eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIA ETA ENPRESA FAKULTATEA
FACULTAD DE ECONOMÍA Y EMPRESA

Grado: Economía

Curso: 2021/22

Soluciones Clásicas de Negociación: Nash y Kalai-Smorodinsky

Autora: Anne Aguirre Muniozguren

Directoras: Ana Isabel Saracho de la Torre y Maria Elena Iñarra Garcia

Bilbao a 20 de junio de 2022

ÍNDICE

FIGURAS

1. PREÁMBULO

El hecho de cursar el grado de Economía, me ha permitido indagar e investigar diferentes áreas como la microeconomía, macroeconomía o la economía internacional. Esto me ha permitido definir mi futuro laboral, además de desarrollar aptitudes como la intuición, el trabajo en equipo, habilidades de comunicación y la resiliencia. Sin embargo, no tenía claro hacia que área quería enfocar el trabajo de fin de grado. En un primer momento, decidí indagar en los temas que se ofertaban en la lista, sin embargo, en ninguno de los temas me veía reflejada. En ese momento de incertidumbre, se dio la casualidad de que mis directoras me propusieran el tema de este trabajo "Soluciones clásicas de negociación: Nash y Kalai-Smorodinsky". Siendo honesta, es un tema que nunca se me habría pasado por la cabeza, pero decidí aceptarla. Veía este trabajo como un reto personal, ya que salía totalmente de mi zona de confort. Es verdad que a lo largo del grado he podido cursar asignaturas relacionadas con la teoría de juegos como Programación Matemática y Teoría de Juegos, donde he tenido la oportunidad de estudiar la teoría de juegos de Nash, analizando juegos como "el dilema del prisionero", sin embargo, este trabajo ha ido un paso más, no únicamente ampliando mis conocimientos acerca de las aportaciones de Nash, sino que también se han introducido las aportaciones de Kalai y Smorondinsky, permitiéndome así desarrollar mi nivel de racionamiento además de tener una aptitud más crítica.

En la realización de este trabajo me he enfrentado a varias dificultades: la primera de ellas ha sido la falta de familiarización al "complejo" lenguaje matemático usado por los autores analizados. Es verdad que me he ido introduciendo progresivamente en este lenguaje, primero con las publicaciones de Jordi Massó para así posteriormente adentrarme en los trabajos de Nash, Kalai y Smorondinsky. No voy a negar que el proceso no haya llevado su tiempo, ya que me ha resultado un tema complejo para analizar y comprenderlo, pero, ahora mirándolo en perspectiva, considero que he sido capaz de analizar y entender las ideas principales de Nash, Kalai y Smorondisnky en lo referente a los juegos de negociación y plasmarlo en este trabajo fin de grado. La segunda dificultad está relacionada con lo anterior, una vez entendida los trabajos y sus principales aportaciones al problema de negociación ha sido expresarla de manera clara, coherente y ordenada. Obviamente, estas dificultades no se podrían haberse resuelto si no seria por la labor de mis directoras.

2. INTRODUCCIÓN

En Economía existen muchos ejemplos de problemas que se pueden modelar como juegos de negociación: el reparto de un pastel, las negociaciones entre trabajadores y los empresarios referentes a las condiciones de trabajo, la asignación de tareas del hogar, la determinación del precio en una compra-venta, los diálogos de paz entre países o fusiones y adquisiciones de empresas negociados por ejecutivos, entre otros. En cada uno de estos ejemplos, se pueden producir diferentes resultados en el caso de que los jugadores lleguen a un acuerdo, sin embargo, también existe la posibilidad de que las negociaciones no conduzcan a ningún acuerdo.

Un juego de negociación se refiere a situaciones donde los jugadores involucrados deben decidir acerca de cómo repartir un bien (o elemento en discordia). En estos problemas de negociación, llegar a un acuerdo se supone que es preferible a no hacerlo, sin embargo, no es aceptable cualquier reparto. Además, se supone que cada individuo siempre buscará la solución más favorable posible. La dificultad en estos problemas radica en que las preferencias de los jugadores al buscar cada uno su propio interés puede conducir a un conflicto, que no lleve a ninguna solución.

El análisis de estos problemas de negociación lleva más de un siglo suscitando interés en el análisis económico. Muestra de ello es que, en los años 50, Nash inicia una literatura en torno a los juegos de negociación en sus artículos: *The Bargaining Problem (1950)* y *Two-Person Cooperative Games (1950)*[1]. En este trabajo de fin de grado se analizarán dos propuestas de soluciones clásicas a los problemas de negociación obtenidas mediante un enfoque axiomático para el caso de dos jugadores: la solución de Nash propuesta en el artículo anteriormente mencionado *The Bargaining Problem* y la de Kalai-Smorondinsky propuesta en *Other solutions to Nash's bargaining problem (1975)*. Como

---

[1] Nash no fue el primero en analizar los problemas de negociación, autores como Vilfredo Pareto o Francis Y. Edgeworth, ya lo habían hecho. En el caso de Vilfredo Pareto, plasmó las ideas de Francis Y. Edgeworth diseñando la caja de Edgeworth, siendo el pionero en los problemas de negociación. Recordemos que esta caja permite obtener una solución que depende de la capacidad de negociación y las preferencias de los individuos.

se verá más adelante, la solución propuesta por Nash satisface cuatro axiomas, en concreto los de simetría, Pareto optimalidad, independencia de alternativas irrelevantes e invarianza de escala. Esta solución de Nash ha sido objeto de críticas derivadas del axioma de independencia de alternativas irrelevantes. En concreto, autores como Ehud Kalai y Meir Smorodinsky proponen una solución que sustituye el axioma de independencia de alternativas irrelevantes por el axioma de monotonía individual, manteniendo el resto de los axiomas propuestos en la solución de Nash al considerar que éstos son "razonables".

El trabajo se divide en cinco secciones. La primera de ellas contiene una breve biografía de Nash, Kalai y Smorondinsky. En la segunda sección se definen los axiomas que se recogen en los dos conceptos de solución analizados en el trabajo. En las últimas secciones se analizará en detalle cada una de las soluciones y se comparará mediante ejemplos las diferencias entre ellas. La solución propuesta por Nash y su caracterización será la primera que se describe. Luego, se pasará a describir la solución de Kalai-Smorodinsky. Finalmente, mediante ejemplos numéricos se ilustrará y se plasmará las diferencias entre las dos soluciones analizadas en este trabajo.

3. ACERCA DE LOS AUTORES

John F. Nash (1928-2015)

John Forbes Nash nació el 13 de junio de 1928 en Bluefield, West Virginia. Hijo de una maestra y un ingeniero eléctrico. Empezó formándose en el área de la química en el Carnegie Institute of Technology, pero pronto descubrió su campo definitivo, las matemáticas, licenciándose en 1948. Es de destacar que únicamente cursó una asignatura relacionada con economía, la cual le sirvió para desarrollar las ideas principales de su trabajo: *"The Bargaining Problem"*. Realizó su tesis doctoral titulada: *"Non-cooperative*

Games" en la Universidad de Princeton, donde se dedicó a los campos de las matemáticas y de la teoría económica[2].

Nash, junto a John Harsanyi y Reinhard Selten, recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 por sus aportaciones a la teoría de juegos. En los últimos años de su vida recibió múltiples premios. Uno de ellos fue el Premio Abel otorgado en 2015 en Oslo por sus "notables y seminales contribuciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales y sus aplicaciones al análisis geométrico".

Ehud Kalai

Es un destacado teórico de juegos y economista matemático, nacido en Palestina el 7 de diciembre de 1942. Estudió la licenciatura de matemáticas en la Universidad de Berkeley, California (1967). Posteriormente, realizó un máster y doctorado en estadística y matemáticas en la Universidad de Cornell.

Fue director-fundador de una de las revistas más relevantes en teoría de juegos, *Games and Economic Behaviour* y ocupó el puesto de Académico Distinguido Sherman Fairchild en el Instituto de Tecnología de California (1993), además de recibir un Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Paris Dauphine (2010). Actualmente, es un Profesor Distinguido en las Ciencias de la Decisión en la Universidad de Northwestern, donde ejerce como docente desde 1975.

Meir Smorodinsky

Meir Smorodinsky es doctor por la Hebrew University of Jerusalem (1968). Es un especialista en investigación en diversas áreas como las ciencias sociales y económicas. Actualmente, trabaja en el departamento de estadística e investigación operativa en la Universidad de Tel Aviv. Ha trabajado y publicado diversos estudios relacionados con la teoría ergódica, la teoría de la información y la economía matemática como *Bernoulli schemes of the same entropy are finitarily isomarphic (1979)* o *Processes with no*

[2] En cuanto a su vida personal, se le diagnosticó esquizofrenia paranoica, en 1959. Esta enfermedad le dificultó considerablemente su trabajo en la investigación. Nash y su esposa fallecieron en un accidente de coche el 23 de mayo de 2015 en Nueva Jersey.

standard extension (1998). Sin embargo, uno de sus trabajos más notables, es el que realizó junto a Ehud Kalai, titulado: *Other solutions to Nash's bargaining problem* en el que se propone la solución a los problemas de negociación conocida como la solución de Kalai-Smorondinsky que se desarrollara en este trabajo.

4. PROBLEMA DE NEGOCIACIÓN PARA DOS JUGADORES

Antes de entrar a analizar la solución de Nash y Kalai-Smorodinsky a partir del enfoque axiomático, es necesario definir un problema de negociación para el caso de dos jugadores. Cualquier juego de negociación, independientemente de su complejidad, tiene una serie de elementos comunes que se describen a continuación:

Considere un juego de negociación como una situación en la que dos jugadores deben decidir conjuntamente cómo llevar a cabo un reparto, por ejemplo, el reparto de una determinada cantidad de dinero. En este trabajo solo se consideran repartos entre dos partes a las que se llamará jugadores[3] que serán denotados por J1 y J2 y sus preferencias se representan mediante funciones de utilidad "Von Neumann and Morgenstern": u_1 y u_2.

Se denotará por S, al conjunto de todas las combinaciones de utilidad correspondientes a los diferentes repartos posibles que se supone acotado, cerrado y convexo[4]. Los jugadores necesitan ponerse de acuerdo sobre un reparto que lo denotamos como, $g = (g_1, g_2) \in S$. Obviamente, éste debe satisfacer racionalidad individual, es decir, cada jugador debe estar mejor con dicho acuerdo que sin acuerdo. En caso de no llegar a un acuerdo, cada individuo obtendrá las utilidades correspondientes al punto de desacuerdo.

[3] Se podría extender este problema de negociación a n jugadores.

[4] Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ es acotado si cualquiera de sus elementos se puede incluir en una bola abierta centrada en el origen. Es cerrado si todos los puntos de su frontera pertenecen también al conjunto. Es convexo, si $\forall\ u_1, u_2 \in S$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, las utilidades $u = \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2$ deben pertenecer a S.

Definición 1. *Un juego de negociación es un par ordenado* (S, d) *donde:*

(i) $S \in \mathbb{R}^2$ *es el conjunto de todas las combinaciones de utilidad factible, que se supone cerrado, convexo y compacto.*

(ii) $d = (d_1, d_2) \in S$, *el punto de desacuerdo.*

A lo largo del trabajo se utilizará la siguiente notación: se denotará por $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los juegos de negociación. La solución del problema de negociación $(S, d) \in \mathcal{B}$ se denota por $f(\mathrm{S}, \mathrm{d})$ siendo $f_i(S, d)$ la utilidad recibida por el jugador i con $i = 1{,}2$ como consecuencia del reparto acordado.

5. AXIOMAS

Un axioma es un principio fundamental que no necesita demostrarse. En este contexto podría interpretarse como una propiedad deseable que una solución debería cumplir. En esta sección se definirán, en el contexto de los juegos de negociación para dos jugadores, los siguientes axiomas: Pareto optimalidad, simetría, invarianza de escala, independencia de alternativas irrelevantes y monotonía.

Axioma 1: Pareto Optimalidad

Definición 2. *Una solución* $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ *satisface la propiedad de Pareto optimalidad si* $\forall (S, d) \in \mathcal{B}$ *y* $\forall s, t \in S$, *tal que* $s_i > t_i$, *i=1,2, entonces* $f(S, d) \neq t$.

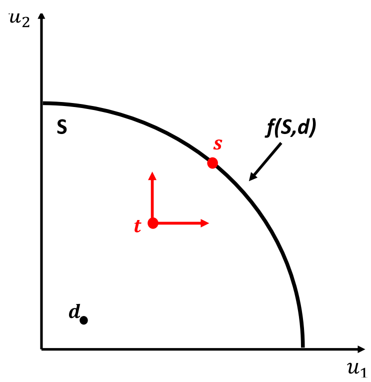
Por consiguiente, al suponer dos distribuciones de utilidad, $s, t \in S$ tal que $\mathrm{s}_i > \mathrm{t}_i$ para $i = 1{,}2$, el vector s proporciona a ambos jugadores un nivel de utilidad mayor que el vector de utilidades t, se concluye entonces que t no puede ser la solución al problema de negociación (S, d). De hecho, existen otras alternativas distintas a t donde ambos jugadores están mejor en t.

En términos gráficos, esto implica que la solución deba situarse en la frontera de S, porque cualquier reparto situado al noreste de la frontera no es una combinación factible.

Mientras que, si el reparto pertenece al interior de S, los jugadores tendrán incentivos a desviarse hacia la frontera de S, ya que es posible mejorar a ambos jugadores a la vez.

Imagínese un juego de negociación donde se debe repartir una cantidad de dinero. Todas las combinaciones recogidas dentro de la frontera de S no estarían repartiendo toda la cantidad de dinero, (en el caso de que más dinero supusiera una mayor utilidad) existiendo otras combinaciones que si lo harían y por ende estas últimas reportarían una mayor utilidad. Si ahora se analizan todas las combinaciones situadas al noreste de la frontera, puede verse fácilmente que resultan inalcanzables. Por tanto, para que una combinación de utilidades cumpla la propiedad de Pareto optimalidad debe estar situada en la frontera de S, siendo imposible mejorar a uno jugador sin perjudicar al otro.

Figura 1: Pareto Optimalidad



Axioma 2: Simetría

Si los jugadores no se diferencian en la información contenida en S (punto de desacuerdo y utilidades), entonces la solución debe tratar a los jugadores por igual, dando el mismo poder de negociación a ambos.

Un problema de negociación $(S, d) \in \mathcal{B}$ es simétrico, si:

(i) $d_1 = d_2$

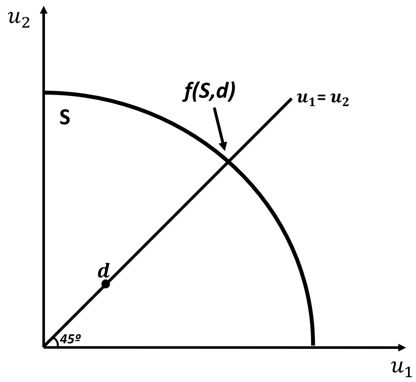
(ii) $\forall (u_1, u_2) \in S$ se cumple que $(u_2, u_1) \in S$

Y en este caso los dos jugadores deben de ser igualmente tratados. Gráficamente, el conjunto S debe ser simétrico con respecto a la línea $u_1 = u_2$.

Definición 3. *Una solución* $f: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ *satisface la propiedad de simetría para cualquier problema de negociación simétrico* $(S, d) \in \mathcal{B}$, *si* $f_1(S, d) = f_2(S, d)$.

Este axioma establece que si las preferencias de los jugadores son idénticas y también lo es la utilidad que reciben en el punto de desacuerdo, entonces en la solución del juego de reparto ambos jugadores deben obtener la misma utilidad. Gráficamente, la implicación es que la solución debe estar sobre la recta de 45º, que, en todo problema de negociación simétrico, pasa obviamente por el punto de desacuerdo, d.

Figura 2: Simetría



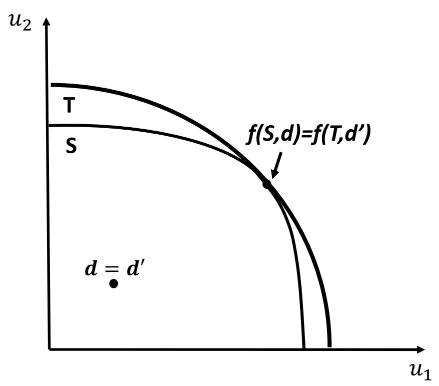
Axioma 3: Independencia de Alternativas Irrelevantes

A modo de ejemplo se describirá la intuición que subyace bajo el supuesto de independencia de alternativas irrelevantes. Imagine un individuo que decide ir a un restaurante. Se enfrenta a las siguientes elecciones: ensalada, pescado, carne, legumbre y pasta. Tras pensarlo escoge la ensalada. Si en lugar de ese conjunto de elecciones, se le muestra una carta más reducida que incluya ensalada, pescado y carne, el individuo tendrá que seguir escogiendo la ensalada.

Definición 4. *Una solución* $f: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ *satisface la independencia de alternativas irrelevantes si* $\forall (S, d), (T, d) \in \mathcal{B}$ *tal que* $S \subset T$ *y* $f(T, d) \in S$, *entonces* $f(S, d) = f(T, d)$.

Suponga que el conjunto S está incluido en T y que coincide el punto de desacuerdo, si el acuerdo en T pertenece a S, entonces el hecho de que en S haya alternativas no elegidas en T no debería afectar al acuerdo final en S.

Figura 3: Independencia de Alternativas Irrelevantes



Axioma 4: Invarianza de Escala

Con este axioma se requiere que cualquier transformación escalar de las utilidades de los jugadores se traduzca en una modificación en la misma escala de la solución.

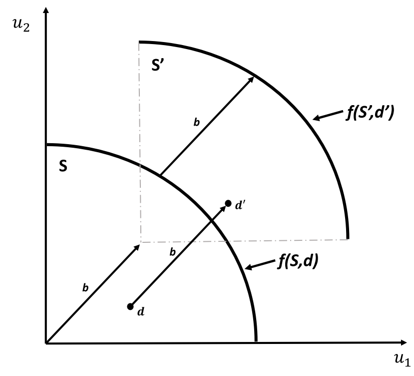
Definición 5. *Una solución* $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ *satisface la propiedad de invarianza de escala si,* $\forall (S,d),(S',d') \in \mathcal{B}$*, tenemos que* $f_i(S',d') = b_i + a_i f_i(S,d), i = 1,2$.

Para cada (S,d) y para todo $\mathrm{b} = (b_1, b_2)$ y $a = (a_1, a_2)$, donde $a_i > 0$ con $i = 1,2$, se define $(S', d') \in \mathcal{B}$, de la siguiente manera:

$$S' = \{y \in \mathbb{R}^2 : \forall\, x \in S \text{ tales que } y_i = b_i + a_i x_i \,, (\, i = 1,2)\} \quad y$$
$$d_i' = b_i + a_i d_i \,, (\, i = 1,2)$$

Por tanto, (S', d') es una trasformación afín positiva de (S,d). Los problemas (S,d) y (S',d') son equivalentes en términos de las preferencias de los jugadores y, en consecuencia, el resultado debe ser el mismo. Esto, en términos de dinero, implica que recibirían la misma cantidad.

Figura 4: Invarianza de Escala



Axioma 5: Monotonía

Dentro del axioma de monotonía se distinguirán dos tipos de monotonía: individual y restringida. Como se verá a continuación, monotonía restringida, implica monotonía individual pero no al contrario.

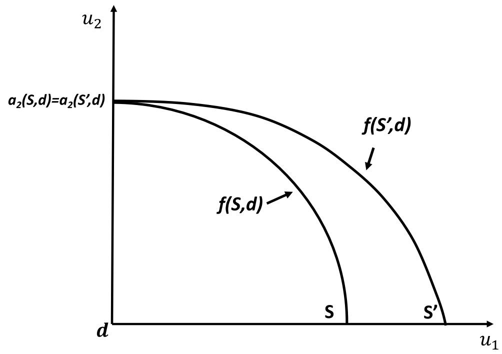
Axioma 5.1: Monotonía Individual

Definición 6. *Una solución $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisface la propiedad de monotonía individual, si $\forall (S,d),(S',d') \in \mathcal{B}$ con $S \subseteq S'$ y $a_j(S,d) = a_j(S',d)$, entonces $f_i(S',d) \geq f_i(S,d)$ con $i \neq j$.*

Donde $a_i(S,d)$ es la utilidad máxima que puede obtener el individuo i en el juego de negociación (S,d), $i = 1,2$.

Este axioma establece que si la utilidad máxima se amplía solamente a favor de un jugador (figura 5: J1) éste debe mejorar. Por ejemplo, en la situación ilustrada en el gráfico, para cualquier $u_2 \in (d_2, a_2(S,d))$, el jugador 1 está mejor en S' que en S.

Figura 5: Monotonía Individual

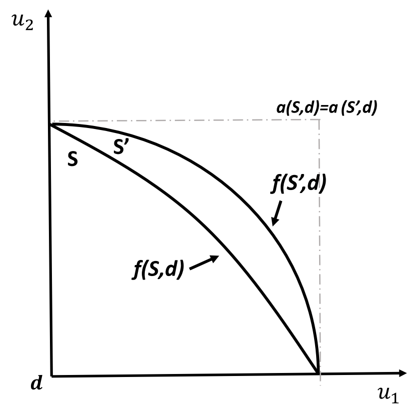


Axioma 5.2: Monotonía Restringida

Definición 7. *Una solución $f: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ satisface la propiedad de monotonía restringida, si $\forall (S,d)(S',d) \in \mathcal{B}$, tal que $S \subseteq S'$ y $a(S,d) = a(S',d)$ entonces $f(S',d) \geq f(S,d)$.*

El axioma de monotonía restringida establece que, si las utilidades máximas y el punto de desacuerdo de los jugadores no cambian al ampliar el conjunto de todas las combinaciones factibles, entonces, ambos jugadores deben estar mejor en la solución del problema ampliado (S').

Figura 6: Monotonía Restringida



6. SOLUCIÓN DE NASH PARA JUEGOS DE NEGOCIACIÓN

En esta sección se describe la solución axiomática propuesta por Nash (Solución de Nash). Como se ha descrito anteriormente, en un problema de negociación existe un conjunto de combinaciones de utilidad factible y los jugadores tienen que llegar a un acuerdo en uno de los elementos de ese conjunto. Los axiomas a cumplir por esta solución son "razonables", debiendo la solución ser Pareto óptima, cumplir la independencia de alternativas irrelevantes y la invarianza de escala, además de ser simétrica en los juegos simétricos[5].

El aspecto innovador de la solución propuesta por Nash es que en ésta los jugadores eligen aquellas alternativas que son óptimas, teniendo en cuenta las decisiones finales del resto de los jugadores. De hecho, en su trabajo *The Bargaining Problem*, hace uso de la teoría de utilidad esperada y supone que los individuos son racionales. Uno se puede preguntar como los jugadores saben lo que realmente van a hacer los otros jugadores, pues, la respuesta es dada a posteriori por autores como Cournot (1838) o Fisher (1930). Estos afirman que los agentes a medida que pasa el tiempo van aprendiendo o se adaptan evolutivamente a las acciones escogidas por los demás jugadores.

Definición 8. *La solución de Nash,* $F(S, d)$ *para todo* $(S, d) \in \mathcal{B}$ es la solución del siguiente problema:

$$Max_{u_1,u_2}(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$$

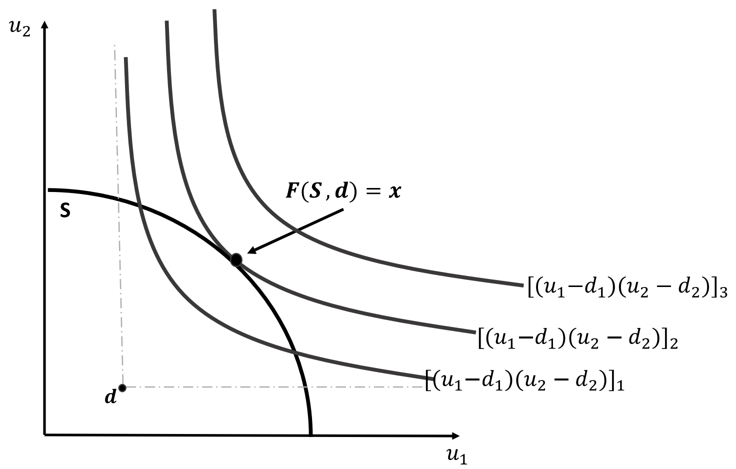
---

[5] Otros autores con anterioridad a John Nash habían propuesto soluciones para los juegos de negociación, como es el caso de Von Neumann (1928). Éste propuso una solución a los problemas de negociación basada en el criterio minimax. No obstante, tal y como señaló él, este criterio es más sensato para juegos de suma cero, ya que lo que es bueno para un jugador no lo es para el otro. En teoría de juegos, minimax es un método de decisión para minimizar la pérdida máxima esperada en juegos con adversario y con información perfecta. Dicho de otra forma, es un criterio de decisión cuando las opciones llevan aparejadas pérdidas, frente a esto, el jugador elige la opción con el resultado menos malo solamente considerando el peor resultado posible en cada opción.

$$\textit{sujeto a } (u_1, u_2) \in S \ y \ (u_1, u_2) \geq (d_1, d_2)^{6}$$

Denotemos por $x = (x_1, x_2)$ al vector de Nash para cualquier problema de negociación para el caso de dos jugadores. Sean $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ las curvas de nivel correspondientes al problema de negociación. Nótese que éstas están formadas por combinaciones de utilidad del mismo valor. La siguiente figura recoge dicha solución para el problema de negociación $(S, d) \in \mathcal{B}$:

Figura 7: Solución de Nash



Como se observa en el gráfico, al ser S convexo, la solución es única. Imagine dos combinaciones de utilidad (u_1, u_2) y $(u_1, u_2)'$, ambos incluidos en S y mayores o iguales al punto de desacuerdo. Si ambos pertenecen a la misma curva de nivel, al ser S convexo, la solución no se alcanzará ni en (u_1, u_2) ni tampoco en $(u_1, u_2)'$, ya que las curvas de nivel son estrictamente convexas, lo que implica que cualquier combinación de utilidad correspondiente a la combinación lineal de (u_1, u_2) y $(u_1, u_2)'$ es mayor. De hecho, la solución será aquel punto de S perteneciente a la cuerva de nivel más alejada del origen.

[6] Véase la definición de la solución de Nash en *An introduction to game theory: international edition* (Martin J. Osborne).

6.1 Axiomatización de la solución de Nash

En esta sección, primero se demuestra que la solución de Nash (F) satisface los axiomas de simetría, Pareto optimalidad, independencia de alternativas irrelevantes y invarianza de escala (demostración 1). Segundo se verifica que, si una solución f satisface los cuatro axiomas mencionados anteriormente, entonces f tiene que ser la solución de Nash (demostración 2).

Demostración 1. *La solución de Nash, $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de un problema de negociación (S, d) satisface los axiomas de simetría, Pareto optimalidad, independencia de alternativas irrelevantes e invarianza de escala.*

Sea, $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$, la solución de Nash del problema de negociación $(S, d) \in \mathcal{B}$:

- Para verificar que F satisface el axioma de Pareto optimalidad, sea (S, d) un problema de negociación y $\forall\, x, y \in S$ tal que $x_i > y_i$ con $i = 1{,}2$, entonces $F(\mathrm{S}, \mathrm{d}) \neq \mathrm{y}$. Nótese que para cualquier i se da que $x_i - d_i > y_i - d_i$, por tanto:

$$\prod_{i=1}^{n=2}(x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n=2}(y_i - d_i)$$

- Para verificar que la solución de Nash, $F(S, d)$ satisface el axioma de simetría, sea (S, d) un juego de negociación simétrico, tal que $d_1 = d_2$ y $\forall (u_1, u_2) \in S$ se cumple que $(u_2, u_1) \in S$. Si $F(S, d) = x = (x_1, x_2)$, entonces por simetría, $(x_2, x_1) \in S$. Como resultado, al pertenecer a la misma curva de nivel se debe dar que $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$=$(x_2 - d_2)(x_1 - d_1)$, entonces $x_2 = x_1$.

- Para verificar que la solución de Nash, $F(S, d)$ satisface la independencia de alternativas irrelevantes, considere dos problemas de negociación, $(S, d), (T, d)$ tales que $S \subset T$ y $F(T, d) = x \in S$. Por definición, se sabe que:

$$\prod_{i=1}^{n=2}(x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n=2}(y_i - d_i) \qquad \forall y \in T$$

Como $S \subset T$;

$$\prod_{i=1}^{n=2}(x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n=2}(z_i - d_i) \qquad \forall z \in S$$

En consecuencia, se cumple que $F(S,d) = F(T,d)$, satisfaciendo así el axioma de independencia de alternativas irrelevantes.

- Para verificar que la solución de Nash, $F(S,d)$ satisface la invarianza de escala, considere $(S,d),(S',d') \in \mathcal{B}$ donde $S' = \{y \in \mathbb{R}^2 : \forall\, x \in S\ tales\ que\ y_i = b_i + a_i x_i\,, (\,i = 1,2)\}$ y $d_i' = b_i + a_i d_i\,$, $(\,i = 1,2)$. Se tiene que demostrar que si $x = F(S,d)$, entonces $F(S',d') = b + ax$. Se parte de:

$$\prod_{i=1}^{n=2}(x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n=2}(y_i - d_i) \qquad \forall y \in S$$

Al ser $a_i > 0$ con $i = 1,2$, se tiene:

$$\prod_{i=1}^{n=2} a_i \prod_{i=1}^{n=2}(x_i - d_i) > \prod_{i=1}^{n=2} a_i \prod_{i=1}^{n=2}(y_i - d_i)$$

Es decir,

$$\prod_{i=1}^{n=2}(a_i(x_i - d_i)) > \prod_{i=1}^{n=2}(a_i(y_i - d_i))$$

$$\prod_{i=1}^{n=2}[(a_i x_i + b_i) - (a_i d_i + b_i)] > \prod_{i=1}^{n=2}(a_i y_i + b_i) - (a_i d_i + b_i)$$

Demostración 2. *Si una solución* $f: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ *satisface los axiomas de simetría, Pareto optimalidad, independencia de alternativas irrelevantes y la invarianza de escala, entonces f es la solución de Nash, es decir,* $f = F$.

Para demostrar que cualquier solución $f: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga los cuatro axiomas previamente mencionados es en realidad la solución de Nash, $F(S, d) = x$, se seguirán tres pasos:

Primero, se hará uso del axioma de invarianza de escala para poder tratar cualquier problema de negociación como simétrico. Para ello, se parte de un juego de negociación cualquiera, (S, d) y haciendo uso de este axioma se transformará el problema inicial de tal manera que obtengamos el problema de negociación (S_W, d_W), donde $F(S_W, 0) = 1{,}1$ y $d_W = 0{,}0$. Seguidamente, se creará un problema de negociación simétrico (R, d), tal que incluya S_W. Después de haber obtenido un juego simétrico, se hará uso de los axiomas de simetría y Pareto optimalidad para verificar que f y F coinciden en dicho juego. La razón es que dentro de todas las combinaciones Pareto óptimas de un juego de negociación simétrico, recogidas en su frontera, existe un único punto donde la utilidad correspondiente a ambos individuos es idéntica. Tercero, el axioma de independencia de alternativas irrelevantes implica que f y F coincidan en el problema (S_W, d_W). Finalmente, por el axioma de invarianza de escala, también, coincidirán en el problema original, (S, d). Se procederá a analizar cada paso en detalle:

Paso 1[7]: Se parte de un juego de negociación cualquiera, $(S, d) \in \mathcal{B}$, tal que $F(S, d) = x$. Para obtener un nuevo problema de negociación $(S_W, d_W) \in \mathcal{B}$, se hace uso del axioma de invarianza de escala, considerando la siguiente transformación:

$$\lambda_i(u_i) = \frac{-d_i}{x_i - d_i} + \frac{1}{x_i - d_i} u_i \qquad \forall u_i \in S \qquad i = 1{,}2 \qquad (1)^8$$

[7] En juegos de negociación $d = 0$, el paso 1 se verifica automáticamente.

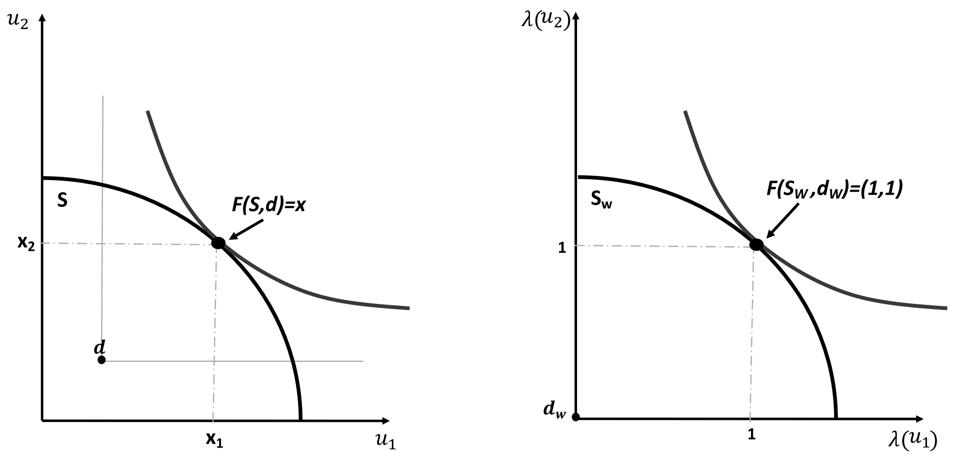
[8] Para el caso de las utilidades correspondientes a la solución de Nash se obtiene:

$$\lambda(u_i = x_i) = \frac{-d_i}{x_i - d_i} + \frac{1}{x_i - d_i} x_i = \frac{x_i - d_i}{x_i - d_i} = 1 \qquad \text{donde } i = 1{,}2$$

Y para $u_i = d_i$, se obtiene que $d_i = 0$.

Nótese que la trasformación depende de d_i y x_i , donde d_i será el punto de desacuerdo y x_i la solución de Nash al problema original para el individuo i. Asimismo, sea u_i la utilidad factible del problema de negociación (S, d) y sea $\lambda_i(u_i)$ la utilidad factible del problema de negociación (S_W, d_W) del individuo i, con i = 1,2. La invarianza de escala implica $F(S_W, d_W) = (1,1)$ con $d_W = 0{,}0$.

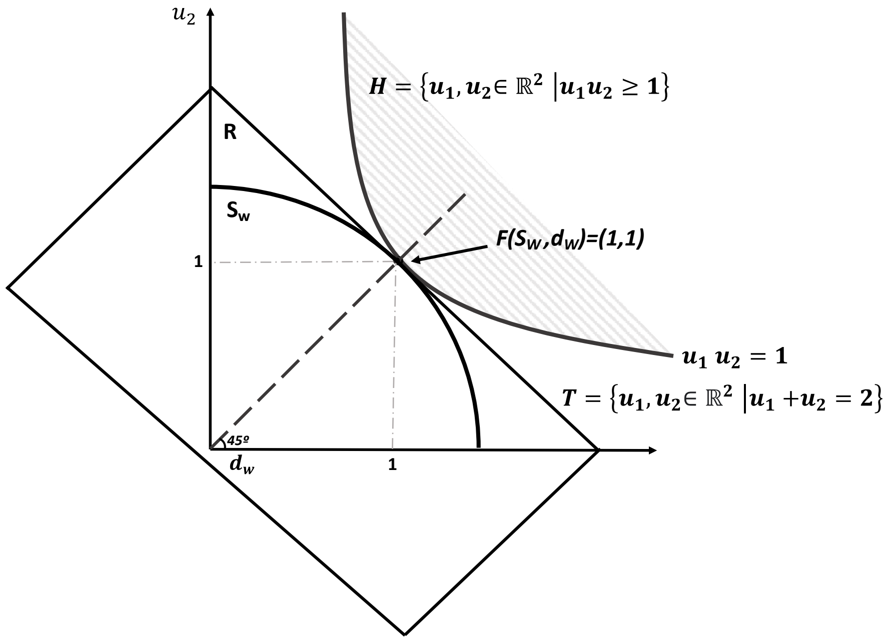
Figura 8: Transformación del problema de negociación



La solución de Nash, $x_W = (1,1)$, es el vector que maximiza el producto de utilidades en el conjunto S_W. Obviamente, x_W es el par de utilidades del conjunto S_W que se encuentra en la curva de nivel del producto de utilidades más alejada posible del origen, u_1u_2=*1*. Por tanto, es el único punto que está incluido tanto en S_W como en el conjunto convexo, $H = \{u_1, u_2 \in \mathbb{R} | u_1u_2 \geq 1\}$. Conociendo la función frontera del conjunto H, se construye una recta que pase por el punto (1,1) con pendiente -1, tal que $T = \{u_1, u_2 \in \mathbb{R} | u_1 + u_2 = 2\}$.

Posteriormente, se construye un juego de negociación simétrico $(R, d_W) \in \mathcal{B}$, donde d_W es el punto de desacuerdo y R el conjunto de todas las combinaciones de utilidad, expresada tal que $R = \{u_1, u_2 \in \mathbb{R} | u_1 + u_2 \leq 2\}$. Todas las combinaciones Pareto óptimas del juego de negociación simétrico están situadas en la recta T, por tanto, $PO(R) =$ T. Asimismo, el juego de negociación (S_W, d_W) está contenido en (R, d_W) y $(1,1) \in S_W$.

Figura 9: Conjunto simétrico (R)



Paso 2: En el paso anterior, partiendo de cualquier juego de negociación, (S, d) se ha obtenido un juego de negociación simétrico, (R, d_W), donde $S_W \subseteq \mathrm{R}$, $PO(R) = \mathrm{T}$ y $(1,1) \in S_W$. Haciendo uso de los axiomas de simetría y Pareto óptimo, la solución al juego de negociación simétrico (R, d_W) deberá coincidir con la solución de Nash, por tanto: $f(R, d_W) = (1,1)$. Lo anterior, se debe a que los axiomas exigen que f esté en la frontera (recta T) y que las utilidades factibles sean iguales para ambos jugadores.

Paso 3: Se hace uso del axioma de independencia de alternativas irrelevantes para verificar que la solución $f(S_W, d_W) = F(S_W, d_W)$. Consideramos dos juegos de negociación (R, d_W) y (S_W, d_W), donde $S_W \subset R$ y $(1,1) \in S_W$. Si los jugadores han elegido el punto (1,1) entre todas las alternativas factibles del conjunto amplio (R), también deberán seguir eligiendo en el conjunto reducido (S_W), ya que el hecho de eliminar alguna de las alternativas no elegidas no debería afectar al resultado. Por tanto, se tendrá que dar que $f(S_W, d_W) = (1,1)$. Por último, se sabe que $f(S_W, d) = F(S_W, d) = (1,1)$ y utilizando el axioma de invarianza de escala, se determina que $f(\mathrm{S}, \mathrm{d}) = F(S, \mathrm{d}) = x$.

7. LA SOLUCIÓN DE KALAI-SMORODINSKY

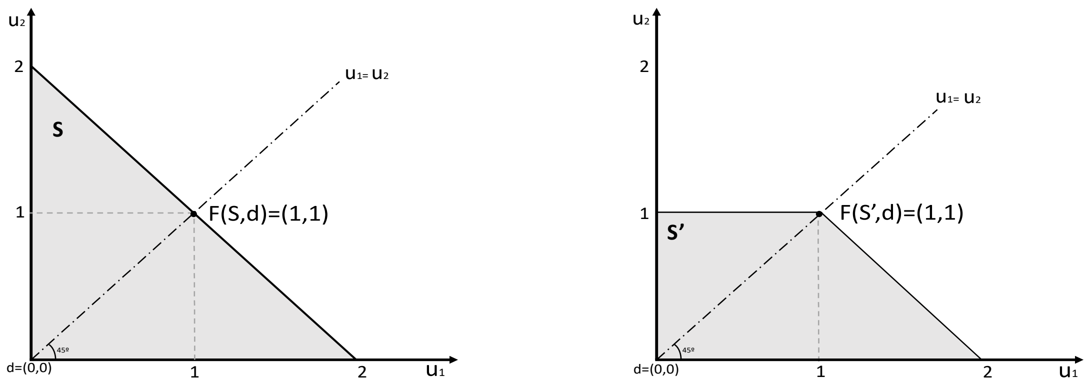
Posteriormente a John Nash, otros economistas presentaron otras posibles soluciones al problema de negociación de Nash, como es el caso de Ehud Kalai y Meir Smorodinsky (1975). En esta sección se verá la solución propuesta por estos últimos.

La crítica de estos autores a la solución de Nash es que bajo determinados contextos hace que un juego de negociación asimétrica de lugar a una solución muy simétrica. Lo anterior se observa mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. *Considere los dos juegos de negociación siguientes:* $(S, d), (S', d) \in \mathcal{B}$, *donde* $S = Co$[9]$\{(0,0), (2,0), (0,2)\}$, $S' = Co\{(0,0), (2,0), (0,1)\}$ *y* $d = (0,0)$.

El juego de negociación (S, d) es simétrico, debido a que los jugadores son idénticos en todos los aspectos (punto de desacuerdo, utilidad esperada…). En este juego, la única solución simétrica debe estar en la recta de 45º y al mismo tiempo, también, en la frontera del conjunto de las combinaciones de utilidades factibles. Teniendo en cuenta esas dos premisas, la solución de Nash es $F(S, d) = (1,1)$. En cuanto al juego de negociación (S', d), se observa que es un juego asimétrico. Teniendo en cuenta el axioma de independencia de alternativas irrelevantes, la solución de Nash, también, debe seguir siendo (1,1), por tanto, $F(S', d)$= *(1,1).*

Figura 10: Ejemplo 1



[9] Por Co se denota la cápsula convexa de un determinado conjunto.

Ante esto, autores como Kalai y Smorodinsky, en su trabajo *Otras Soluciones al Problema de Negociación de Nash* cuestionan los resultados paradójicos que se dan en la solución de Nash cuando, por ejemplo, el conjunto de todas las combinaciones factibles se expande sesgadamente hacia un jugador. De hecho, estos autores proponen eliminar el axioma de independencia de alternativas irrelevantes por un axioma que permita aumentos de utilidad para aquel jugador que se le haya expandido el conjunto de todas las combinaciones factibles. Esta idea da lugar al axioma de monotonía individual. Este nuevo axioma exige que las ganancias de utilidad sean proporcionales a las utilidades máximas que ambos jugadores pueden alcanzar.

Antes de definir la solución de Kalai-Smorodinsky, recordemos el concepto del *punto ideal de los agentes*, $a_i(S,d)$:

Dado $(S,d) \in \mathcal{B}$, el punto ideal del individuo i con $i = 1{,}2$ se define:

$$a_i(S,d) = \max\{\mathrm{x}_i \in \mathrm{R} | x \in \mathrm{S},\ \mathrm{x}_j \geq \mathrm{d}_j, \forall\ \mathrm{j} \neq \mathrm{i}\}$$

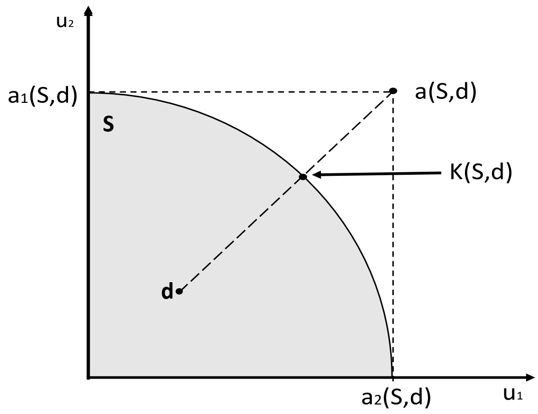
Definición 9. *La solución de Kalai-Smorodinsky* $K: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^2$, *que se denota por* $K(S,d)$, *se determina por ser el punto máximo de* S *que se encuentra en el segmento que une* d y $a(S,d)$. *Ese segmento lo denotaremos como* $\overline{d\ a(S,d)}$ *y pertenece a la recta:*

$$\frac{x_1 - d_1}{a_1(S,d) - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{a_2(S,d) - d_2}$$

Nótese que, $d_1 \leq x_1 \leq a_1(S,d)$ *y* $d_2 \leq x_2 \leq a_2(S,d)$

Por tanto, la solución de Kalai-Smorodinsky debe estar en la frontera de S y a su vez, ser proporcional al perfil de utilidad máximo que cada agente puede optar por separado en S y depende de d. La figura 13 muestra gráficamente la solución de Kalai-Smorodinsky para el problema de negociación (S,d):

Figura 11: Solución K-S



Una vez definida la solución de Kalai-Smorodinsky, se ilustra mediante un ejemplo cómo no satisface el axioma de independencia de alternativas irrelevantes:

Ejemplo 3. *Considere dos juegos de negociación* $(S, d), (S', d) \in \mathcal{B}$ donde $S = Co\{(0,0), (2,0), (0,2)\}$, $S' = Co\{(0,0), (2,0), (0,1), (1,1)\}$ y $d = 0{,}0$. En estos juegos tenemos que $S' \subset S$.

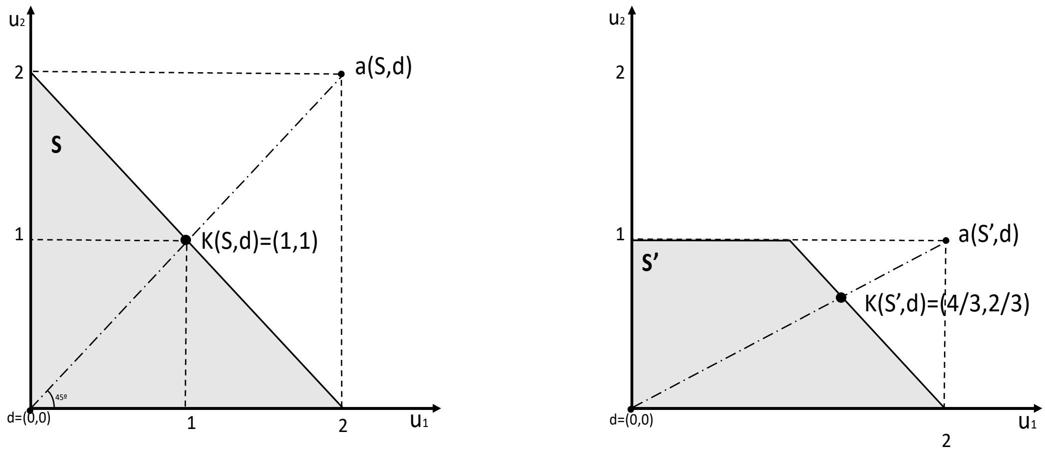
La solución de Kalai-Smorodinsky en el problema de negociación (S, d) es $K(S, d) = (1,1)$, ya que está en la frontera de S y a su vez en el segmento $\overline{d\ a(S, d)}$. Obsérvese que el juego de negociación (S, d) es simétrico, por lo que, también, coincide con la solución de Nash.

En cuanto al juego de negociación (S', d), se obtiene que la solución de Kalai-Smorodinsky es $K(S, d) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Para llegar a ese resultado, primero se ha obtenido la función del segmento $\overline{d\ a(S, d)}$, que resulta tener la siguiente forma: $u_1 = 2u_2$. Segundo, se ha definido la frontera de S' mediante la siguiente función:

$$u_2 = \begin{cases} 1 & si\ u_1 < 1 \\ -u_1 + 2 & si\ \ u_1 \geq 1 \end{cases}$$

Igualando las dos funciones, la intersección de ambas se da en el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, siendo, por tanto, $K(S, d) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Figura 12: Ejemplo 3



Observe que el axioma de independencia de alternativas irrelevantes exige que la solución en S', también sea (1,1). En consecuencia, la solución de Kalai-Smorodinsky no cumple con la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes en juegos de negociación asimétricas como esta. Nótese que el jugador 2 tiene un poder negociación menor al pasar del juego de negociación (S, d) a (S', d), que es reflejado en la solución de Kalai-Smorodinsky y no en el de Nash.

8. SOLUCIÓN DE NASH VS KALAI-SMORONDINSKY

En esta sección se pretende ilustrar, mediante ejemplos numéricos, las dos soluciones analizadas en este trabajo. En la primera parte de esta sección se ilustrarán gráficamente ambas soluciones y en la segunda se resolverá un juego de negociación de una compra-venta de un bien inmueble, donde los individuos tienen diferentes valoraciones.

Un juego asimétrico y dos soluciones

Considere dos jugadores, J1 y J2, que se enfrentan a un juego de negociación $(S, d) \in \mathcal{B}$, donde $S = Co\{(0,0), (2,0), (2,2), (0,4)\}$ y $d = (0,0)$.

Antes de obtener la solución de Nash, recordemos que la solución cumplirá la propiedad de Pareto optimalidad y simetría para el caso de un juego simétrico, si y solo si la solución está en la frontera de S y se encuentra en la recta de 45º, respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior, la solución de Nash es $F(S, d) = (2,2)$.

En cuanto a la solución de Kalai-Smorondinsky, corresponde a la intersección de la frontera de S con en el segmento $\overline{d\ a(S, d)}$. Con la información que tenemos el segmento nos proporciona la siguiente igualdad: $2u_2 = u_1$ y la frontera de S tiene la siguiente forma:

$$u_2 = \begin{cases} 2 & si\ u_1 < 2 \\ -u_1 + 4 & si\ \ u_1 \geq 2 \end{cases}$$

El punto resultante de la intersección de ambas funciones es la solución de Kalai-Smorondinsky, que se determina resolviendo el siguiente problema:

$$2u_2 = u_1 \qquad (2)$$

$$u_2 = \begin{cases} 2 & si\ u_1 < 2 \\ -u_1 + 4 & si\ \ u_1 \geq 2 \end{cases} \qquad (3)$$

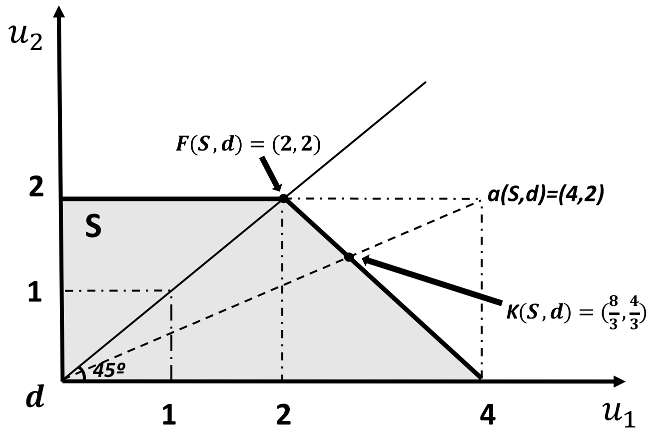
Resolviendo;

$$\frac{u_1}{2} = -u_1 + 4$$

$$3u_1 = 8$$

Por tanto, $u_1 = \frac{8}{3}$ y sustituyendo en la función (3) se obtiene $u_2 = \frac{4}{3}$. En definitiva, la solución de Kalai-Smorondinsky para el juego de negociación (S, d), es $K(S, d) = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$.

Figura 13: Juego asimétrico



La compra-venta de un bien con diferentes valoraciones[10]

Supongamos que hay dos jugadores, un comprador y un vendedor. El vendedor tiene a la venta una casa, que valora en k euros, mientras que el comprador lo hace en z euros. Sea la valoración del comprador mayor que la del vendedor, $z > k$.

Existirá una negociación por parte de los jugadores para determinar el precio de compra-venta, donde p será un valor comprendido entre k y z. Nótese que con cualquier precio que esté recogido entre k y z, ambos jugadores podrán beneficiarse de la transacción, puesto que el vendedor vendería la casa a un precio superior a su precio de reserva y el comprador a un valor inferior al suyo. En el caso de no llegar a un acuerdo, ya que $p > z$ o $p < k$, ambos jugadores no obtendrían ninguna ganancia, siendo su punto de desacuerdo igual a 0. Por tanto, estamos frente a un problema de negociación con dos jugadores y un inmueble con dos valoraciones distintas y un conjunto de acuerdos posibles.

Para poder modelar este problema de negociación como un juego de negociación, necesitamos definir una función de utilidad para cada jugador. Por tanto, supongamos que la función de utilidad del jugador 1 y del 2 son $u_V(g_V) = g_V$ y $u_C(g_C) = \sqrt{g_C}$,

[10] Adaptación del ejemplo expuesto en el trabajo fin de grado titulado "Un clásico en teoría de juegos: El problema de negociación de John Nash" escrito por Julen Padrones Coca. Directora: Norma Olaizola Ortega.

respectivamente. Considere que g_V es la ganancia que obtiene el comprador por la venta de la casa, siempre que el precio sea mayor o igual que su propia valoración, $p-k$. De la misma manera, g_C es la ganancia que obtiene el comprador por la compra de la casa, siempre que pague una cantidad menor que su precio de reserva, $z-p$. En caso de no llegar a un acuerdo $(d=0)$ la utilidad correspondiente para cada jugador será igual a 0. En cuanto al conjunto S, estará formado por todas las combinaciones de utilidad (u_V , u_C) tales que: $0\leq u_V \leq p-k$ y $0 \leq u_C \leq \sqrt{z-p}$ para todo $z \geq p \geq k$. Concretamente, la frontera de S tiene la siguiente forma:

$$g_V + g_C = z - k$$

Convirtiendo las ganancias de cada jugador en utilidades, se obtiene:

$$u_V + (u_C)^2 = z - k$$

Se resolverá este problema de negociación mediante las dos soluciones analizadas en este trabajo: la solución de Nash y la de Kalai-Smorondinsky.

Empecemos a hallar la solución de Nash. La función de utilidad del vendedor y del comprador son $u_V = p - k$ y $u_C = \sqrt{z-p}$, respectivamente. Recuerde que, en el caso de no llegar a un acuerdo, el punto de desacuerdo será 0. Para encontrar la solución de Nash, se maximizará la ganancia de utilidad $(u_V - d_V)(u_C - d_C)$ tal que, $(p-k)(\sqrt{z-p})$ respecto del precio (el cual tienen que acordar los individuos):

$$Max_p\, \pi = (u_V - d_V)(u_C - d_C) = (p-k)\left(\sqrt{z-p}\right)$$
$$\text{s.a } z \leq p \leq k$$

La condición de primer orden;

$$\frac{d\pi}{dp} \rightarrow \left(\sqrt{z-p}\right) + \frac{(k-p)}{2\sqrt{(z-p)}} = 0$$

$$Es\ decir, \quad 2z - 3p + k = 0$$

$$p = \frac{2z + k}{3}$$

La condición de segundo orden;

$$\frac{d^2\pi}{dp^2} = -3 < 0$$

La solución de Nash implica que el precio de compra-venta es $p = \frac{2k+z}{3}$. Nótese que el precio resultante depende de las valoraciones del vendedor (k) y del comprador (z), siendo creciente en ambas. Mediante esta solución, el vendedor obtendrá una utilidad igual a $\frac{2(z-k)}{3}$ y el comprador igual a $\sqrt{\frac{z-k}{3}}$. En definitiva, la solución correspondiente a Nash es $F(S, d) = (u_C, u_V) = (\sqrt{\frac{z-k}{3}}, \frac{2(z-k)}{3})$.

Una vez obtenida la solución de Nash, se procede a encontrar la solución de Kalai-Smorondinsky.

La utilidad de la máxima ganancia del vendedor y del comprador son $a_V(S, d) = z - k$ y $a_C(S, d) = \sqrt{z - k}$, respectivamente. La frontera de S calculada previamente: $u_V + (u_C)^2 = z - k$.

Se empieza calculado el segmento $\overline{d\ a(S, d)}$. En este caso se obtiene que el segmento proporciona la siguiente igualdad: $u_V = \sqrt{z - k}\ u_C$. Una vez obtenido el segmento, se calculará el punto resultante de la intercesión del segmento y la frontera de todas las combinaciones factibles. Se determina resolviendo el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$u_V = \sqrt{z - k}\ u_C$$

$$u_V + (u_C)^2 = z - k$$

La solución es tal que $u_C = \frac{\sqrt{5(z-k)}-\sqrt{z-k}}{2}$, y por tanto $p = \frac{4z-(z-k)(6-2\sqrt{5})}{4}$ y $u_V = \frac{(z-k)(\sqrt{5}-1)}{2}$. Es decir, la solución de Kalai-Smorondinsky para este problema de negociación es $K(S,d) = (u_C, u_V) = (\frac{\sqrt{5(z-k)}-\sqrt{z-k}}{2}, \frac{(z-k)(\sqrt{5}-1)}{2})$.

Después de haber obtenido las dos soluciones clásicas, se pasará a compararlos. Para la comparación se usará la utilidad del comprador obtenido en las dos soluciones:

$$\sqrt{\frac{z-k}{3}} \gtreqless \frac{\sqrt{5(z-k)}-\sqrt{z-k}}{2}$$

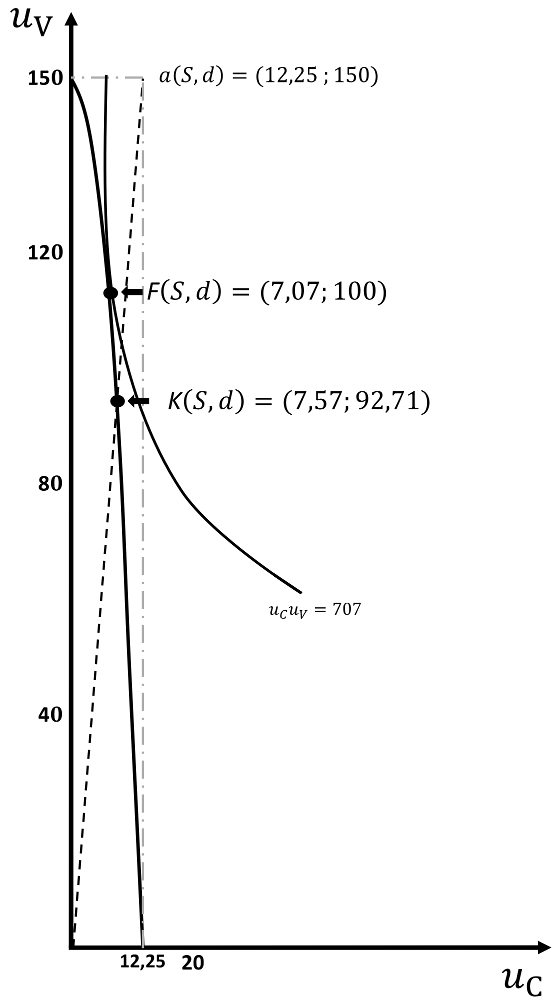
Resolviendo;

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right) < \sqrt{5}$$

Se obtiene que la solución de Nash reporta una utilidad menor al comprador comparándolo con la solución de Kalai-Smorondinsky. Lo opuesto ocurrirá para el caso del vendedor.

Supongamos ahora que $z = 400$ y $k = 250$ miles de euros, de tal manera que $z > k$. Sustituyendo en los resultados anteriormente obtenidos, con estos datos en concreto se obtiene, por un lado, que $F(S,d) = (7{,}07; 100)$ con $p = 350$ miles de euros y, por otro lado, $K(S,d) = (7{,}57; 92{,}71)$ con $p = 342{,}71$ miles de euros. Comparándolos, el precio de compra-venta en la solución de Nash es mayor, favoreciendo al vendedor, ya que este último obtiene mayor utilidad. Mientras que al comprador le reporta una mayor utilidad la solución de Kalai-Smorondinsky.

Figura 14: La compra-venta de un bien con distintas valoraciones



Como se puede observarse, las dos soluciones proporcionan distintos repartos, donde la solución de Nash trata de manera más igualitaria al jugador más averso que la solución de Kalai-Smorondinsky.

9. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha analizado dos propuestas para solucionar un problema de negociación: la solución de Nash y la de Kalai-Smorondinsky. Se han descrito los axiomas que caracterizan ambas soluciones. En cuanto a la solución de Nash, se ha explicado la caracterización incluida la prueba. Sabiendo que esta solución tiene un axioma conflictivo, el axioma de independencia de alternativas irrelevantes, y sustituyéndolo por el axioma de monotonía individual, a dado lugar a definir otra posible solución, el de Kalai-Smorondinsky. En la última sección, se ha comparado ambas soluciones mediante un ejemplo económico.

BIBLIOGRAFÍA

Kalai, E. & Smorodinsky, M. (1975). Other solutions to Nash's bargaining problem. *Econometrica*, Vol. 43, No. 3, pp. 513–518.

Nash, J. (1950). The Bargaining Problem. *Econometrica*, Vol. 18, No. 2, pp. 155-162.

Massó, J. (2017). Les aportacions de John F. a l'economia: equilibri I negociació, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemátiques*, Vol. 32, No. 1, pp. 73-94.

Massó, J. (2017). Game Theory: Bargaining Theory [Diapositiva de Power Point]. *Repositorio Material de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB).*

Osborne, M.J. (2004). An introduction to Game Theory.

OTRAS FUENTES

Consulta de biografía de John Nash en eumend.net:

https://www.eumed.net/cursecon/economistas/nashvida.htm

Consulta de biografía de John Nash en biografíasyvidas.com:

https://www.biografiasyvidas.com/biografia/n/nash_john_f.htm

Consulta de biografía de Ehud Kalai en Wikipedia.org:

https://es.wikipedia.org/wiki/Ehud_Kalai

Consulta de biografía de Meir Smorodinsky en math.tau.ac.il:

http://www.math.tau.ac.il/~dms/STAT-OR/meirsmo.htm