, unas algas, una columna vertebral y la floración de las flores (Figura 5) - todas ellas son flexibles. Incluso los movimientos naturales que parecen ser excepciones a este comportamiento de flexión, como la rodilla o el codo, usan cartílagos, tendones y músculos para hacer su trabajo, los cuales se deforman. También podemos observar en la naturaleza la posibilidad de desarrollar mecanismos muy compactos, como por ejemplo, un mosquito (Figura 5), el cual puede volar mientras lleva sus propios sistemas de navegación, control, recolección de energía y reproducción a bordo

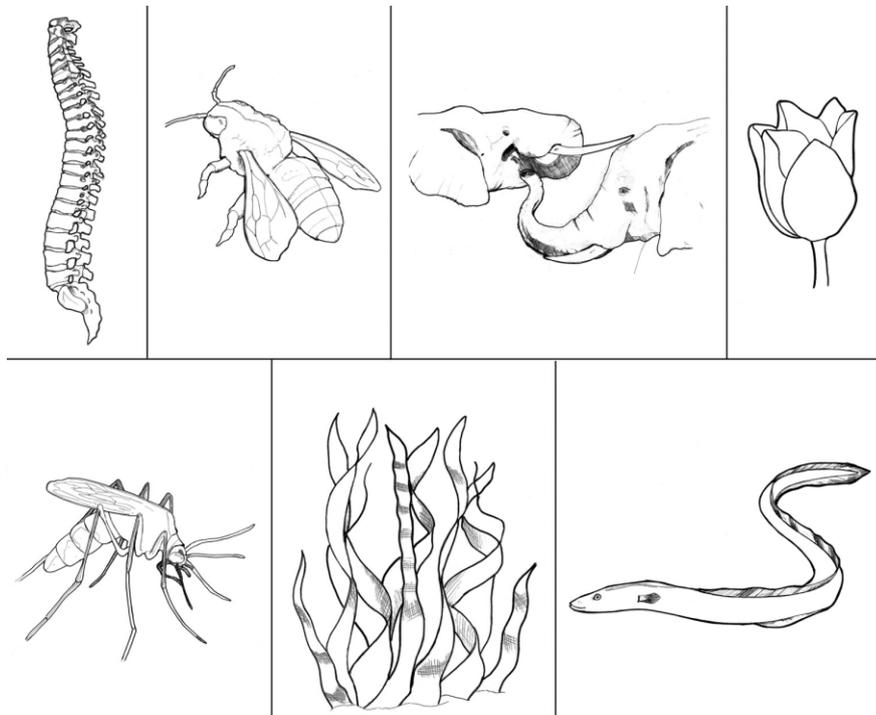


Figura 5. Algunos ejemplos del empleo de la flexibilidad en la naturaleza: una columna vertebral, las alas de la abeja, trompas de elefante, flores, un mosquito, algas marinas y anguilas [10]

Es interesante que algunas de las primeras máquinas hechas por el hombre fueran mecanismos flexibles. Un ejemplo de un mecanismo flexible con una historia de varios milenios es el arco (Figura 6). Estos arcos antiguos se hicieron utilizando un compuesto de hueso, madera y tendón, y utilizaron la flexibilidad de sus miembros para almacenar la energía que se liberaría en la propulsión de la flecha.



Figura 6. Ejemplo de arco antiguo

Es interesante ver los bocetos de Leonardo da Vinci [11] y ver en ellos muchos mecanismos flexibles. Incluso uno de los grandes logros de la ingeniería - el vuelo humano sostenido - comenzó con un mecanismo flexible, cuando los hermanos Wright (Figura 7) utilizaron el alabeo de alas para lograr el control de sus primeros aviones [12].

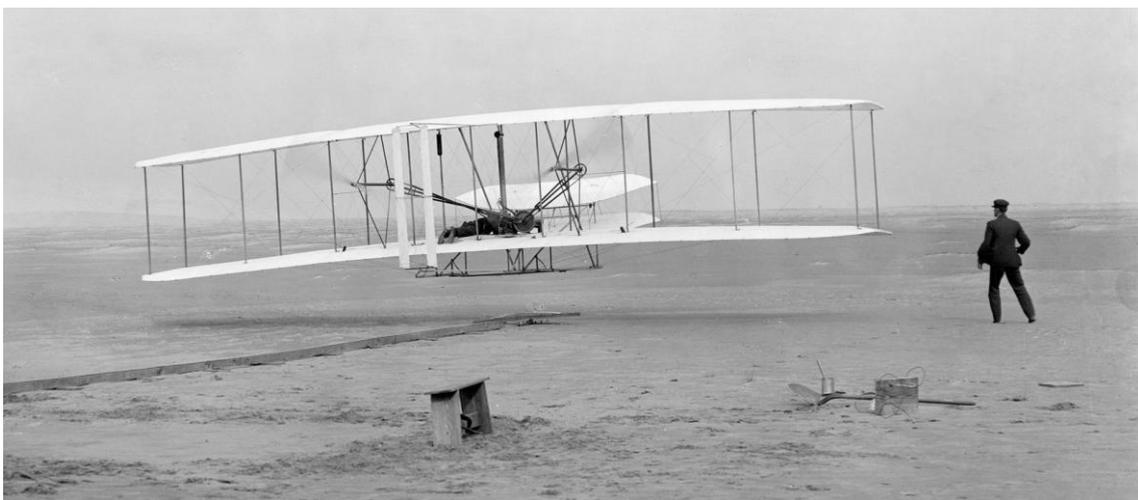


Figura 7. Alabeo de alas en los aviones de los hermanos Wright [13]

Pero, por otra parte, resulta que los mecanismos compliant pueden ser difíciles de diseñar. La naturaleza lo ha hecho, pero la naturaleza empleó métodos de diseño muy diferentes de los que usamos en el diseño de mecanismos. Se hicieron grandes progresos en el diseño de máquinas cuando la flexibilidad se dejó para la naturaleza y los diseñadores se movieron al campo, mucho más fácil de diseñar, de las partes rígidas conectadas mediante juntas. Por

ejemplo, el alabeo demasiado sofisticado del ala del avión de los Wright fue finalmente reemplazado por unas superficies mucho más sencillas, proporcionadas por un alerón girando en una bisagra.

Sin embargo, en las últimas décadas, el conocimiento en el diseño de elementos ha avanzado. Se han desarrollado nuevos materiales, aumentado nuestras capacidades computacionales y ampliado la capacidad de diseñar dispositivos más sofisticados. Al mismo tiempo, la sociedad ha desarrollado nuevas necesidades que no se pueden abordar fácilmente utilizando mecanismos tradicionales. Todo esto permite alcanzar una mayor capacidad para crear mecanismos flexibles, y una mayor motivación para hacerlo. Como ejemplo, reconsiderando el ejemplo del control de la aeronave de los Wright. Comenzó con el alabeo de alas para su control, pero el campo de la aviación se movió rápidamente a los enfoques que emplean mecanismos tradicionales. Pero con el aumento de la potencia computacional disponible y los materiales mejorados que se han desarrollado, los investigadores están volviendo a la idea del alabeo para obtener ciertas ventajas, como la reducción de peso, que vendría del enfoque que aquí mostramos. Un ejemplo de estos nuevos desarrollos pueden verse en [14].

Una de las cosas que hacen que el diseño tradicional de los componentes mecánicos sea más utilizado, es que los diseñadores pueden separar las diferentes funciones que se deben realizar en las diferentes partes, y cada parte está asignada para realizar esa función. La "bendición y la maldición" de los mecanismos flexibles es que integran diferentes funciones en menos partes. Los mecanismos compliant pueden ser capaces de realizar tareas complejas con muy pocas partes, pero pueden ser mucho más difíciles de diseñar.

Los avances en nuestra comprensión de los mecanismos flexibles, combinados con los desarrollos tecnológicos generales, han dado lugar a un rápido crecimiento en las aplicaciones de mecanismos compliant. Estas aplicaciones van desde dispositivos de alta gama y de alta precisión hasta embalajes de bajo coste; desde componentes nanoscópicos hasta máquinas a gran escala; desde armas hasta productos sanitarios.

Entonces, ¿qué es diferente ahora, y por qué hay tantos mecanismos compliant en relación con el pasado? La respuesta reside, al menos en parte, en los avances tecnológicos que se han hecho en las últimas décadas. Por ejemplo, se dispone de nuevos materiales que son adecuados para los mecanismos flexibles. Ha habido mejoras determinantes en el hardware computacional y el software disponible para analizar el movimiento y las tensiones producidos en el mecanismo compliant. Los desarrolladores e investigadores también han aumentado nuestra capacidad para diseñar y analizar mecanismos que cumplan con los requisitos exigidos. Se han realizado considerables esfuerzos para crear métodos que faciliten el diseño del mecanismos compliant. También hay una mayor conciencia de las ventajas de los mecanismos compliant. Como algunas aplicaciones comerciales han tenido éxito, proporcionan ejemplos e inspiración para otras aplicaciones a seguir. Finalmente, a medida que la sociedad y la tecnología han avanzado, las nuevas necesidades han aumentado, y algunas de estas necesidades son mejor atendidas por mecanismos compliant. Esto incluye dispositivos a escalas de tamaño muy pequeño, dispositivos con movimientos relativamente complejos, dispositivos que deben hacerse a un costo extremadamente bajo, implantes médicos compactos y máquinas de alta precisión, ver Figura 8.

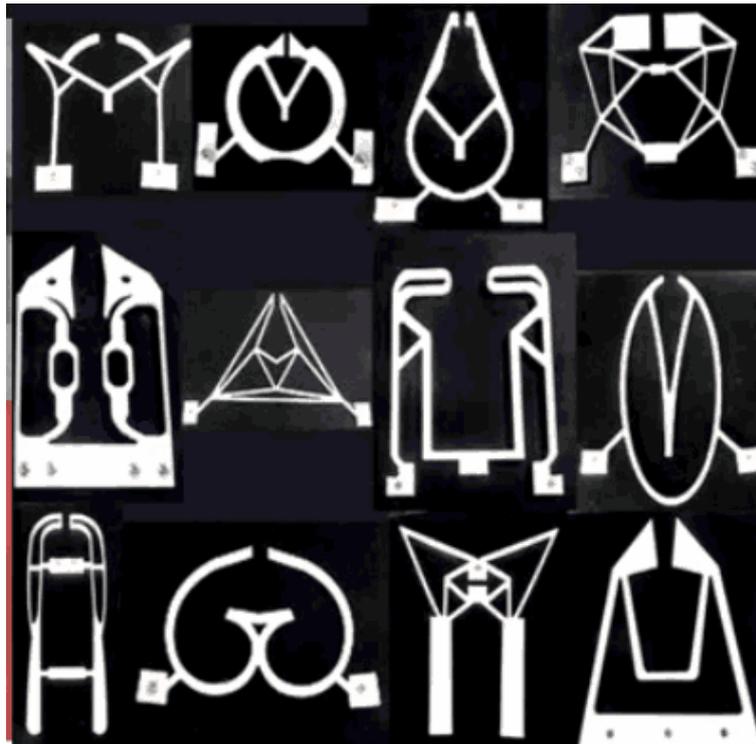


Figura 8. Ejemplos de mecanismos compliant [15]

2.2.1 Ventajas

La integración de funciones y capacidades en un único dispositivo, con menos componentes, conduce a una de las principales ventajas para los mecanismos compliant. Gracias a esto, hay un elevado potencial para alcanzar costos significativamente más bajos. Esto se desprende de un montaje reducido, debido al menor número de componentes, y la posibilidad de la fabricación simplificada (tal como la fabricación de un mecanismo a partir de un solo molde).

Otra ventaja es la posibilidad de un mayor rendimiento. Esto incluye una elevada precisión [8], [16] debido a un desgaste reducido y un juego/retroceso reducido o eliminado. El bajo peso de los mecanismos compliant puede ser útil para el transporte marítimo y para aplicaciones sensibles al peso, como las naves espaciales. Eliminar la necesidad de lubricación en las juntas es también una mejora del rendimiento que es útil en muchas aplicaciones y entornos.

Otra categoría de ventajas radica en la capacidad de miniaturizar mecanismos Compliant. Los sistemas micro-electromecánicos (MEMS), por ejemplo, a menudo se fabrican a partir de capas planas y los mecanismos flexibles ofrecen una forma de lograr el movimiento con las limitaciones extremas causadas por la geometría resultante (Figura 8) [17][18]. Es probable que los mecanismos compliant sean fundamentales para la creación de máquinas a nano escala.

Por tanto, las ventajas que nos ofrecen este tipo de juntas son:

- Cero fricción, holgura y desgaste
- Precisión sub-micrométrica
- Construcción Monolítica, no necesita ningún ensamblaje
- Compatibles con la fabricación plana

- Ningún ruido generado
- No requiere lubricación
- Menor número de piezas
- Alta precisión
- Repetibilidad

2.2.2 Inconvenientes

A pesar de todas estas ventajas que se han descrito sobre el uso de mecanismos compliant, hay un lado negativo. Existen ciertas desventajas que hacen que el uso de mecanismos compliant en algunas aplicaciones sea una mala elección. En una situación como esta, uno tendría que decidir si vale la pena continuar con el uso de un mecanismo compliant o cambiar a un mecanismo rígido. Éstos son algunos de los desafíos a los que se enfrentan los diseñadores en el uso de mecanismos compliant:

- **Complejidades de diseño:** Los mecanismos compliant requieren un gran conocimiento del diseño de mecanismos para alcanzar un resultado adecuado. No sólo es necesario aprender, dominar y predecir la flexión de las partes flexibles, sino que también hay que tener destrezas en varios métodos de análisis de mecanismos. Además, es imprescindible saber cómo combinar estas dos áreas del conocimiento de tal manera que se pueda entender la interacción de las dos en situaciones complejas y adaptar diseños para satisfacer requisitos muy complejos. A diferencia de otros mecanismos, ciertos elementos de un mecanismo flexible sufren una considerable deformación, y las ecuaciones que asumen la rigidez ya no son utilizables en el diseño de un mecanismo compliant. Se deben utilizar otras ecuaciones mucho más complejas que tienen en cuenta las grandes deflexiones que se producen en los mecanismos compliant [19][20], algunas de las cuales se mostrarán en apartados posteriores. En el pasado, algunos diseños de estos mecanismos eran de prueba y error debido a las complejidades involucradas, e incluso estos diseños eran básicos y en ningún lugar tan complejos como los diseños que se pueden encontrar hoy en día. En la actualidad, se dispone de un software muy potente, conocido como Elementos Finitos, el cual permite manipular diseños mucho más fácilmente que antes. Sin embargo, todavía es necesario desarrollar un esfuerzo mucho más técnico que cuando se diseñan mecanismos de cuerpo rígido.
- **Almacenamiento de energía:** Típicamente, los mecanismos flexibles tienen la capacidad de almacenar energía como resortes, liberando esa energía de una manera predeterminada. Esto suele ser una ventaja, ya que elimina o reduce la dependencia de los mecanismos de resorte. Sin embargo, hay algunos casos en los que esta característica es una desventaja porque significa que cuando el objetivo es transmitir energía cinemática de un extremo a otro, la energía elástica que se almacena dentro del mecanismo se traduce en una reducción de la energía cinética de la salida frente a la entrada. Esto significa que la eficiencia del mecanismo es reducida y directamente proporcional a la cantidad de energía almacenada dentro del mecanismo.
- **Tolerancia a la Fatiga:** Los mecanismos compliant, a diferencia de los mecanismos de cuerpo rígido, típicamente basan su funcionamiento en desplazamientos que suelen repetirse de forma cíclica. Debido a esto, es muy importante tener en cuenta la vida de

fatiga de las partes que constituyen el mecanismo flexible. Esto asegura que el fallo no se produce dentro de los parámetros de diseño y que el propósito del diseño se puede lograr.

- **Limitaciones de Fuerza:** Los materiales utilizados para los mecanismos compliant deben poseer la capacidad de deformarse y volver a su forma original - es decir, deben tener un gran régimen elástico. Los materiales flexibles, sin embargo, generalmente no son los materiales con mayor capacidad de carga, lo que significa que cuando la transmisión de la fuerza es un requisito principal, los mecanismos que cumplen estos requisitos pueden no ser suficientes. Estos desafíos y/o desventajas pueden ser solventados mediante un mayor desarrollo en el campo del diseño, más investigación en materiales, el fortalecimiento de los materiales sin comprometer demasiado a las propiedades elásticas, etc.

2.3 Juntas Flexibles Monolíticas o Flexores: Diseño y cálculo

Las conexiones mecánicas rígidas, tales como de revolución, prismáticas, juntas universales y juntas esféricas, permiten lograr diferentes grados de libertad en las partes conectadas. Sin embargo, la holgura existente entre las partes acopladas causa un juego en los conjuntos mecánicos. Además, hay un movimiento relativo que provoca fricción que conduce al desgaste y vibración, además de mayores holguras. Una cadena cinemática de estas juntas, por tanto, asume tales errores, resultando en una precisión y repetibilidad pobres.

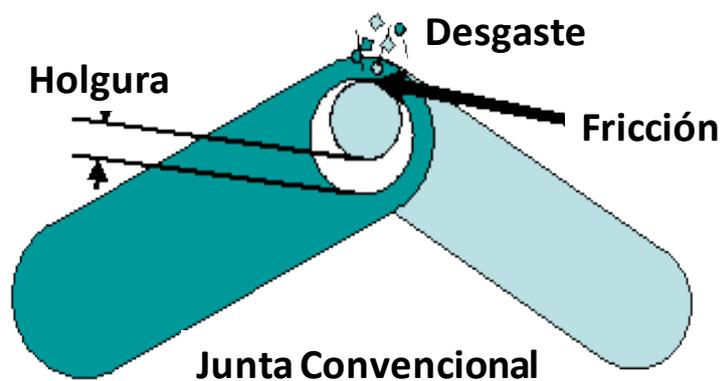


Figura 9. Junta convencional mecánica [21]

Las juntas flexibles ofrecen una alternativa a las juntas mecánicas tradicionales ya que merman muchas de sus desventajas. Los flexores utilizan la elasticidad inherente de un material en lugar de restringir dicha deformación. Estas juntas eliminan la presencia de fricción, holguras y desgaste. Otros beneficios incluyen una precisión hasta sub-micrométrica debido a su construcción monolítica. Tal precisión es importante en muchas aplicaciones micro, nano y bio. La construcción monolítica también simplifica la producción, permitiendo una fabricación de bajo coste.

En los últimos 50 años, se han investigado y desarrollado muchas articulaciones flexibles, la mayoría de las cuales se consideran de una de estas dos variedades: juntas tipo muesca y juntas de lámina. En las primeras, la deformación se concentra en la muesca mientras que en las segundas, las deformaciones se reparten sobre unas mayores superficies. En 1965, Paros y

Weisbord [22] analizaron por primera vez las articulaciones flexibles de tipo muesca, Figura 10 (a, b), a partir de lo cual se ha permitido alcanzar una elevada comprensión por parte de ciertos investigadores y diseñadores. Hoy en día, los ensamblajes mediante junta de tipo muesca son ampliamente utilizados para mecanismos de alta precisión y pequeños desplazamientos. Estas juntas también han sido aplicadas por Howell y Midha [5][23] para desarrollar el método de modelado de mecanismos conocido como hipótesis de pseudo-sólido rígido.

Las juntas tipo lámina proporcionan la articulación flexible de traslación más genérica, compuestas por conjuntos de vigas flexibles paralelas, Figura 10 (c). Además de las etapas de movimiento de alta precisión, las articulaciones de lámina también se utilizan ampliamente en instrumentación médica y dispositivos MEMS.

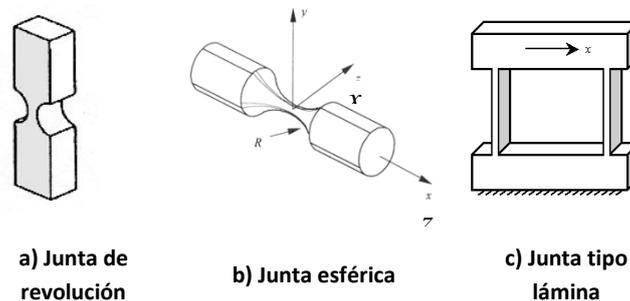


Figura 10. Componentes Básicos de las Juntas Flexibles

Como se ha indicado anteriormente, las articulaciones flexibles previamente desarrolladas suelen introducirse en una de las siguientes dos categorías: juntas tipo muesca y juntas de lámina. Estas juntas se suelen combinar en conjuntos y se utilizan con mayor frecuencia como articulaciones de revolución, juntas universales o juntas paralelas de traslación formadas por cuatro barras. La mayoría de estas juntas flexibles, las cuales están comercialmente disponibles, derivan de las juntas primitivas con la adición de cualquier variedad de dispositivos y conexiones para adaptarse a necesidades de la ingeniería. Para un estudio detallado de los flexores tradicionales, incluyendo métodos de diseño, selección de materiales y optimización de geometría, es recomendable consultar el libro de Lobontinu [8].

Un mayor desarrollo del análisis de este tipo de articulaciones flexibles, puede encontrarse en las siguientes referencias:

- Flexures: Elements of Elastic Mechanisms, de Stuart Smith [16]. Una fuente de las ecuaciones proporcionadas en este documento.
- Compliant Mechanisms: Design of Flexure Hinges, por N. Lobontinu [8]. Diseño y análisis de juntas tipo muesca.
- Design of Large-Displacement Compliant Joints, por Trease [24]. Resumen y comparación de muchas articulaciones flexibles.
- Compliant Mechanisms, por L. Howell [5]. Otro estudio de varios flexores con sus ecuaciones básicas de diseño.

La literatura existente y la investigación desarrollada en este campo usan una gran variedad de términos para describir las flexiones basadas en la elasticidad. Éstos incluyen voladizo, muesca, lamina, pivote, bisagra y más. Cada uno de estos términos tiene un matiz ligeramente diferente en su significado. Las definiciones estrictas son difíciles de encontrar y se basan en longitud, geometría, función o medios de aproximación.

Así, una bisagra se puede modelar dirigida como un enlace (aunque puede tener un considerable movimiento parásito). Ver Figura 11.

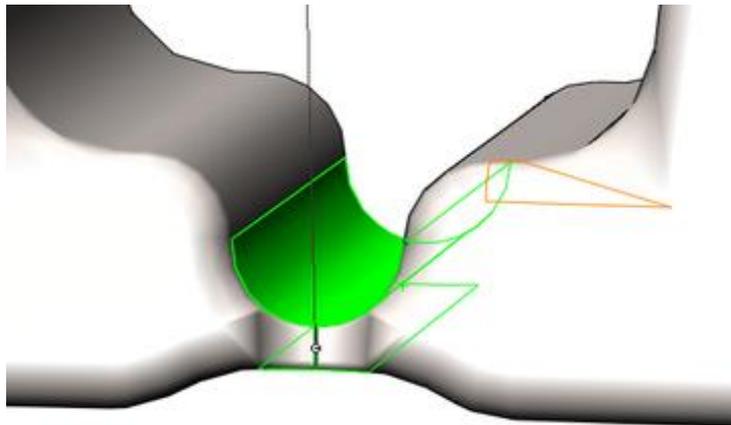


Figura 11. Ejemplo de bisagra de poca longitud (juntas de revolución)

Las tapas de botellas de champú son buenos ejemplos de la definición de una "bisagra". Son una aplicación donde la precisión y la capacidad de carga no son esenciales, y el bajo costo es lo más importante.

De acuerdo con Howell, una bisagra se convierte en un pivote de flexión de pequeña longitud si es suficientemente grande en todas las dimensiones. Un pivote de flexión de pequeña longitud se convierte en una viga cuando posee más del 10% de longitud que el enlace al que está conectado.

2.3.1 Criterios de diseño

En lugar de enumerar los inconvenientes de los mecanismos Compliant, es mejor verlos como "desafíos" y establecer los criterios por los cuales juzgamos a los dispositivos flexibles.

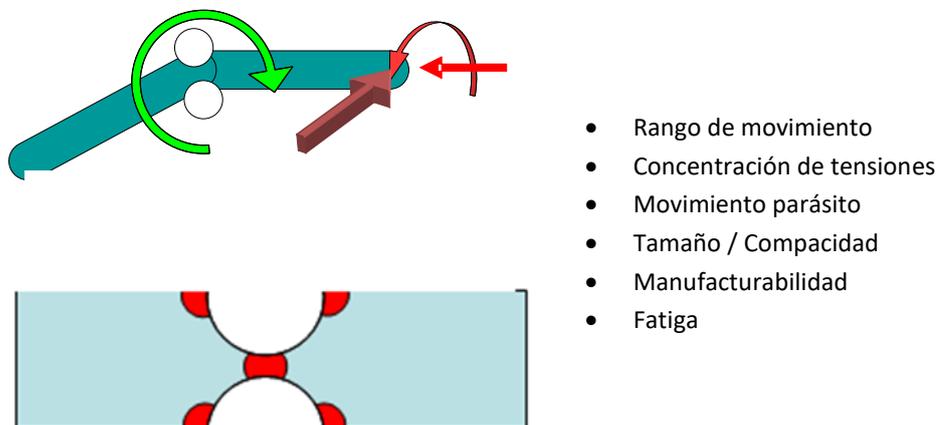


Figura 12. Criterios para el Diseño de Juntas Flexibles

Los beneficios obtenidos con el uso de juntas flexibles son alcanzados a costa de varios inconvenientes, los cuales deben tenerse en cuenta en la etapa de diseño. Para superarlos, se debe establecer un conjunto de criterios para la evaluación comparativa. Los cuatro criterios más importantes son (1) el rango de movimiento, (2) el rango de movimiento parásito, (3) la relación entre la rigidez fuera del eje y la rigidez axial, (4) los efectos de la concentración de esfuerzos y la fatiga [21].

2.3.1.1 Rango de movimiento

Todos los flexores están limitados a un rango finito de movimiento, mientras que los cuerpos rígidos a los que unen giran infinitamente o se trasladan distancias largas. La amplitud del movimiento de una junta flexible está limitada por las tensiones y esfuerzos permitidos en el material. Cuando se alcanza el límite elástico, la deformación elástica se vuelve plástica, después de lo cual, el comportamiento de la junta ya no es el adecuado. Por lo tanto, el rango de movimiento está determinado tanto por el material como por la geometría de la junta.

2.3.1.2 Movimiento parásito

Además de un rango de movimiento limitado, la mayoría de las articulaciones flexibles también experimentan un movimiento impreciso denominado movimiento parásito, ver Figura 13. Para las juntas de revolución, el centro de rotación no permanece fijo con respecto a los eslabones que conecta. Con flexiones de traslación, puede haber una desviación considerable del eje del movimiento en línea recta. Por ejemplo, un flexor de lámina formado por cuatro barras experimenta un movimiento curvilíneo.

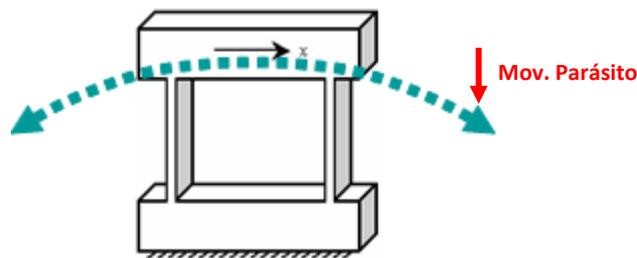


Figura 13. Movimiento parásito en juntas de lámina

El desplazamiento del eje se puede mejorar añadiendo simetría al diseño de una articulación. Sin embargo, esto a menudo aumenta la rigidez de la junta en la dirección del movimiento deseado. Además, se requiere más espacio para poder albergar los componentes del flexor simétrico.

Por tanto, tener un mínimo movimiento parásito es esencial para preservar la cinemática del mecanismo original cuando se realiza la sustitución convencional de las articulaciones con flexores.

2.3.1.3 Rigidez fuera del eje

Aunque la mayoría de las juntas flexibles proporcionan cierto grado de flexibilidad en la dirección deseada, típicamente presentan una baja rigidez de rotación y traslación en otras direcciones. Un elevado ratio entre la rigidez fuera de eje y la rigidez axial es considerado como una característica clave para alcanzar una articulación eficaz y flexible.

2.3.1.4 Concentración de esfuerzos y fatiga

La mayoría de las juntas tipo muesca tienen áreas de sección transversal reducida a través de las cuales se produce su deflexión. Dependiendo de la forma de estas secciones transversales reducidas, las juntas pueden ser propensas a presentar altas concentraciones de tensiones y, por lo tanto, una vida a la fatiga pobre. Por ello, es importante conocer la resistencia que presentan estos mecanismos frente a desplazamientos cíclicos, ya que es este tipo de movimientos son los que se emplearán en su vida útil. Por lo tanto, un estudio que garantice su aptitud frente a estos desplazamientos será necesario.

2.3.2 Reemplazo articular

Para una mejor comprensión de las articulaciones flexibles, es beneficioso entender primero cómo van a ser utilizadas en el diseño de mecanismos. Para obtener un mecanismo flexible, en el que sean los flexores los encargados de proporcionar el movimiento deseado, por lo general, inicialmente se considera un mecanismo de cuerpo rígido tradicional ya diseñado que realice un desplazamiento similar.

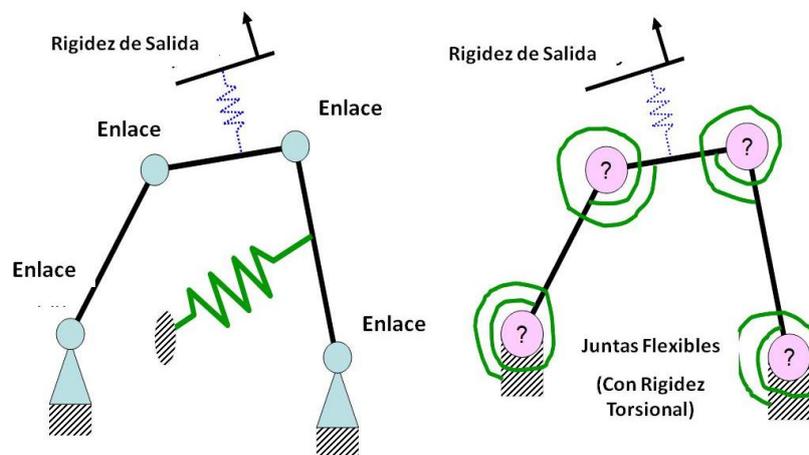


Figura 14. Conversión de Articulaciones Convencionales a Flexibles en un Mecanismo

El objetivo es eliminar las juntas de enlace existentes, reemplazándolas por juntas flexibles para obtener todos los beneficios enumerados en la introducción. Debido a la flexibilidad de las juntas, el sistema resultante tendrá también una rigidez de salida global para el mecanismo, sea deseada o no. Si en el mecanismo original se empleó un resorte, entonces la tarea del diseñador es que coincida con la rigidez de salida efectiva de cada mecanismo, ya que el resorte en el mecanismo original es reemplazado por la rigidez en las juntas en el nuevo mecanismo. Si el mecanismo original no contiene resorte, entonces la tarea suele ser minimizar la rigidez de salida efectiva del nuevo mecanismo.

Para el cálculo de la rigidez de salida efectiva del mecanismo original, se requiere el conocimiento tanto de la cinemática como de las rigideces de resorte. Para igualar la rigidez de salida efectiva del mecanismo original con la del mecanismo flexible, se requiere el conocimiento de la cinemática y de la manipulación de las rigideces de las articulaciones flexibles, así como las variables de diseño. Una vez que se conocen las rigideces de las articulaciones deseadas, se pueden seleccionar y diseñar físicamente las juntas adecuadas utilizando la información que se detallada a continuación. Conociendo las ecuaciones de las

juntas, se pueden realizar varios cálculos de dimensionamiento en las juntas hasta que se cumplan todas las restricciones.

2.4 Diseño de Juntas flexibles de revolución

Las articulaciones de revolución son las más numerosas y de uso más común. En esta sección se describirá brevemente muchas de estas juntas de flexión, proporcionando las ecuaciones para su rigidez, amplitud de movimiento y movimiento parásito. Siempre que sea posible, se darán tanto la rigidez funcional axial, como la rigidez fuera del eje. Para obtener la relación de rigidez, se divide la rigidez fuera del eje por la rigidez axial. Relaciones de rigidez elevadas indican articulaciones eficaces. Obsérvese también que las ecuaciones de rango de movimiento se basan en el fallo elástico lineal del material de la junta. Por lo tanto, se trata de ecuaciones que relacionan el límite máximo de elasticidad y el momento. Finalmente, señalar que un movimiento parásito bajo es crítico para lograr una cinemática precisa.

2.4.1 Juntas tipo muesca

Las juntas tipo muesca ya han sido discutidas y se muestran nuevamente en la Figura 15. Paros y Weisbord [22] fueron los primeros en informar sobre el análisis mecánico de estas articulaciones en 1965. Las cuatro variantes de enlaces tipo muesca (Circular, Elíptica, Rectangular, Redondeada) se muestran en la Figura 16.

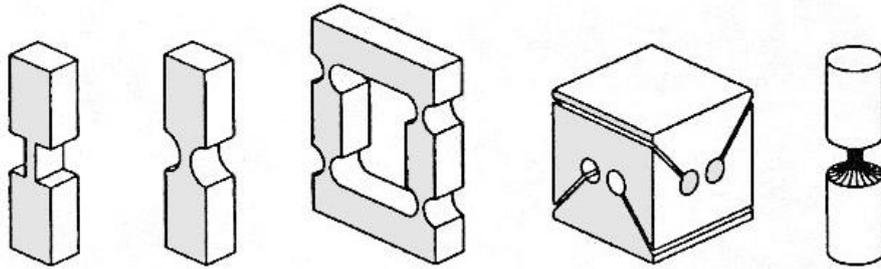


Figura 15. Algunas de las juntas tipo muescas básicas



Figura 16. Variaciones en la transición de las juntas en voladizo a las juntas tipo muesca circular

2.4.1.1 Juntas circulares y rectangulares

Paros y Weisbord desarrollaron en primer lugar las ecuaciones para la rigidez y el rango de movimiento de la junta circular. Smith [16] derivó la ecuación general para cualquier articulación elíptica. Las ecuaciones de Smith aproximan las ecuaciones de Paros en los límites: excentricidad igual a 0, junta rectangular; excentricidad igual a 1, junta circular.

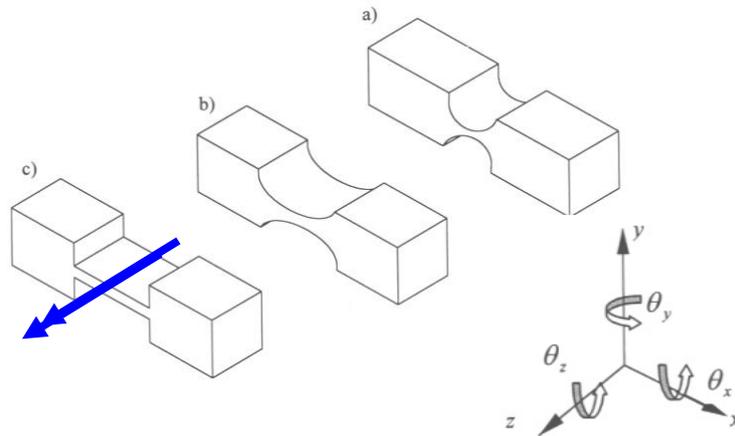


Figura 17. Juntas tipo muesca para las cuales Smith proporciona ecuaciones

Antes de que sea dada la ecuación general de las juntas tipo muesca, se muestran las ecuaciones desarrolladas para las juntas rectangulares y circulares. Señalar que en todas las articulaciones, "b" es la dimensión fuera del plano [25]. Indicar también que "E" hace referencia al modulo de elasticidad del material empleado, "I" al momento de inercia, "θ" al giro producido en la junta flexible y "M" al momento aplicado a la misma.

Tipo de Junta	Esquema	Rigidez	Rango de Movimiento
Rectangular		$K_{\theta_z M_z} = \frac{M}{\theta} = \frac{EI}{2a_x} \quad (1)$	$\sigma_y = \frac{Et}{2L} \theta_{\max} = \frac{Et}{4a_x} \theta_{\max} \quad (2)$
Circular		$K_{\theta_z M_z} \approx \frac{2Eba_x^2 (2\beta)^{5/2}}{3} = \frac{2Ebt^{5/2}}{9\pi a_x^{1/2}} \quad (3)$ siendo $\beta = \frac{t}{2a_x} = \frac{t}{2L}$	$\sigma = \frac{4Ea_x^2}{f(\beta)t^2} (1+\beta)^{9/20}$ $\theta = \frac{E(1+\beta)^{9/20}}{\beta^2 f(\beta)} \theta \quad (4)$ siendo $f(\beta) = \frac{3\pi}{(2\beta)^{5/2}}$

Tabla 1. Ecuaciones Juntas rectangulares y Juntas circulares

2.4.1.2 Articulación elíptica

En este apartado se van a mostrar las ecuaciones desarrolladas por Smith [16] para las juntas flexibles elípticas. Señalar que en el libro de Smith no se proporcionan fórmulas de rango de movimiento para la articulación de muesca elíptica.

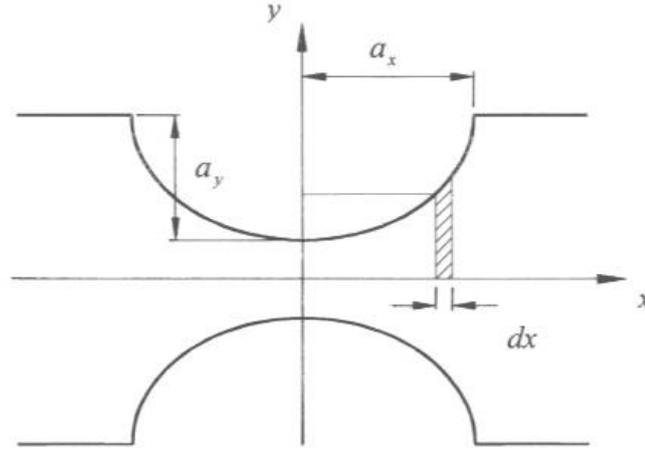


Figura 18. Junta elíptica tipo muesca

$$\text{Rigidez: } \frac{1}{K_{\theta z M z}} = \frac{3}{2Eb a_y^2} \varepsilon f(\beta_y), \text{ donde } \beta_y = \frac{t}{2a_y}; \beta_x = \frac{t}{2a_x}; \varepsilon = \frac{a_x}{a_y} = \frac{\beta_y}{\beta_x} \quad (5)$$

$$\text{para valores bajos de beta} \Rightarrow K_{\theta z M z} = \frac{2Eb a_x^2}{3\varepsilon^3 f(\varepsilon\beta_x)} \text{ siendo } f(\beta) = \frac{3\pi}{(2\beta)^{5/2}}$$

También se proporcionan las otras rigideces fuera del eje:

$$\frac{1}{K_{\theta y M y}} = \frac{\theta_y}{M_y} = \frac{12\varepsilon}{Eb^3} \left[\frac{2(1+\beta_y)}{\sqrt{2\beta_y + \beta_y^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2+\beta_y}{\beta_y}} - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{12\varepsilon}{Eb^3} g(\varepsilon\beta_x) \quad (6)$$

$$\frac{1}{K_{\delta x F x}} = \frac{\delta_x}{F_x} = \frac{\varepsilon}{Eb} g(\varepsilon\beta_x) \quad (7)$$

$$\frac{1}{K_{\delta z F z}} = a_x^2 \frac{\theta_y}{M_y} + \frac{6a_x^2 \varepsilon}{Eb^3} \left[2 + 2\beta_y + \frac{\pi}{2} (1 + 4\beta_y + 2\beta_y^2) - 4(1 + \beta_y) \sqrt{2\beta_y + \beta_y^2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2+\beta_y}{\beta_y}} \right] \quad (8)$$

$$\frac{1}{K_{\delta y F y}} = \frac{1}{K_{\delta z F z}} = \frac{\varepsilon}{Gb} \left[\frac{2(1+\beta_y)}{\sqrt{2\beta_y + \beta_y^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2+\beta_y}{\beta_y}} - \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\varepsilon}{Gb} g(\beta_y) = \frac{\varepsilon}{Gb} g(\varepsilon\beta_x) \quad (9)$$

Hay que tener en cuenta que estas ecuaciones también se pueden utilizar para juntas circulares tipo muesca estableciendo apropiadamente $\varepsilon = 1$.

2.4.1.3 Comparativa entre juntas rectangular, circular y elíptica

	Junta rectangular	Junta circular	Junta elíptica
Diseño para la rigidez	$K \propto \frac{t^3}{a_x}$	$K \propto \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{a_x}}$	$K \propto \frac{t^{\frac{5}{2}} \sqrt{a_y}}{a_x}$
Se debe tener en cuenta que todos los valores de K son proporcionales a E y b			
Diseño para la tensión	$\sigma \propto \frac{t}{a_x}$	$\sigma \propto \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a_x}}$	N/A
Se debe tener en cuenta que todos los σ son proporcionales a E, pero independientes de b			
E: Módulo elástico b: espesor fuera del plano	t: Dimensión mínima en el plano de la junta a _x : mitad de la longitud de la junta a _y : longitud del eje menor en la articulación elíptica		

Tabla 2. Comparativa entre juntas tipo muesca: rectangular, circular y elíptica

Para los mismos valores de E, b, t, y a, las comparativas entre la rigidez y de tensión máxima son las siguientes:

- **Comparativa de rigidez:** La junta rectangular es la que presenta unos valores de rigidez menores, seguida de la elíptica, siendo los flexores circulares los que tienen una rigidez mayor, para unos parámetros dimensionales y físicos iguales.
- **Comparativa de tensión** (para el mismo rango de movimiento θ): Al igual que en el caso anterior, las juntas rectangulares son las que presentan unos valores menores, seguidas de las elípticas. También para este parámetro son las juntas circulares las que presentan unos valores de tensión mayores.

La tensión del diseño elíptico se estima a partir de la junta tipo muesca circular, porque el diseño circular es una versión degenerada de elíptica.

Por lo tanto, cuando el diseño requiere alta rigidez y pequeño rango de movimiento, se escoge la junta tipo muesca circular. Para una rigidez baja y un rango de movimiento más grande, se elige la articulación tipo rectangular. La articulación elíptica tiene rigidez y rango de movimiento (tensión) intermedios. Utilizando la tabla anterior, las dimensiones de la junta (t y a_x) se pueden diseñar para lograr la rigidez deseada y reducir el esfuerzo.

La selección del tipo de junta dependerá del tipo de aplicación para la que se va a utilizar. Si asumimos que, para una aplicación típica, el requisito cinemático limita el valor de a_x y la función principal de la junta es producir un movimiento deseado mediante una carga, las juntas elíptica y rectangular proporcionarán una menor rigidez y, por tanto, serán más adecuadas, que una muesca circular, para aplicaciones con elevados desplazamientos mediante pequeñas cargas. Sin embargo, una muesca rectangular tiene una elevada

concentración de tensiones en las esquinas, lo que confiere a las juntas elípticas una mayor idoneidad para esta aplicación. Por otra parte, si el rango de movimiento es pequeño y la carga es grande, una muesca circular será más adecuada que las otras.

Señalar que en la literatura actual se han desarrollado nuevas formulas que intentan predecir de una forma más precisa el comportamiento de este tipo de juntas, en función de las condiciones de trabajo en las que van a ser empleadas. Así, por ejemplo, podemos ver algunas de estas ecuaciones desarrolladas por Lobontiu [8], Wu and Zhou [26], Tseytlin [27] y SchotborghW et al. [28]

2.4.2 Juntas de Revolución basadas en vigas/ placas/ laminas

Los resortes de láminas también pueden ser utilizados de diversas maneras para crear juntas de revolución. A continuación se desarrollan algunos de estos ejemplos.

2.4.2.1 Pivote transversal

El pivote transversal es también un diseño muy antiguo, descrito por primera vez por Haringx [29] en 1949. Fue diseñado para tener una mayor gama de movimientos que mediante las juntas tipo muesca. Sin embargo, estas juntas sufren un considerable movimiento parásito, calculado mediante las ecuaciones siguientes. Además, el centro de rotación se mueve mientras la articulación sufre su gran deflexión.

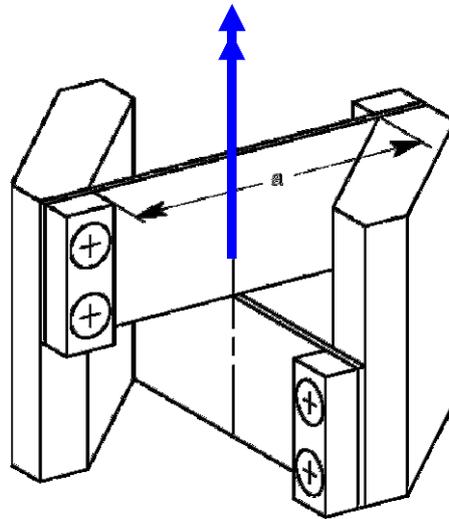


Figura 19. Pivote transversal

Las ecuaciones que modelan a este tipo de juntas son:

Rango de movimiento	$\theta_{\max} = \frac{2L}{Et} \sigma_{\max} - \frac{t}{24L}$ (10)
Rigidez	$K_{\theta M} = n \frac{EI}{L} = \frac{EI_{\text{tot}}}{L}; \quad n = n^{\circ} \text{ de laminas}$ (11)
Mov. Parásito (Mov. Centro de Rotación)	$\frac{\delta_p}{a} = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{2 \sin(\theta/2)}{\theta} - \cos(\theta/2) \right)$ (12)
Desvío para juntas que se cruzan en un ángulo 2α	$\frac{\delta_p}{L} = \frac{\sqrt{2}\theta^2}{12} \quad \text{Para } \alpha = 45^{\circ}$ (13)

Tabla 3. Ecuaciones características del pivote transversal

2.4.2.2 Junta rueda de carro

Tomando el pivote transversal y "soldando" las tiras juntas da como resultado la junta de rueda de carro. Esto es generalmente una mejora en el diseño, aunque puede suponer una mayor dificultad en el proceso de fabricación. Véase Smith [16].



Figura 20. Rueda de carro

Las ecuaciones que muestran su funcionamiento son:

Rango de movimiento	$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} t}{12} = \frac{Et}{R} \theta$	(14)
Rigidez	$k_{M\theta} = \frac{4EI}{R}$	(15)
Mov. Parásito (Mov. Centro de Rotación)	$\frac{\delta_p}{R} = \frac{\sqrt{2}\theta^2}{30}$	(16)

Tabla 4. Ecuaciones características de la junta rueda de carro

Comparando a este tipo de juntas con las juntas de Pivote transversal, para dos juntas de similar tamaño ($L = 2R$) tenemos que:

- La junta de Rueda de carro es más rígida que la junta de la Pivote transversal.
- La junta de Rueda de carro tiene un rango de movimiento más pequeño.
- La junta de Rueda de carro tiene un movimiento parásito menor.

Ambas son más escalables que las juntas tipo muesca, pero la junta de Pivote transversal puede ser más difícil de fabricar.

2.4.2.3 Juntas de lámina en ángulo

Kyusojin y Sagawa [30] desarrollaron algunas otras juntas de revolución, basadas en flexores de láminas. Éstas generalmente tienen una buena gama de movimientos, pero pueden ser voluminosas y difíciles de implementar en un mecanismo. La articulación "2R" tiene un elevado movimiento parásito, mientras que la "6R-1" tiene uno mucho menor. Por el contrario, teóricamente, el "6R-2" no tiene nada de este movimiento parásito.

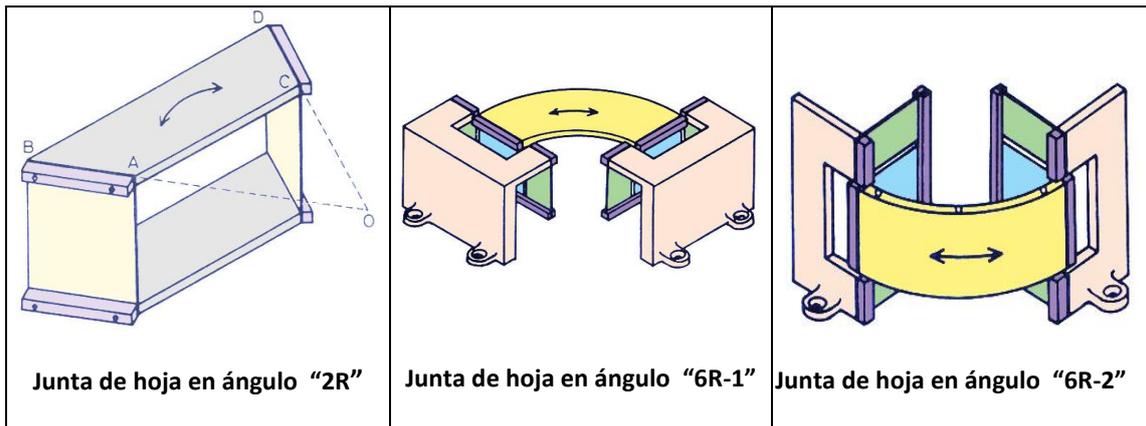


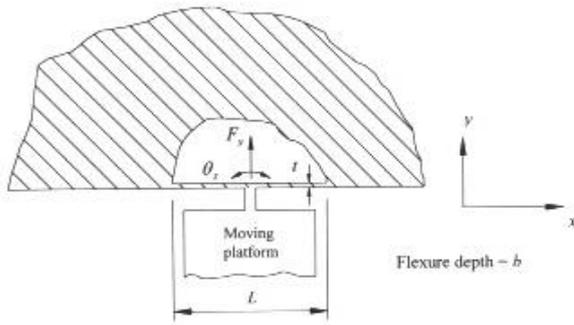
Figura 21. Ejemplos de Juntas de hoja en ángulo

2.4.3 Diseño de juntas flexibles esféricas y universales

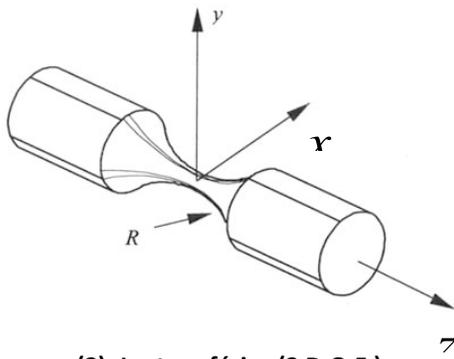
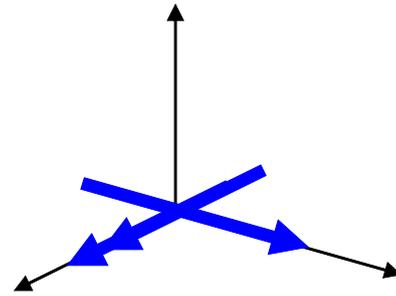
Como se muestra en las siguientes figuras, también existen muchos flexores que permiten los movimientos en más de un eje. Los dos ejes de flexibilidad se muestran en los esquemas adyacentes. Puede ser más fácil pensar primero en los esquemas (en función de sus requisitos de diseño), y luego encontrar la junta adecuada.

Dos ejes rotativos flexibles ortogonales representan, por supuesto, una articulación universal, mostrada en la Figura 22 (3) y (4). La junta mostrada en la Figura 22 (2) puede ser una junta universal o una junta esférica, dependiendo de la esbeltez de la sección transversal más estrecha.

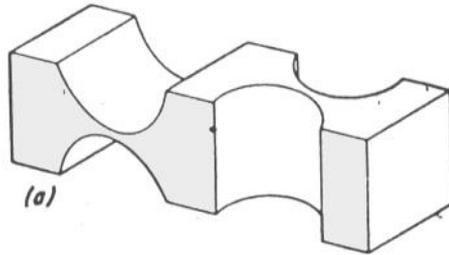
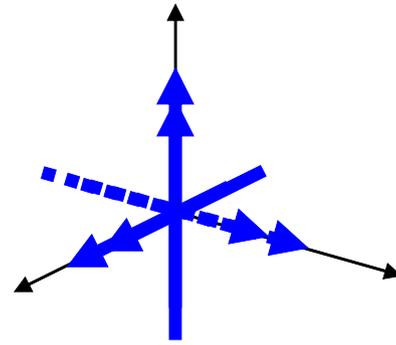
Paros y Weisbord estudiaron estas articulaciones de 2 ejes. Smith también las consideró, incluyendo cálculos de rigidez efectiva de la muesca respecto al momento aplicado para la articulación mostrada en la Figura 22 (3).



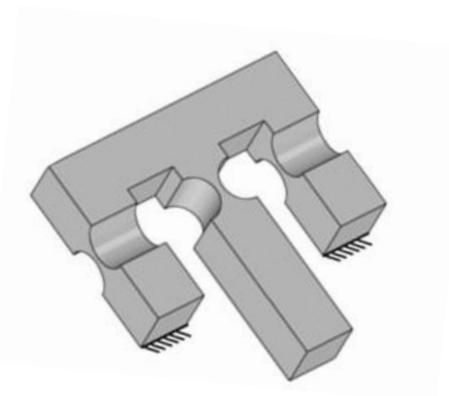
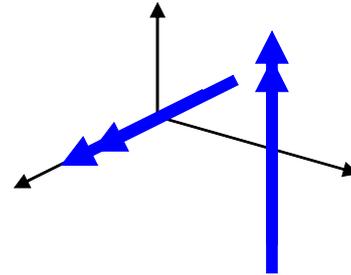
(1) Junta de eje flexible de Smith



(2) Junta esférica (3 D.O.F.)



(3) Junta universal



(4) Junta universal co-lineal

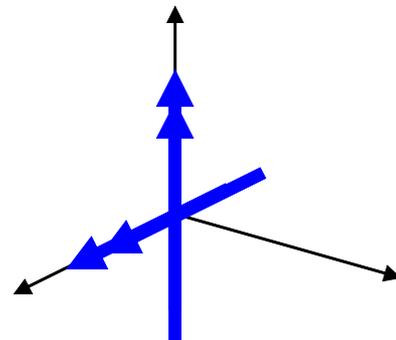


Figura 22. Flexores con movimientos en más de un eje

2.4.4 Diseño de juntas flexibles prismáticas

Muchos mecanismos compliant emplean también juntas de traslación, como deslizadoras, raíles o actuadores lineales. Al igual que con las juntas de revolución, hay muchas ventajas en el uso de estas juntas flexibles en ciertas situaciones cuando sean apropiadas.

2.4.4.1 Basadas en lámina

La mayoría de las juntas de traslación existentes se basan en un bloque de construcción paralelo de cuatro barras. Su flexibilidad se deriva de resortes de laminas (Figura 23). Las juntas compuestas de cuatro barras proporcionan un rango más amplio de movimiento en línea recta.

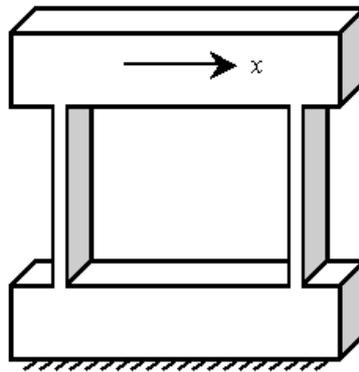


Figura 23. Ejemplo de mecanismo que emplea resortes de láminas

La aplicación de estas articulaciones flexibles como componentes de mecanismos de alta precisión es un campo en sí mismo.

- Juntas Compliant de Traslación (CT)

B. Trease, Y. Moon y S. Kota [31] del “UM Compliant Systems Design Laboratory” diseñaron la junta Compliant de Traslación (CT) (ver Figura 24) como una mejora de las otras juntas flexibles de traslación. Esta articulación utiliza la redundancia para alcanzar altas relaciones de rigidez fuera del eje y cero movimientos parásitos.

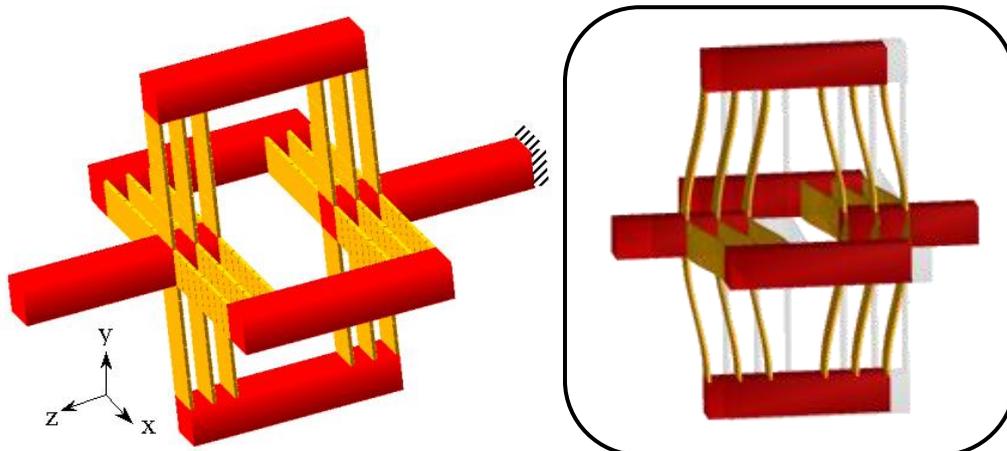


Figura 24. Juntas Compliant de Traslación (No Actuada y Flexionada) [31]

Uno de los beneficios que se desprenden del uso de esta junta flexible es la ampliación del rango de movimiento, ya que, el tener múltiples vigas finas aumenta la capacidad de movimiento, permite mayores desplazamientos que la producción local unitaria de cada una de las juntas. Otro beneficio, que se desprende del uso esta junta, es que el diseño de 5 barras sobre-restringido que se obtiene mediante su aplicación asegura el paralelismo entre los miembros, además de una menor compresión en los miembros.

Las ecuaciones que muestran su funcionamiento son:

Rango de movimiento	$x_t = 2x_b = \frac{2 L^2 \sigma_y}{3 t E} \quad (17)$
Rigidez	$k_{axial} = 6 \frac{Et^3 w}{L_B^3} \quad (18)$
Carga máxima	$F_{max} = 12 \frac{wt^2}{3L} \sigma_y \quad (19)$

Tabla 5. Ecuaciones características de la junta Compliant de Traslación

Ante estas ecuaciones cabe señalar que la única ecuación de rigidez para la junta CT es la rigidez axial (en la dirección de la flexibilidad deseada). Asimismo, el rango de movimiento de una sola viga es x_b , por lo tanto, la amplitud de movimiento de la articulación CT, x_t , es el doble.

2.4.5 Comparativa entre juntas flexibles: Resumen

Para finalizar con este estudio de las juntas flexibles, vamos a mostrar una comparativa entre algunas de las juntas flexibles más empleadas.

Para ello se definen las siguientes tablas en las que se identifican tanto los puntos fuertes como los débiles para juntas flexibles de revolución y de traslación [21].

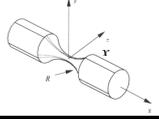
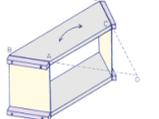
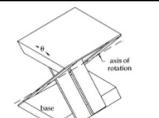
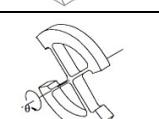
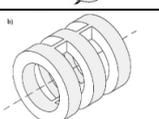
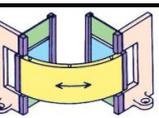
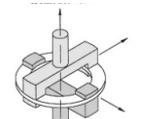
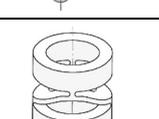
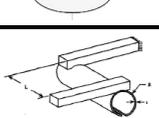
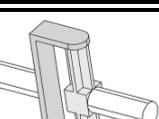
JUNTAS DE REVOLUCIÓN FLEXIBLES	Rango de movimiento	Desvío del eje	Concentración de tensiones	Rigidez fuera del eje	Compacidad
	-	-	-	-	+
	0	-	+	-	0
	+	-	+	-	-
	-	-	0	-	+
	-	0	-	0	0
	+	+	+	-	-
	-	+	-	-	-
	-	0	-	-	0
	+	0	+	0	0
	+	+	+	+	0

Tabla 6. Comparativa Juntas de Revolución Flexibles. (-: pobre, 0: normal, +: bueno)

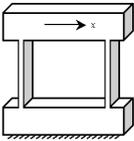
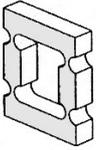
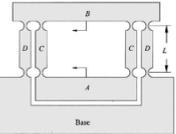
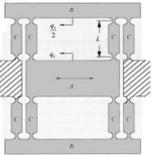
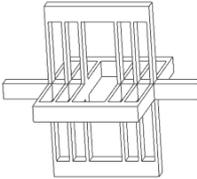
JUNTAS DE TRASLACIÓN FLEXIBLES	Rango de movimiento	Desvío del eje	Concentración de tensiones	Rigidez fuera del eje	Compacidad
	-	-	0	0	+
	-	-	-	0	+
	-	-	-	0	+
	-	+	-	0	+
	+	+	+	+	+

Tabla 7. Comparativa Juntas de Traslación Flexibles. (-: pobre, 0: normal, +: bueno)

2.4.6 Aplicaciones potenciales de las juntas flexibles

En este apartado se van a mostrar algunas de las aplicaciones en las que se pueden emplear las juntas flexibles mostradas en los apartados anteriores.

- Dispositivos MEMS (microelectromecánicos)

Un MEMS (sistema microelectromecánico) es un mecanismo en miniatura que tiene componentes mecánicos y electrónicos. La dimensión física de un MEMS puede variar desde varios milímetros hasta menos de un micrómetro, una dimensión mucho más pequeña que el ancho de un cabello humano. Es por ello que los elementos compliant pueden tener una amplia aplicabilidad en este campo, debido a su estructura monolítica que puede facilitar su ensamblaje en estos sistemas reducidos.

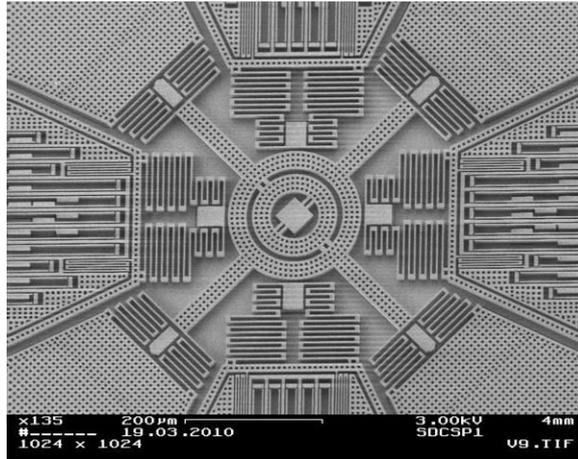


Figura 25. Ejemplos de un giroscopio MEMS [32]

- Dispositivos ortopédicos

El uso de elementos flexibles para dispositivos protésicos u ortopédicos es posible, pero el rango de movimiento y rigidez requerido debe ser considerado. Un dispositivo para el tobillo (Figura 26) es una buena opción, ya que el rango de movimiento es menor, en comparación con otras articulaciones de otros miembros. Se utilizan en pacientes con una actividad muscular reducida.



Figura 26. Dispositivo protésico Compliant para el tobillo [33]

- Robótica

Las juntas flexibles también se pueden utilizar en aplicaciones de robótica. La fricción no deseada producida en las articulaciones de revolución tradicionales puede ser eliminada si se utilizan juntas flexibles sin fricción. Los flexores con movimiento parásito nulo son los mejores candidatos para esta aplicación, ya que la ubicación del efector final depende en gran medida de la cinemática de cada articulación. A continuación, se muestra un brazo robótico que incorpora juntas flexibles. La referencia muestra una rigidez mejorada en la dirección transversal comparada con las juntas convencionales. Además, si el efector final se somete a una carga externa grande, tal como manejar un peso elevado, las juntas podrían fallar debido a una baja rigidez fuera del eje. En este caso, las rigideces de este tipo de articulaciones deben ser consideradas.

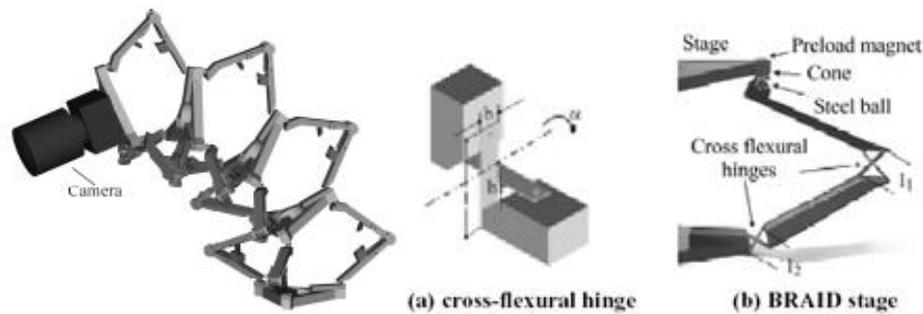


Figura 27. Flexores utilizados en Manipuladores [21]

- Mecanismos estáticamente equilibrados

Este tipo de mecanismos utilizan la energía de deformación de sus resortes de una manera novedosa para mantener un nivel de energía potencial constante de todo un sistema. Por lo tanto, el sistema no tiene ninguna posición preferida; todas son iguales. En la figura siguiente, se muestra un mecanismo en el que aplicando una fuerza de compresión, se reduce la rigidez horizontal de los elementos de viga de un mecanismo de guiado directo. Además, el momento producido a partir de la fuerza de compresión genera una mayor fuerza de equilibrado. Las vigas, curvadas inicialmente como elementos de equilibrado, evitan el aumento progresivo de una carga de pandeo alta, lo que dará como resultado una fuerza distribuida mejor en comparación con las vigas rectas.

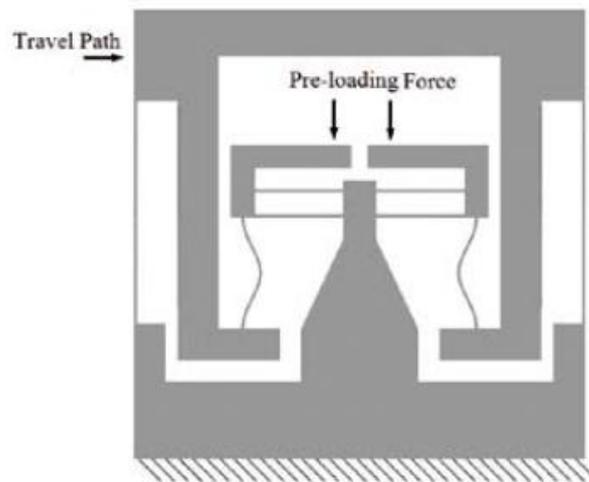


Figura 28. Concepto del micro-mecanismo Compliant estáticamente equilibrado [34]

- Bisagras para puertas, maleteros y capós

Incluye aplicaciones para automoción y aviación. Se podría generar un dispositivo con un rendimiento personalizado en función de la aplicación, como la rigidez en función del desplazamiento.

Los mecanismos de cuatro barras se usan a menudo para mecanismos en los capós y maleteros. Del mismo modo, en los compartimentos superiores de los aviones más nuevos también emplean dispositivos de cuatro barras. Los resortes (y amortiguadores) se utilizan para ayudar al usuario a abrir o cerrar estos mecanismos. El problema radica en todos los

casos en la restricción de tamaño. También tenemos que considerar la amplitud de movimiento que estos mecanismos deben alcanzar.



Figura 29. Ejemplo de mecanismo de bisagra

- Posicionadores

Debido a las propiedades intrínsecas que presentan estos mecanismos, tales como cero movimiento parásito y elevada rigidez fuera de eje, los hacen muy adecuados para ser empleados como posicionadores. Aunque se han desarrollado mecanismos en el campo de los MEMS, se pueden emplear versiones más grandes en la industria aeroespacial, en aplicaciones tales como la señalización de sensores de medición y antenas. Estudiando con atención la geometría y la colocación de los actuadores debería ser posible optimizar la estructura del mecanismo para asegurar la rigidez adecuada del conjunto general y el aislamiento adecuado de las vibraciones.

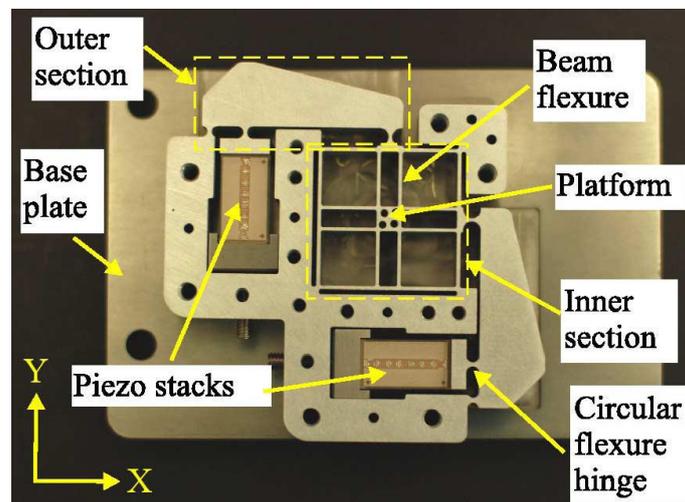


Figura 30. Ejemplo de mecanismo posicionador en el plano XY [35]

- Sistemas de aislamiento de vibraciones

Otro tipo de aplicación en el que las juntas de flexión pueden ser adecuadas son los sistemas de aislamiento de vibraciones. En la mayoría de los casos, las amplitudes de las perturbaciones no deseadas son pequeñas y la pequeña amplitud de movimiento proporcionada por las uniones flexibles es suficiente. El sistema puede consistir en varias juntas de flexión,

conectadas entre sí para producir la dirección de movimiento deseada. La rigidez se puede predefinir y calcular basándose en modelos de cuerpo pseudo-sólido rígidos. La flexibilidad en el diseño de la rigidez fuera del eje en los flexores ofrecerá ventajas sobre el uso de muelles convencionales o muelles helicoidales.

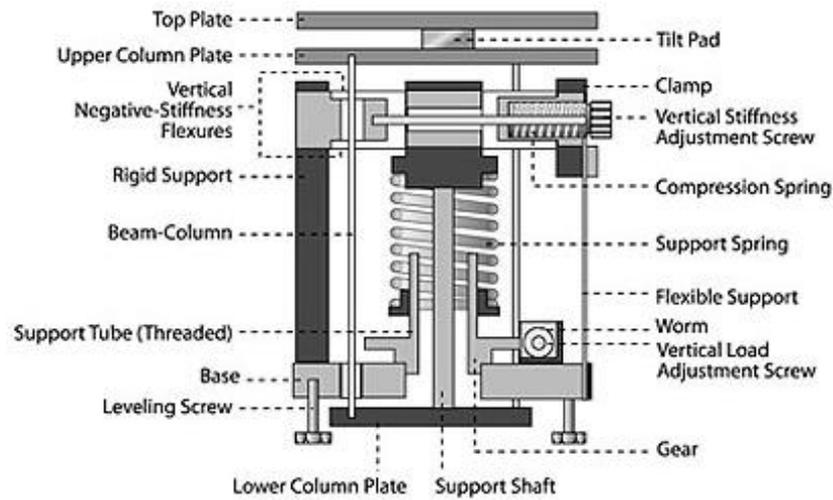


Figura 31. Esquema de un Sistema de aislamiento de Vibraciones [36]

- Espejos ópticos y antenas

Algunas aplicaciones se pueden encontrar en espejos ópticos y antenas. La Figura 32 muestra una dobladora de espejos para aumentar la resolución. Dos actuadores piezoeléctricos situados debajo del espejo se expanden y se empujan contra el mecanismo de 4 barras con juntas flexibles en ambos extremos. El movimiento del acoplador entonces dobla el centro del puente donde el espejo será atado.

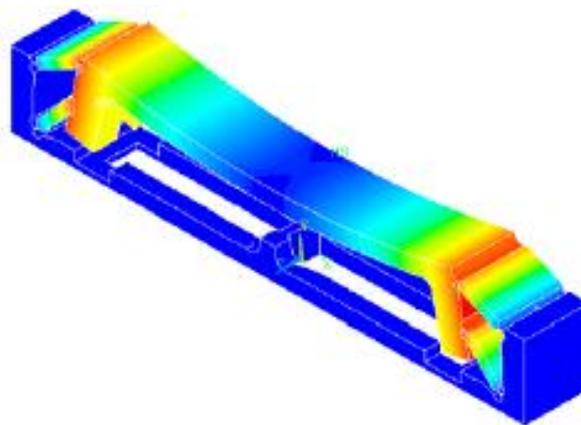


Figura 32. Mecanismo doblador de espejos de cuatro barras [21]

2.5 Manipuladores Compliant. Serie y Paralelos

2.5.1 Distinción entre manipuladores serie y paralelos

Desde la antigüedad, el hombre ha sentido fascinación por las máquinas que imitan la figura y los movimientos de los seres vivos. Ya en la antigua Grecia se desarrollaron los primeros autómatas que se conocen, como por ejemplo “La paloma”, pájaro mecánico desarrollado por el matemático Arquitas de Tarento en el siglo IV a.c. que se movía con vapor. Otros autómatas relevantes fabricados a lo largo de la historia son los creados por el inventor Al-Jazari (1136-1206), entre los que se incluyen instrumentos musicales accionados por agua, aplicaciones para la cocina y mecanismos para elevar agua.

En el ámbito de la robótica industrial, el robot industrial más antiguo conocido, conforme a la definición de la ISO, se completó gracias a Bill Griffith P. Taylor en 1937 en Inglaterra y publicado en la revista Meccano, en marzo de 1938. Gargantua, como se denominó al dispositivo, fue construido casi en su totalidad con piezas de Meccano y accionado por un único motor eléctrico con cinco ejes de movimiento posibles. La automatización se logró mediante el uso de cinta de papel perforada para activar solenoides, lo que facilitó el movimiento de las palancas de control de la grúa. El robot podía apilar bloques de madera en los patrones pre-programados.

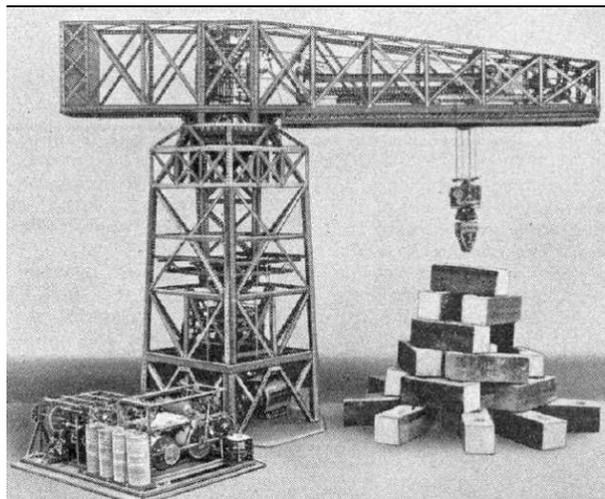


Figura 33. Robot Gargantua – “Bill” Griffith P. Taylor

La primera compañía en producir un robot fue Unimation (Universal Automation), fundada por Devol y Joseph F. Engelberger en 1956, y se basó en las patentes originales de Devol. Los robots de Unimation también fueron denominados máquinas de transferencia programables, ya que su principal uso era transferir objetos de un punto a otro, a menos de tres metros de distancia. Dichos robots utilizaban actuadores hidráulicos y fueron programados en conjuntos de coordenadas, es decir, los ángulos de las distintas articulaciones se almacenaron durante una fase de enseñanza y reproducidos en su funcionamiento. Tenían una precisión de 1/10,000 de pulgada, generalmente evaluados en términos de repetibilidad. Más tarde Unimation otorgó licencias de su tecnología de Robot Industrial KUKA a Kawasaki Heavy Industries y GKN, los cuales fabricaron Unimates en Japón e Inglaterra, respectivamente. Ya en los 70, la firma sueca Asea lanza el primer robot eléctrico, el IRB6. También en esta década son lanzados al

mercado el PUMA (Programable Universal Machine), en 1978, y en Japón el robot SCARA (1979).

Este documento se centra en robots manipuladores, cuya empleabilidad en todo tipo de aplicaciones industriales ha potenciado un espectacular desarrollo desde que se comenzaron a utilizar. Los robots manipuladores se caracterizan por poseer un componente final llamado elemento terminal cuya misión es posicionar, agarrar o manipular algún objeto. Aunque en este estudio se haga el análisis de manipuladores paralelos, a continuación se comentan algunas de las características de los robots tipo serie para ver la diferencia existente entre ellos.

2.5.1.1 Manipuladores Serie

En la actualidad, la mayoría de los manipuladores existentes son de tipo serie y presentan características antropomórficas, por lo general, parecidas a las de un brazo humano. Están constituidos por una sucesión de cuerpos rígidos, cada uno de ellos vinculado a su predecesor y a su sucesor por medio de una articulación, permitiendo el movimiento del elemento terminal. Por lo general, el número de grados de libertad que se pueden controlar es la suma de los grados de libertad de cada articulación. En la Figura 34 se puede observar un robot de soldadura comercializado por la empresa FANUC robotics, con el que pueden controlarse seis grados de libertad actuando sobre los motores ubicados en cada una de las uniones.



Figura 34. Robot Serie Fanuc M-2000iA/1200 [37]

Las características más destacables de estos manipuladores son las de las siguientes:

- Cadena cinemática abierta.
- Disposición antropomórfica.
- Gran alcance del elemento terminal.
- Amplio espacio de trabajo.
- Buena destreza.

- Baja rigidez direccional.
- Características dinámicas limitadas.
- Baja relación esfuerzo peso.
- Resolución analítica del problema directo.

Las aplicaciones para las que se emplean estos manipuladores son múltiples. Se distinguen tareas de manipulación en las que el trabajo principal consiste en mover un objeto de un lugar a otro (paletizado, empaquetado, atención a máquinas, etc.) y tareas de procesado, en las que el robot realiza alguna operación sobre el objeto, transformándolo (soldadura, mecanizado o corte). En cuanto a su clasificación existen dos grupos principales en los que actualmente se engloban estos manipuladores [38]:

- **Robot industrial:** la definición según la norma ISO 8373 adoptada por la Federación Internacional de Robótica es “Máquina de manipulación automática, reprogramable y multifuncional con tres ó más ejes, fija o móvil, que puede posicionar y orientar materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales para la ejecución de trabajos diversos en las diferentes etapas de la producción industrial”.

Las aplicaciones más sofisticadas en las que interviene estos manipuladores incluyen la industria fotovoltaica, la industria de la construcción, operaciones logísticas y de micro ensamblado.

- **Robot de servicio:** “Robot que opera de manera total o parcialmente autónoma realizando servicios de utilidad para la vida de las personas y equipamientos, excluyendo operaciones de fabricación”. Dado que los robots de servicio están en una etapa incipiente de desarrollo y difusión, no tienen una definición formal estandarizada y aceptada internacionalmente. La IFR ha adoptado esta definición como preliminar, por lo que es susceptible de ser modificada, ya que incluye ambigüedades entre el concepto de robots industriales y de servicio. Un ejemplo de robot de servicio pueden ser los enviados en misiones de exploración a Marte, como el que puede verse en la Figura 35. Existen otras aplicaciones más comunes de los robots de servicio como de limpieza, educativos, militares, los de asistencia a personas discapacitadas.

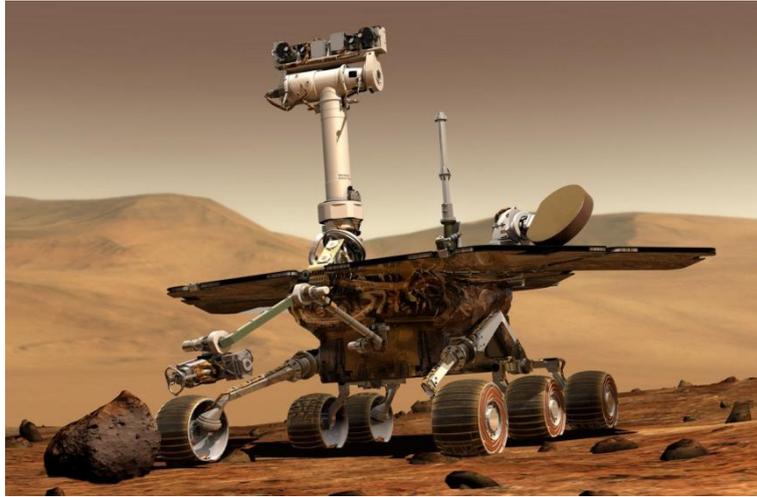


Figura 35. Robot explorador [39]

2.5.1.2 Manipuladores Paralelos

La configuración general de un manipulador paralelo consta de un elemento fijo o bastidor, un elemento terminal o plataforma móvil y dos o más cadenas cinemáticas conectando estos dos elementos. Las cadenas o barras suelen estar formadas por varios elementos que están conectados por pares cinemáticos.

Los manipuladores paralelos son mecanismos basados en cadenas cinemáticas de lazo cerrado y esta característica les confiere una serie de propiedades adicionales en comparación con aquellos basados en cadenas cinemáticas abiertas (mecanismos tipo serie). La primera de ellas es su buen comportamiento estático resistente y por tanto una elevada rigidez. Esto se debe precisamente a que entre el elemento fijo y el elemento terminal que soporta la carga, la conexión se realiza mediante varias cadenas en paralelo. En los manipuladores de cinemática paralela, la rigidez es una propiedad que varía en función de la configuración y la topología del manipulador, y de la posición de la plataforma móvil dentro de su espacio de trabajo, entre otras.

Los primeros trabajos teóricos relacionados con las estructuras mecánicas paralelas aparecieron ya hace siglos, antes de que se empezara a hablar de robots, cuando los primeros ingenieros y dibujantes franceses e ingleses realizaron sus estudios sobre los poliedros y sus aplicaciones. Ya en épocas más recientes, el primer mecanismo paralelo fue patentado en el año 1931. Se trataba de una plataforma de movimiento destinada a la industria del entretenimiento diseñada por James E. Gwinnett [40], aunque el mecanismo diseñado nunca fue construido.

Poco después, aparece el primer diseño de robot industrial paralelo. En 1940, Willard L.V. Pollard [40] presentaba un ingenioso robot de 5 grados de libertad destinado a operaciones de pintura con espray. El robot consistía en tres brazos de dos eslabones cada uno. Los eslabones estaban unidos mediante juntas universales. Los tres actuadores de la base comandaban la posición de la herramienta, mientras que la orientación era proporcionada por otros dos actuadores situados en la base y que transmitían el movimiento a la herramienta mediante la rotación proporcionada a unos cables flexibles, ver Figura 36.

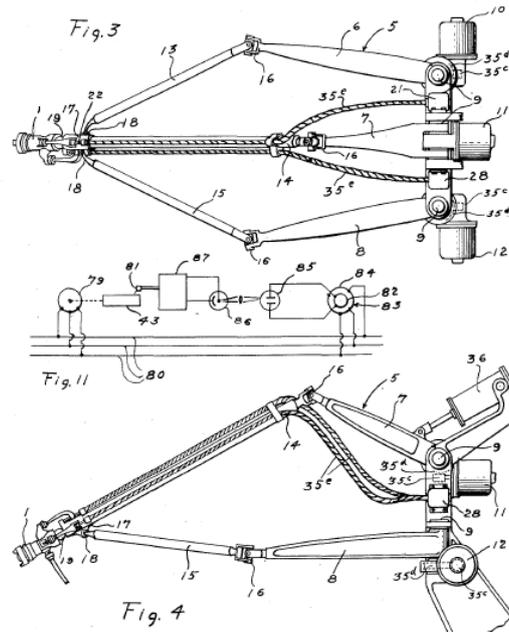


Figura 36. Robot paralelo patentado por W.L.V. Pollard [41]

Sin embargo, han sido otros mecanismos paralelos los que han logrado un mayor reconocimiento general y han contribuido a la aparición de un mayor número de publicaciones sobre la robótica paralela. Por estricto orden temporal, fue el Dr. Eric Gough [40] quien en 1947 inventó la plataforma paralela más popular de todas. El Dr. Gough diseñó un octaedro hexápodo con lados de longitud variable, empleado como plataforma para la comprobación del comportamiento de los neumáticos de la casa Dunlop para la cual trabajaba, bajo cargas aplicadas en diferentes ejes. De esta forma, intentaba simular el proceso de aterrizaje de un avión. En la actualidad existen multitud de plataformas basadas en este diseño en numerosas empresas, y se conocen bajo el nombre de MAST (Multi-Axis Simulation Table), ver Figura 37a.

Ya en 1965, Mr. Stewart [42], presentó un artículo en el que describía una plataforma de movimiento de 6 grados de libertad destinada a trabajar como simulador de vuelo, ver Figura 37b. El artículo de Stewart tuvo y tiene gran influencia en el mundo académico y se considera como uno de los primeros trabajos de análisis de plataformas paralelas.



Figura 37. a) (Ejemplo de manipulador MAST [43]. b) Plataforma paralela empleada como simulador de vuelo [44]

Paralelamente, el ingeniero Klaus Cappel realizaba en el Franklin Institute Research Laboratory numerosas investigaciones con plataformas paralelas de 6 grados de libertad. En 1967 Mr. Cappel patentaba un simulador de movimiento basado en un hexápodo, y construyó varias de sus invenciones. Más tarde en 1978, Hunt sugirió que se usaran los mecanismos actuados de forma paralela en los simuladores de vuelo como robots manipuladores, y destacó que los manipuladores paralelos requerían de un estudio más detallado en el contexto de las aplicaciones robóticas, a la vista de las ventajas en cuanto a rigidez y precisión con respecto a los robots serie convencionales.

Además de la excelente relación carga admisible/peso propio, los robots paralelos presentan otras características favorables. En 1979, McCallion y Pham fueron los primeros que propusieron usar la plataforma de Stewart como un manipulador paralelo para una célula de ensamblaje robotizada, en particular porque la posición del efector final es mucho menos sensible a los errores que introducen los sensores articulares de los robots en serie. La gran rigidez asegura que las deformaciones de los actuadores sean mínimas y esta característica contribuye en gran manera a la precisión en el posicionamiento del manipulador.

En 1990, Reymond Clavel [40] realizó una modificación al manipulador de Stewart, que presentaba desventajas respecto a su difícil análisis cinemático y su elevado coste en la fabricación de las uniones esféricas, por su exigencia en la precisión a la hora de construirlas. De esta manera surge el manipulador Delta de tres y cuatro grados de libertad, que supera las desventajas antes mencionadas, ver Figura 38. Este manipulador es un paralelepípedo que cuenta con 3 grados de libertad. En su forma más general, está constituido por una base fija y otra móvil. Éstas se encuentran unidas por 3 cadenas cinemáticas cerradas, conocida cada una como “brazo” del manipulador. Los motores que conducen el plato móvil se encuentran montados en la base fija, de manera que la masa a mover del robot es menor, permitiendo así mayores aceleraciones. Para el Delta de 4 grados de libertad, se le añade un giro a la pinza final. Estos tipos de manipuladores son utilizados principalmente en empresas donde su proceso se basa en la manipulación de alimentos, ya que por su sencillez en la estructura se garantiza una fácil limpieza e higiene.

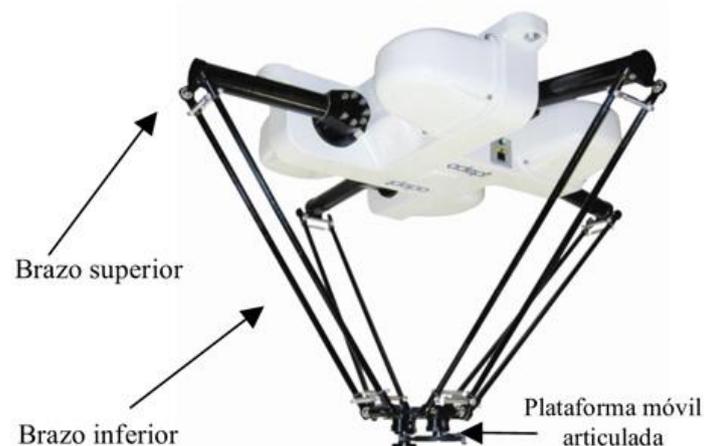


Figura 38. Ejemplo Robot paralelo tipo Delta de tres barras

En los últimos años los manipuladores paralelos han llamado la atención dadas las ventajas que ofrecen con respecto con los manipuladores seriales en campos como la medicina y las máquinas-herramienta. Esto los ha convertido en un área de investigación y desarrollo con muchos problemas abiertos aún por tratar. Una línea de investigación basada en este tipo de manipuladores debe comenzar comprendiendo a fondo el funcionamiento y complejidad de las estructuras más simples, entre ellas el manipulador delta de tres grados de libertad, que representa una de las estructuras más sencillas y mejor documentadas de los robots manipuladores paralelos.

En la actualidad existen tres tipos de robots manipuladores paralelos que son construidos a nivel comercial y que presentan diferentes tipo de aplicaciones, estos son [45]:

- El robot Delta desarrollado por R. Clavel, que es utilizado especialmente en industrias de manipulación de alimentos.
- El robot Tricept patentado por K.N. Neumann, el cual es utilizado en máquina herramienta de media precisión e incursionando en el campo de la medicina.
- Plataforma de Gough, la cual es utilizada para orientación de antenas, telescopios, paneles solares, aislamiento y producción de vibraciones, posicionamiento de microscopios y pacientes, simuladores de vuelo de avión, vehículos elevadores, ensamble de componentes, posicionamiento de piezas y como máquina herramienta de precisión media.

2.5.1.3 Comparativa Manipuladores Serie Vs. Manipuladores Paralelos

Tradicionalmente se propone una comparativa entre las distintas propiedades de los manipuladores paralelos y los manipuladores serie en relación con las características cinemáticas, mecánicas y funcionales. Sin embargo, no debe pensarse necesariamente en una rivalidad entre ambas arquitecturas, sino más bien que puede tratarse de dos alternativas para resolver las distintas necesidades y requisitos de la función objetivo del diseño.

Existen dos desventajas de los manipuladores paralelos que es preciso tener en cuenta ya que les proporcionan sus principales limitaciones: por una parte, desde el punto de vista cinemático el problema más relevante lo introducen las singularidades. Existen determinadas disposiciones entre los elementos mecánicos del manipulador que hacen que se pierda el control del elemento terminal y que pueden generar incertidumbre en cuanto al posicionamiento exacto de dicho elemento; por otra parte, desde el punto de vista estructural otra desventaja de los manipuladores paralelos son las interferencias debidas a la multiplicidad de cadenas cinemáticas. Pero es precisamente esta característica de múltiples cadenas conectando la base y la plataforma móvil la que proporciona una de las ventajas de estos manipuladores: su elevada rigidez. A continuación, se presenta un esquema en el que se puede apreciar de forma intuitiva cuál es el efecto de añadir cadenas en paralelo entre la plataforma móvil y la base [38].

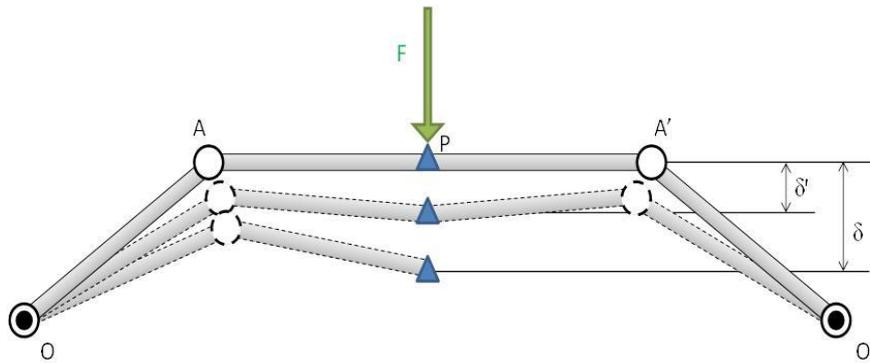


Figura 39. Deformación con configuración serie y paralela

En la Figura 39 se presenta un sencillo ejemplo demostrativo en el que se puede apreciar que la cadena cinemática OAP bajo la acción de la carga F experimenta un desplazamiento de valor δ . Sin embargo, cuando se conecta en paralelo con ella la segunda cadena O'A'P la rigidez del sistema aumenta y, en consecuencia, el desplazamiento inducido en el sistema es menor (δ'). En efecto este caso se puede asociar con el ejemplo de una persona que soporta inicialmente un peso con un solo brazo (serie) y luego usa los dos (paralelo) para soportar la misma carga. Evidentemente, el descenso de las extremidades será menor cuando se utilicen ambos brazos para soportar el peso.

Otro aspecto relevante es la forma y tamaño del espacio de trabajo. De él dependerán en gran parte las distribuciones de los puntos de medida y de los análisis y evaluaciones de rigidez. Si volvemos al ejemplo de las cadenas cinemáticas anteriores podemos observar cómo el hecho de añadir cadenas cinemáticas tiene una influencia directa en la forma y dimensiones del espacio de trabajo del manipulador. Así en el caso anterior y suponiendo que los eslabones de la cadena OAP tienen dimensiones iguales el espacio de trabajo sería un círculo de centro O y radio $\overline{OA} + \overline{AP}$. Al añadir la segunda cadena O'A'P, el espacio de trabajo resultante será la intersección de los espacios de cada una de las cadenas abiertas, quedando reducido a la zona rayada de la Figura 40.

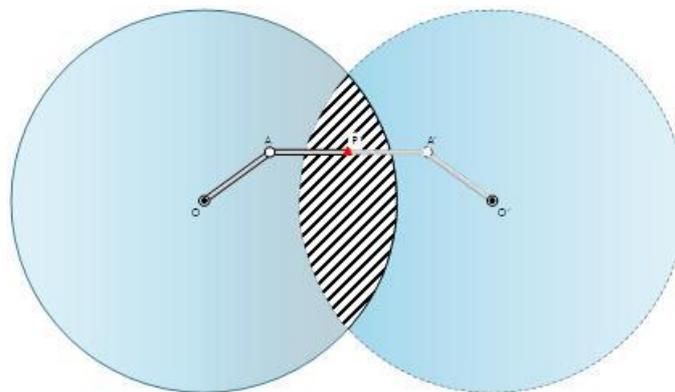


Figura 40. Espacio de trabajo

Es por ello que en las configuraciones de los manipuladores de cinemática paralela, los espacios de trabajo quedan reducidos, en comparación a los de configuración serie, y deben ser ampliamente estudiados y definidos para poder emplearlos en determinadas aplicaciones.

2.5.1.4 Conversión de mecanismos convencionales en compliant

Combinando una estructura paralela con elementos flexibles, llegamos a alcanzar un manipulador paralelo compliant (C-P), el cual es un mecanismo paralelo en el que todas las articulaciones están compuestas por juntas flexibles deformables. En la integración de la junta flexible y el mecanismo paralelo, la deformación de la junta flexible es guiada por las restricciones mecánicas del mecanismo paralelo. Así el mecanismo C-P se puede conducir con precisión [46].

2.5.2 Aplicaciones Emergentes para los manipuladores Compliant

Los mecanismos Compliant (CM) pueden utilizarse en una gran variedad de aplicaciones prometedoras tanto en micro como en macro escalas, especialmente cuando se requieren movimientos de elevada precisión. Estas aplicaciones emergentes pueden clasificarse en 6 campos distintos [47], que se detallan en la Figura 41.

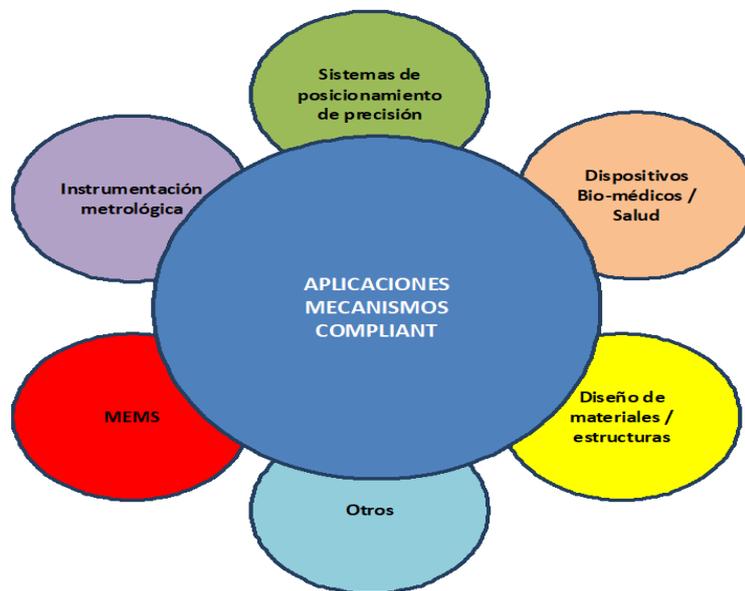


Figura 41. Aplicaciones de los Mecanismos Compliant

El primer campo de aplicación se encuentra en sistemas de posicionamiento de precisión para microscopios de fuerza atómica (MFA) [48][49][50], alineación de fibra óptica [51][52], nanolitografía [53] y actuadores de precisión [54]. En esta área de aplicación, las ventajas de los CM de no existir fricción, sin holguras y sin desgaste resultan idóneas como unidades de movimiento en aplicaciones de precisión ultra-alta (precisión, repetibilidad y resolución).

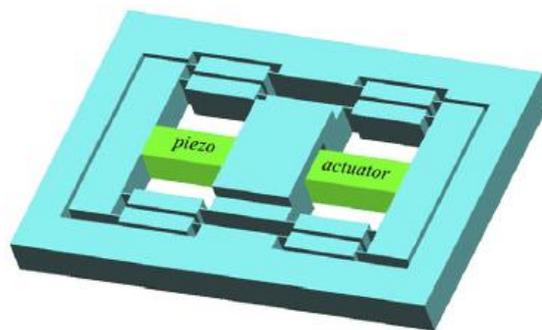


Figura 42 . Ejemplo de nano-posicionador basado en flexión [55]

Este campo es la aplicación más temprana de los CM y en la que se han desarrollado muy bien. El MFA es una de las aplicaciones más populares, que ha permitido el avance de muchas nanotecnologías. Está diseñado para investigar las fuerzas atómicas y escanear el perfil existente sobre la superficie de una muestra usando una punta en voladizo, habilitada por una etapa de alta velocidad XY / XYZ de alta precisión. En la Figura 43 se muestra un diagrama esquemático de un sistema MFA típico.

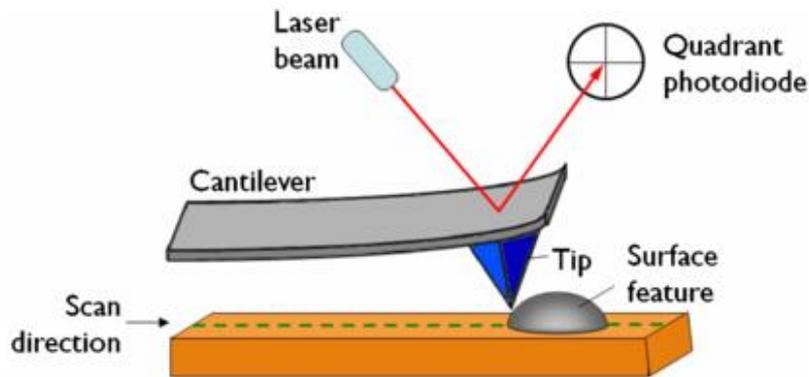


Figura 43. Esquema de funcionamiento de un MFA

El segundo campo de aplicación se encuentra en instrumentos de metrología que incluyen máquinas de medición de coordenadas 3D (MMC) [56], sensores de fuerza/momento [57][58] y sensores de desplazamiento/aceleración [59][60]. En este campo de aplicación, la deformación del material debido a la fuerza y/o la aceleración ejercida proporciona una realimentación para sondear los datos requeridos. A modo de ejemplo, la Figura 44 muestra un sensor de fuerza compacto de tres ejes [58], que utiliza un mecanismo paralelo compliant cúbico de tres ejes [61], el cual se somete a una carga en su efector final, produciendo de este modo voltajes a través de galgas extensiométricas sobre las vigas deformadas. También se propuso un método de desacoplamiento de carga multi-ejes basado en una matriz lineal, para que la fuerza detectada pueda reflejar al máximo la fuerza aplicada real a lo largo de cada eje.

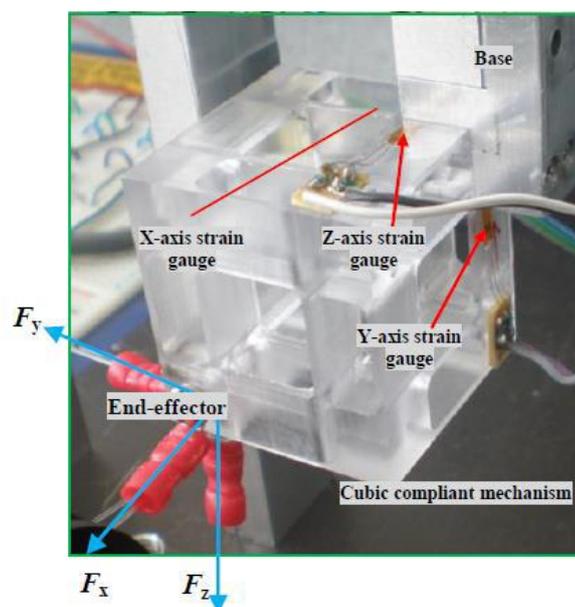


Figura 44. Sensor de fuerza de tres ejes con medición de datos desacoplados [47]

El tercer campo de aplicación se encuentra en los dispositivos biomédicos/sanitarios, como son el dispositivo de rehabilitación del tobillo [62], el dispositivo de compensación de la gravedad del cuerpo [63], la herramienta quirúrgica mínimamente invasiva [64] y la pinza quirúrgica auto-adaptativa de dos dedos [65]. Este campo de aplicación atribuye las funciones requeridas a las características de rigidez, transmisión de fuerza, higiene y miniaturización de los CM. Como se muestra en la Figura 45, la gravedad del cuerpo puede ser equilibrada por un CM de fuerza constante gracias a un diseño sofisticado, el cual puede ser utilizado para ayudar a los pacientes con lesiones en sus rodillas mediante el uso de un mecanismo de exoesqueleto.

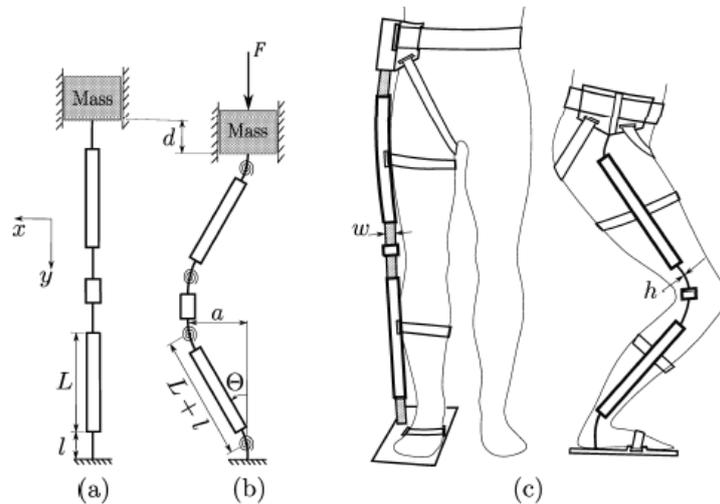


Figura 45. Principio de compensación por gravedad [63]. a) Esquema de un mecanismo de fuerza constante de compensación, b) Correspondiente modelo Pseudo-sólido rígido; c) Ejemplo de implementación

El cuarto campo de aplicación se encuentra en dispositivos microelectromecánicos MEMS, incluidos micro-espejos [66], nanoposicionadores en la escala micrométrica [67], actuadores de accionamiento tipo peine [68], conmutadores [69], micro-pinzas [70] y nano-inyectores [71].

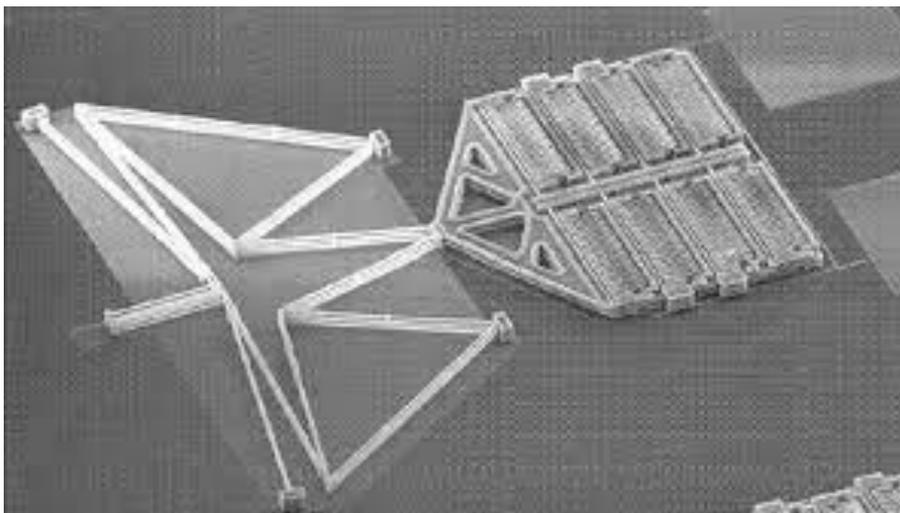


Figura 46. Ejemplo de mecanismo compliant conectado a actuador electrostático. Área del dispositivo 350 μm por 350 μm [72]

Como los CMs surgen de hacer uso de la flexibilidad del material en lugar de suprimirla, pueden ser concebidos naturalmente para el diseño de materiales y estructuras, que se considera como el quinto campo de aplicación, el cual es un campo emergente y prometedor. Estas aplicaciones incluyen la micro-arquitectura o los materiales de celosía [73], los materiales auxéticos [74], estructuras celulares [75], y estructuras desplegables compliant basadas en origami [76]. Mediante el diseño de movimientos acoplados de CMs como unidades de material de micro-composición en dimensión 3D/2D, se pueden obtener materiales programables con propiedades específicas tales como un ratio de Poisson negativo o auxéticos [73][74]. Estructuras laminadas flexibles puede ser utilizadas para reemplazar los materiales que forman estructuras desplegables basadas en el principio de origami [76]. La Figura 47 muestra una estructura expansible cubica, la cual utilizando la característica de biestabilidad, cada superficie externa del cubo puede estar en un estado encogido o estado de expansión. La Figura 48 muestra el desarrollo de una gran matriz solar desplegable basada en un patrón de origami que está diseñado para plegarse de forma compacta en el lanzamiento y luego desplegarse una vez en el espacio.

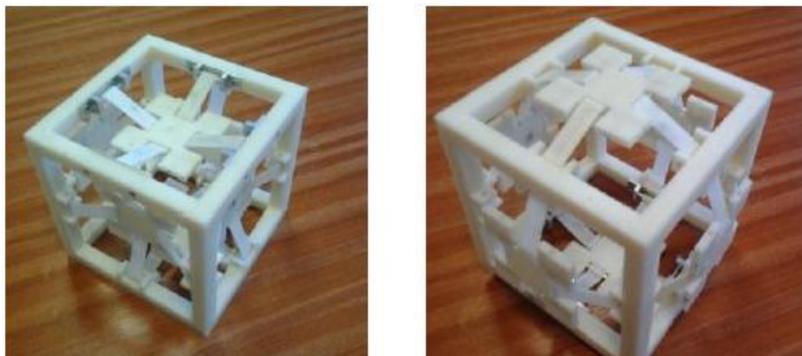


Figura 47. Ejemplo de una estructura expansible [47]

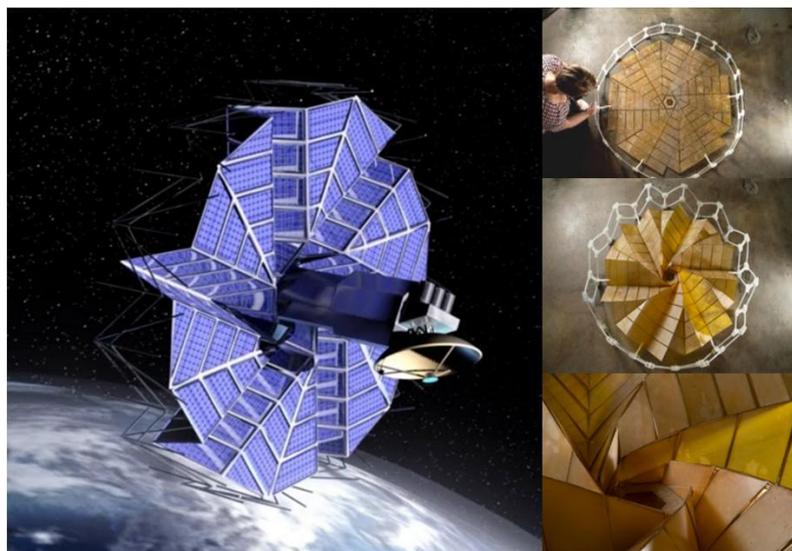


Figura 48. Matriz solar desplegable basada en un patrón de origami [77]

Existen también otros campos de aplicación tales como mecanismos Compliant espaciales que incorporan las áreas de los CMs y las tecnologías espaciales [78][79]. Los problemas tales como las duras condiciones ambientales existentes en el espacio, la desgasificación, la soldadura en

frío y los medios limitados de transferencia de calor, creados por el vacío en el espacio pueden ser mitigados usando CMs para eliminar la separación existente en las juntas y la lubricación, etc. Además, los CMs han sido empleados para la recolección eficiente de energía, el aislamiento de vibraciones o la supresión de vibraciones resonantes [80][81][82], utilizando sus características no lineales de desplazamiento de carga, como la rigidez negativa y la rigidización.

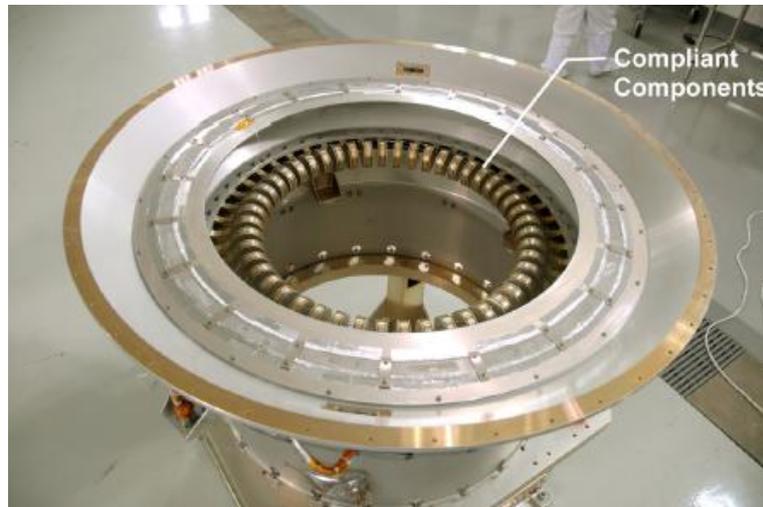


Figura 49. Ejemplo de un mecanismo espacial compliant para el aislamiento de vibraciones [78]

2.5.3 Posibles desarrollos futuros

A nivel práctico de aplicación, los CMs van direccionados hacia el diseño y fabricación de multi-materiales [83], materiales programables y estructuras desplegadas [73][76][84], por lo que deberían ser la temática de investigación futura. También deberá profundizarse en el estudio de las estructuras empleadas en los CMs, para lograr mejores resultados en todos aquellos dispositivos que se están empezando a desarrollar en la actualidad, tales como posicionadores, actuadores, instrumentación, etc.

De todo esto se desprenden unas muy buenas expectativas para este campo de aplicación, en el que será necesario realizar una investigación profunda para resolver los continuos contratiempos que aparecerán en el desarrollo de esta novedosa tecnología.

2.6 Modelado de Manipuladores Compliant

El modelado de un sistema mecánico trata de definir todos los aspectos característicos de un dispositivo, los cuales describirán de una forma fehaciente su comportamiento frente a sollicitaciones externas. Para ello será necesario definir los desplazamientos y esfuerzos soportados por cada uno de los elementos que componen al mecanismo objeto del estudio. En los siguientes apartados se definirán los principales fundamentos de diferentes tipos de formulaciones que permiten caracterizar el comportamiento de un mecanismo.

2.6.1 Cinemática

La palabra cinemática proviene del griego “kineema”, que significa movimiento. Es la parte de la Mecánica que se encarga del estudio del movimiento de los sistemas materiales independientemente de las causas que lo producen. Estudia la posición y los cambios de posición en el tiempo de los sistemas, es decir, las propiedades intrínsecas del movimiento (aquellas que se pueden expresar mediante las magnitudes fundamentales longitud y tiempo). No consideran otras magnitudes fundamentales. Su objetivo es expresar los atributos o propiedades cinemáticas de los sistemas como funciones de la variable temporal.

Hay que distinguir dos aspectos de interés: la cinemática directa y la cinemática inversa, las cuales se utilizan para analizar el comportamiento de los mecanismos.

El problema cinemático directo consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del mecanismo con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

El problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del mecanismo $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial. Al contrario que el problema cinemático directo, el cálculo de la cinemática inversa no es sencillo ya que consiste en la resolución de una serie de ecuaciones fuertemente dependientes de la configuración del dispositivo, además de existir diferentes variantes que resuelven el problema.

En la actualidad, existen procedimientos genéricos susceptibles de ser programados para la resolución de la cinemática inversa, y obtener una solución válida de valores articulares que posicionen y orienten el extremo final. Sin embargo, el principal inconveniente de estos procedimientos es que son métodos numéricos iterativos, que no siempre garantizan tener la solución en el momento adecuado.

Merlet [85] e Innocenti [86] presentaron algoritmos para resolver casos especiales, pero las soluciones analíticas sólo se encontraron para dichas arquitecturas particulares, como por ejemplo las presentadas por Lee [87]. Otro avance fue propuesto por Ku [88] quien propuso el análisis del modelo cinemático directo de la plataforma de Stewart empleando el método de Newton-Raphson, mostrando una mayor simplicidad y eficiencia. También se encuentra el estudio desarrollado por Yang [89], que se centra en el diseño y análisis cinemático de robots modulares paralelos reconfigurables de tres cadenas cinemáticas y 6 grados de libertad. Para la solución del problema cinemático directo, utilizó un algoritmo basado en información sensorial de las articulaciones pasivas para simulaciones en línea y el algoritmo de iteración numérica de Newton-Raphson para simulaciones fuera de línea. Otra forma práctica de resolver la cinemática directa es implementar sensores de posición y de orientación para calcular la postura en la que se encuentra la plataforma móvil, la cual fue presentada por Arai [90], y Merlet [91]. Otra solución fue propuesta por Bonev [92], que propuso un nuevo método de solución del problema directo usando tres sensores lineales adicionales.

2.6.1.1 Análisis de Singularidades

Los mecanismos de cinemática paralela pueden adoptar configuraciones en las cuales las fuerzas articulares no puedan equilibrar los esfuerzos sobre la plataforma móvil. Es importante determinar estas configuraciones ya que, en las proximidades de las mismas, las fuerzas articulares tienden a infinito y el mecanismo puede colapsar. Un estudio analítico elemental de este tipo de singularidades se puede encontrar en Gosselin y Angeles [93], donde se denominan como 'singularidades de segundo tipo'. Estas disposiciones singulares están caracterizadas por la anulación del determinante de la matriz jacobiana inversa. A pesar de que esta matriz sea conocida, en la mayoría de los casos la computación simbólica de este determinante no conduce a soluciones analíticas, por lo que hay que recurrir a procedimientos numéricos como los propuestos por Douady [94]. Merlet [95], hizo un extenso uso de la geometría de Grassman para enumerar con detalle las condiciones geométricas singulares de diferentes robots paralelos. Liu [96], realizó un estudio geométrico de las singularidades de la plataforma de Stewart, en el que analizaron la matriz jacobiana para cuatro posiciones singulares. Ma y Angeles [97], mostraron que algunas arquitecturas simétricas de la plataforma de Stewart, presentan singularidades extendidas por todo el espacio del trabajo o regiones importantes dentro del mismo, caracterizadas por la capacidad de movimiento continuo de la plataforma móvil con todos los actuadores bloqueados. A estas singularidades las llamaron singularidades de arquitectura. Aunque estas singularidades dan lugar a serios problemas de control, éstas se pueden eliminar en la fase de diseño. Gosselin estudió la asociación del condicionamiento de la matriz de transformación estática con la rigidez de la plataforma de Stewart, donde se perdía rigidez cerca de configuraciones singulares. Un problema que queda por resolver es determinar de forma simultánea si existen configuraciones singulares dentro del espacio de trabajo de un robot, Sefrioui [98]. Bhattacharya [99], desarrolló un esquema de planificación de trayectorias evitando singularidades, de forma que reestructuraba la planificación en las proximidades de una singularidad. Luego Dasgupta y Mruthyunjaya [100], formularon el problema de la planificación de trayectorias evitando singularidades y desarrollaron una estrategia para planificar entre dos puntos trayectorias bien condicionadas en el espacio de trabajo del mecanismo.

2.6.1.2 Espacio de Trabajo

En mecanismos paralelos, el espacio de trabajo no se puede desacoplar en dos sub-espacios 3D caracterizando los movimientos de traslación y de orientación. Este acoplamiento hace que la representación del espacio de trabajo de la gran mayoría de los mecanismos paralelos, sólo sea posible en seis dimensiones, lo que dificulta su representación y aun más su uso en aplicaciones prácticas. Ante esto, cabe desglosar el problema en dos: dada una orientación constante, representar el espacio de trabajo de todas las posibles posiciones 3D, o bien, dada una posición, representar el espacio de trabajo de las posibles orientaciones (3D). Una forma usual de representar las posibles traslaciones de la plataforma móvil a una altura y orientación constantes, mediante un procedimiento de discretización, fue dado por Fichter [101], y Arai [102], o, más eficientemente, por un algoritmo geométrico dado por Merlet [103], y Gosselin [104], que tiene en cuenta los límites de los actuadores, sus interferencias y las restricciones de las articulaciones. Haug [105], desarrolló una formulación general para el análisis de la destreza y del espacio de trabajo de los manipuladores paralelos en términos de la matriz jacobiana y de las ecuaciones de restricción para la plataforma de Stewart. Masory y Wang

[106], consideraron el problema de determinar secciones del espacio de trabajo incluyendo los límites angulares de las articulaciones y la interferencia de los actuadores. Aunque la mayoría de los autores estudiaron el espacio de trabajo manteniendo una orientación fija, Merlet [107], desarrolló un algoritmo para la representación de todas las posibles rotaciones dentro del espacio de trabajo, alrededor de un punto considerado fijo en la plataforma móvil. Merlet [108], propuso la inclusión completa de una trayectoria recta en el espacio de trabajo, para una orientación constante y para una variación lineal de los ángulos de orientación.

2.6.2 Dinámica: Tipos de formulaciones

La dinámica es la parte de la física que describe la evolución en el tiempo de un sistema físico en relación con las causas que provocan los cambios de estado físico y/o estado de movimiento. El objetivo de la dinámica es describir los factores capaces de producir alteraciones de un sistema físico, cuantificarlos y plantear ecuaciones de movimiento o ecuaciones de evolución para dicho sistema de operación.

La dinámica relaciona el movimiento del mecanismo y las fuerzas implicadas en el mismo. El modelo dinámico establece las relaciones matemáticas entre las coordenadas articulares (o las coordenadas del extremo del dispositivo), sus derivadas (velocidad y aceleración), las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones (o en el extremo) y los parámetros del mecanismo (masas de los eslabones, inercias, etc).

La dinámica analítica comprende una serie de métodos cuya característica principal es el tratamiento puramente abstracto, analítico, de los sistemas mecánicos. De esta forma, se separan al máximo las consideraciones físicas y geométricas, necesarias para definir el movimiento, de las puramente matemáticas, para plantear y solucionar las ecuaciones. Las primeras son necesarias para formular las coordenadas, enlaces y magnitudes cinéticas de un sistema dado; una vez realizada la definición de un sistema mediante la adecuada selección de las magnitudes anteriores, los métodos de la mecánica analítica permiten obtener las ecuaciones de la dinámica (o las condiciones de la estática en su caso) de forma casi automática.

El análisis dinámico de los mecanismos de cinemática paralela es complicado dada la existencia de múltiples cadenas cinemáticas cerradas. A continuación se muestran cada una de estas formulaciones, que han sido desarrolladas para realizar los diferentes estudios dinámicos.

2.6.2.1 La formulación de Newton-Euler

El método de Newton-Euler permite obtener un conjunto de ecuaciones recursivas hacia delante de velocidad y aceleración lineal y angular, las cuales están referidas a cada sistema de referencia articular. Las velocidades y aceleraciones de cada elemento se propagan hacia adelante desde el sistema de referencia de la base hasta el efector final. Las ecuaciones recursivas hacia atrás calculan los pares y fuerzas necesarios para cada articulación desde el efector final (incluyendo en ella efectos de fuerzas externas), hasta el sistema de referencia de la base.

Algunos estudios, que han sido desarrollados aplicando esta formulación para obtener el modelo dinámico, pueden encontrarse en artículos como el de Dasgupta y Mruthyunjaya [109] donde se desarrolla la formulación dinámica del manipulador paralelo de seis grados de

libertad conocido como plataforma Stewart. Do y Yang [110] desarrollan un algoritmo para resolver la dinámica inversa para manipuladores basados en plataformas, usando las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler. Mediante una secuencia correcta, los autores pasan de las 36 ecuaciones que rigen la dinámica inversa, a solo seis ecuaciones. También analizan las relaciones entre las fuerzas actuantes y la forma de la estructura, dando como resultado configuraciones que minimicen las fuerzas de accionamiento. Guglielmetti y Longchamp [111] desarrollan un modelo completo de cinemática y dinámica inversa en forma cerrada para el Robot Paralelo Delta. El enfoque utilizado se basa en la cinemática inversa y las leyes de Newton para obtener un modelo de dinámica inversa llamado "en los dos espacios", ya que está parametrizado para el robot, tanto en el espacio de trabajo como en el espacio articular. Otro estudio que desarrolla un modelo analítico dinámico utilizando las ecuaciones de Newton-Euler es el desarrollado por Carvalho y Ceccarelli [112], en el que se presenta el estudio del CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator). Las peculiares cadenas cinemáticas y las propiedades de simetría de la arquitectura CaPaMan permiten formular las ecuaciones de Newton-Euler en forma cerrada, con el fin de calcular los pares de entrada, que son necesarios para definir una determinada trayectoria de movimiento de la plataforma móvil. Otros desarrollos de esta formulación, pueden ser encontrados en el libro de Tsai [113].

2.6.2.2 La formulación de Lagrange

La Mecánica de Lagrange o lagrangiana es una reformulación de la mecánica newtoniana, más flexible y a menudo más útil para resolver problemas. Se basa en un principio de mínimo, pero se puede obtener de la mecánica newtoniana, ya que ambas son equivalentes. La mecánica lagrangiana es importante porque permite, de manera natural, ampliar la mecánica para incluir campos (por ejemplo, la electrodinámica, que incluye partículas cargadas junto con campos electromagnéticos).

Esta formulación ha sido aplicada a numerosas estructuras con el fin de definir su modelado dinámico. Así por ejemplo, se ha estudiado en profundidad la plataforma de Stewart, a la que Lebret y Liu [114] desarrollan, paso a paso, cada una de las ecuaciones para desarrollar su análisis dinámico. Del mismo modo, Guo y Li [115] determinan las ecuaciones dinámicas compactas y explícitas de modo cerrado en el espacio de trabajo, al combinar el método de Newton-Euler con la formulación de Lagrange, que incluye la dinámica de las barras para el manipulador de la plataforma Stewart. Del mismo modo, Miller y Clavel [116] desarrollan el análisis dinámico para el robot Delta-4, aplicando el método de Lagrange. Pang y Shahingpoor [117] desarrollan un análisis de la cinemática y la dinámica inversa de un manipulador paralelo de tres grados de libertad que se asemeja a la plataforma Stewart. En el análisis cinemático, se realizan los análisis de cinemática inversa, velocidad y aceleración, respectivamente, utilizando análisis de vectores y transformaciones homogéneas generales. Luego se presenta un algoritmo para resolver la dinámica inversa del manipulador paralelo propuesto, utilizando una técnica lagrangiana. En este caso, en primer lugar se deben introducir y posteriormente eliminar los multiplicadores de Lagrange para llegar a las ecuaciones gobernantes. Por último, Angel et al. [118] desarrollan las ecuaciones de movimiento y el control del sistema RoboTennis, en el que el modelo dinámico es basado en los multiplicadores lagrangianos. La principal innovación es que las inercias no son despreciables en el modelo dinámico del manipulador para el desarrollo de estrategias de control.

2.6.2.3 Principio de Trabajos Virtuales

Este principio es muy importante dado que establece una relación entre el trabajo de las cargas o acciones exteriores, que se componen luego en las sollicitaciones (esfuerzos normales, cortantes, flectores y torsores), con la energía de deformación interna, que dependerá del estado tensional y de las deformaciones del cuerpo .

El Principio de Trabajos Virtuales (P.T.V.) fue utilizado por Galileo (1564-1642) para el diseño y calculo de mecanismos y desarrollado teóricamente con un enunciado más matemático y formal por Lagrange (1736-1813), ya que desarrolla la teoría variacional y escribe su “Mecánica Analítica” donde coloca las bases de dicha disciplina.

No obstante a lo anterior, el núcleo teórico del P.T.V. fue enunciado por Santiago Bernouilli (1654-1705) y por Daniel Bernouilli (1700-1782): “Si una estructura, estando en equilibrio, sufre una deformación virtual debido a la acción de una carga adicional, el trabajo virtual externo de la carga en cuestión, es igual al trabajo virtual interno, desarrollado por las tensiones causadas por la carga”.

En cuanto a lo que concierne a la mecánica de cuerpos rígidos, dado que por definición estos cuerpos no sufren deformación sino desplazamientos, el P.T.V. debe ser reformulado. El mismo fue enunciado por Johann Bernouilli en el año 1717 de la siguiente manera: “Dado un cuerpo rígido mantenido en equilibrio por un sistema de fuerzas, el trabajo virtual efectuado por este sistema, durante un desplazamiento virtual, es nulo”. Por tal motivo algunos autores prefieren llamar al P.T.V como Principio de los Desplazamientos Virtuales (P.D.V.), sin embargo, en el presente texto se conservará la denominación original.

Este método resolutivo para el análisis dinámico ha sido ampliamente utilizado en numerosos estudios. Así por ejemplo, Honegger et al. [119] presentan las ecuaciones dinámicas, el control no lineal y la identificación de parámetros dinámicos del Hexaglide, un manipulador paralelo de 6-DOF destinado a ser utilizado como una fresadora de alta velocidad. Utilizando el método basado en el principio de los trabajos virtuales, la ecuación dinámica es obtenida en una forma lineal compacta y luego es utilizado un algoritmo de control adaptativo no lineal, basado en la minimización del error de seguimiento. Los parámetros dinámicos son obtenidos durante el movimiento y se introducen en el modelo dinámico inverso utilizándolo como compensador del avance. Tsai [120] presenta una metodología sistemática para resolver la dinámica inversa del manipulador Stewart-Gough. Basado en el principio de los trabajos virtuales y el concepto de enlace de matrices jacobianas, desarrolla una metodología para derivar las ecuaciones de movimiento dinámicas. También muestra que la dinámica del manipulador se puede reducir a la resolución de un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas, y desarrolla un algoritmo computacional para resolver la dinámica inversa del manipulador y simular varias trayectorias de la plataforma móvil. Wang y Gosselin [121] proponen un nuevo enfoque para el análisis dinámico de manipuladores paralelos basado en el principio de los trabajos virtuales. El enfoque propuesto aquí se puede aplicar a cualquier tipo de mecanismo plano y paralelo espacial, y conduce a algoritmos computacionales más rápidos que el enfoque clásico de Newton-Euler cuando se aplica a estos mecanismos. Zhang y Song [122] presentan un esquema computacionalmente eficiente, basado en el principio de los trabajos virtuales, para dinámicas inversas de manipuladores generales. La eficiencia computacional de la dinámica

inversa de un manipulador es importante para el control en tiempo real del sistema. Para los manipuladores en serie, el método recursivo de Newton-Euler ha demostrado ser el más eficiente. Sin embargo, para manipuladores más generales, como manipuladores en serie con bucles cinemáticos cerrados o manipuladores paralelos, debe modificarse y en consecuencia la eficiencia computacional resultante se degrada. El método desarrollado utiliza un esquema recursivo directo para calcular velocidades y aceleraciones, la ecuación de Newton-Euler para calcular las fuerzas de inercia y los momentos, y el principio de los trabajos virtuales para formular las ecuaciones dinámicas de movimiento. Para manipuladores paralelos o manipuladores en serie con bucles cinemáticos cerrados, este método es más eficiente que los métodos existentes.

2.6.3 Modelado de mecanismos Compliant o Mecanismos Flexibles

Hoy en día, muchos mecanismos están diseñados para alcanzar alguna movilidad por deformación elástica en uno o más de sus elementos, es decir, obtener al menos parte de su movilidad de la deflexión de los miembros flexibles en lugar de solo las articulaciones móviles. Según cómo se distribuye la flexibilidad en el sistema, un mecanismo que cumpla con los requisitos descritos anteriormente, puede ser clasificado en dos categorías principales: mecanismos con flexibilidad concentrada y mecanismos con flexibilidad distribuida.

- **Mecanismos con flexibilidad concentrada**

En sistemas con flexibilidad concentrada, las juntas cinemáticas se reemplazan con juntas flexibles y, por lo tanto, se comportan como mecanismos rígidos clásicos, ver Figura 50. Los métodos existentes concebidos para diseñar mecanismos de cuerpos rígidos se pueden modificar y aplicar con éxito en este enfoque cinemático.

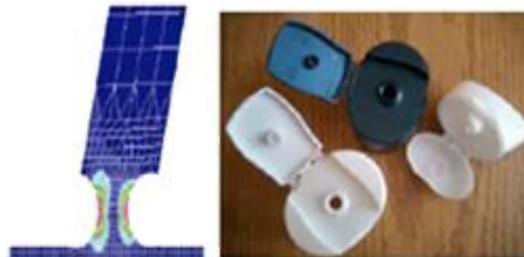


Figura 50. Mecanismo con flexibilidad concentrada. El estrés se concentra e intensifica en un área pequeña [123]

Los métodos de síntesis para mecanismos con flexibilidad concentrada tienen su origen en los trabajos de Ashok Midha a mediados de la década de 1980. Her y Midha [124] introdujeron el concepto del enlace flexible (l_c) para definir el grado de deformabilidad de un mecanismo, como la suma de los grados de libertad atribuidos a los grados de libertad del cuerpo rígido y los grados de libertad elásticos. Esto proporcionó la base para desarrollar una herramienta sistemática pero también directa e intuitiva para clasificar y diseñar mecanismos con flexibilidad concentrada [125]. Howell [126] formuló las ecuaciones de bucle cerrado para mecanismos compliant con juntas a flexión, en los que los enlaces elásticos se modelaban como vigas en voladizo con un pivote de flexión de pequeña longitud ubicado en la fijación, con el fin de garantizar la rotación de la articulación (la articulación gira alrededor de un punto fijo llamado pivote característico). Se utilizaron integrales elípticas para calcular la flexión del mecanismo. Esta aproximación fue la base de una de las técnicas más populares para analizar

la deformabilidad de los mecanismos con flexibilidad concentrada: el Modelo Pseudo Sólido-Rígido (MPSR) [127], [128]. Debido a la importancia de este método para el análisis de los mecanismos compliant, éste será desarrollado en el apartado 2.6.5 Pseudo Solido-Rígido.

Murphy et al. [129] desarrollaron un método de síntesis basado en la teoría de grafos para diseñar mecanismos compliant. La teoría de grafos se utilizó desde la década de 1960 para la representación abstracta de estructuras cinemáticas, con el objetivo de desarrollar un método sistemático y automatizado para diseñar mecanismos de sólido rígido. Freudenstein y Dobrjanskyj [130] desarrollaron una representación matemática de cadenas cinemáticas rígidas básicas, en las cuales los enlaces estaban representados por vértices y las uniones estaban representadas por aristas. Este procedimiento se basa en la separación de la estructura del mecanismo de su función, ya que todas las cadenas cinemáticas en la que se emplea la teoría de grafos, resultan de consideraciones puramente topológicas. Una ventaja de la representación gráfica es que las cadenas cinemáticas pueden representarse en forma de matriz, pero quizás la principal ventaja es que la mayoría de los pasos necesarios para sintetizar un mecanismo pueden automatizarse, lo que condujo a la creación de un enfoque verdaderamente sistemático para la síntesis de mecanismos.

Con el propósito de extender esta metodología a los mecanismos compliant, Murphy agregó información sobre la naturaleza de la deformación del enlace, a los datos tradicionales de la conectividad del enlace. La posible deformación en un enlace elástico se podía especificar determinando el contenido de deformabilidad del enlace (I_c) de Her y Midha mencionado anteriormente. La combinación del concepto de contenido de deformabilidad de enlace con la representación matricial de conectividad de enlace, dio como resultado la creación de un nuevo método para representar la estructura de mecanismos compliant, donde se podían generar varias topologías diferentes a partir de un mecanismo de inicialización, utilizando enumeración sistemática y atlas de mecanismos. Aquí se definía atlas como espacio de diseño topológico constituido solo por topologías conectadas de formas no isomórficas [131][132]. En su tesis doctoral, Pucheta [133] combinó la teoría de grafos y el Modelo Pseudo Sólido-Rígido para desarrollar una herramienta de síntesis para concebir mecanismos planos rígidos y/o parcialmente flexibles, en los que la teoría de grafos se utiliza para generar diferentes topologías y el Modelo Pseudo Sólido-Rígido para analizar cada uno de ellas. La Figura 51 representa el diseño de un actuador biestable para un mecanismo de tren de aterrizaje llevado a cabo por Pucheta y Cardona [132], utilizando la teoría de grafos y el Modelo Pseudo Sólido-Rígido. El tren de aterrizaje se muestra arriba a la izquierda y su cadena cinemática arriba a la derecha. La representación gráfica de la solución propuesta se muestra abajo a la izquierda y la cadena cinemática de esta solución abajo a la derecha.

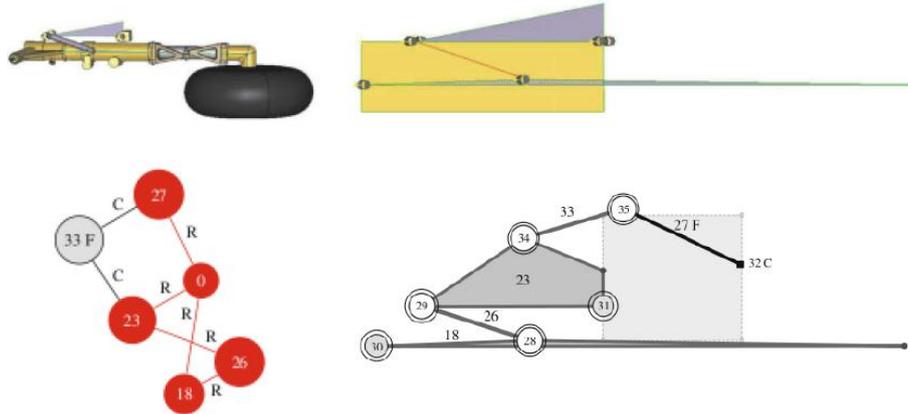


Figura 51. Diseño de un actuador biestable para un mecanismo de tren de aterrizaje. Pucheta y Cardona [132]

- **Mecanismos con flexibilidad distribuida**

Las metodologías para diseñar mecanismos con flexibilidad distribuida (Figura 52) aparecieron a mediados de la década de 1990, partiendo del trabajo realizado en el enfoque cinemático. En este caso, las tensiones se distribuyen uniformemente para reducir las concentraciones de estrés, y el mecanismo es tratado como una estructura flexible continua. Por lo tanto, son utilizados métodos de diseño de Mecanismos Continuos en lugar de la cinemática de cuerpo de sólido rígido. Al dejar la distribución del material prácticamente libre, las técnicas de optimización topológica poseen la capacidad de ser independientes de las elecciones de diseño anteriores. Sin embargo, los resultados obtenidos a través de esta optimización, a menudo necesitan una interpretación y modificación adicionales que impliquen el juicio del diseñador, por lo que aún están lejos de ser totalmente sistemáticos.

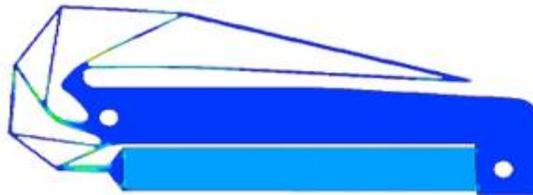


Figura 52. Mecanismo con flexibilidad distribuida. El estrés se distribuye a lo largo de la estructura y permanece en niveles bajos [123]

El problema típico de la optimización estructural es encontrar la "mejor" estructura que es, al mismo tiempo, de un peso mínimo y de una resistencia máxima. La definición de "mejor" depende de muchas consideraciones: el modelo mecánico utilizado (lineal, no lineal, plasticidad, etc.), las restricciones sobre las formas admisibles y el criterio de rigidez, entre otros [134]. La mayoría de los algoritmos de optimización clásicos resuelven el mismo problema matemático: minimizar una función objetivo $f(x)$ (si minimizar $f(x)$ mejora el diseño), bajo un conjunto de restricciones $c(x)$, variando el valor de uno o más diseños variables x_j entre los límites especificados [135]

La optimización estructural en el diseño de mecanismos se utiliza en tres niveles principales: optimización topológica, de forma y de tamaño. En la optimización topológica, las variables de diseño describen la conexión entre varias partes de los mecanismos (entradas y salidas,

regiones fijas, agujeros, etc.). La optimización de forma se refiere a la morfología que los segmentos individuales de los mecanismos deben adquirir, una vez que se ha establecido una topología [136],[134]. En el nivel más bajo, una vez que se define la topología y la forma del mecanismo, el último paso es la optimización del tamaño, donde las variables de diseño son las dimensiones de la sección transversal, tales como la longitud de vigas o segmentos, el grosor de la estructura, etc.

En la optimización topológica clásica del material, se va iterativamente reduciendo la densidad de un elemento o eliminando completamente el elemento. El trabajo de Kikuchi y Bendsøe [137] fue pionero en la generación de topologías óptimas de mecanismos por medio del método de homogeneización. Bendsøe [138] y Rozvany [139] fueron los primeros en aplicar un enfoque de densidad variable para aproximar el problema de material vacío, donde una variable de densidad se asocia con cada elemento finito. El desarrollo posterior del problema de material vacío condujo a la creación del método de parametrización de densidad de material continuo, en el que se define una función de densidad de material determinada por dos límites, y el algoritmo varía la densidad del material en cada punto del dominio. Cuando esta función alcanza el límite inferior implica que el elemento está hecho de material muy blando, y se elimina de la estructura. Si la función alcanza el límite superior, entonces el elemento se convierte en la parte sólida del mecanismo óptimo. El principal inconveniente de este método surge cuando el valor óptimo de la función de densidad se encuentra entre los límites. Esta es una característica no deseada, no solo porque el proceso de fabricación que involucra materiales de densidad variable es costoso, sino también porque el mecanismo presenta enlaces formados por materiales blandos y rígidos, que son una fuente de inestabilidad numérica. Para superar este inconveniente, se han desarrollado algoritmos para conseguir que las variables de diseño alcancen cualquiera de los límites.

Enfoques alternativos en optimización estructural partieron del uso del método de homogeneización. Frecker et al. [140] desarrollaron un método que transforma las topologías de un mecanismo de enlace rígido en mecanismos equivalentes, utilizando datos derivados de la síntesis cinemática para guiar el método de homogeneización, y un dominio inicial de los elementos-barra. La topología inicial consiste en una red de elementos-barra (llamada estructura de suelo), la cual se reduce a la topología final a través de la minimización de la energía de tensión mutua. Hetrick [141] desarrolló una formulación energética unificada, en la que la topología y la síntesis dimensional se realizaban a través de la optimización de la eficiencia energética. La parametrización de la estructura de suelo es un enfoque de síntesis discreto, en el que la síntesis topológica se resuelve por primera vez utilizando algoritmos discretos. Algunos elementos se eliminan de la estructura de suelo, y los elementos restantes definirán la topología y la forma del mecanismo. La Figura 53 representa una comparación entre la parametrización continua de la densidad del material y la parametrización de la estructura de suelo realizada por Lu y Kota [142].

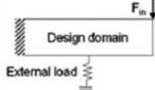
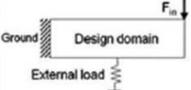
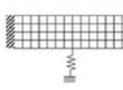
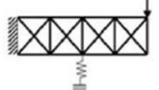
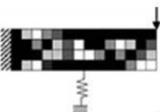
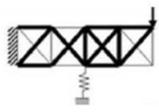
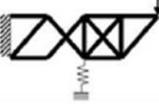
PROCEDIMIENTO DE SÍNTESIS	Homogenización	Estructura Suelo
Paso 1: Especificación del problema <ul style="list-style-type: none"> Definir el dominio del diseño Aplicar las condiciones de contorno 		
Paso 2: Parametrización del dominio del diseño <ul style="list-style-type: none"> Discretizar el dominio del diseño Definir las variables de diseño 		
Paso 3: Optimización topológica <ul style="list-style-type: none"> Definir la función objetivo Elegir e implementar el método de optimización 		
Paso 4: Interpretación del diseño final <ul style="list-style-type: none"> Desechar los elementos con valores por debajo de ciertos límites Interpretar la topología final 		

Figura 53. Comparativa entre la parametrización continua de la densidad del material y la de la estructura de suelo

Wang et al. [143], [144], [145] presentó una metodología basada en el conjunto de niveles (LSM) para calcular la topología de los mecanismos compliant con múltiples materiales. Siguiendo la definición clásica del conjunto de niveles, donde una curva cerrada está representada por una función auxiliar, que toma valores positivos dentro de la curva, valores negativos fuera de la curva y un valor nulo en el límite, el método de Wang ampliaba la definición del conjunto de niveles al diseño de mecanismos monolíticos hechos con múltiples materiales, como un proceso de optimización topológica capaz de realizar cambios de la geometría fusionando o dividiendo partes. La función objetivo del esquema de optimización era la ventaja mecánica (la relación de fuerzas) o la ventaja geométrica (la relación de desplazamientos) del mecanismo [146].

Ansola et al. [147] propuso un método de adición de elementos para sintetizar mecanismos compliant 3D, basados en la optimización estructural evolutiva bidireccional (BEVO) que permite agregar a la estructura material eficiente al mismo tiempo que se elimina el ineficaz. Al comienzo de la optimización, el dominio de diseño está vacío y el material se agrega gradualmente hasta que se cumpla la restricción de cantidad de volumen. La función objetivo (maximizar) es la ventaja mecánica, y los elementos se agregarán al modelo de elementos finitos, incrementando la función objetivo. Un ejemplo de optimización topológica de mecanismos 3D calculados con BEVO, y el modelo completo resultante construido mediante los resultados del análisis de elementos finitos, se muestran en la Figura 54.

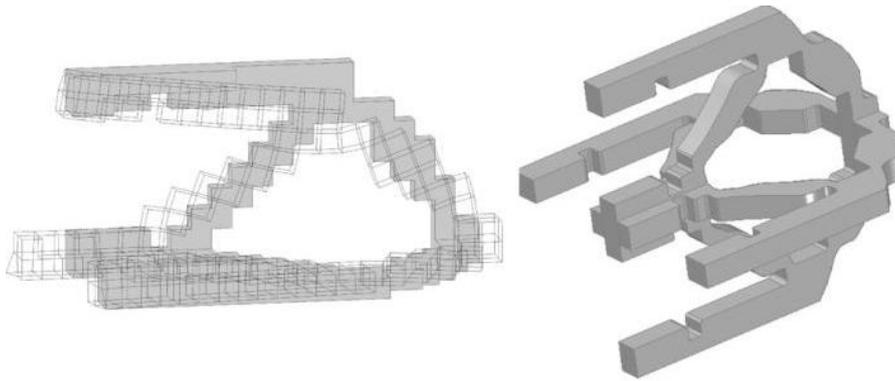


Figura 54. Topología optimizada de un mecanismo 3D calculado con BEVO (izquierda) y el modelo completo resultante (derecha) [147]

Otras técnicas de optimización fueron introducidas por Lu y Kota [148][149], en las que se utilizaba una formulación objetivo y unos algoritmos genéticos para diseñar mecanismos compliant con unas características morfológicas determinadas. Aunque la optimización estructural ofrecía un método para obtener un diseño inicial a partir de las especificaciones del problema, su éxito dependía de las formulaciones objetivo y los algoritmos de optimización adecuados, y lo más importante, no implicaba ningún conocimiento físico de cómo y por qué se combinaban los elementos de un mecanismo.

2.6.4 Análisis Estructural

Una parte fundamental de todo el trabajo de diseño estructural es la necesidad de entender y evaluar el comportamiento físico de la estructura al resistir las cargas que debe soportar. Generalmente, debe hacerse cierto trabajo matemático para apoyar este análisis. En este capítulo se presentan algunos de los fundamentos de la mecánica aplicada que se utilizan en esta metodología para el diseño de manipuladores.

2.6.4.1 Introducción

Como preludeo al estudio de la resistencia y el comportamiento de una estructura sometida a una carga, es necesario definir claramente algunos conceptos necesarios para una mejor comprensión de lo que aquí se presenta.

- **Fuerzas y cargas**

En mecánica, una fuerza se define como aquello que tiende a modificar el estado de reposo o movimiento de un cuerpo. Se considera como empujar un cuerpo en un punto definido y en una dirección definida. Una fuerza así tiende a impartir movimiento a un cuerpo en reposo, pero esta tendencia puede ser neutralizada por la acción de otra fuerza o fuerzas.

Una carga es la magnitud de una presión o tensión debida a la colocación de un cuerpo sobre otro. Los dos tipos más comunes en problemas de ingeniería, son las cargas concentradas y cargas uniformemente distribuidas. Una carga uniformemente distribuida es una carga que tiene una magnitud uniforme por unidad de longitud y que se ejerce sobre una parte de un elemento o sobre su longitud total. Por contra, una carga concentrada es aquella que se aplica sobre una porción tan pequeña de la longitud de un elemento, que se supone que actúa en un único punto.

- **Esfuerzo directo**

Un esfuerzo en un cuerpo es una resistencia interna a una fuerza externa. Cuando la fuerza externa actúa a lo largo del eje del cuerpo, se le conoce como fuerza axial o carga axial. En la Figura 55, el elemento B soporta una carga axial causada por la fuerza P.

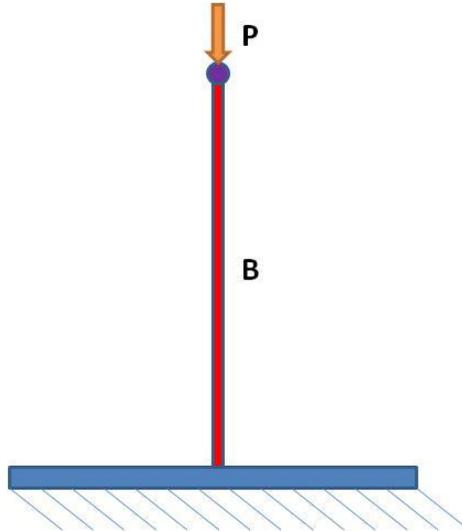


Figura 55. Ejemplo de esfuerzo directo

La carga ejerce una fuerza de compresión sobre el elemento, con tendencia a acortarlo; esta tendencia la resiste el esfuerzo de compresión generado en el elemento. Se conoce como esfuerzo directo al esfuerzo producido en el elemento bajo esta condición de carga axial. Una característica del esfuerzo directo es que se supone que la resistencia interna está uniformemente distribuida sobre el área transversal del cuerpo sujeto a esfuerzo. A este esfuerzo por unidad de área se le conoce como esfuerzo unitario. Si se denomina P a la carga o fuerza externa, A al área de la sección transversal y f al esfuerzo unitario, esta relación fundamental que gobierna al esfuerzo directo se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$f = \frac{P}{A} \quad (20)$$

- **Tipos de esfuerzos**

Los tres tipos básicos de esfuerzos que son de interés principal son los de compresión, tensión y cortante. El esfuerzo de compresión es el que se produce cuando una fuerza tiende a comprimir o aplastar un cuerpo. Un esfuerzo de tensión es el esfuerzo que se produce cuando una fuerza tiende a estirar o alargar un miembro. Se produce un esfuerzo cortante cuando dos fuerzas iguales, paralelas y de sentido contrario tienden a hacer resbalar, una sobre otra, las superficies contiguas de un miembro.

- **Deformación**

Siempre que un cuerpo está sometido a una fuerza, hay un cambio en su tamaño o forma; a este cambio se le llama deformación. Sin importar la magnitud f de la fuerza, siempre tiene lugar una deformación, aunque a menudo es tan pequeña que su medición es difícil, aun con los instrumentos más sensibles. Cuando las fuerzas axiales son de compresión y de tensión, las

deformaciones son acortamientos y alargamientos, respectivamente. Cuando una fuerza actúa sobre un miembro flexionándolo, la deformación se llama flecha. En la siguiente figura puede verse un ejemplo de los desplazamientos y deformaciones producidos en una estructura al aplicar unos esfuerzos sobre ella.

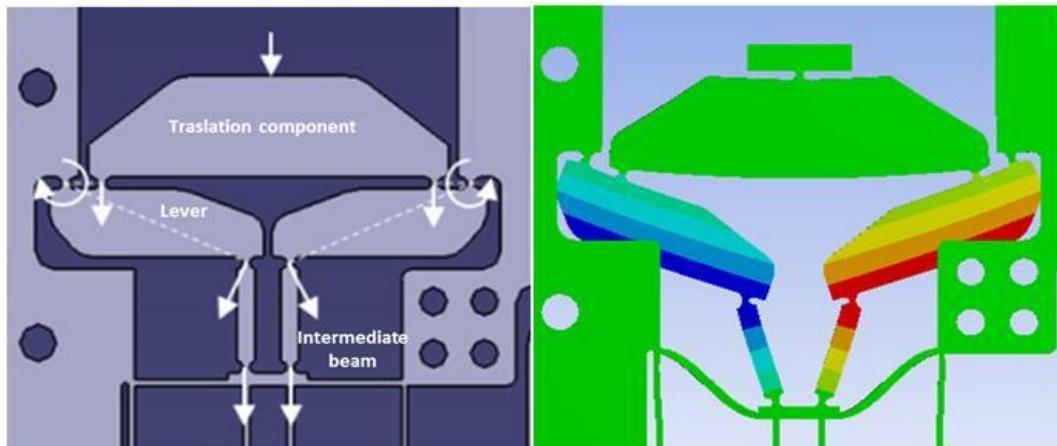


Figura 56. Desplazamientos y deformaciones sobre un mecanismo XY [150]

- **Límite elástico**

El estudio que aquí se desarrolla se basa en la teoría elástica, que establece que las deformaciones son directamente proporcionales a los esfuerzos. En otras palabras, si una fuerza aplicada produce una cierta deformación, el doble de esta fuerza producirá el doble de la cantidad de deformación. Esta relación entre esfuerzo y deformación se mantiene solo hasta cierto límite, después del cual la deformación comienza a aumentar en un grado mayor que los incrementos de la carga aplicada. El esfuerzo unitario para el cual esto ocurre se conoce como límite elástico o límite de proporcionalidad del material.

Elasticidad es la propiedad de un material que le permite recuperar su tamaño y forma originales cuando se suprime la carga bajo la cual estaba sometido. Sin embargo, esto ocurre solamente cuando el esfuerzo unitario no excede el límite elástico. Más allá del límite elástico se produce una deformación permanente en el miembro. Los esfuerzos unitarios admisibles que se usan en el diseño de miembros estructurales, se establecen de modo que no se sobrepase el límite elástico o proporcional del material sometido a cargas de servicio.

El esfuerzo de ruptura de un material se define como el esfuerzo unitario que se presenta en la ruptura o justo antes de esta. Algunos materiales estructurales poseen considerable resistencia de reserva entre el límite elástico y el esfuerzo de ruptura, pero esta resistencia "inelástica" no se considera directamente en la teoría elástica del diseño estructural.

- **Módulo de elasticidad**

El módulo de elasticidad de un material es la medida de su rigidez. Una probeta de acero sufre cierta deformación cuando se le somete a una carga dada, pero una muestra de madera de las mismas dimensiones, sometida a la misma carga, probablemente se deforme 15 a 20 veces más. Se dice que el acero es más rígido que la madera. Se llama módulo de elasticidad del material, a la relación entre el esfuerzo unitario y la deformación unitaria, siempre que el

esfuerzo unitario no exceda el límite elástico del material. Se denota mediante el símbolo E y se expresa en $\text{Kg/s}^2\text{m}$. o Pa.

2.6.4.2 Definición y objetivos para el Análisis Estructural

El Análisis Estructural, es una ciencia que se encarga de la elaboración de métodos de cálculo, para determinar la resistencia, rigidez, estabilidad, durabilidad y seguridad de las estructuras, obteniéndose los valores necesarios para un diseño económico y seguro [151].

Como ciencia, el análisis estructural inició su desarrollo en la primera mitad del siglo XIX, con la activa construcción de puentes, vías ferroviarias, presas y naves industriales. La inexistencia de métodos de cálculo de tal tipo de estructuras, no permitió proyectar estructuras ligeras, económicas y seguras.

En el Análisis Estructural se resuelven estructuras en el plano y en el espacio. Los problemas planos se resuelven en dos dimensiones y los espaciales en tres dimensiones. Generalmente, para el cálculo de estructuras espaciales se tiende a dividir en elementos planos, debido a que su cálculo es mucho más sencillo, pero no en todos los casos es posible dicha metodología. Esto se debe a que la mayoría de los métodos principales y teoremas están enunciados y modelados para estructuras en el plano. En cambio, para el cálculo de estructuras espaciales, será necesario analizar grandes fórmulas y ecuaciones, lo que dificulta su metodología. Señalar que en la actualidad, con el uso de la informática, esto es más sencillo, siendo muy importante la interpretación de los resultados.

Asimismo, el Análisis Estructural se divide en problemas lineales y no-lineales, distinguiéndose la no-linealidad geométrica y la no-linealidad física. La no-linealidad geométrica surge cuando existen grandes desplazamientos y deformaciones de los elementos. La no-linealidad física se produce cuando no existe una dependencia proporcional entre los esfuerzos y deformaciones, esto es, cuando se utilizan materiales inelásticos. Cuando los esfuerzos son pequeños, la dependencia no-lineal física se puede reemplazar por una lineal.

También se distinguen los problemas estáticos y dinámicos. En estos últimos, se consideran las propiedades inerciales de las estructuras, expresados a través de derivadas respecto al tiempo. A estos, también, se pueden agregar los problemas relacionados con la viscosidad del material, el escurrimiento o flujo plástico y la resistencia durante el tiempo. De esta manera, existe el Análisis Estructural de sistemas fijos y móviles, que se estudian bajo los alineamientos de la Estabilidad Estructural, Dinámica Estructural y Teoría de Escurrimiento.

2.6.4.3 Métodos resolutivos para los Análisis Estructurales de Manipuladores

En la bibliografía actual, se recogen diferentes métodos para la obtención de modelos de rigidez que permitan resolver el análisis estructural de un manipulador: Métodos basados en el cálculo de la matriz Jacobiana, Métodos basados en el cálculo estructural matricial, Métodos basados en Método de los Elementos Finitos y Métodos experimentales [38]. El objetivo del primer procedimiento es la definición de un modelo analítico de rigidez basado en la obtención de la matriz de rigidez en función de la matriz Jacobiana. A su vez, este método permite considerar diferentes modos de trabajo de las barras y variantes como la elasticidad de los actuadores y de los elementos que forman las barras. En segundo lugar están los métodos que obtienen la matriz de rigidez del manipulador mediante el cálculo estructural matricial. En esta

técnica la definición del comportamiento estático del modelo se obtiene mediante la especificación de la matriz de cada elemento. Se deberá considerar, por tanto, el modo de trabajo de cada elemento en función de los esfuerzos que transmita, para definirlo mediante el modelo adecuado y con los grados de libertad correspondientes en los extremos. Este método es poco general ya que para cada manipulador requiere un análisis específico del comportamiento de sus elementos. En tercer lugar está el análisis mediante el método de los elementos finitos. Esta técnica es bastante precisa en cuanto a la fidelidad con la que define el comportamiento estructural. Además, si partimos de una geometría CAD, la tarea de definición del modelo puede simplificarse notablemente. Sin embargo, la principal desventaja de este método reside en la necesidad de definir una malla nueva en cada uno de los puntos en el espacio de trabajo. Por último, se presentan los métodos experimentales cuya principal limitación reside en la necesidad de un prototipo experimental sobre el que llevar a cabo los ensayos experimentales. En este enfoque se debe tener en cuenta la complejidad que pudiera implicar el montaje de la instrumentación, así como la realización de un número elevado de medidas dentro del espacio de trabajo.

Por su parte, el comportamiento dinámico estructural tiene un efecto determinante en el buen funcionamiento del manipulador. Será necesario analizar la evolución de las frecuencias naturales y los modos propios de deformación asociados. Se debe tener en cuenta que el comportamiento dinámico se ve afectado, a su vez, por las variaciones de la rigidez del manipulador dentro del espacio de trabajo. Se desea evitar, por tanto, que el manipulador trabaje en zonas en las que la fuente de excitación dinámica excite modos propios del manipulador. En general, se buscarán zonas en las que la frecuencia de excitación esté alejada de las frecuencias propias del manipulador, o bien en los que se den modos locales que no impidan la correcta ejecución de la tarea. El análisis del comportamiento dinámico estructural también se puede realizar mediante distintos enfoques y según el enfoque considerado, se suele emplear un modelo dinámico específico. Así, se pueden citar algunos como: modelos analíticos de parámetros concentrados basados en los Teoremas Fundamentales de la Dinámica, modelos basados en la Teoría de los Elementos Finitos y, en algunos casos, prototipos experimentales sobre los que llevar a cabo campañas experimentales.

2.6.4.4 Método de los Elementos Finitos - MEF

La modelización del comportamiento de los sistemas físicos del ámbito de la ingeniería suele conducir a ecuaciones en derivadas parciales tanto del tiempo como de la posición. En general, la solución analítica de estos problemas no existe por lo que es necesario el empleo de un método numérico para su resolución. Es aquí donde entran en juego métodos numéricos como el de los Elementos Finitos [38].

El Método de los Elementos Finitos es una herramienta ampliamente extendida en el campo del análisis estructural, tanto estático como dinámico. Este método permite determinar estados tensionales y campos de desplazamientos bajo sollicitaciones estáticas o dinámicas. En el caso de la caracterización dinámica permite obtener las frecuencias propias del sistema analizado así como los modos propios de deformación.

Este método consta de tres partes principales:

- Modelización del sistema

- Condiciones de contorno
- Resolución.

Para poder aplicar esta herramienta a mecanismos es necesario verificar que, para el análisis, el manipulador no tiene grados de libertad de sólido rígido. Para ello, será necesario especificar correctamente las condiciones de contorno estableciendo un elemento fijo y, a partir de éste, establecer las restricciones cinemáticas correspondientes entre los distintos elementos, así como bloquear las entradas correspondientes, para que la movilidad del conjunto sea nula. En muchos de los trabajos que estudian el comportamiento estático estructural y emplean como herramienta de análisis los elementos finitos, la utilizan para la correlación y validación de resultados, bien experimentales o bien los que provienen de modelos matemáticos. Este hecho radica en la principal limitación de este método y que no es otra que el tiempo de cálculo. En el caso del análisis estático estructural de manipuladores de cinemática paralela, el estudio suele consistir en la definición de la rigidez del manipulador a lo largo de su espacio de trabajo. Por tanto, se necesita resolver el problema en un número de posiciones discretas que sean significativas del volumen espacial en el que es capaz de desarrollarse la aplicación del manipulador. En consecuencia, los tiempos de cálculo pueden llegar a ser del orden de semanas para cubrir el espacio de trabajo completo. Además, en manipuladores con más de tres grados de libertad, el análisis del espacio de trabajo puede comprender el cómputo de los puntos en más de una ocasión ya que será necesario fijar algunos parámetros mientras que se varían otros para poder tener el análisis como función de la posición y de la orientación.

2.6.4.5 Breve historia del Método de los Elementos Finitos

Aunque el nombre del MEF se ha establecido recientemente, el concepto se ha usado desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde la antigüedad. El concepto de 'elementos finitos' parte de esa idea.

Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos podríamos remontarnos a la época de la construcción las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. Así el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416.

El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40 Courant [152] propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh-Ritz para aproximar soluciones.

Fueron Turner, Clough, Martin y Topp [153] quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

El trabajo de revisión de Oden [154] presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF. Los libros de Przemieniecki [155] y de Veubeke [156] presentan el MEF en su aplicación al análisis estructural. El libro de Zienkiewicz y Cheung [157] o Zienkiewicz y Taylor [158] presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los EF pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo gran cantidad de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de EF, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación.

Concretamente para este estudio, se ha empleado el software Ansys-Workbench para la resolución por elementos finitos del análisis estructural.

ANSYS fue desarrollado por el Dr. John Swanson y fue adaptado para su uso comercial en 1970 a través de Swanson Analysis Systems, Inc. Esta compañía fue comprada por TA Associates en 1994 y renombrada como ANSYS, Inc.

ANSYS es un software de uso general, utilizado para simular interacciones entre diferentes disciplinas de la física, tales como la estructural, de vibración, dinámica de fluidos, transferencia de calor y electromagnetismo.

Así, ANSYS permite simular los tests y condiciones de trabajo que se producen en la realidad, y permite realizar pruebas en un entorno virtual antes de fabricar prototipos de los productos analizados. Además, son posibles la determinación y mejora de puntos débiles, la determinación de la vida útil y la previsión de posibles problemas mediante estas simulaciones 3D en un entorno virtual.

El software ANSYS presenta una estructura modular, lo cual brinda la oportunidad de tomar sólo las funciones necesarias según el análisis desarrollado. Además puede trabajar integrado con otro software de ingeniería añadiendo módulos de conexión CAD y FEM

Como se ha indicado en el párrafo anterior, ANSYS permite importar datos CAD, pero también permite construir una geometría con sus capacidades de "preprocesamiento" en el módulo de diseño. De manera similar en el mismo preprocesador, se genera un modelo de elementos finitos (malla), en el módulo de mallado, el cual se requiere para el cálculo por elementos

finitos. Después de definir cargas y realizar los análisis pertinentes, los resultados pueden ser vistos como numéricos o gráficos mediante sus capacidades de "postprocesamiento".

ANSYS puede realizar análisis avanzados de ingeniería de forma rápida y segura gracias a su gran variedad de algoritmos de contacto, características de carga basadas en el tiempo y modelos de materiales no lineales.

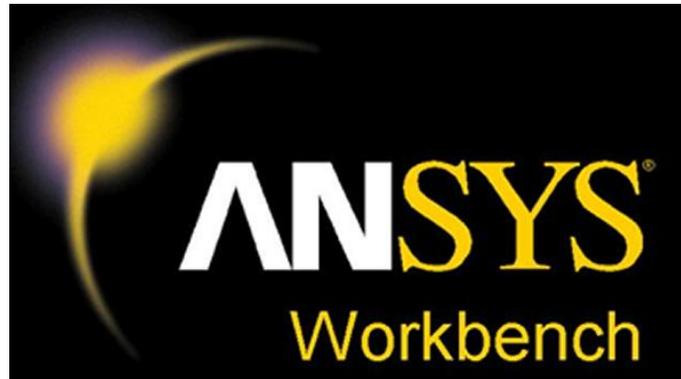


Figura 57. Logo Ansys-Workbench [159]

Concretando en el software empleado, ANSYS Workbench es una plataforma que integra tecnologías de simulación y sistemas paramétricos. El gran potencial de ANSYS Workbench proviene de los algoritmos de resolución que emplea, lo cual permite la verificación y mejora del producto en un entorno virtual.

ANSYS Workbench está compuesto de varias aplicaciones:

- **Mecánica:** para la realización de análisis estructurales y térmicos utilizando el solucionador ANSYS. El mallado también se incluye dentro de la aplicación mecánica.
- **Mecánica APDL:** para realizar análisis mecánicos y multifísicos avanzados utilizando la tradicional interfaz de usuario ANSYS.
- **Flujo de Fluidos (CFX)** para realizar análisis de CFD usando CFX.
- **Flujo de Fluidos (FLUENT)** para realizar análisis de CFD utilizando FLUENT.
- **Geometría (DesignModeler):** para crear y modificar la geometría CAD, preparando el modelo sólido para su uso en la aplicación de mecánica.
- **Datos de ingeniería:** para definir las propiedades del material
- **Aplicación de malla:** para la generación del mallado empleado en los análisis.

2.6.5 Pseudo Sólido-Rígido

En este apartado se va a revisar los trabajos previos realizados acerca de los modelos de Pseudo Sólido-Rígidos, así como una explicación de las principales características que los conforman para una mejor comprensión de los mismos.

2.6.5.1 Modelado Pseudo Sólido-Rígido

En el pasado, para realizar el análisis de la deformación que sufría un elemento tipo viga, cargada en uno de sus extremos, se empleaban las llamadas integrales elípticas, las cuales obtenían una solución de forma cerrada [5]. Sin embargo, este enfoque matemático era difícil de aplicar y proporcionaba una visión poco clara respecto al movimiento o la rigidez de la viga.

Como respuesta a esta carencia en los análisis, han sido desarrollados métodos alternativos para determinar la deformación que sufre un elemento, uno de los cuales es la aproximación paramétrica llamada Modelo Pseudo Sólido-Rígido (MPSR). Este método consiste en reemplazar el movimiento y rigidez que introduce un elemento flexible, por un enlace análogo rígido, que tenga aproximadamente el "mismo movimiento y rigidez para un rango conocido de desplazamientos y con una tolerancia matemática conocida" [160]. En otras palabras, el MPSR "proporciona un método simplificado pero preciso para el análisis de la deformación de cuerpos, además de permitir al diseñador la visualización de la deformación de los mismos" [5]. Resumiendo, dado un mecanismo flexible, su movimiento puede ser descrito tratándolo como un dispositivo equivalente con enlaces rígidos mediante el MPSR, el cual desarrolle los mismos desplazamientos que su mecanismo análogo Compliant [160]. Después de la identificación del elemento flexible por medio del MPSR, sus parámetros cinemáticos y elásticos son optimizados y validados, con el objetivo de que su rango de aplicabilidad y nivel de error sean conocidos y aceptados [160].

2.6.5.2 Cinemática del Modelo Pseudo Sólido-Rígido

El enfoque del MPSR se basa en el hecho de que la deformación de una viga con uno de sus extremos libre sigue una trayectoria casi circular, con un centro de curvatura localizado en un punto de la viga no deformada [5]. Esto permite al MPSR determinar las posiciones relativas de los puntos finales de varios segmentos Compliant, sin precisar el modelado de las localizaciones de los puntos interiores [161]. Además, el MPSR es empleado para calcular la cantidad de fuerza que es requerida para alcanzar la deformación deseada. Un ejemplo de un MPSR para una viga en voladizo con una carga vertical en uno de sus extremos se muestra en la Figura 58. Este modelo fue desarrollado por Howell et al. [5][162] y se muestra aquí para proporcionar el contexto para la investigación actual.

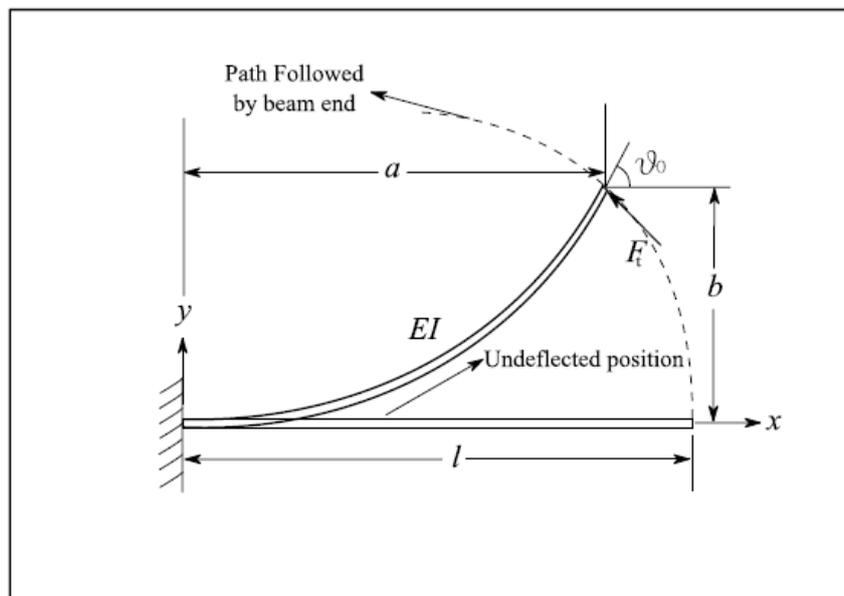


Figura 58. Viga flexible en voladizo con fuerza F_t aplicada en $x=a$ e $y=b$. Extraída de [5]

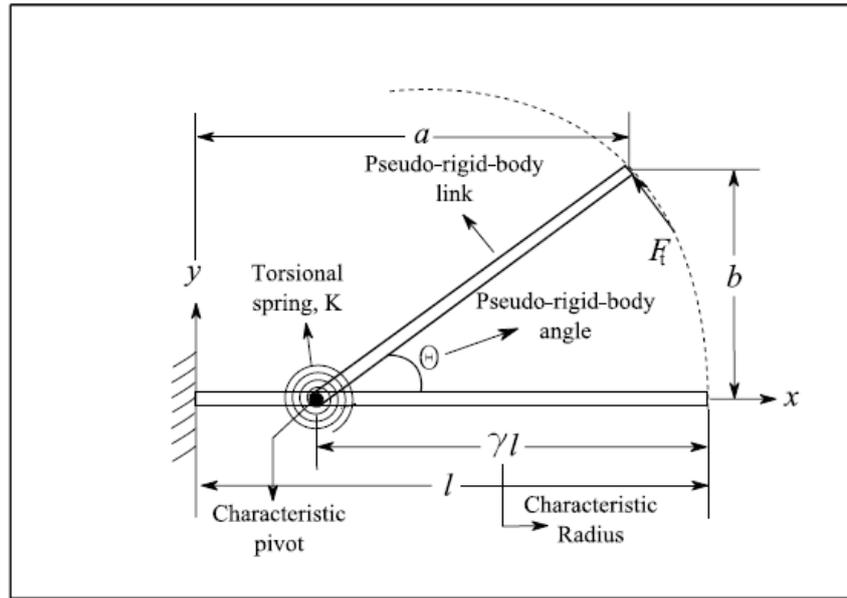


Figura 59. El MPSR de una viga en voladizo flexible. (Ver Figura 58). Extraída de [5]

La Figura 58 muestra una viga en voladizo flexible y la trayectoria que sigue su punto final cuando la viga es deformada por una fuerza aplicada. La Figura 59 muestra el modelo Pseudo Sólido Rígido que aproxima a una trayectoria casi circular la deformación del extremo de la viga. Este MPSR está formado por dos elementos rígidos unidos en un punto a lo largo de la viga llamado pivote característico. La ubicación de este pivote característico se elige de tal modo que la trayectoria del extremo de la viga del modelo rígido coincida, lo más cerca posible, con la trayectoria que sufre el extremo de la viga flexible. La distancia desde el extremo de la viga al pivote característico se denomina radio característico, γl , donde la constante, γ , recibe el nombre de factor de radio característico. El ángulo θ , conocido como ángulo Pseudo Sólido-Rígido, es la rotación que debe soportar el enlace rígido para coincidir con el desplazamiento ocurrido en la viga flexible. El ángulo de inclinación que sufre la viga flexible en el extremo de la misma está dado por θ_0 . Además, las coordenadas horizontal (coordenada x) y vertical (coordenada y) del extremo de la viga deformada están representadas por las variables a y b , respectivamente, que se dan en términos del ángulo MPSR, θ , mediante las ecuaciones (21) y (22). Así, el valor de θ se puede calcular usando la ecuación (23). La relación entre θ y θ_0 viene definida por la expresión (24), donde C_θ representa el coeficiente angular con un valor de 1.24.

$$\frac{a}{l} = 1 - \gamma(1 - \cos \theta) \quad (21)$$

$$\frac{b}{l} = \gamma \sin \theta \quad (22)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a - 1(1 - \gamma)} \right) \quad (23)$$

$$\theta_0 = C_\theta \theta \quad (24)$$

En un estudio monográfico realizado por Howell [162], se encontró el valor del factor de radio característico γ , estableciendo un error de porcentaje máximo aceptable en la ecuación de deformación del 0,5% (5). Entonces, se realizó un proceso de optimización para determinar el valor de γ que permite un valor máximo del ángulo MPSR, θ , sin violar las restricciones máximas de error. Se determinó que el valor óptimo de γ es 0.8517, el cual mantiene un error por debajo del 0.5% en deformaciones angulares inferiores a un $\theta_{\max} = 64.3^\circ$.

$$g(\theta) = \frac{\text{error}}{\varepsilon_\theta} \leq \left(\frac{\text{error}}{\varepsilon_\theta} \right)_{\max} \quad \text{for } 0 < \theta < \theta_{\max} \quad (25)$$

Donde $\frac{\text{error}}{\varepsilon_\theta}$ representa el error de la deformación relativo entre el MPSR y el elemento Compliant, y ε_θ representa el vector diferencia entre la posición del extremos de la viga deformada y este mismo punto de la viga sin presentar deformación alguna.

2.6.5.3 Elasticidad del Modelo Pseudo Sólido-Rígido

Con el objetivo de modelizar la elasticidad del material y su resistencia a la deformación en el MPSR, un muelle a torsión, con una constante torsional K , es colocado en el pivote característico, como se muestra en la Figura 59. Cuando una carga es aplicada al elemento, con un ángulo ϕ , la componente de la fuerza perpendicular a la superficie de la viga y tangente al extremo de la trayectoria es representada por F_t , que es definida por la Ec.(26) [5].

$$F_t = F \sin(\phi - \theta) = \frac{K\theta}{\gamma l} \quad (26)$$

Esta fuerza transversal, F_t , es la responsable de la deformación inicial del cuerpo rígido y crea un momento, T , sobre el pivote característico.

$$T = F_t \gamma l \quad (27)$$

Substituyendo esta Ec.(27) en la Ec.(26) se obtiene el momento necesario para deformar la viga flexible en términos de la constante torsional, K , y el ángulo MPSR, θ .

$$T = K\theta \quad (28)$$

El valor de la constante torsional del muelle, K , puede ser calculada como una función de la geometría de la viga, l/l , las propiedades intrínsecas del material, E , la constante MPSR y y la constante del muelle adimensional, K_θ , definida como coeficiente de rigidez, Ec.(29).

$$K = \gamma K_\theta \frac{EI}{l} \quad (29)$$

K_θ permite calcular de un modo sencillo la fuerza necesaria para deformar el Modelo Pseudo Sólido Rígido. Esta fuerza es aproximadamente igual a la fuerza requerida para deformar el elemento flexible, Ec.(30). Sin embargo, la parte elástica del MPSR produce un $\theta_{\max}(K\theta) < 58.5^\circ$ con el fin de tener una predicción exacta de fuerza [163].

$$F_t = \frac{EIK_\theta\Theta}{l^2} \quad (30)$$

2.6.5.4 Análisis de diferentes configuraciones y elementos mediante el MPSR

Una vez mostradas las principales características del modelo, para un elemento simple como es una viga en voladizo, en este apartado se van a mostrar estudios realizados por diversos autores acerca del Modelo de Pseudo Sólido Rígido aplicado a diferentes elementos.

En [164], Jensen et al. muestran el desarrollo del modelo de sólido rígido que sustituye a los enlaces tipo viga en los mecanismos flexibles. En la Figura 60 se muestra el elemento a reemplazar.

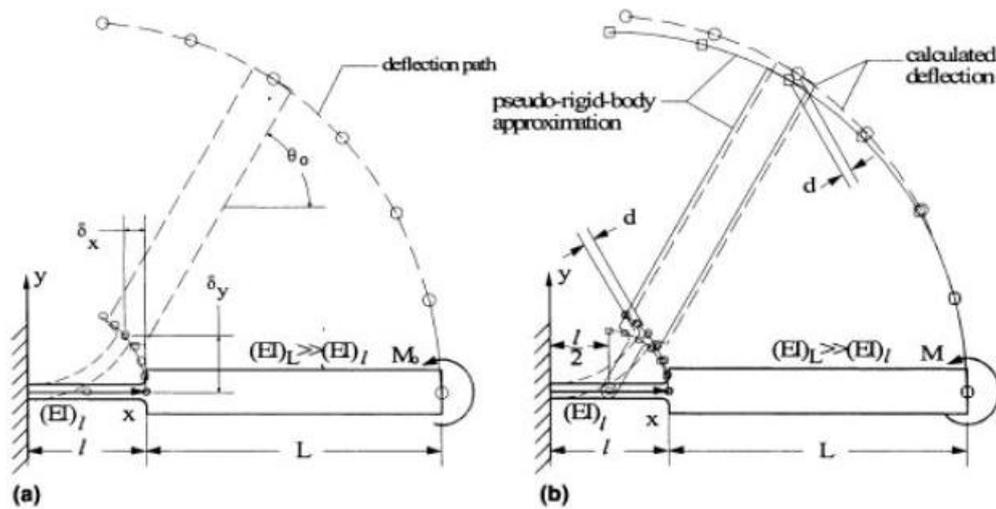


Figura 60. Enlace de viga. a) Movimiento del enlace debido al momento aplicado. b) MPSR para el enlace y error introducido por el modelo respecto al movimiento real. Extraída de [164]

Mediante un amplio estudio, tanto dimensional como de las características intrínsecas del material, se llega a obtener la geometría que sustituye a este enlace, proporcionando las ecuaciones que mejor definen a esta geometría propuesta. En la Figura 61 se muestra la geometría que es alcanzada por Jensen et al.

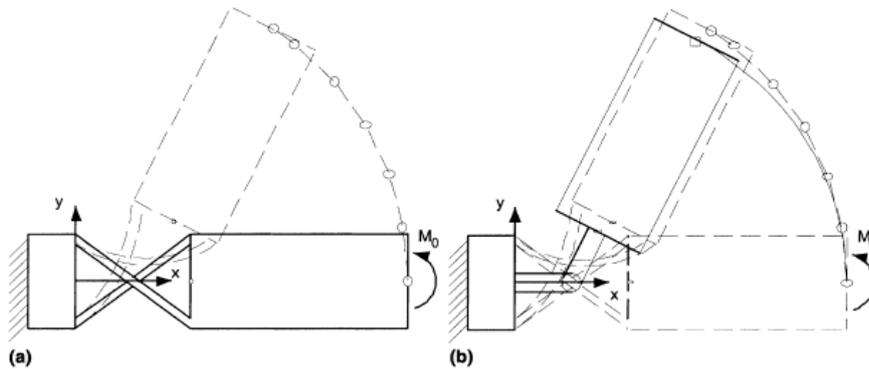


Figura 61. Enlace de viga. a) Trayectoria descrita en la deformación del enlace. b) Comparativa entre las trayectorias desarrolladas en el Modelo. Extraída de [164]

Un estudio similar fue realizado por Pei et al. en el artículo [165], variando la tipología del enlace estudiado, siendo en este caso un enlace tipo bisagra, ver Figura 62.

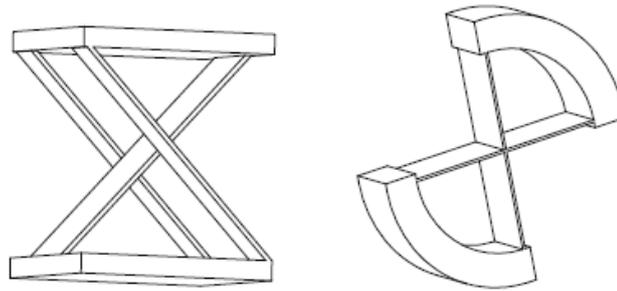


Figura 62. a) Enlace de viga (desarrollado antes). b) Enlace tipo Bisagra. Extraída de [165]

Al igual que para el caso anterior, en este caso se realiza un análisis profundo de la geometría del enlace, señalando la colocación óptima de los pivotes, además de analizar las principales características de la estructura y la validación de la misma. En la Figura 63 se muestra la geometría propuesta.

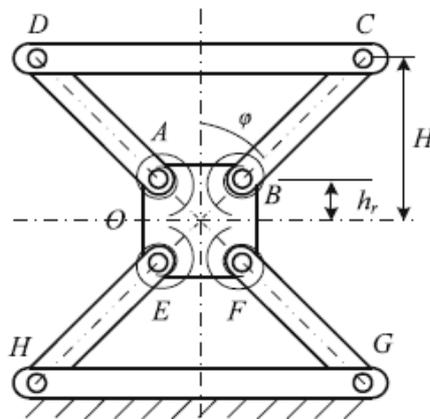


Figura 63. Modelo Pseudo Sólido-Rígido desarrollado para el enlace bisagra. Extraída de [165]

Pero no únicamente se han realizado estudios para sustituir diferentes componentes de una estructura que presenta la característica de flexibilidad, sino que se han realizado estudios de estructuras completas en sí mismas y métodos para realizar los modelados de las mismas.

Así, en [132] se muestra el diseño óptimo para un mecanismo biestable por el método del MPSR, el cual presenta la característica de que puede mantenerse en dos posiciones de equilibrio. Un caso similar es el analizado en el artículo [166], donde Sönmez et al. analizan un mecanismo biestable, pero con la característica añadida de introducir en el análisis la teoría de pandeo para las vigas que conforman la estructura. En [23], Jensen et al. definen las diferentes configuraciones para un mecanismo de cuatro barras, ver Figura 64.

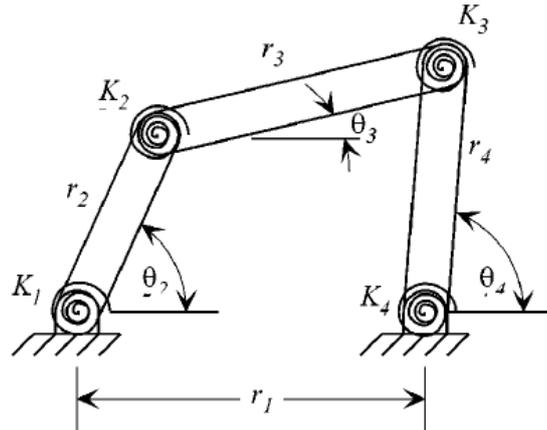


Figura 64. Mecanismo de cuatro barras con muelles de torsión en cada junta. Extraída de [23]

Tras un concienzudo análisis geométrico de esta estructura, se definen las posibles posiciones de cada uno de los muelles torsionales en la estructura, así como las condiciones de rigidez que deben de tener los mismos, para conformar una estructura posible, ver Figura 65.

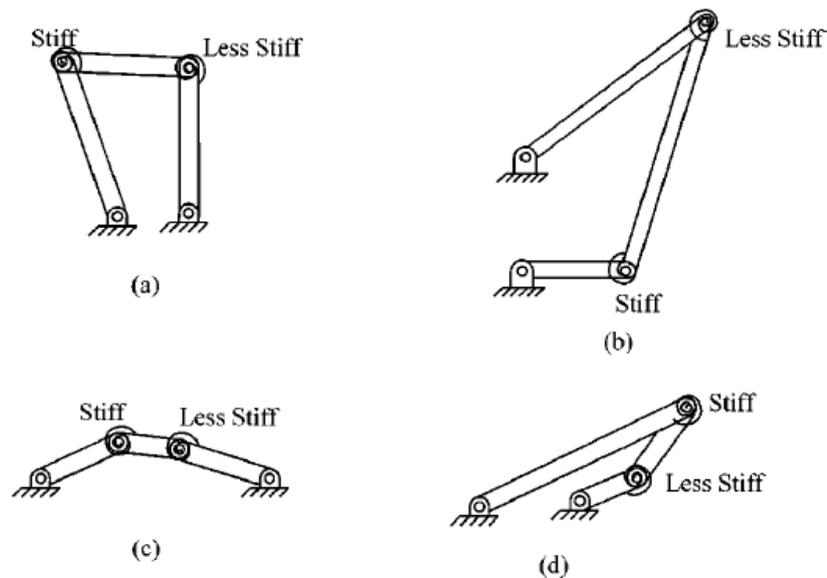


Figura 65. Cuatro configuraciones posibles para un micro-mecanismo. Extraída de [23]

Por último, en [167] Pei et al. definen un metodología para desarrollar en MPSR para una estructura o componente concreto, señalando la ubicación de los pivotes torsionales, así como las características de rigidez que presentan las mismas. Por último, esta metodología es aplicada a un caso concreto, el cual se muestra en la Figura 66.

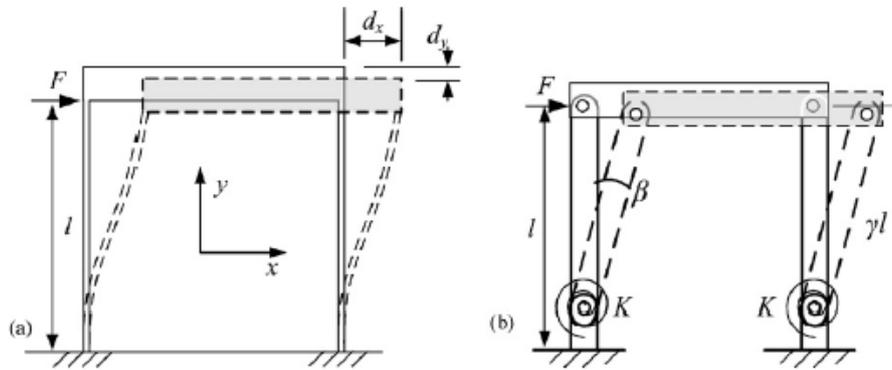


Figura 66. Mecanismo paralelo de torsión y su MPSR desarrollado. Extraída de [167]

Mediante estos puntos, se ha tratado de mostrar una visión acerca de las posibilidades que presenta el Modelado Pseudo Sólido-Rígido, dando una pequeña pincelada sobre sus capacidades y posibilidades, así como mostrando sus principales características, además de señalar algunos ejemplos que pueden encontrarse en la literatura actual.

2.6.6 Posibles desarrollos futuros en el modelado de Mecanismos Compliant

En este punto se va a indicar una predicción en cuanto a los posibles desarrollos futuros para el modelado de los CMs. En el nivel teórico, la síntesis y el modelado dinámico, tomando consideraciones en cuanto a la posición de actuadores [168], la rigidez no lineal (incluida la rigidez negativa) [169], la masa de la articulación y el amortiguamiento del material [170], puede ser la dirección teórica de la próxima generación, en contraposición al enfoque actual en el modelado estático. Además, el desarrollo de una teoría de rigidez-continuamente ajustable aplicada a los CMs, empleada para reconfigurar la característica dinámica, puede ser otro tema interesante.

2.7 Diseño Mecatrónico

2.7.1 Introducción

Un sistema se denomina mecatrónico cuando es capaz de detectar cambios mediante sensores, procesar dicha información y reaccionar a ella mediante actuadores: es lo que le diferencia de una máquina o mecanismo convencional.

La **Mecatrónica** no es más que la fusión o combinación de varias ingenierías y pretende ser la ingeniera de precisión por excelencia combinando 4 disciplinas que son:

- Ingeniería Electrónica
- Ingeniería Mecánica
- Ingeniería Informática
- Ingeniería de Control

Cada una de estas 4 disciplinas comprende diferentes áreas que comparten las demás. El esquema a continuación muestra un resumen de lo que representa la Mecatrónica y de cómo están relacionadas estas ingenierías entre sí:

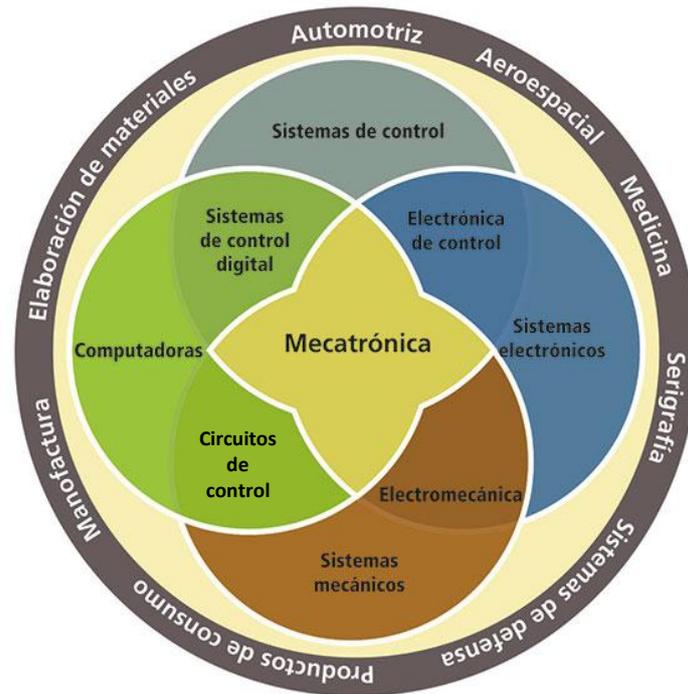


Figura 67. Áreas de la Mecatrónica

El espíritu de la mecatrónica rechaza dividir a la ingeniería en disciplinas separadas. Una definición aproximada sería la utilizada por la comunidad europea: "mecatrónica es la integración sinérgica de la ingeniería mecánica con la electrónica y con el control de computadores inteligentes para el diseño y la manufactura de productos y procesos".

Una definición más amplia de mecatrónica en el diseño de productos y máquinas ha sido adaptada así para estas notas: "mecatrónica es el diseño y manufactura de productos y sistemas que posee una funcionalidad mecánica y un control algorítmico integrado".

La mecatrónica de por sí no apunta a ser precisamente una tecnología y/o ingeniería, es la síntesis de tecnologías, usando no solamente la tecnología mecánica convencional, sino también las tecnologías de ingeniería existentes, tales como [171]:

- Robótica e instrumentos mecatrónicos: modelización y análisis de aparatos
- Sistemas dinámicos y simulación: modelización y análisis de sistemas dinámicos de parámetros concentrados
- Microprocesadores embebidos y sistemas real-time: diseño
- Sensores y actuadores e interconexión: integración de sistemas
- Dinámica avanzada y sistemas de control: dinámica y control de mecanismos
- Diseño de sistemas mecatrónicos: diseño y fabricación de artefactos mecatrónicos

En cuanto a las características que se deben producir en un determinado sistema, para que se le pueda considerar como un sistema mecatrónico, podríamos enumerar a las siguientes como condiciones a cumplir por el mismo:

- **Interacción de funciones** entre partes **mecánicas, electrónicas** y tecnologías de la información
- **Integración espacial** en una unidad física
- **Inteligencia** en cuanto a las funciones que realiza el **control**
- **Flexibilidad:** facilidad para modificarlo y adaptarlo a nuevas funciones y requisitos
- **Multifuncionalidad** de las funciones de los procesadores /microprocesadores
- **Funciones invisible/Caja negra** llevadas a cabo por la electrónica y que pasen desapercibidas al usuario
- **Dependencia** tecnológica de las **tecnologías de fabricación** disponibles

Históricamente, el término Mecatrónica se introdujo por primera vez en Japón en la terminología técnica por la compañía japonesa Yaskawa Elektric Corporation hacia principios de los años 70, entendiéndose como aquellas actividades de diseño y construcción que incluían sistemas y componentes electrónicos a mecanismos o estructuras de mucha precisión.

Los japoneses hicieron entonces patente del término Mecatrónica para proteger sus actividades. Poco después empezó a utilizarse en Estados Unidos y Europa con el fin de unificar las ingenierías que comentamos antes. Hoy en día, la Mecatrónica es un término asociado a la Ingeniería en el que existe un nivel muy alto de combinación de sistemas mecánicos con la electrónica y el control por ordenador.

2.7.2 Modelado mecatrónico

Entendiendo que la Mecatrónica abarca disciplinas muy amplias y complejas, podemos decir que tiene muchos campos de aplicación. De hecho, la Mecatrónica pretende ser esa disciplina o Ingeniería en la que los productos se fabriquen teniendo en cuenta todas las ingenierías y no estando separadas como tradicionalmente. Su punto fuerte es la versatilidad para crear mejores productos, procesos o sistemas.

Su principal objetivo es cubrir ciertas necesidades como:

- Automatizar la maquinaria: así se consigue que sea ágil, productiva y fiable.
- Creación de productos inteligentes: que sobre todo respondan a las necesidades del ser humano.
- Que haya armonía entre componentes mecánicos y electrónicos (hasta ahora la mecánica y la electrónica no manejaban los mismo términos lo que dificultaba los procesos de fabricación o reparación de diferentes equipos).

Las principales industrias con carácter mecatrónico son:

- Empresas de la Industria de la Automatización: empresas que utilizan sistemas o elementos computarizados y electromecánicos para controlar maquinarias y/o procesos industriales.
- Empresas de la Industria de Fabricación Flexible: aquellas que se dedican a fabricar sistemas o componentes eléctricos o electrónicos de forma automática.

Por tanto, la Mecatrónica puede aplicarse a muchos campos, desde la medicina hasta la minería, pasando por la industria farmacéutica, industria mecánica, automovilística, textil, comunicaciones, alimentación, comercio...y un largo etc. La fabricación de productos como Robots, Automóviles, órganos humanos biónicos, naves aeroespaciales, aviones, etc, están basados ya en esta disciplina.

La metodología de diseño mecatrónico está basada en un enfoque concurrente en lugar de un enfoque secuencial, de forma que se coordine el conocimiento y el flujo de información entre grupos de expertos de las siguientes disciplinas: mecánica, control, electrónica, tecnologías de la información [172].

La sinergia producida por la interacción entre disciplinas, se traduce en un producto final de prestaciones avanzadas, mucho mejor que cada una de las partes que lo componen. Para ello, el ingeniero mecatrónico debe poseer un perfil multidisciplinar que le permita comprender el lenguaje de expertos de distintas disciplinas, canalizando la información entre ellos y resolviendo aquellos problemas que impidan una cooperación de carácter transversal. De esta forma, se evitan los malentendidos habituales entre expertos de distintas áreas, así como los problemas de integración que surgen al abordar un proyecto de corte multidisciplinar.

2.7.3 VDI 2206

VDI es la norma de la Asociación de Ingenieros Alemanes, los cuales han propuesto la primera norma acerca del proceso de diseño mecatrónico:

- VDI 2206 Design Methodology for Mechatronic Systems, Beuth-Verlag GmbH, Berlin.

El proceso de diseño propuesto distingue entre aquel proceso de resolución de problemas llevado a cabo por el diseñador individual (micro-nivel), y el proceso genérico relacionado con las fases de diseño y los correspondientes estados del producto (macro-nivel). El micro nivel apoya al diseñador de una manera orientada a la acción, es decir, la alternancia entre las formas sistemáticas y asociativas de proceder, reaccionar en situaciones imprevistas, estructurar subtareas de diseño, etc. El macro nivel ayuda a desarrollar el proceso de diseño total: establecer objetivos, planificar y controlar el progreso del diseño, etc.

2.7.3.1 Micro-nivel

El esquema de resolución de problemas presentado en el micro nivel, ver Figura 68, proviene de la ingeniería de sistemas. El modelo de resolución de problemas en este nivel comprende los siguientes pasos [173]:

- **Análisis de la situación y / o aceptación del objetivo:** Un ciclo básico comienza con el análisis de la situación o con la selección del objetivo: un objetivo preestablecido externamente puede ser asumido por el grupo y / o por el individuo.

- **Análisis y síntesis:** El objetivo es buscar soluciones para el problema dado y elaborar diversas alternativas de solución. Este proceso representa en la práctica una interacción permanente de las etapas de síntesis y análisis que llevan a cabo los ingenieros de diseño. Durante la búsqueda de soluciones, se pueden reconocer aspectos adicionales del problema que pueden requerir un retorno al análisis de la situación y la formulación de objetivos o la consideración de criterios suplementarios.
- **Análisis y evaluación:** Las alternativas propuestas para la solución están sujetas a una fase de evaluación detallada. La evaluación de las variantes de la solución se realiza sobre la base de los criterios de evaluación definidos en la formulación objetivo y en la búsqueda de soluciones. El resultado consiste en una propuesta para una o varias alternativas de solución.
- **Decisión:** Debe averiguarse si la etapa anterior ha conducido a la resolución del problema, proporcionando un resultado satisfactorio. Si ese no es el caso, hay que volver al análisis de la situación y la formulación de la meta.

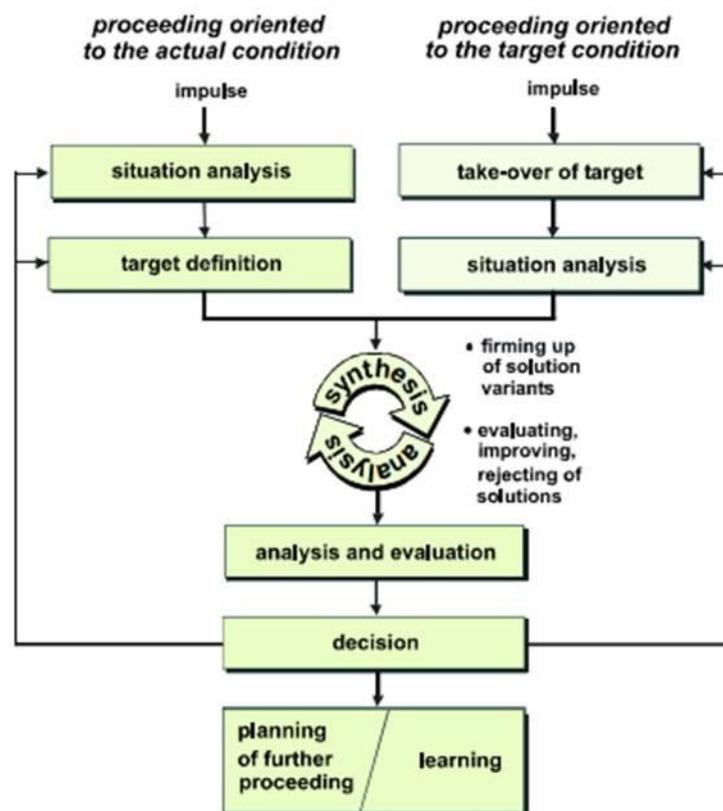


Figura 68. Ciclo de resolución de problemas en el nivel micro. Extraído de [173]

2.7.3.2 Macro-nivel

Proponen un **modelo en V** para describir la secuencia de tareas en los sucesivos ciclos de diseño de un sistema mecatrónico, tal y como se observa en la Figura 69. Hay tres razones por las que parece ser adecuado para la mecatrónica:

1. El modelo en forma de V ilustra de una manera clara el enfoque de arriba hacia abajo (diseño del sistema mediante la división en sub-funciones) y el enfoque de abajo hacia arriba (integración de los resultados en el sistema general).

2. Permite señalar la necesidad de una verificación/validación permanente entre los requisitos/funciones especificadas (lado izquierdo) y el sistema real (lado derecho).
3. Ya es utilizado por la industria en el contexto de la mecatrónica que aumenta la aceptación de la directriz propuesta en el proceso desarrollado.

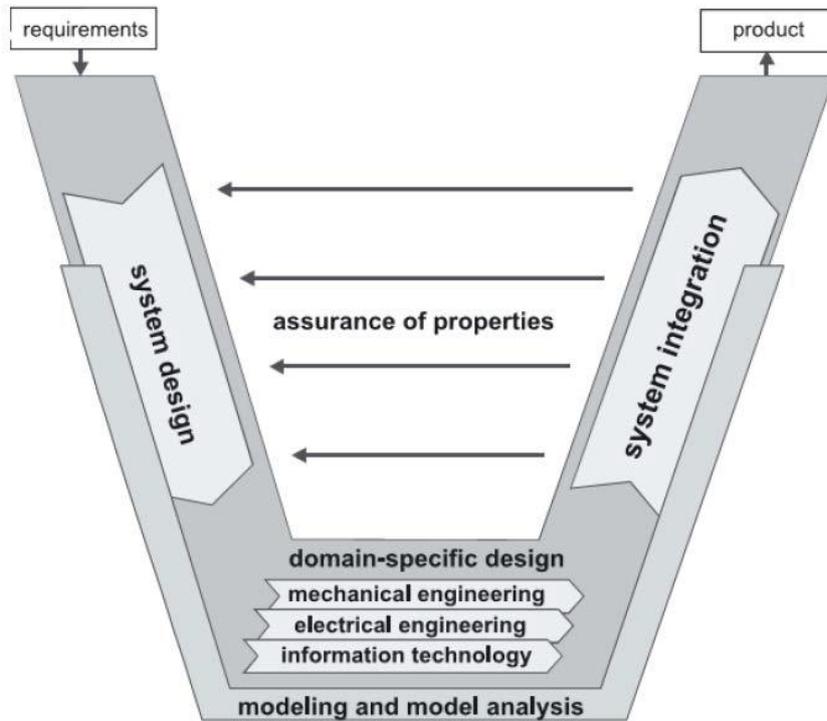


Figura 69. Modelo en forma de V en el nivel macro. Extraído de [173]

Las principales tareas que se desarrollan en este modelo en forma de V en el nivel macro son [172]:

1. Definición de requisitos:

- Se deben enumerar todos los requisitos o especificaciones que debe cumplir el producto a diseñar.

2. Diseño preliminar del sistema:

- La función principal del producto debe descomponerse en varias sub-funciones que permitan conseguirla
- Deben evaluarse posibles soluciones para que el producto cumpla cada una de las sub-funciones
- Se empezarán a plantear los sistemas físicos que serán necesarios y la lógica de operación que deberán cumplir analizando si el desempeño de los mismos permitirá que el producto cumpla los requisitos.

3. Diseño específico de cada disciplina:

- Se debe diseñar con mayor grado de detalle dentro de cada una de las disciplinas involucradas en el diseño del producto.
- Se trata de realizar estimaciones o cálculos avanzados para garantizar el cumplimiento de todas las sub-funciones, especialmente las más críticas o difíciles de conseguir.

4. Integración del sistema:

- Los desarrollos de cada disciplina se integran en un conjunto global, analizando la interacción entre ellos.
- **4.1 Integración de componentes distribuidos:** Componentes como los sensores, actuadores o tarjetas controladoras han de ser conectados entre sí mediante sistemas de comunicación de señales o energía que habrá que definir.
- **4.2 Integración modular:** Todo el sistema estará formado por módulos con unas funcionalidades definidas que será necesario conectar empleando las interfaces correspondientes.
- **4.3 Integración espacial:** Todos los componentes deberán ser montados e integrados dentro de un espacio definido y condicionado por el tamaño del producto final.

5. Comprobación de las propiedades:

- Durante el diseño, debe comprobarse de forma continua la adecuación de todos los progresos realizados a la solución concebida inicialmente y sus requisitos. Las propiedades del sistema desarrollado deben ser las del sistema inicialmente concebido.
- **5.1 Verificación:** Comprobar si un producto que se está desarrollando cumple con las especificaciones o requisitos estipulados. La pregunta es ¿Se está desarrollando el producto de forma correcta?
- **5.2 Validación:** Comprobar si un producto que se está desarrollando sirve para el propósito para el que está concebido. La pregunta es ¿Es éste el producto correcto?

6. Modelado y análisis basado en modelo:

- Todas las acciones que se emprenden en las tareas anteriores se apoyan en la construcción de modelos y herramientas asistidas por ordenador para la simulación de las prestaciones del sistema o sus componentes.
- **6.1 Modelo físico:** Planteamiento de una serie de diagramas que describan las propiedades y el comportamiento del sistema: esquemas de circuitos eléctricos/electrónicos o neumáticos/hidráulicos, diagramas de sólido libre, etc.
- **6.2 Modelo matemático:** El comportamiento del sistema queda reflejado mediante una serie de ecuaciones.
- **6.3 Modelo numérico:** El modelo matemático se plantea en forma de algoritmos que serán resueltos por un ordenador para llevar a cabo la simulación del comportamiento del sistema.

Para la obtención del producto deseado, es posible que sea necesario el desarrollo de múltiples ciclos de diseño, empleando el producto resultado de un ciclo como punto de partida del siguiente, como un prototipo de laboratorio, un prototipo funcional, un producto piloto, etc. Generalmente un producto mecatrónico complejo no se produce en un solo ciclo de diseño, sino que se requieren varios. En la Figura 70 puede observarse un proceso de diseño con múltiples ciclos:

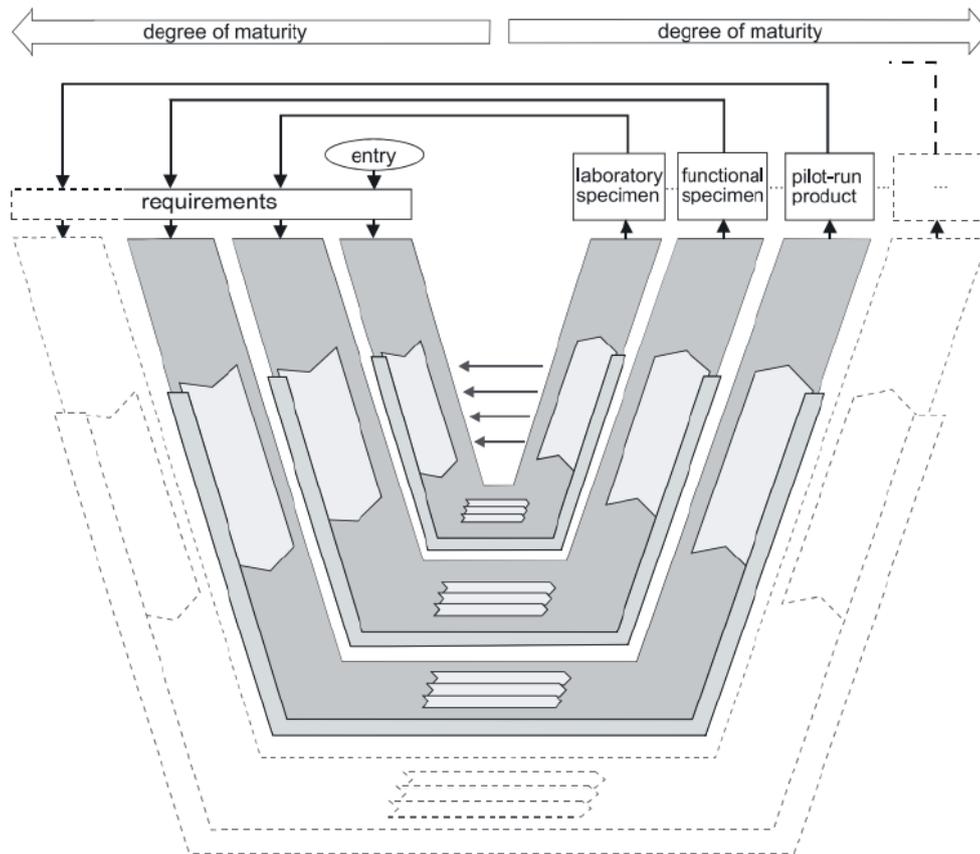


Figura 70. Proceso de diseño con múltiples ciclos. Extraído de [173]

2.7.4 Introducción al modelado mecatrónico

Debido a las complejidades presentes en el diseño de los mecanismos de cinemática paralela, con sus actuadores y su sistema de control, y las diferentes decisiones de diseño que implican estos componentes, tales como integración de los mismos, disposición en el mecanismo, conexionado, etc., se hace necesario el desarrollo de una metodología para desarrollar un modelado mecatrónico que ayude a tomar estas decisiones en el proceso de diseño de estos manipuladores.

En el modelado mecatrónico se consideran los actuadores, el control y el mecanismo, realizando ensayos en el dominio de tiempo y frecuencia. En cuanto a las pruebas en el dominio de tiempo, se calculan los pares de motores, y se comparan las simulaciones de velocidades y posiciones obtenidas en el modelo con las señales comandadas. En cuanto a las pruebas en el dominio de frecuencia, se calcula el ancho de banda de los actuadores con y sin el mecanismo acoplado. De esta manera se pueden utilizar los pares calculados para seleccionar correctamente el sistema de accionamiento, además de evaluar la precisión

obtenida en el posicionamiento. Posteriormente, el sistema real puede ser construido, y su comportamiento se puede comparar con las simulaciones del modelo. Sin embargo, cuando se utilizan los valores teóricos de los parámetros dinámicos, pueden darse diferencias entre el modelo y el sistema real, especialmente por el efecto de la fricción en el sistema. Como consecuencia, se hace necesario aplicar un procedimiento de identificación de estos parámetros.

2.7.5 Modelo mecatrónico de los actuadores electromecánicos

El modelo mecatrónico de los actuadores está compuesto por el modelo dinámico del actuador. Se utiliza un modelo de parámetros concentrados para representar el comportamiento dinámico de los componentes de la transmisión. De esta manera, es posible tener en cuenta las inercias, flexibilidades y amortiguación de todos los componentes. El mecanismo y otros efectos, tales como la fricción, se consideran como perturbaciones en tales modelos.

Con respecto al modelo de parámetros concentrados, un modelo de 1 gdl es adecuado para actuadores que podrían considerarse como rígidos, o que operan en una gama de frecuencias relativamente bajas, o que mueven un mecanismo con una baja inercia. Por otro lado, se requiere un modelo 2 o N gdl si el amortiguamiento y la flexibilidad de sus componentes no son despreciables, lo que ocurre cuando se mueven grandes inercias, mecanismos pesados y cargas, o se mueven a altas frecuencias.

También hay que señalar que cualquier actuador electromecánico debe tener al menos un control de corriente, que suministre la potencia eléctrica requerida para accionar el motor. Por esta razón, es necesario tener en cuenta la parte eléctrica en el modelo, donde su respuesta se modela en una función de transferencia considerando la resistencia, la inductancia, la constante de par del motor y la constante electromotriz.

Además, dependiendo de la estrategia de control utilizada, también pueden estar presentes bucles de regulación de la posición y de la velocidad, como en el control lineal de un solo eje. También se debe tener en cuenta el tiempo de ciclo, el muestreo de las señales y el uso del dominio z para las funciones de transferencia del sistema, ya que el seguimiento de la trayectoria y el rechazo de las perturbaciones son afectados por el tiempo de ciclo. Además, el tiempo de ciclo también afecta al par. Si se utiliza un tiempo de ciclo pequeño, se consigue el par de forma gradual y se obtienen variaciones de par suaves. Como consecuencia, se evitan las oscilaciones en el par causadas por las correcciones de los errores de posición.

Por último, si se utiliza la configuración de un accionamiento prismático accionado por un motor rotativo, se pueden emplear dos encoders para evaluar la posición del sistema, uno giratorio para el motor y uno lineal para la mesa del actuador. En tales casos, es posible controlar directamente la posición lineal p , sin embargo, a veces sólo es posible obtener la información de los motores, por lo que la posición lineal debe calcularse con la relación de transmisión, si la hay, y el paso de la guía lineal.

2.7.5.1 Electrodinámica de motores DC

La mayoría de los sistemas de accionamiento utilizan motores eléctricos para convertir la energía eléctrica en movimiento mecánico. Con respecto a un motor de corriente continua, se

puede construir un modelo eléctrico del actuador con un circuito RL equivalente como se muestra en la Figura 71, donde L es la inductancia de las bobinas del motor, R es la resistencia de los devanados, V es la entrada de tensión del controlador y E es la fuerza electromotriz debida al giro del motor, como se describe en la Ley de Lorentz.

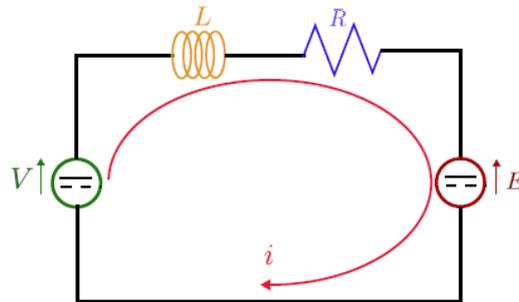


Figura 71. Circuito eléctrico de un actuador

Usando la ley de Ohm para las resistencias, la ley de inducción de Faraday y la ley de Lenz para la bobina del motor, la dinámica en el circuito de la Figura 71 puede expresarse como se muestra en la Ec.(31).

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E \quad (31)$$

Además, la tensión E es proporcional a la velocidad del motor y es expresada como se indica en la Ec.(32), donde K_E , es la constante electromotriz del motor dada por el fabricante.

$$E = K_E \dot{\theta}_m \quad (32)$$

Aplicando la transformada de Laplace y reorganizando los términos resultantes, se alcanza la función de transferencia de la parte eléctrica, como puede verse en la Ec.(33).

$$FT_{\text{eléctrica}} = \frac{I(s)}{V(s) - E(s)} = \frac{1}{Ls + R} \quad (33)$$

2.7.5.2 Dinámica del motor y de la transmisión

Modelo de un grado de libertad

Un modelo de un grado de libertad o inercial es adecuado para describir un actuador si sus flexibilidades pueden ser despreciadas. Para un actuador con una inercia de motor J_1 y una inercia de transmisión J_2 , puede modelarse como un cuerpo rígido como se muestra en la Figura 72.

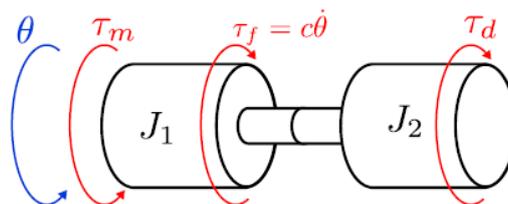


Figura 72. Modelo de un grado de libertad de un actuador

La dinámica de este modelo se describe por la Ec. (34) , donde τ_m es el par de entrada del motor, J_t es la inercia total, que es la suma de J_1 y J_2 , c es la fricción viscosa y τ_d representa todas las perturbaciones que pueden estar presentes, como son el par debido al mecanismo, la fricción y otros efectos.

$$\tau_m = J_t \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \tau_d \tag{34}$$

Para obtener la función de transferencia de la parte mecánica del actuador, la transformada de Laplace se aplica a la ecuación (34), obteniendo así la Ec.(35). Si se presentan perturbaciones, el par efectivo τ_{ef} se utiliza como entrada para la función de transferencia.

$$FT_{mecánica} = \frac{\theta(s)}{\tau_{ef}(s)} = \frac{\theta(s)}{\tau(s) - \tau_d(s)} = \frac{1}{J_t s^2 + cs} \tag{35}$$

Se debe tener en cuenta que la función de transferencia anterior proporciona la posición del motor. Sin embargo, la salida de velocidad es más conveniente, ya que estará embebida en el bucle de regulación de velocidad, véase la Figura 73. Para ello, multiplicando por s , se obtiene la función de transferencia de velocidad, mostrada en la Ec.(36).

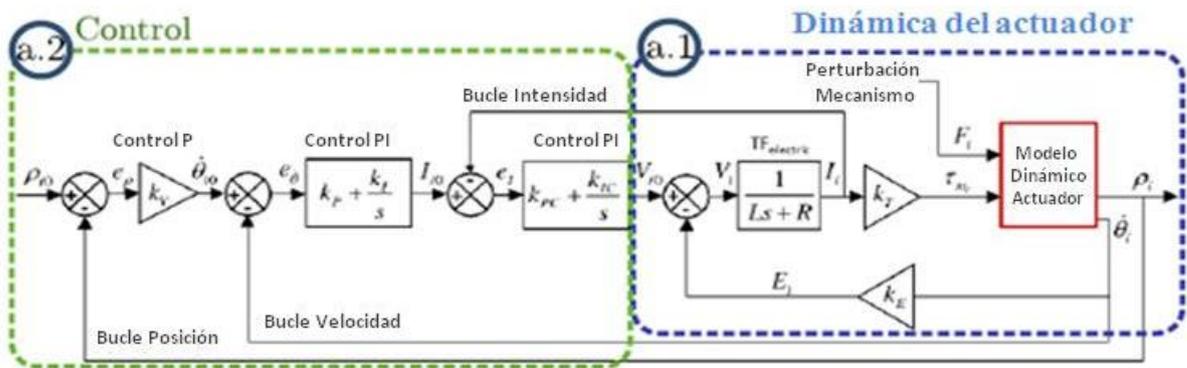


Figura 73. Modelo mecatrónico del sistema de actuación

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{\tau_{ef}(s)} = \frac{\dot{\theta}(s)}{\tau(s) - \tau_d(s)} = \frac{1}{J_t s + c} \tag{36}$$

Esta función de transferencia se incluye entonces en el modelo electromecánico del actuador representado en la Figura 73 por el subsistema (a.1), donde el comando de voltaje V_{i0} se utiliza con la tensión electromotriz E para calcular la entrada de tensión V a la función de transferencia de la parte eléctrica $FT_{eléctrica}$. La corriente de salida I es entonces pasada a través de la constante de par k_t del motor para calcular la entrada de par τ_m . Éste se utiliza con el par de perturbación τ_d para calcular la entrada a la función de transferencia $FT_{mecánica}$ que representa la dinámica mecánica del actuador.

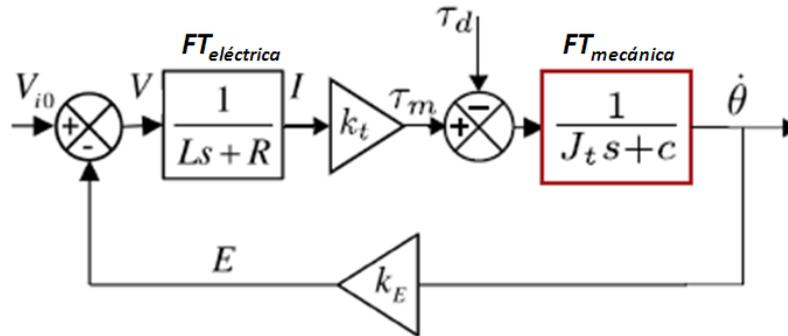


Figura 74. Modelo electromecánico de un actuador con un modelo mecánico de un grado de libertad

Modelo de dos grados de libertad

Como se mencionó anteriormente, si las flexibilidades del sistema no pueden ser despreciadas, puede usarse un modelo de dos grados de libertad como el mostrado en la Figura 75, donde el par motor τ_m y la perturbación τ_d son las entradas, y la posición angular θ_p es la salida. Si se utiliza una guía lineal para accionar los mecanismos, se realiza una conversión del ángulo de rotación a un desplazamiento lineal teniendo en cuenta el paso de la guía.

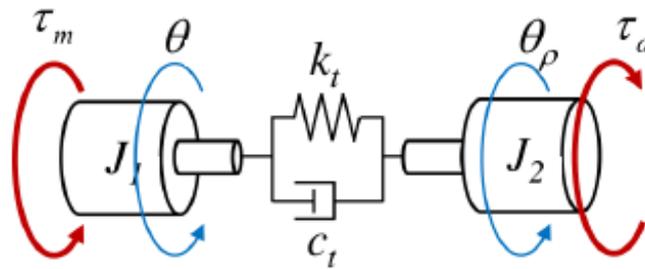


Figura 75. Modelo de dos grados de libertad de un actuador

Para el desarrollo de un control clásico, es común la realización del modelado y control de sistemas mediante la transformada de Laplace, debido a su sencillez y facilidad de aplicación, permitiendo analizar dichos sistemas utilizando una serie de reglas algebraicas en lugar de trabajar con ecuaciones diferenciales. Sin embargo, presenta algunas limitaciones como:

- No proporciona información sobre la estructura física del sistema.
- Solo es válida para sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes en el tiempo.
- No proporciona información de lo que pasa dentro del sistema.
- Se necesita que las condiciones iniciales del sistema sean nulas.

Por lo tanto, para sistemas reales, los cuales presentan más de una entrada o salida, varían a lo largo del tiempo y cuyas condiciones iniciales pueden diferir de cero, no es posible utilizar este enfoque. Para el modelado de este tipo de sistemas utilizamos la representación en Espacio de Estados. Este tipo de modelización posee las siguientes ventajas:

- Aplicable a sistemas lineales y no lineales.
- Permite analizar sistemas de más de una entrada o más de una salida.
- Pueden ser sistemas variantes o invariantes en el tiempo.

- Las condiciones iniciales pueden ser diferentes de cero.
- Proporciona información de lo que sucede dentro del sistema.
- Resultados sencillos y elegantes.

Con la representación en Espacio de Estados se tiene la capacidad de controlar y conocer tanto la dinámica interna del sistema como su respuesta. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema modelizado vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$\tau_m = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + c_1 \cdot \dot{\theta}_1 + c_{eq} \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_{eq} \cdot (\theta_1 - \theta_2) \quad (37)$$

$$-\tau_d = J_2 \cdot \ddot{\theta}_2 + -c_{eq} \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k_{eq} \cdot (\theta_1 - \theta_2) \quad (38)$$

Donde transformamos a la fuerza F que se opone al desplazamiento de la base del actuador en un par τ_d en sentido contrario al par motor τ_m . También se transforma el desplazamiento lineal del actuador por un giro θ_2 en el mismo sentido que para el motor θ_1 . J_1 hace referencia a la inercia de la parte motora, J_2 a la inercia de la carga, k_{eq} a la rigidez de la transmisión, y c_1 y c_{eq} a los amortiguamientos, tanto de la parte motora como de la carga.

Para desarrollar el modelo de Espacio de Estados debemos de seleccionar las denominadas Variables de Estado, que son el conjunto más pequeño de variables cuyo conocimiento en $t = t_0$ junto al de las entradas para $t \geq 0$, permite determinar el comportamiento y las condiciones de la dinámica del sistema para cualquier tiempo $t \geq 0$. Para el modelo de Espacio de Estados, las variables de estado $\mathbf{x}(t)$ son:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad \text{siendo} \quad \begin{aligned} x_1 &= \theta_1 \\ x_2 &= \dot{\theta}_1 = \dot{x}_1 \\ x_3 &= \theta_2 \\ x_4 &= \dot{\theta}_2 = \dot{x}_3 \end{aligned} \quad (39)$$

Para analizar el sistema mediante método de Espacio de Estados debemos de definir también tanto las variables de entrada $\mathbf{u}(t)$ como las de salida $\mathbf{y}(t)$, que se definen como:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} \tau_m \\ \tau_d \end{Bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Las ecuaciones de estado que definen el sistema modelizado, expresadas en forma matricial, vendrán definidas por la siguiente expresión:

$$\{\dot{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{x}\} + [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{u}\} \quad (42)$$

Siendo $\dot{\mathbf{x}}$ el vector de las derivadas respecto al tiempo de las variables de estado, \mathbf{A} la Matriz de Estados y \mathbf{B} la Matriz de Entradas.

Por otro lado son definidas las ecuaciones de salida del sistema, las cuales expresadas en notación matricial vendrán dadas por:

$$\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{x}\} + [\mathbf{D}] \cdot \{\mathbf{u}\} \quad (43)$$

Donde **C** hace referencia a la Matriz de Salidas y **D** a la Matriz de Transmisión Directa

Mediante la resolución de este modelo de Espacio de Estados podemos obtener las variables de salida, lo cual nos permitirá realimentar estos valores en la etapa control y obtener los movimientos reales producidos en el sistema tras aplicarles la etapa de control y serán las salidas globales de todo el sistema.

2.7.5.3 Conversión debida a la transmisión

Es habitual que un actuador esté compuesto por un motor eléctrico y una transmisión para accionar una carga. Las transmisiones se utilizan para adaptar la potencia de salida del actuador al rango de trabajo del motor eléctrico, al reducir la velocidad y aumentar la salida de par. También pueden usarse para pasar de un movimiento rotativo a un movimiento lineal. En cualquier caso, debería ser considerado el factor de conversión.

Para actuadores con reductora y salida giratoria, la Ec. (44) se utiliza para convertir el ángulo del motor en el ángulo del eje de salida de la reductora, con una relación de transmisión i_r .

$$i_r = \frac{1}{i_r} \quad (44)$$

Para actuadores con guías lineales, la Ec. (45) puede usarse para convertir el ángulo del motor en la posición lineal del actuador, donde p es el paso de la guía lineal.

$$i_r = \frac{p}{2\pi i_r} \quad (45)$$

2.7.6 Modelado del control

Dependiendo de los requisitos de comportamiento y complejidad del sistema, se pueden implementar diferentes tipos de controladores.

El enfoque más común en relación con el control de mecanismos de cinemática paralela, es tratar de utilizar los métodos del campo de la robótica en serie. Se pueden seguir dos enfoques de control principales, el control del espacio articular o el control del espacio de trabajo.

2.7.6.1 Control de posición en el espacio articular

Como se muestra en la Figura 76, en el modelo mecatrónico con control del espacio articular o de eje único lineal, la posición del manipulador x_0 se hace pasar a través de la cinemática inversa del mecanismo para obtener los comandos de las articulaciones q_0 para cada actuador. La posición real de las juntas q_p se utiliza en la cinemática directa para calcular las posiciones reales del manipulador x . La posición real es utilizada entonces en el modelo dinámico inverso para calcular las perturbaciones t_p de cada uno de los actuadores.

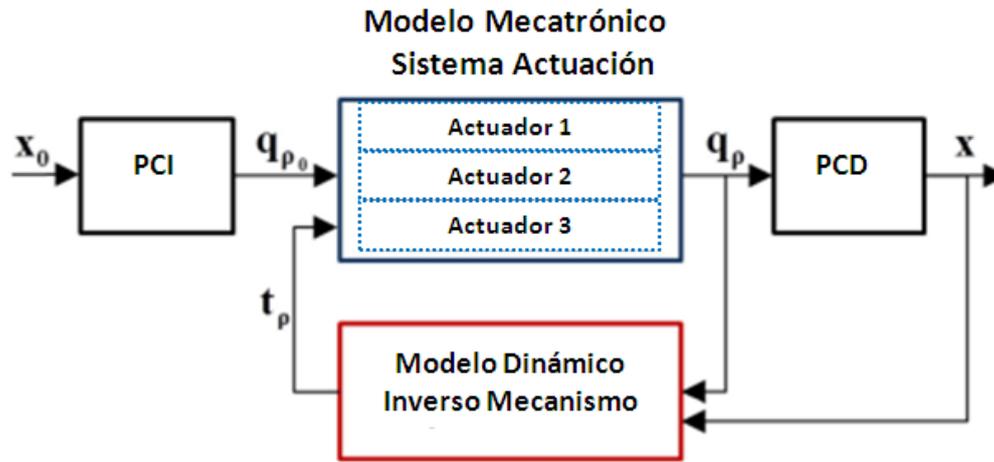


Figura 76. Modelo mecatrónico con esquema de control del espacio articular

Con respecto al control empleado en cada uno de los bloques de los actuadores en la Figura 76, se utiliza el control de espacio articular mostrado en la Figura 77, donde el error de posición e_p se calcula a partir de posición comandada a las articulaciones $q_{\rho 0}$ y de la posición real de las articulaciones $q_{\rho i}$. Un control proporcional con ganancia k_v se utiliza para obtener el comando de velocidad del motor $\dot{\theta}_{i0}$ en el bucle de control de velocidad. En este bucle, el error de velocidad $e_{\dot{\theta}}$ se calcula usando la velocidad real del motor $\dot{\theta}_i$, la cual se pasa a través de un control proporcional-integral (PI) con ganancias k_p y k_i para calcular el comando de corriente I_{i0} . En el bucle de control de corriente, el error de corriente e_i se calcula con la corriente real I_i . Además, se utiliza un control PI con ganancias k_{PC} y k_{IC} para obtener la entrada de tensión V_{i0} al modelo electromecánico del actuador.

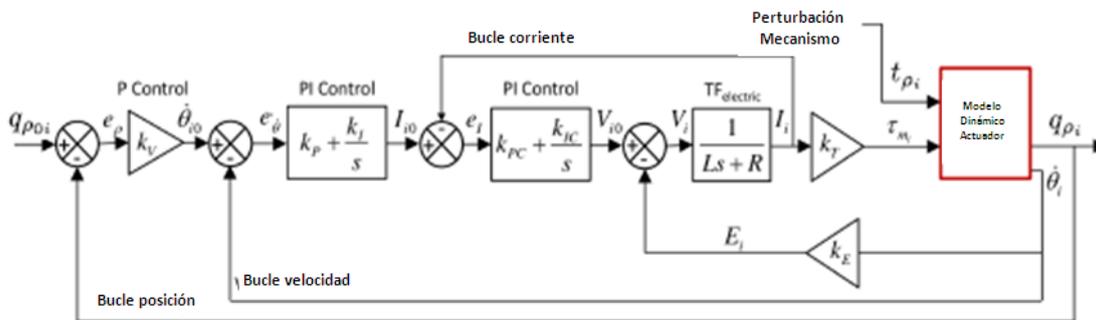


Figura 77. Esquema de control del espacio articular

2.7.6.2 Control de posición en el espacio de trabajo

En cuanto al control del espacio de trabajo, se modela como se muestra en la Figura 78. El error de posición del efector final e_x se calcula a partir de posición comandada x_0 y de la posición real x . Una ganancia proporcional k_v se utiliza para obtener la velocidad comandada en el efector final \dot{x}_0 , la cual es introducida en el problema cinemático inverso para obtener los comandos de velocidad de las articulaciones $\dot{q}_{\rho 0}$. Además, se integran las velocidades reales de las juntas y se utiliza el problema cinemático directo para estimar la posición x , que

también se utiliza en el modelo dinámico inverso para calcular las perturbaciones de los actuadores t_p .

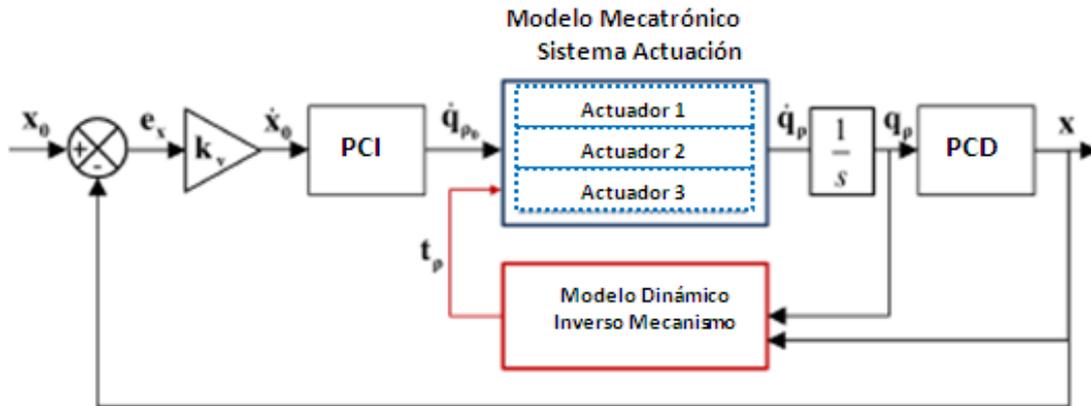


Figura 78. Modelo mecatrónico con control de área de trabajo

Para el control del espacio de trabajo, se incluye en cada bloque de actuador el esquema de control mostrado en la Figura 79. En este caso, el comando de velocidad articular se convierte en la velocidad del motor $\dot{\theta}_{i0}$ usando el factor i_R descrito anteriormente. Este factor se utiliza de nuevo para obtener la velocidad real de la articulación.

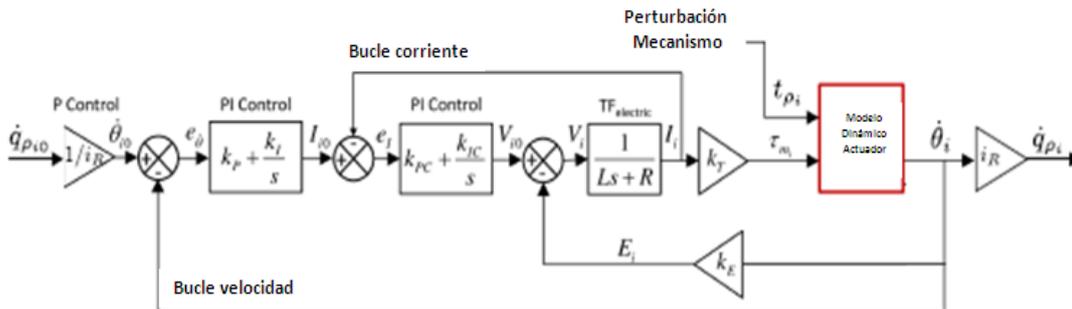


Figura 79. Control del i-ésimo actuador para el control del espacio de trabajo

2.7.7 Análisis mecatrónico de un manipulador cinemático paralelo compliant

El análisis mecatrónico de los manipuladores paralelos puede ser realizado en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia. En el dominio del tiempo, se pueden analizar las posiciones del espacio articular y del espacio de trabajo, las velocidades y las aceleraciones, y mediante la comparativa entre las posiciones simuladas y las comandadas, se puede hacer una estimación del error de seguimiento. Además, el par total simulado puede descomponerse en el par requerido para mover el mecanismo, el par requerido para mover solamente los actuadores, y el par de fricción una vez identificado. De esta manera, se puede apreciar si los actuadores y la transmisión seleccionados son apropiados para una aplicación analizada.

Para el caso de manipuladores Compliant, también podrán ser analizadas las deformaciones presentes en las juntas flexibles, además de las tensiones soportadas en las mismas, con el fin de controlar estos puntos críticos del sistema. Mediante el análisis de estos valores, se permite

realizar un control más adecuado de este tipo de sistemas, desarrollando un modelo que reproduzca las condiciones reales que se producen en el mecanismo.

El modelo mecatrónico también se puede utilizar para analizar el rendimiento del control. Por un lado, se pueden ajustar las ganancias de los controladores de posición, velocidad y corriente usando el modelo. Por otro lado, también se puede analizar el efecto de los tiempos de ciclo de cada bucle de control sobre el comportamiento del manipulador de cinemática paralela. Como resultado, se puede seleccionar correctamente el control implementado, lo cual es importante para evitar elegir un control sobredimensionado, ya que los tiempos de ciclo más bajos aumentan su coste.

En lo que respecta al dominio de la frecuencia, lo más importante es evaluar si el ancho de banda del manipulador, es decir la frecuencia máxima a la que se puede realizar un movimiento controlado, satisface los requisitos de diseño y de aplicación. Además, el ancho de banda de un actuador se puede encontrar fácilmente, ya que sus parámetros dinámicos, tales como inercia, rigidez y amortiguación, son constantes. Siguiendo la teoría del control moderno, se puede obtener la función de transferencia que relaciona la posición comandada y la respuesta del actuador, que se conoce como función de transferencia de lazo cerrado.

Este mismo enfoque no puede aplicarse al manipulador cinemático paralelo, ya que los términos gravitatorio, inercial y de Coriolis no son constantes en el espacio de trabajo, es decir, están presentes las no linealidades. Por esta razón, para obtener el ancho de banda de un manipulador a partir de las variables del espacio de trabajo, se realizan simulaciones en el dominio del tiempo, con movimientos sinusoidales en el espacio de trabajo a diferentes frecuencias, y se miden el retardo en el tiempo y la amplitud de la respuesta de los actuadores, comparándolos con las señales comandadas. Este enfoque permite obtener una estimación del ancho de banda del manipulador en diferentes posiciones del espacio de trabajo. Sin embargo, este enfoque tiene dos inconvenientes:

- En general, un movimiento sinusoidal en el espacio de trabajo no corresponde a un movimiento sinusoidal en el espacio articular debido a las no-linealidades de la cinemática inversa.
- Las no-linealidades en la cinemática inversa también conducen a movimientos armónicos más complejos que los originalmente previstos en el espacio de trabajo.

Sin embargo, estos inconvenientes pueden limitarse usando movimientos con amplitudes reducidas. Si se comanda una señal sinusoidal con una pequeña amplitud, los efectos de las no-linealidades de la cinemática y de la dinámica también resultarán pequeños. Por lo tanto, para obtener el ancho de banda o la función de transferencia en bucle cerrado basada en pruebas a varias frecuencias, se deberían tener en cuenta la amplitud de los movimientos, lo que depende del diseño del manipulador.

2.8 Carencias detectadas

A la vista de esta revisión bibliográfica del estado del arte actual, se han identificado ciertas carencias en las que es posible realizar un estudio de investigación más profundo con el fin de subsanarlas.

En primer lugar, se ha observado que existen gran cantidad de investigaciones relativas al diseño de juntas flexibles por un lado, y mecanismos compliant por otro, pero no existe un método de diseño que refleje claramente cómo integrar estas juntas dentro de los mecanismos.

También se ha observado que es necesario profundizar en el análisis mecatrónico de mecanismos compliant, siendo necesario integrar el modelo cinemático y dinámico del mecanismo con el modelo del control, de forma que se pueda reproducir mediante simulación las características que poseerá el manipulador objeto de estudio de un modo más fehaciente.

Resumiendo, dada la complejidad del diseño de estos mecanismos, donde intervienen aspectos relacionados con el cálculo estructural de las juntas y el mecanismo, la cinemática y dinámica del mecanismo, el sistema de control, los sensores y los actuadores, se hace necesario el planteamiento de un método que aborde, en una secuencia coherente, todos estos problemas, con el fin de llegar a un diseño óptimo en el mínimo tiempo posible.

3. Metodología para el diseño de mecanismos con juntas flexibles

En este apartado se va a mostrar la metodología propuesta en este trabajo de tesis, para el diseño de manipuladores flexibles. Con ello, se pretende proporcionar un método mediante el cual se pueda alcanzar el mecanismo flexible ideal para una determinada aplicación, analizando todas las etapas del diseño del mismo. Con esto se tratará de cubrir ciertas carencias expuestas al final del capítulo anterior.

En un primer apartado se definirán los requisitos a alcanzar por el manipulador. A continuación, se realizará el análisis cinemático y dinámico del mismo, con el fin de obtener la cinemática y dimensiones del mismo, así como las fuerzas necesarias para actuarlo. El paso siguiente será desarrollar el modelo mecatrónico del mecanismo, modelando los distintos elementos utilizados en el manipulador, como son el propio mecanismo, los actuadores y el control implementado. Por último, se realizará el análisis estructural del mecanismo, estudiando los puntos críticos del manipulador, que son las juntas flexibles, así como el manipulador en su conjunto en las condiciones de trabajo.

3.1 Planteamiento de la metodología:

La metodología que se propone en este trabajo de tesis se muestra en el diagrama representado en la Figura 80.

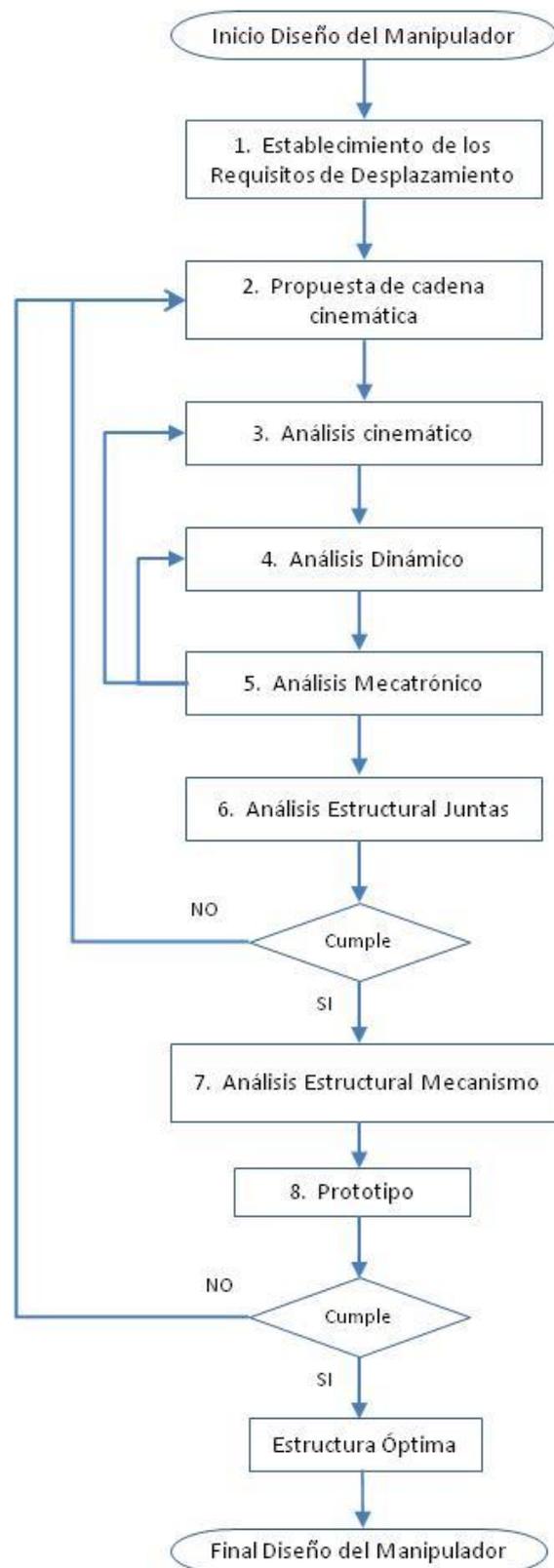


Figura 80. Metodología de Diseño propuesta

A la vista de la Figura 80, los pasos que componen esta metodología de diseño propuesta son:

- **Paso 1:** Consiste en el establecimiento de unos requisitos para el manipulador, definiendo la movilidad a alcanzar, es decir, los grados de libertad (gdl), rangos de desplazamiento a alcanzar, velocidades y aceleraciones que deberá desarrollar, así como las masas y cargas externas que deberá soportar.
- **Paso 2:** Corresponde a la propuesta de una cadena cinemática que permita cumplir con estos requisitos impuestos. Esta primera aproximación puede establecerse en base a la literatura actual existente o la experiencia previa del diseñador.
- **Paso 3:** Se realizará el análisis cinemático del mecanismo, obteniendo los diferentes desplazamientos que se producen en cada uno de los componentes del manipulador.
- **Paso 4:** Se procederá con el análisis dinámico del manipulador, donde se alcanzarán las fuerzas necesarias a aplicar en el mecanismo para desarrollar los movimientos deseados, así como los esfuerzos soportados.
- **Paso 5:** Conociendo esta información, a continuación se realizará el análisis mecatrónico del manipulador, donde se integrarán la cinemática, la dinámica y el control, con el fin de ver el comportamiento futuro del manipulador diseñado.
- **Paso 6 y 7:** Consiste en el análisis estructural del mecanismo, analizando tanto al manipulador en su conjunto como a las juntas flexibles utilizadas, con el fin de verificar la aptitud de las mismas en las condiciones de trabajo impuestas. Para la verificación de los resultados obtenidos en estos análisis previos, proponemos un análisis por elementos finitos.
- **Paso 8:** El último paso será comprobar físicamente si este proceso de diseño se reproduce de forma fehaciente en la realidad mediante la construcción de un prototipo.

Para una mejor comprensión de esta metodología, a continuación, en cada uno de los puntos que la componen, se va a mostrar la aplicación de la misma al caso de estudio analizado en este trabajo de tesis, es decir, al manipulador compliant de cinemática paralela 3-PRS.

Por lo tanto, el objetivo de este estudio es alcanzar el diseño óptimo del manipulador flexible de cinemática paralela 3-PRS y para tal fin, se desarrolla el siguiente proceso. Una vez resuelta la cinemática del sólido rígido, se asume que bajo pequeños desplazamientos, la cinemática de los mecanismos flexibles será similar a la de los sólidos rígidos. Esto permitirá obtener los desplazamientos necesarios a alcanzar por actuadores y juntas, una vez establecidos una serie de requisitos para el mecanismo. Mediante el análisis dinámico, serán definidas las fuerzas actuantes en el manipulador. Toda esta información, junto con el modelado de los actuadores y del control implementado, será analizada en el análisis mecatrónico del manipulador, para determinar el comportamiento del mecanismo, y por ende la viabilidad del mismo. Mediante el análisis estructural, se verificará si el mecanismo propuesto cumple con los requisitos

impuestos, sin comprometer la integridad del mismo al pasar del régimen elástico del material al régimen plástico. Para ello se utilizará el software de elementos finitos ANSYS. Por último, mediante la construcción del prototipo con la estructura óptima alcanzada para el manipulador flexible de cinemática paralela 3-PRS, se validará físicamente el mecanismo desarrollado.

3.2 Requisitos



Figura 81. Metodología propuesta, paso 1: Requisitos

El primer paso de la metodología propuesta para el diseño de manipuladores flexibles, es el establecimiento de unos requisitos. Se deberán definir los desplazamientos que se deben conseguir por el manipulador, es decir, gdl , rango de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, así como las masas a soportar, para poder alcanzar las condiciones de trabajo exigidas al manipulador objeto del diseño.

Los desplazamientos que se deben reproducir en el efector final del manipulador, definirán los grados de libertad del mecanismo y, por tanto, la cadena cinemática y el número de actuadores a implementar. La cadena cinemática a su vez impone el número de elementos y sobre todo el tipo de juntas flexibles que se deben emplear. Estas juntas también definirán los puntos críticos de la estructura en cuanto a los esfuerzos que podrá soportar, ya que dependiendo del material empleado, serán capaces de proporcionar unos rangos de movimiento solo dentro del régimen elástico del material.

3.3 Requisitos impuestos al manipulador 3-PRS

Para establecer un conjunto de requisitos a cumplir por el mecanismo 3-PRS, se ha analizado un proceso de fabricación industrial. Este proceso se ha definido junto a la empresa "Egile Corporation", empresa con la cual se ha colaborado estrechamente. Esta relación se fundamenta en el convenio de colaboración Zabalduz, desarrollado por el Gobierno Vasco, y el cual consistía en la concesión de una serie de becas para doctorados industriales entre la UPV/EHU y el tejido industrial del País Vasco.

La aplicación seleccionada ha sido el fresado de moldes para microlentes. Esta operación consiste en fresar una de las caras de una pieza de trabajo cilíndrica de diámetros entre 10 y 20 mm. Varios materiales pueden ser utilizados para el molde: acero aleado, cobre o latón. Algunas imágenes de un proceso de microfresado de lentes pueden observarse en la Figura 82.

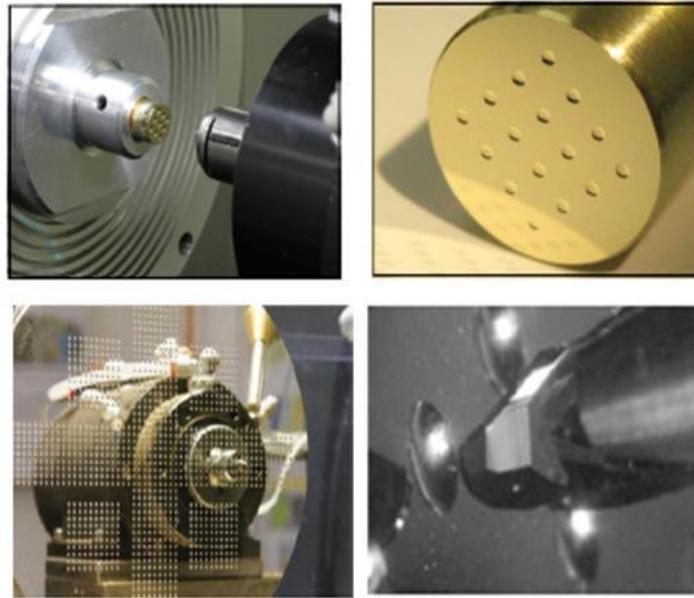


Figura 82. Proceso de microfresado de lentes [174]

Sobre la cara del molde se fresa una matriz de cavidades esféricas cóncavas NxN con el negativo de la lente, véase la Figura 83. La forma de la lente puede variar, con diámetros de 0,5 mm a 2 mm y una profundidad sagital inferior a 1 mm.

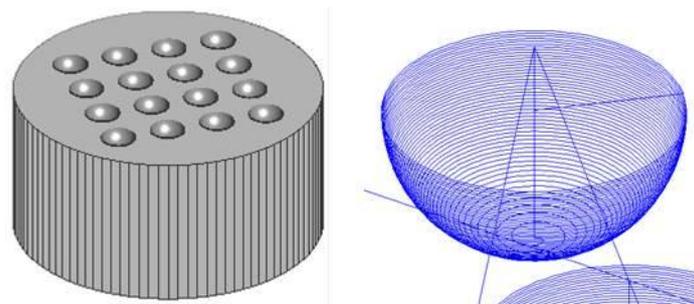


Figura 83. Izquierda) Matriz típica 4x4 de moldes para microlentes. Derecha) Estrategia de fresado espiral descendente

Para el fresado del molde, se utiliza una fresa de extremo de diamante, con un diámetro de alrededor de 0,5 mm. Las velocidades del husillo son superiores a 30 krpm, y la velocidad de avance puede ser de 25 a 100 mm/min con una profundidad de corte de alrededor de 150 μm . La resolución a alcanzar por parte de la operación de microfresado debe ser inferior a las 2,56 μm , con una precisión inferior a las 0,168 μm .

Para obtener algunos requisitos cinemáticos en términos de desplazamientos necesarios, se ha diseñado un proceso estándar, con una matriz de cavidades 4x4 en un molde cilíndrico de 18 mm. Las cavidades son, en este caso, esféricas con un diámetro de 2 mm, y se mecanizarían en fresado descendente con una estrategia en espiral hacia abajo en dirección anti horaria. El desplazamiento entre la pieza y la punta de la herramienta para los movimientos entre

cavidades sería de 1 mm. Los desplazamientos resultantes necesarios en la pieza de trabajo se muestran en la Figura 84.

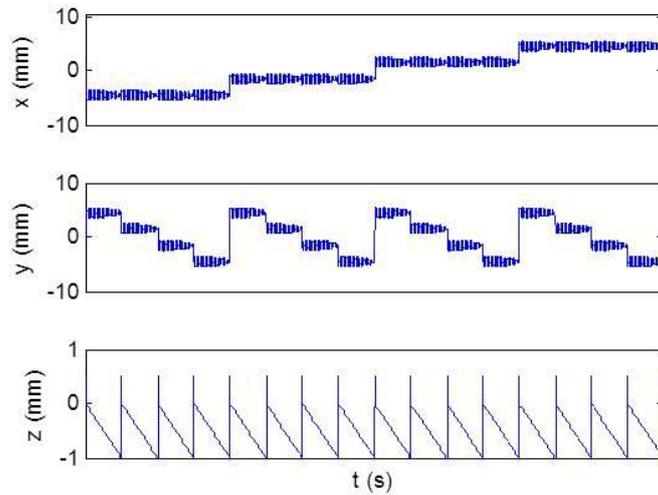


Figura 84. Desplazamientos en las direcciones x, y y z para el fresado de la pieza de trabajo diseñada

Resumiendo, se necesitan desplazamientos de ± 7 mm en las direcciones X e Y, y se necesita un recorrido de menos de 1,7 mm en la dirección Z. Para cubrir con estas especificaciones y dotar a nuestro manipulador de un mayor grado de suficiencia frente a esta aplicación, establecemos los desplazamientos en las direcciones X e Y en ± 10 mm, y en 2 mm en la dirección Z. En la Tabla 8 pueden observarse los requisitos a alcanzar por el manipulador.

Ejes	> 3
Rango XY	< 10x10 mm
Rango XY 1 lente	> 2x2 mm
Rango Z	< 2 mm
Velocidad ejes	> 1,67 mm/s
Resolución	< 2,56 μm
Precisión	< 0,168 μm

Tabla 8. Requisitos del proceso de microfresado de lentes

3.4 Diseño preliminar del manipulador 3PRS

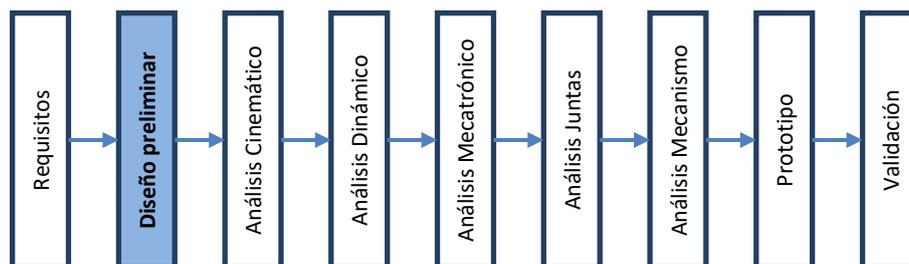


Figura 85. Metodología propuesta, paso 2: Diseño preliminar

Para cumplir los requisitos del proceso, se ha seleccionado un mecanismo híbrido XY-3PRS para mover el molde, basado en un manipulador de cinemática paralela flexible 3PRS montado en una etapa XY, véase la Figura 86. Este conjunto permite alcanzar 5 gdl en sus movimientos, que son las tres traslaciones sobre los ejes X, Y, Z, además de 2 rotaciones alrededor de los ejes X e Y, las cuales se representan por Ψ y θ .

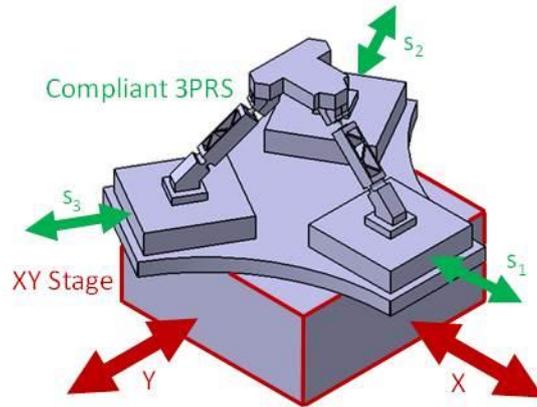


Figura 86. Manipulador XY-3PRS

Para las traslaciones sobre los ejes X e Y se selecciona una mesa XY comercial, la cual permite alcanzar el rango de desplazamientos exigido, con características de resolución y precisión superiores a las impuestas. Un ejemplo de mesa XY comercial que pudiera introducirse en el mecanismo XY-3PRS puede observarse en la Figura 87, cuyas especificaciones se muestran en la Figura 87.



	Especificación	ANT95-L
Velocidad ejes	> 1,67 mm/s	500 mm/s
Rango	> 12x12 mm	25x25 mm
Resolución	< 2,56 μ m	1 nm
Precisión	< 168 nm	+/- 75 nm

Figura 87. Mesa XY ANT95-L y especificaciones [175]

El resto de desplazamientos se alcanzan mediante el subconjunto 3-PRS, cuyo diseño y prototipado es el objetivo de este trabajo de tesis. Éste consta de una plataforma móvil sobre la que se situaría el molde a fresar, tres barras, por medio de las cuales unimos la plataforma móvil a la plataforma fija y tres actuadores lineales. Para desarrollar los movimientos deseados, se emplean diferentes juntas en cada una de las barras. Éstas serán del tipo prismáticas, de revolución y esféricas, denotadas por P, R y S, respectivamente, situadas de forma secuencial. La junta P será la actuada mediante un actuador lineal, mientras que la R y S serán las juntas flexibles del manipulador.

Gracias a esta configuración se obtienen los beneficios derivados de una estructura axisimétrica, como son una elevada rigidez estructural, una gran estabilidad frente a

variaciones térmicas. Por contra, aparecerán unos movimientos parásitos, los cuales habrá que contabilizar y compensar.

3.5 Análisis cinemático del mecanismo

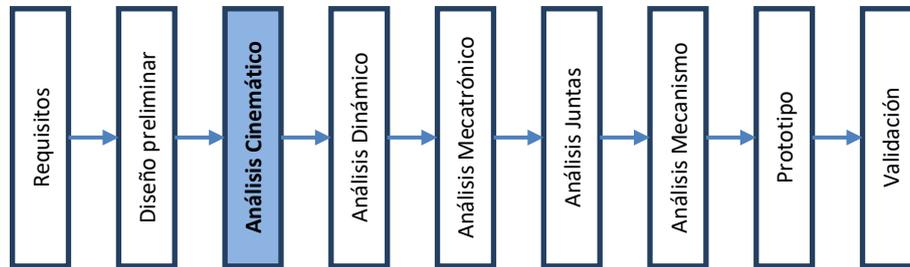


Figura 88. Metodología propuesta, paso 3: Análisis Cinemático

El punto de partida para el análisis cinemático de un manipulador compliant es el espacio de trabajo mínimo que debe alcanzar. A continuación, en base a la cadena cinemática definida, se dimensionarán los elementos del manipulador para cumplir los objetivos de desplazamiento. En el caso de un manipulador compliant, frente a un mecanismo convencional, se prestará especial atención a los requisitos de desplazamientos que deberán cumplir las juntas flexibles, ya que no deberán sobrepasar los límites del régimen elástico del material. También se obtendrán los desplazamientos necesarios en las juntas actuadas para el diseño de los actuadores a implementar. Por último, será necesario determinar los movimientos parásitos que aparecen en el manipulador, con el fin de contabilizarlos y compensarlos.

A continuación, se mostrarán cada uno de los desarrollos realizados en el análisis cinemático del manipulador 3-PRS, con el fin de determinar estos parámetros característicos.

3.6 Análisis cinemático del mecanismo 3-PRS

3.6.1 Descripción geométrica del manipulador paralelo 3-PRS

El esquema cinemático del manipulador 3-PRS seleccionado para el caso de estudio puede observarse en la Figura 89.

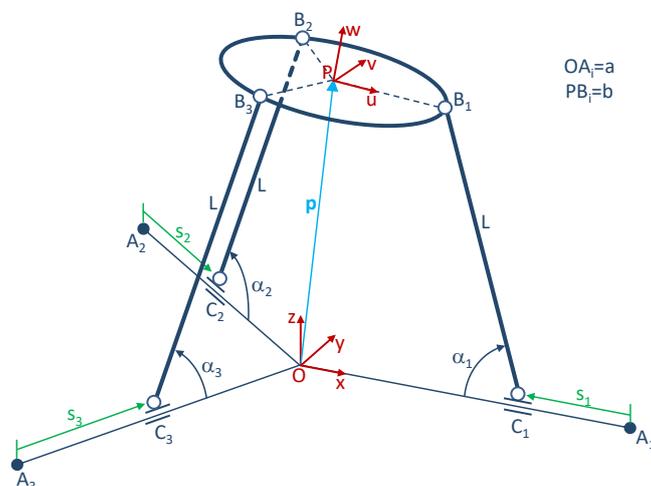


Figura 89. Esquema de un manipulador 3-PRS

El mecanismo está compuesto de una plataforma móvil con centro en P y tres extremidades idénticas, \mathbf{CB}_i , cuya longitud viene definida por L. Cada una de estas barras conecta la base y la plataforma móvil por medio de una junta prismática P, una junta de revolución R y una junta esférica S en secuencia, siendo las juntas P las que son accionadas por medio de actuadores lineales.

Los puntos B_i , ubicados sobre las juntas esféricas, se localizan en una circunferencia de radio b cuyo centro se define por el punto P. Los ángulos entre las barras y el plano horizontal se definen por α_i , los cuales presentan un valor de 45° en la posición de partida.

Para el accionamiento del manipulador se emplean tres actuadores lineales colocados a 120° , definiendo el espacio articular de cada una de las juntas prismáticas por las coordenadas s_1 , s_2 , y s_3 . Las localizaciones de los actuadores en la posición de partida se definen por los puntos A_i , los cuales se sitúan en una circunferencia de radio a, no representada en el esquema. El centro de dicha circunferencia se denota por el punto O, que es el lugar donde intersectan las guías de los actuadores.

Para el análisis del mecanismo, se hace necesario definir dos sistemas de referencia. Un sistema fijo $\{x, y, z\}$ se localiza en el punto O. Su eje X coincide con la dirección de la deslizadera \mathbf{OA}_1 y su eje Z se coloca verticalmente. Del mismo modo, se establece un sistema de referencia móvil $\{u, v, w\}$ en el punto P, coincidiendo su eje U con la dirección \mathbf{PB}_1 y orientando su eje W perpendicular a la plataforma móvil.

Mediante el criterio general de Grübler–Kutzbach se puede obtener el grado de movilidad que presenta nuestro manipulador. Este criterio consiste simplemente en realizar una diferencia entre los grados de libertad de los eslabones del mecanismo y las restricciones impuestas por los pares cinemáticos. La expresión viene dada por:

$$F = \lambda \cdot (n - j - 1) + \sum_{i=1}^g f_i = 6 \cdot (8 - 9 - 1) + 15 = 3 \quad (46)$$

Siendo λ el espacio de trabajo, n el número de eslabones, j el número de juntas y f_i el número de grados de libertad de cada una de las juntas i. Por tanto, el mecanismo 3-PRS tiene 3 gdl, que son las rotaciones alrededor de los dos ejes X e Y, que se denotan por Ψ y θ respectivamente, y un movimiento vertical de traslación en Z.

3.6.2 Movimientos Parásitos

Como se ha indicado, el manipulador 3-PRS presenta tres grados de libertad, sin embargo, al ser un manipulador paralelo de baja movilidad, una vez que se desplazan los actuadores, aparecen una serie de desplazamientos no deseados en la plataforma, como consecuencia de la topología del mecanismo. En esta sección, este problema será analizado y serán definidas las expresiones para estos movimientos denominados parásitos.

Para comenzar, la posición de la plataforma móvil viene descrita por las coordenadas p_x , p_y , p_z , que definen la posición del centro de la misma, y tres ángulos Ψ , θ , φ , que son las rotaciones alrededor de los ejes X, Y, Z del sistema fijo. Por tanto, la posición del centro de la plataforma móvil puede expresarse como:

$$\mathbf{OP} = \{p_x \quad p_y \quad p_z\}^T \quad (47)$$

Por otro lado, la posición inicial de los actuadores respecto al sistema de referencia fijo $\{x,y,z\}$ viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{OA}_1 &= \{a \quad 0 \quad 0\}^T \\ \mathbf{OA}_2 &= \left\{-\frac{a}{2} \quad a\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0\right\}^T \\ \mathbf{OA}_3 &= \left\{-\frac{a}{2} \quad -a\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0\right\}^T \end{aligned} \quad (48)$$

También es posible definir la posición de las juntas esféricas, puntos B_i en la Figura 89, respecto al sistema de referencia móvil $\{u, v, w\}$ mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{PB}_{1m} &= \{b \quad 0 \quad 0\}^T \\ \mathbf{PB}_{2m} &= \left\{-\frac{b}{2} \quad b\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0\right\}^T \\ \mathbf{PB}_{3m} &= \left\{-\frac{b}{2} \quad -b\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0\right\}^T \end{aligned} \quad (49)$$

Para expresar cualquier vector referido al sistema móvil en el sistema de referencia fijo, es necesario conocer la matriz de rotación \mathbf{R} que relaciona ambos sistemas de coordenadas y que viene definida como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_x(\psi)\mathbf{R}_z(\phi) = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\phi + s\psi s\theta s\phi & -c\theta s\phi + s\psi s\theta c\phi & c\psi s\theta \\ c\psi s\phi & c\psi c\phi & -s\psi \\ -s\theta c\phi + s\psi c\theta s\phi & s\theta s\phi + s\psi c\theta c\phi & c\psi c\theta \end{bmatrix} \quad (50)$$

Donde c y s hacen referencia al coseno y seno, respectivamente. También, \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} se definen como los tres vectores unitarios de los ejes U , V y W del sistema de referencia móvil con origen en P .

Por tanto, la posición de cada una de las juntas esféricas respecto al sistema de referencia fijo vendrá dada por:

$$\mathbf{OB}_i = \mathbf{OP} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{PB}_{im} \quad i = 1, 2, 3 \quad (51)$$

Desarrollando \mathbf{OB}_i para cada una de las extremidades del mecanismo, obtenemos las siguientes tres expresiones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{OB}_1 &= \begin{Bmatrix} p_x + u_x b \\ p_y + u_y b \\ p_z + u_z b \end{Bmatrix} \\
\mathbf{OB}_2 &= \begin{Bmatrix} p_x - \frac{u_x b}{2} + \frac{\sqrt{3}v_x b}{2} \\ p_y - \frac{u_y b}{2} + \frac{\sqrt{3}v_y b}{2} \\ p_z - \frac{u_z b}{2} + \frac{\sqrt{3}v_z b}{2} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{OB}_3 &= \begin{Bmatrix} p_x - \frac{u_x b}{2} - \frac{\sqrt{3}v_x b}{2} \\ p_y - \frac{u_y b}{2} - \frac{\sqrt{3}v_y b}{2} \\ p_z - \frac{u_z b}{2} - \frac{\sqrt{3}v_z b}{2} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{52}$$

Las juntas de revolución C_i imponen que las juntas esféricas únicamente puedan desplazarse en los planos definidos por los actuadores lineales \mathbf{OA}_i y las barras del manipulador $\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i$. Por tanto, se imponen las siguientes tres restricciones mecánicas al mecanismo:

$$OB_{1y} = 0 \tag{53}$$

$$OB_{2y} = -\sqrt{3}OB_{2x} \tag{54}$$

$$OB_{3y} = \sqrt{3}OB_{3x} \tag{55}$$

Sustituyendo las expresiones de \mathbf{OB}_i , mostradas en la Ec.(52), en las ecuaciones de restricción definidas en las Ecs.(53)-(55), y desarrollándolas, llegamos a las siguientes equivalencias:

$$p_y = -u_y b \tag{56}$$

$$p_x = \frac{b}{2}(u_x - v_x) \tag{57}$$

$$u_y = v_x \tag{58}$$

Introduciendo las expresiones para u_i y v_i , definidas en la matriz de rotación \mathbf{R} en Ec.(50), dentro de las Ecs.(56)-(58), se obtienen las expresiones para las variables dependientes del manipulador 3-PRS. Éstos serán los denominados movimientos parásitos que aparecerán en la plataforma y que son una rotación alrededor del eje Z, ϕ y dos desplazamientos en X e Y, p_x y p_y .

$$\phi = \text{atan} \left(\frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \psi + \cos \theta} \right) \tag{59}$$

$$p_x = \frac{b}{2}(\cos\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi - \cos\psi\cos\phi) \quad (60)$$

$$p_y = -b\cos\psi\sin\phi \quad (61)$$

En este punto cabe indicar que los movimientos parásitos descritos en este apartado, hacen referencia a los derivados de la propia cinemática del mecanismo. A estos habrá que sumar los derivados de los desplazamientos no deseados producidos en las juntas flexibles, los cuales serán calculados posteriormente en el apartado 3.11.2 Diseño de las juntas flexibles basándose en cálculos FEM, mediante análisis por elementos finitos.

3.6.3 Problema Cinemático Inverso

El objetivo del problema cinemático inverso es encontrar los desplazamientos en las juntas actuadas del mecanismo s_i , para alcanzar una posición y orientación determinada en la plataforma móvil. En primer lugar, haciendo referencia a la Figura 89, puede obtenerse la siguiente relación:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = \mathbf{OB}_i - \mathbf{OA}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (62)$$

Donde las expresiones para \mathbf{OB}_i y \mathbf{OA}_i pueden observarse en las Ecs. (52) y (48), respectivamente. Por otro lado, la expresión $\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i$, vector que va desde la junta prismática a la esférica en las barras, puede escribirse como:

$$\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i = L \cdot \mathbf{s}_{i0} = \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i - s_i \cdot \mathbf{s}_{i0} \quad (63)$$

Donde los vectores unitarios \mathbf{s}_{i0} definen el movimiento en la dirección positiva de cada uno de los actuadores y son expresados como:

$$\mathbf{s}_{i0} = -\frac{\mathbf{OA}_i}{OA_i} \quad (64)$$

Reordenando y elevando al cuadrado las componentes vectoriales de la Ec.(63), la siguiente ecuación de segundo grado es obtenida:

$$s_i^2 - 2s_i \cdot \mathbf{s}_{i0} \cdot \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i + \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i - L^2 = 0 \quad (65)$$

Resolviendo la Ec.(65), se obtienen las soluciones al problema cinemático inverso, es decir los desplazamientos en cada uno de los actuadores.

$$s_i = (\mathbf{s}_{i0} \cdot \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i) \pm \sqrt{(\mathbf{s}_{i0} \cdot \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i)^2 - \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i + L^2} \quad (66)$$

3.6.4 Problema Cinemático Directo

El problema cinemático directo determina la posición y orientación de la plataforma móvil con respecto al sistema de referencia fijo, una vez son conocidos los desplazamientos en los actuadores lineales.

Imponiendo la condición de longitud fija, L , para cada una de las barras del manipulador a partir del modulo del vector $\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i$, se pueden obtener las siguientes equivalencias:

$$\mathbf{OB}_i - \mathbf{OC}_i = \mathbf{OB}_i - (\mathbf{OA}_i + \mathbf{AC}_i) = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \quad (67)$$

$$|\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i|^2 = |\mathbf{OB}_i - \mathbf{OC}_i|^2 = L^2 \quad (68)$$

Desarrollando la Ec.(68) para cada una de las barras del manipulador, obtenemos las siguientes expresiones:

3.6.4.1 Barra 1

Desarrollando la Ec.(68):

$$(OB_1 - OC_1)_x^2 + (OB_1 - OC_1)_y^2 + (OB_1 - OC_1)_z^2 - L^2 = 0 \quad (69)$$

Las componentes del vector \mathbf{OB}_1 pueden observarse en la Ec.(52). Por otro lado, el vector \mathbf{OC}_1 puede expresarse como:

$$\mathbf{OC}_1 = \begin{Bmatrix} a - s_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Por tanto, sustituyendo estas expresiones en la Ec.(69), se alcanza la siguiente relación:

$$(p_x + b \cdot u_x - a + s_1)^2 + (p_y + b \cdot u_y)^2 + (p_z + b \cdot u_z)^2 - L^2 = 0 \quad (71)$$

Finalmente, sustituyendo en esta ecuación las componentes del vector \mathbf{u} , mostrados en la matriz de rotación \mathbf{R} , Ec.(50), se obtiene la siguiente expresión:

$$(p_x + b(c\theta c\phi + s\psi s\theta s\phi) - a + s_1)^2 + (p_y + bc\psi s\phi)^2 + (p_z + b(-s\theta c\phi + s\psi c\theta s\phi))^2 - L^2 = 0 \quad (72)$$

3.6.4.2 Barra 2

Desarrollando la Ec.(68):

$$(OB_2 - OC_2)_x^2 + (OB_2 - OC_2)_y^2 + (OB_2 - OC_2)_z^2 - L^2 = 0 \quad (73)$$

Las componentes de \mathbf{OB}_2 pueden observarse en la Ec.(52). Del mismo modo que para el caso de la Barra 1, el vector \mathbf{OC}_2 puede expresarse como:

$$\mathbf{OC}_2 = \begin{Bmatrix} (a - s_2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ (a - s_2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ec.(73), se obtiene la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} & \left(p_x - \frac{b}{2} \cdot u_x + \frac{\sqrt{3}b}{2} \cdot v_x + \frac{a-s_2}{2} \right)^2 + \left(p_y - \frac{b}{2} \cdot u_y + \frac{\sqrt{3}b}{2} \cdot v_y - \frac{\sqrt{3}(a-s_2)}{2} \right)^2 \\ & + \left(p_z - \frac{b}{2} \cdot u_z + \frac{\sqrt{3}b}{2} \cdot v_z \right)^2 - L^2 = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Finalmente, sustituyendo en esta ecuación las expresiones desarrolladas para las componentes de la matriz de rotación \mathbf{R} de la Ec.(50), se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & \left(p_x - \frac{b}{2} (c\theta c\phi + s\psi s\theta s\phi) + \frac{\sqrt{3}b}{2} (-c\theta s\phi + s\psi s\theta c\phi) + \frac{a-s_2}{2} \right)^2 \\ & + \left(p_y - \frac{b}{2} (c\psi s\phi) + \frac{\sqrt{3}b}{2} (c\psi c\phi) - \frac{\sqrt{3}(a-s_2)}{2} \right)^2 \\ & + \left(p_z - \frac{b}{2} (-s\theta c\phi + s\psi c\theta s\phi) + \frac{\sqrt{3}b}{2} (s\theta s\phi + s\psi c\theta c\phi) \right)^2 - L^2 = 0 \end{aligned} \quad (76)$$

3.6.4.3 Barra 3

Desarrollando la Ec.(68):

$$(OB_3 - OC_3)_x^2 + (OB_3 - OC_3)_y^2 + (OB_3 - OC_3)_z^2 - L^2 = 0 \quad (77)$$

Las componentes de \mathbf{OB}_3 se toman de la Ec.(52). Como en los casos anteriores, el vector \mathbf{OC}_3 puede definirse como:

$$\mathbf{OC}_3 = \begin{Bmatrix} (a-s_3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ (a-s_3) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (78)$$

Sustituyendo las expresiones de \mathbf{OB}_3 y \mathbf{OC}_3 en la Ec.(77), se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} & \left(p_x - \frac{b}{2} \cdot u_x - \frac{\sqrt{3}b}{2} \cdot v_x + \frac{a-s_3}{2} \right)^2 + \left(p_y - \frac{b}{2} \cdot u_y - \frac{\sqrt{3}b}{2} \cdot v_y + \frac{\sqrt{3}(a-s_3)}{2} \right)^2 \\ & + \left(p_z - \frac{b}{2} \cdot u_z - \frac{\sqrt{3}b}{2} \cdot v_z \right)^2 - L^2 = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

Por último, se sustituye en esta expresión los valores desarrollados en la matriz de rotación \mathbf{R} , mostrada en la Ec.(50), llegando a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \left(p_x - \frac{b}{2}(c\theta c\phi + s\psi s\theta s\phi) - \frac{\sqrt{3}b}{2}(-c\theta s\phi + s\psi s\theta c\phi) + \frac{a-s_3}{2} \right)^2 \\ & + \left(p_y - \frac{b}{2}(c\psi s\phi) - \frac{\sqrt{3}b}{2}(c\psi c\phi) + \frac{\sqrt{3}(a-s_3)}{2} \right)^2 \\ & + \left(p_z - \frac{b}{2}(-s\theta c\phi + s\psi c\theta s\phi) - \frac{\sqrt{3}b}{2}(s\theta s\phi + s\psi c\theta c\phi) \right)^2 - L^2 = 0 \end{aligned} \tag{80}$$

3.6.4.4 Programación del problema cinemático directo

Una vez desarrollado todo este planteamiento, alcanzamos un sistema de seis ecuaciones formado por las Ecs.(72), (76) y (80), junto con las expresiones definidas en las Ecs.(59)-(61), correspondientes a los movimientos parásitos. Para su resolución, se desarrolla en Matlab Simulink un solucionador algebraico en bucle iterativo, ver Figura 90, el cual presenta como entradas al sistema los desplazamientos producidos en los actuadores, s_i , y la posición inicial de la plataforma móvil, p_{z0} , Ψ_0 , θ_0 . Una vez resuelto el sistema de ecuaciones planteado, se obtiene como salida del sistema la posición real de la plataforma: p_z , Ψ , θ . Como se aprecia en el esquema mostrado, estas soluciones son empleadas como una realimentación directa en el proceso resolutivo, ver Figura 90.

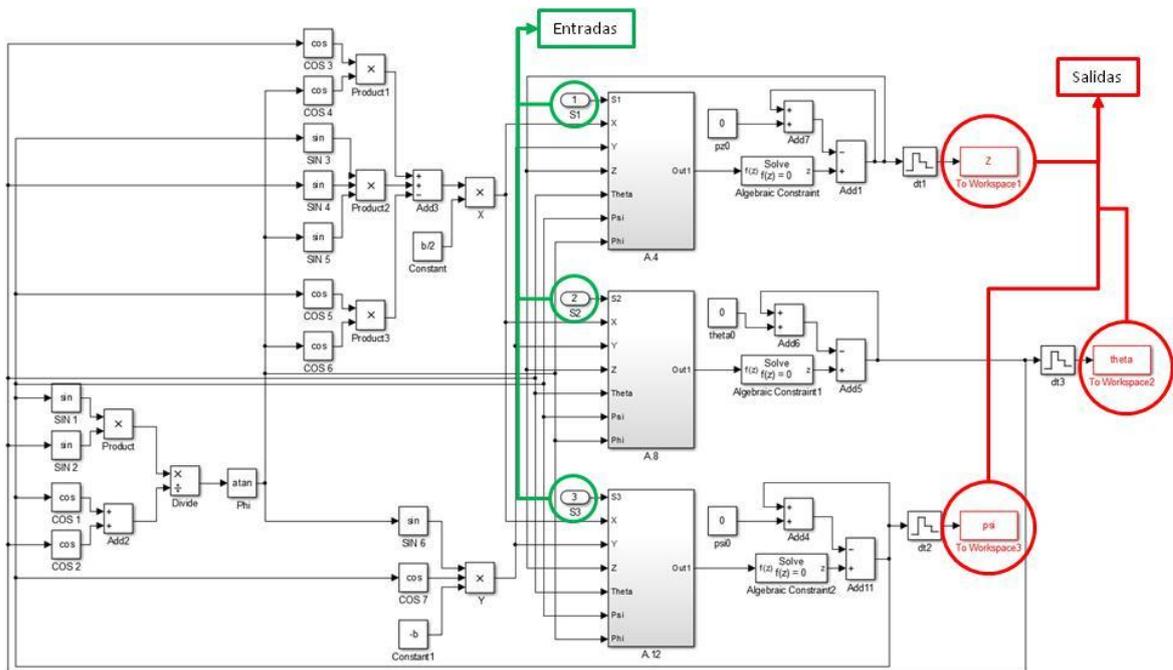


Figura 90. Esquema resolutivo del problema cinemático directo

Hay que señalar que en Simulink no es posible implementar una rutina fsolve de resolución numérica para las ecuaciones no lineales, por lo que se ha recurrido a este método. Se debe indicar que el motivo por el cual se ha utilizado este programa, es debido a que en él se ha desarrollado el modelado mecatrónico del manipulador, siendo este desarrollo una parte integrante del mismo.

3.6.5 Coordenadas Pasivas

En esta subsección serán calculados los ángulos girados en las juntas de revolución y esféricas, ya que se trata de un parámetro importante de diseño de la junta, puesto que su modelado posterior estará encaminado a lograr dichas rotaciones sin que se llegue a superar el límite elástico del material.

3.6.5.1 Rotación en las Juntas de Revolución

Los ángulos girados en cada una de las juntas de revolución pueden obtenerse realizando el siguiente desarrollo. A la vista de la Figura 89, se pueden expresar las siguientes equivalencias:

$$\mathbf{l}_{io} = \frac{\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i}{L} \quad i = 1, 2, 3 \quad (81)$$

Donde \mathbf{l}_{io} representa el versor que indica la dirección de cada una de las barras del manipulador. Conociendo esta información, los ángulos que toman las barras con la horizontal pueden obtenerse mediante el producto escalar de \mathbf{s}_{io} y \mathbf{l}_{io} , cuyas expresiones han sido mostradas en las Ecs.(64) y (81):

$$\alpha_i = \arccos(\mathbf{l}_{io} \cdot \mathbf{s}_{io}) \quad (82)$$

Por tanto, los ángulos girados en las juntas de revolución pueden obtenerse como la diferencia entre el ángulo α_i y el ángulo de partida α_0 .

3.6.5.2 Rotación en las Juntas Esféricas

Para obtener los giros en las juntas esféricas durante el funcionamiento del manipulador, se hace necesario localizar dos sistemas de referencia $\{m_i, n_i, l_i\}$ con origen sobre las juntas y cuyo eje l_i es orientado en dirección de la barra. El primero de ellos, \mathbf{S}_i en la Figura 91, se mantendrá "fijo" sobre la plataforma móvil, mientras que el segundo, \mathbf{S}_{io} , está ligado a la barra. Señalar que en la posición de partida ambos sistemas se solapan. El esquema de la configuración para la junta esférica ubicada en la Barra 1 puede observarse en la Figura 91. De esta forma, a efectos de obtener las especificaciones para las juntas esféricas, las rotaciones sobre los ejes m_i y n_i , β_{mi} y β_{ni} , harán referencia a la flexiones producidas en la junta esférica, mientras que la rotación sobre el eje l_i , β_{li} , hará referencia a la deformación torsional de la misma.

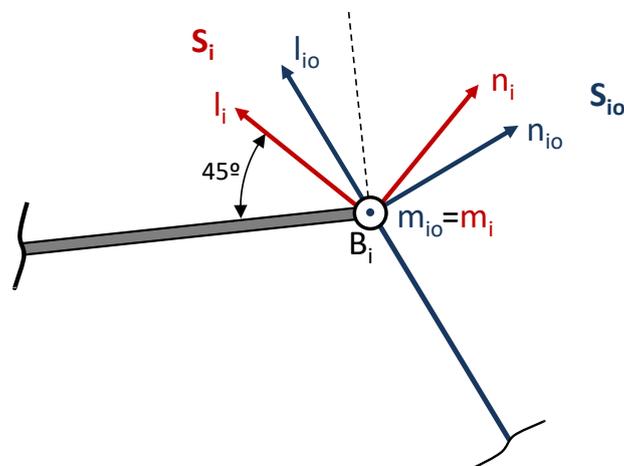


Figura 91. Sistemas de referencia empleados para obtener las rotaciones en las juntas esféricas

Para obtener los ángulos β_{mi} , β_{ni} y β_{li} , es necesario desarrollar la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas. Para ello, en primer lugar, se calculan los vectores directores de los ejes de cada sistema S_{i0} respecto al sistema fijo $\{x, y, z\}$. El vector unitario \mathbf{l}_{i0} se calcula como se mostró en la Ec.(81). Por otra parte, ya que todas las barras B_iC_i del manipulador se mueven en el plano vertical que contiene a los actuadores lineales a causa de las juntas de revolución, los vectores unitarios \mathbf{m}_{i0} para cada uno de los sistemas de referencia serán los vectores característicos de dichos planos, y vendrán dados por:

$$\mathbf{m}_{10} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{m}_{20} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{m}_{30} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (83)$$

Finalmente, los vectores unitarios \mathbf{n}_{i0} podrán ser obtenidos por medio del producto vectorial de \mathbf{l}_{i0} y \mathbf{m}_{i0} :

$$\mathbf{n}_{i0} = \mathbf{l}_{i0} \wedge \mathbf{m}_{i0} \quad (84)$$

Como resultado, la matriz de rotación \mathbf{R}_{i0} para transformar del sistema S_{i0} ubicado en cada una de las barras al sistema de referencia fijo, vendrá dada por:

$$\mathbf{R}_{i0} = [\mathbf{m}_{i0} \quad \mathbf{n}_{i0} \quad \mathbf{l}_{i0}] \quad (85)$$

Por otro lado, es necesario calcular las matrices de rotación de los sistemas S_i en el sistema de referencia $\{x, y, z\}$. Los vectores directores $\{m_{im}, n_{im}, l_{im}\}$ de cada uno de los sistemas S_i , en el sistema de referencia móvil $\{u, v, w\}$, serán definidos por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{1m} &= \{0 \quad -1 \quad 0\}^T \\ \mathbf{n}_{1m} &= \{\sin\alpha_0 \quad 0 \quad \cos\alpha_0\}^T \\ \mathbf{l}_{1m} &= \{-\cos\alpha_0 \quad 0 \quad \sin\alpha_0\}^T \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{2m} &= \left\{ \sqrt{3}/2 \quad 1/2 \quad 0 \right\}^T \\ \mathbf{n}_{2m} &= \left\{ -\sin\alpha_0/2 \quad \sin\alpha_0\sqrt{3}/2 \quad \cos\alpha_0 \right\}^T \\ \mathbf{l}_{2m} &= \left\{ \cos\alpha_0/2 \quad -\cos\alpha_0\sqrt{3}/2 \quad \sin\alpha_0 \right\}^T \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_{3m} &= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right\}^T \\
 \mathbf{n}_{3m} &= \left\{ -\frac{\sin\alpha_0}{2} \quad -\frac{\sin\alpha_0\sqrt{3}}{2} \quad \cos\alpha_0 \right\}^T \\
 \mathbf{l}_{3m} &= \left\{ \frac{\cos\alpha_0}{2} \quad \frac{\cos\alpha_0\sqrt{3}}{2} \quad \sin\alpha_0 \right\}^T
 \end{aligned} \tag{88}$$

Siendo $\alpha_0=45^\circ$ el valor por defecto de α_i en el caso de estudio propuesto. Para expresar estos vectores en el sistema de referencia fijo, es necesario multiplicarlos por la matriz de rotación de la plataforma móvil definida en la Ec.(50).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_i &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}_{im} \quad i=1,2,3 \\
 \mathbf{n}_i &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}_{im} \quad i=1,2,3 \\
 \mathbf{l}_i &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{l}_{im} \quad i=1,2,3
 \end{aligned} \tag{89}$$

Por lo tanto, las matrices de rotación \mathbf{R}_i , que transforman desde un sistema \mathbf{S}_i ubicado en la plataforma móvil al sistema de referencia fijo, serán expresadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_i = [\mathbf{m}_i \quad \mathbf{n}_i \quad \mathbf{l}_i]_{3 \times 3} \quad i=1,2,3 \tag{90}$$

Finalmente, la matriz de rotación \mathbf{R}_{i-i_0} entre los sistemas \mathbf{S}_{i_0} y \mathbf{S}_i podrá ser calculada por:

$$\mathbf{R}_{i-i_0} = \mathbf{R}_{i_0}^T \cdot \mathbf{R}_i \quad i=1,2,3 \tag{91}$$

Por otro lado, esta matriz puede desarrollarse en función de las tres rotaciones β_{mi} , β_{ni} , β_{li} , alrededor de los tres ejes que conforman a cada uno de los sistemas \mathbf{S}_{i_0} , ver Figura 92.

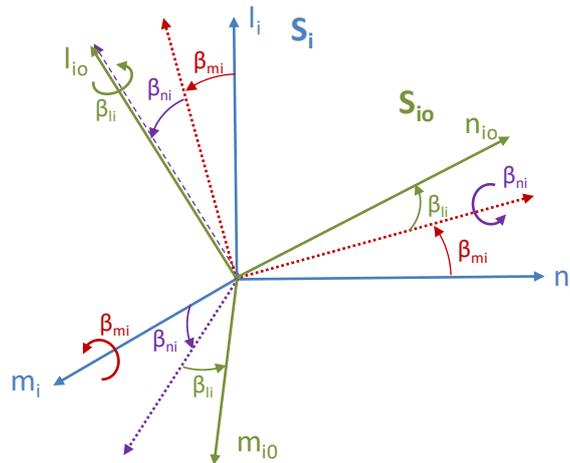


Figura 92. Rotaciones realizadas entre los sistemas \mathbf{S}_i y \mathbf{S}_{i_0}

Partiendo del sistema \mathbf{S}_i se introducirán las sucesivas rotaciones y se obtendrán las correspondientes matrices de rotación \mathbf{R}_m , \mathbf{R}_n , \mathbf{R}_l , donde la secuencia consiste en una rotación alrededor del eje m_i , seguida de una rotación alrededor del eje n_i y finalmente, una rotación

alrededor del eje I_i . Por tanto, la matriz de rotación que relaciona el sistema S_i con S_{i0} podrá ser expresada también como el producto de las anteriores matrices de rotación.

$$\mathbf{R}_{i-i0} = \mathbf{R}_m \cdot \mathbf{R}_n \cdot \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} c\beta_{n_i} \cdot c\beta_{l_i} & -c\beta_{n_i} \cdot s\beta_{l_i} & s\beta_{n_i} \\ s\beta_{m_i} \cdot s\beta_{n_i} \cdot c\beta_{l_i} + c\beta_{m_i} \cdot s\beta_{l_i} & -s\beta_{m_i} \cdot s\beta_{n_i} \cdot s\beta_{l_i} + c\beta_{m_i} \cdot c\beta_{l_i} & -s\beta_{m_i} \cdot c\beta_{n_i} \\ -c\beta_{m_i} \cdot s\beta_{n_i} \cdot c\beta_{l_i} + s\beta_{m_i} \cdot s\beta_{l_i} & c\beta_{m_i} \cdot s\beta_{n_i} \cdot s\beta_{l_i} + s\beta_{m_i} \cdot c\beta_{l_i} & c\beta_{m_i} \cdot c\beta_{n_i} \end{pmatrix} \quad (92)$$

Igualando los términos de las matrices de rotación \mathbf{R}_{i-i0} , mostrados en las Ecs.(91) y (92), se obtienen las rotaciones producidas en las juntas esféricas. Las expresiones resultantes son:

$$\beta_{m_i} = \text{atan} \left(\frac{-\mathbf{R}_{i-i0}(2,3)}{\mathbf{R}_{i-i0}(3,3)} \right) \quad (93)$$

$$\beta_{n_i} = \text{asin}(\mathbf{R}_{i-i0}(1,3)) \quad (94)$$

$$\beta_{l_i} = \text{atan} \left(\frac{-\mathbf{R}_{i-i0}(1,2)}{\mathbf{R}_{i-i0}(1,1)} \right) \quad (95)$$

3.6.6 Espacio de trabajo resultante y dimensiones finales del manipulador

Las dimensiones seleccionadas para el manipulador han sido $L=109.215$ mm, que es la longitud existente entre los dos puntos centrales de ambas juntas flexibles, en cada una de las barras. La distancia desde el eje de la plataforma al punto central de cada una de las juntas esféricas es $b=47.91$ mm. Los tres ángulos pasivos en la posición por defecto del manipulador son $\alpha_0=45^\circ$. Estas medidas pueden observarse en la Figura 89. Para las barras, se selecciona una sección de 10x10. En cuanto al material seleccionado para el mecanismo, se selecciona la aleación de aluminio 7075, la cual presenta un módulo de Young igual a 72 GPa, un coeficiente de Poisson de 0.33 y una densidad de 2.81g/cm³.

El otro punto a tratar en este apartado es el procedimiento seguido para delimitar el espacio de trabajo (EDT) del mecanismo 3PRS. Resulta especialmente importante este cálculo debido a que en una máquina de cinemática paralela, a pesar de sus dimensiones, el elemento terminal se mueve en un EDT limitado en comparación a éstas. Por lo tanto, se ha de analizar tanto el volumen como la forma del espacio de trabajo para mostrar la capacidad de operación que posee el manipulador.

3.6.6.1 Procedimiento de cálculo para la obtención del espacio de trabajo

Para realizar el cálculo del espacio de trabajo, se va a dividir el mismo en sub-áreas de trabajo paralelas a la base, para que posteriormente mediante un método numérico sean determinados los límites de cada sub-área, y de esta forma poder calcular el área de trabajo total.

El cálculo del espacio de trabajo consiste en saber decir, para cada altura a la que se puede mover el manipulador, qué valores de Ψ y θ son posibles. Haciendo esto para todo el rango de desplazamiento de alturas de z , queda un volumen (espacio de trabajo) con todas las posibles combinaciones de z , Ψ y θ .

Partiendo de una posición conocida z_0, ψ_0, θ_0 , el método consiste en ir avanzando, en primer lugar, un diferencial de radio dr , ver Figura 93. Para saber si un punto está dentro o no del espacio de trabajo, se debe resolver la cinemática inversa para ver si tiene solución y calcular el valor de los determinantes de los Jacobianos. En el momento en el que el resultado de dicho determinante tenga un cambio de signo respecto al calculado en el punto anterior, éste dejaría de pertenecer al espacio de trabajo, y por lo tanto estaría fuera. Habría que quedarse con el valor anterior al cambio del signo.

Una vez calculado el punto limitante del primer barrido (r), el siguiente paso a efectuar es realizar un incremento angular $d\phi$ (en el mismo plano $z=0$), ver Figura 93. De esta manera se procederá a evaluar los puntos sobre una recta inclinada. Se partirá del valor de la posición límite calculada en la iteración anterior de manera que si se produce un cambio de signo habrá que ir hacia atrás, reduciendo el valor del diferencial de radio, y en caso contrario aumentarlo hasta obtener la posición límite para dicha recta en esa posición angular.

El resultado del espacio de trabajo será más preciso cuanto menor sea el valor del incremento del diferencial del radio y del diferencial $d\phi$. Una vez se disponga de todos los puntos de contorno de espacio de trabajo a esa altura, se efectuará un incremento de altura dz y se repetirá de nuevo todo el proceso de iteración descrito anteriormente. Señalar que, como puede verse en la figura, ψ y θ quedan definidas como $r \cdot \cos \varphi$ y $r \cdot \sin \varphi$ respectivamente.

Finalmente, el volumen del espacio de trabajo total será la integral del producto de cada área por el diferencial de altura dz tomado para todas las iteraciones, es decir, la suma del volumen de los distintos discos con distintas áreas y con espesor dz .

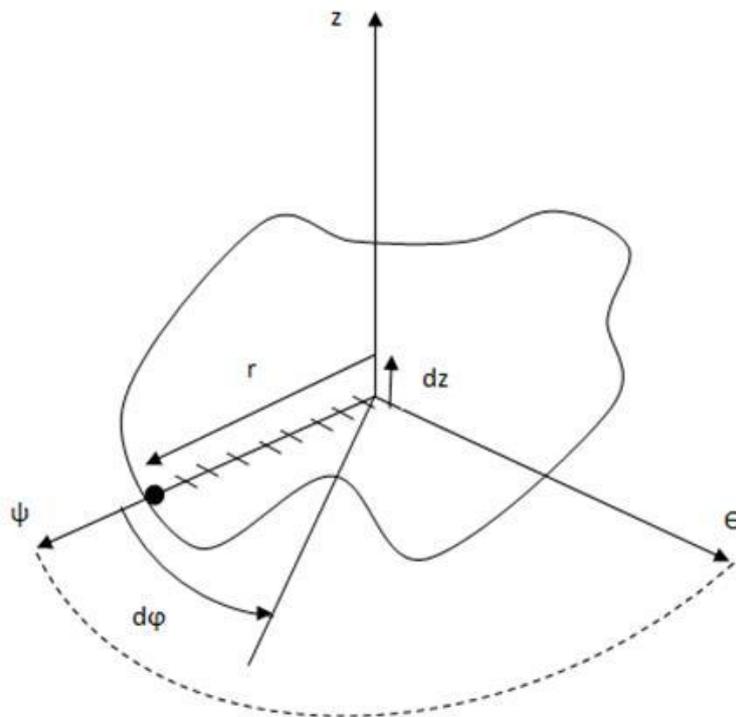


Figura 93. Esquema para cálculo del Espacio de Trabajo

Para la resolución del cálculo del espacio de trabajo, se ha empleado el software Matlab para su programación con el fin de poder estudiar todas las posibles combinaciones. Señalar que ha sido necesario introducir una serie de limitaciones físicas que permitieran obtener el resultado deseado. Así, se han establecido unos valores máximos para los desplazamientos de los pares actuados, s_i , para los ángulos α_i que pueden llegar a producirse en las juntas de revolución, así como para cada uno de los ángulos girados en las juntas esféricas, β_{li} , β_{mi} y β_{ni} . Estos valores son mostrados en el apartado 3.11.1 Requisitos en los pares cinemáticos.

Tras la resolución en Matlab, se ha obtenido un espacio de trabajo axisimétrico, como puede observarse en las siguientes imágenes.

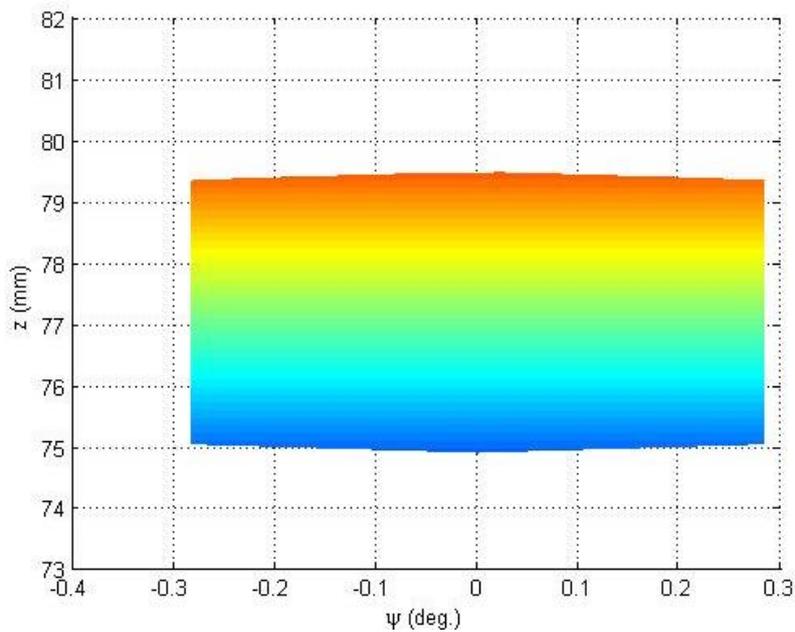


Figura 94. Espacio de trabajo. Vista Z - Ψ

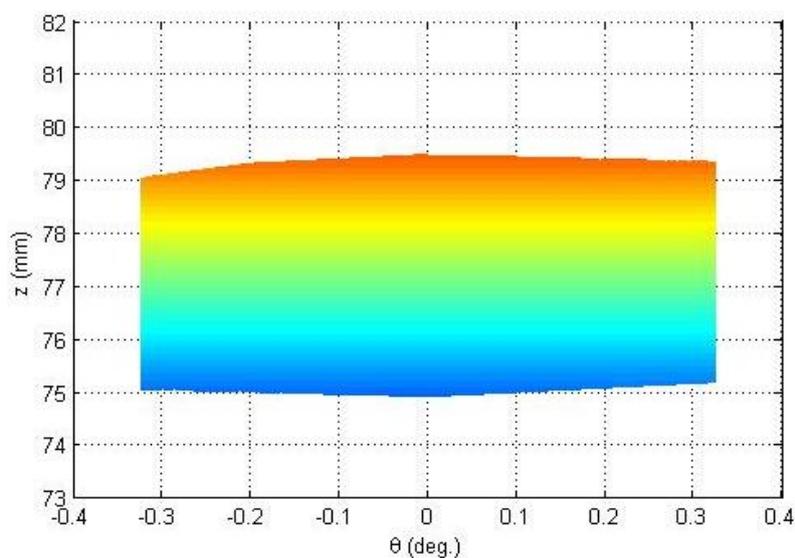


Figura 95. Espacio de trabajo. Vista Z - Θ

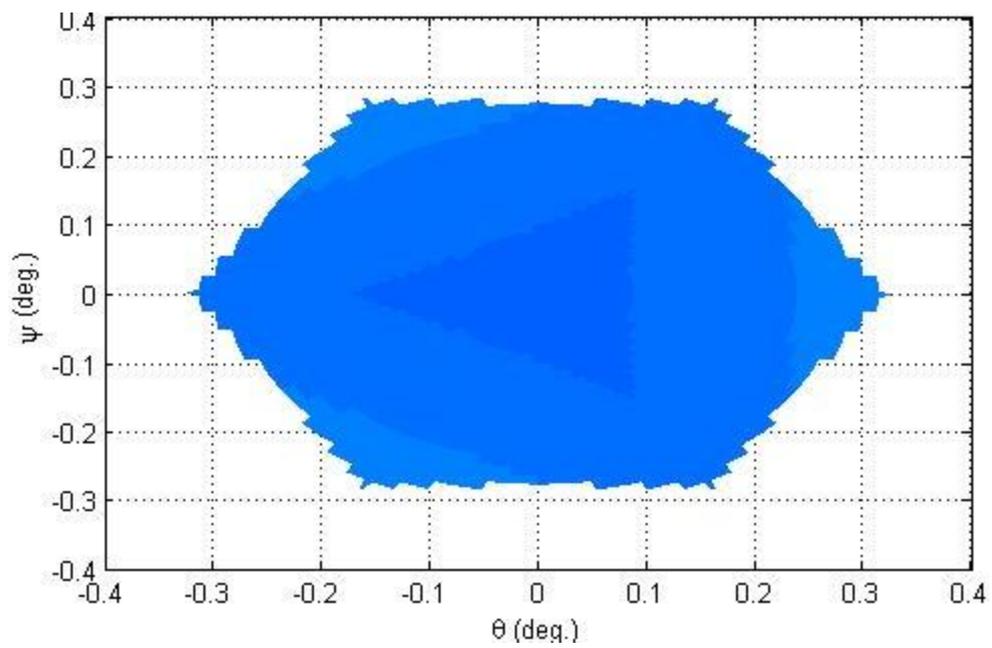


Figura 96. Espacio de trabajo. Vista Ψ - θ

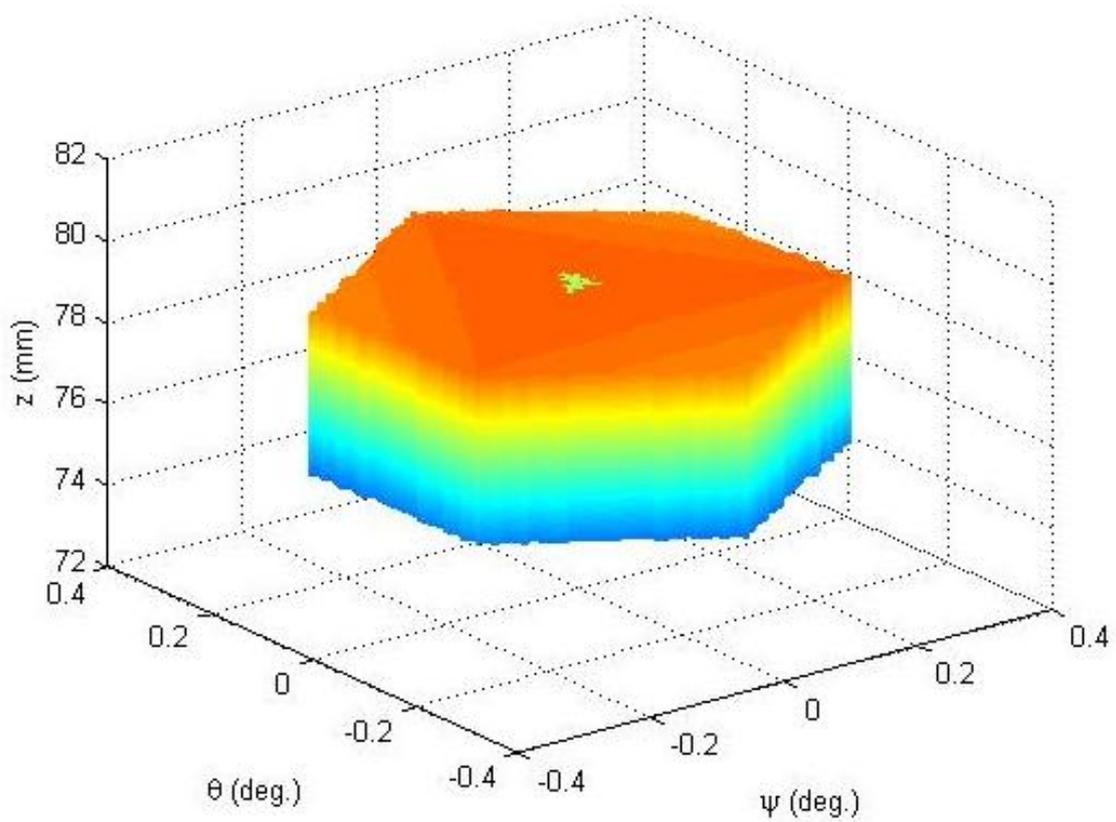


Figura 97. Espacio de trabajo. Vista Z - θ - Ψ

3.6.7 Problema de velocidades

En este apartado se van a calcular los jacobianos para cada uno de los componentes del mecanismo. Mediante ellos se lograrán alcanzar las relaciones existentes entre las derivadas primera de las coordenadas propias de cada uno de los elementos y las de las coordenadas generalizadas del sistema global del manipulador.

3.6.7.1 Jacobiano de la plataforma móvil

Planteando el cierre de lazo para cada una de las barras, desde O hasta B_i, pasando por el punto P, o bien por el punto A_i, se obtiene la siguiente expresión vectorial, ver Figura 89.

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PB}_i = \mathbf{OA}_i + s_i \cdot \mathbf{s}_{i0} + L \cdot \mathbf{l}_{i0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (96)$$

Donde s_i es el desplazamiento lineal de cada actuador i, s_{i0} es el vector unitario para cada uno de los vectores A_iC_i, L es la longitud de la barra entre las juntas de revolución y esférica y l_{i0} es el vector director ligado a las barras del mecanismo. Derivando la Ec.(96) respecto al tiempo se tiene:

$$\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p \wedge \mathbf{PB}_i = \dot{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i0} + L \cdot \mathbf{w}_i \wedge \mathbf{l}_{i0} \quad (97)$$

En la Ec. (97), v_p y w_p representan la velocidad del centro de gravedad P de la plataforma y la velocidad angular de la plataforma, ṡ_i es la velocidad lineal del actuador i y w_i es la velocidad angular de la barra i. Con el fin de eliminar la variable w_i, se realiza el producto escalar de ambos lados por l_{i0}. La ecuación resultante es:

$$\mathbf{l}_{i0} \cdot \mathbf{v}_p + (\mathbf{PB}_i \wedge \mathbf{l}_{i0}) \cdot \mathbf{w}_p = \mathbf{s}_{i0} \cdot \mathbf{l}_{i0} \cdot \dot{s}_i \quad (98)$$

En forma matricial se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_{10}^T & (\mathbf{PB}_1 \wedge \mathbf{l}_{10})^T \\ \mathbf{l}_{20}^T & (\mathbf{PB}_2 \wedge \mathbf{l}_{20})^T \\ \mathbf{l}_{30}^T & (\mathbf{PB}_3 \wedge \mathbf{l}_{30})^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \mathbf{w}_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{10} \cdot \mathbf{l}_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_{20} \cdot \mathbf{l}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{30} \cdot \mathbf{l}_{30} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_{p1} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_{p2} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (99)$$

Donde ṗ corresponde al vector con las componentes de la velocidad lineal y angular de la plataforma y ṡ al vector de velocidades en los actuadores:

$$\dot{\mathbf{p}} = \left\{ \dot{p}_x \quad \dot{p}_y \quad \dot{p}_z \quad w_{px} \quad w_{py} \quad w_{pz} \right\}^T \quad (100)$$

Los términos l_{i0}, s_{i0} y PB_i de las matrices J_{p1} y J_{p2} ya se han planteado en las ecuaciones (81), (64) y (49).

Por otra parte, como se vio en la sección 3.6.2, el movimiento de las barras está restringido a un plano por las juntas de revolución. Dichas restricciones pueden ser expresadas por la siguiente expresión:

$$\mathbf{OB}_i \cdot \mathbf{m}_{i0} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{OP} + \mathbf{PB}_i) \cdot \mathbf{m}_{i0} = 0 \quad (101)$$

Donde \mathbf{m}_{i0} son los vectores característicos de estos planos que restringen el movimiento, los cuales fueron definidos en la Ec. (83). Derivando la Ec. (101) y reordenando sus elementos se obtiene:

$$\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{m}_{i0} + (\mathbf{PB}_i \wedge \mathbf{m}_{i0}) \cdot \mathbf{w}_p = 0 \quad (102)$$

La cual, mostrada en su forma matricial, adopta la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{10}^T & (\mathbf{PB}_1 \wedge \mathbf{m}_{10})^T \\ \mathbf{m}_{20}^T & (\mathbf{PB}_2 \wedge \mathbf{m}_{20})^T \\ \mathbf{m}_{30}^T & (\mathbf{PB}_3 \wedge \mathbf{m}_{30})^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \mathbf{w}_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}_{P3} \cdot \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{0}] \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (103)$$

Agrupando las Ecs.(99) y (103) en una única expresión, se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P1_{3 \times 6}} \\ \mathbf{J}_{P3_{3 \times 6}} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P2_{3 \times 3}} \\ [\mathbf{0}]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 3} \cdot \dot{\mathbf{s}} \Rightarrow \mathbf{J}_p \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_s \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (104)$$

Finalmente, el jacobiano de la plataforma, el cual relaciona sus velocidades con las coordenadas generalizadas del sistema global del manipulador, será definido por la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{J}_p^{-1} \cdot \mathbf{J}_s] \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{\text{plat}} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (105)$$

3.6.7.2 Jacobiano de las barras $A_i B_i$

Partiendo de la Ec. (97), multiplicándola por \mathbf{PB}_i y reordenando, se obtiene:

$$\mathbf{PB}_i \cdot \mathbf{v}_p = (\mathbf{PB}_i \cdot \mathbf{s}_{i0}) \cdot \dot{s}_i + L \cdot (\mathbf{l}_{i0} \wedge \mathbf{PB}_i) \cdot \mathbf{w}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (106)$$

Donde \mathbf{w}_i es la velocidad angular de la barra i . Este término se puede plantear de la siguiente forma, teniendo en cuenta que cada barra siempre permanece en su plano de vector característico \mathbf{m}_{i0} y que α_i es el ángulo que forman con respecto a la horizontal

$$\mathbf{w}_i = w_i \cdot \mathbf{m}_{i0} = \frac{d\alpha_i}{dt} \cdot \mathbf{m}_{i0} \quad (107)$$

Sustituyendo en la Ec. (106), introduciendo la Ec. (84) y reordenando:

$$L \cdot (\mathbf{n}_{i0} \cdot \mathbf{PB}_i) \cdot w_i = -\mathbf{PB}_i \cdot \mathbf{v}_p + (\mathbf{PB}_i \cdot \mathbf{s}_{i0}) \cdot \dot{s}_i \quad (108)$$

Desarrollando en forma matricial el primer término de la derecha, e introduciendo la Ec. (100):

$$-\mathbf{PB}_i \cdot \mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} -\mathbf{PB}_1^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{PB}_2^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{PB}_3^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{PB}_1^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{PB}_2^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{PB}_3^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_{\text{plat}} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (109)$$

Sustituyendo en la Ec. (108), se obtiene la siguiente expresión, donde \mathbf{J}_{wi} son los jacobianos que relacionan la velocidad angular de las barras con la velocidad en los actuadores $\dot{\mathbf{s}}$:

$$\mathbf{J}_w \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_{ws} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_w^{-1} \cdot \mathbf{J}_{ws}] \cdot \dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} [\mathbf{J}_{w1}]_{1 \times 3} \\ [\mathbf{J}_{w2}]_{1 \times 3} \\ [\mathbf{J}_{w3}]_{1 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_a \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (110)$$

Además:

$$\mathbf{J}_w = \begin{bmatrix} L \cdot (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{PB}_1) & 0 & 0 \\ 0 & L \cdot (\mathbf{n}_{20} \cdot \mathbf{PB}_2) & 0 \\ 0 & 0 & L \cdot (\mathbf{n}_{30} \cdot \mathbf{PB}_3) \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$\mathbf{J}_{ws} = \left[\begin{array}{c} [-\mathbf{PB}_1^T \quad \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3}] \\ [-\mathbf{PB}_2^T \quad \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3}] \\ [-\mathbf{PB}_3^T \quad \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3}] \end{array} \cdot \mathbf{J}_{\text{plat}} + \begin{bmatrix} \mathbf{PB}_1 \cdot \mathbf{s}_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{PB}_2 \cdot \mathbf{s}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{PB}_3 \cdot \mathbf{s}_{30} \end{bmatrix} \right]$$

Por otra parte, la ecuación vectorial que localiza el centro de gravedad de cada barra de longitud L es la siguiente:

$$\mathbf{r}_{Gi} = \begin{Bmatrix} x_{Gi} \\ y_{Gi} \\ z_{Gi} \end{Bmatrix} = \mathbf{OA}_i + s_i \cdot \mathbf{s}_{i0} + \frac{L}{2} \cdot \mathbf{l}_{i0} \quad (112)$$

Derivando esta expresión se obtiene:

$$\mathbf{v}_{Gi} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_{Gi} \\ \dot{y}_{Gi} \\ \dot{z}_{Gi} \end{Bmatrix} = \dot{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i0} + \frac{L}{2} \cdot \mathbf{w}_i \wedge \mathbf{l}_{i0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{Gi} - \frac{L \cdot w_i}{2} \cdot (\mathbf{m}_{i0} \wedge \mathbf{l}_{i0}) = \dot{s}_i \cdot \mathbf{s}_{i0} \quad (113)$$

Expresando la Ec. (113) en forma matricial, e introduciendo el jacobiano obtenido en la Ec. (110) para cada barra y la delta de Kronecker, se obtienen los jacobianos directo \mathbf{J}_{i1} e inverso \mathbf{J}_{i2} de cada barra i .

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{I}] & \frac{L}{2} \{\mathbf{n}_{i0}\} \\ \{\mathbf{0}\} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{Gi} \\ \dot{\alpha}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{i0} \cdot \delta_{1i} & \mathbf{s}_{i0} \cdot \delta_{2i} & \mathbf{s}_{i0} \cdot \delta_{3i} \\ & \{\mathbf{J}_{ai}\} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{Bmatrix} \quad (114)$$

$$\mathbf{J}_{i1} \cdot \dot{\mathbf{q}}_{bi} = \mathbf{J}_{i2} \cdot \dot{\mathbf{s}}$$

Finalmente, el jacobiano de la barra i se obtiene como:

$$\dot{\mathbf{q}}_{bi} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{Gi} \\ w_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}_{i1}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{i2}] \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{bi} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (115)$$

3.6.7.3 Juntas esféricas

El objeto de este apartado es obtener el jacobiano que relaciona la derivada primera de los giros β en las juntas esféricas con la velocidad de los actuadores. De nuevo, se parte de la Ec. (97), y se sustituye la velocidad angular de la plataforma planteando su movimiento relativo a cada una de las j barras.

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{prj} \quad j = 1, 2, 3 \quad (116)$$

De esta forma, se obtienen 9 ecuaciones:

$$\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_j \wedge \mathbf{PB}_i + \mathbf{w}_{prj} \wedge \mathbf{PB}_i = \dot{\mathbf{s}}_i \cdot \mathbf{s}_{i0} + L \cdot \mathbf{w}_i \wedge \mathbf{l}_{i0} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (117)$$

Con el fin de eliminar la variable \mathbf{w}_i , se realiza el producto escalar de ambos lados por \mathbf{l}_{i0} . Recolocando términos, la ecuación resultante es:

$$(\mathbf{PB}_i \wedge \mathbf{l}_{i0}) \cdot \mathbf{w}_{prj} = -\mathbf{l}_{i0} \cdot \mathbf{v}_p - (\mathbf{PB}_i \wedge \mathbf{l}_{i0}) \cdot \mathbf{w}_j + (\mathbf{l}_{i0} \cdot \mathbf{s}_{i0}) \cdot \dot{\mathbf{s}}_i \quad (118)$$

En formato matricial, para el movimiento relativo respecto a una de las j barras:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{PB}_1 \wedge \mathbf{l}_{10})^T \\ (\mathbf{PB}_2 \wedge \mathbf{l}_{20})^T \\ (\mathbf{PB}_3 \wedge \mathbf{l}_{30})^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{prjx} \\ w_{prjy} \\ w_{prjz} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{10}^T \\ \mathbf{l}_{20}^T \\ \mathbf{l}_{30}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_p - \begin{bmatrix} (\mathbf{PB}_1 \wedge \mathbf{l}_{10}) \\ (\mathbf{PB}_2 \wedge \mathbf{l}_{20}) \\ (\mathbf{PB}_3 \wedge \mathbf{l}_{30}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{w}_j + \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{10} \cdot \mathbf{l}_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_{20} \cdot \mathbf{l}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{30} \cdot \mathbf{l}_{30} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (119)$$

En la ecuación anterior, por una parte, la velocidad relativa \mathbf{w}_{prj} en el sistema de referencia global viene dada por la suma de los giros alrededor de los ejes m_i , n_i y l_i en el sistema de referencia local \mathbf{S}_i de la junta esférica i sobre la plataforma móvil, premultiplicada por la correspondiente matriz de rotación \mathbf{R}_j , ya desarrollada en la Ec. (90).

$$\mathbf{w}_{prj} = \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{w}_{rj} = \mathbf{R}_j \cdot (\mathbf{w}_{mj} + \mathbf{w}_{nj} + \mathbf{w}_{lj}) = \mathbf{R}_j \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & s\beta_{nj} \\ 0 & c\beta_{mj} & -s\beta_{mj} \cdot c\beta_{nj} \\ 0 & s\beta_{mj} & c\beta_{mj} \cdot c\beta_{nj} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_{mj} \\ \dot{\beta}_{nj} \\ \dot{\beta}_{lj} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{\beta j} \cdot \dot{\beta}_j \quad (120)$$

Por otra parte, el término dependiente de la velocidad del punto P se puede plantear de la siguiente manera, aplicando la relación (105):

$$- \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{10}^T \\ \mathbf{l}_{20}^T \\ \mathbf{l}_{30}^T \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} -\mathbf{l}_{10}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{l}_{20}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{l}_{30}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{l}_{10}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{l}_{20}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{l}_{30}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_{\text{plat}} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (121)$$

Además, el término dependiente de la velocidad angular de la barra j , se puede operar de la siguiente forma a partir de las Ecs. (107) y (110):

$$- \begin{bmatrix} (\mathbf{PB}_1 \wedge \mathbf{l}_{10}) \\ (\mathbf{PB}_2 \wedge \mathbf{l}_{20}) \\ (\mathbf{PB}_3 \wedge \mathbf{l}_{30}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{w}_j = \begin{bmatrix} -(\mathbf{PB}_1 \wedge \mathbf{l}_{10}) \cdot \mathbf{m}_{j0} \\ -(\mathbf{PB}_2 \wedge \mathbf{l}_{20}) \cdot \mathbf{m}_{j0} \\ -(\mathbf{PB}_3 \wedge \mathbf{l}_{30}) \cdot \mathbf{m}_{j0} \end{bmatrix} \cdot w_j = \begin{bmatrix} (\mathbf{l}_{10} \wedge \mathbf{PB}_1) \cdot \mathbf{m}_{j0} \\ (\mathbf{l}_{20} \wedge \mathbf{PB}_2) \cdot \mathbf{m}_{j0} \\ (\mathbf{l}_{30} \wedge \mathbf{PB}_3) \cdot \mathbf{m}_{j0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_{w_j} \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (122)$$

Introduciendo las Ecs. (120), (121) y (122) en (119), se obtiene el jacobiano deseado para la junta esférica de la barra j:

$$\mathbf{J}_{\beta j1} \cdot \dot{\beta}_j = \mathbf{J}_{\beta j2} \cdot \dot{s} \quad \rightarrow \quad \dot{\beta}_j = [\mathbf{J}_{\beta j1}^{-1} \mathbf{J}_{\beta j2}] \cdot \dot{s} = \mathbf{J}_{\beta j} \cdot \dot{s} \quad (123)$$

Donde los jacobianos directo e inverso son, respectivamente:

$$\mathbf{J}_{\beta j1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{PB}_1 \wedge \mathbf{l}_{10})^T \\ (\mathbf{PB}_2 \wedge \mathbf{l}_{20})^T \\ (\mathbf{PB}_3 \wedge \mathbf{l}_{30})^T \end{pmatrix} \mathbf{R}_j \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & s\beta_{nj} \\ 0 & c\beta_{mj} & -s\beta_{mj} \cdot c\beta_{nj} \\ 0 & s\beta_{mj} & c\beta_{mj} \cdot c\beta_{nj} \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$\mathbf{J}_{\beta j2} = \begin{bmatrix} -\mathbf{l}_{10}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{l}_{20}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \\ -\mathbf{l}_{30}^T & \{\mathbf{0}\}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_{\text{plat}} + \begin{bmatrix} (\mathbf{l}_{10} \wedge \mathbf{PB}_1) \cdot \mathbf{m}_{j0} \\ (\mathbf{l}_{20} \wedge \mathbf{PB}_2) \cdot \mathbf{m}_{j0} \\ (\mathbf{l}_{30} \wedge \mathbf{PB}_3) \cdot \mathbf{m}_{j0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_{\text{wj}} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{10} \cdot \mathbf{l}_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_{20} \cdot \mathbf{l}_{20} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_{30} \cdot \mathbf{l}_{30} \end{bmatrix}$$

3.7 Análisis dinámico

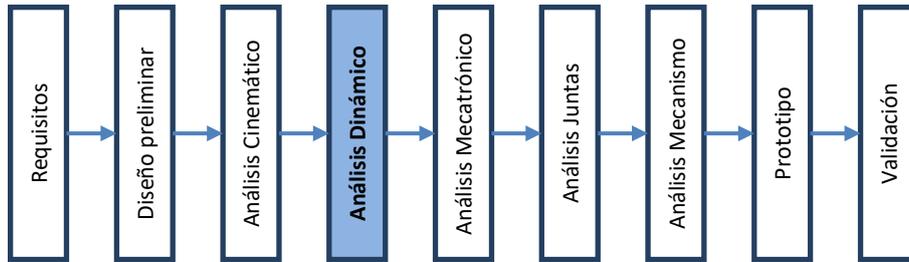


Figura 98. Metodología propuesta, paso 4: Análisis Dinámico

Una vez definida la cinemática del manipulador, el siguiente paso es la obtención de las fuerzas necesarias para generar el movimiento. Es por ello que se hace necesaria la resolución del problema dinámico inverso en el que, por medio de una serie de ecuaciones diferenciales, se describe la dinámica del manipulador. En este desarrollo, a partir del movimiento del manipulador, se obtienen las fuerzas necesarias en función de las componentes debidas a los efectos inerciales, centrífugos y de Coriolis, así como los gravitatorios. En el caso de las juntas flexibles, además se deben de considerar las fuerzas elásticas debidas a las deformaciones de las mismas.

3.8 Problema dinámico inverso del mecanismo 3-PRS

De los diferentes métodos resolutivos para el modelo dinámico, explicados en el apartado 2.6.2 Dinámica: Tipos de formulaciones, se ha empleado una variante de las Ecuaciones de Lagrange de la Mecánica Analítica, con el fin de facilitar su aplicación a este tipo de manipuladores paralelos mediante el Principio de Equivalencia de Energía, además de conseguir un coste computacional razonable que permita su resolución [176].

El método establece un conjunto de ecuaciones diferenciales para describir la dinámica del manipulador, en función de las variables actuadas, las propiedades másicas, las rigideces de los elementos flexibles y las fuerzas que intervienen en el proceso.

Para resolver el problema dinámico inverso del manipulador, se divide el mecanismo en b subsistemas de cadena abierta en los que las ecuaciones de Lagrange pueden ser fácilmente planteadas con respecto a las coordenadas específicas de cada elemento, \mathbf{q}_b . Las ecuaciones del movimiento de los subsistemas se plantearán en función de la lagrangiana L_b y las fuerzas generalizadas τ_b , donde la función lagrangiana L_b para cada uno de los subsistemas del manipulador se define como $L_b = T_b - V_b$, siendo T_b la energía cinética y V_b la energía potencial.

$$\tau_b = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial L_b}{\partial q_b} \quad (125)$$

La condición de que b subsistemas se desplacen como si pertenecieran a un mecanismo ensamblado a implica que \mathbf{q}_b , el conjunto de todas las coordenadas generalizadas \mathbf{q}_b pertenecientes a cada subsistema b , es una función de las coordenadas generalizadas \mathbf{q}_a . Así, los desplazamientos virtuales podrán ser relacionados por medio del Jacobiano correspondiente:

$$\delta \mathbf{q}_b = \frac{\partial \mathbf{q}_b}{\partial \mathbf{q}_a} \delta \mathbf{q}_a = \mathbf{J} \delta \mathbf{q}_a \quad (126)$$

Por otro lado, al fijar la condición de que ambos sistemas realicen el mismo movimiento, el trabajo virtual realizado tanto por el sistema ensamblado como por el conjunto de subsistemas, debe de ser el mismo:

$$\delta W_a = \delta W_b \quad (127)$$

$$\delta \mathbf{q}_a^T \boldsymbol{\tau}_a = \delta \mathbf{q}_b^T \boldsymbol{\tau}_b = \delta \mathbf{q}_a^T \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau}_b \quad (128)$$

Por lo tanto, las fuerzas o pares necesarios para generar el movimiento del manipulador se obtienen como:

$$\boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\tau}_b = \sum_{b=1}^B \mathbf{J}_b^T \boldsymbol{\tau}_b \quad (129)$$

Aplicando este método al manipulador 3PRS, objeto de esta tesis, en el que se han considerado como coordenadas generalizadas del sistema global los desplazamientos en los actuadores representados por $\mathbf{q}_a = \{s_1 \ s_2 \ s_3\}^T$, se obtienen las expresiones desarrolladas en las siguientes subsecciones.

3.8.1 Plataforma móvil

Para resolver el problema dinámico del subsistema de la plataforma, se analizan por separado las distintas contribuciones a la función lagrangiana, es decir, la energía cinética de traslación considerando la plataforma como una masa puntual situada en el centro de gravedad, la energía cinética debida a la rotación alrededor del centro de gravedad, la energía potencial gravitatoria, y la energía potencial elástica debida a la deformación de las juntas esféricas en el movimiento de la plataforma respecto a las barras.

Por otra parte, se tendrá en cuenta el efecto de las fuerzas externas aplicadas sobre la plataforma. Se considera una fuerza aplicada $\mathbf{f}_{\text{extm}} = \{F_u \ F_v \ F_w\}$ sobre la superficie de la plataforma con el fin de tener en cuenta las posibles cargas soportadas durante las condiciones de trabajo. Ésta es aplicada en una posición $\overline{\mathbf{PD}}_m = \{d_u, d_v, d_w\}$ del centro de la plataforma, generando por lo tanto fuerzas y momentos sobre la misma. Por tanto, en el sistema de referencia global del manipulador la fuerza externa resultante es:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_{\text{extm}} \quad (130)$$

Respecto a los momentos, en el sistema global se obtienen según la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{extm}} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{PD}_m \wedge \mathbf{f}_{\text{extm}}) \quad (131)$$

3.8.1.1 Contribución del movimiento de traslación

Considerando la plataforma como una masa puntual localizada en el centro de gravedad que se traslada en el espacio, la función lagrangiana se plantea de la siguiente forma en función de las coordenadas del propio centro de gravedad en el sistema de referencia global p_x, p_y, p_z .

$$L_{p_r} = T_{p_r} - V_{p_r} = \frac{1}{2} \cdot M_p \cdot (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2) - M_p \cdot g \cdot p_z \quad (132)$$

Por tanto, la ecuación del movimiento es:

$$\begin{bmatrix} M_p & 0 & 0 \\ 0 & M_p & 0 \\ 0 & 0 & M_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_x \\ \ddot{p}_y \\ \ddot{p}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{p}}_T + \mathbf{g} \quad (133)$$

Aplicando el Principio de Equivalencia de Energía, se reemplazan las coordenadas generalizadas de este subsistema por su relación con las coordenadas generalizadas globales del mecanismo ensamblado. Teniendo en cuenta la parte de traslación del Jacobiano de la plataforma de la Ec. (105):

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_T \\ \mathbf{w}_p \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_{\text{plat}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{plat}_T} \\ \mathbf{J}_{\text{plat}_R} \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{s}} \rightarrow \ddot{\mathbf{p}}_T = \mathbf{J}_{\text{plat}_T} \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{plat}_T} \dot{\mathbf{s}} \quad (134)$$

Finalmente, la contribución a la dinámica global del manipulador se obtiene, según la Ec. (129), premultiplicando la ecuación del movimiento por la traspuesta del Jacobiano del subsistema. Sustituyendo (134) en (133), la contribución del movimiento de traslación al problema dinámico del mecanismo es:

$$\mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} = \left[\mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{M}_{\text{plat}} \mathbf{J}_{\text{plat}_T} \right] \ddot{\mathbf{s}} + \left[\mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{M}_{\text{plat}} \dot{\mathbf{J}}_{\text{plat}_T} \right] \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{g} \quad (135)$$

3.8.1.2 Contribución del movimiento de rotación

A continuación, se considera la dinámica de la plataforma móvil como un cuerpo que gira alrededor de su centro de gravedad. Para tener en cuenta la contribución de este movimiento

a la dinámica global de una forma eficiente, se ha recurrido a las ecuaciones de Boltzmann-Hammel, empleando las componentes de la velocidad angular en el sistema de referencia móvil \mathbf{w}_{pm} como cuasivelocidades. Éstas dependen de las rotaciones alrededor de los ejes X, Y, Z, a saber, ψ, θ, ϕ , y sus derivadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{w}_{pm} = \mathbf{W} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} c\phi & s\phi c\psi & 0 \\ -s\phi & c\phi c\psi & 0 \\ 0 & -s\psi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (136)$$

Dado que a partir de la Ec. (136) es posible relacionar las componentes de la velocidad angular en el sistema de referencia fijo con la derivada primera de las coordenadas generalizadas del mecanismo, empleando la matriz de rotación de la plataforma \mathbf{R} , se puede plantear la siguiente relación:

$$\mathbf{w}_{pm} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{w}_p = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\text{plat}_R} \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{W} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}} = \left[\mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{J}_{\text{plat}_R} \right] \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_q \cdot \dot{\mathbf{s}} \quad (137)$$

La parte de la función lagrangiana debida sólo a este movimiento, planteando la energía cinética en el sistema de referencia móvil, se obtiene de la siguiente forma:

$$L_{p_R} = T_{p_R} - V_{p_R} = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{pm}^T \cdot \mathbf{I}_P \cdot \mathbf{w}_{pm} \quad (138)$$

Aplicando la ecuación de Boltzmann-Hammel para obtener la ecuación del movimiento, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{w}_{pm}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{w}_{pm}} \right) - \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{w}_{pm}} \right) \quad (139)$$

Desarrollando cada uno de los términos de la suma de la Ec.(139):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{w}_{pm}} \right) &= \mathbf{W}^T \cdot (\mathbf{I}_P \cdot \dot{\mathbf{w}}_{pm}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{w}_{pm}} \right) &= \dot{\mathbf{W}}^T \cdot (\mathbf{I}_P \cdot \mathbf{w}_{pm}) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{w}_{pm}} \right) &= \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \cdot (\mathbf{I}_P \cdot \mathbf{w}_{pm}) \end{aligned} \quad (140)$$

Y sustituyendo en la Ec.(139):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{p_R}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L_{p_R}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_P \cdot \dot{\mathbf{w}}_{pm} + \dot{\mathbf{W}}^T \cdot \mathbf{I}_P \cdot \mathbf{w}_{pm} - \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \cdot \mathbf{I}_P \cdot \mathbf{w}_{pm} \quad (141)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (136) y (137), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{pR}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L_{pR}}{\partial \mathbf{q}} &= [\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W}] \cdot \mathbf{J}_q \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \dots \\ \dots + \left[[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W}] \cdot \dot{\mathbf{J}}_q + \left[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \dot{\mathbf{W}} + \dot{\mathbf{W}}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} - \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} \right] \cdot \mathbf{J}_q \right] \cdot \dot{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (142)$$

Finalmente, la contribución a la dinámica total del manipulador se obtiene premultiplicando por el Jacobiano \mathbf{J}_q . Teniendo en cuenta también el momento de las fuerzas externas aplicadas sobre la plataforma respecto al centro de gravedad $\boldsymbol{\tau}_{ext}$, se puede plantear dicha contribución de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{platR}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{ext} &= [\mathbf{J}_q^T \cdot [\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W}] \cdot \mathbf{J}_q] \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \dots \\ \dots + \left[\mathbf{J}_q^T \cdot [\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W}] \cdot \dot{\mathbf{J}}_q + \mathbf{J}_q^T \cdot \left[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \dot{\mathbf{W}} + \dot{\mathbf{W}}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} - \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} \right] \cdot \mathbf{J}_q \right] \cdot \dot{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (143)$$

3.8.1.3 Contribución de la energía potencial elástica de las juntas esféricas

El movimiento de la plataforma relativo a las tres barras produce la deformación elástica de las juntas esféricas, cuya contribución al problema dinámico es necesario tener en cuenta. Así pues, la parte de la función lagrangiana de la plataforma móvil que depende de dicho fenómeno es la siguiente:

$$L_{pK} = -V_{pK} = -\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \cdot \mathbf{K}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i \quad (144)$$

Siendo:

$$\boldsymbol{\beta}_i = \{ \beta_{mi} \quad \beta_{ni} \quad \beta_{li} \}^T \quad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_{ef} & 0 & 0 \\ 0 & k_{ef} & 0 \\ 0 & 0 & k_{et} \end{bmatrix} \quad (145)$$

Donde k_{ef} y k_{et} son las rigideces a flexión y torsión de las juntas esféricas.

Habiendo obtenido los correspondientes jacobianos en la Ec. (123), la contribución a la ecuación del movimiento derivando respecto a las coordenadas generalizadas globales del mecanismo se obtiene directamente como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{pK}}{\partial \dot{\mathbf{s}}} \right) - \frac{\partial L_{pK}}{\partial \mathbf{s}} = -\frac{\partial V_{pK}}{\partial \mathbf{s}} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_i^T}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{K}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_i^T \cdot \mathbf{K}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_i}{\partial \mathbf{s}} \right) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{\beta_i}^T \cdot \mathbf{K}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_i \quad (146)$$

Donde los ángulos de giro beta se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones, que ya han sido demostradas en la cinemática del manipulador.

$$\mathbf{R}_{i-i_0} = \mathbf{R}_{i_0}^T \cdot \mathbf{R}_i \quad i=1,2,3 \quad (147)$$

$$\beta_{mi} = \text{atan}\left(\frac{-\mathbf{R}_{i-io}(2,3)}{\mathbf{R}_{i-io}(3,3)}\right) \quad (148)$$

$$\beta_{ni} = \text{asin}(\mathbf{R}_{i-io}(1,3)) \quad (149)$$

$$\beta_{li} = \text{atan}\left(\frac{-\mathbf{R}_{i-io}(1,2)}{\mathbf{R}_{i-io}(1,1)}\right) \quad (150)$$

3.8.1.4 Contribución total de la plataforma móvil a la dinámica global del manipulador

Una vez desarrollado cada uno de los casos, la contribución de la plataforma al problema dinámico del conjunto del mecanismo 3-PRS se plantea de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{M}_{\text{plat}} \mathbf{J}_{\text{plat}_T} \right] + \left[\mathbf{J}_q^T \cdot \left[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} \right] \cdot \mathbf{J}_q \right] \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \dots \\ & \dots + \left[\mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{M}_{\text{plat}} \dot{\mathbf{J}}_{\text{plat}_T} \right] + \left[\mathbf{J}_q^T \cdot \left[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} \right] \cdot \dot{\mathbf{J}}_q + \mathbf{J}_q^T \cdot \left[\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \dot{\mathbf{W}} + \dot{\mathbf{W}}^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} - \left(\frac{\partial \mathbf{W}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \cdot \mathbf{I}_p \cdot \mathbf{W} \right] \cdot \mathbf{J}_q \right] \cdot \dot{\mathbf{s}} + \dots \\ & \dots + \mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{g} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{J}_{\beta_i}^T \cdot \mathbf{K}_i \cdot \beta_i = \mathbf{J}_{\text{plat}_T}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{J}_{\text{plat}_R}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (151)$$

3.8.2 Actuadores

Cada uno de los actuadores presentes en el manipulador presenta como coordenada generalizada su propio desplazamiento, s_i , donde F_i son las fuerzas que producen el movimiento, ver Figura 99. Dichas coordenadas coinciden con las del propio mecanismo. Además, se considera en cada actuador el momento producido por la flexión de las juntas de revolución.

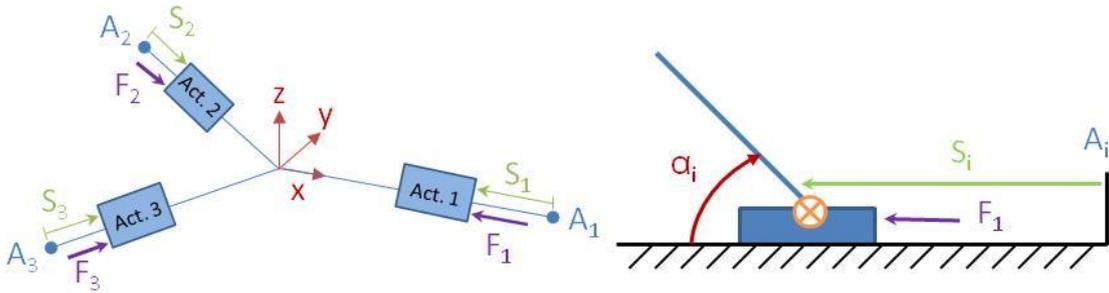


Figura 99. Esquema del modelo dinámico de los actuadores

Aprovechando que las coordenadas generalizadas de cada actuador coinciden con las del mecanismo, se plantea de forma conjunta la función lagrangiana de todos los actuadores, donde M_i es la masa de la mesa de cada actuador junto con la placa de unión al mecanismo y k_r es la rigidez de cada junta de revolución:

$$L = T - V = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{M_i}{2} \dot{s}_i^2 - \frac{k_r}{2} (\alpha_i - \alpha_{i0})^2 \right) \quad (152)$$

Por tanto, aplicando la ecuación de Lagrange, las ecuaciones del movimiento resultan ser:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \ddot{s}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_3} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_3} & \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 \\ 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 - \alpha_{10} \\ \alpha_2 - \alpha_{20} \\ \alpha_3 - \alpha_{30} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (153)$$

La matriz que premultiplica a la que contiene la rigidez de las juntas de revolución es la parte rotacional del jacobiano de las barras, obtenida en la Ec. (110). Por tanto, de forma resumida, la contribución de los actuadores al modelo dinámico vendrá dada por:

$$\mathbf{M}_{act} \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}_a^T \mathbf{K}_r \mathbf{a} = \mathbf{f}_{act} + \mathbf{J}_a^T \mathbf{K}_r \mathbf{a}_0 \quad (154)$$

3.8.3 Barras A_iB_i

Para resolver la ecuación del movimiento de cada una de las barras, se establecen como coordenadas generalizadas los desplazamientos del centro de gravedad, x_{Gi} , y_{Gi} , z_{Gi} , y el ángulo respecto a la horizontal, α_i . Cabe señalar que las barras tienen 3 gdl porque se mueven en un plano, pero el procedimiento aquí empleado permite considerar esas cuatro coordenadas sin mayor inconveniente.

Indicar que en las siguientes ecuaciones que desarrollan la dinámica de las barras, M_b es la masa de cada una de las barras, I_{Gb} es el momento de inercia, k_r es la rigidez a flexión en las juntas de revolución y k_{ef} y k_{et} las rigideces a flexión y torsional en las juntas esféricas.

La función lagrangiana para cada una de las barras vendrá dada por la siguiente expresión:

$$L_{bi} = T_{bi} - V_{bi} \quad (155)$$

Donde:

$$\begin{aligned} T_{bi} &= \frac{M_{bi}}{2} (\dot{x}_{Gi}^2 + \dot{y}_{Gi}^2 + \dot{z}_{Gi}^2) + \frac{I_{Gbi}}{2} \omega_i^2 \\ V_{bi} &= M_{bi} \cdot g \cdot z_{Gi} + \frac{k_r}{2} (\alpha_i - \alpha_{i0})^2 + \frac{k_{ef}}{2} (\beta_{li}^2 + \beta_{mi}^2) + \frac{k_{et}}{2} (\beta_{ni}^2) \end{aligned} \quad (156)$$

Aplicando la Ec. De Lagrange para cada una de las coordenadas generalizadas de las barras y agrupando las soluciones alcanzadas en forma matricial, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} M_{bi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{bi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{bi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Gbi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{Gi} \\ \ddot{y}_{Gi} \\ \ddot{z}_{Gi} \\ \ddot{\alpha}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{Gi} \\ y_{Gi} \\ z_{Gi} \\ \alpha_i \end{Bmatrix} + \mathbf{J}_{\beta i-bi}^T \begin{bmatrix} k_{ef} & 0 & 0 \\ 0 & k_{ef} & 0 \\ 0 & 0 & k_{et} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{mi} \\ \beta_{ni} \\ \beta_{li} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{bi} g \\ k_r \alpha_{i0} \end{Bmatrix} \quad (157)$$

Donde aparece el jacobiano que relaciona los ángulos girados por la junta esférica con respecto a las coordenadas generalizadas de la barra i , cuya expresión viene dada por:

$$\mathbf{J}_{\beta_i-bi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_{mi}}{\partial x_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{mi}}{\partial y_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{mi}}{\partial z_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{mi}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial \beta_{ni}}{\partial x_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{ni}}{\partial y_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{ni}}{\partial z_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{ni}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial \beta_{li}}{\partial x_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{li}}{\partial y_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{li}}{\partial z_{Gi}} & \frac{\partial \beta_{li}}{\partial \alpha_i} \end{bmatrix} \quad (158)$$

En formato matricial, por tanto, la ecuación del movimiento de la barra i se representa de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_{bi} \ddot{\mathbf{q}}_{bi} + \mathbf{K}_r \mathbf{q}_{bi} + \mathbf{J}_{\beta_i-bi}^T \mathbf{K}_i \boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{g}_{bi} \quad (159)$$

Las coordenadas generalizadas de la barra se relacionan con las globales del mecanismo a través del jacobiano correspondiente obtenido en la Ec. 115:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{bi} &= \mathbf{J}_{bi} \cdot \dot{\mathbf{s}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{bi} &= \mathbf{J}_{bi} \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{J}}_{bi} \cdot \dot{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (160)$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento, y premultiplicando por la traspuesta del jacobiano de la barra \mathbf{J}_{bi} , se obtiene la contribución de la dinámica de la barra i al total del mecanismo.

$$\left[\mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{M}_{bi} \mathbf{J}_{bi} \right] \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \left[\mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{M}_{bi} \dot{\mathbf{J}}_{bi} \right] \cdot \dot{\mathbf{s}} + \left[\mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{K}_r \mathbf{q}_{bi} + \mathbf{J}_{\beta_i-bi}^T \mathbf{K}_i \boldsymbol{\beta}_i \right] = \mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{g}_{bi} \quad (161)$$

Donde:

$$\mathbf{J}_{\beta_i-bi}^T = \mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{J}_{\beta_i-bi}^T \quad (162)$$

3.8.4 Modelo dinámico del conjunto del manipulador 3-PRS

Una vez resuelto el problema dinámico para cada uno de los componentes del manipulador, es necesario agrupar todas las contribuciones en una única expresión. Como indica la Ec.(129) del Principio de Equivalencia de Energía, se debe realizar el sumatorio de las contribuciones de cada uno de los elementos del mecanismo. La expresión resultante será:

$$\begin{aligned}
 & \left[\mathbf{M}_{act} + \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{M}_{bi} \mathbf{J}_{bi} \right] + \left[\mathbf{J}_{plat_r}^T \mathbf{M}_{plat} \mathbf{J}_{plat_r} \right] + \left[\mathbf{J}_q^T \left[\mathbf{W}^T \mathbf{I}_p \mathbf{W} \right] \mathbf{J}_q \right] \right] \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \dots \\
 & + \left[\sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{M}_{bi} \dot{\mathbf{J}}_{bi} \right] + \left[\mathbf{J}_{plat_r}^T \mathbf{M}_{plat} \dot{\mathbf{J}}_{plat_r} \right] + \dots \right. \\
 & \left. + \left[\mathbf{J}_q^T \left[\mathbf{W}^T \mathbf{I}_p \mathbf{W} \right] \dot{\mathbf{J}}_q + \mathbf{J}_q^T \left[\mathbf{W}^T \mathbf{I}_p \dot{\mathbf{W}} + \dot{\mathbf{W}}^T \mathbf{I}_p \mathbf{W} - \left(\frac{\partial \mathbf{W}_{pm}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{I}_p \mathbf{W} \right] \mathbf{J}_q \right] \right] \cdot \dot{\mathbf{s}} + \dots \quad (163) \\
 & + \left[\sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{J}_{\beta_i}^T \mathbf{K}_i \beta_i \right] + \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{J}_{\beta_i}^T \mathbf{K}_i \beta_i \right] + \sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{K}_r \mathbf{q}_{bi} \right] + \mathbf{J}_a^T \mathbf{K}_r \mathbf{a} - \mathbf{J}_a^T \mathbf{K}_r \mathbf{a}_0 \right] + \dots \\
 & + \left[\mathbf{J}_{plat_r}^T \mathbf{g} - \mathbf{J}_{bi}^T \mathbf{g}_{bi} \right] - \left[\mathbf{J}_{plat_r}^T \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{J}_{plat_r}^T \boldsymbol{\tau}_{ext} \right] = \mathbf{f}_{act}
 \end{aligned}$$

3.9 Análisis Mecatrónico

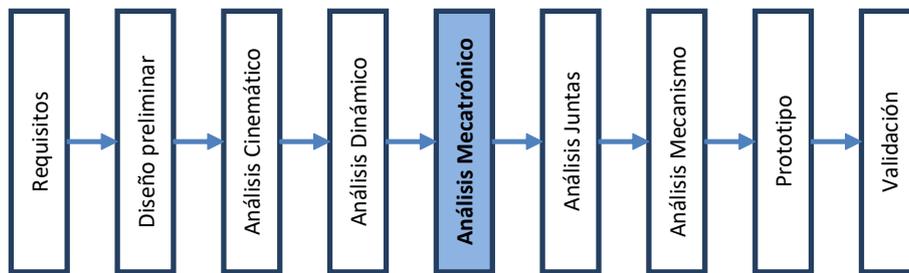


Figura 100. Metodología propuesta, paso 5: Análisis Mecatrónico

Para el desarrollo de una metodología para la realización de un análisis mecatrónico de un manipulador de cinemática paralela, se ha seguido el método expuesto en la Tesis doctoral de C. Roldán Paraponiaris [177], realizada en el departamento de Ingeniería Mecánica de la UPV/EHU.

3.9.1 Modelado mecatrónico de mecanismos paralelos

Se pueden identificar tres subsistemas importantes en un mecanismo de cinemática paralela como se observa en la Figura 101: (1) los actuadores, (2) el control y (3) el propio mecanismo. Las fuerzas o los pares de los actuadores son las entradas del mecanismo que causan su movimiento. Al mismo tiempo, el movimiento del mecanismo y las fuerzas externas aplicadas sobre él se oponen a los actuadores, por lo que desde el punto de vista de éstos, se pueden considerar como perturbaciones.

Por otra parte, también es necesario tener en cuenta la interacción entre los actuadores y el control. Mediante la medición de la posición y velocidad, utilizando los encoders, y la corriente de los actuadores, el control decide suministrar a los actuadores los comandos de corriente necesarios para accionarlos.

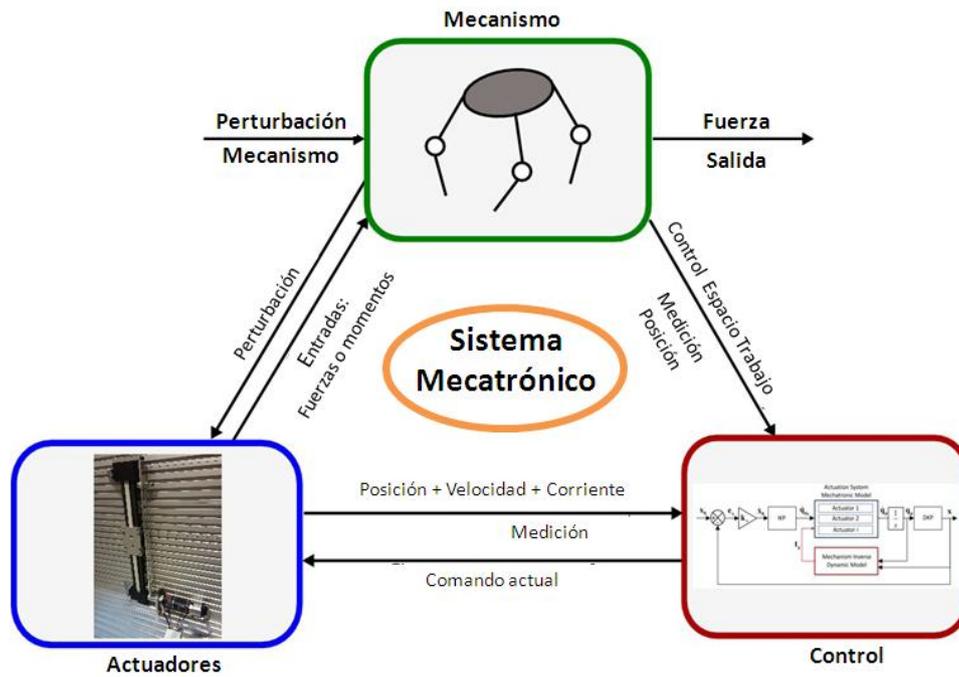


Figura 101. Representación de los componentes principales de un mecanismo paralelo y sus interacciones

En la Figura 102 se muestra un manipulador 3-PRS con tres actuadores prismáticos. Siguiendo el enfoque que se utiliza en este trabajo, se puede observar que el manipulador y los accionamientos han sido separados. Por lo tanto, la interacción entre los actuadores y el mecanismo está representada por las fuerzas F_i mostradas en la figura. De esta manera, los accionamientos, que frecuentemente pueden limitar el rendimiento del conjunto y el mecanismo, pueden ser modelados por separado y de una manera más detallada.

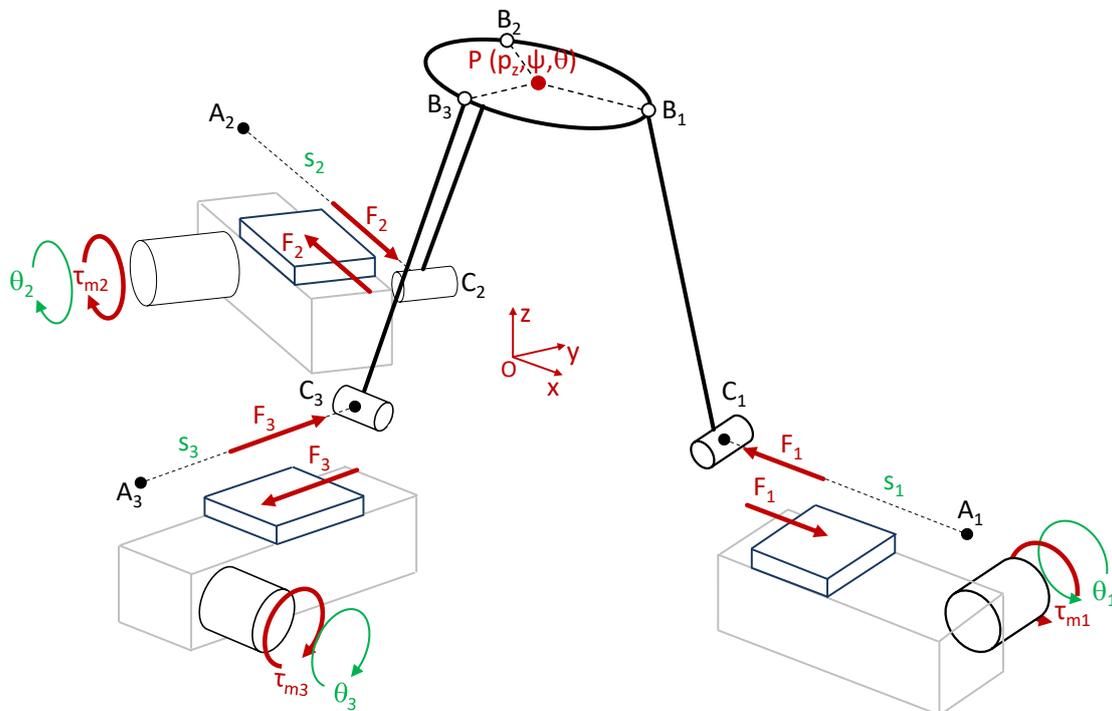


Figura 102. Modelo de perturbación entre el manipulador y los actuadores

En la Figura 103 se muestra el modelo mecatrónico del manipulador. En ella los elementos (a) representan a los actuadores, y el sistema (b) representa el propio mecanismo. En cuanto al actuador, se consideran dos subsistemas, (a.1) que representa la dinámica del actuador considerando la parte eléctrica y la dinámica, y (a.2) que representa el control de posición y velocidad asumiendo que se utiliza un control lineal eje por eje. La dinámica de los actuadores se modela utilizando funciones de transferencia o espacio de estados, y es representada en el bloque rojo dentro del subsistema (a.1). En cuanto al algoritmo de control, es necesario modelarlo ya que el tipo de control, las ganancias y el tiempo de ciclo de los lazos afectan al comportamiento del sistema en términos de seguimiento de trayectoria y rechazo de las perturbaciones.

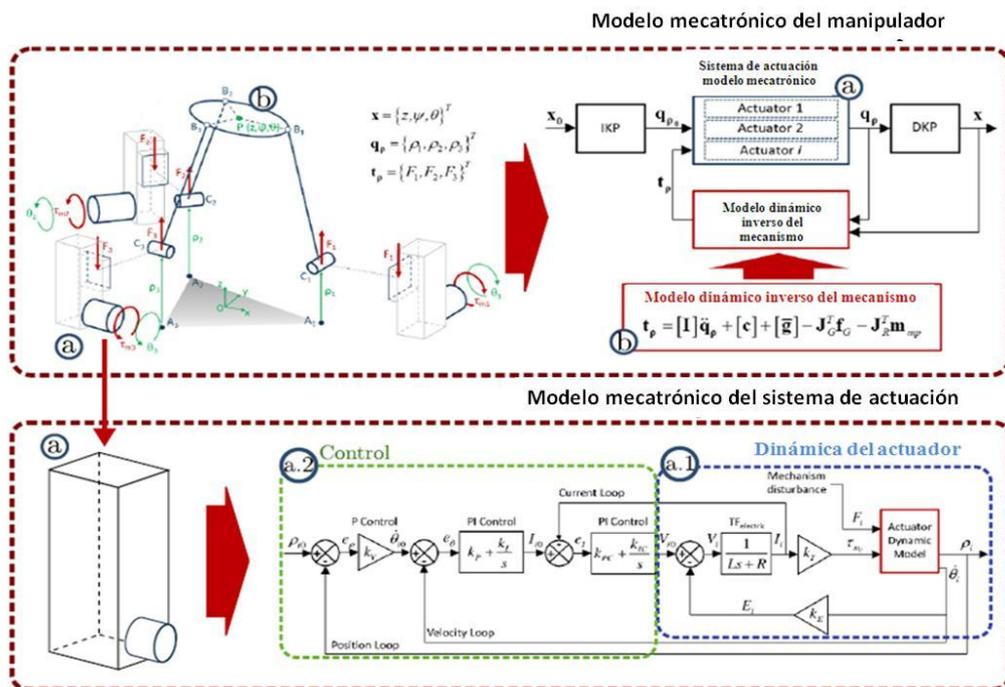


Figura 103. Modelo Mecatrónico

El modelo mecatrónico del sistema de actuación se integra entonces en el modelo mecatrónico del manipulador junto con el modelo dinámico inverso del mecanismo, véase la parte superior derecha de la Figura 103. El problema cinemático inverso del mecanismo se utiliza para calcular las posiciones de entrada a los actuadores q_{p0} , mientras que el problema cinemático directo se utiliza para estimar la posición real del efector final x .

Además, la influencia del mecanismo se incluye en el modelo mecatrónico con su problema dinámico inverso. Con este fin, el problema dinámico tiene que ser resuelto de tal manera que se exprese en las coordenadas del espacio articular. Esto tiene la ventaja de que las ecuaciones resultantes del problema dinámico también pueden usarse en el algoritmo de control.

3.9.2 Modelado mecatrónico del mecanismo 3-PRS

Con el fin de simular el comportamiento del sistema en su conjunto, se ha desarrollado un modelo mecatrónico para el manipulador 3-PRS. En él, introduciendo la posición que se desea alcanzar en la plataforma móvil, z_0, ψ_0, θ_0 , se simulan las principales variables del sistema, como son los desplazamientos y fuerzas en los actuadores, la posición simulada de la

plataforma, los giros de las barras y las juntas flexibles. El esquema del modelo desarrollado puede verse en la Figura 104. Como se observa, en él se integran la cinemática inversa, la cinemática directa y el modelo dinámico ya vistos en los apartados anteriores, así como el modelado del control de posición para cada uno de los actuadores.

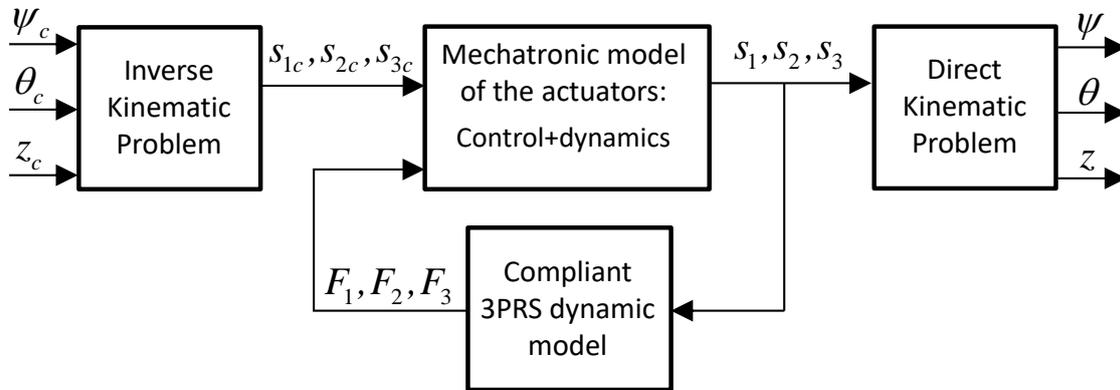


Figura 104. Esquema del Modelo Mecatrónico

Éste se ha programado en el software Simulink, un entorno de programación gráfica integrado en Matlab. En él se da como entrada la posición deseada que queremos alcanzar en la plataforma (Ψ_c , θ_c y z_c en Figura 104), la cual se introduce en el Problema Cinemático Inverso, visto en el apartado 3.6.3, dando como resultado los desplazamientos necesarios en los actuadores (s_{1c} , s_{2c} y s_{3c} en Figura 104). Estos se introducen en el modelo mecatrónico de cada uno de los actuadores, donde además se añade la perturbación que se obtiene del modelo dinámico, dando como salida el desplazamiento real que se da en los actuadores, (s_1 , s_2 y s_3 en Figura 104). Esta etapa se describirá más ampliamente en el siguiente punto. Los desplazamientos en los actuadores se introducen en el Problema Cinemático Directo, visto en el apartado 3.6.4, el cual dará la posición real que alcanza la plataforma (Ψ , θ y z en Figura 104). Señalar que también es necesario proporcionarle la posición de partida de la plataforma para poder solucionar el proceso iterativo del sistema de ecuaciones no lineales alcanzado para el problema cinemático directo.

Por último, tanto los desplazamientos reales en los actuadores como la posición real de la plataforma se introducen en el Problema Dinámico Inverso del manipulador, visto en el apartado 3.8. Con la resolución del mismo, se obtienen las fuerzas necesarias en los actuadores para alcanzar tales movimientos (F_1 , F_2 y F_3 en Figura 104), las cuales serán introducidas como una perturbación en la etapa de control, por acción-reacción. A continuación, pasamos a explicar con más detalle el modelo de los actuadores.

3.9.3 Modelo mecatrónico del sistema de actuación

Mediante este modelo se simula el comportamiento de los actuadores y el control. En la Figura 105 puede observarse el modelo mecatrónico desarrollado para estos elementos. Como puede apreciarse, existen dos etapas claramente diferenciadas, una primera en la que se modela el control propiamente, y otra en la que se modela los accionamientos del mecanismo.

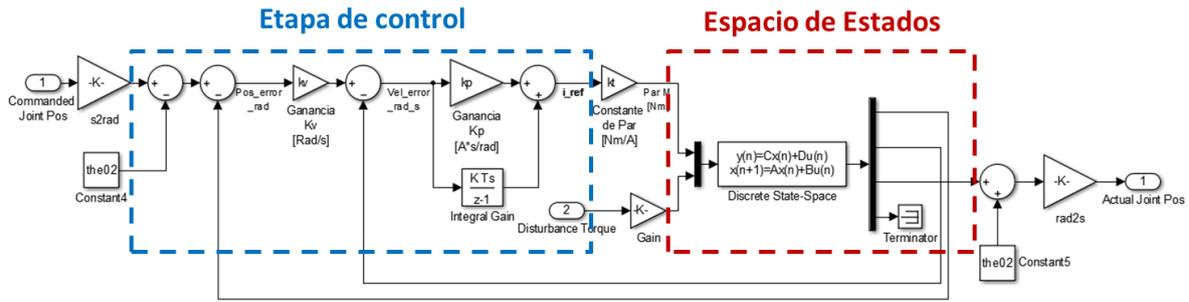


Figura 105. Esquema del modelo de Control

El control de posición de los actuadores se realiza a partir de la medida de la posición del encoder del motor, tal y como se ha dispuesto en el prototipo, si bien es posible modificar el modelo en caso de contar con una medida directa de la posición de la guía lineal. Para llevar a cabo el control, se dispone de tres lazos cerrados en cascada de posición, velocidad y corriente. Este último, se considera ideal, por lo que se sustituye por la ganancia k_t , igual a $30.2 \cdot 10^{-3}$ Nm/A, que es la constante de par, que relaciona directamente la consigna de intensidad con el par motor. La simplificación se justifica porque el tiempo de ciclo de este lazo es habitualmente un orden de magnitud más rápido que los tiempos de los lazos de velocidad y posición.

El lazo de control de posición se basa en un controlador proporcional con una ganancia k_v . En cuanto al bucle de control de la velocidad, se emplea un regulador proporcional integral, cuya ganancia proporcional es k_p y cuya ganancia integral es k_i . En cuanto a los tiempos de ciclo, se modelan unos valores de 1ms para el control de velocidad y 5ms para el control de posición.

Para el modelo de los accionamientos se emplea la representación en Espacio de Estados, mostrada en el apartado 2.7.5. Cada uno de los actuadores tiene la configuración mostrada en la Figura 106, se trata de accionamientos lineales por correa y poleas. Como se ha indicado, como accionamiento se emplea un motor eléctrico de corriente continua, el cual genera un par rotativo τ_m , que provoca un giro θ . Como transmisión se emplea una guía lineal, que transforma este movimiento rotativo en un movimiento lineal s . Cuando la polea motora gira en un extremo, se crea una tensión en la correa que hace que la otra polea gire. Como resultado, se crea una tensión en el otro lado de la correa que tira del carro de la guía provocando el desplazamiento lineal. Frente a este desplazamiento, existe la oposición del propio mecanismo a ser desplazado, representado por una fuerza F en sentido contrario al desplazamiento lineal de la mesa.

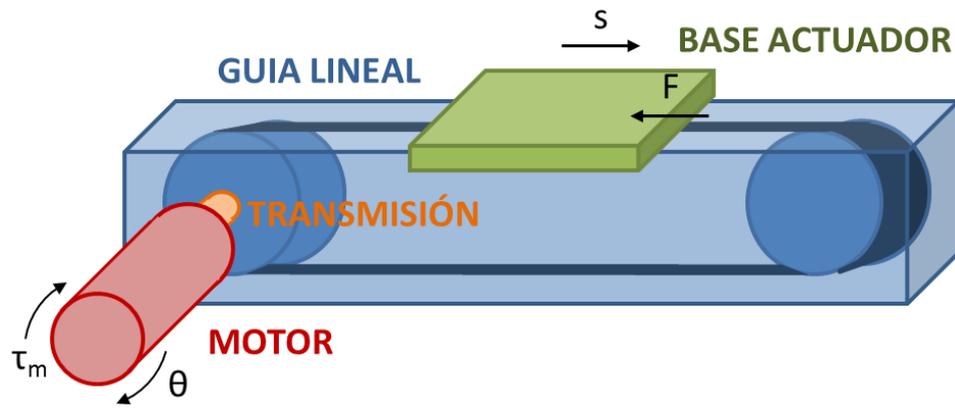
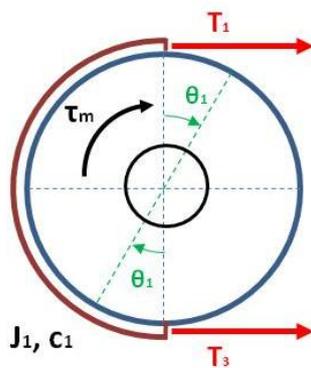


Figura 106. Modelo de los actuadores

Para realizar la representación en Espacio de Estados de los actuadores seleccionados, se hace necesario plantear las ecuaciones que permiten modelizar su conjunto. En primer lugar, se definen una serie de hipótesis que se han establecido para su resolución:

- La correa no desliza sobre las poleas, es decir, que existe rozamiento entre ambas.
- La correa no se deforma en su etapa de funcionamiento.
- La correa está precargada, por lo que nunca llega a trabajar a compresión ($T > 0$).
- Se considera que la correa no tiene masa.

A continuación, se muestran las ecuaciones que modelan a cada uno de los elementos que conforman a los actuadores utilizados.



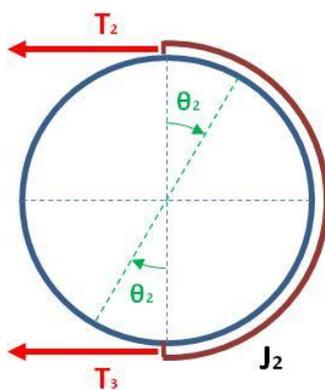
$$\tau_m - (T_3 - T_1) \cdot R = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + c_1 \cdot \dot{\theta}_1$$

donde: (164)

$$J_1 = J_{polea1} + J_{red} \cdot i_R^2 + J_{mot} \cdot i_R^2$$

$$c_1 = c_{motor} \cdot i_R^2$$

Figura 107. Modelización polea motora



$$(T_3 - T_2) \cdot R = J_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \quad (165)$$

Figura 108. Modelización polea de arrastre

Al considerar la masa de la polea 2 igual a 0, de la Ec. (165) es posible alcanzar la siguiente equivalencia:

$$T_2 = T_3 \quad (171)$$

Sustituyendo esta igualdad en la Ec. (164), se obtiene la expresión que define el comportamiento de la polea motora:

$$\tau_m - (T_2 - T_1) \cdot R = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + c_1 \cdot \dot{\theta}_1 \quad (172)$$

La expresión para T_1 será:

$$T_1 = K_{cx1} \cdot (s - \theta_1 \cdot R) - c_{cx1} \cdot (\dot{s} - \dot{\theta}_1 \cdot R) \quad (173)$$

Para T_2 , donde se obtienen la rigidez y amortiguamiento equivalente (K_{cxs} y c_{cxs}) como la suma en serie de (K_{cx2} y K_{cx3}) y (c_{cx2} y c_{cx3}) respectivamente, se tiene:

$$T_2 = K_{cxs} \cdot (\theta_1 \cdot R - s) - c_{cxs} \cdot (\dot{\theta}_1 \cdot R - \dot{s}) \quad (174)$$

$$\frac{1}{K_{cxs}} = \frac{1}{K_{cx2}} + \frac{1}{K_{cx3}}; \quad \frac{1}{c_{cxs}} = \frac{1}{c_{cx2}} + \frac{1}{c_{cx3}}$$

La expresión para la mesa actuada vendrá dada por:

$$(T_2 - T_1) - F - F_r = M \cdot \ddot{s} \quad (175)$$

Sustituyendo las expresiones para T_1 y T_2 en las expresiones de la polea motora y la mesa actuada, se llega a:

$$\tau_m = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + c_1 \cdot \dot{\theta}_1 + [K_{cxs} + K_{cx1}] \cdot (\theta_1 \cdot R - s) \cdot R + [c_{cxs} + c_{cx1}] \cdot (\dot{\theta}_1 \cdot R - \dot{s}) \cdot R \quad (176)$$

$$(-F - F_r) \cdot R = M \cdot \ddot{s} \cdot R + [K_{cxs} + K_{cx1}] \cdot (s - \theta_1 \cdot R) \cdot R + [c_{cxs} + c_{cx1}] \cdot (\dot{s} - \dot{\theta}_1 \cdot R) \cdot R \quad (177)$$

Definiendo como:

$$K_{eq} = (K_{cxs} + K_{cx1}) \cdot R^2 \quad (178)$$

$$c_{eq} = (c_{cxs} + c_{cx1}) \cdot R^2 \quad (179)$$

$$\theta_s = \frac{s}{R} \quad (180)$$

$$M_{ext} = (-F - F_r) \cdot R \quad (181)$$

$$J_2 = M \cdot R^2 \quad (182)$$

Se llega a las expresiones que definen el modelo de 2gdl. Éstas son:

$$\tau_m = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + c_1 \cdot \dot{\theta}_1 + K_{eq} \cdot (\theta_1 - \theta_s) + c_{eq} \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_s) \quad (183)$$

$$M_{ext} = J_2 \cdot \ddot{\theta}_s + K_{eq} \cdot (\theta_s - \theta_1) + c_{eq} \cdot (\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_1) \quad (184)$$

El modelo de parámetros concentrados que define la dinámica de cada uno de los actuadores se muestra en la Figura 113.

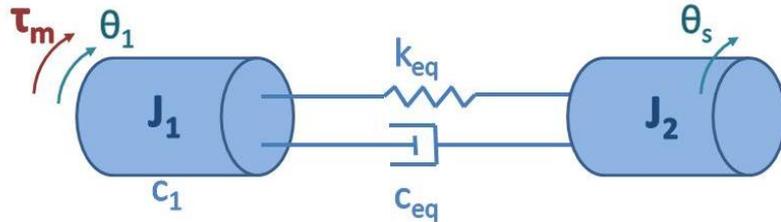


Figura 113. Esquema de los actuadores

El sistema queda definido por medio de las ecuaciones de estado, expresadas en forma matricial como:

$$\{\dot{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{x}\} + [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{u}\} \quad (185)$$

La matriz de estados $[\mathbf{A}]$ es:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_{eq}}{J_1} & \frac{-(c_1 + c_{eq})}{J_1} & \frac{k_{eq}}{J_1} & \frac{c_{eq}}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{eq}}{J_2} & \frac{c_{eq}}{J_2} & \frac{-k_{eq}}{J_2} & \frac{-c_{eq}}{J_2} \end{bmatrix} \quad (186)$$

La matriz de entradas $[\mathbf{B}]$ es:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J_2} \end{bmatrix} \quad (187)$$

Las ecuaciones de salida del sistema, expresadas en notación matricial, quedan definidas como:

$$\{\mathbf{y}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{x}\} + [\mathbf{D}] \cdot \{\mathbf{u}\} \quad (188)$$

Donde la matriz de salida $[\mathbf{C}]$ es:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (189)$$

Y la matriz de transmisión directa $[\mathbf{D}]$ es:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (190)$$

Mediante la resolución de este modelo de Espacio de Estados, el cual se programa directamente en Simulink dentro del modelo mecatrónico, ver Figura 105, se puede obtener las variables de salida, que son los giros y velocidades angulares tanto en el motor como en las guías lineales. Esto permitirá realimentar el giro y la velocidad angular presentes en los motores a la etapa de control y obtener el desplazamiento producido en la base de los actuadores, como se observa en la Figura 104. Estos desplazamientos serán los movimientos simulados en las bases de los actuadores tras aplicarles la etapa de control y serán las salidas globales de todo el sistema.

3.10 Análisis Estructural

Para el análisis estructural de un manipulador compliant de cinemática paralela, es necesario realizar un análisis por elementos finitos de los puntos más críticos de la estructura, que en este caso son las juntas flexibles, y luego un análisis global de la estructura, para la verificación del cumplimiento de los requisitos impuestos, tales como desplazamientos exigidos y esfuerzos soportados en estos puntos críticos.

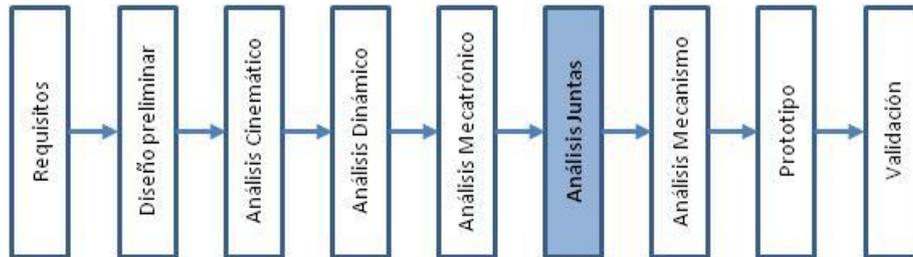


Figura 114. Metodología propuesta, paso 6: Análisis Juntas

Para el análisis por elementos finitos de las juntas flexibles es necesario definir en primer lugar, los parámetros más críticos que definen su comportamiento, que son: sus dimensiones críticas tales como espesor del material empleado, grosor y longitud de la propia junta, etc. También se podrán simular características intrínsecas de diferentes materiales para ver las diferencias existentes entre ellos, como por ejemplo el modulo de elasticidad.

Partiendo del análisis cinemático y dinámico realizado previamente, los cuales permiten conocer los desplazamientos y fuerzas en todos estos puntos analizados de la estructura, el estudio a realizar en las juntas consistirá en definir un ensayo paramétrico de análisis estructurales a juntas flexibles, en el que, al aplicar un determinado esfuerzo e ir variando los parámetros críticos establecidos, es decir, los valores dimensionales que presentan un mayor impacto en su funcionamiento, se obtendrán resultados para diversas juntas flexibles, de las que deducir las características idóneas para el manipulador diseñado.

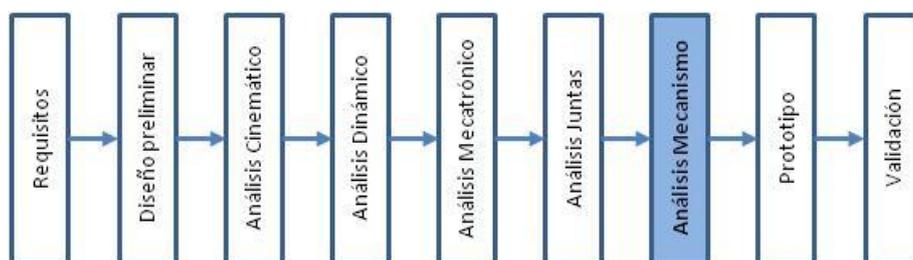


Figura 115. Metodología propuesta, paso 7: Análisis del Mecanismo

Una vez ya se conocen las juntas flexibles idóneas para introducir en el manipulador diseñado, se evalúa el conjunto de la estructura para ver si la interacción de todas las juntas en un único elemento monolítico afecta al comportamiento global del manipulador. Si los resultados obtenidos en el análisis global concuerdan con los requisitos impuestos en la etapa inicial del proceso de diseño, tales como desplazamientos a alcanzar por el mismo y esfuerzos soportados en la estructura, llegamos al diseño óptimo de la estructura. De lo contrario, se hace necesaria una etapa de rediseño de las juntas, variando sus parámetros críticos según los

resultados obtenidos, y su integración de nuevo en la estructura global. Este proceso se realiza hasta llegar a la estructura óptima que cumpla con los requisitos impuestos.

En la resolución del análisis estructural del mecanismo, se evalúan una serie de parámetros con el fin de confirmar o descartar la idoneidad de la estructura analizada. Así, los parámetros que serán evaluados serán:

- **Tensiones soportadas en la estructura:** Son evaluadas las fuerzas por unidad de área en el entorno de un punto material sobre la superficie de un cuerpo, con el fin de verificar que no se superan aquellas condiciones establecidas como máximas en la etapa de diseño.
- **Deformaciones:** Se analiza el cambio geométrico que experimenta el cuerpo no rígido del manipulador bajo la acción de las fuerzas externas y de volumen o de inercia que a él se aplican, lo cual permite comprobar si se alcanzan los desplazamientos requeridos al mecanismo.
- **Rigidez estática:** Se verifica la capacidad que presenta el manipulador para soportar esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones y/o desplazamientos.
- **Frecuencias naturales:** Se identifican cuales son las frecuencias naturales que presenta el manipulador, que son aquellas frecuencias que tienen una tendencia o facilidad para vibrar. Gracias a esto se podrán evitar estas frecuencias en su funcionamiento, las cuales provocarían, al ser excitadas, un aumento importante de la vibración en el manipulador.
- **Fatiga:** Mediante este estudio se permitirá predecir la vida del material o de la estructura frente al efecto de los ciclos de carga sobre el mecanismo. Este análisis mostrará también las áreas donde es más probable que se presente una grieta, además de predecir la tolerancia al fallo del material.

3.11 Análisis Estructural del Mecanismo 3-PRS

En la Figura 116 se muestra la estructura del mecanismo 3-PRS y las juntas de revolución y esféricas que se han introducido en la misma. Como puede observarse, las dimensiones principales analizadas en las mismas son el radio y espesor para la junta de revolución, y el radio, espesor y longitud para la junta esférica.

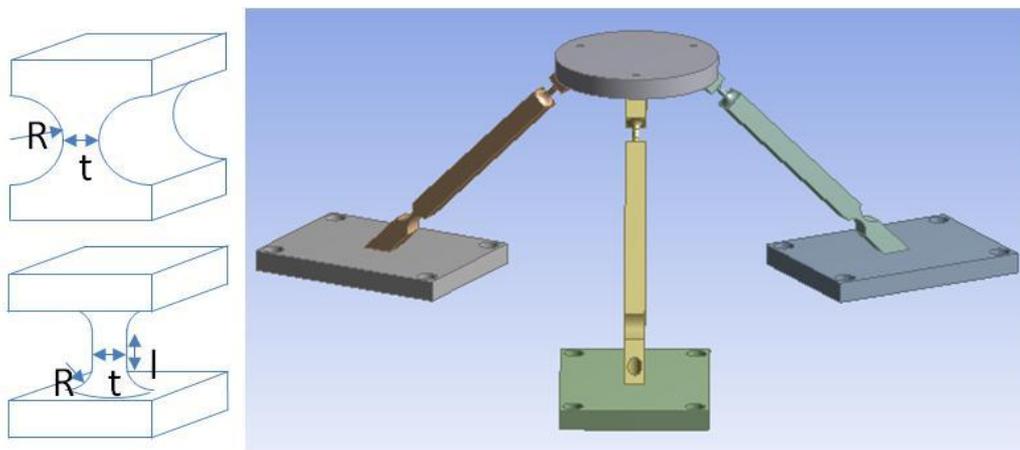


Figura 116. Estructura 3-PRS. Dimensiones principales de las juntas de revolución y esféricas

En la Figura 117 queda definido el esquema del proceso desarrollado para la realización del análisis estructural.

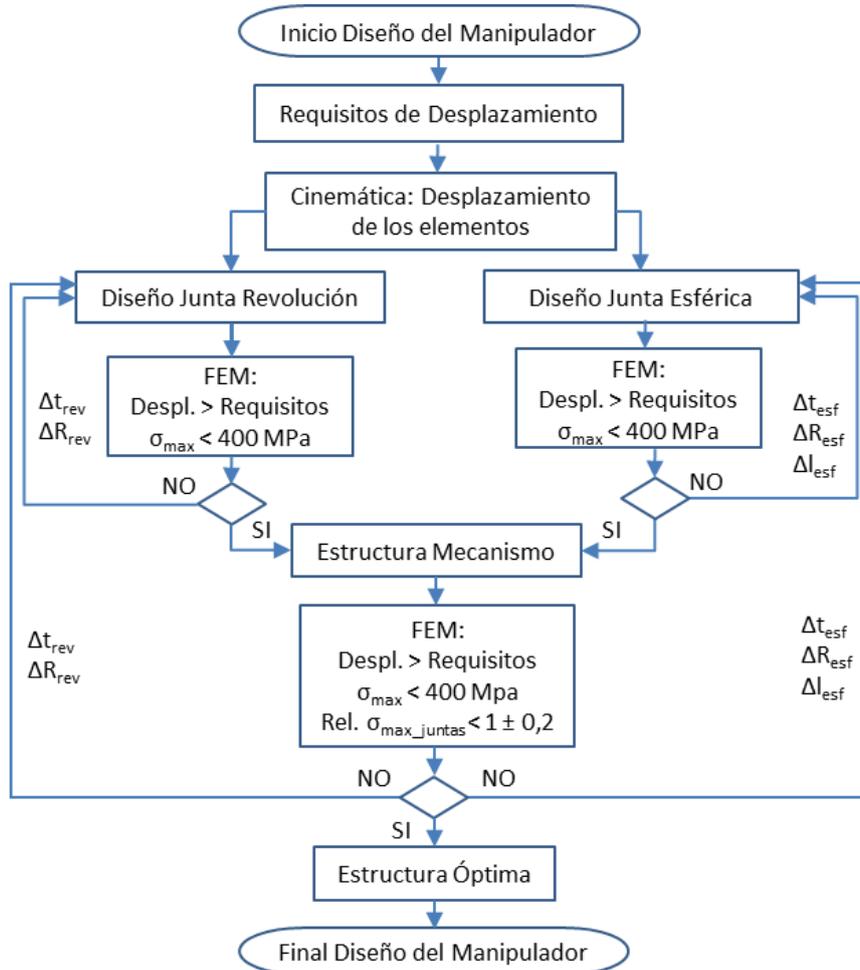


Figura 117. Esquema del proceso de diseño

Una vez establecidos los requisitos a alcanzar por el manipulador y resuelta la cinemática para obtener los desplazamientos en cada uno de los componentes del mecanismo, en primer lugar se realiza un estudio de las juntas "aisladas" basado en un "proceso iterativo" de cálculos FEM, en el cual tanto los desplazamientos exigidos a cada una de ellas, como las tensiones máximas soportadas en las mismas, serán los criterios excluyentes.

A continuación, las juntas que han cumplido satisfactoriamente el anterior análisis, son introducidas en el conjunto del manipulador para su análisis en conjunto, ya que además de las tensiones propias de los giros realizados en las mismas, deben soportar aquellas tensiones internas derivadas del movimiento del manipulador. En estos análisis del conjunto del mecanismo, además de verificar que los desplazamientos alcanzados y las tensiones máximas soportadas en el mismo cumplen con los requisitos impuestos, se analizará el comportamiento conjunto de ambos tipos de juntas flexibles, esféricas y de revolución, con el fin de alcanzar una distribución homogénea de tensiones en ambos tipos, evitando así puntos críticos en la estructura.

En las siguientes subsecciones, cada uno de los puntos del proceso será ampliamente explicado, proporcionando la metodología desarrollada para el diseño y validación del manipulador hasta la consecución del mecanismo óptimo.

3.11.1 Requisitos en los pares cinemáticos

Los requisitos establecidos para el manipulador se introducen en la cinemática inversa desarrollada para el 3-PRS, mediante lo cual se calculan los desplazamientos que deben darse tanto en los actuadores como en los ángulos pasivos de las juntas.

En la Figura 118 se muestran los casos estudiados. Como se observa en las tres primeras gráficas, todas las posibles combinaciones de las limitaciones más restrictivas son evaluadas. Mientras se lleva a la plataforma a un desplazamiento de $\pm 2\text{mm}$, se introducen las máximas rotaciones que deben producirse sobre los ejes x e y ($\Psi = \pm 0,2^\circ$; $\theta = \pm 0,2^\circ$). Indicar que estos valores para las rotaciones sobre los ejes x e y no son propiamente unas restricciones del proceso de microfresado, aunque sí permitirán una mejor orientación de la herramienta utilizada, por lo cual, se han introducido como requisitos del manipulador.

Como resultado se obtienen los desplazamientos necesarios en cada uno de los actuadores lineales, s_i , los cuales están comprendidos entre $-2,15\text{mm}$ y $2,30\text{mm}$, ver cuarta gráfica de la Figura 118.

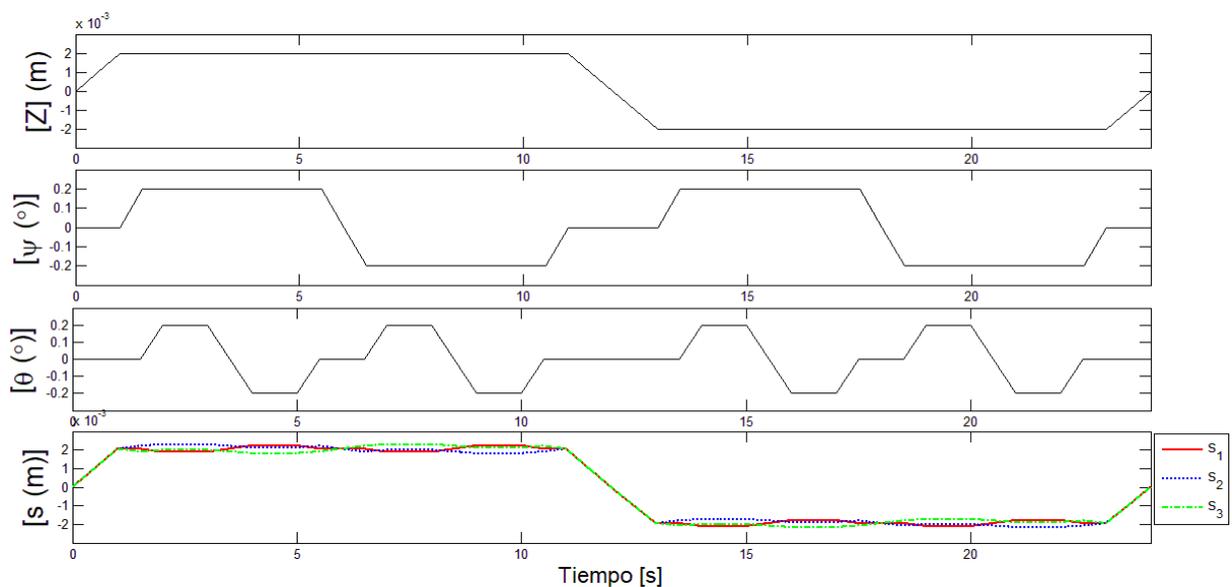


Figura 118. Movimientos en la plataforma (z , Ψ , θ) y desplazamientos en los actuadores (s_i)

Con respecto a los giros que deben alcanzarse en las juntas, las rotaciones en las juntas de revolución, α_i , deben alcanzar una variación de $\pm 1,7^\circ$. En cuanto a las juntas esféricas, los giros que deben lograrse son $\beta_m = \pm 1,9^\circ$ y $\beta_n = \pm 0,2^\circ$, los cuales hacen referencia a las flexiones producidas en la junta, además de la rotación $\beta_l = \pm 0,2^\circ$, que hace referencia a la deformación torsional de la misma, ver Figura 119.

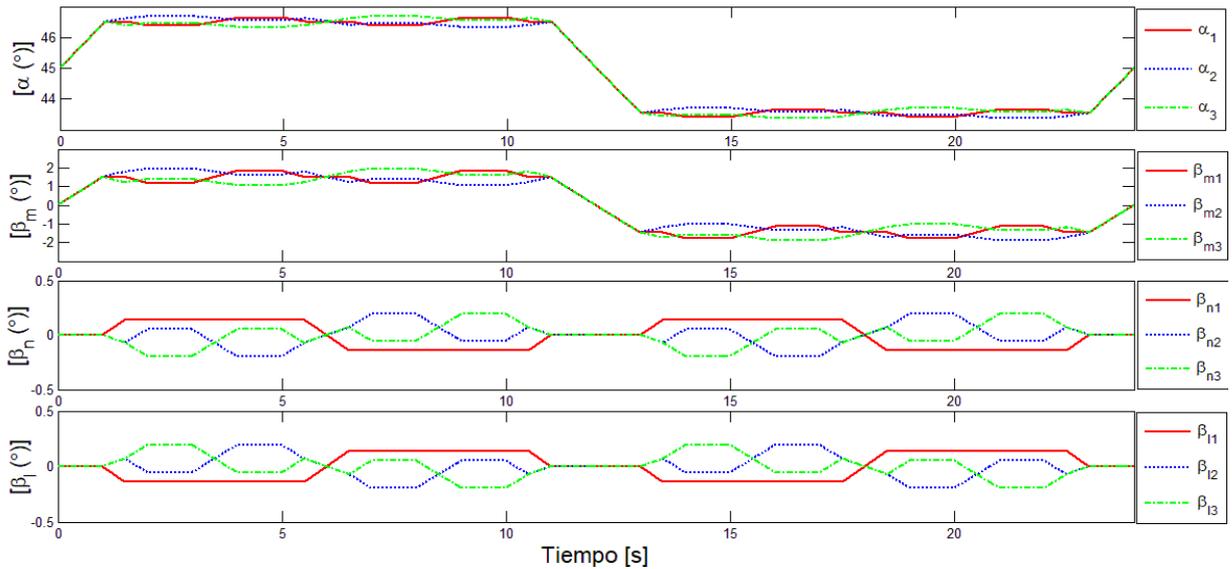


Figura 119. Rotaciones en las juntas de revolución (α_i) y en las juntas esféricas (β_{mir} , β_{nir} , β_{li})

3.11.2 Diseño de las juntas flexibles basándose en cálculos FEM

Para realizar el análisis estructural de tanto las juntas flexibles como del manipulador en su conjunto, se ha utilizado el software de elementos finitos ANSYS Workbench. Se han realizado una serie de simulaciones, mediante las cuales se han obtenido las principales características del manipulador flexible.

El primer paso del proceso de diseño, una vez establecidos los requisitos a alcanzar en el manipulador, comienza realizando el selección óptima de ambos tipos de juntas flexibles [8]. La limitación en cuanto a la tensión máxima sufrida en las juntas flexibles, fabricadas en Aluminio 7075, viene definida por su límite elástico, cuyo valor es 503MPa. Con el fin de asegurar que nunca se alcanza la zona plástica del material, se establece un factor de seguridad de 1,26, por lo que una tensión superior a los 400MPa no será sobrepasada en ninguna de las juntas flexibles.

Se seleccionan como parámetros de diseño al radio y espesor para las juntas de revolución, y al radio, espesor y longitud para las juntas esféricas, además de los giros que se deben alcanzar en ambos tipos de juntas. Mediante la variación de estos parámetros, mediante una iteración de ensayos FEM, se obtienen las juntas potencialmente validas para cumplir con los requisitos especificados en el punto 3.11.1. Se establecen los siguientes rangos de valores posibles para estos parámetros de diseño:

- Junta de Revolución $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in [0^\circ ; 3^\circ] \\ \text{Radio} \in [2 ; 16] \text{mm} \\ \text{Espesor} \in [0,5 ; 3] \text{mm} \end{array} \right.$
- Junta Esférica $\left\{ \begin{array}{l} \beta_m \in [0^\circ ; 3^\circ] \\ \beta_n \in [0^\circ ; 1^\circ] \\ \beta_l \in [0^\circ ; 1^\circ] \\ \text{Longitud} \in [1 ; 10] \text{mm} \\ \text{Radio} \in [2 ; 10] \text{mm} \\ \text{Espesor} \in [1 ; 5] \text{mm} \end{array} \right.$

Establecidas estas limitaciones, se realiza un diseño de experimentos por medio del cual realizar una iteración de ensayos FEM en la que se estudien la combinación de las diferentes posibilidades para cada uno de los parámetros y poder seleccionar los rangos de valores en los que las juntas son potencialmente validas y descartar aquellos en los que las que no cumplen con las restricciones impuestas. Asimismo, se obtienen los desplazamientos que sufre el punto central de la junta al aplicar estos giros sobre ella.

En la siguiente tabla se muestran los principales resultados obtenidos para los análisis FEM de la Junta de Revolución, así como los valores que presentan los parámetros de diseño de la junta en cada uno de los ensayos.

ANÁLISIS	α	R	E	MAX. TENSIÓN	DEF. X (μm)	DEF. Z (μm)
1	0,6	4,8	1,0	121,400	-0,245	2,771
2	2,4	4,8	1,0	477,520	-0,407	42,858
3	0,6	13,2	1,0	89,768	-0,005	3,177
4	2,4	13,2	1,0	353,098	0,618	49,139
5	0,6	4,8	2,5	125,876	-0,695	2,769
6	2,4	4,8	2,5	495,128	-2,176	42,853
7	0,6	13,2	2,5	124,309	-0,108	3,176
8	2,4	13,2	2,5	488,961	0,214	49,138
9	0,0	9,0	1,8	0,000	0,000	0,000
10	3,0	9,0	1,8	604,923	0,557	72,355
11	1,5	2,0	1,8	160,386	-2,968	16,009
12	1,5	16,0	1,8	247,452	-17,369	20,169
13	1,5	9,0	0,5	193,309	0,187	18,091
14	1,5	9,0	3,0	356,678	-0,731	18,090
15	1,5	9,0	1,8	302,461	-0,195	18,092

Tabla 9. Resultados iteración análisis FEM para la Junta de Revolución

Asimismo, en la siguiente tabla se muestran los resultados para los análisis FEM de la Junta Esférica, así como los parámetros de diseño de cada uno de los ensayos.

ANÁLISIS	L	R	E	β_m	β_n	β_l	MAX. TENSIÓN	DEF. X (μm)	DEF. Y (μm)	DEF. Z (μm)
1	2,6	3,4	1,7	0,54	0,18	0,18	128,909	-0,010	-0,019	2,219
2	8,4	3,4	1,7	0,54	0,18	0,18	60,382	-0,009	0,006	2,364
3	2,6	8,6	1,7	0,54	0,18	0,18	100,489	-0,007	0,011	2,477
4	8,4	8,6	1,7	0,54	0,18	0,18	52,800	-0,031	0,047	2,620
5	2,6	3,4	4,3	0,54	0,18	0,18	246,817	-0,008	-0,013	2,222
6	8,4	3,4	4,3	0,54	0,18	0,18	128,974	-0,034	0,011	2,366
7	2,6	8,6	4,3	0,54	0,18	0,18	190,670	-0,001	-0,025	2,474
8	8,4	8,6	4,3	0,54	0,18	0,18	117,412	0,008	-0,001	2,618
9	2,6	3,4	1,7	2,46	0,18	0,18	551,891	-0,064	-0,612	41,406
10	8,4	3,4	1,7	2,46	0,18	0,18	257,795	-0,046	-0,624	44,072
11	2,6	8,6	1,7	2,46	0,18	0,18	431,681	0,017	-0,562	46,151
12	8,4	8,6	1,7	2,46	0,18	0,18	228,209	-0,114	-0,381	48,807

13	2,6	3,4	4,3	2,46	0,18	0,18	1093,959	-0,041	-0,609	41,411
14	8,4	3,4	4,3	2,46	0,18	0,18	572,156	-0,095	-0,596	44,081
15	2,6	8,6	4,3	2,46	0,18	0,18	789,941	0,000	-0,714	46,142
16	8,4	8,6	4,3	2,46	0,18	0,18	470,846	0,017	-0,678	48,809
17	2,6	3,4	1,7	0,54	0,82	0,18	225,217	0,101	-0,076	6,571
18	8,4	3,4	1,7	0,54	0,82	0,18	105,103	0,132	-0,018	7,000
19	2,6	8,6	1,7	0,54	0,82	0,18	170,635	-0,022	-0,092	7,334
20	8,4	8,6	1,7	0,54	0,82	0,18	89,721	-0,031	-0,005	7,755
21	2,6	3,4	4,3	0,54	0,82	0,18	400,829	0,016	-0,067	6,577
22	8,4	3,4	4,3	0,54	0,82	0,18	216,325	-0,011	-0,002	7,001
23	2,6	8,6	4,3	0,54	0,82	0,18	331,656	-0,006	-0,086	7,324
24	8,4	8,6	4,3	0,54	0,82	0,18	201,808	0,031	-0,042	7,749
25	2,6	3,4	1,7	2,46	0,82	0,18	571,461	-0,019	-0,837	45,757
26	8,4	3,4	1,7	2,46	0,82	0,18	267,557	0,084	-0,803	48,704
27	2,6	8,6	1,7	2,46	0,82	0,18	447,438	-0,014	-0,750	51,000
28	8,4	8,6	1,7	2,46	0,82	0,18	235,119	-0,103	-0,596	53,936
29	2,6	3,4	4,3	2,46	0,82	0,18	1093,830	-0,017	-0,809	45,762
30	8,4	3,4	4,3	2,46	0,82	0,18	573,172	-0,075	-0,785	48,713
31	2,6	8,6	4,3	2,46	0,82	0,18	850,978	-0,018	-0,935	50,987
32	8,4	8,6	4,3	2,46	0,82	0,18	521,689	0,032	-0,885	53,936
33	2,6	3,4	1,7	0,54	0,18	0,82	176,894	-0,009	-0,017	2,220
34	8,4	3,4	1,7	0,54	0,18	0,82	82,541	-0,056	0,017	2,362
35	2,6	8,6	1,7	0,54	0,18	0,82	135,444	-0,031	0,010	2,477
36	8,4	8,6	1,7	0,54	0,18	0,82	70,742	0,002	-0,012	2,619
37	2,6	3,4	4,3	0,54	0,18	0,82	344,386	-0,006	-0,014	2,226
38	8,4	3,4	4,3	0,54	0,18	0,82	175,085	-0,036	0,025	2,366
39	2,6	8,6	4,3	0,54	0,18	0,82	256,143	0,012	-0,034	2,476
40	8,4	8,6	4,3	0,54	0,18	0,82	157,668	0,018	0,006	2,618
41	2,6	3,4	1,7	2,46	0,18	0,82	563,826	-0,062	-0,626	41,405
42	8,4	3,4	1,7	2,46	0,18	0,82	263,427	-0,174	-0,601	44,070
43	2,6	8,6	1,7	2,46	0,18	0,82	443,256	0,018	-0,573	46,152
44	8,4	8,6	1,7	2,46	0,18	0,82	233,163	-0,005	-0,534	48,816
45	2,6	3,4	4,3	2,46	0,18	0,82	1120,748	-0,040	-0,609	41,415
46	8,4	3,4	4,3	2,46	0,18	0,82	584,281	-0,125	-0,569	44,081
47	2,6	8,6	4,3	2,46	0,18	0,82	809,168	0,038	-0,736	46,143
48	8,4	8,6	4,3	2,46	0,18	0,82	481,839	0,043	-0,677	48,807
49	2,6	3,4	1,7	0,54	0,82	0,82	254,424	0,037	-0,096	6,573
50	8,4	3,4	1,7	0,54	0,82	0,82	118,524	0,029	-0,015	6,999
51	2,6	8,6	1,7	0,54	0,82	0,82	193,372	-0,075	-0,052	7,332
52	8,4	8,6	1,7	0,54	0,82	0,82	101,931	0,015	-0,062	7,753
53	2,6	3,4	4,3	0,54	0,82	0,82	457,654	0,018	-0,067	6,581
54	8,4	3,4	4,3	0,54	0,82	0,82	246,445	-0,031	0,023	7,001
55	2,6	8,6	4,3	0,54	0,82	0,82	373,415	0,021	-0,086	7,326
56	8,4	8,6	4,3	0,54	0,82	0,82	228,008	0,041	-0,033	7,749
57	2,6	3,4	1,7	2,46	0,82	0,82	585,117	-0,034	-0,850	45,755
58	8,4	3,4	1,7	2,46	0,82	0,82	274,102	-0,022	-0,769	48,703
59	2,6	8,6	1,7	2,46	0,82	0,82	456,256	-0,010	-0,810	51,004
60	8,4	8,6	1,7	2,46	0,82	0,82	239,648	-0,135	-0,721	53,946

61	2,6	3,4	4,3	2,46	0,82	0,82	1120,375	-0,016	-0,809	45,767
62	8,4	3,4	4,3	2,46	0,82	0,82	585,457	-0,136	-0,741	48,714
63	2,6	8,6	4,3	2,46	0,82	0,82	865,505	0,021	-0,945	50,989
64	8,4	8,6	4,3	2,46	0,82	0,82	532,995	0,054	-0,881	53,935
65	1,0	6,0	3,0	1,50	0,50	0,50	632,334	0,015	-0,233	17,704
66	10	6,0	3,0	1,50	0,50	0,50	217,583	-0,043	-0,307	19,418
67	5,5	2,0	3,0	1,50	0,50	0,50	379,355	0,089	-0,316	17,047
68	5,5	10	3,0	1,50	0,50	0,50	288,426	-0,095	-0,233	20,079
69	5,5	6,0	1,0	1,50	0,50	0,50	140,764	-0,277	-0,420	18,560
70	5,5	6,0	5,0	1,50	0,50	0,50	467,504	0,016	-0,179	18,550
71	5,5	6,0	3,0	0,00	0,50	0,50	132,553	0,004	-0,009	1,859
72	5,5	6,0	3,0	3,00	0,50	0,50	630,956	-0,012	-1,320	68,658
73	5,5	6,0	3,0	1,50	0,00	0,50	320,097	-0,038	-0,162	16,702
74	5,5	6,0	3,0	1,50	1,00	0,50	375,444	0,076	-0,422	24,129
75	5,5	6,0	3,0	1,50	0,50	0,00	315,471	-0,054	-0,258	18,561
76	5,5	6,0	3,0	1,50	0,50	1,00	345,214	-0,010	-0,211	18,559
77	5,5	6,0	3,0	1,50	0,50	0,50	322,983	0,003	-0,227	18,559

Tabla 10. Resultados iteración análisis FEM para la Junta Esférica

Mediante la aplicación de la metodología de diseño de experimentos ANOVA a estos resultados mostrados en las tablas anteriores, se trata de definir la influencia de cada uno de los parámetros de diseño, así como obtener unas ecuaciones que permitan determinar los valores de los desplazamientos del centro de las juntas, así como la máxima tensión soportada por las mismas, en función de los parámetros de diseño introducidos.

Tras la determinación de estas ecuaciones y su comparativa con los resultados obtenidos en diferentes análisis FEM para verificar su validez, cabe señalar que para los desplazamientos del centro de las juntas se han obtenido variaciones entre ambos ensayos, que aun siendo pequeñas, no permiten su uso para su cálculo, ya que introducirían errores en el modelo. Por contra, para las máximas tensiones soportadas en las juntas, las ecuaciones definidas permiten alcanzar valores muy similares a los de los análisis FEM, lo cual es una herramienta muy útil para poder determinar unos parámetros de diseño posibles.

A continuación, se muestran las ecuaciones alcanzadas para la determinación de las máximas tensiones (MPa) soportadas en ambos tipos de juntas:

- Junta de Revolución

$$\begin{aligned} Max_Tension_{rev} = & 102.23 + 272.36 \cdot A - 53.49 \cdot B + 147.65 \cdot C - 14.01 \cdot A \cdot B + 62.83 \cdot A \cdot C - \\ & - 5.71 \cdot B \cdot C - 7.38 \cdot A^2 + 3.22 \cdot B^2 - 26.26 \cdot C^2 \end{aligned} \quad (191)$$

Donde A (°) es el ángulo girado en la junta de revolución "α", y B y C (mm), el radio y el espesor respectivamente, que caracterizan dimensionalmente a la junta de revolución.

- Junta Esférica

$$\begin{aligned}
 Max_Tension_{esf} = & -18.90 \cdot A - 50.60 \cdot B - 8.06 \cdot C + 116.18 \cdot D + 177.55 \cdot E + 66.58 \cdot F + 94.22 \cdot A \cdot B - \\
 & -7.64 \cdot A \cdot C - 20.64 \cdot A \cdot D - 7.04 \cdot A \cdot E - 4.30 \cdot A \cdot F - 4.42 \cdot B \cdot C - 9.22 \cdot B \cdot D + 2.43 \cdot B \cdot E - 2.13 \cdot B \cdot F + \\
 & + 51.17 \cdot C \cdot D + 19.36 \cdot C \cdot E + 10.33 \cdot C \cdot F - 49.26 \cdot D \cdot E - 20.59 \cdot D \cdot F - 22.20 \cdot E \cdot F + 4.57 \cdot A^2 + \\
 & + 0.10 \cdot B^2 - 7.05 \cdot C^2 + 21.96 \cdot D^2 + 61.69 \cdot E^2 - 8.02 \cdot F^2
 \end{aligned}
 \tag{192}$$

Donde A (mm) es la longitud, B (mm) el radio y C (mm) el espesor de la junta esférica, que son los parámetros que la caracterizan dimensionalmente. Los términos D, E y F (°) hacen referencia a los ángulos girados en la junta esférica sobre los m, n y l, es decir, β_m , β_n y β_l .

Por último, para caracterizar a las juntas de revolución válidas en términos de rigidez, se fija una cara de la misma y se aplica un momento en el otro extremo. Para las juntas esféricas, como en el caso anterior, se fija una cara de la misma y se aplican dos momentos en el lado opuesto, ver Figura 120.

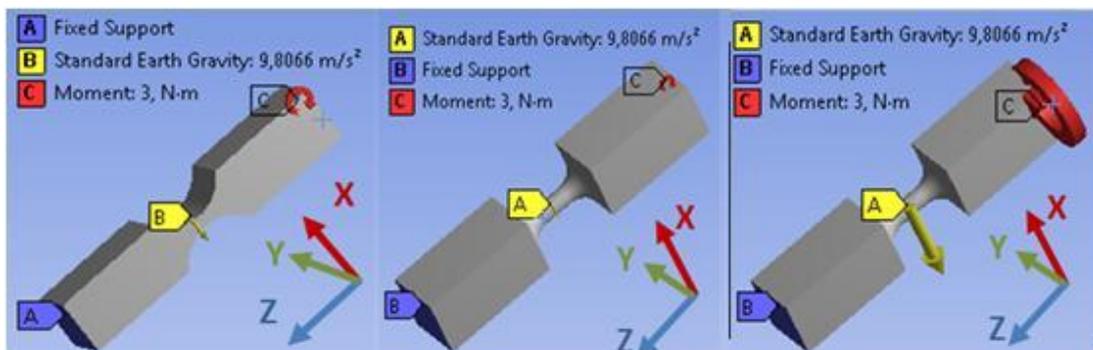


Figura 120. Modelización de ensayos FEM a las juntas flexibles

En ambos casos, tanto la cara lateral fijada como las cargas aplicadas son localizados a una distancia de 20mm de los cuerpos flexibles [25]. El motivo por el cual se ubican en estas posiciones tanto las caras fijas como las cargas aplicadas es obtener la mayor precisión en los resultados. Se ha comprobado que la precisión de los modelos FEM se ve significativamente influenciada por la forma en que se asignan las condiciones de contorno en el modelo. Por ejemplo, cuando se aplica una fuerza puntual en un nodo, ésta podría causar un pico de tensión local en el nodo que reduce la precisión de los resultados FEM. Es por ello que, tanto las restricciones como las fuerzas se aplican a esta distancia para reducir las influencias de las restricciones y las fuerzas aplicadas en los resultados de FEM.

Para el mallado de las juntas flexibles, se ha seleccionado uno del tipo tetraédrico, en el que se ha reducido el tamaño de los nodos en las zonas de las juntas donde se producen las deformaciones a flexión y torsión, con el fin de obtener la mayor precisión en los resultados, ver Figura 121. Indicar que para el caso de la malla de la junta de revolución, ésta está formada por 477.458 tetraedros del tipo “cuadrático o de segundo orden” y 673.986 nodos. Para la junta esférica, su malla está formada por 443.764 tetraedros del tipo “cuadrático o de segundo orden” y 623.771 nodos.

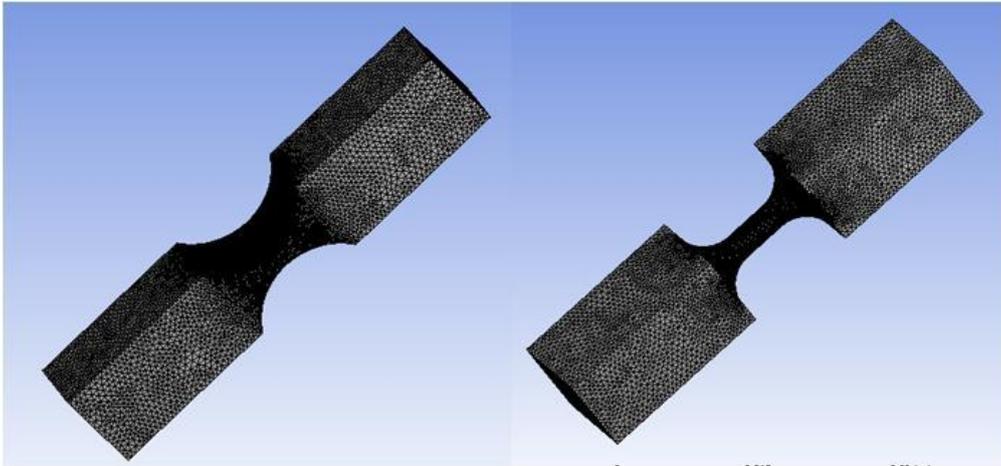


Figura 121. Mallado de las juntas flexibles

Con estas configuraciones es posible medir, tanto las máximas tensiones sufridas como los desplazamientos soportados en las juntas flexibles, alcanzando los valores de rigidez a flexión en la junta de revolución y los valores de la rigidez a flexión y a torsión en la junta esférica, ver Figura 122.

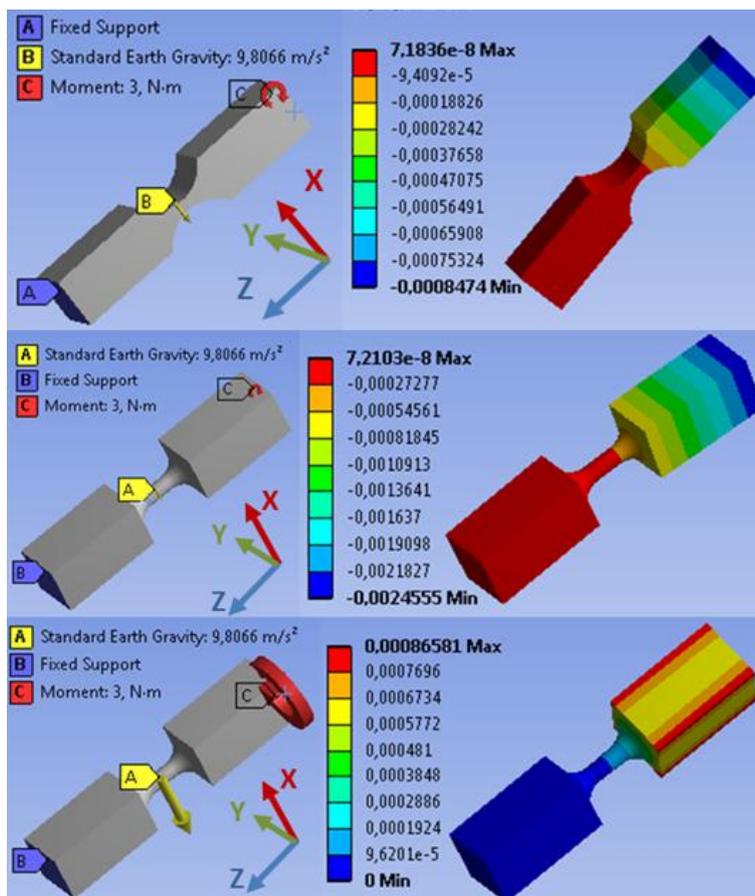


Figura 122. Carga y deformación de las juntas flexibles. Arriba) Flexión de la junta de revolución. Medio y Abajo) Flexión y torsión de la junta esférica

3.11.3 Diseño del manipulador 3-PRS basándose en cálculos FEM

En la Figura 123 puede observarse un ejemplo del mecanismo 3-PRS y su mallado. Señalar que para la malla de todas las simulaciones realizadas se ha seleccionado un mallado del tipo tetraédrico. El tamaño de nodo en las juntas flexibles se ha reducido en un ratio 10:1 respecto al resto de superficies del mecanismo con el fin de obtener resultados más precisos en aquellas áreas donde las deformaciones y las concentración de tensiones son mayores. Indicar también que todos los tetraedros que conforman la malla del manipulador (920.938 elementos) son del tipo “cuadrático o de segundo orden”, en los que se mantiene el nodo central en cada uno de sus lados (1.294.885 nodos). Esto, aun aumentando la densidad del número de nodos y por tanto el tiempo de procesamiento y gasto de recursos, nos proporcionará una mayor precisión en los resultados.

Una vez se alcanzan unas juntas potencialmente válidas para los requisitos exigidos, éstas son introducidas en el conjunto del manipulador para su análisis. Hay que señalar que su comportamiento puede variar respecto de su análisis individual una vez son sometidas a las condiciones de trabajo del mecanismo, ya que existen tensiones derivadas de la propia configuración del mismo.

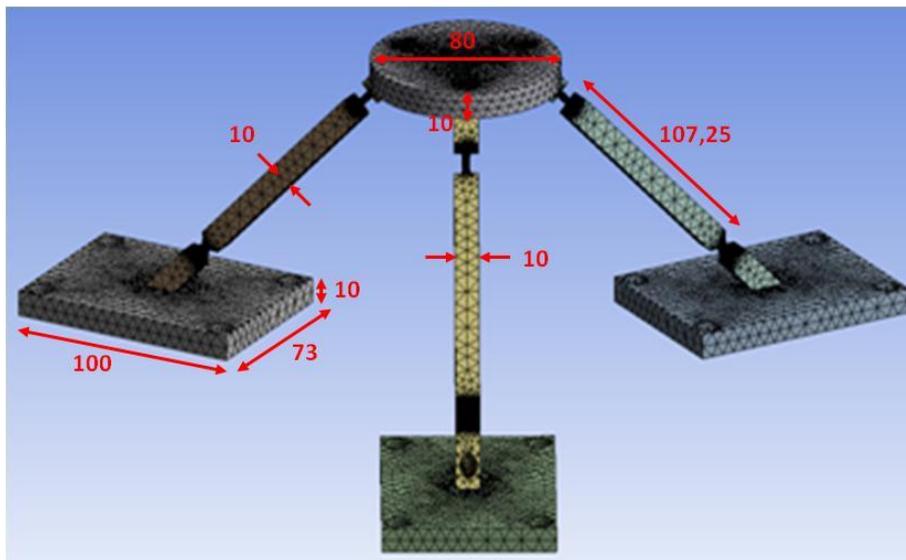


Figura 123. Mallado del manipulador 3-PRS

Para realizar el estudio del comportamiento, se ha efectuado un análisis estático estructural en el que se han aplicado diferentes fuerzas de forma escalonada en el lugar donde se sitúan los actuadores. Gracias a esto se han podido calcular las relaciones existentes entre las cargas aplicadas y los movimientos producidos tanto en los actuadores como en la plataforma móvil. Además se ha controlado que la máxima tensión sufrida en la estructura, que ocurre en una de las dos juntas flexibles, no supere los 400MPa. También se ha verificado que las máximas tensiones soportadas por ambos tipos de juntas posean valores similares. El objetivo es evitar puntos críticos en la estructura debidos a los elevados esfuerzos soportados en un determinado tipo de junta flexible, ver Figura 124. Se establece como condición de diseño que el ratio entre las máximas tensiones soportadas en ambos tipos de juntas este comprendido entre 1 ± 0.2 .

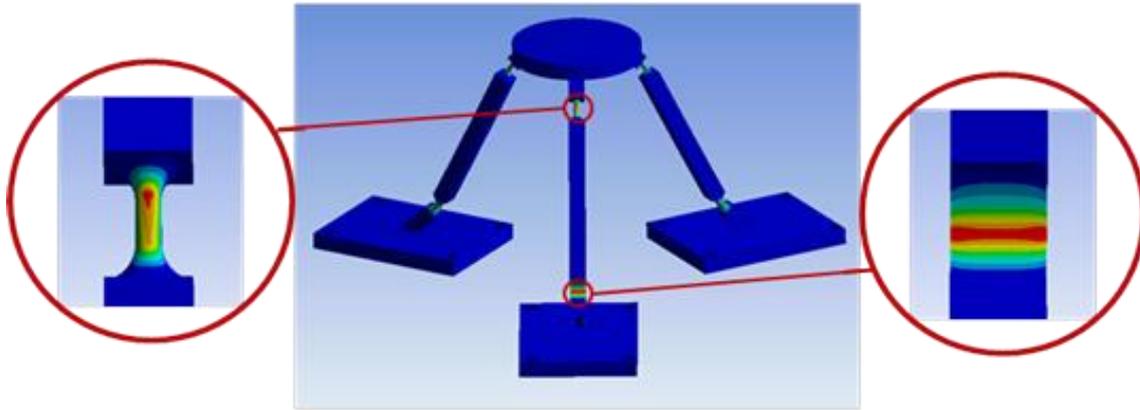
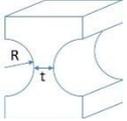
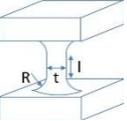


Figura 124. Zonas de las juntas con máxima tensión durante un desplazamiento vertical del manipulador

Como se ha indicado en el estudio de las juntas flexibles, se han seleccionado como parámetros de diseño al radio y espesor para las juntas de revolución, y al radio, espesor y longitud para las juntas esféricas. Dependiendo de las variaciones de alguno de estos términos, se pueden obtener nuevas características en el manipulador.

Gracias a la experiencia adquirida durante el diseño del manipulador flexible 3-PRS, se han podido determinar la influencia de cada uno de estos parámetros en el comportamiento del mecanismo. En la Tabla 11 se muestran algunas indicaciones muy útiles para alcanzar un nuevo mecanismo $i+1$ partiendo de uno caso previo i . Como puede observarse, por ejemplo, un incremento en el espesor de la junta de revolución provocaría un aumento significativo en la rigidez de la estructura, por un factor superior a 1,5, mientras que el desplazamiento en la dirección del eje z y el ratio entre las máximas tensiones en las juntas sufriría una ligera reducción, con un factor de 0,8. Por contra, un incremento en la longitud de la junta esférica provocaría una leve reducción de la rigidez estructural del manipulador, un importante aumento en el desplazamiento vertical y una notable reducción del ratio entre las máximas tensiones soportadas en las juntas flexibles.

	Incremento Positivo	Rigidez Estructural (η_{i+1}/η_i)	Desplazamiento en dirección z (d_{i+1}/d_i)	Ratio Max. Tensión en juntas (T_{i+1}/T_i) donde $T = T_{sph}/T_{rev}$
Junta Revolución 	t_{rev}	↑ ↑ ↑	↓	↓
	R_{rev}	↓	↑	↑ ↑
Junta Esférica 	t_{esf}	↑	↓	↑
	R_{esf}	↓	↑ ↑	↓ ↓
	l_{esf}	↓	↑ ↑ ↑	↓ ↓ ↓

↑ $\in 1 - 1.2$
 ↑ ↑ $\in 1.2 - 1.5$
 ↑ ↑ ↑ > 1.5
 ↓ $\in 0.8 - 1$
 ↓ ↓ $\in 0.5 - 0.8$
 ↓ ↓ ↓ < 0.5

Tabla 11. Influencia de los parámetros de diseño en el comportamiento del manipulador

Se han aplicado diferentes radios, espesores y longitudes a las juntas de revolución y esféricas hasta alcanzar los desplazamientos deseados en la plataforma y cumplir las condiciones impuestas en la etapa de diseño. Como se indicó al comienzo de esta sección relativa al diseño del manipulador 3-PRS, para obtener el diseño óptimo realizamos un proceso iterativo de cálculos FEM hasta llegar al resultado deseado, ver Figura 117.

Como resultado final al proceso de diseño, para la junta de revolución obtenemos los valores que pueden observarse en la Tabla 12.

Junta de revolución	R_{rev} (mm)	t_{rev} (mm)	K_{rev} (N·m/rad)
		8	2

Tabla 12. Valores obtenidos para la junta de revolución

Para el caso de la junta esférica, los valores alcanzados pueden verse en la Tabla 13:

Junta esférica	R_{esf} (mm)	t_{esf} (mm)	l_{esf} (mm)	K_{Resf} (N·m/rad)	K_{Tesf} (N·m/rad)
		4	3	5	32.67

Tabla 13. Valores obtenidos para la junta esférica

Como ejemplo, en la Tabla 14 pueden observarse los resultados obtenidos mediante los cálculos FEM para un desplazamiento en la dirección del eje z. Se han aplicado tres fuerzas de forma escalonada en los actuadores y se han medido tanto los desplazamientos en los mismos y en la plataforma móvil, como la máxima tensión producida en la estructura. Atendiendo al comportamiento lineal de los valores obtenidos, se debería alcanzar, para una tensión máxima de 400MPa, un desplazamiento vertical en la dirección z igual a 2.205mm.

Actuador 1	F_1 (N)	20	40	60
	s_1 (mm)	0.935	1.899	2.865
Actuador 2	F_2 (N)	20	40	60
	s_2 (mm)	0.935	1.899	2.865
Actuador 3	F_3 (N)	20	40	60
	s_3 (mm)	0.935	1.899	2.865
Plataforma	z (mm)	0.933	1.896	2.859
Juntas	Max. Tensión (MPa)	169.25	344.01	518.78

Tabla 14. Fuerzas estáticas, desplazamientos y máximas tensiones en juntas

3.12 Resumen de la metodología. Conclusiones

A la vista de la metodología presentada en esta sección, podemos concluir que se ha desarrollado un método por medio del cual podemos alcanzar un mecanismo idóneo para una determinada aplicación, simulando su comportamiento en sus condiciones futuras de trabajo.

Así, introduciendo los requisitos a alcanzar por el mismo, serán obtenidos los desplazamientos producidos en toda la estructura, gracias a la resolución del problema cinemático del mecanismo. Estos, junto a la resolución del problema dinámico, permitirán simular el comportamiento real del manipulador, gracias al análisis mecatrónico del mismo.

Por último, mediante el proceso resolutivo desarrollado para el análisis estructural, tanto de las juntas como del conjunto, podemos obtener la estructura óptima para una determinada aplicación, introduciendo tanto unos determinados requisitos a cumplir, como unas limitaciones para el correcto funcionamiento del mecanismo.

En conclusión, podemos afirmar que con el método expuesto en este apartado, hemos desarrollado una metodología que permite la obtención de un mecanismo flexible, anticipando el comportamiento que tendrá en sus condiciones de trabajo reales y analizando los posibles puntos débiles del mismo, con el fin de obtener el mecanismo óptimo para una determinada aplicación.

4. Validación Experimental

En este apartado se van a mostrar los diferentes análisis experimentales realizados sobre un prototipo para demostrar la idoneidad de la metodología de diseño propuesta en esta investigación.

Así, en primer lugar, se mostrará el prototipo desarrollado, definiendo cada uno de los componentes del mismo. A continuación, se desarrollarán cada una de las validaciones realizadas al mismo: dimensional, cinemática y dinámica, mostrando los resultados alcanzados en cada una de ellas.

4.1 Construcción del prototipo

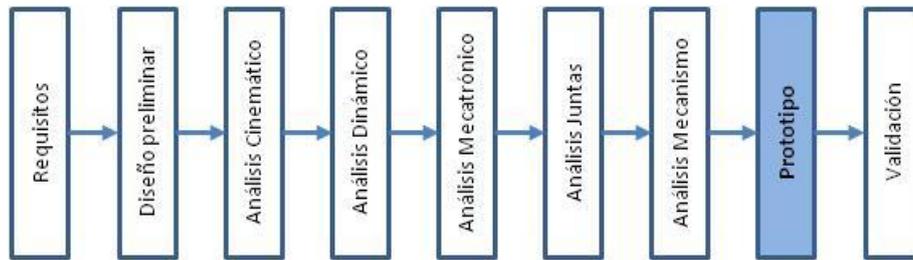


Figura 125. Metodología propuesta, paso 8: Prototipo

Para validar experimentalmente los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se ha fabricado un prototipo que reproduzca el mecanismo óptimo alcanzado en la etapa de diseño, ver Figura 126. En este punto habría que matizar que mediante la construcción del mismo, se buscará de validación de la metodología de diseño propuesta en esta investigación, no con el objetivo de lograr el mecanizado de microlentes.



Figura 126. Prototipo desarrollado

En la Figura 127 pueden observarse los diferentes componentes del manipulador: plataforma móvil, barras, bases sobre los actuadores, guías lineales, elemento de centrado o fijador, y placa modular.

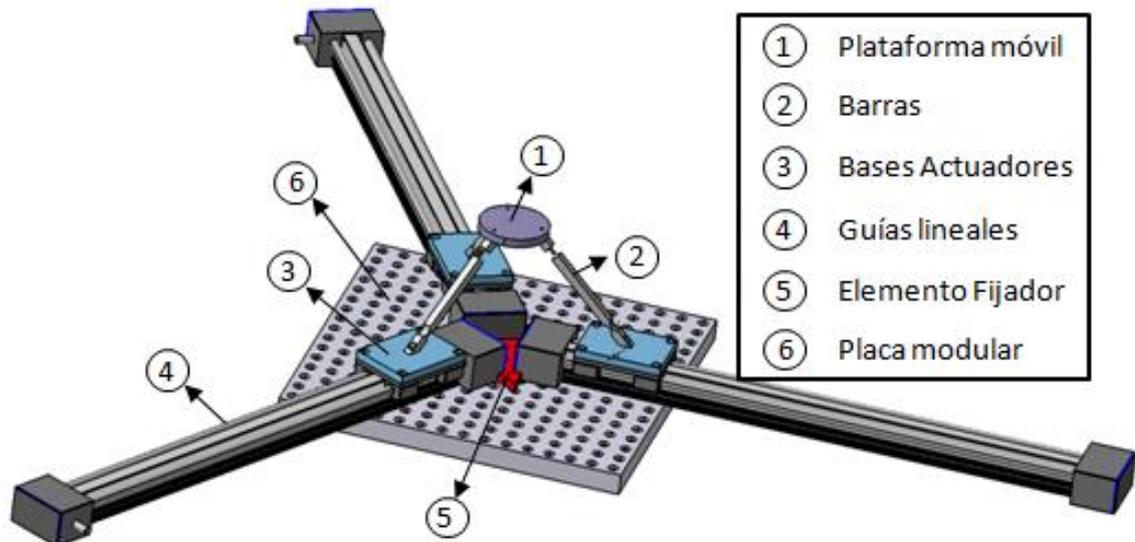


Figura 127. Componentes del Prototipo

4.1.1 Plataforma móvil

Para la plataforma móvil, se decide seleccionar un diseño de sección circular con el fin de repartir el peso uniformemente sobre las tres barras del manipulador. Gracias a esta configuración, en la que se ubican las roscas que permiten la unión a las barras a 120°, un tercio del peso de la plataforma recae sobre cada extremidad, no favoreciendo a la variabilidad de las cargas soportadas en las juntas flexibles ubicadas en las barras. Las dimensiones escogidas para la plataforma, así como la localización y tipo de roscas seleccionadas para la unión a las barras pueden verse en la Figura 128.

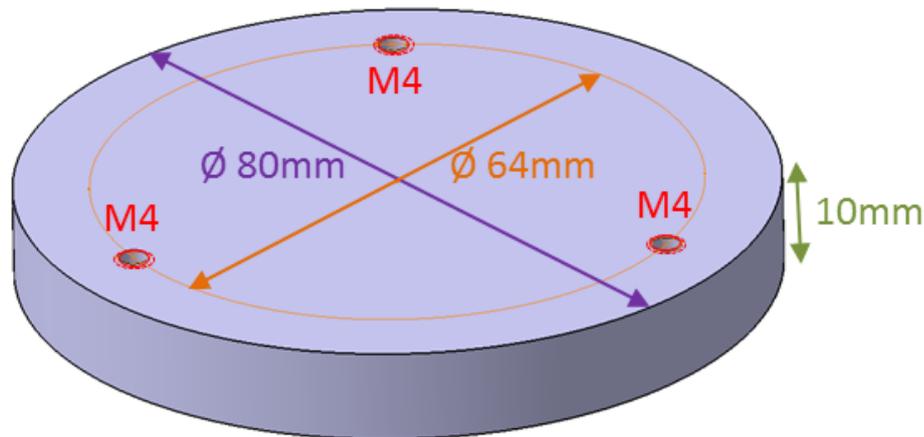


Figura 128. Dimensiones Plataforma móvil

La fabricación de la misma se realiza en el taller del Grupo de Fabricación del Departamento de Ingeniería Mecánica de la UPV/EHU. El material seleccionado para la plataforma ha sido el aluminio 7075. Algunas de las operaciones realizadas para la consecución de la plataforma móvil final, como son las de corte, torneado, medición y taladrado pueden ser observadas en la Figura 129.



Figura 129. Fabricación Plataforma móvil

Con el fin de favorecer la unión entre la plataforma móvil y las barras del manipulador, se realiza un ranurado de tamaño igual al grosor de las barras en la parte inferior de la plataforma. Gracias a esto, evitamos la rotación de las extremidades en el tornillo que se emplea para fijar ambos componentes. En dichas ranuras se ubicaran cada una de las barras una vez se realice el ensamblaje total del manipulador. Dicho ranurado puede observarse en la Figura 130.

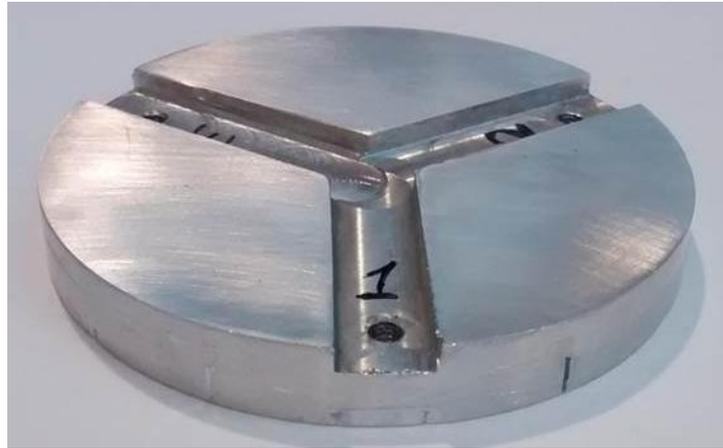


Figura 130. Ranurado en la Plataforma móvil

4.1.2 Barras

El plano donde se aprecian las dimensiones y tolerancias impuestas a las barras puede verse en la Figura 131. Señalar que se selecciona la aleación de aluminio 7075 como material para su fabricación.

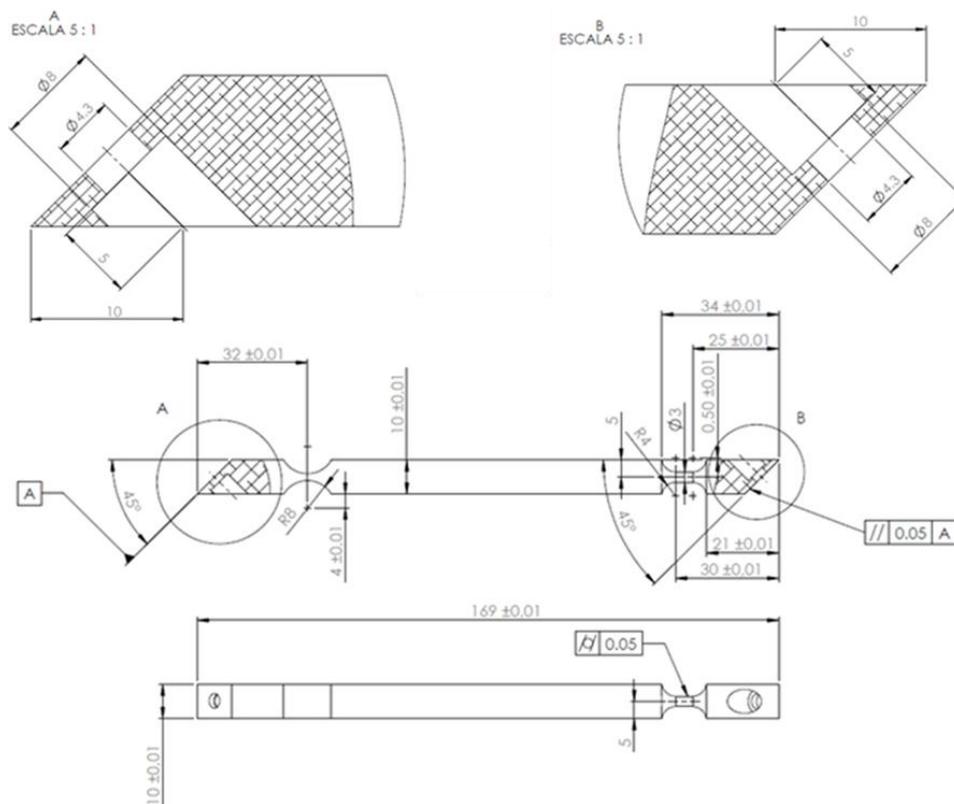


Figura 131. Plano para Barras

En la anterior imagen pueden verse las rigurosas tolerancias aplicadas, especialmente a las juntas y extremos, ya que el funcionamiento del manipulador depende de la geometría de las barras. Como se vio en los apartados en los que se desarrolló la cinemática y dinámica, se utilizaron las mismas dimensiones en los cálculos para todas las extremidades. Es por ello que cualquier desviación entre el diseño propuesto y el resultado obtenido tras la etapa de fabricación, afectaría negativamente al resultado esperado. En la Figura 132 puede observarse la barra fabricada, haciendo hincapié en las juntas flexibles.

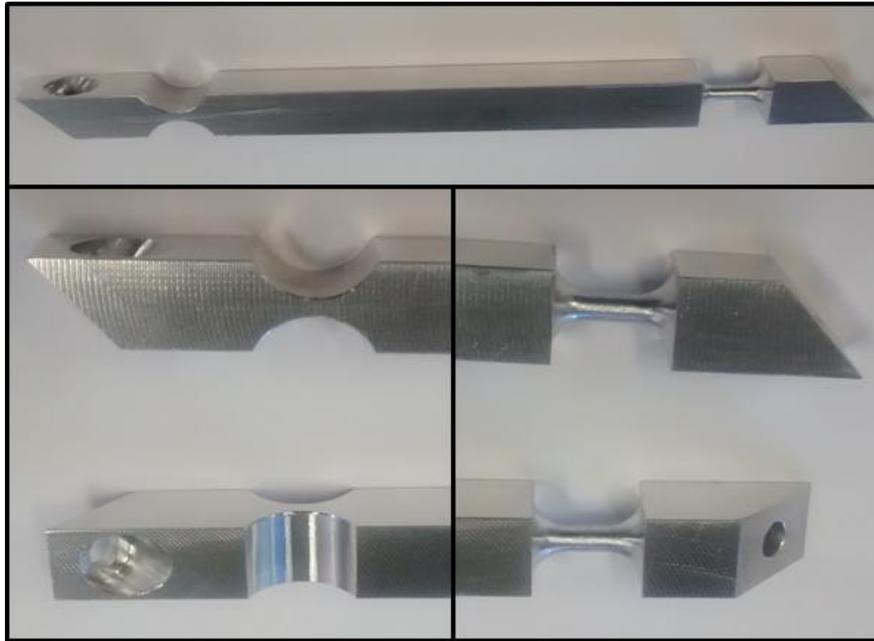


Figura 132. Arriba) Barras fabricadas. Abajo-Izq.) Junta Revolución. Abajo-Dcha.) Juntas Esférica

4.1.3 Bases Actuadores

Con el fin de conectar las barras del manipulador con las guías lineales, ha sido necesario diseñar y fabricar unas bases. El material seleccionado para estos elementos ha sido el aluminio 7075 también. Las dimensiones de las mismas vendrán definidas por los carros de las guías lineales, que además impondrán la ubicación de los taladros por donde se unirán a las guías. Por otro lado, se situará en el centro de la base una rosca en la que se ensamblará la barra del manipulador. Un esquema con las dimensiones seleccionadas para las bases puede verse en la Figura 133.

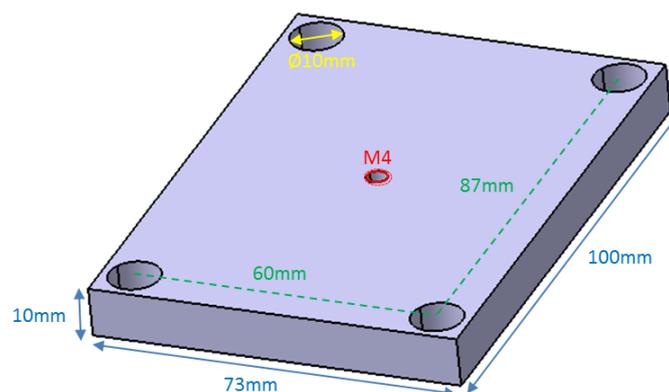


Figura 133. Dimensiones Base Actuadores

Al igual que para el caso de la plataforma móvil, se decide realizar un ranurado de tamaño igual a la anchura de la barra para favorecer la unión entre ésta y la base, evitando así la rotación entre ambos elementos cuando se introduzca un desplazamiento en el manipulador. En la Figura 134 puede observarse una imagen del proceso de ranurado de la base, así como una de las bases finales realizadas.

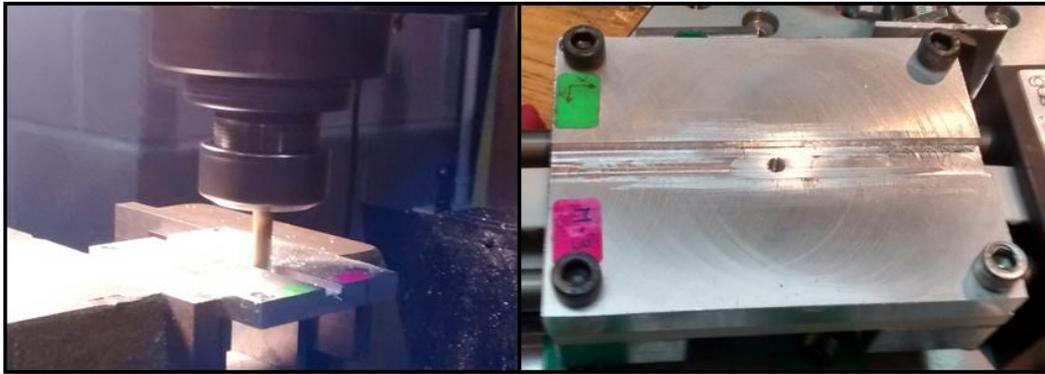


Figura 134. Ranurado y Base Actuador final

4.1.4 Elemento Fijador

Este elemento se diseña con el objetivo de favorecer el montaje de las tres guías lineales, dejando un ángulo de 120° entre ellas. Consiste en un triángulo equilátero en el que en cada uno de los laterales se realiza un corte donde alojar a las guías lineales y fijar su posición. También se diseñan dos agujeros en su superficie que permitirán su fijación por medio de tornillos en la placa modular que se detallará a continuación. Señalar que este elemento está fabricado en una impresora 3d convencional que utiliza ABS como material de aporte. En la Figura 135 pueden verse una imagen del proceso de impresión, así como una imagen del elemento fijador final.

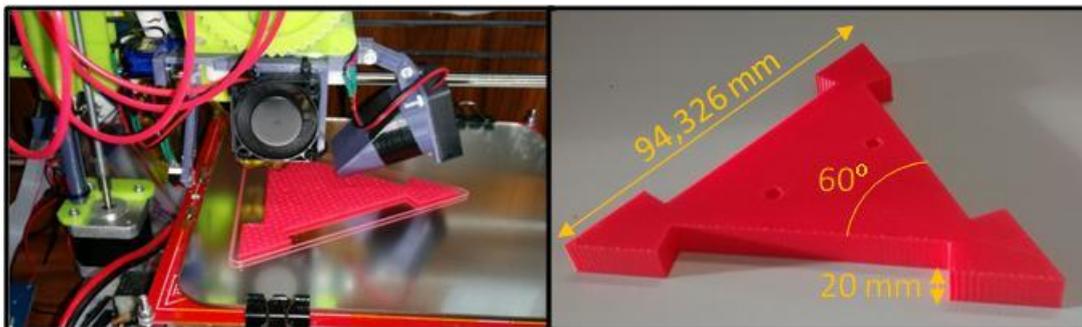


Figura 135. Proceso de impresión 3d y elemento fijador final

4.1.5 Placa modular

Para realizar el montaje del manipulador, se emplea una placa modular como soporte del conjunto. Ésta proporciona una gran precisión en la disposición de las guías lineales, además de una mayor rigidez para todo el mecanismo. La placa modular empleada es el modelo 5106 006 020 de la marca norelem®, la cual está realizada en una aleación ligera de elevada resistencia con una masa de 10.9Kg. El diseño de la misma, así como las principales características dimensionales de la misma, pueden verse tanto en la Figura 136 como en la Tabla 15.

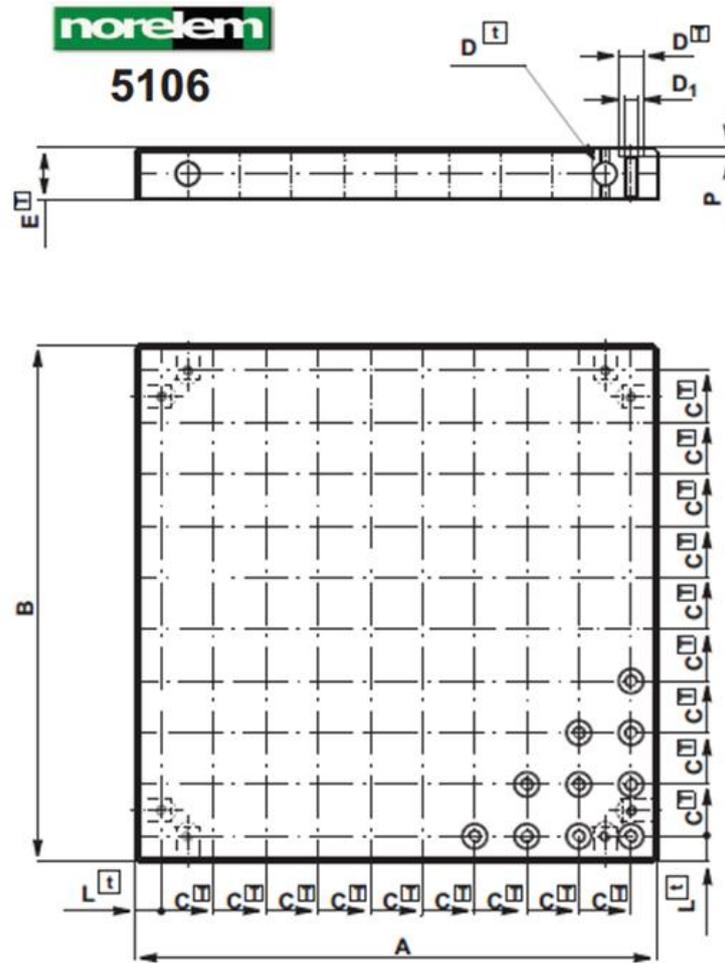


Figura 136. Placa modular *norelem* 5106 006 020

DIMENSIONES								
A	B	C	D	D ₁	E	L	P	n.
(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	rang.
400	400	25	12	M.6	25	12.5	5	16
TOLERANCIAS								
Generales	Sobre Elementos Funcionales				Geométricas			
Fabricación	Cotas		Taladrados		⊥	//	□	
±0.25	T = ±0.020	t = ±0.1	T= E8	T= E10	0.04	0.04	0.02/100	

Tabla 15. Características dimensionales de la placa modular *norelem*® 5106 006 020

4.1.6 Accionamientos y controlador

El sistema de actuación del manipulador 3-PRS consiste en tres actuadores, formados por un motor DC RE-40 Maxon con una reductora planetaria GP-32, cuya relación de transmisión es 14:1. Se emplean acoplamientos flexibles para conectar los ejes de salida de las reductoras a las tres correas lineales de transmisión Iguis ZLW-1040-02-S-100, ver Figura 137. Como se

desprende de la imagen de las guías lineales, su longitud es excesiva para los desplazamientos a transmitir a este tipo de manipuladores flexibles. Aun así eran los elementos con los que se contaba en el departamento de Ingeniería Mecánica que se ajustaban más a las características de diseño requeridas. De aquí se justifica su utilización en este prototipo.

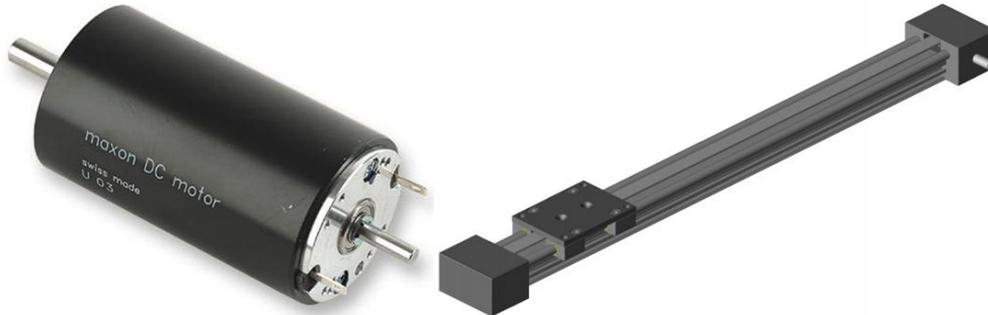


Figura 137. Dcha.) Motor DC RE-40 Maxon; Izqda.) Correa lineal Iigus ZLW-1040-02-S-100

Los comandos de posición para la plataforma móvil se convierten en una referencia angular θ en los motores por medio del Problema Cinemático Inverso y por medio del sistema de control, que a continuación se detalla, se realiza el control del θ comandado. Este control implementado para el dispositivo, consiste en un controlador PID de posición, velocidad y corriente en cascada, ver Figura 138.

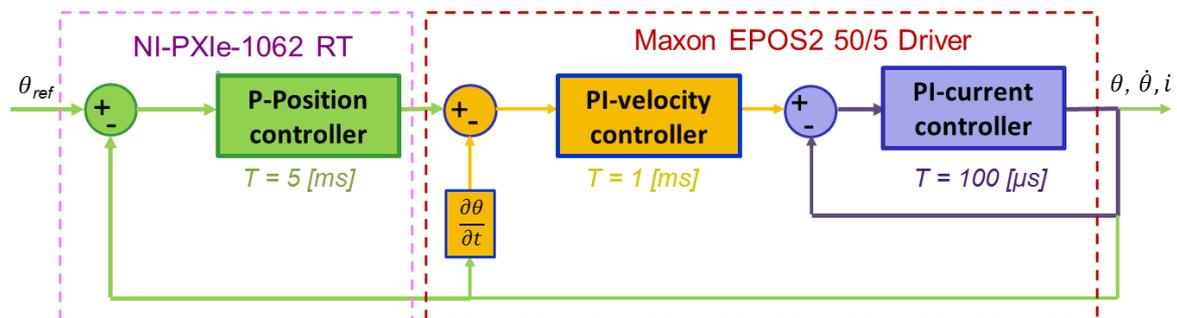


Figura 138. Esquema de control del prototipo

La posición es controlada en una primera etapa en un NI-PXIe 1062 con un sistema operativo en tiempo real, ver Figura 139. El lazo de control de posición se basa en una ganancia proporcional con un valor de 20^{-1} y un tiempo de ciclo de 5ms. La referencia de velocidad, que es la salida de esta etapa, se envía al controlador del motor maxon EPOS2 50/5 a través de una interfaz CANopen, donde se realiza la regulación de la velocidad y la corriente.



Figura 139. Dcha.) NI-PXIe 1062; Izqda.) Maxon EPOS2 50/5

En cuanto al lazo de control de velocidad, se emplea un controlador proporcional-integral (PI), cuya ganancia proporcional es k_{pv} ($A \cdot s \cdot rad^{-1}$) y cuya ganancia integral es k_{iv} ($A \cdot rad^{-1}$), y en el que se ha establecido como tiempo de ciclo 1ms. La referencia de la corriente, que es la salida del controlador de velocidad, llega a un controlador de corriente PI, cuya ganancia proporcional es k_{pci} (Ω) y cuya ganancia integral es k_{ici} ($\Omega \cdot s^{-1}$), y el tiempo de ciclo es 100 μ s. La constante de par de los motores RE-40 es de $30.2 \times 10^{-3} Nm/A$. Los valores de las ganancias, tanto para el lazo de control de la velocidad como el de la corriente para cada uno de los motores, pueden verse en la Tabla 16.

	Lazo de Control de Velocidad		Lazo de Control de Corriente	
	k_{pvi} ($A \cdot s \cdot rad^{-1}$)	k_{ivi} ($A \cdot rad^{-1}$)	k_{pci} (Ω)	k_{ici} ($\Omega \cdot s^{-1}$)
Motor 1	0.06404	2.3	0.91494	3206.2
Motor 2	0.06032	2.19	0.91494	3245.3
Motor 3	0.06218	2.245	0.91494	3245.3

Tabla 16. Ganancias para los lazos de control de velocidad y corriente en los motores

A modo de resumen, en la Tabla 1 se muestra una compilación de los parámetros dimensionales y parámetros dinámicos del mecanismo flexible 3PRS, así como de los parámetros de control.

Parámetro	Definición	Valor	Unidades
a	Distancia O-A ₁	125.137	mm
b	Radio de la plataforma móvil	47.61	mm
L	Longitud de las barras	109.215	mm
M_b	Masa de la barra	0.028	kg
I_{bG}	Momento de inercia de la barra	$2.36 \cdot 10^{-5}$	kgm ²
M_{plat}	Masa de la plataforma	0.153	kg
α_0	Ángulo inicial de la barra	45	deg.
I_{platu}	Momento de inercia de la plataforma respecto al eje u	$6.834 \cdot 10^{-5}$	kgm ²
I_{platv}	Momento de inercia de la plataforma respecto al eje v	$6.834 \cdot 10^{-5}$	kgm ²
I_{platw}	Momento de inercia de la plataforma respecto al eje w	$1.309 \cdot 10^{-5}$	kgm ²
M_j	Masa de las bases de los actuadores	0.204	kg
k_r	Rigidez a flexión de la junta revolución	98.37	Nm
k_{sf}	Rigidez a flexión de la junta esférica	32.665	Nm
k_{st}	Rigidez torsional de la junta esférica	24.46	Nm
i_R	Relación de transmisión	$2 \cdot \pi \cdot 14 / 0.07$	-
k_V	Ganancia proporcional de posición	65	1/s
k_p	Ganancia proporcional de velocidad	1	As
k_i	Ganancia integral de velocidad	8	A
k_T	Constante de par	0.0302	Nm/A
J_1	Momento de inercia de la parte motora	$1.423 \cdot 10^{-4}$	kgm ²
J_2	Momento de inercia de la transmisión	$4.817 \cdot 10^{-8}$	kgm ²
c_{eq}	Amortiguamiento equivalente	$1.085 \cdot 10^{-5}$	Ns/m
c_1	Fricción viscosa	0.003	Ns/m

Tabla 17. Parámetros del manipulador 3-PRS: dimensiones, parámetros dinámicos y parámetros de control.

4.2 Validación dimensional

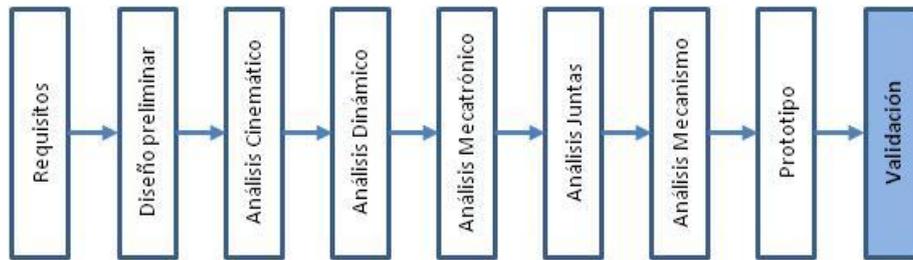


Figura 140. Metodología propuesta, paso 9: Validación

Para realizar el montaje del manipulador y asegurar que la posición real de cada uno de los componentes que lo forman es la correcta, se utiliza un dispositivo de medición externo. En concreto, se emplea una máquina de medir por coordenadas ZEISS MC850 la cual emplea el software ZEISS CALYPSO para el tratamiento de los datos generados, ver Figura 141.

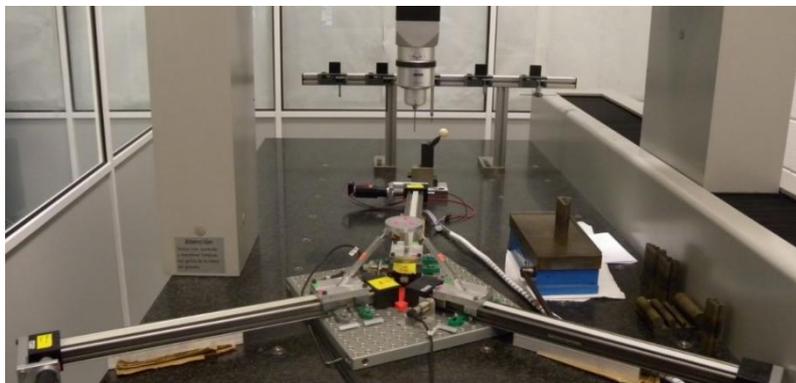


Figura 141. Máquina de medir por coordenadas ZEISS MC850

En primer lugar se miden los ángulos existentes entre las guías lineales, OA_i-OA_{i+1} , ver Figura 142, ya que, aunque el elemento fijador sitúa a las guías en una posición cercana a la correcta, se hace necesario realizar un ajuste más fino para alcanzar la ubicación óptima. Para realizarlo, se miden una serie de puntos a la misma altura en cada lado de las guías. Con las coordenadas de estos puntos se obtienen dos ecuaciones para cada una de las guías, las cuales proporcionan los ángulos existentes entre ellas. Los resultados finales obtenidos pueden observarse en la Tabla 18.

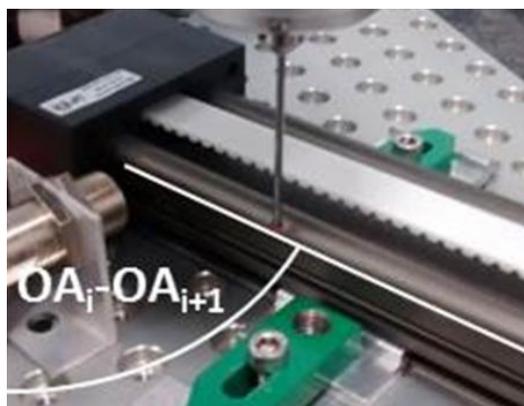


Figura 142. Medidas realizadas en las guías lineales

EJES	ÁNGULOS		
	Diseño	Medido	Error
OA ₁ -OA ₂	120°	119° 54' 36"	-0° 5' 24"
OA ₂ -OA ₃	120°	119° 58' 48"	-0° 1' 12"
OA ₃ -OA ₁	120°	120° 3' 0"	0° 3' 0"

Tabla 18. Ángulos medidos entre las guías

En segundo lugar se montan las bases de los actuadores sobre los carros de las guías lineales y se miden tanto la altura como la orientación que poseen los planos donde se fijan las barras del manipulador, Figura 143: puntos C_i. El objetivo es determinar si estos soportes se encuentran en el mismo plano, para lo cual se utiliza como referencia (RF) la superficie de la CMM, evitando así las posibles inclinaciones de otras superficies. Se miden varios puntos en cada una de las bases, obteniendo la altura media y el plano en que se encuentran localizados, ver Figura 143. Mediante estos planos se pueden determinar los errores de posición e inclinación de estas superficies. En la Tabla 19 pueden verse los resultados obtenidos para la altura y los ángulos alrededor de los ejes x e y de cada uno de los planos C_i. La altura media es de 77.472mm, la cual será necesaria para el cálculo posterior de la altura del prototipo.

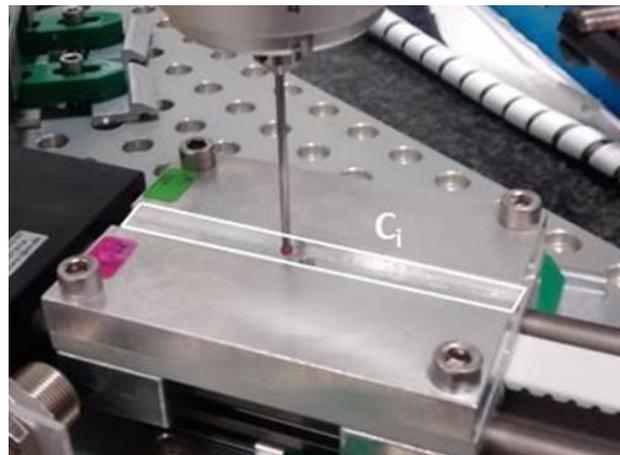


Figura 143. Medidas realizadas en las bases de los actuadores

PLANO	ALTURA			ψ		θ	
	Diseño	Medido	Error	Diseño	Medido	Diseño	Medido
C ₁	77.500	77.420	-0.080	0°	-0° 0' 3"	0°	-0° 0' 10"
C ₂	77.500	77.157	-0.343	0°	0° 23' 49"	0°	-0° 9' 21"
C ₃	77.500	77.838	0.338	0°	0° 17' 34"	0°	0° 15' 25"

Tabla 19. Altura e inclinaciones medidas en las bases de los actuadores

En tercer lugar se ensambla el prototipo sin la plataforma móvil y se miden las alturas y los planos superiores de cada una de las patas, Figura 144: $L_i \cdot \sin \alpha_0$. Una imagen del proceso de medición de las extremidades, así como el plano donde se ubican algunos de los puntos medidos que han sido seleccionados, puede verse en la Figura 144. Las alturas medias determinadas para cada una de las barras pueden observarse en la Tabla 20.

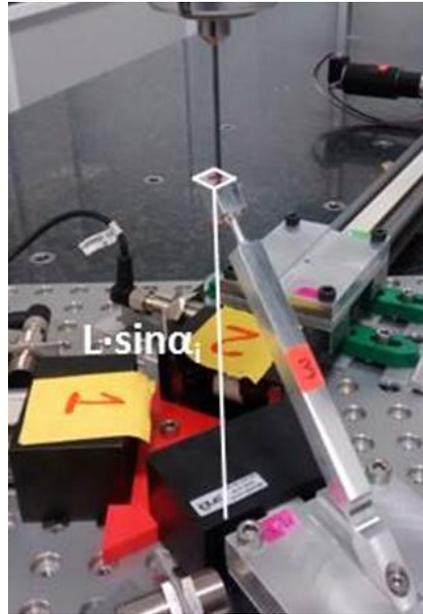


Figura 144. Medidas realizadas en las barras del manipulador

BARRA	ALTURA HASTA RF			ALTURA DE LA BARRA		
	Diseño	Medido	Error	Diseño	Medido	Error
$L_1 \cdot \sin \alpha_0$	189.728	189.697	-0.031	112.228	112.277	0.049
$L_2 \cdot \sin \alpha_0$	189.728	190.206	0.478	112.228	113.050	0.822
$L_3 \cdot \sin \alpha_0$	189.728	190.550	0.822	112.228	112.712	0.484

Tabla 20. Alturas de las barras del manipulador

El siguiente paso es realizar el montaje completo del prototipo y medir la altura e inclinación que existe en la plataforma móvil, Figura 145: punto P. Para hacerlo, se miden varios puntos en la cara superior y algunos contornos a diferentes alturas en la plataforma, ver

Figura 145. Mediante las medidas realizadas en la cara superior se obtiene la superficie del plano y con las de los contornos se determina el centro de los mismos, y por tanto el eje del cilindro de la plataforma. La intersección de estos dos elementos da como resultado el centro del sistema de referencia móvil, cuya altura es la buscada. Además, conociendo la ecuación del plano, se determina la inclinación de la plataforma alrededor de los ejes x e y. Los resultados alcanzados se muestran en la Tabla 21.

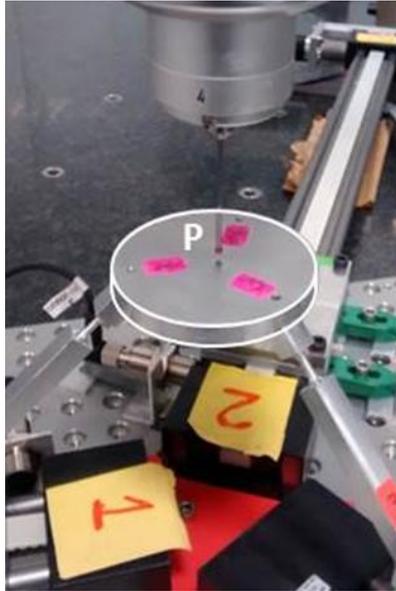


Figura 145. Medidas realizadas en la plataforma móvil

ALTURA HASTA RF			ALTURA PROTOTIPO			ψ		θ	
Diseño	Medido	Error	Diseño	Medido	Error	Diseño	Medido	Diseño	Medido
197.228	197.364	0.136	119.728	119.892	0.164	0°	0° 2' 9"	0°	0° 7' 48"

Tabla 21. Altura e inclinación de la plataforma móvil

Por último, con el prototipo ya ensamblado en la posición inicial, se mide la posición de cada una de las bases de los actuadores con respecto al sistema de referencia global, Figura 146: puntos A_i . Estos valores permiten conocer los desplazamientos reales en los actuadores cuando se programa un movimiento en el manipulador. Para obtener estas magnitudes, se mide la posición del plano posterior de cada una de las bases. Conociendo las ecuaciones de estos planos y la localización del centro del sistema de coordenadas, podemos conocer la posición de los actuadores. Las magnitudes obtenidas se muestran en la Tabla 22.



Figura 146. Medidas realizadas en las caras posteriores de las bases de los actuadores

ACTUADOR	PLANO A _i		
	Diseño	Medido	Error
Act. 1	194.232	194.301	0.069
Act. 2	194.232	194.606	0.374
Act. 3	194.232	194.497	0.265

Tabla 22. Posición de partida para las bases de los actuadores

A la vista de los resultados obtenidos en cada una de las mediciones, las desviaciones promedio son: $\epsilon_{O_{A_i}-O_{A_{i+1}}} = 0^\circ 3' 12''$ en los ángulos entre las guías; $\epsilon_c = 0.254\text{mm}$, $\epsilon_{\psi_c} = 0^\circ 14' 3''$ y $\epsilon_{\theta_c} = 0^\circ 8' 19''$ en la posición y orientación de las bases; $\epsilon_{L \cdot \sin \alpha} = 0.452\text{mm}$ en la altura de las barras; $\epsilon_p = 0.164\text{mm}$, $\epsilon_{\psi_p} = 0^\circ 2' 9''$ and $\epsilon_{\theta_p} = 0^\circ 7' 48''$ en la posición y orientación de la plataforma; y $\epsilon_A = 0.236\text{mm}$ en la posición de los actuadores. Estas diferencias entre los parámetros de diseño y los valores reales se deben a los errores introducidos durante la fabricación de los componentes y el ensamblaje del conjunto del prototipo. Todos ellos serán considerados como errores de partida en los sucesivos ensayos, ya que se introduce un error de posicionamiento en el manipulador debido a estas desviaciones con respecto a los parámetros de diseño.

4.3 Validación cinemática

Una vez conocidas todas las dimensiones del prototipo en la posición de equilibrio, el siguiente paso fue programar una serie de desplazamientos en el dispositivo y medir los desplazamientos producidos tanto en la plataforma como en los actuadores.

Con el fin de obtener en la plataforma desplazamientos puros en la dirección del eje Z, se introdujeron movimientos idénticos en los actuadores. Se diseñaron dos desplazamientos en el sentido positivo y dos en el negativo, cuyos valores fueron $\pm 2\text{mm}$ y $\pm 1\text{mm}$. Para realizar esta tarea, fue necesario medir, mediante la MMC, una serie de puntos en la cara superior de la plataforma y en cada una de las caras traseras de las bases, ver Figura 147. Conociendo la posición de partida para estas superficies, y la posición de los planos que contienen a estos puntos medidos tras el movimiento del manipulador, se pueden alcanzar el desplazamiento y rotación real en la plataforma, y los desplazamientos en los actuadores.



Figura 147. Medición de los desplazamientos en la plataforma móvil y los actuadores

En la Tabla 23, las primeras tres columnas muestran los desplazamientos reales, Δs_1 , Δs_2 y Δs_3 , producidos en las bases de los actuadores. Como se observa, no presentan los mismos valores. Esto se debe a las diferencias existentes en las dimensiones de los diferentes elementos, así como en las características de los componentes de los actuadores lineales, los cuales provocan que los desplazamientos producidos en las bases de los actuadores no sean iguales.

Estos desplazamientos medidos en los actuadores fueron introducidos en un análisis MEF del prototipo. Como resultado, los desplazamientos del MEF, z_{MEF} , ψ_{MEF} y θ_{MEF} , fueron comparados con los obtenidos en la medición mediante la MMC, z_{MMC} , ψ_{MMC} y θ_{MMC} .

Con el fin de comprobar la validez de la hipótesis presentada en esta investigación, por medio de la cual la cinemática de sólido rígido es aplicada a este tipo de mecanismos flexibles, también fueron introducidos estos desplazamientos reales de los actuadores en el problema cinemático directo y las soluciones obtenidas, z_{PCD} , ψ_{PCD} y θ_{PCD} , fueron comparadas con las mediciones anteriores. Todos estos resultados pueden verse en la Tabla 23.

Δs (μm)			Δz (μm)			$\Delta \psi$ (DMS)			$\Delta \theta$ (DMS)		
Δs_1	Δs_2	Δs_3	CMM	FEM	PCD	CMM	FEM	PCD	CMM	FEM	PCD
1395	1531	1306	1471	1408	1384	7'47"	4'5"	8'59"	5'13"	0'33"	1'4"
777	685	725	714	727	722	2'41"	-0'45"	-1'38"	0'16"	-1'30"	-3'23"
-676	-494	-706	-636	-624	-631	-2'17"	3'53"	8'55"	-3'34"	1'35"	3'41"
-1485	-1175	-1781	-1437	-1478	-1511	9'8"	11'5"	26'6"	4'21"	0'6"	0'11"

Tabla 23. Comparación entre las medidas MMC, MEF y PCD

En la Tabla 24 se muestran los errores absolutos de las predicciones mediante el MEF y PCD respecto a las medidas de la MMC. Comparando la posición de la plataforma, medida con la maquina tridimensional y la predicción obtenida por el análisis MEF, los errores lineales en el sentido del eje Z fueron siempre inferiores a 70 μm , y los errores angulares por debajo de los 7', ver Tabla 24. También puede observarse que, mientras que el error lineal es proporcional al desplazamiento, el comportamiento de error angular es más errático. Debido al hecho de que la deformación del mecanismo es relativamente pequeña y lineal, ya que el desplazamiento en Z es alrededor de un 1,3% de la longitud de las extremidades, las estimaciones del análisis MEF calculadas con un análisis estático pueden ser consideradas como una buena referencia, siendo la principal fuente de incertidumbre la calidad de la malla y los parámetros del material. Por tanto, las desviaciones observadas pueden atribuirse principalmente a los errores en las mediciones efectuadas al prototipo y a los debidos a las etapas de fabricación y montaje del mismo.

Δz (μm)			$\Delta \psi$ (DMS)			$\Delta \theta$ (DMS)		
CMM	FEM	PCD	CMM	FEM	PCD	CMM	FEM	PCD
	$ \epsilon_{abs} $	$ \epsilon_{abs} $		$ \epsilon_{abs} $	$ \epsilon_{abs} $		$ \epsilon_{abs} $	$ \epsilon_{abs} $
1471	63	87	7'47"	3'42"	1'12"	5'13"	4'40"	4'9"
714	13	8	2'41"	3'25"	4'18"	0'16"	1'46"	3'39"
-636	12	5	-2'17"	6'11"	11'12"	-3'34"	5'9"	7'15"
-1437	41	74	9'8"	1'57"	16'58"	4'21"	4'15"	4'10"

Tabla 24. Errores absolutos en las medidas de la MMC, comparadas con las predicciones de los análisis MEF y PCD

Comparando las mediciones MMC con las predicciones del PCD, pueden observarse tendencias similares. Sin embargo, debe señalarse que el error lineal en Z crece aún más para grandes desplazamientos. Esto podía ser algo predecible ya que, al basarse en la hipótesis de considerar que la cinemática de los mecanismos Compliant es igual a la de uno convencional, ésta pierde su validez cuando ocurren deformaciones mayores en las articulaciones flexibles. Debido a la longitud de las juntas esféricas, su deformación en grandes desplazamientos introduce, no solo una rotación alrededor de su punta central, sino también una traslación de este mismo punto central, la cual no es considerada en la cinemática del sólido rígido. El límite para esta hipótesis puede establecerse alrededor de 1 milímetro en la dirección Z, aproximadamente un 0.9% de la longitud de las barras. Por debajo de este límite, se debe señalar que el error de las predicciones PCD en las traslaciones de Z, es siempre inferior a las 10 μ m, muy próximo a las predicciones del análisis MEF.

Con el fin de evitar las imperfecciones del prototipo en los cálculos, se consideran las predicciones de los análisis MEF como resultados óptimos para verificar las soluciones obtenidas mediante el PCD. La comparativa entre ambos casos es mostrada en la Tabla 25. Como se comentó previamente, se obtienen resultados similares para pequeños desplazamientos, incrementándose estas diferencias una vez son introducidos unos desplazamientos mayores en el dispositivo. Por tanto, se demuestra la validez del modelo PCD, para el diseño del mecanismo Compliant de cinemática paralela 3-PRS, estableciendo como límite para aceptar estas premisas unos desplazamientos de hasta 0.9% de la longitud de las extremidades del dispositivo.

Δz (μ m)		$\Delta\psi$ (DMS)		$\Delta\theta$ (DMS)	
FEM	PCD	FEM	PCD	FEM	PCD
	$ \epsilon_{abs} $		$ \epsilon_{abs} $		$ \epsilon_{abs} $
1408	24	4'5''	4'54''	0'33''	0'31''
727	5	-0'45''	0'53''	-1'30''	1'53''
-624	7	3'53''	5'2''	1'35''	2'6''
-1478	33	11'5''	15'1''	0'6''	0'5''

Tabla 25. Comparación entre las predicciones MEF y PCD

4.4 Validación del modelo mecatrónico

Con el fin de realizar la validación del modelo mecatrónico, se diseñaron una serie de experimentos, los cuales pretendían introducir unos determinados desplazamientos en los actuadores del prototipo, midiendo a la vez los esfuerzos que se producían en los motores encargados de realizar estos movimientos. Con estos resultados, se podía realizar una comparativa con las predicciones alcanzadas en el modelo mecatrónico y observar si existía la deseada correspondencia entre los mismos.

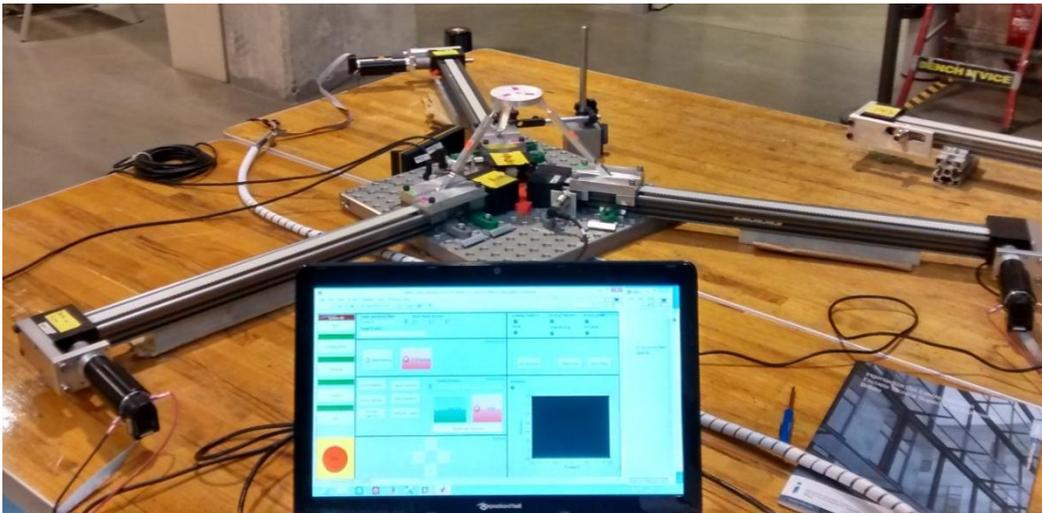


Figura 148. Disposición para ensayos en el prototipo

Las principales fuentes de incertidumbre que aparecen son la fricción que se produce en las guías lineales, la rigidez estimada en los análisis FEM, las diferentes simplificaciones que se han llevado a cabo en el análisis cinemático y los errores introducidos en las etapas de fabricación y montaje del prototipo.

Para la validación dinámica del mecanismo, se han realizado dos ensayos. Éstos consisten en el desarrollo de dos movimientos en la plataforma, el primero de los cuales obtiene un desplazamiento vertical puro en el eje Z de amplitud 2 mm y 0.5 Hz de frecuencia, alcanzado por medio de unos movimientos simultáneos de igual amplitud al de la plataforma y frecuencia en cada uno de los actuadores. En la Figura 149 pueden observarse dos imágenes de la estructura en su punto más bajo y más alto de este desplazamiento vertical, así como algunos de los valores reproducidos en un reloj comparador en este desplazamiento.

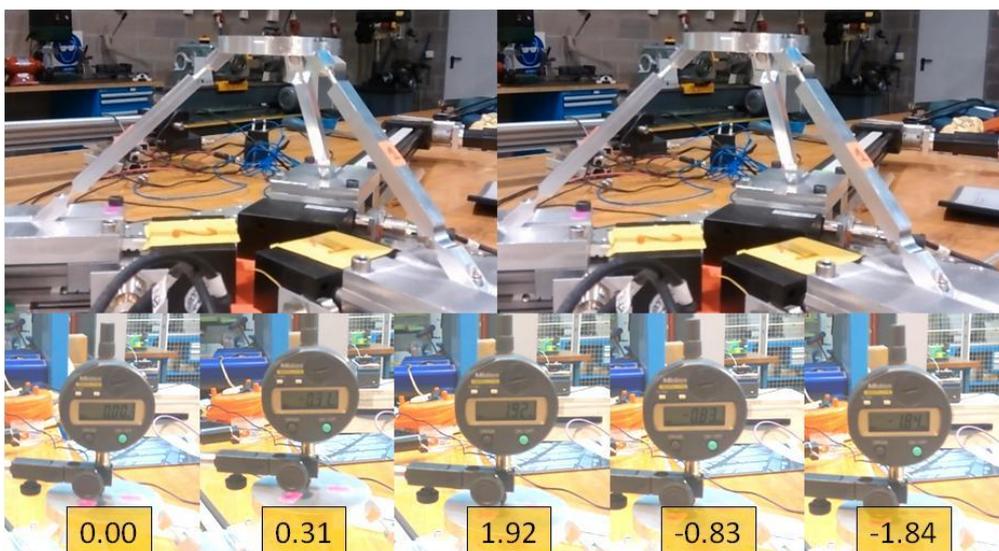


Figura 149. Desplazamiento vertical del manipulador 3-PRS

El segundo experimento trata de alcanzar inclinaciones en la plataforma, los cuales se obtienen al introducir en los actuadores los mismos movimientos que para el experimento

anterior, pero desfasándolos en el tiempo 120° . Algunas imágenes de estos desplazamientos pueden observarse en la Figura 150, así como algunos de los valores reproducidos en un inclinómetro. Se ha colocado una barra vertical sobre la plataforma para que se aprecien más estas inclinaciones.

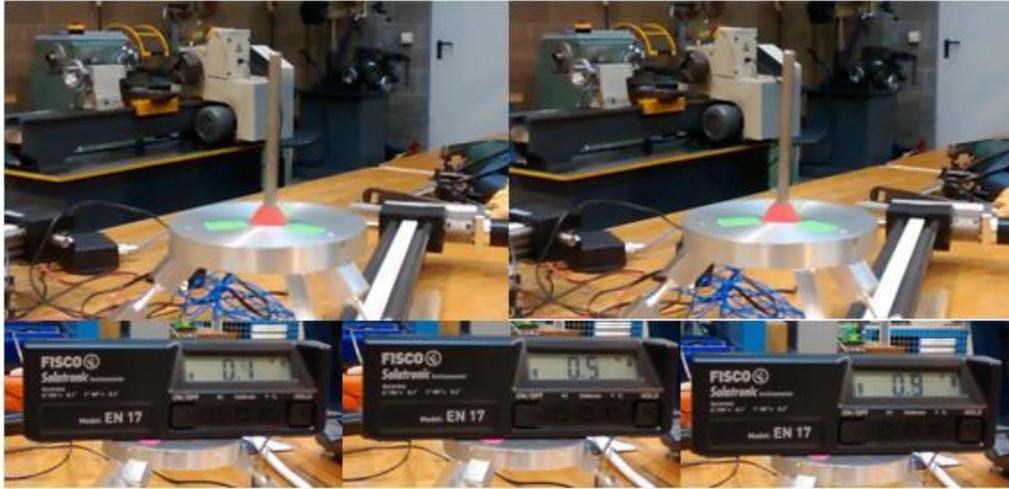


Figura 150. Inclinación obtenida en la plataforma

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para los dos experimentos realizados.

4.4.1 Caso 1: Movimiento en Z de la plataforma

Introduciendo en el modelo mecatrónico el movimiento que se desea alcanzar en el mecanismo, se pueden observar los desplazamientos que el mismo es capaz de simular, considerando todas las perturbaciones propias del manipulador. Así, en el siguiente gráfico se puede observar una comparativa entre los desplazamientos comandados y simulados en el modelo desarrollado en el espacio de trabajo.

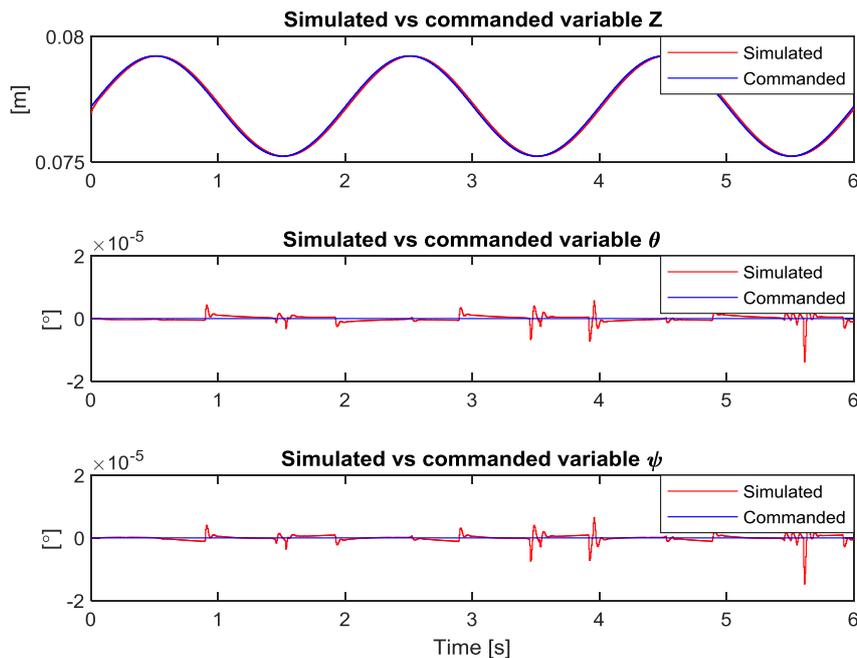


Figura 151. Comparativa entre desplazamientos comandados y simulados en el modelo

Para estos desplazamientos, el modelo es capaz de predecir las fuerzas necesarias para producirlos, las cuales se muestran en la siguiente figura.

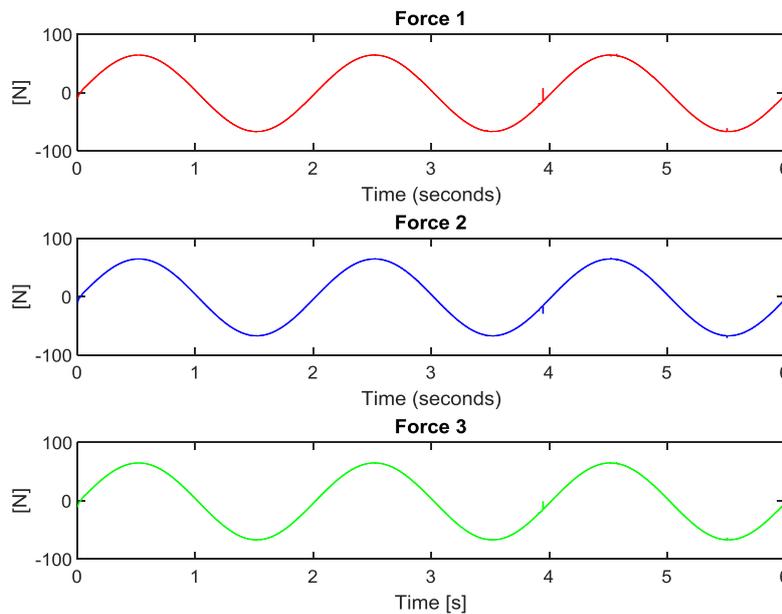


Figura 152. Fuerzas simuladas por el modelo para el desplazamiento en Z de la plataforma

Para la validación experimental del modelo desarrollado se ha realizado una comparativa entre los datos obtenidos del modelo y los que se han extraído de las pruebas realizadas al prototipo. Éstos han sido los desplazamientos producidos en los actuadores, así como los pares motores desarrollados en cada uno de los actuadores, para alcanzar tales desplazamientos.

En las siguientes gráficas se puede observar la comparativa entre los desplazamientos simulados por el modelo y los desplazamientos medidos en el prototipo por los encoders de los motores. Dichas medidas angulares han sido convertidas a traslación empleando la relación de transmisión de los actuadores.

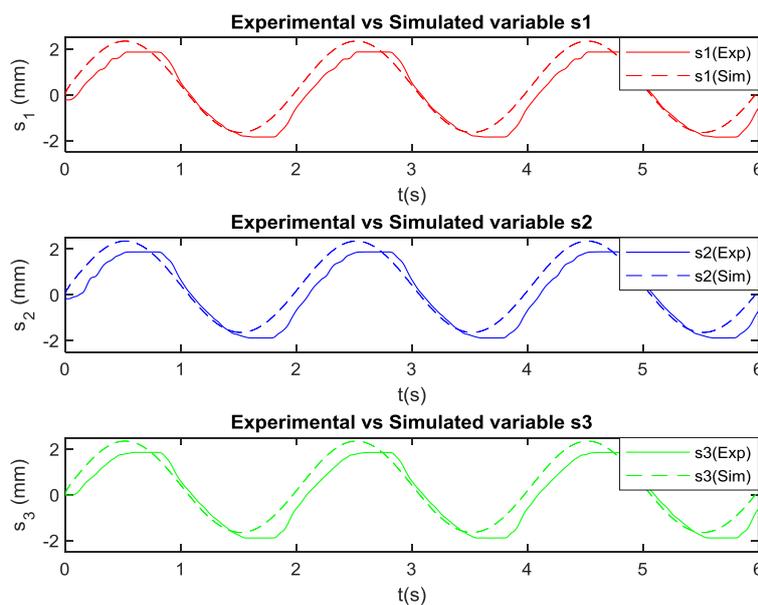


Figura 153. Comparativa entre desplazamientos S_i simulados y experimentales para desplazamiento Z

Del mismo modo, en la siguiente figura se muestra la comparativa entre los pares motores simulados por el modelo y los obtenidos experimentalmente.

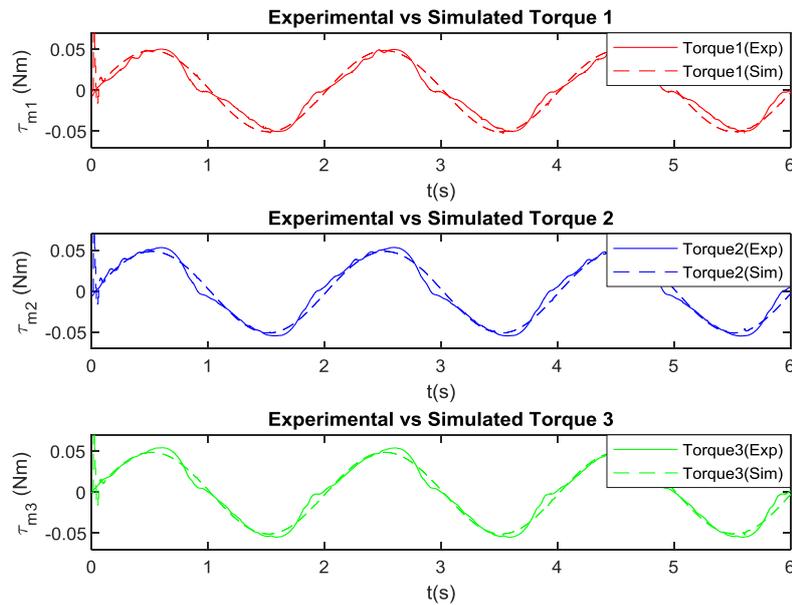


Figura 154. Comparativa entre Pares motor τ_{mi} simulados y experimentales para desplazamiento Z

4.4.2 Caso 2: Movimientos desfasados 120°

Para este caso de estudio, en el modelo no se han introducido los desplazamientos que se desean alcanzar en la plataforma, sino que se han dado los desplazamientos en cada uno de los actuadores directamente. Estos consisten en un movimiento senoidal de amplitud 2mm en cada uno de los actuadores, pero desfasando su inicio 120° . Los desplazamientos simulados por el modelo pueden observarse en la siguiente figura.

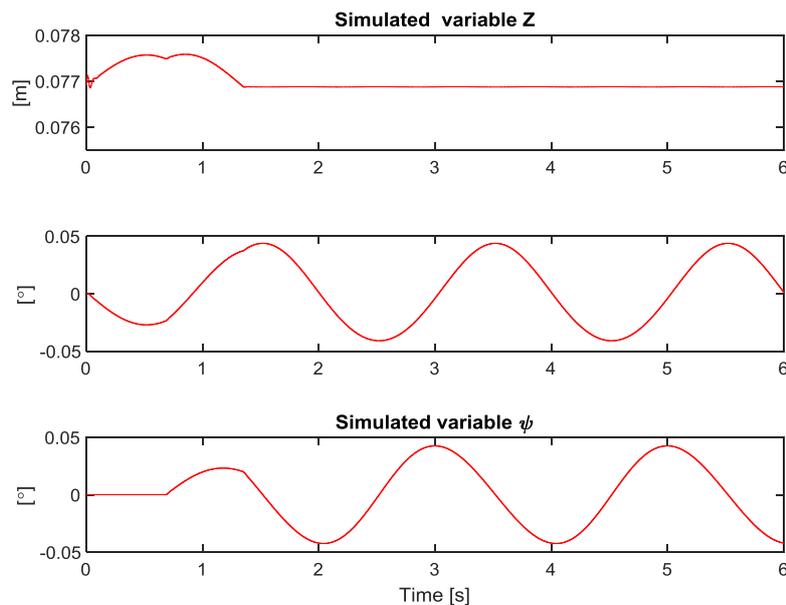


Figura 155. Desplazamientos simulados en el modelo para movimientos desfasados 120°

Como para el caso anterior, el modelo es capaz de predecir las fuerzas necesarias para su obtención. Éstas pueden verse en el siguiente gráfico, donde se aprecian los esfuerzos negativos y positivos de los actuadores 2 y 3 comentados en el párrafo anterior.

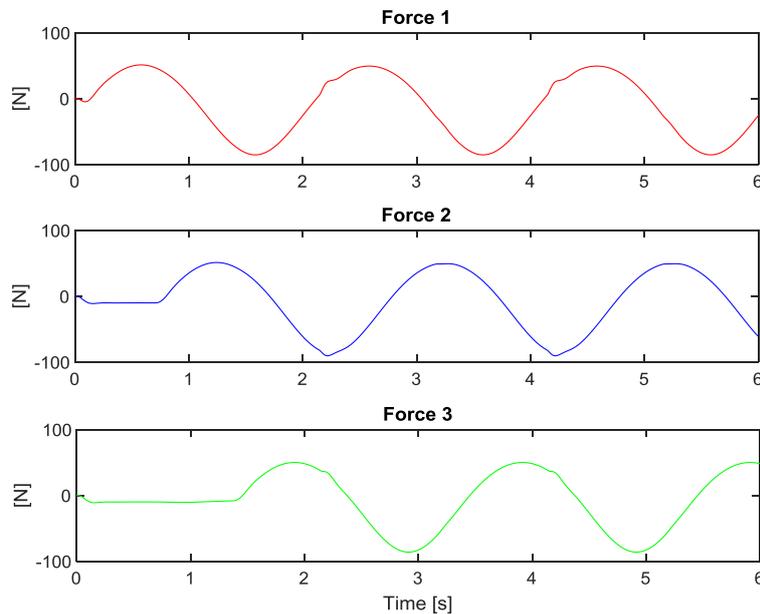


Figura 156. Fuerzas simuladas por el modelo para movimientos desfasados 120°

Como para el caso de estudio anterior, en éste también se ha realizado una comparativa entre los valores predichos por el modelo, y aquellos obtenidos experimentalmente mediante las pruebas al prototipo. En primer lugar se muestra la comparativa entre los desplazamientos desarrollados en los actuadores S_i .

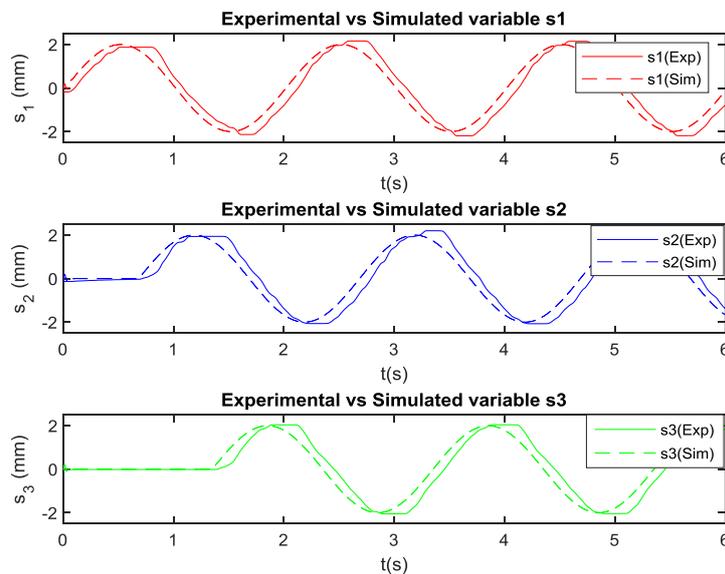


Figura 157. Comparativa entre desplazamientos S_i simulados y experimentales para movimientos desfasados 120°

Señalar que, como se ha indicado anteriormente, para introducir los desplazamientos en los actuadores, tanto en la simulación como en el prototipo, y desfasarlos los 120° requeridos, se ha retrasado el inicio del movimiento de los actuadores 2 y 3. Es por ello que en los instantes

iniciales del gráfico, para estos actuadores, aparecen rectas horizontales hasta que se inicia su desplazamiento. A continuación, se muestra la comparativa entre los valores para el par motor, predichos por el modelo y extraídos en las pruebas realizadas al prototipo, al desfasar 120° los movimientos en los actuadores.

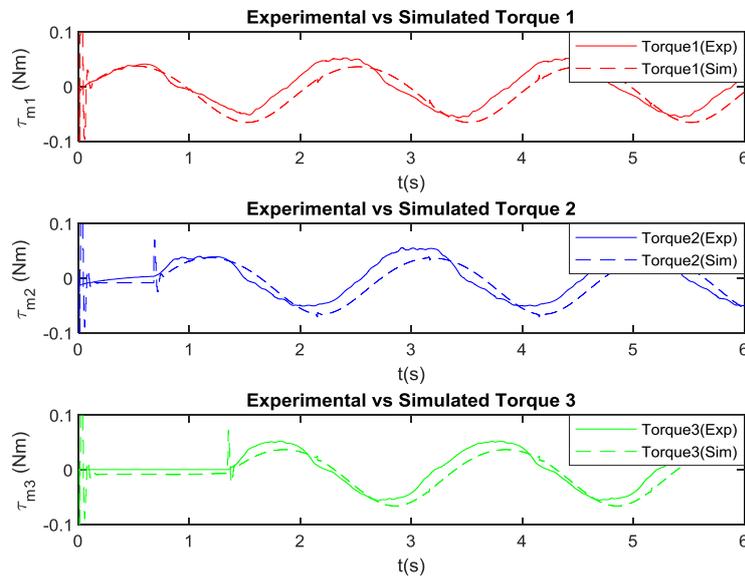


Figura 158. Comparativa entre Pares motor τ_{mi} simulados y experimentales para movimientos desfasados 120°

A la vista de las gráficas anteriores, puede observarse que los resultados obtenidos en ambos procesos, es decir, los valores simulados en el modelo mecatrónico y los datos experimentales extraídos de las pruebas al prototipo, son bastante similares. Aun así existen desviaciones en los resultados alcanzados, e incluso las tendencias que se observan en ambos experimentos son diferentes.

En la primera prueba, el desplazamiento positivo simulado en el modelo mecatrónico es alrededor de un 25% superior al obtenido experimentalmente, mientras que el desplazamiento negativo es un 11% inferior. En cuanto al par simulado para el desplazamiento positivo, éste es alrededor del 6% más bajo que el par medido en los motores, mientras que para el par en el desplazamiento negativo, es un 1.4% superior.

En el segundo experimento, el desplazamiento positivo simulado en el modelo mecatrónico es un 7% inferior al medido experimentalmente, mientras que el desplazamiento negativo simulado es un 9% inferior al medido. Para los pares en los motores, los valores simulados en los desplazamientos positivos son alrededor del 28% inferiores a los medidos, mientras que el par simulado en los desplazamientos negativos es un 20% superior al experimental.

Aun así se aprecia el potencial que presenta esta metodología para el diseño de manipuladores flexibles, y su correspondiente método de validación. Mediante la introducción de los pertinentes ajustes en el modelo mecatrónico y con unas mejoras, tanto en la etapa de fabricación y montaje de los diferentes componentes del prototipo, como en los componentes empleados en los ensayos, se podrán alcanzar resultados más próximos entre la etapa de simulación y la etapa de validación de la metodología de diseño.

5. Aportaciones, conclusiones y líneas futuras de trabajo

A lo largo de esta tesis, se ha desarrollado un método integral para el diseño de manipuladores flexibles, el cual define y desarrolla cada una de las etapas que van desde el diseño del mecanismo, partiendo de unos determinados requisitos, hasta la validación estructural de la solución desarrollada.

En primer lugar, en el capítulo 2, se ha realizado una revisión del estado del arte en relación a los mecanismos flexibles, definiendo sus principales características y determinando sus propiedades, así como mostrando los diferentes tipos de juntas flexibles. También se han definido los análisis cinemáticos y dinámicos a realizar a este tipo de dispositivos con el fin de alcanzar las capacidades del manipulador analizado. Por último se ha mostrado en qué consisten los modelos mecatrónicos y los principales logros que puedan ser alcanzados una vez son aplicados en la etapa de diseño de mecanismos.

En el capítulo 3, se ha propuesto un método para el diseño de manipuladores flexibles, definiendo cada una de las etapas que lo componen. También se ha aplicado cada una de estas etapas a un mecanismo concreto, con el fin de demostrar su validez.

Por último, en el capítulo 4, se ha realizado la validez experimental del método propuesto mediante la construcción de un prototipo, mostrando los resultados que se obtuvieron.

5.1 Aportaciones y conclusiones

Tras la revisión bibliográfica y el desarrollo y validación de la metodología propuesta, las conclusiones extraídas han sido las siguientes:

- Se ha desarrollado una metodología para el diseño de manipuladores con juntas flexibles, la cual permite la integración en el mismo proceso, de aspectos tan dispares como la cinemática y dinámica del mecanismo, el cálculo estructural de las juntas y el mecanismo, el sistema de control, los sensores, y los actuadores empleados, todos ellos de vital importancia para alcanzar el diseño óptimo del mecanismo. Esta metodología consiste en un proceso secuencial, cuyo inicio se define en base a unos requisitos que definen un mecanismo de partida, el cual es apto para desarrollar los movimientos exigidos. A continuación, se desarrollan el análisis cinemático y dinámico del mecanismo. Las ecuaciones alcanzadas en estas etapas son simuladas junto con los actuadores y el control en un modelo mecatrónico del manipulador. Seguidamente se realiza un análisis estructural, tanto de las juntas como del mecanismo completo, para verificar la aptitud del mismo frente a los movimientos requeridos.
- Esta metodología ha sido aplicada a un mecanismo tipo 3-PRS, para el cual se ha resuelto el problema cinemático inverso y el directo, además de determinar los movimientos parásitos del mismo, como consecuencia de la cinemática. También se han obtenido las expresiones de las coordenadas pasivas en los dos tipos de juntas flexibles del mecanismo 3PRS desarrollado, de revolución y esféricas. Estas relaciones, las cuales no habían sido desarrolladas en la bibliografía consultada, son de vital importancia en el proceso de diseño de las juntas y por extensión, de este tipo de mecanismos flexibles, ya que constituyen el requisito de partida para su diseño al marcar el objetivo de máxima rotación. Asimismo, se ha obtenido el espacio de trabajo, el cual depende en buena medida del rango de rotación que alcanzan las juntas flexibles.
- Por último, mediante el problema de velocidades se han obtenido los jacobianos que relacionan las derivadas primeras de las coordenadas propias de cada uno de los elementos y las coordenadas generalizadas del manipulador, los cuales serán necesarios para poder resolver en etapas posteriores el problema dinámico del mecanismo. En concreto se han relacionado con las coordenadas generalizadas del sistema global: las velocidades del centro de gravedad de la plataforma móvil ($\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z$) las cuasivelocidades angulares de la plataforma móvil (w_{px}, w_{py}, w_{pz}), las velocidades del centro de gravedad de cada una de las barras ($\dot{x}_{Gi}, \dot{y}_{Gi}, \dot{z}_{Gi}$), las cuasivelocidades angulares de las barras ($\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3$) y los giros en cada una de las juntas ($\dot{\beta}_j$).

- Para la resolución del problema dinámico inverso, se ha aplicado el Principio de Equivalencia de Energía. Así, se ha logrado describir la dinámica del manipulador por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la relación existente entre las variables actuadas, las propiedades másicas, las rigideces de los elementos y las fuerzas que intervienen en el proceso, para cada uno de los elementos del manipulador. La ventaja principal de aplicar el Principio de Equivalencia de Energía a este tipo de mecanismos es que permite desacoplar al manipulador en cada uno de sus componentes, obteniendo por separado la contribución de cada uno de los elementos a las fuerzas necesarias para desplazar el manipulador. Este método permite incluso desacoplar la contribución a la dinámica global de un solo elemento en caso de ser conveniente, como puede observarse en el problema dinámico de la plataforma, en el cual se determinó por separado la contribución del movimiento de traslación, del movimiento de rotación y de la energía potencial elástica de las juntas esféricas. Esto facilita enormemente la resolución del problema, además de contribuir a una programación estructurada de su resolución.
- Mediante el modelo mecatrónico desarrollado, se han integrado, en la etapa de diseño, la cinemática, dinámica y aspectos estructurales del manipulador con la etapa de control y su actuación. Su resolución permite simular el comportamiento de todo el conjunto. El método de modelado mecatrónico seguido desacopla el manipulador del sistema de actuación, de tal forma que las fuerzas necesarias para desplazar el manipulador son percibidas por parte de los actuadores como perturbaciones que el control de posición ha de contrarrestar para alcanzar las posiciones comandadas. Este método parte de la posición que se desea alcanzar en el mecanismo, la cual se introduce en el Problema Cinemático Inverso, dando como resultado los desplazamientos necesarios en los actuadores. Estos se introducen en el modelo mecatrónico de cada uno de los actuadores, donde además se añade la perturbación que se obtiene del problema dinámico inverso del manipulador, dando como salida el desplazamiento real que se da en los actuadores. Los desplazamientos en los actuadores se introducen en el Problema Cinemático Directo, el cual proporciona la posición real que alcanza la plataforma.
- Para la consecución del modelo mecatrónico del manipulador se ha desarrollado el modelo mecatrónico del sistema de actuación, el cual es definido en dos etapas. Una primera en la que se modela el control por medio de tres lazos cerrados en cascada de posición, velocidad y corriente, y otra en la que se modela los accionamientos del mecanismo por medio de la representación de Espacio de Estados, cuyas variables de salida son los giros y velocidades angulares tanto en el motor como en las guías lineales, las cuales permiten definir el movimiento del manipulador.
- Por otra parte, mediante el método propuesto para el análisis estructural, se ha definido un proceso resolutivo iterativo, por medio de análisis por elementos finitos, gracias al cual se pueden alcanzar los diseños óptimos tanto de las juntas como del conjunto de la estructura. Este procedimiento parte de unos requisitos de

desplazamiento para el manipulador, los cuales definen los movimientos a alcanzar en cada uno de los elementos. A continuación se realiza un estudio de análisis FEM de las juntas "aisladas", en el cual los desplazamientos exigidos y las tensiones máximas soportadas en las mismas son los criterios excluyentes. Finalmente, las juntas que han cumplido satisfactoriamente el anterior análisis, son introducidas en el conjunto del manipulador para su análisis global, verificando que los desplazamientos alcanzados y las tensiones máximas soportadas en el mismo cumplen con los requisitos impuestos. De esta forma, se evitan posibles incompatibilidades o actuaciones inesperadas de las juntas flexibles al ser aplicadas en una estructura no analizada en la etapa de diseño.

- Para el diseño de juntas flexibles de revolución y esféricas, se ha podido determinar la influencia en su comportamiento de cada uno de sus principales parámetros de diseño, que son el radio y espesor para las juntas de revolución, y el radio, espesor y longitud para las juntas esféricas. Dependiendo de la variación de alguno de estos términos, es posible obtener nuevas características en el manipulador. Así, se ha definido cuál de estos parámetros se puede modificar en un mecanismo 3-PRS, con el fin de obtener mejoras en términos de rigidez estructural, desplazamiento vertical y ratio entre las máximas tensiones soportadas en las juntas flexibles, y lograr cumplir con los requisitos de diseño impuestos.
- Para la validación de la metodología propuesta, se ha fabricado un prototipo el cual reproduce el diseño óptimo alcanzado para el manipulador 3-PRS. Así, se han mostrado los diferentes componentes del manipulador: plataforma móvil, barras, bases sobre los actuadores, guías lineales, elemento de centrado, placa modular, accionamientos y controlador, así como sus principales características. Además, se ha definido el proceso de validación dimensional del manipulador, con el fin de contabilizar las diferencias existentes entre los parámetros de diseño y los valores reales del prototipo y poder considerarlas en las posteriores validaciones experimentales.
- A la vista de los resultados obtenidos en la validación cinemática, se ha comprobado el potencial de la metodología para pequeños desplazamientos de la estructura, estableciendo como límite movimientos inferiores al 0.9% de la longitud de las barras del mecanismo. Esto se debe a que, cuando se introducen grandes desplazamientos en el manipulador, en las juntas esféricas no solo se produce una rotación alrededor de su punto central, sino también una traslación de este mismo punto central, la cual no es considerada en la cinemática del sólido rígido.
- En cuanto a la validación del modelo mecatrónico, se han obtenido valores similares en los experimentos desarrollados para los desplazamientos y los pares motores, tanto para los valores simulados en el modelo mecatrónico como en los datos experimentales extraídos de las pruebas al prototipo, de lo que se desprende el potencial del método propuesto.

- La investigación desarrollada en este trabajo de tesis ha sido presentada en los siguientes congresos:
 - **Experimental validation of the kinematics of a 3-PRS compliant mechanism for micromilling.** ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, celebrado en agosto de 2015 en Boston, Massachusetts, USA.
 - **Dynamic analysis of a 3PRS compliant parallel mechanism.** 4th Conference on Microactuators and Micromechanisms, MAMM-2016, celebrada en Octubre de 2016 en Ilmenau, Alemania.
- Esta investigación también se ha visto reflejada en las siguientes publicaciones:
 - Revista internacional indexada Q1:
Experimental validation of the kinematic design of 3-PRS compliant parallel mechanisms. Revista *Mechatronics* (Volume 39, November 2016, Pages 77-88)
 - Revista internacional indexada Q2:
Mechatronic Model of a Compliant 3PRS Parallel Manipulator. Revista *Robotics* 2022, 11, 4. <https://doi.org/10.3390/robotics11010004>

5.2 Líneas futuras de trabajo

En base a los resultados obtenidos y el trabajo desarrollado en esta tesis, se abren nuevas líneas de interés para futuros trabajos de investigación, entre los cuales cabe destacar:

- Avance en la caracterización de las juntas flexibles. Mediante unos valores que reproduzcan de una forma más fehaciente el comportamiento de este tipo de juntas, en términos de rigideces y desplazamientos en cada una de las posiciones del manipulador, lograremos unos resultados más próximos a los que se producen en la realidad. Mediante metodologías como la de "Diseño de Experimentos", se logrará caracterizar mediante ecuaciones el comportamiento de este tipo de juntas flexibles en estas situaciones.
- Avance en el estudio cinemático y dinámico de este tipo de mecanismos flexibles, con el fin de eliminar ciertas suposiciones en los cálculos que permiten su resolución, pero que introducen ciertas inexactitudes en el proceso, como son las introducidas en la hipótesis de pseudo-sólido rígido. Así, mediante estudios más avanzados, tales como la introducción de un mayor número de elementos intermedios en la simulación de los componentes flexibles, se podrán tener en cuenta los movimientos parásitos locales por la deformación de las juntas en direcciones no deseadas.

- Para la validación cinemática y dinámica del manipulador, se hace necesario mejorar cada uno de los componentes empleados en el mecanismo, ya sea con una construcción más precisa de los elementos, como de los actuadores empleados. Del mismo modo, existe la posibilidad de emplear alternativas de control más avanzadas, tales como un control de la posición basado en una medida directa de la posición de la guía lineal en lugar de la del encoder del motor. Así se logrará eliminar parte del error introducido por estos elementos y caracterizar de una forma más realista esta metodología, además de proporcionar unos resultados más próximos a la realidad. Esto además permitiría aproximarse más a la aplicación final, en la que se podrían realizar pruebas en condiciones tales como las de mecanizado.
- Se hace necesario desarrollar nuevos métodos, ya sean FEM o experimentales, para validar estructuralmente al mecanismo, con el fin de caracterizar a la estructura del manipulador y determinar su capacidad para actuar en unas determinadas condiciones de trabajo. Del mismo modo, se considera necesario desarrollar análisis de fatiga de este tipo de juntas, al ser los puntos críticos de un mecanismo flexible, para determinar la validez de un determinado diseño y su durabilidad bajo las condiciones de carga a las que se será sometido.

6. Bibliografía

- [1] American Institute of Physics (AIP), "<https://www.sciencedaily.com/releases/2014/05/140513113252.htm>." .
- [2] Ginger Creative, "<http://www.euspen.eu/>," 2017. .
- [3] "<http://www.tekniker.es/es/>," 2017. .
- [4] "<https://www.egile.es/>," 2017. .
- [5] L. L. Howell, *Compliant Mechanisms*. New York: Wiley, 2001.
- [6] M. I. Frecker, G. K. Ananthasuresh, S. Nishiwaki, N. Kikuchi, and S. Kota, "Topological Synthesis of Compliant Mechanisms Using Multi-Criteria Optimization," *J. Mech. Des.*, vol. 119, no. 2, pp. 238–245, 1997.
- [7] D. Wagg, I. Bond, P. Weaver, and M. Friswell, *Adaptive structures. engineering applications*. UK: Faculty of Engineering, University of Bristol, 2007.
- [8] Nicolae Lobontiu, *Compliant Mechanisms: Design of Flexure Hinges*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2002.
- [9] S. Vogel, *Cats' Paws and Catapults: Mechanical Worlds of Nature and People*. New York - London, 2000.
- [10] L. L. Howell, *Handbook of Compliant Mechanisms*. John Wiley & Sons Ltd., 2013.
- [11] M. Taddei, E. Zanon, and D. Laurenza, *Leonardo's Machines. Secrets and Inventions in the Da Vinci Codices*. Milano, 2005.
- [12] O. Wright and W. Wright, "Flying-machine," US 821393 A, 1906.
- [13] "es.gizmodo.com/como-funcionaba-el-avion-que-volo-por-primera-vez-hoy-h-1672255312," 2017. [Online]. Available: <https://es.gizmodo.com/como-funcionaba-el-avion-que-volo-por-primera-vez-hoy-h-1672255312>.
- [14] "<http://www.flxsys.com/>," 2017. .
- [15] G. K. Anathasuresh, "Compliant mechanisms," Roorkee, 2013.
- [16] S. T. Smith, *Flexures: Elements of Elastic Mechanisms*. Boca Raton, FL, 2000.
- [17] D. L. Wilcox and L. L. Howell, "Fully compliant tensural bistable micromechanisms (FTBM)," *J. Microelectromechanical Syst.*, vol. 14, no. 6, pp. 1223–1235, 2005.
- [18] D. L. Wilcox and L. L. Howell, "Double-Tensural Bistable Mechanisms (DTBM) With On-Chip Actuation and Spring-Like Post-Bistable Behavior," in *ASME. International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Volume 7: 29th Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B*, 2005, pp. 537–546.
- [19] Y. K. Yong, T.-F. Lu, and D. C. Handley, "Review of circular flexure hinge design equations and derivation of empirical formulations," *Precis. Eng.*, vol. 32, pp. 63–70, 2008.
- [20] R. J. Roark, W. C. Young, and R. Plunkett, *Formulas for Stress and Strain*, vol. 43, no. 3. 1976.
- [21] B. P. Trease, "Flexures," Michigan, 2004.
- [22] J. M. Paros and L. Weisbord, "How to Design Flexure Hinges," *Mach. Des.*, pp. 151–156.
- [23] B. D. Jensen and L. L. Howell, "Identification of Compliant Pseudo-Rigid-Body Four-Link

- Mechanism Configurations Resulting in Bistable Behavior," *J. Mech. Des.*, vol. 125, no. December, p. 701, 2003.
- [24] B. P. Trease, Y.-M. Moon, and S. Kota, "Design of Large-Displacement Compliant Joints," *J. Mech. Des.*, vol. 127, no. 4, p. 788, 2005.
- [25] Y. K. Yong and T. F. Lu, "Comparison of circular flexure hinge design equations and the derivation of empirical stiffness formulations," *IEEE/ASME Int. Conf. Adv. Intell. Mechatronics, AIM*, vol. 32, pp. 510–515, 2009.
- [26] W. Y and Z. Z, "Design calculations for flexure hinges," *Sci. Instruments*, vol. 73(9), pp. 3101–6., 2002.
- [27] Tseytlin Y., "Notch flexure hinges: an effective theory," *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 73(9), pp. 3363–8, 2002.
- [28] W. O. Schotborgh, F. G. M. Kokkeler, H. Tragter, and F. J. A. M. Van Houten, "Dimensionless design graphs for flexure elements and a comparison between three flexure elements," *Precis. Eng.*, vol. 29, no. 1, pp. 41–47, 2005.
- [29] J. A. Haringx, "The cross-spring pivot as a constructional element," *J.A. Appl. Sci. Res.*, vol. 1: 313, 1949.
- [30] A. Kyusojin and D. Sagawa, "Development of Linear and Rotary Movement Mechanism by Using Flexible Strips," *Bull. Japan Soc. Precis. Eng.*, vol. 22(4), pp. 309–314, 1988.
- [31] B. P. Trease, Y. Moon, and S. Kota, "Design of Large-Displacement Compliant Joints.," *ASME. J. Mech. Des.*, vol. 127(4), pp. 788–798, 2004.
- [32] B. S. Sandhu, "An Overview of MEMS Sensors," *ARM*, 2015.
- [33] A. Slijper, A. Danielsson, C. Willén, and C. Willen, "Ambulatory Function and Perception of Confidence in Persons with Stroke with a Custom-Made Hinged versus a Standard Ankle Foot Orthosis," *Rehabil. Res. Pract.*, vol. 2012, no. June 2014, p. 206495, 2012.
- [34] N. Tolou, J. Gallego Sanchez, and J. Herder, "Statically balanced compliant micromechanisms," *MiKroniek*, vol. 50, no. 6, pp. 20–25, 2010.
- [35] Yuen Kuan Yong, S. S. Aphale, and S. O. R. Moheimani, "Design, Identification, and Control of a Flexure-Based XY Stage for Fast Nanoscale Positioning," *IEEE Trans. Nanotechnol.*, vol. 8, no. 1, pp. 46–54, 2009.
- [36] "Minus K Technology." [Online]. Available: <http://www.minusk.com/>.
- [37] "Fanuc," 2017. [Online]. Available: <http://www.fanuc.eu/es/es/robots/página-filtro-robots/serie-m-2000/m-2000ia-1200>.
- [38] J. Corral Sáiz, "Caracterización del comportamiento estructural de manipuladores de cinemática paralela," *Universidad del País Vasco*, 2011.
- [39] "Nasa," 2017. [Online]. Available: <https://www.jpl.nasa.gov/spaceimages/details.php?id=PIA04413>.
- [40] J.-P. Merlet, *Parallel Robots*, vol. 208, no. 49. 2006.
- [41] L. Rey and R. Clavel, "The Delta Parallel Robot," in *Parallel Kinematic Machines. Advanced Manufacturing*, 1999, pp. 401–417.
- [42] D. Stewart, "A Platform with Six Degrees of Freedom," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 180, no. 1, pp. 371–386, 1965.
- [43] "Moog," 2017. [Online]. Available: <http://www.moog.com/content/sites/global/en/products/simulation-tables/hydraulic-simulation-table.html>.
- [44] "Aerospace Technology," 2017. [Online]. Available: <http://www.aerospace-technology.com/contractors/training/axis/attachment/axis1/>.
- [45] L.-W. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. 1999.
- [46] H. Kozuka et al., "A compliant-parallel mechanism with bio-inspired compliant joints for high precision assembly robot," *Procedia CIRP*, vol. 5, pp. 175–178, 2013.
- [47] G. Hao, J. Yu, and H. Li, "A brief review on nonlinear modeling methods and applications of compliant mechanisms," *Front. Mech. Eng.*, vol. 11, no. 2, pp. 119–128, 2016.
- [48] G. Schitter, P. J. Thurner, and P. K. Hansma, "Design and input-shaping control of a

- novel scanner for high-speed atomic force microscopy,” *Mechatronics*, vol. 18, no. 5–6, pp. 282–288, 2008.
- [49] D. Kim, D. Y. Lee, and D. G. Gweon, “A new nano-accuracy AFM system for minimizing Abbe errors and the evaluation of its measuring uncertainty,” *Ultramicroscopy*, vol. 107, no. 4–5, pp. 322–328, 2007.
- [50] J. Yu, Y. Xie, Z. Li, and G. Hao, “Design and Experimental Testing of an Improved Large-Range Decoupled XY Compliant Parallel Micromanipulator,” *J. Mech. Robot.*, vol. 7, no. 4, p. 044503, 2015.
- [51] H. Ya Hui, K. H. Lin, S. C. Chang, and M. Chang, “Design of a Compliant Micromechanism for Optical-Fiber Alignment,” *Key Eng. Mater.*, vol. 381–382, pp. 141–144, 2008.
- [52] “Thorlabs website.” .
- [53] W. Chen, C. Du, Y. Wu, W. Chen, and M. Yuan, “A parallel alignment device with dynamic force compensation for nanoimprint lithography,” *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 85, no. 3, 2014.
- [54] J. Li, R. Sedaghati, J. Dargahi, and D. Waechter, “Design and development of a new piezoelectric linear Inchworm,” *Mechatronics*, vol. 15, no. 6, pp. 651–681, 2005.
- [55] J. J. Kim, Y. M. Choi, D. Ahn, B. Hwang, D. G. Gweon, and J. Jeong, “A millimeter-range flexure-based nano-positioning stage using a self-guided displacement amplification mechanism,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 50, pp. 109–120, 2012.
- [56] K. Alblalaid, S. Lawes, and P. Kinnell, “Variable stiffness probing systems for micro-coordinate measuring machines,” *Precis. Eng.*, vol. 43, pp. 262–269, 2016.
- [57] J. Zhenlin, G. Feng, and Z. Xiaohui, “Design and analysis of a novel isotropic six-component force/torque sensor,” *Sensors Actuators, A Phys.*, vol. 109, no. 1–2, pp. 17–20, 2003.
- [58] G. Hao, M. Murphy, and X. Luo, “Development of a Compliant-Mechanism-Based Compact Three-Axis Force Sensor for High-Precision Manufacturing,” Vol. 9 2015 ASME/IEEE Int. Conf. Mechatron. Embed. Syst. Appl., no. August, p. V009T07A082, 2015.
- [59] B. J. Hansen, C. J. Carron, B. D. Jensen, a R. Hawkins, and S. M. Schultz, “Plastic latching accelerometer based on bistable compliant mechanisms,” *Smart Mater. Struct.*, vol. 16, no. 5, pp. 1967–1972, 2007.
- [60] Z. Gao and D. Zhang, “Design, analysis and fabrication of a multidimensional acceleration sensor based on fully decoupled compliant parallel mechanism,” *Sensors Actuators, A Phys.*, vol. 163, no. 1, pp. 418–427, 2010.
- [61] S. Awtar, J. Ustick, and S. Sen, “An XYZ Parallel-Kinematic Flexure Mechanism With Geometrically Decoupled Degrees of Freedom,” *J. Mech. Robot.*, vol. 5, no. 1, p. 15001, 2012.
- [62] Z. hong Xu, C. li Song, H. liu Yu, S. ju Yan, and W. bo Shi, “Design of an ankle rehabilitation device,” *J. Clin. Rehabil. Tissue Eng. Res.*, vol. 15, no. 39, pp. 7292–7294, 2011.
- [63] G. Chen and S. Zhang, “Fully-compliant statically-balanced mechanisms without prestressing assembly: concepts and case studies,” *Mech. Sci.*, vol. 2, no. 2, pp. 169–174, 2011.
- [64] S. Awtar, T. T. Trutna, J. M. Nielsen, R. Abani, and J. Geiger, “FlexDex™: A Minimally Invasive Surgical Tool With Enhanced Dexterity and Intuitive Control,” *J. Med. Device.*, vol. 4, no. 3, p. 035003, 2010.
- [65] M. Doria and L. Birglen, “Design of an Underactuated Compliant Gripper for Surgery Using Nitinol,” *J. Med. Device.*, vol. 3, no. 1, p. 011007, 2009.
- [66] L. A. Liew, A. Tuantranont, and V. M. Bright, “Modeling of thermal actuation in a bulk-micromachined CMOS micromirror,” *Microelectronics J.*, vol. 31, no. 9, pp. 791–801, 2000.
- [67] M. Olfatnia, L. Cui, P. Chopra, and S. Awtar, “Large range dual-axis micro-stage driven

- by electrostatic comb-drive actuators," *J. Micromechanics Microengineering*, vol. 23, no. 10, p. 105008, 2013.
- [68] M. Olfatnia, S. Sood, J. J. Gorman, and S. Awtar, "Large stroke electrostatic comb-drive actuators enabled by a novel flexure mechanism," *J. Microelectromechanical Syst.*, vol. 22, no. 2, pp. 483–494, 2013.
- [69] D. L. Wilcox and L. L. Howell, "Fully compliant tensural bistable micromechanisms (FTBM)," *J. Microelectromechanical Syst.*, vol. 14, no. 6, pp. 1223–1235, 2005.
- [70] Q. Xu, "Design , Fabrication , and Testing of an MEMS Microgripper With Dual-Axis Force Sensor," vol. 15, no. 10, pp. 6017–6026, 2015.
- [71] Q. T. Aten, B. D. Jensen, S. H. Burnett, and L. L. Howell, "A self-reconfiguring metamorphic nanoinjector for injection into mouse zygotes," *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 85, no. 5, 2014.
- [72] R. Agrawal, B. Shah, and E. Zimney, "Compliant Mechanisms and MEMS," *ME 381 Introd. to MEMS*, pp. 1–18, 2004.
- [73] J. B. Hopkins, K. J. Lange, and C. M. Spadaccini, "Designing Microstructural Architectures With Thermally Actuated Properties Using Freedom, Actuation, and Constraint Topologies," *J. Mech. Des.*, vol. 135, no. 6, p. 061004, 2013.
- [74] R. S. Lakes, "Foam Structures with a Negative Poisson ' s Ratio," *Science (80-.)*, vol. 235, no. 4792, pp. 1038–1040, 1987.
- [75] K. Kim, J. Lee, J. Ju, and D.-M. Kim, "Compliant cellular materials with compliant porous structures: A mechanism based materials design," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 51, no. 23–24, pp. 3889–3903, 2014.
- [76] T. G. Nelson, R. J. Lang, N. A. Pehrson, S. P. Magleby, and L. L. Howell, "Facilitating Deployable Mechanisms and Structures Via Developable Lamina Emergent Arrays," *J. Mech. Robot.*, vol. 8, no. 3, p. 031006, 2016.
- [77] M. Spencer, L. L. Howell, S. Zirbel, and M. Wilson, "Brigham Young University - Compliant Mechanisms Research," 2017. [Online]. Available: <https://compliantmechanisms.byu.edu/node/892>. [Accessed: 17-Jun-2017].
- [78] R. M. Fowler, L. L. Howell, and S. P. Magleby, "Compliant space mechanisms: a new frontier for compliant mechanisms," *Mech. Sci.*, vol. 2, no. 2, pp. 205–215, 2011.
- [79] E. G. Merriam, J. E. Jones, S. P. Magleby, and L. L. Howell, "Monolithic 2 DOF fully compliant space pointing mechanism," *Mech. Sci.*, vol. 4, no. 2, pp. 381–390, 2013.
- [80] S. P. Pellegrini, N. Tolou, M. Schenk, and J. L. Herder, "Bistable vibration energy harvesters: A review," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 24, no. 11, pp. 1303–1312, 2012.
- [81] A. D. Shaw, S. A. Neild, D. J. Wagg, P. M. Weaver, and A. Carrella, "A nonlinear spring mechanism incorporating a bistable composite plate for vibration isolation," *J. Sound Vib.*, vol. 332, no. 24, pp. 6265–6275, 2013.
- [82] B. Zhang, S. A. Billings, Z.-Q. Lang, and G. R. Tomlinson, "Suppressing Resonant Vibrations Using Nonlinear Springs and Dampers," *J. Vib. Control*, vol. 15, no. 11, pp. 1731–1744, 2009.
- [83] Y. She, C. Li, J. Cleary, and H.-J. Su, "Design and Fabrication of a Soft Robotic Hand With Embedded Actuators and Sensors," *J. Mech. Robot.*, vol. 7, no. 2, p. 021007, 2015.
- [84] L. Zhou, A. E. Marras, H. J. Su, and C. E. Castro, "DNA origami compliant nanostructures with tunable mechanical properties," *ACS Nano*, vol. 8, no. 1, pp. 27–34, 2014.
- [85] J. J.-P. Merlet, "Direct Kinematics and Assembly Modes of Parallel Manipulators," *Int. J. Rob. Res.*, vol. 11, no. 2, pp. 150–162, 1992.
- [86] C. Innocenti and V. Parenti-Castelli, "Echelon form solution of direct kinematics for the general fully-parallel spherical wrist.," *Mech. Mach. Theory*, vol. 28(4), pp. 553–561, 1993.
- [87] J. D. Lee and Z. Geng, "Modeling and control of a flexible Stewart platform.," in *IFAC 12th Triennial World Congress*, 1993, pp. 441–444.

- [88] D. M. Ku, "Direct displacement analysis of a Stewart platform mechanism," *Mech. Mach. Theory*, vol. 34(3), pp. 453-465., 1999.
- [89] G. Yang, I.-M. Chen, and S. H. Yeo, Design consideration and kinematic modeling for modular reconfigurable parallel robots. .
- [90] T. Arai, Development of a parallel link manipulator. 1990.
- [91] J. P. Merlet, "Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators," *Int. J. Rob. Res.*, vol. 11(2), pp. 150-162., 1992.
- [92] I. A. Bonev and J. Ryu, "A simple new closedform solution of the direct kinematics using three linear extra sensors," in *IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, 1999, pp. 526–530.
- [93] C. Gosselin and J. Angeles, "Singularity analysis of closed-loop kinematic chains," *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 6(3), pp. 281–290, 1990.
- [94] D. Douady, "Contribution à la modélisation des robots parallèles: conception d'un nouveau robot à 3 liaisons et six degrés de liberté.," Université Paris VI, 1991.
- [95] J. Merlet, "An algorithm for the forward kinematics of general 6 d.o.f. parallel manipulators," 1989.
- [96] K. Liu, F. Lewis, G. Leuret, and D. Taylor, "The singularities and dynamics of a Stewart platform manipulator," *J. Intell. Robot. Syst. Theory Appl.*, vol. vol.8, no., p. pp.287-308, 1993.
- [97] O. Ma and J. Angeles, "Architecture singularities of platform manipulator," in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 1991, p. pp 1542-1547.
- [98] J. Sefrioui and C. Gosselin, "Singularity analysis and representation of planar parallel manipulators," *Rob. Auton. Syst.*, vol. 10, pp. 209–224, 1992.
- [99] S. Bhattacharya, H. Hatwal, and A. Ghosh, "Comparison of an exact and an approximate method of singularity avoidance in platform type parallel manipulators," *Mech. Mach. Theory*, vol. 33(7), pp. 965–974, 1998.
- [100] B. Dasgupta and T. . Mruthyunjaya, "Singularity-free planning for the Stewart platform manipulator," *Mech. Mach. Theory*, vol. Vol 33, N^o, p. pp 711-725.
- [101] E. F. Fichter, "A Stewart platform based manipulator: general theory and practical construction," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 5(2), pp. 157–181.
- [102] T. Arai, S. R., and Y. M. Jaya, "Micro hand module using parallel link mechanism.," in *In Japan/USA Symp. on Flexible Automation*, pp. 163–168.
- [103] J. P. Merlet, "Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators.," *Int. J. Rob. Res.*, vol. 11(2), pp. 150–162.
- [104] C. Gosselin, "Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators," *ASME J. Mech. Des.*, vol. 112, p. pp.167-176.
- [105] E. J. Haug, *Computer Aided Kinematics and Dynamics Of Mechanical Systems*. USA.
- [106] O. Masory and J. Wang, "Workspace evaluation of Stewart platforms," *Adv. Robot.*, vol. 9(4), p. pp 443-461, 1999.
- [107] J. Merlet, "Orientation workspace of a parallel manipulator with a fixed point.," in *ICAR*, pp. 141–146.
- [108] J.-P. Merlet, "Trajectory verification in the workspace of parallel manipulators," in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2166–217.
- [109] B. Dasgupta and T. S. Mruthyunjaya, "Closed-form dynamic equations of the general Stewart platform through the Newton - Euler approach," *Mech. Mach. Theory*, vol. 35, no. 4, p. III, 2000.
- [110] W. Do and D. Yang, "Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot.," *J. Robot. Syst.*, vol. 5, no. 3, pp. 209–227, 1988.
- [111] P. Guglielmetti and R. Longchamp, "A closed form inverse dynamics model of the delta parallel robot," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 27, no. 14, pp. 51–56, 1994.
- [112] M. Carvalho and Ceccarelli, "Erratum. A Closed Form Formulation for the Inverse Dynamics of Cassino Parallel Manipulator," *Multibody Syst. Dyn.*, vol. 6, no. 3, pp. 303–

- 304, 2001.
- [113] L.-W. Tsai, *Robot Analysis: The mechanic of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [114] G. Lebrete, K. Liu, and F. L. Lewis, "Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator," *J. Robot. Syst.*, vol. 10, no. 5, pp. 629–655, 1993.
- [115] H. B. Guo and H. R. Li, "Dynamic analysis and simulation of a six degree of freedom Stewart platform manipulator," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 220, no. 1, pp. 61–72, 2006.
- [116] K. Miller and R. Clavel, "The Lagrange-based model of Delta-4 robot dynamics," *Robotersysteme*, vol. 8, pp. 49–54, 1992.
- [117] H. Pang and M. Shahingpoor, "Inverse dynamics of a parallel manipulator," *J. Robot. Syst.*, vol. 11, no. 8, pp. 693–702, 1994.
- [118] L. Angel, J. Sebastián, R. Saltaren, and R. Aracil, "RoboTennis System Part II: Dynamics and Control," *Proc. 44th IEEE Conf. Decis. Control. Eur. Control Conf.*, Seville, Spain, December, no. January, pp. 2030–2034, 2005.
- [119] M. Honegger, A. Codourey, and E. Burdet, "Adaptive control of the Hexaglide, a 6 dof parallel manipulator," *Proc. Int. Conf. Robot. Autom.*, vol. 1, no. April, pp. 543–548, 1997.
- [120] L.-W. Tsai, "Solving the Inverse Dynamics of a Stewart-Gough Manipulator by the Principle of Virtual Work," *J. Mech. Des.*, vol. 122, no. 1, p. 3, 2000.
- [121] Wang and Gosselin, "A New Approach for the Dynamic Analysis of Parallel Manipulators," *Multibody Syst. Dyn.*, vol. 2, no. 3, pp. 317–334, 1998.
- [122] C.-D. Zhang and S.-M. Song, "An efficient method for inverse dynamics of manipulators based on the virtual work principle," *J. Robot. Syst.*, vol. 10, no. 5, pp. 605–627, 1993.
- [123] "FlexSys." [Online]. Available: <http://www.flxsys.com/compliant/>.
- [124] I. Her and A. Midha, "A Compliance Number Concept for Compliant Mechanisms, and Type Synthesis," *ASME. J. Mech., Trans., Autom.*, vol. 109, no. 3, pp. 348–355, 1987.
- [125] A. Midha, T. Norton, and L. L. Howell, "On the Nomenclature, Classification, and Abstractions of Compliant Mechanisms," *ASME. J. Mech. Des.*, vol. 116, no. 1, pp. 270–279, 1994.
- [126] L. L. Howell, "A generalized loop-closure theory for the analysis and synthesis of compliant mechanisms," *Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA*, 1993.
- [127] L. L. Howell and A. Midha, "A Method for the Design of Compliant Mechanisms With Small-Length Flexural Pivots," *ASME. J. Mech. Des.*, vol. 116(1), pp. 280–290, 1994.
- [128] L. L. Howell and A. Midha, "A Loop-Closure Theory for the Analysis and Synthesis of Compliant Mechanisms," *ASME. J. Mech. Des.*, vol. 118, no. 1, pp. 121–125, 1996.
- [129] M. Murphy, A. Midha, and L. L. Howell, "The topological synthesis of compliant mechanisms," *Mech. Mach. Theory*, vol. 31, no. 2, pp. 185–199, 1996.
- [130] F. Freudenstein and L. Dobrjanskyj, "On a theory for the type synthesis of mechanisms," in *Applied Mechanics*, 1966, pp. 420–428.
- [131] M. Pucheta and A. Cardona, "An automated method for type synthesis of planar linkages based on a constrained subgraph isomorphism detection," *Multibody Syst. Dyn.*, vol. 18, no. 2, pp. 233–258, 2007.
- [132] M. A. Pucheta and A. Cardona, "Design of bistable compliant mechanisms using precision-position and rigid-body replacement methods," *Mech. Mach. Theory*, vol. 45, no. 2, pp. 304–326, 2010.
- [133] M. A. Pucheta, "Computational Methods for Design and Synthesis of Planar Mechanisms," *National University of Technology*, 2008.
- [134] G. Allaire, *Shape Optimization by the Homogenization Method*, vol. 146, no. 399. 2002.
- [135] G. N. Vanderplaats, *Numerical optimization techniques for engineering design*. New York: McGraw-Hill, 1984.
- [136] J. Haslinger and R. Mäkinen, *Introduction to Shape Optimization: Theory,*

- Approximation, and Computation. SIAM, 2003.
- [137] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, no. 2, pp. 197–224, 1988.
 - [138] M. P. Bendsøe, "Optimal shape design as a material distribution problem," *Struct. Optim.*, vol. 1, no. 4, pp. 193–202, 1989.
 - [139] G. I. N. Rozvany, "Aims, Scope, Basic Concepts and Methods of Topology Optimization," in *Topology Optimization in Structural Mechanics*, G. I. N. Rozvany, Ed. Vienna: Springer Vienna, 1997, pp. 1–55.
 - [140] M. I. Frecker, G. K. Ananthasuresh, S. Nishiwaki, N. Kikuchi, and S. Kota, "Topological Synthesis of Compliant Mechanisms Using Multi-Criteria Optimization," *J. Mech. Des.*, vol. 119, no. 2, pp. 238–245, 1997.
 - [141] J. Hetrick and S. Kota, "An Energy Formulation for Parametric Size and Shape Optimization of Compliant Mechanisms," *J. Mech. Des.*, vol. 121, no. 2, p. 229234, 1999.
 - [142] K.-J. Lu and S. Kota, "Topology and Dimensional Synthesis of Compliant Mechanisms Using Discrete Optimization," *J. Mech. Des.*, vol. 128, no. 5, p. 1080, 2006.
 - [143] M. Wang, S. Chen, X. Wang, and Y. Mei, "Design of Multimaterial Compliant Mechanisms Using Level-Set Methods," *J. Mech. Des.*, vol. 127, no. 5, pp. 941–956, 2005.
 - [144] P. Wei and M. Y. Wang, "Parametric structural shape and topology optimization method with radial basis functions and level-set method," in *Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information In Engineering Conference*, 2006, p. 8.
 - [145] Y. M. Wang and Z. Luo, "Shape and topology optimization of compliant mechanisms using level set-based parameterization method," in *12th World Congress in Mechanism and Machine Science*, 2007.
 - [146] M. Y. Wang, "Mechanical and geometric advantages in compliant mechanism optimization," *Front. Mech. Eng. China*, vol. 4, no. 3, pp. 229–241, 2009.
 - [147] R. Ansola, E. Veguería, A. Maturana, and J. Canales, "3D compliant mechanisms synthesis by a finite element addition procedure," *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 46, no. 9, pp. 760–769, 2010.
 - [148] K. Lu and S. Kota, "Journal of Intelligent Material Systems and Structures Design of Compliant Mechanisms for Morphing," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 14, no. June, 2003.
 - [149] K.-J. Lu and S. Kota, "An Effective Method of Synthesizing Compliant Adaptive Structures using Load Path Representation," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, vol. 16, no. 4, pp. 307–317, 2005.
 - [150] A. Ruiz, F. J. Campa, O. Altuzarra, V. Petuya, C. Pinto, and A. Hernández, "Axis cross-coupling reduction on a high bandwidth XY flexure stage," in *Conference on Microactuators and Micromechanisms*, MAMM-2014, 2014.
 - [151] G. Villarreal Castro, *Análisis estructural*, ASAMBLEA N. Lima, Perú, 2009.
 - [152] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 49, pp. 1–23, 1943.
 - [153] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. P. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *J. Aeronaut. Soc.*, vol. 23, 1956.
 - [154] J. T. Oden, "Some aspects of recent contributions to the mathematical theory of finite elements," in *Recent advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, UAH Press., Huntsville, EEUU, 1972.
 - [155] J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hil. New York, 1968.
 - [156] F. Veubeke, "Displacement and equilibrium models in the finite element method," in *Stress Analysis*, O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Eds. London: John Wiley & Sons, 1965, pp. 145–197.

- [157] O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, *The finite element method in structural and continuum mechanics: numerical solution of problems in structural and continuum mechanics*. London: McGraw-Hill, 1967.
- [158] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *El Método de los Elementos Finitos*, Cimne-McGr. Barcelona, 1994.
- [159] "Ansys," 2018. [Online]. Available: <https://www.ansys.com/es-es/>.
- [160] S. Jagirdar, "Kinematics of curved flexible beam," University of South Florida. Tampa, 2006.
- [161] C. Lusk, "Ortho-Planar Mechanisms for Microelectromechanical Systems," Brigham Young University, 2005.
- [162] L. L. Howell and A. Midha, "Parametric Deflection Approximations for End-Loaded, Large-Deflection Beams in Compliant Mechanisms," *ASME. J. Mech. Des.*, pp. 117(1):156-165, 1995.
- [163] S. Jagirdar and C. P. Lusk, "Preliminaries for a Spherical Compliant Mechanism: Pseudo-Rigid-Body Model Kinematics," in *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2007, pp. 55–66.
- [164] B. D. Jensen and L. L. Howell, "The modeling of cross-axis flexural pivots," *Mech. Mach. Theory*, vol. 37, no. 5, pp. 461–476, 2002.
- [165] X. Pei, J. Yu, G. Zong, S. Bi, and H. Su, "The modeling of cartwheel flexural hinges," *Mech. Mach. Theory*, vol. 44, no. 10, pp. 1900–1909, 2009.
- [166] U. Sönmez and C. C. Tutum, "A Compliant Bistable Mechanism Design Incorporating Elastica Buckling Beam Theory and Pseudo-Rigid-Body Model," *J. Mech. Des.*, vol. 130, no. 4, p. 042304, 2008.
- [167] X. Pei, J. Yu, G. Zong, and S. Bi, "An effective pseudo-rigid-body method for beam-based compliant mechanisms," *Precis. Eng.*, vol. 34, no. 3, pp. 634–639, 2010.
- [168] J. B. Hopkins and R. M. Panas, "Eliminating parasitic error in dynamically driven flexure systems," *Annu. Meet. Am. Soc. Precis. Eng.*, no. C, pp. 1–2, 2013.
- [169] G. Hao and H. Li, "Extended Static Modeling and Analysis of Compliant Compound Parallelogram Mechanisms Considering the Initial Internal Axial Force *," *J. Mech. Robot.*, vol. 8, no. 4, p. 041008, 2016.
- [170] J. Yu, D. Lu, and G. Hao, "Design and analysis of a compliant parallel pan-tilt platform," *Meccanica*, vol. 51, no. 7, pp. 1559–1570, 2016.
- [171] King's College., "Master of Science in Mechatronics." London.
- [172] F. J. Campa, "Mecatrónica. Master en Ingeniería Mecánica." UPV-EHU.
- [173] J. Gausemeier and S. Moehring, "New Guideline VDI 2206 – A Flexible Procedure Model for Specific Requirements to the Design of Mechatronic Systems," *Int. Conf. Eng. Des. Iced 03 Stock.*, p. 10, 2003.
- [174] "Chardon Tools," 2017. [Online]. Available: <http://www.chardontool.com/precision/micro-milled-lens-array/>.
- [175] "Aerotech." [Online]. Available: <https://www.aerotech.com/product-catalog/stages/linear-stage/ant95l.aspx>.
- [176] O. Altuzarra, F. J. Campa, C. Roldan Paraponiaris, C. Amezua San Martín, and C. Pinto, "Validación experimental del modelo dinámico de una máquina de cinemática paralela," in *XX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, 2014.
- [177] C. G. Roldan Paraponiaris, "A Method for the Mechatronic Analysis of Parallel Kinematics Manipulators Based on Decoupling the Dynamics of Actuators and Mechanism," University of the Basque Country (UPV/EHU), 2017.