



ZIENTZIA  
ETA TEKNOLOGIA  
FAKULTATEA  
FACULTAD  
DE CIENCIA  
Y TECNOLOGÍA

**50** URTE  
AÑOS  
1968 - 2018

**Biba Zientzia!**  
Ciencia Viva

---

## Zeruko mekanika

---

Gradu Amaierako Lana  
Matematikako Gradua

Ainitze Lerchundi Arteche

Judith Rivas Ulloa  
Irakasleak zuzendutako lana

Leioa, 2022ko ekainaren 21a



# Gaien Aurkibidea

<b>Sarrera</b>	<b>v</b>
<b>1 Emaitza erabilgarriak</b>	<b>1</b>
1.1 Notazioa . . . . .	1
1.2 Ekuazio diferentzialak . . . . .	2
1.3 Konikak . . . . .	4
1.4 Planoko kurbak koordenatu polarretan . . . . .	9
<b>2 Keplerren legeak</b>	<b>13</b>
2.1 Grabitazio unibertsalaren legea . . . . .	13
2.2 Momentu angeluarra . . . . .	15
2.3 Keplerren bigarren legea . . . . .	16
2.4 Momentu angeluar nulua eta talkak . . . . .	17
2.5 Potentziala eta energiaren kontserbazioa . . . . .	19
2.6 Keplerren lehenengo legea . . . . .	22
2.7 Soluzio globalak eta Keplerren hirugarren legea . . . . .	23
2.8 Keplerren ekuazioa . . . . .	27
<b>3 <math>n</math> gorputzen problema</b>	<b>31</b>
3.1 Bi gorputzen problema . . . . .	33
3.2 $n$ gorputzen problema . . . . .	34
3.2.1 Inertzia-momentua eta momentu angeluarra . . . . .	37
3.2.2 Talka totala . . . . .	39
3.2.3 Lagrangeren soluzio zirkularrak . . . . .	41
<b>A Ariketa ebatziak</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>



# Sarrera

Antzinarotik, zientzialariek interes handia izan dute zeruko gorputzetan. Erdi Aroan zehar, Aristotelesek aurkeztu zuen ideia onartzen zen. Honen arabera, Lurra unibertsoaren zentroan dago, eta gainerako gorputzek, hala nola Eguzkiak, Ilargiak eta planetek, Lurraren inguruan biratzen dute. Ptolomeok ere ikuspegi geozentriko hau onartzen zuen eta teoria honetan sakondu zuen. Aldiz, XVI. mendean, Kopernikok unibertsoaren zentroan Eguzkia dagoela, eta planetek Eguzkiaren inguruan biratzen dutela azaldu zuen. Honi heliozentrismoa deritzo eta garai hartako teoria garrantzitsuenetakoa bat kontsideratzen da.

XVII. mendean, Tycho Brahe astronomoaren ikerketez baliatuz, Kepler, Marte planetaren orbita aztertzen zebilela, orbitak zirkunferentziak izan beharrean, elipseak direla ohartu zen. Hemendik sortu ziren Keplerren hiru legeak. Lehenengo legearen arabera, planetak Eguzkiaren inguruan biratzen dira orbita eliptikoetan, Eguzkia elipsearen fokuetako batean dagoelarik; bigarren legearen arabera, planeta eta Eguzkia lotzen dituen zuzenkiak azalera berdinak estaltzen ditu denbora-tarte berdinetan; eta, hirugarren legearen arabera, planeten mugimendua periodikoa da, eta gainera, periodo horren balioa ematen digu.

Lurra eta Eguzkiaren mugimenduak aztertu ondoren, Isaac Newton Ilargiaren mugimenduak aztertzen hasi zen, eta horrela sortu zen hiru gorputzeta-ko problema. Hau orokortuz, grabitazio-legearen arabera mugitzen diren  $n$  gorputzen mugimenduak aztertzen hasi ziren. Honi  $n$  gorputzen problema deritzo.

Lan honetan zeruko mekanikaren sarrera bat egiten da, ikuspegi matematikotik, bereziki [3] liburua jarraituz. Lanaren helburua, Keplerren hiru legeak frogatzea eta  $n$  gorputzen problema aztertzea da. Ikusiko dugun bezala, planeten posizioek ekuazio diferentzial bat betetzen dute, eta hortaz, ekuazio diferentzialen teoriari baliatuko gara. Gainera, Keplerren lehenengo legearen arabera planeten orbitak elipseak direnez, geometria ere erabiliko dugu.

Lehenengo kapituluan, lanean zehar erabilitako notazioa azaldu eta hurrengo

kapituluetan erabiliko ditugun emaitza batzuk aurkeztuko ditugu. Batetik, ekuazio diferentzialen inguruko emaitzak izango ditugu, bestetik konikei buruzkoak, eta azkenik, kurbei buruzkoak.

Bigarren kapituluan, Grabitazio unibertsalaren legea hartuko dugu abiapuntutzat, eta Eguzki-sistemako planeta batek betetzen duen ekuazio diferentzialera iritsiko gara. Horretarako, planetak Eguzkiarengan sortutako indarra mespretxagarria dela suposatuko dugu, azken honen masa askoz handiagoa izateagatik. Kapitulan zehar, ekuazio horren propietateak aztertuko ditugu eta Keplerren hiru legeak ondorioztatuko ditugu. Gainera, Keplerren ekuazioa aurkeztuko dugu eta haren soluzioak bilatuko ditugu.

Hirugarren kapituluan, bigarren kapituluko murriztapena alde batera utzi, eta grabitazio-legearen arabera mugitzen diren  $n$  gorputzen problema aztertuko dugu. Problema hau oso konplexua da eta gaur egun oraindik ez dago ebatzita 3 planeta edo gehiago ditugun kasurako. Guk, 2 gorputzen problema aztertu eta  $n$  gorputzen problemaren hainbat ezaugarri ikusiko ditugu.

Honetaz gain, teoria hau lantzeko, eranskinean ariketa batzuk ebatziko ditugu.

# 1. Kapituluia

## Emaitza erabilgarriak

Lehenengo kapituluan, lanean zehar erabiliko dugun notazioa azalduko dugu eta hurrengo kapituluetan erabilgarriak egingo zaizkigun emaitza batzuk ikusiko ditugu.

### 1.1 Notazioa

Planeten orbitak aztertuko ditugunez,  $\mathbb{R}^3$  espazioan lan egingo dugu. Notazioa arintzeko, bektore bat dugunean,  $\vec{x}$  idatzi beharrean  $x$  idatziko dugu, hau bektore bezala ulertuz. Ikus ditzagun biderketa eskalarraren, normaren eta biderketa bektorialaren definizioak, eta hauek betetzen dituzten propietate batzuk.

**1.1.1 definizioa.** *Izan bitez  $d \in \mathbb{N}$  eta  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Orduan,  $x$  eta  $y$ -ren arteko biderketa eskalarra  $\mathbb{R}^d$ -n honela definitzen da:*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i.$$

**1.1.2 definizioa.** *Izan bedi  $x \in \mathbb{R}^d$ . Orduan,  $x$ -ren norma hau da:*

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**1.1.3 definizioa.** *Izan bitez  $x, y \in \mathbb{R}^3$ . Existitzen da  $z \in \mathbb{R}^3$  bakarria non*

$$\det(x, y, t) = \langle z, t \rangle$$

*den  $t \in \mathbb{R}^3$  guztietarako.  $z$ -ri  $x$  eta  $y$ -ren arteko biderketa bektorial deritzo eta  $z = x \wedge y$  moduan adierazi ohi da.*

**1.1.1 lema.** *Izan bitez  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ . Orduan, propietate hauek betetzen dira:*

(i)  $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|,$

- (ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,
- (iii)  $x \wedge y = -y \wedge x$ ,
- (iv)  $(x \wedge y) \wedge z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$ ,
- (v)  $\langle x \wedge y, z \rangle = \langle x, y \wedge z \rangle$ .

Lanean zehar hainbat aldiz erabiliko dugun deribatu bat kalkulatu dugu.

**1.1.2 lema.** *Izan bedi  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Orduan,*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|x|} \right) = \frac{x'}{|x|} - \frac{\langle x', x \rangle x}{|x|^3} \quad (1.1)$$

da.

*Froga.* Ohartu  $|x|$ -k  $x$ -ren modulua adierazten duela. 1.1.1 lemako (ii) propietatea kontuan hartuz,

$$\frac{d}{dt} (|x|) = \frac{d}{dt} (\sqrt{\langle x, x \rangle}) = \frac{\langle x', x \rangle + \langle x, x' \rangle}{2\sqrt{\langle x, x \rangle}} = \frac{\langle x', x \rangle}{|x|} \quad (1.2)$$

da. Hemendik erraz iristen gara (1.1) berdintzara.  $\square$

Aurrerago ikusiko dugu, matrize batzuen bidez, aztertuko dugun ekuazioaren  $\mathbb{R}^3$  espazioko soluzioak  $\mathbb{R}^2$  planora eraman ditzakegula.  $d \times d$  tamainako matrize errealak  $M_d(\mathbb{R})$  bidez adieraziko ditugu  $d \in \mathbb{N}$  guztietarako.

**1.1.4 definizioa.** Matrize ortogonal bat  $A$  matrize erreal bat da, zeinaren iraulia alderantzizko matrizearen berdina den, hau da:

$$A \in M_d(\mathbb{R}), \quad AA^T = A^T A = I_d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

$d \times d$  tamainako matrize ortogonalen multzoa  $O(d)$  moduan adierazten da.

$\mathbb{R}^d$ -ko isometria bat  $A \in O(d)$  matrize ortogonal baten bidez adierazten da.

## 1.2 Ekuazio diferentzialak

Sarreran esan dugun bezala, ekuazio diferentzial batekin arituko gara lanean. Hortaz, lehenik eta behin, ekuazio diferentzialen soluzioen inguruko emaitza batzuk ikusiko ditugu. Horretarako, [1] liburua hartuko dugu erreferentziatzat. Lehen teorema honetan, hasierako balioetako problema baten soluzioaren existentzia eta bakartasuna ziurtatzen da tarte jakin batean, eta bigarren teoreman, existentzia soilik.



**1.2.1 teorema.** *Izan bitez  $A : [a, b] \rightarrow M_d(\mathbb{R})$  funtzio matrizial jarraitua,  $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  funtzio bektorial jarraitua,  $t_0 \in [a, b]$  eta  $X_0 \in \mathbb{R}^d$ . Orduan,*

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + C(t), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

*Cauchyren problemak soluzio bat eta bakarra dauka,  $[a, b]$  tartean definituta dagoena.*

**1.2.2 teorema** (Cauchyren problemarako existentziaren teorema lokala). *Izan bitez  $D \subset \mathbb{R}^d$  ireki bat,  $F$  eremu bektorial jarraitu bat eta  $X_0 \in D$ . Izan bedi  $a > 0$  non*

$$\bar{B} = \{X \in \mathbb{R}^d : \|X - X_0\| \leq a\} \subset D$$

*den. Defini dezagun  $K = \max_{X \in \bar{B}} \|F(X)\| > 0$ . Orduan,*

$$\begin{cases} X' = F(X), \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

*problemaren edozein soluzio  $[t_0 - a/K, t_0 + a/K]$  tartean definituta dago.*

*Froga.* Izan bedi  $X = X(t)$  soluzio bat,  $(\alpha, \omega)$  tarte maximalean definituta dagoena. Absurdura eramanez, demagun  $w \leq t_0 + \frac{a}{K}$  dela. Orduan,  $X$  soluzioa  $\bar{B}$ -tik atera behar da  $t = w \leq t_0 + \frac{a}{K}$  baino lehenago (izan ere, bestela tartea luzagarria izango litzateke). Hortaz,

$$t_1 = \min\{t \in (t_0, \omega) : \|X(t) - X_0\| = a\}$$

definituz,  $t_1 < t_0 + \frac{a}{K}$  da. Bestalde,

$$X(t_1) = X_0 + \int_{t_0}^{t_1} F(X(s)) ds$$

da. Ohartu  $X(t) \in \bar{B}$  dagoela  $t \in [t_0, t_1]$  guztietarako, eta beraz,

$$a = \|X(t_1) - X_0\| \leq \int_{t_0}^{t_1} \|F(X(s))\| ds \leq K(t_1 - t_0)$$

desberdintzatik  $t_1 \geq t_0 + \frac{a}{K}$  lortzen dugu. Baina, hau kontraesana da. Antzeko eran frogatzen da  $\alpha < t_0 - \frac{a}{K}$  dela.  $\square$

Orain, ikusi nahi dugu zein den Cauchyren problemaren soluzio bat defini daitekeen tarterik handiena.

**1.2.1 definizioa.** *Izan bedi  $I$  tartean definituta dagoen Cauchyren problemaren soluzio bat.  $I$  tartea maximala dela esaten da, tartea luzagarria ez bada. Hau da, Cauchyren problemaren beste edozein soluzio  $J$  tartean definituta bada,  $J \subset I$  betetzen bada.*

Jarraian dugun proposizioan, zuzen erreal guztian definituta ez dauden ekuazio diferentzial baten soluzioek izango duten jarrera aztertzen da.

**1.2.3 proposizioa.** *Izan bedi  $X = X(t)$   $(\alpha, \omega)$  tarte maximal batean definituta dagoen  $X' = F(X)$  ekuazio diferentzialaren soluzio bat,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  jarraitua eta  $D \subset \mathbb{R}^d$  irekia izanik.  $\omega < +\infty$  bada, orduan, bi aukera hauekiko bat beteko da:*

- (i)  $\lim_{t \rightarrow \omega} |X(t)| = +\infty$  da.
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \omega$  eta  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(X(t_n), \partial D) = 0$  betetzen dituen  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  segida existitzen da.

Jarraian dugun proposizioak ekuazio diferentzial baten soluzioen periodikotasunari buruzko informazioa ematen digunez, Keplerren hirugarren legea frogatzeko erabiliko dugu, izan ere, lehen esan bezala, Keplerren hirugarren legeak planeten periodoaren adierazpena ematen digu.

**1.2.4 proposizioa.** *Izan bedi  $F : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  lokalki lipschitziarra. Existitzen bada  $p \in \mathbb{R}$  non  $X : [0, p] \rightarrow D$   $X' = F(X)$  ekuazio diferentzialaren soluzio bat den,  $X(0) = X(p)$  izanik, orduan, bere definizio-eremua  $\mathbb{R}$  da eta bere luzapena  $p$  periodikoa da.*

Azkenik, lema bat enuntziatuko dugu. Ez da ekuazio diferentzialen soluzioen ingurukoa, baina 2. kapituluan ekuazio diferentzialekin batera ikusiko dugunez, hemen enuntziatuko dugu.

**1.2.5 lema.** *Izan bedi  $r : (t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$  klasekoa eta demagun existitzen dela  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) \in \mathbb{R}$ . Orduan, existitzen da  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  segida non  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$  eta  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r'(t_n) = 0$  diren.*

## 1.3 Konikak

Keplerren lehenengo legeagatik, badakigu planeten orbitak foku bat jatorrian duten konikak direla. Horregatik, atal honetan hauek deskribatuko ditugu.

**1.3.1 definizioa.** *Elipsea bi puntu finkoetarako distantzien batura konstantea duten planoko puntu guztien leku geometrikoa da. Bi puntu finkoei foku deritze.*

**1.3.2 definizioa.** Hiperbola bi fokuetarainoko distantzien kendura konstantea duten planoko puntu guztien leku geometrikoa da.

**1.3.3 definizioa.** Parabola fokutik eta zuzentzailea deritzon zuzen finko batetik distantzia berera dauden puntuen leku geometrikoa da.

Orain, definitu ditugun hiru konika hauek ekuazio bidez nola adierazten diren ikusiko dugu.

**1.3.1 proposizioa.** Izan bitez  $e \in \mathbb{R}^2$ ,  $k > 0$  eta

$$|x| + \langle e, x \rangle = k \quad (1.3)$$

ekuazioa. Orduan,

- (i) (1.3) foku bat jatorrian duen elipse baten ekuazioa da baldin eta soilik baldin  $|e| < 1$  bada,
- (ii) (1.3) foku bat jatorrian duen hiperbola baten adarraren (jatorritik gertuen dagoena) ekuazioa da baldin eta soilik baldin  $|e| > 1$  bada,
- (iii) (1.3) fokua jatorrian duen parabola baten ekuazioa da baldin eta soilik baldin  $|e| = 1$  bada.

*Froga.* Elipsearen kasua bakarrik frogatuko dugu. Hiperbolaren eta parabolaren kasuak eranskinean frogatuko ditugu.

Izan bitez  $\mathcal{E}$  foku bat jatorrian duen elipse bat, eta  $A$  elipsearen beste fokua. Demagun  $x \in \mathcal{E}$  dagoela. Elipsearen definizioagatik, existitzen da  $c > 0$  konstante bat non  $|x| + |A - x| = c$  den. Beraz,  $|A - x|^2 = (c - |x|)^2$  da, eta hau garatuz,  $|A|^2 + |x|^2 - 2 \langle A, x \rangle = c^2 + |x|^2 - 2c|x|$  lortzen dugu. Hemendik,

$$|x| + \langle -\frac{1}{c}A, x \rangle = \frac{c^2 - |A|^2}{2c} \quad (1.4)$$

ekuaziora iristen gara. Defini ditzagun  $e = -\frac{1}{c}A$  eta  $k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$ . Desberdintza triangeluarra erabiltzen badugu, kontuan hartuta  $A - x$  eta  $x$  bektoreak ez daudela lerrokatuta edo aurkako noranzkoa dutela,

$$|A| = |A - x + x| \leq |A - x| + |x| = c$$

betetzen da, eta hortaz,  $|e| < 1$  eta  $k > 0$  dira. Orduan, (1.3)  $\mathcal{E}$  elipsearen ekuazioa da,  $|e| < 1$  izanik.

Beste inplikazioa frogatzeko,  $|e| < 1$  izanik, (1.3) ekuazioa betetzen dela jakinda,  $x$  foku bat jatorrian duen elipse batean dagoela ikusi behar dugu, hau da, existitzen direla  $A$  foku bat eta  $c$  konstante bat non  $|x| + |A - x| = c$

betetzen den. Izan bitez  $c = \frac{2k}{1-|e|^2} > 0$  eta  $A = -ce$ . Hortaz,  $e = -\frac{A}{c}$  eta  $k = \frac{c(1-|e|^2)}{2}$  dira. (1.3) ekuazioan ordezkaturaz,

$$|x| + < -\frac{A}{c}, x > = \frac{c(1-|e|^2)}{2} = \frac{c^2(1-|e|^2)}{2c} = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$$

lortzen dugu. Beraz,  $2c|x| - 2 < A, x > = c^2 - |A|^2$  da, edo baliokidea dena,  $|A|^2 - 2 < A, x > = c^2 - 2c|x|$ . Bi aldeetan  $|x|^2$  batuz,  $|A - x|^2 = (c - |x|)^2$  ekuazioa iristen gara. Demagun  $|A - x| = -(c - |x|)$  dela.  $|e| < 1$  hipotesitik,  $|A| < c$  dela ondorioztatzen dugu, eta hortaz,

$$|x| - c < |x| - |A| \leq |x - A| = |x| - c$$

kontraesanera iritsiko ginateke. Beraz,  $|A - x| = c - |x|$  izan behar da, hots,  $|x| + |A - x| = c$ .  $\square$

**1.3.4 definizioa.** (1.3) ekuazioko  $e$  bektoreari eszentrikotasun ardatza deritza eta bere moduluari,  $\epsilon = |e|$ , eszentrikotasuna.

**Oharra.** Elipsearen kasuan eszentrikotasun ardatzak 0-tik  $A$ -ra doan bektorearen norabide berdina eta aurkako noranzkoa ditu.

**1.3.2 proposizioa.** Izan bitez  $e \in \mathbb{R}^2$ ,  $k > 0$  eta

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| + < e, x > = k\}$$

foku bat jatorrian duen konika bat. Orduan,  $|x| \geq \frac{k}{1+|e|}$  da  $x \in \mathcal{C}$  guztietarako.

*Froga.* Izan bedi  $x \in \mathcal{C}$ . 1.1.1 lemako (i) propietateagatik,

$$k = |x| + < e, x > \leq |x| + |e||x| = |x|(1 + |e|)$$

dugu, eta honekin, nahi genuen desberdintzara heltzen gara:

$$|x| \geq \frac{k}{1 + |e|}. \quad \square$$

Hemendik ondorioztatzen dugu  $\mathcal{C}$ -ko puntuetatik 0 fokura dagoen distantzia hertsiki positiboa dela. Jarraian, foku bat jatorrian duen elipse baten parametrizazio bat lortuko dugu.

**1.3.3 proposizioa.** Izan bedi (1.3) foku bat jatorrian duen konika baten ekuazioa,  $e \in \mathbb{R}^2$  eszentrikotasun ardatza eta  $k > 0$  izanik. Idatz dezagun  $e = \epsilon(\cos \omega, \sin \omega)$  non  $\epsilon = |e| \geq 0$  eta  $\omega \in \mathbb{R}$  diren. Orduan,

$x = r(\cos \theta, \sin \theta)$  ( $r \geq 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ) puntua konikan dago baldin eta soilik baldin  $1 + \epsilon \cos(\theta - \omega) > 0$  eta

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\theta - \omega)} \quad (1.5)$$

betetzen badira. Hortaz,

$$\gamma(\theta) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\theta - \omega)} (\cos \theta, \sin \theta) \quad (1.6)$$

foku bat jatorrian duen elipse baten parametrizazioa da  $\epsilon < 1$  bada.

*Froga.*  $e$  eta  $x$ -ren adierazpenak (1.3) ekuazioan ordezkaturaz,

$$k = r + r\epsilon \langle (\cos \theta, \sin \theta), (\cos \omega, \sin \omega) \rangle = r [1 + \epsilon \cos(\theta - \omega)]$$

dugu.  $k$  konstante positiboa denez, honako emaitzara iristen gara:  $x$  konikako puntu bat da baldin eta soilik baldin

$$1 + \epsilon \cos(\theta - \omega) > 0 \quad \text{eta} \quad r = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\theta - \omega)}$$

betetzen badira. □

Lanean zehar erabilgarria egingo zaigu foku bat jatorrian duen elipse baten ardatzerdi nagusiaren eta ardatzerdi txikiaren luzeraren adierazpena eszentrikotasunaren menpe izatea.

**1.3.4 proposizioa.** *Izan bitez  $k > 0$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  eta foku bat jatorrian duen elipse bat, (1.6) parametrizazioak deskribatzen duena. Orduan, ardatzerdi nagusia  $a = \frac{k}{1 - \epsilon^2}$  eta ardatzerdi txikia  $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$  dira.*

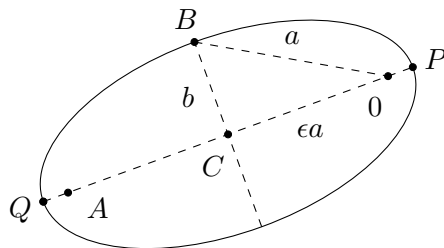
*Froga.* Izan bedi  $P$  puntua elipsearen periapsia, hau da, 0 fokutik gertuen dagoen elipseko puntua (ikusi 1.1. irudia).  $P$ -ri dagokion angelua  $\theta = \omega$  da. Hortaz, 0 fokutik  $P$ -ra dagoen distantzia honako hau da:

$$|P - 0| = \frac{k}{1 + \epsilon}.$$

Era berean, elipsearen apoapsiari, hau da, 0 fokutik urrunen dagoen elipseko puntuari  $Q$  deituz (ikusi 1.1. irudia), honi dagokion angelua  $\theta = \omega + \pi$  da, eta 0 fokutik  $Q$ -ra dagoen distantzia honako hau da:

$$|0 - Q| = \frac{k}{1 - \epsilon}.$$

Ondorioz, ardatzerdi nagusiaren luzerarentzat adierazpen hau dugu:



**1.1. Irudia.** Foku bat jatorrian duen elipsea da.

$$a = \frac{|P - Q|}{2} = \frac{|P - 0| + |0 - Q|}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{1 + \epsilon} + \frac{k}{1 - \epsilon} \right) = \frac{k}{1 - \epsilon^2}. \quad (1.7)$$

Bestalde,  $C$  zentrotik  $0$  fokura dagoen distantzia

$$|C - 0| = a - |P - 0| = \frac{k}{1 - \epsilon^2} - \frac{k}{1 + \epsilon} = \frac{\epsilon k}{1 - \epsilon^2} = \epsilon a \quad (1.8)$$

da. Elipseko puntu batetik bi fokuetarako distantzien batura konstantea dela kontuan hartuz, 1.1. irudiko  $B$  puntuarentzat ondoko hau dugu:

$$2|B - 0| = |B - 0| + |B - A| = |P - 0| + |P - A| = 2a.$$

Hortaz,  $|B - 0| = a$  da. Pitagorasen teorema aplika dezakegu honako hau lortzeko:

$$b = \sqrt{|B - 0|^2 - |C - 0|^2} = \sqrt{a^2 - \epsilon^2 a^2} = a\sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (1.9)$$

□

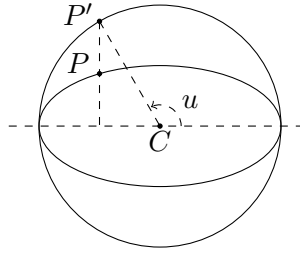
Jarraian, foku bat jatorrian duen elipse baten beste parametrizazio bat lortuko dugu. Aurrerago ikusiko dugun propietate bategatik, eszentrikotasun ardatzak  $e_1 = (1, 0)$  bektorearen norabidea eta norantza dituela suposa dezakegu. Izenda dezagun  $\mathcal{E}$  elipse hori eta bila dezagun bere parametrizazio bat. Marraztu dezagun elipsearen zentro bera duen,  $C = (-d, 0)$ , eta ardatzerdi nagusiaren luzerako erradioa,  $a$ , dituen zirkunferentzia. Elipseko  $P$  puntu bakoitzari 1.2. irudiko  $P'$  puntu bat egokitzen zaio.

**1.3.5 definizioa.** Izan bedi  $\mathcal{E}$  elipseko  $P$  puntu bat. Orduan, bere anomalia eszentrikoa eszentrikotasun ardatzetik  $C\vec{P}'$  bektorera doan  $u$  angelua da.

**1.3.5 proposizioa.** Izan bitez  $\mathcal{E}$  foku bat jatorrian duen eta  $e_1 = (1, 0)$  bektorearen norabidea eta norantza dituen eszentrikotasun ardatza duen elipsea,  $\epsilon$  bere eszentrikotasuna,  $a$  ardatzerdi nagusiaren luzera eta  $u$  anomalia eszentrikoa. Orduan,  $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  non

$$\Gamma(u) = a(\cos u - \epsilon, \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u) \quad (1.10)$$

den,  $\mathcal{E}$  elipsearen parametrizazio bat da.



**1.2. Irudia.** Foku bat jatorrian duen eta  $a$  ardatzerdi nagusia duen elipsea, eta  $a$  erradioko zirkunferentzia dira,  $C$  zentro bera dutenak.

*Froga.*  $\mathcal{E}$  elipsea  $(0, 0)$  zentrodun elipsea trasladatuko dugu, eta azken hau  $(0, 0)$  zentrodun eta  $a$  erradiodun  $\mathcal{C}$  zirkunferentzian transformatuko dugu. Hau da,  $\mathcal{E}$  elipseko  $(x, y)$  puntu bakoitzari  $L(x, y) = \left(x + d, \frac{a}{b}y\right)$  aplikatuko diogu, non  $b$  elipsearen ardatzerdi txikiaren luzera eta  $C = (-d, 0)$  elipsearen zentroa diren. Beraz,  $P \in \mathcal{E}$  puntuaren anomalia eszentrikoa  $L(P)$  aplikazioaren argumentua da. Hau jakinda, elipsea parametrizatu dezakegu  $u$  anomalia eszentrikoa erabiliz. Badakigu  $\mathcal{C}$  zirkunferentziaren parametrizazio bat  $(a \cos u, a \sin u)$  dela,  $u \in \mathbb{R}$  izanik. Hortaz,

$$\Gamma(u) = L^{-1}(a \cos u, a \sin u) = (a \cos u - d, b \sin u)$$

$\mathcal{E}$  elipsearen parametrizazio bat da. (1.8) eta (1.9) adierazpenetan lortu ditugun  $d$ -ren eta  $b$ -ren balioak ordezkatzuz, hau lortzen dugu:

$$\Gamma(u) = a(\cos u - \epsilon, \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u), \quad u \in \mathbb{R}. \quad \square$$

## 1.4 Planoko kurbak koordenatu polarretan

Lehen esan dugun bezala, lanean erabiliko dugun ekuazioaren soluzioak planora eramango ditugu, eta soluzio hauek konika batean egongo dira (planetak aztertu nahi ditugunez, gehien interesatzen zaizkigunak, elipseetan). Horregatik, erabilgarria egingo zaigu planoko kurbak koordenatu polarretan adieraztea. Proposizio honetan ikusiko dugu nolakoa den adierazpen hori.

**1.4.1 proposizioa.** *Izan bedi  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   $C^k$  klaseko kurba bat ( $k \geq 1$  batentzat),  $\alpha(t) \neq 0$  betetzen duena  $t \in I$  guztietarako. Orduan, existitzen dira  $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$   $C^k$  klaseko bi funtzio, non  $r(t) > 0$  den  $t \in I$  guztietarako, eta*

$$\alpha(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in I$$

*den.  $r$  eta  $\theta$  bakarrak dira ( $\theta$ -rentzat  $2\pi$ -ren multiploak izan ezik).*

*Froga.* Nabaria da  $r(t) = |\alpha(t)|$  dela eta bakarra dela.  $\alpha$   $C^k$  klasekoa denez eta ez denez anulatzen,  $r$   $C^k$  klasekoa da. Orokortasuna galdu gabe, suposa dezagun  $|\alpha(t)| = 1$  dela  $t \in I$  guztietarako.

Hasteko, suposa dezagun  $\theta$  existitzen dela eta ikus dezagun bakarra dela. Izenda dezagun  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ .  $\theta \in C^k$  emanda,  $\cos \theta = \alpha_1$  eta  $\sin \theta = \alpha_2$  izanik, honako hau dugu:

$$\alpha_1(t)\alpha_2'(t) - \alpha_1'(t)\alpha_2(t) = \theta'(t) \cos^2 \theta(t) + \theta'(t) \sin^2 \theta(t) = \theta'(t), \quad t \in I. \quad (1.11)$$

Finkatu ditzagun  $t_0 \in I$  eta  $\theta_0 = \theta(t_0) \in \mathbb{R}$  non  $\cos \theta_0 = \alpha_1(t_0)$  eta  $\sin \theta_0 = \alpha_2(t_0)$  diren. Barrowen erregela eta (1.11) berdintza erabiliz,  $\theta$ -ren adierazpen honetara iristen gara:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \theta'(s) ds = \theta_0 + \int_{t_0}^t (\alpha_1(s)\alpha_2'(s) - \alpha_1'(s)\alpha_2(s)) ds. \quad (1.12)$$

$\theta_0$  beharrean,  $\tilde{\theta}_0 = \theta_0 + 2n\pi$  har dezakegu  $n \in \mathbb{N}$  guztietarako, izan ere,  $\cos \theta_0 = \cos \tilde{\theta}_0 = \alpha_1(t_0)$  eta  $\sin \theta_0 = \sin \tilde{\theta}_0 = \alpha_2(t_0)$  dira. Beraz,  $\theta$ -ren adierazpena bakarra da,  $2\pi$ -ren multiploak izan ezik.

Existentzia frogatzeko, defini dezagun  $\theta = \theta(t)$  (1.12) formularen bidez (ohartu  $C^k$  klasekoa dela Kalkuluaren Oinarriko Teoremagatik). Hortaz,

$$(x(t), y(t)) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in I,$$

hasierako balioetako

$$\begin{cases} x'(t) = -\theta'(t)y(t), \\ y'(t) = \theta'(t)x(t), \\ x(t_0) = \alpha_1(t_0), \\ y(t_0) = \alpha_2(t_0) \end{cases} \quad (1.13)$$

problemaren soluzioa da. Bestalde,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$  denez,  $\alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' = 0$  da, eta  $\theta$ -ren definiziotik,  $-\alpha_2\alpha_1' + \alpha_1\alpha_2' = \theta'$  dugu. Beraz, honako ekuazio sistema dugu:

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' = 0, \\ -\alpha_2\alpha_1' + \alpha_1\alpha_2' = \theta'. \end{cases}$$

Ebatz dezagun sistema, ezezagunak  $\alpha_1'$  eta  $\alpha_2'$  direla ulertuz. Lehen ekuazioa  $\alpha_1$ -ekin eta bigarren ekuazioa  $\alpha_2$ -rekin biderkatu, eta bi ekuazioen kenketa egiten badugu,  $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\alpha_1' = \alpha_1' = -\alpha_2\theta'$  da. Era berean, lehen ekuazioa  $\alpha_2$ -rekin eta bigarren ekuazioa  $\alpha_1$ -ekin biderkatu, eta hauek batzen baditugu,  $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\alpha_2' = \alpha_2' = \alpha_1\theta'$  da. Hau da,  $(\alpha_1, \alpha_2)$  ere (1.13) hasierako balioetako problemaren soluzioa da. 1.2.1 teorema aplikatzeko egoeran gaude. Hortaz, (1.13) problemaren soluzioaren bakartasunagatik,

$$\alpha_1 = x = \cos \theta \quad \text{eta} \quad \alpha_2 = y = \sin \theta$$

izan behar dira. □



Izan bedi  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$   $C^1$  klaseko kurba bat. Jatorria eta  $\alpha(t)$  puntu bakoitza lotzen dituen zuzenkiak  $t = t_0$  eta  $t = t_1$  unean artean estaltzen duen azalera kalkulatu nahi dugu.

**1.4.2 teorema.** *Izan bitez  $r, \theta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$   $C^1$  klaseko bi funtzio*

$$\theta'(t) > 0, \quad t \in [t_0, t_1] \quad \text{eta} \quad \theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi$$

*betetzen dutenak, eta  $\alpha(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ . Orduan,*

$$D = \{s\alpha(t) : t \in [t_0, t_1], \quad s \in [0, 1]\}$$

*eremuaren azalera hau da:*

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (r(t))^2 \theta'(t) dt. \quad (1.14)$$

*Froga.* Green-en teoremaren ondorio gisa,  $D$ -ren azalerarentzat ondoko adierazpena dugu (ikusi [2]):

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx.$$

$D$ -ren muga hiru osagaitan banatzen da:  $\Gamma_0 = \{s\alpha(t_0) : 0 \leq s \leq 1\}$ ,  $\Gamma_1 = \{s\alpha(t_1) : 0 \leq s \leq 1\}$  eta  $\Gamma_2 = \{\alpha(t) : t_0 \leq t \leq t_1\}$ .

$\Gamma_i$ -ren parametrizazio bat  $(s\alpha_1(t_i), s\alpha_2(t_i))$  da  $i = 0, 1$  bakoitzerako,  $0 \leq s \leq 1$  izanik. Hortaz,

$$\int_{\Gamma_i} xdy - ydx = \int_0^1 (s\alpha_1(t_i)\alpha_2(t_i) - s\alpha_2(t_i)\alpha_1(t_i)) ds = 0$$

da  $i = 0, 1$  bakoitzerako. Bestalde,  $(r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$   $\Gamma_2$ -ren parametrizazio bat da,  $t_0 \leq t \leq t_1$  izanik, eta hortaz,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} xdy - ydx \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ r(t) \cos \theta(t) (r(t) \sin \theta(t))' - r(t) \sin \theta(t) (r(t) \cos \theta(t))' \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (r(t))^2 \theta'(t) dt \end{aligned}$$

dugu. Ondorioz, azalerarentzat adierazpen honetara iristen gara:

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} xdy - ydx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} xdy - ydx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (r(t))^2 \theta'(t) dt. \quad \square \end{aligned}$$



## 2. Kapitulu

# Keplerren legeak

Kapitulu honetan indar zentraletako eremuak aztertuko ditugu, bereziki eremu grabitatorio newtondarra. Keplerren hiru legeak frogatuko ditugu eta eremu grabitatorio newtondarreko planeta baten posizioa denboraren funtzioan kalkulatzeko ikasiko dugu.

### 2.1 Grabitazio unibertsalaren legea

Newtonek bi masek elkar erakartzen dutela ziurtatu zuen. Guk bereziki Eguzkia eta planeta baten arteko erakarpena aztertuko dugu. Izan bitez  $M$  Eguzkiaren masa eta  $m$  planeta baten masa.  $M$   $m$  baino askoz handiagoa denez, planetak Eguzkiari eragiten dion indarra mespretxagarria dela onartuko dugu. Eguzkia koordenatu ardatzen jatorrian, 0-n, dagoela suposatuko dugu eta planeta  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  puntu batean. Planetak jasaten duen erakarpen indarrak  $x$  bektorearen norabide bera du, baina aurkako noranzkoa, beraz,

$$F = -\lambda \frac{x}{|x|}$$

da  $\lambda > 0$  batentzat. Bestalde, Grabitazio unibertsalaren legearen arabera,

$$|F| = \frac{GMm}{|x|^2}$$

da, non  $G$  grabitazio unibertsalaren konstantea den. Aurreko bi adierazpenak elkartuz,

$$|F| = \left| -\lambda \frac{x}{|x|} \right| = \lambda = \frac{GMm}{|x|^2}$$

lortzen dugu, eta ondorioz, indarrarentzat adierazpen honetara iristen gara:

$$F = -\frac{GMm}{|x|^2} \frac{x}{|x|}.$$

Newtonen bigarren legeagatik,

$$mx''(t) = F(x(t)) = -\frac{GMm}{|x(t)|^2} \frac{x(t)}{|x(t)|}$$

da.  $\mu = GM$  izendatuz eta  $m$  sinplifikatuz,

$$x''(t) = -\frac{\mu}{|x(t)|^2} \frac{x(t)}{|x(t)|} = f(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|}$$

ekuazio diferentzialera iristen gara, non  $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$  den,  $r > 0$  izanik.

**2.1.1 definizioa.** Izan bedi  $n \in \mathbb{N}$ .  $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  indar zentral bat dela esaten da existitzen bada  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  non

$$F(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}$$

den. Bereziki  $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$  denean,  $F$  indar-eremuari eremu grabitatorio newtondar deritzo.

$f > 0$  bada,  $F$  indar bektorea jatorritik urruntzen da; aldiz,  $f < 0$  bada, jatorria erakarkorra da. Adibidez, grabitazio eremu newtondarra indar zentraletako eremu erakarkor bat da.

**2.1.1 proposizioa.** Izan bitez  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funtzio bat eta  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|} \quad (2.1)$$

ekuazioaren soluzio bat. Orduan,

- (i)  $x(t+c)$  ere (2.1) ekuazioaren soluzioa da  $c \in \mathbb{R}$  guztietarako.
- (ii)  $x(-t)$  ere (2.1) ekuazioaren soluzioa da.
- (iii)  $A \in O(3)$  matrize ortogonal bat bada,  $Ax(t)$  ere (2.1) ekuazioaren soluzioa da.

*Froga.* (i) eta (ii) atalak berehalakoak dira. Froga dezagun (iii) atala.  $x$  (2.1) ekuazioaren soluzioa dela kontuan hartuz,

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ax(t)) = Ax''(t) = Af(|x(t)|) \frac{x(t)}{|x(t)|} = f(|x(t)|) \frac{Ax(t)}{|x(t)|}$$

da.  $A$  ortogonal denez,  $|Ax| = |x|$  da  $x \in \mathbb{R}^3$  guztietarako. Ondorioz,

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ax(t)) = f(|x(t)|) \frac{Ax(t)}{|x(t)|} = f(|Ax(t)|) \frac{Ax(t)}{|Ax(t)|}$$

da, hau da,  $Ax$  (2.1) ekuazioaren soluzioa da.  $\square$

Hemendik ondorioztatzen dugu (2.1) ekuazioaren soluzioetan hasierako unea trasladatu dezakegula, denbora alderantzikagarria dela eta soluzio bati isometria bat aplikatzean beste soluzio bat lortzen dugula.

## 2.2 Momentu angeluarra

**2.2.1 definizioa.** Izan bedi  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^1$  klaseko funtzio bat. Bere momentu angeluarra

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = x(t) \wedge x'(t), \quad t \in I$$

funtzioa da.

**2.2.1 proposizioa.** Izan bedi  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  (2.1) ekuazioaren soluzio bat. Orduan, bere momentu angeluarra bektore konstante bat da.

*Froga.*  $x$  eta  $x'$   $C^1$  klasekoak direnez eta biderketa bektoriala bilineala denez,  $c \in C^1$  dago. Deribatuz,

$$c' = \frac{d}{dt}(x \wedge x') = x' \wedge x' + x \wedge x'' = x \wedge x'' = \frac{f(|x|)}{|x|} x \wedge x = 0$$

lortzen dugu, eta beraz, momentu angeluarra bektore konstante bat da.  $\square$

**2.2.2 proposizioa.** Izan bedi  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  (2.1) ekuazioaren soluzio bat eta  $c$  bere momentu angeluarra. Orduan,

- (i)  $c \neq 0$  bada,  $x(t)$  plano batean dago  $t \in I$  guztietarako,
- (ii)  $c = 0$  bada,  $x(t)$  zuzen batean dago  $t \in I$  guztietarako.

*Froga.* Lehenengo suposa dezagun  $c \neq 0$  dela, eta izan bedi  $\pi = \{c\}^\perp$   $c$ -rekiko ortogonal den eta jatorritik pasatzen den plano. Orduan,  $x(t) \in \pi$  egongo da  $t \in I$  guztietarako.

Orain suposa dezagun  $c = 0$  dela. Orduan,  $x \wedge x' = 0$  denez,  $x$  eta  $x'$  linealki dependenteak dira  $t \in I$  guztietarako, hau da, existitzen da  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  non

$$x'(t) = \lambda(t)x(t), \quad t \in I$$

den. Ikus dezagun  $x(t)$  jatorritik irteten den zuzenerdi batean dagoela. (1.1) berdintzan  $x' = \lambda x$  dela kontuan hartuta,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|x|} \right) = \frac{\lambda x}{|x|} - \frac{\langle \lambda x, x \rangle x}{|x|^3} = \frac{\lambda x}{|x|} - \frac{\lambda x}{|x|} = 0$$

dela lortzen dugu. Ondorioz, existitzen da  $v \in \mathbb{R}^3$  bektore konstante bat non  $\frac{x(t)}{|x(t)|} \equiv v$  den  $t \in I$  guztietarako. Ohartu  $|v| = 1$  dela eta  $x(t) = |x(t)|v$  dela  $t \in I$  guztietarako, hau da,  $x$  jatorritik hasten den eta  $v$ -ren norabidea duen zuzenerdian dagoela.  $\square$

**Oharra.** Momentu angeluarra ez-nulua denean,  $\pi$  planoan  $OXY$  planoan transformatzeko duen isometria bat existitzen da,  $A \in O(3)$ ; eta momentu angeluarra nulua denean, zuzenerdia  $\{y = z = 0, x > 0\}$  ardatzerdian transformatzeko duen  $A$  isometria bat aurki daiteke. 2.1.1 proposizioetik badakigunez (2.1) ekuazioaren soluzio bati isometria bat aplikatzean beste soluzio bat lortzen dugula, hemendik aurrera (2.1) ekuazioaren soluzioak  $OXY \equiv \mathbb{R}^2$  planoan bilatuko ditugu, hau da,

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

## 2.3 Keplerren bigarren legea

**2.3.1 teorema.** *Izan bedi  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (2.1) ekuazioaren soluzio bat, momentu angeluar ez-nulua duena. Orduan, jatorria eta  $x(t)$  lotzen dituen zuzenkiak azalera berdinak estaltzen ditu denbora-tarte berdinetan.*

*Froga.*  $x(t) \neq 0$  denez  $t \in I$  guztietarako, 1.4.1 proposizioagatik badakigu existitzen direla  $r$  eta  $\theta$   $C^2$  klaseko bi funtzio non

$$x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in I$$

den. Beraz,  $x$ -ren momentu angeluarrarentzat adierazpen hau dugu:

$$\begin{aligned} c &= r(\cos \theta, \sin \theta, 0) \wedge [r'(\cos \theta, \sin \theta, 0) + r\theta'(-\sin \theta, \cos \theta, 0)] \\ &= r^2\theta'(\cos \theta, \sin \theta, 0) \wedge (-\sin \theta, \cos \theta, 0) = r^2\theta'(0, 0, 1). \end{aligned}$$

2.2.1 proposizioan ikusi dugun bezala momentu angeluarra konstante mantentzen denez,  $r^2\theta'$  konstante bat da. Hemendik aurrera suposa dezagun  $\theta'(t) > 0$  dela  $t \in I$  guztietarako, izan ere,  $c \neq 0$  hartu dugunez,  $\theta'(t) > 0$  edo  $\theta'(t) < 0$  izan behar da  $t \in I$  guztietarako.  $\theta'(t) < 0$  balitz, denbora alderantzizagarria dela kontuan hartuz,  $x(t)$  beharrez  $x(-t)$  erabiliko genuke.

Izan bitez  $t_0 < t_1 \in I$ ,  $\theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi$  izanik, eta defini dezagun

$$D = \{sx(t) : t \in [t_0, t_1], s \in [0, 1]\}.$$

Azalarentzat lortu dugun (1.14) formula aplikatuz,

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} |c| dt = \frac{1}{2} |c|(t_1 - t_0)$$

lortzen dugu. Beraz, denbora-tarte berdinetan azalera berdina estaltzen da.  $\square$

Hemendik ondorioztatzen dugu Keplerren bigarren legea, hau da, Eguzkia eta planeta lotzen dituen zuzenkiak azalera berdinak estaltzen dituela denbora-tarte berdinetan.

## 2.4 Momentu angeluar nulua eta talkak

Izan bedi  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (2.1) ekuazioaren soluzio bat, momentu angeluar nulua duena. 2.2.2 proposizioan ikusi dugu kasu honetan  $x$  zuzenerdi batean dagoela, hau da,  $x(t) = r(t)v$  dela  $t \in I$  guztietarako, non  $v \in \mathbb{R}^2$  unitarioa den, eta  $r = r(t)$  funtzio positibo bat den. Beraz,  $r$  honako aldagai bateko ekuazio diferentzialaren soluzioa izan behar da:

$$r'' = f(r), \quad r > 0.$$

Suposatuko dugu eremua erakarkorra dela, hau da,  $f(r) < 0$  dela  $r \in (0, \infty)$  guztietarako. Hortaz,  $r'' < 0$  izango da.

**2.4.1 proposizioa.** *Izan bedi  $x(t) = r(t)v$  momentu angeluar nulua duen (2.1) ekuazioaren soluzio bat,  $(\alpha, \omega)$  tarte maximal batean definiturik. Orduan, hiru aukera hauekiko bat emango da:*

- (i)  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$  dira,  $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = \lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$  dira eta existitzen da  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  non  $r'(t) > 0$  den  $t \in (\alpha, t_0)$  guztietarako, eta  $r'(t) < 0$  den  $t \in (t_0, \omega)$  guztietarako.
- (ii)  $\alpha \in \mathbb{R}$  eta  $\omega = +\infty$  dira,  $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0$  eta  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty$  dira, eta  $r'(t) > 0$  da  $t \in (\alpha, +\infty)$  guztietarako.
- (iii)  $\alpha = -\infty$  eta  $\omega \in \mathbb{R}$  dira,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = +\infty$  eta  $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$  dira, eta  $r'(t) < 0$  da  $t \in (-\infty, \omega)$  guztietarako.

*Froga.* Lehenengo, suposatuko dugu existitzen dela  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  non  $r'(t_0) = 0$  den. Ikus dezagun lehenengo kasuan gaudela. Absurdura eramanez, demagun  $\omega = +\infty$  dela.  $r''(t) < 0$  denez  $t \in (\alpha, +\infty)$  guztietarako,  $r'$  hertsiki beherakorra da. Gainera,  $r'(t_0) = 0$  denez,  $r'(t) < 0$  da  $(t_0, +\infty)$  tartean. Bereziki  $t_1 \in (t_0, +\infty)$  hartuz,  $k = r'(t_1) < 0$  da. Orduan,  $r'(t) \leq k$  izango da  $t \geq t_1$  guztietarako. Barrowen erregelatik

$$r(t) = r(t_1) + \int_{t_1}^t r'(s) ds \leq r(t_1) + \int_{t_1}^t k ds = r(t_1) + k(t - t_1), \quad t \geq t_1$$

betetzen da. Ondorioz  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = -\infty$  da. Baina hau absurdua da  $r$  funtzio positiboa delako. Beraz,  $\omega < +\infty$  izan behar da.

Orain  $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$  dela ikusi behar dugu. Lehen ikusi dugun bezala,  $r'(t) < 0$  da  $(t_0, \omega)$  tartean. Beraz,  $r$  beherakorra da tarte horretan. Gainera,  $r$  positiboa denez,  $r$  bornatuta dago  $t \rightarrow \omega$  doanean, eta, ondorioz, existitzen da  $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = l \geq 0$ . Absurdura eramanez, demagun  $l > 0$  dela.

Orduan,  $t \mapsto f(r(t))$  funtzioak luzapen jarraitu bat onartuko du  $[t_0, \omega]$  tarte itxian, eta

$$r'(t) = r'(t_0) + \int_{t_0}^t r''(s) ds = \int_{t_0}^t f(r(s)) ds, \quad t_0 < t < \omega$$

berdintzatik  $\lim_{t \rightarrow \omega} r'(t) = m$  existitzen dela ondorioztatzen dugu. 1.2.2 teorema aplikatu ahal izateko, lehen ordenako ekuazio diferentzialen sistema batera igaro behar gara. Izan bedi  $s = r'$ . Orduan,  $s' = r'' = f(r)$  da. Defini ditzagun  $X = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in D = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$  eta honako aplikazio hau:

$$F \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ f(r) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in D.$$

Orduan, (2.1) ekuazioa  $X' = F(X)$  eran idatz daiteke. Hortaz, existitzen da  $\epsilon > 0$  non

$$\begin{cases} r'' = f(r), \\ r(\omega) = l, r'(\omega) = m, \end{cases}$$

hasierako balioetako problemak soluzio bat duen gutxienez  $[\omega - \epsilon, \omega + \epsilon]$  erako tarte batean. Baina hau kontraesana da  $(\alpha, \omega)$  tartearen maximaltasunagatik. Beraz,  $l = \lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$  da.

Denboraren alderantzikagarritasunagatik, gauza bera gertatzen da ezkerraldean. Hortaz,  $r'$  uneren batean anulatzen bada, soluzioa  $(\alpha, \omega)$  tarte maximean definituta egongo da,  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$  izanik, eta gainera  $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \omega} r(t)$  izango dira.

Orain, suposa dezagun  $r'(t) \neq 0$  dela  $t \in (\alpha, \omega)$  guztietarako.  $t$ -ren alderantzikagarritasunagatik,  $r'(t) > 0$  dela suposa daiteke  $t \in (\alpha, \omega)$  guztietarako. Ikus dezagun bigarren kasuan gaudela.  $r'' = f(r) < 0$  denez,  $r'$  beherakorra da. Gainera,  $r'$  positiboa denez, behetik bornatua da. Ondorioz, existitzen da  $\lim_{t \rightarrow \omega} r'(t) = m$ .  $\omega = +\infty$  dela ikusteko, absurdura eramanez,  $w < +\infty$  dela suposatuko dugu. Izan bedi  $t_0 \in (\alpha, \omega)$ .  $t \geq t_0$  bada,

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^t r'(s) ds$$

berdintza dugu.  $r$  eta  $r'$  positiboak direla kontuan hartuz,

$$\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = r(t_0) + \lim_{t \rightarrow \omega} \int_{t_0}^t r'(s) ds = l > 0$$

da. Lehenengo kasuan bezala, 1.2.2 teoremagatik, existitzen da  $\epsilon > 0$  bat non

$$\begin{cases} r'' = f(r), \\ r(\omega) = l, r'(\omega) = m, \end{cases}$$



problemak soluzio bat duen gutxienez  $[\omega - \epsilon, \omega + \epsilon]$  erako tarte batean, baina hau kontraesana da  $(\alpha, \omega)$  tartearen maximaltasunagatik. Beraz,  $\omega = +\infty$  izan behar da.

Ikus dezagun  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty$  dela. Horretarako, absurdura eramanez,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) \neq +\infty$  dela suposatuko dugu.  $r$  positiboa eta gorakorra denez,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = l > 0$  izango da. Orduan, 1.2.5 lema erabiliz, existitzen da  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  segida non  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  eta  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r'(t_n) = 0$  diren. Bestalde,  $f$  jarraitua denez,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r''(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(r(t)) = f(l) < 0$  da. Gainera,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  denez, existitzen da  $n_0 \in \mathbb{N}$  non  $r''(t_n) < \frac{f(l)}{2}$  den  $n \geq n_0$  guztietarako. Beraz,  $n \geq n_0$  guztietarako

$$r'(t_n) = r'(t_{n_0}) + \int_{t_{n_0}}^{t_n} r''(s) ds \leq r'(t_{n_0}) + \frac{f(l)}{2}(t_n - t_{n_0})$$

betetzen denez,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r'(t_n) = -\infty$  izango da. Baina hau kontraesana da, limite hori 0 dela esan dugulako. Ondorioz,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty$  da.

$\alpha > -\infty$  dela ikusteko, lehenengo kasuan  $\omega < +\infty$  dela ikusteko erabiliko argumentu antzekoak erabiltzen dira. Azkenik, lehenengo kasuan  $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$  dela ikusteko erabilitako argumentu antzekoak erabiliz frogatzen da  $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0$  dela.  $\square$

Proposizio honetatik ondorioztatzen dugu momentu angeluar nulua duen (2.1) ekuazioaren soluzio bat ez badago denbora guztian zehar definituta, orduan, jatorrira joko duela (eremu grabitatorio newtondarrean bagaude, kasu honetan planetak Eguzkiarekin talka egingo du). Aldiz, denbora guztian zehar definituta badago, soluzioak infiniturantz joko du.

## 2.5 Potentziala eta energiaren kontserbazioa

Atal honetan potentziala eta energia definituko ditugu, eta momentu angeluar nulua duten eremu grabitatorio newtondarreko soluzioak energiaren arabera sailkatzen ikasiko dugu.

**2.5.1 definizioa.** *Izan bitez  $\Omega \mathbb{R}^d$ -ko ireki bat eta  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  bektore-eremu jarraitua. Existitzen bada  $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$  klaseko funtzio bat non  $F = -\nabla \mathcal{V}$  den  $\Omega$ -n, orduan, bektore-eremua kontserbakorra dela diogu.  $\mathcal{V}$  funtzioari potentziala deritzo.*

**2.5.1 proposizioa.** *Indar zentraletako eremuak kontserbakorrak dira.*

*Froga.* Izan bedi  $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|}$  non  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jarraitua eta  $d \in \mathbb{N}$  diren. Izan bitez  $\Phi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$   $f$ -ren jatorrizko funtzio bat, adibidez,

$$\Phi(r) = \int_1^r f(\rho) d\rho, \quad r > 0,$$

eta  $\mathcal{V}(x) = -\Phi(|x|)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Orduan,  $\mathcal{V}$   $C^1$  klasekoa da eta berdintza hau dugu:

$$\nabla \mathcal{V}(x) = -\Phi'(|x|)\nabla(|\cdot|)(x) = -f(|x|)\frac{x}{|x|} = -F(x), \quad x \neq 0. \quad \square$$

Adibide bezala eremu grabitatorio newtondarra dugu,

$$F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

$f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$  hartuz. Kasu honetan,  $\mathcal{V}(x) = -\frac{\mu}{|x|}$  da  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  guztietarako, eta  $\mathcal{V}$ -ri *potentzial newtondar* deritzo.

**2.5.2 definizioa.** *Izan bitez  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eremu kontserbakor bat,  $\mathcal{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  potentziala duena, eta honako ekuazio diferentziala:*

$$x'' = F(x), \quad x \in \Omega.$$

$x = x(t)$  soluzio bat hartuta, bere energia totala honela definitzen da:

$$E(t) = \frac{|x'(t)|^2}{2} + \mathcal{V}(x(t)). \quad (2.2)$$

**2.5.2 proposizioa.** *Izan bedi  $x$  (2.1) ekuazioaren soluzio bat. Orduan, bere energia konstantea da.*

*Froga.* Energiaren (2.2) adierazpena  $t$ -rekiko deribatuz,

$$\frac{dE}{dt} = \langle x'', x' \rangle + \langle \nabla \mathcal{V}(x), x' \rangle = \langle F(x), x' \rangle + \langle \nabla \mathcal{V}(x), x' \rangle = 0$$

da, non  $F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|}$  eta  $\mathcal{V}$   $F$ -ren potentziala diren.  $\square$

**2.5.3 proposizioa** (Soluzioen sailkapena energiaren arabera). *Izan bitez  $\mu > 0$  eta  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*

$$x'' = -\frac{\mu}{|x|^3}x \quad (2.3)$$

*ekuazioaren soluzio bat, momentu angeluar nulua eta  $r = r(t)$  modulua dituen.  $x$ -ren energiari  $E$  deitzen badiogu,*

(i)  $E < 0$  da baldin eta soilik baldin  $r$  gorakorra izatetik beherakorra izatera pasatzen bada.

(ii)  $E \geq 0$  da baldin eta soilik baldin  $r$  monotonoa bada.

*Froga.* Momentu angeluar nulua duenez, 2.2.2 proposizioaren arabera  $x = r(t)v$  zuzen batean dago. (2.2) formula eremu grabitatorio newtondarrerara egokituz,

$$E = \frac{|x'(t)|^2}{2} - \frac{\mu}{|x(t)|} = \frac{r'(t)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t)} \quad (2.4)$$

dela lortzen dugu. Has gaitzen eskubirako inplikazioak frogatzen.  $E < 0$  bada,  $\frac{r'(t)^2}{2} < \frac{\mu}{r(t)}$  da, edo baliokidea dena,  $r(t)(r'(t))^2 < 2\mu$  da  $t \in I$  guztietarako. 2.4.1 proposizioa kontuan hartuz,  $r(t)(r'(t))^2$  bornatua izateko aukera bakarra,  $r(\alpha, \omega)$  erako tarte batean definituta egotea da,  $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$  izanik ((i) atala), eta kasu horretan,  $r$  gorakorra izatetik beherakorra izatera pasatzen da. Aldiz,  $E \geq 0$  bada,  $\frac{r'(t)^2}{2} \geq \frac{\mu}{r(t)}$  da, edo baliokidea dena,  $r(t)(r'(t))^2 \geq 2\mu > 0$  da  $t \in I$  guztietarako. Berriz ere 2.4.1 proposizioari begiratu, (i) atala baztertzen dugu,  $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = \lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$  baita. Hortaz, beste bi ataletako batean gaude, eta bi kasu horietan,  $r$  monotonoa da.

Froga ditzagun orain beste alderako inplikazioak.  $r$  gorakorra izatetik beherakorra izatera pasatzen bada, existitzen da  $t_0$  non  $r'(t_0) = 0$  den. Orduan,

$$E = \frac{r'(t_0)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t_0)} = -\frac{\mu}{r(t_0)} < 0$$

da. Aldiz,  $r$  monotonoa bada, 2.4.1 proposizioagatik badakigu  $\alpha = -\infty$  edo  $\omega = +\infty$  dela.  $\alpha = -\infty$  bada,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = +\infty$  betetzen da, eta

$$E = \frac{r'(t)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t)} \geq -\frac{\mu}{r(t)}, \quad t \in (-\infty, \omega)$$

desberdintzan  $t \rightarrow -\infty$  eginez,  $E \geq 0$  ondorioztatzen da ( $E$  konstantea delako). Era berean,  $\omega = +\infty$  bada,  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = +\infty$  betetzen da, eta

$$E = \frac{r'(t)^2}{2} - \frac{\mu}{r(t)} \geq -\frac{\mu}{r(t)}, \quad t \in (\alpha, +\infty)$$

desberdintzan  $t \rightarrow +\infty$  eginez,  $E \geq 0$  ondorioztatzen da.  $\square$

Jarraian, eremu grabitatorio newtondarreko ibilbideetan sakonduko dugu, momentu angeluar ez-nulua dutenetan, hain zuzen ere.

## 2.6 Keplerren lehenengo legea

Keplerren lehenengo legearen arabera, eremu grabitatorio newtondarreko planeta guztiak Eguzkiaren inguruan higitzen dira, orbita eliptikoak eginez, eta Eguzkia elipsearen bi fokuetako batean dago. Baina, berez elipseak ez dira ibilbide posible bakarrak, atal honetan ikusiko dugun moduan.

**2.6.1 teorema.** *Izan bedi  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (2.3) ekuazioaren soluzio bat. Demagun momentu angeluar ez-nulua duela,  $c \neq 0$ . Orduan,  $x$  foku bat jatorrian duen konika batean higitzen da (elipsea, parabola edo hiperbola).*

*Froga.* (1.1) berdintzan 1.1.1 lemako (iv) propietatea erabiliz, honako hau lortzen dugu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{|x|} \right) &= \frac{x'}{|x|} - \frac{\langle x', x \rangle x}{|x|^3} = \frac{|x|^2 x' - \langle x', x \rangle x}{|x|^3} \\ &= \frac{\langle x, x \rangle x' - \langle x', x \rangle x}{|x|^3} = \frac{1}{|x|^3} [(x \wedge x') \wedge x]. \end{aligned}$$

Bi aldeak  $\mu$ -rekin biderkatuz, eta (2.3) ekuazio diferentziala kontuan hartuz,

$$\frac{d}{dt} \left( \mu \frac{x}{|x|} \right) = - \left[ (x \wedge x') \wedge \frac{-\mu x}{|x|^3} \right] = -c \wedge x'' = \frac{d}{dt} (-c \wedge x')$$

da. Azken berdintzan  $c$  konstantea dela erabili dugu. Bi deribatuak berdinak direnez, existitzen da  $e \in \mathbb{R}^2$  bektore konstante bat non

$$\mu \left[ \frac{x(t)}{|x(t)|} + e \right] = -c \wedge x'(t), \quad t \in I \quad (2.5)$$

den. Bi aldeak  $x(t)$ -rekin biderkatuz, eta 1.1.1 lemako (v) propietatea erabiliz,

$$\begin{aligned} \mu \left[ \left\langle \frac{x(t)}{|x(t)|}, x(t) \right\rangle + \langle e, x(t) \rangle \right] &= - \langle c \wedge x'(t), x(t) \rangle \\ &= - \langle c, x'(t) \wedge x(t) \rangle = |c|^2, \quad t \in I \end{aligned}$$

lortzen dugu. Beraz,  $x$ -k

$$|x(t)| + \langle e, x(t) \rangle = \frac{|c|^2}{\mu}, \quad t \in I \quad (2.6)$$

ekuazioa betetzen duenez, 1.3.1 proposizioagatik  $x$  foku bat jatorrian duen konika batean mugitzen dela ondorioztatzen dugu.  $\square$

**Oharra.** (2.5) ekuaziotik eszentrikotasun ardatzarentzat adierazpen hau lortzen dugu:

$$e = \frac{1}{\mu} x'(t) \wedge c - \frac{x(t)}{|x(t)|}, \quad t \in I.$$

1.3.1 proposizioan ikusi dugu nola sailkatzen diren orbitak eszentrikotasunaren arabera. Orain, eszentrikotasuna eta energia lotuz, orbitak energiaren arabera sailkatuko ditugu.

**2.6.2 teorema.** *Izan bitez  $x = x(t)$  (2.3) ekuazioaren soluzio bat eta  $E$  bere energia, (2.4) formulak definitzen duena.  $c$  momentu angeluar ez-nulua bada eta*

- (i)  $E < 0$  bada,  $x$  elipse batean dago,
- (ii)  $E = 0$  bada,  $x$  parabola batean dago,
- (iii)  $E > 0$  bada,  $x$  hiperbola batean dago.

*Froga.* (2.5) ekuazioan normen karratuak hartuz, eta  $c$  eta  $x'$  perpendikularak direla gogoratuz,

$$\mu^2 \left| \frac{x(t)}{|x(t)|} + e \right|^2 = |c \wedge x'|^2 = |c|^2 |x'|^2$$

lortzen dugu, eta hortaz,

$$\mu^2 \left[ \frac{|x|^2}{|x|^2} + |e|^2 + 2 \left\langle e, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right] = \mu^2 \left[ 1 + |e|^2 + 2 \left\langle e, \frac{x}{|x|} \right\rangle \right] = |c|^2 |x'|^2$$

da. Ezkerraldean (2.6) ekuazioa eta eskubian (2.4) ekuazioa kontuan hartuz, hau da,  $\langle e, x \rangle = \frac{|c|^2}{\mu} - |x|$  eta  $|x'|^2 = 2 \left( E + \frac{\mu}{|x|} \right)$ , honako hau dugu:

$$\mu^2 \left[ 1 + |e|^2 + \frac{2|c|^2}{\mu|x|} - 2 \right] = |c|^2 \left( 2E + 2 \frac{\mu}{|x|} \right).$$

Simplifikatuz,  $\mu^2(|e|^2 - 1) = 2E|c|^2$  lortzen dugu. Momentu angeluarra ez-nuluaenez, 1.3.1 proposizioa kontuan hartuta, nahi genuena ondorioztatzen dugu:

- (i)  $E < 0$  da baldin eta soilik baldin  $|e| < 1$  bada (elipseak),
- (ii)  $E = 0$  da baldin eta soilik baldin  $|e| = 1$  bada (parabolak),
- (iii)  $E > 0$  da baldin eta soilik baldin  $|e| > 1$  bada (hiperbolak). □

## 2.7 Soluzio globalak eta Keplerren hirugarren legea

Planeten ibilbideak aztertzeko, atal honetan frogatu nahi dugu eremu grabitatorio newtondarreko mugimendu eliptiko baten definizio-eremua zuzen erreal guztia dela, hau da, mugimendua denbora guztian zehar definituta dagoela, eta orbita guztia ibiltzen duela. Gainera, Keplerren hirugarren legea frogatuko dugu.

**2.7.1 teorema.** *Izan bedi  $x = x(t)$  (2.3) ekuazioaren soluzio bat, momentu angeluar ez-nulua duena. Orduan,  $x$ -ren definizio-eremua zuzen erreal guztia da.*

*Froga.* 1.2.3 proposizioa aplikatu ahal izateko, lehen ordenako ekuazio diferentzialen sistema batera igaro behar gara. Izan bedi  $v = x'$ . Orduan,  $v' = x'' = -\frac{\mu}{|x|^3}x$  da. Defini ditzagun  $X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2$  eta honako aplikazio hau:

$$F \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{\mu}{|x|^3}x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \in D$$

non  $D = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$  den. Orduan, (2.3) ekuazioa  $X' = F(X)$  eran idatz daiteke. Absurdura eramanez, suposatuko dugu  $x = x(t)$   $(\alpha, \omega) \neq \mathbb{R}$  tarte maximal batean definituta dagoela. Orokortasuna galdu gabe,  $\omega < +\infty$  dela suposa dezakegu (izan ere,  $\alpha > -\infty$  kasuan, denbora alderantzikagarria dela erabil dezakegu). 1.2.3 proposizioaren arabera, honako bi aukeretako bat gertatuko da:

(i)  $\lim_{t \rightarrow \omega} (|x(t)| + |x'(t)|) = +\infty$  da.

(ii) Existitzen da  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  segida non  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \omega$  eta  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = 0$  diren.

Ikusiko dugu momentu angeluarra ez-nulua bada, ezin dela bi aukeretako bat ere gertatu.  $x$  foku bat jatorrian duen konika batean mugitzen denez, 1.3.2 proposizioan ikusi dugun bezala, existitzen da  $\rho > 0$  non  $|x(t)| \geq \rho$  den  $t \in (\alpha, \omega)$  guztietarako. Hortaz, ezin da bigarren aukera gertatu. Gainera,  $|x(t)| \geq \rho$  desberdintzagatik,

$$|x''(t)| = \left| \frac{-\mu x(t)}{|x(t)|^3} \right| = \frac{\mu}{|x(t)|^2} \leq \frac{\mu}{\rho^2} = C, \quad t \in (\alpha, \omega)$$

da, hau da,  $x''$  bornatuta dago. Ikus dezagun, honek  $x$  eta  $x'$  ere bornatuta daudela inplikutzen duela. Izan bedi  $t_0 \in (\alpha, \omega)$ .  $t \in (t_0, \omega)$  badago,

$$\begin{aligned} |x'(t)| &= \left| x'(t_0) + \int_{t_0}^t x''(s) ds \right| \leq |x'(t_0)| + \int_{t_0}^t |x''(s)| ds \leq |x'(t_0)| + C(t - t_0) \\ &\leq |x'(t_0)| + C(\omega - t_0) = C_1 \end{aligned}$$

da. Era berean egiten da  $t \in (\alpha, t_0)$  badago. Beraz,  $x'$  bornatuta dago  $(\alpha, \omega)$  tartean. Prozedura bera erabiliko dugu  $x$ -rentzat. Izan bedi  $t_0 \in (\alpha, \omega)$ .  $t \in (t_0, \omega)$  badago,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |x'(s)| ds \leq |x(t_0)| + C_1(t - t_0) \\ &\leq |x(t_0)| + C_1(\omega - t_0) = C_2 \end{aligned}$$

da, eta kasu honetan ere, era berean egiten da  $t \in (\alpha, t_0)$  badago.  $x$  eta  $x'$  bornatuta daudenez, lehen aukera ere baztertzeko dugu. Beraz, ikusi dugu ezin dela bi aukeretako bat ere gertatu. Kontraesan hau tarte maximala zuzen erreal guztia ez dela suposatuta izanagatik da.  $\square$

**2.7.2 teorema.** *Izan bedi  $x = x(t)$  (2.3) ekuazioaren soluzio bat,  $c$  momentu angeluar ez-nulua eta  $E$  energia negatiboa dituen. Orduan,  $x(\mathbb{R})$  elipse osoa da.*

*Froga.*  $c \neq 0$  eta  $E < 0$  direnez, 2.6.2 teoremagatik badakigu  $x$  elipse batean higitzen dela, eta 2.7.1 teoremagatik, bere definizio-eremua zuzen erreal guztia da.  $x$  koordenatu polarretan idazten badugu,  $x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$  da. 2.3.1 teoremaren frogan ikusi dugu norantza positiboan biratzen duela suposa dezakegula, eta  $|c| = r^2 \theta'$  dela. Elipsea bornatuta dagoenez, existitzen da  $R > 0$  non  $r(t) \leq R$  den  $t \in \mathbb{R}$  guztietarako, eta ondorioz,

$$\theta'(t) = \frac{|c|}{r^2} \geq \frac{|c|}{R^2} = K > 0$$

da. Hau da,  $\theta$   $C^1$  klaseko funtzio bat da eta bere deribatua konstante hertsiki positibo bat baino handiagoa da zuzen erreal guztian. Ondorioz,  $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  da. Elipsearen (1.6) parametrizazioa oroituz,

$$x(t) = \gamma(\theta(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

da, eta haren irudia elipse guztia denez,  $x$ -k elipse guztia ibiltzen du.  $\square$

**2.7.3 teorema** (Keplerren hirugarren legea). *Izan bedi  $x = x(t)$  (2.3) ekuazioaren soluzio bat,  $c$  momentu angeluar ez-nulua eta  $E$  energia negatiboa dituen. Hau da,  $x$  orbita eliptiko batean higitzen da. Orduan,  $x$  periodikoa da eta bere periodo minimoa*

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \quad (2.7)$$

*da,  $a$  elipsearen ardatzerdi nagusiaren luzera izanik.*

*Froga.* Idatz dezagun  $x$  koordenatu polarretan:  $x(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . 2.7.2 teoremaren frogan ikusi dugun bezala,  $\theta$  hertsiki gorakorra da eta  $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  da. Bereziki,  $p \in \mathbb{R}$  bakarria existitzen da non

$$\theta(p) = \theta(0) + 2\pi \quad (2.8)$$

den.  $\theta(p) > \theta(0)$  denez eta  $\theta$  gorakorra denez, badakigu  $p > 0$  dela. Ikus dezagun  $p$  periodo minimoa dela eta kalkula dezagun bere balioa.

Lehenik eta behin,  $p$   $x$ -ren periodo bat dela ikusiko dugu. 2.7.1 teoremaren

frogan bezala  $X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$  definituz,  $v = x'$  izanik, 1.2.4 proposizioa erabiltzeko  $X(0) = X(p)$  dela ikusi behar dugu, hau da,  $x(0) = x(p)$  eta  $x'(0) = x'(p)$  direla.  $r$ -ren (1.5) adierazpena erabiliz eta (2.8) berdintza kontuan hartuz,

$$r(p) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\theta(p) - \omega)} = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\theta(0) + 2\pi - \omega)} = r(0)$$

betetzen da. Ondorioz,  $x(0) = x(p)$  da. Momentu angeluarra konstantea dela, eta  $r(0) = r(p)$  dela kontuan hartuz,

$$r(0)^2 \theta'(0) = r(p)^2 \theta'(p)$$

lortzen dugu, hau da,  $\theta'(0) = \theta'(p)$ . Bestalde,

$$r'(t) = -\frac{k \epsilon \theta'(t) \sin(\theta(t) - \omega)}{(1 + \epsilon \cos(\theta(t) - \omega))^2}$$

denez,  $r'(0) = r'(p)$  ere betetzen da. Eta honen ondorioz,  $x'(0) = x'(p)$  da. Beraz, 1.2.4 proposizioagatik,  $p$  periodo bat dela ondorioztatzen dugu. Hurrengo pausua  $p$  periodo minimoa dela ikustea da. Izan bedi  $\tilde{p} > 0$   $x$ -ren beste periodo bat. Ikus dezagun  $\tilde{p} \geq p$  dela.  $x(\tilde{p}) = x(0)$  denez,  $\cos(\theta(\tilde{p})) = \cos(\theta(0))$  eta  $\sin(\theta(\tilde{p})) = \sin(\theta(0))$  dira. Ondorioz,  $\theta(\tilde{p}) = \theta(0) + 2N\pi$  da  $N \in \mathbb{Z}$  batentzat.  $\theta$  hertsiki gorakorra eta  $\tilde{p} > 0$  direnez,  $\theta(\tilde{p}) > \theta(0)$  da, eta beraz,  $N \geq 1$  izan behar da. Orduan,

$$\theta(p) = \theta(0) + 2\pi \leq \theta(0) + 2N\pi = \theta(\tilde{p})$$

da, eta  $\theta$  hertsiki gorakorra dela gogoratuz,  $p \leq \tilde{p}$  dela ondorioztatzen dugu.

Amaitzeko, periodoaren balioa kalkulatu dugu. Badakigu elipsearen azalera  $A = \pi ab$  dela, non  $b$  ardatzerdi txikiaren luzera den. Hemen eszentrikotasunaren menpeko  $b$ -ren (1.9) adierazpena ordezkaturik,  $A = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$  lortzen dugu. Bestalde, (1.14) formulak  $t_1$  eta  $t_2$  uneen artean jatorria eta partikula lotzen dituen zuzenkiak estaltzen duen azalera ematen digu:

$$A(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (r(s))^2 \theta'(s) ds = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} |c| dt = \frac{|c|(t_2 - t_1)}{2}.$$

Hortaz, azalarentzat beste adierazpen hau dugu:

$$A = A(0, p) = \frac{|c|p}{2}.$$

Bi adierazpenak berdinduz,  $\frac{|c|p}{2} = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$  da, eta hemendik,  $p = 2\pi a^2 \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{|c|}$  dela dugu.  $a$ -ren (1.7) adierazpenean (2.6) ekuaziotik lortzen



dugun  $k = \frac{|c|^2}{\mu}$  balioa ordezkatzuz, honako berdintza honetara heltzen gara:

$$\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{|c|} = \frac{1}{\sqrt{a\mu}}. \quad (2.9)$$

Beraz,  $x$ -ren periodoa ondoko adierazpenak ematen digu:

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}. \quad \square$$

## 2.8 Keplerren ekuazioa

Oraindik ez dugu eremu grabitatorio newtondarreko (2.3) ekuazioa ebatzi. Momentu angeluarra ez-nulua bada, badakigu partikula foku bat jatorrian duen konika batean mugitzen dela, baina ez dakigu bere posizioa denboraren funtzioan kalkulatzeko. Planetak elipseetan mugitzen direnez, elipseen kasua aztertuko dugu. 2.1.1 proposizioagatik, badakigu (2.3) ekuazioaren soluzio bati biraketa bat aplikatzen badiogu, beste soluzio bat lortuko dugula. Hor-taz, elipsearen eszentrikotasun ardatzak  $e_1 = (1, 0)$  bektorearen norabidea eta norantza dituela suposa dezakegu.

**2.8.1 proposizioa.** *Izan bedi  $x = (x_1, x_2)$  (2.3) ekuazioaren soluzio bat, elipse batean dabilena, eta izan bitez  $a$  elipsearen ardatzerdi nagusiaren luzera,  $e = (\epsilon, 0)$  eszentrikotasun ardatza,  $p$  periodoa,  $u$  anomalia eszentrikoa eta  $t_0$  non  $u(t_0) = 0$  den. Orduan, sistema hau dugu:*

$$\begin{cases} x_1(t) = a(\cos u(t) - \epsilon), \\ x_2(t) = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u(t), \\ u(t) - \epsilon \sin u(t) = \frac{2\pi}{p}(t - t_0). \end{cases} \quad (2.10)$$

*Froga.* (1.10) parametrizazioagatik badakigu  $x$  honela adieraz daitekeela:

$$x(t) = a \left( \cos u(t) - \epsilon, \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u(t) \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestalde, 2.3.1 teoremaren frogatik badakigu  $x$ -k zentzu positiboan biratzen duela suposa dezakegula. Momentu angeluarraren definiziotik,

$$\begin{aligned} |c| &= x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t) \\ &= a^2\sqrt{1 - \epsilon^2}u'(t) [(\cos u(t) - \epsilon) \cos u(t) + \sin^2 u(t)] \\ &= a^2\sqrt{1 - \epsilon^2}u'(t) [1 - \epsilon \cos u(t)], \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

da, eta  $u = u(t)$ -rentzat lehen ordenako ekuazio diferentzial batera iritsi gara:

$$u'(t) = \frac{|c|}{a^2\sqrt{1 - \epsilon^2}(1 - \epsilon \cos u(t))}.$$

Ohartu elipse batean gaudenez  $\epsilon \in [0, 1)$  dagoela, eta beraz, izendatzailea ez dela anulatzen. (2.9) ekuaziotik,  $|c| = \sqrt{\mu a(1 - \epsilon^2)}$  dela dugu, eta beraz,

$$u' = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}(1 - \epsilon \cos u)} \quad (2.11)$$

da. Hemendik,

$$u' \geq \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}(1 + \epsilon)} > 0$$

dela ikusten dugunez,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  difeomorfismo bat dela ondorioztatzen dugu. Beraz, existitzen da  $t_0 \in \mathbb{R}$  bakarra non  $u(t_0) = 0$  den. Bestalde, (2.11) ekuazioa integratuz,

$$u(t) - \epsilon \sin u(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0) \quad (2.12)$$

lortzen dugu. (2.7) adierazpena erabiliz, nahi genuen ekuaziora iristen gara:

$$u(t) - \epsilon \sin u(t) = \frac{2\pi}{p}(t - t_0). \quad \square$$

Ez dugu  $u = u(t)$ -rentzat adierazpen esplizitua lortu, baina badakigu difeomorfismo bat dela, eta (2.12) ekuaziotik bere  $t = u^{-1}$  alderantzizkoaren adierazpena daukagu:

$$t(u) = t_0 + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}[u - \epsilon \sin u], \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Horrela,  $x$  elipseko  $P$  puntu batetik zein unetan pasatzen den jakiteko haren  $u$  anomalia eszentrikoa kalkulatu behar dugu, eta ondoren, (2.13) adierazpena erabiliz,  $t = t(u)$  lortzen dugu.

**2.8.1 definizioa.**  $u - \epsilon \sin u = \zeta$  ekuazioari Keplerren ekuazio deritzo,  $u, \zeta \in \mathbb{R}$  eta  $\epsilon \in [0, 1)$  izanik.

$t$  une jakin batean gure planeta non dagoen jakiteko  $u = u(t)$  kalkulatu behar dugu, eta horretarako, Keplerren ekuazioa ebatzi behar dugu, baina ohartu ekuazio honek  $u = u(t)$  implizituki definitzen duela.

**2.8.2 lema.** Izan bedi  $f_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non  $f_\epsilon(u) = u - \epsilon \sin u$  den,  $0 \leq \epsilon < 1$  izanik. Honako propietate hauek betetzen dira:

- (i)  $f_\epsilon$  difeomorfismo gorakorra da. Beraz,  $f_\epsilon$ -ek alderantzizkoa du,  $K_\epsilon$  izendatuko duguna.
- (ii)  $f_\epsilon(u + 2\pi) = f_\epsilon(u) + 2\pi$ .
- (iii)  $f_\epsilon(-u) = -f_\epsilon(u)$ .

$$(iv) \quad K_\epsilon(\zeta + 2\pi) = K_\epsilon(\zeta) + 2\pi.$$

$$(v) \quad K_\epsilon(-\zeta) = -K_\epsilon(\zeta).$$

*Froga.*  $f'_\epsilon(u) = 1 - \epsilon \cos u \geq 1 - \epsilon > 0$  denez,  $f_\epsilon$  difeomorfismo gorakorra da. (ii) eta (iii) berehalakoak dira. Froga dezagun (iv). (ii)-gatik badakigu  $f_\epsilon(u + 2\pi) = f_\epsilon(u) + 2\pi$  betetzen dela.  $u = K_\epsilon(\zeta)$  hartuz,  $f_\epsilon(K_\epsilon(\zeta) + 2\pi) = f_\epsilon(K_\epsilon(\zeta)) + 2\pi$  da, eta,  $K_\epsilon = f_\epsilon^{-1}$  denez,  $f_\epsilon(K_\epsilon(\zeta)) = \zeta$  lortzen dugu. Beraz,

$$f_\epsilon(K_\epsilon(\zeta) + 2\pi) = f_\epsilon(K_\epsilon(\zeta)) + 2\pi = \zeta + 2\pi$$

da. Bi aldeetan  $K_\epsilon$  hartuz, eta berriz ere  $K_\epsilon = f_\epsilon^{-1}$  dela erabiliz,

$$K_\epsilon(\zeta) + 2\pi = K_\epsilon(\zeta + 2\pi)$$

lortzen dugu. Orain froga dezagun (v) antzeko eran. (iii)-gatik  $f_\epsilon(-u) = -f_\epsilon(u)$  da. Hemen  $u = K_\epsilon(\zeta)$  hartuz,  $f_\epsilon(-K_\epsilon(\zeta)) = -f_\epsilon(K_\epsilon(\zeta))$  lortzen dugu, eta  $K_\epsilon = f_\epsilon^{-1}$  denez,  $f_\epsilon(-K_\epsilon(\zeta)) = -\zeta$  da. Bi aldeetan  $K_\epsilon$  hartuz, eta berriz ere  $K_\epsilon = f_\epsilon^{-1}$  dela erabiliz, nahi genuena daukagu:

$$-K_\epsilon(\zeta) = K_\epsilon(-\zeta). \quad \square$$

Propietate hauei esker, nahikoa da  $f_\epsilon$  eta  $K_\epsilon$   $[0, \pi]$  tartean ezagutzea. Ohartu  $K_\epsilon$  ezagutzea,  $u - \epsilon \sin u = \zeta$  Keplerren ekuazioa ebatztearen baliokidea dela.

**2.8.3 teorema.** *Keplerren ekuazioaren soluzioa honela adierazten da serie bidez:*

$$K_\epsilon(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\epsilon) \sin n\zeta, \quad \epsilon \in [0, 1], \zeta \in \mathbb{R}.$$

$J_n$   $n$  ordenako Bessel-en funtzioa da  $n \in \mathbb{N}$  guztietarako eta honela adieraz daiteke:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu - x \sin u) du. \quad (2.14)$$

*Froga.* Izan bedi  $h(\zeta) = K_\epsilon(\zeta) - \zeta$ .  $K_\epsilon$ -ek betetzen dituen 2.8.2 lemako bi propietateengatik,  $h$  funtzio  $2\pi$ -periodikoa eta bakoitia da:  $h(\zeta + 2\pi) = K(\zeta + 2\pi) - (\zeta + 2\pi) = K(\zeta) - \zeta = h(\zeta)$  eta  $h(-\zeta) = K(-\zeta) + \zeta = -K(\zeta) + \zeta = -h(\zeta)$ . Beraz, bere Fourierren seriea sinuetako seriea izango da:

$$h(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\zeta \quad \text{non} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h(\zeta) \sin n\zeta d\zeta$$

den  $n \geq 1$  guztietarako.  $b_n$  kalkulatzeko zatikako integrazioa erabiliko dugu:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (K_\epsilon(\zeta) - \zeta) \sin n\zeta d\zeta \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-(K_\epsilon(\zeta) - \zeta) \cos n\zeta}{n} \right]_{\zeta=0}^{\zeta=\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (K'_\epsilon(\zeta) - 1) \cos n\zeta d\zeta. \end{aligned}$$

2.8.2 leman ikusitako  $K_\epsilon$ -ren bi propietateak erabiliz,  $K_\epsilon(0) = 0$  eta  $K_\epsilon(\pi) = \pi$  direla lortzen dugu, eta ondorioz, kortxete barrukoa anulatu egingo da  $\zeta = 0$  eta  $\zeta = \pi$  puntuetan. Bestalde,  $K_\epsilon$   $f_\epsilon$ -en alderantzizkoa dela kontuan hartuta,

$$K'_\epsilon(\zeta) = \frac{1}{f'_\epsilon(K_\epsilon(\zeta))} = \frac{1}{1 - \epsilon \cos K_\epsilon(\zeta)}$$

da. Gainera,  $\int_0^\pi \cos n\zeta d\zeta = \frac{1}{n} [\sin n\zeta]_0^\pi = 0$  denez,

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi (K'_\epsilon(\zeta) - 1) \cos n\zeta d\zeta = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\zeta}{1 - \epsilon \cos K_\epsilon(\zeta)} d\zeta$$

da. Egin dezagun honako aldagai-aldaketa:

$$u = K_\epsilon(\zeta), \quad du = K'_\epsilon(\zeta)d\zeta = \frac{d\zeta}{1 - \epsilon \cos K_\epsilon(\zeta)}.$$

Orduan,

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos [n(u - \epsilon \sin u)] du$$

adierazpenera iristen gara. (2.14) berdintza kontuan hartuz,  $b_n = \frac{2}{n} J_n(n\epsilon)$  da  $n \in \mathbb{N}$  guztietarako, eta hortaz,  $h$  ondoko seriearen bidez adieraz daiteke:

$$h(\zeta) = K_\epsilon(\zeta) - \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\epsilon) \sin n\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Ohartu (2.10) sistemako 3. ekuazioa Keplerren ekuazioa dela,  $\zeta = \frac{2\pi}{p}(t - t_0)$  hartuz. Beraz, sistemak itxura hau hartuko du:

$$\begin{cases} x_1(t) = a(\cos u(t) - \epsilon), \\ x_2(t) = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u(t), \\ u(t) = \frac{2\pi}{p}(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\epsilon) \sin \left( n \frac{2\pi}{p}(t - t_0) \right). \end{cases}$$

Horrela, eremu grabitatorio newtondarrean une jakin batean planeta zein posiziotan dagoen jakin dezakegu.

**Oharra.** Praktikan, Keplerren ekuazioaren soluzio hurbilduak lortzeko zenbakizko metodoak erabiltzen dira, esate baterako, Newton-en metodoa.

## 3. Kapituluia

# $n$ gorputzen problema

Orain arte, Eguzkia finko zegoela suposatuta dugu, inguruko planetek indarrak eragingo ez baliote bezala. Azken kapitulu honetan, grabitazio-legearen arabera mugitzen diren  $n$  gorputz kopuru finitu baten mugimenduak aztertuko ditugu.

$m_i$  masadun gorputz bakoitzaren posizioa  $r_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$  bektoreak emango digu,  $t \in J \subset \mathbb{R}$  izanik,  $i = 1, \dots, n$  guztietarako. Newtonen bigarren legea erabiliz,  $n$  ekuazioko sistema honetara iristen gara:

$$m_i r_i'' = F_i(r_1, \dots, r_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Bi gorputzek ezin dutenez posizio bera izan, (3.1) sistemaren soluzioak  $\Omega = \mathbb{R}^{3n} \setminus D$ -n daude definituta,  $D = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{(r_1, \dots, r_n) : r_i = r_j\}$  izanik.

**3.0.1 definizioa.** *Izan bitez  $r_1, \dots, r_n$   $m_1, \dots, m_n$  masak dituzten  $n$  gorputzen posizioak, hurrenez hurren. Masa-zentroa*

$$C = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i$$

da,  $M = m_1 + \dots, m_n$  izanik.

**3.0.1 proposizioa.** *Izan bitez  $r = (r_1, \dots, r_n) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  (3.1) sistemaren soluzio bat eta  $C(t)$  bere masa-zentroa. Orduan, existitzen dira  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$  non  $C(t) = \alpha + \beta t$  den.*

*Froga.* Ikus dezagun masa-zentroaren bigarren deribatua anulatzen dela.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}''(t) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i''(t) = \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} + \frac{1}{M} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j+1}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3}.
\end{aligned}$$

Bigarren batukarian  $i$ -ren orde  $j$ , eta  $j$ -ren orde  $i$  idatziz, bi batukariak berdinak direla lortzen dugu, baina aurkako zeinuarekin. Hortaz,  $\mathcal{C}''(t) = 0$  dela lortzen dugu, nahi genuen bezala.  $\square$

**3.0.2 proposizioa.**  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzioa bada,  $(r_1 + p + vt, \dots, r_n + p + vt)$  ere soluzioa da  $p, v \in \mathbb{R}^3$  guztietarako.

*Froga.* Izan bedi  $s_i = r_i + p + vt$   $i = 1, \dots, n$  guztietarako.  $(r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzioa denez,

$$\begin{aligned}
m_i s_i'' &= m_i r_i'' = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j (r_j + p + vt - (r_i + p + vt))}{|r_j + p + vt - (r_i + p + vt)|^3} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j (s_j - s_i)}{|s_j - s_i|^3}
\end{aligned}$$

lortzen dugu. Ondorioz,  $(r_1 + p + vt, \dots, r_n + p + vt)$  ere (3.1) sistemaren soluzioa da.  $\square$

**Oharra.** Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat,  $\mathcal{C}(t) = \alpha + \beta t$  masa-zentroa duena,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$  izanik. Orduan, 3.0.2 proposizioagatik,  $\tilde{r}(t) = (r_1(t) - \alpha - \beta t, \dots, r_n(t) - \alpha - \beta t)$  ere (3.1) sistemaren soluzioa da eta bere masa-zentroa jatorrian dago:

$$\tilde{\mathcal{C}}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} (r_i - \alpha - \beta t) = \mathcal{C}(t) - (\alpha + \beta t) = 0.$$

Honi esker, masa-zentroa jatorrian dagoela suposa dezakegu.

### 3.1 Bi gorputzen problema

Atal honetan bi gorputzen kasua aztertuko dugu. (3.1) sistema  $n = 2$  kasurako hartzen badugu,

$$\begin{cases} m_1 x'' = Gm_1 m_2 \frac{y-x}{|y-x|^3}, \\ m_2 y'' = Gm_1 m_2 \frac{x-y}{|x-y|^3} \end{cases} \quad (3.2)$$

sistema lortzen dugu.

**3.1.1 proposizioa.** *Izan bedi  $(x, y)$  (3.2) sistemaren soluzio bat, masa-zentroa jatorrian duena. Orduan, bi aukera daude:  $x$  eta  $y$  mota bereko konikan mugitzen dira (baina aurkako eszentrikotasun ardatzarekin) edo biak zuzen berean higitzen dira.*

*Froga.*  $C(t) = 0$  denez,  $m_1 x + m_2 y = 0$  da, edo baliokidea dena,  $y = -\frac{m_1}{m_2}x$ .

Hau (3.2) sistemako lehenengo ekuazioan ordezkaturaz,

$$m_1 x'' = -\frac{Gm_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{x}{|x|^3}$$

lortzen dugu, eta bigarrenetan ordezkaturaz,

$$m_2 y'' = -\frac{Gm_2 m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{y}{|y|^3}.$$

Beraz, aurreko kapituluko egoeran gaude, izan ere,  $x$ -k eta  $y$ -k (2.3) ekuazioa betetzen dute,  $x$ -rentzat  $\mu = \frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$  eta  $y$ -rentzat  $\mu = \frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$  hartuz. Dakigun bezala, soluzioak  $\mathbb{R}^2$ -ra eramán ditzakegu isometriren bidez, eta  $c_x$  eta  $c_y$  momentu angeluarrak konstanteak dira. Demagun  $c_x \neq 0$  dela. 2.6.1 teoreman ikusi genuen  $x$  foku bat jatorrian duen konika batean higitzen dela, hau da, (1.3) ekuazioa betetzen duela. (1.3) ekuazioan  $x = -\frac{m_2}{m_1}y$  ordezkaturaz,  $\frac{m_2}{m_1} |y| - < e, \frac{m_2}{m_1} y > = k$  lortzen dugu, edo baliokidea dena,

$$|y| + < -e, y > = \frac{m_1}{m_2} k.$$

Hortaz,  $y$  konika mota berean mugitzen da, baina aurkako eszentrikotasun ardatzarekin. Orain, demagun  $c_x = 0$  dela. 2.2.2 proposizioagatik, badakigu  $x$  jatorritik pasatzen den zuzen batean dagoela, eta  $y = -\frac{m_1}{m_2}x$  denez,  $y$  ere zuzen berean egongo da.  $\square$

**Oharra.** Masa-zentroa ez badago jatorrian, mugimenduak ez du plano batean egon beharrik.

### 3.2 $n$ gorputzen problema

Jarrai dezagun  $n$  orokor batentzat dugun problemarekin. 2.5.1 definizioa gogoratuz, honako proposizio hau dugu.

**3.2.1 proposizioa.** *Izan bitez  $(r_1, \dots, r_n) \in \Omega$  eta  $F = (F_1, \dots, F_n)$  non*

$$F_i(r_1, \dots, r_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3}$$

den  $i = 1, \dots, n$  guztietarako. Orduan,

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(r_1, \dots, r_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{|r_i - r_j|} \quad (3.3)$$

$F$ -ren potentziala da.

*Froga.*  $\nabla \mathcal{V} = \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_n} \right)$  adieraziko dugu,  $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i} = \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_i} \right)$  izanik  $i = 1, \dots, n$  guztietarako.

$\frac{\partial}{\partial r_i} (|r_i - r_j|) = \frac{\partial}{\partial r_i} (\sqrt{\langle r_i - r_j, r_i - r_j \rangle}) = \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|}$  dela lortzen dugu (1.2) berdintzaren antzeko eran eginez, eta beraz,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j (r_i - r_j)}{|r_i - r_j|^3} = -F_i$$

da.  $F = -\nabla \mathcal{V}$  denez,  $\mathcal{V}$   $F$ -ren potentziala da. □

Horrela, (3.1) sistemako ekuazio bakoitza

$$m_i r_i'' = - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i} \quad (3.4)$$

eran idatz dezakegu  $i = 1, \dots, n$  guztietarako.

**3.2.1 definizioa.** (3.3) ekuazioak definitzen duen  $\mathcal{V}$ -ri potentzial newtondar deritzo.

**3.2.2 definizioa.** *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat.  $r$ -ren energia zinetikoa*

$$E_z(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i'(t)|^2$$

da, eta energia totala

$$E(t) = E_z(t) + \mathcal{V}(r(t)). \quad (3.5)$$



**3.2.2 proposizioa.** *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat. Orduan,  $r$ -ren energia totala konstantea da.*

*Froga.* (3.4) ekuazioa erabiliz, erraz ikusten da energia totalaren deribatua nulua dela, eta beraz, energia konstantea dela:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i'', r_i' \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}, r_i' \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle m_i r_i'' + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}, r_i' \right\rangle = 0. \quad \square$$

**3.2.3 definizioa.** *Izan bedi  $A \subset \mathbb{R}^d$  azpimultzo bat.  $A$  kono bat dela diogu  $a \in A$  eta  $\lambda > 0$  guztietarako  $\lambda a \in A$  betetzen bada.*

**3.2.4 definizioa.** *Izan bitez  $A \subset \mathbb{R}^d$  kono ireki bat,  $p \in \mathbb{R}$  eta  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  funtzioa  $p$  mailako funtzio homogeneoa dela esaten da  $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$  betetzen bada  $x \in A$  eta  $\lambda > 0$  guztietarako.*

**3.2.3 teorema** (Eulerren teorema funtzio homogeneoetarako). *Izan bitez  $A \subset \mathbb{R}^d$  kono ireki bat eta  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$  klaseko eta  $p$  mailako funtzio homogeneo bat. Orduan, berdintza hau betetzen da:*

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = pf(x), \quad x \in A.$$

*Froga.* Izan bedi  $x \in A$ .  $f$   $p$  mailako funtzio homogeneoa denez,  $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$  betetzen da  $\lambda \in (0, +\infty)$  guztietarako.  $\lambda$ -rekiko deribatuz,

$$\langle \nabla f(\lambda x), x \rangle = p\lambda^{p-1} f(x)$$

dugu, eta  $\lambda = 1$  hartuz, nahi duguna lortzen dugu.  $\square$

**3.2.4 proposizioa.** *(3.1) sistemak ez du soluzio konstanterik.*

*Froga.* Absurdura eramanez, demagun  $r \equiv k$  soluzio konstante bat dela. Orduan,  $r'' = 0$  denez, (3.4) berdintzagatik  $-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i} = 0$  da  $i = 1, \dots, n$  guztietarako. 3.2.3 teorema aplikatu ahal izateko, ikus dezagun potentzial newtondarra  $-1$  mailako funtzio homogeneoa dela. Izan bedi  $\lambda > 0$ . Orduan,

$$\mathcal{V}(\lambda r) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{|\lambda r_i - \lambda r_j|} = -\lambda^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{|r_i - r_j|} = \lambda^{-1} \mathcal{V}(r)$$

da. Ondorioz, 3.2.3 teoremagatik,

$$0 = \langle \nabla \mathcal{V}(r), r \rangle = -\mathcal{V}(r)$$

da. Baina, hau kontraesana da  $\mathcal{V} < 0$  delako.  $\square$

**3.2.5 lema.** *Izan bitez  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat,  $E$  bere energia eta  $t_0 \in J \subset \mathbb{R}$ . Demagun  $\delta > 0$  baterako*

$$\rho(t_0) = \min\{|r_i(t_0) - r_j(t_0)| : 1 \leq i < j \leq n\} \geq \delta$$

*betetzen dela. Orduan, existitzen da  $\tau = \tau(E, \delta) > 0$  non  $r$   $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$  tartean definituta dagoen.*

*Froga.* (3.1) sistema lehen ordenako sistema gisa idazteko, izenda ditzagun

$$X(r, v) = (v, F_i/m_i), \quad (r, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^{3n} \quad \text{eta} \quad x_0 = (r(t_0), v(t_0))$$

non  $v = r'$  eta  $F_i$  (3.1) sisteman definitutakoak diren. Kontuak arintzeko, maximoaren norma erabiliko dugu frogan:

$$\|(r, v)\| = \max\{|r_1|, \dots, |r_n|, |v_1|, \dots, |v_n|\}.$$

1.2.2 teoremako notazioa jarraituz,  $a = \delta/4$  eta  $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} : \|x - x_0\| \leq a\}$  hartuko ditugu.  $(r, v) \in \bar{B}$  badago,

$$\|(r(t), v(t)) - (r(t_0), v(t_0))\| \leq \frac{\delta}{4}$$

beteko da, eta beraz,

$$|r_k(t) - r_k(t_0)| \leq \frac{\delta}{4} \quad \text{eta} \quad |v_k(t) - v_k(t_0)| \leq \frac{\delta}{4}$$

izango dira  $k = 1, \dots, n$  guztietarako. Ondorioz, desberdintza triangeluarra erabiliz,

$$|r_k(t) - r_i(t)| \geq |r_k(t_0) - r_i(t_0)| - |r_k(t) - r_k(t_0)| - |r_i(t) - r_i(t_0)| \geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}$$

betetzen da  $k, i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \neq i$  guztietarako. Beraz,  $\bar{B}$ -n

$$\left| \frac{1}{m_k} F_k(r_1, \dots, r_n) \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{G m_i}{|r_k - r_i|^2} \leq \frac{4G}{\delta^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n m_i \quad (3.6)$$

desberdintza betetzen da. Bestalde,  $\mathcal{V}$ -ren eta  $E$ -ren (3.3) eta (3.5) adierazpenetatik, hurrenez hurren, honako desberdintzara heltzen gara:

$$\begin{aligned} |v_k(t_0)| &= |r'_k(t_0)| \leq \left[ \frac{2}{m_k} (E - \mathcal{V}(r(t_0))) \right]^{1/2} \\ &\leq \left[ \frac{2}{m_k} \left( E + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{\delta} \right) \right]^{1/2} = \Phi_k(E, \delta) \end{aligned}$$

Hortaz,  $(r, v) \in \overline{B}$  badago,

$$|v_k(t)| \leq |v_k(t) - v_k(t_0)| + |v_k(t_0)| \leq \frac{\delta}{4} + \Phi_k(E, \delta) \quad (3.7)$$

da. (3.6) eta (3.7) desberdintzetatik,  $K = \max_{(r,v) \in \overline{B}} \|X(r, v)\|$ -ren balioa  $E$  eta  $\delta$ -ren menpekoa dela soilik ondorioztatzen dugu, eta beraz, 1.2.2 teorematatik,  $\tau = \frac{a}{K} = \frac{\delta}{4K}$  ere  $E$  eta  $\delta$ -ren menpekoa da soilik.  $\square$

**3.2.6 teorema.** *Izan bedi  $r = r(t)$   $(\alpha, \omega)$  tarte maximalean definitutako (3.1) sistemaren soluzio bat,  $\omega < +\infty$  betetzen duena. Defini dezagun  $\rho(t) = \min\{|r_i(t) - r_j(t)| : 1 \leq i < j \leq n\}$ . Orduan,  $\lim_{t \rightarrow \omega} \rho(t) = 0$  da.*

*Froga.* Absurdura eramanez, demagun  $\lim_{t \rightarrow \omega} \rho(t) \neq 0$  dela. Orduan, existitu behar dira  $\delta > 0$  eta  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  segida non

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \omega \quad \text{eta} \quad \rho(t_n) \geq \delta$$

diren  $n \in \mathbb{N}$  guztietarako. 3.2.5 lema aplikatuz,  $r$  soluzioa luzatu daiteke, gutxienez,  $t_n + \tau$  arte.  $\tau$  finkoa da, eta beraz,  $t_n + \tau \geq \omega$  da  $n$  handia denean. Hau kontraesana da  $(\alpha, \omega)$  tartearen maximaltasunagatik.  $\square$

Hemendik ondorioztatzen dugu (3.1) sistemaren soluzio bat ez badago denbora guztian zehar definituta, gutxienez bi gorputzek talka egiten dutela denbora finituan.

### 3.2.1 Inertzia-momentua eta momentu angeluarra

**3.2.5 definizioa.** *Izan bedi  $r_i : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$   $m_i$  masadun gorputz baten posizio bektorea  $i = 1, \dots, n$  bakoitzerako. Orduan,  $r = (r_1, \dots, r_n)$ -ren inertzia-momentua honako hau da:*

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i(t)|^2, \quad t \in J.$$

**3.2.7 proposizioa** (Lagrange-Jacobiren identitatea). *Izan bitez (3.1) sistemaren  $r = (r_1, \dots, r_n)$  soluzio bat,  $I$  bere inertzia-momentua,  $E$  energia totala,  $E_z$  energia zinetikoa eta  $\mathcal{V}$  potentziala. Orduan, berdintza hau betetzen da:*

$$I'' = 2E_z + \mathcal{V}(r) = 2E - \mathcal{V}(r). \quad (3.8)$$

*Froga.*  $I$  bi aldiz deribatuz eta (3.4) ekuazioa erabiliz,

$$\begin{aligned} I'' &= \sum_{i=1}^n m_i |r_i'|^2 + \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i, r_i'' \rangle = \sum_{i=1}^n m_i |r_i'|^2 + \sum_{i=1}^n \langle r_i, m_i r_i'' \rangle \\ &= 2E_z - \sum_{i=1}^n \left\langle r_i, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}(r) \right\rangle \end{aligned}$$

da. 3.2.4 proposizioaren frogan ikusi dugu  $\mathcal{V}$  potentziala  $-1$  mailako funtzio homogeneoa dela, eta hortaz, 3.2.3 teorema aplikatuz,

$$I'' = 2E_z - \sum_{i=1}^n \left\langle r_i, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r_i}(r) \right\rangle = 2E_z + \mathcal{V}(r)$$

da. Gainera, (3.5) berdintzagatik  $E_z = E - \mathcal{V}(r)$  denez,  $I'' = 2E_z + \mathcal{V}(r) = 2E - \mathcal{V}(r)$  dela lortzen dugu.  $\square$

**3.2.8 proposizioa.** *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat,  $(\alpha, +\infty)$  tartean definituta dagoena, eta  $E$  energia positiboa eta  $I$  inertzia-momentua dituen. Orduan,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = +\infty.$$

*Froga.*  $\mathcal{V}(r) < 0$  eta  $E > 0$  direnez, eta 3.2.7 proposizioagatik  $I'' = 2E - \mathcal{V}(r)$  denez,  $I'' > 2E > E$  betetzen da.  $t_0 \in (\alpha, +\infty)$  hartuz,

$$I'(t) = I'(t_0) + \int_{t_0}^t I''(s) ds > I'(t_0) + E(t - t_0), \quad t \geq t_0$$

eta

$$I(t) = I(t_0) + \int_{t_0}^t I'(s) ds > I(t_0) + I'(t_0)(t - t_0) + \frac{E(t - t_0)^2}{2}, \quad t \geq t_0$$

betetzen dira. Beraz,  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = +\infty$  da.  $\square$

**Oharra.** Ohartu  $\|(r_1, \dots, r_n)\| = \sqrt{I}$  norma bat dela  $\mathbb{R}^3$ -n. Horrela, aurreko proposiziotik, energia positiboa duen eta denbora-tarte guztian definituta dagoen edozein soluzio infiniturantz doala ondorioztatzen dugu.

**3.2.6 definizioa.** *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$  non  $r_i$  bakoitza  $m_i$  masadun gorputz baten posizio bektorea den. Bere momentu angeluarra honako hau da:*

$$c(t) = \sum_{i=1}^n m_i(r_i(t) \wedge r_i'(t)), \quad t \in J.$$

**3.2.9 proposizioa.** *Izan bedi  $r : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  (3.1) sistemaren soluzio bat. Bere momentu angeluarra konstantea da.*

*Froga.* Ikus dezagun momentu angeluarraren deribatua nulua dela.

$$\frac{dc}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i(r_i' \wedge r_i' + r_i \wedge r_i'') = \sum_{i=1}^n m_i(r_i \wedge r_i'').$$

Batukariaren barruko adierazpena garatuz,

$$m_i(r_i \wedge r_i'') = r_i \wedge \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j$$

lortzen dugu. Beraz,

$$\frac{dc}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j$$

da. 3.0.1 proposizioaren frogako argumentu antzekoak erabiliz, eta 1.1.1 lema (iii) propietatea kontuan hartuz, bi batukariek elkar anulatuko dutela lortzen dugu, eta beraz,  $c' = 0$  da.  $\square$

### 3.2.2 Talka totala

**3.2.7 definizioa.** *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat,  $(\alpha, \omega)$  tarte maximalean definituta dagoena. Soluzioa talka totalean amaitzen dela esaten da, existitzen bada  $\xi \in \mathbb{R}^3$  non  $\lim_{t \rightarrow \omega} r_i(t) = \xi$  den  $i = 1, \dots, n$  guztietarako.  $\xi$ -ri talka-puntu deritzo.*

**3.2.10 proposizioa.** *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$   $(\alpha, \omega)$  tarte maximalean definitutako (3.1) sistemaren soluzio bat, talka totalean amaitzen dena eta masa-zentroa jatorrian duena. Orduan, talka-puntua masa-zentroa da eta  $\omega < +\infty$  da.*

*Froga.* Talka totalean amaitzen denez, existitzen da  $\xi \in \mathbb{R}^3$  non  $\lim_{t \rightarrow \omega} r_i(t) = \xi$  den  $i = 1, \dots, n$  guztietarako. Gainera, masa-zentroa jatorrian finko dagoenez,

$$0 = \mathcal{C}(t) = \lim_{t \rightarrow \omega} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i(t) = \xi \quad (3.9)$$

lortzen dugu, hau da, talka-puntua masa-zentroa da. Orain, froga dezagun  $\omega < +\infty$  dela. Batetik, talka totalean amaitzen dela kontuan hartuz,

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \mathcal{V}(r(t)) = - \lim_{t \rightarrow \omega} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{|r_i(t) - r_j(t)|} = -\infty$$

da. Gainera, 3.2.7 proposizioagatik, badakigu  $I'' = 2E - \mathcal{V}(r(t))$  dela. Beraz, existitzen da  $t_0 < \omega$  non  $I''(t) \geq 1$  den  $t \in [t_0, \omega)$  guztietarako. Bi aldiz integratuz, eta desberdintza hori erabiliz,

$$I(t) \geq I(t_0) + I'(t_0)(t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}, \quad t_0 < t < \omega$$

lortzen dugu.  $\omega = +\infty$  balitz,  $\lim_{t \rightarrow \omega} I(t) = +\infty$  izango litzateke, baina (3.9) berdintza kontuan hartuz,

$$\lim_{t \rightarrow \omega} I(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \omega} \sum_{i=1}^n m_i |r_i(t)|^2 = \frac{M}{2} |\xi|^2 = 0 \quad (3.10)$$

denez,  $\omega < +\infty$  izan behar da derrigorrez.  $\square$

**3.2.11 lema** (Sundman-en desberdintza). *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat,  $c$  momentu angeluarra,  $I$  inertzia-momentua eta  $E$  energia totala dituena. Orduan, honako desberdintza betetzen da:*

$$|c|^2 \leq 4I(I'' - E).$$

*Froga.*  $c$ -ren adierazpenetik abiatuz,

$$|c| \leq \sum_{i=1}^n m_i |r_i \wedge r'_i| \leq \sum_{i=1}^n m_i |r_i| |r'_i| = \sum_{i=1}^n (\sqrt{m_i} |r_i|) (\sqrt{m_i} |r'_i|)$$

lortzen dugu, eta Cauchy-Schwartzen desberdintza aplikatuz,

$$|c| \leq \left( \sum_{i=1}^n m_i |r_i|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n m_i |r'_i|^2 \right)^{1/2} = (2I)^{1/2} (2E_z)^{1/2}$$

da. Ondorioz,  $|c|^2 \leq 4IE_z$  izango da. (3.5) eta (3.8) berdintzak erabiliz,  $I'' = 2E_z + \mathcal{V}(r) = E_z + (E_z + \mathcal{V}(r)) = E_z + E$  berdintzara heltzen gara, eta beraz,  $E_z = I'' - E$  da. Hortaz, nahi genuen desberdintza dugu:

$$|c|^2 \leq 4IE_z = 4I(I'' - E). \quad \square$$

**3.2.12 teorema** (Sundmanen teorema). *Izan bedi  $r = (r_1, \dots, r_n)$  (3.1) sistemaren soluzio bat,  $(\alpha, \omega)$  tarte maximelean definituta dagoena, masa-zentroa jatorrian duena eta talka totalean amaitzen dena. Orduan, bere momentu angeluarra  $c = 0$  da.*

*Froga.* Absurdura eramanez,  $c \neq 0$  dela suposatuko dugu. 3.2.11 lematik,

$$I'' \geq E + \frac{|c|^2}{4I} \quad (3.11)$$

desberdintza dugu. Gainera, (3.10) limitea kontuan hartuz,  $\lim_{t \rightarrow \omega} I''(t) = +\infty$  da. Beraz,  $I'' > 0$  da  $\omega$ -ren inguruan, eta hortaz, existitzen da  $t_0 < \omega$  non  $I'$  gorakorra den  $[t_0, \omega)$ -n.  $I > 0$  desberdintzatik eta (3.10) limitetik,  $I' < 0$  dela ondorioztatzen dugu  $[t_0, \omega)$ -n. (3.11) desberdintza  $I'$ -rekin biderkatuz,

$$I''I' \leq EI' + \frac{|c|^2}{4I} I'$$

lortzen dugu. Bi aldeak  $[t_0, t]$  tartean integratuz, honako hau dugu  $t \in [t_0, \omega)$  guztietarako:

$$\frac{1}{2}(I'(t))^2 - EI(t) - \frac{|c|^2}{4} \ln I(t) \leq \frac{1}{2}(I'(t_0))^2 - EI(t_0) - \frac{|c|^2}{4} \ln I(t_0).$$

Baina, hau kontraesana da, (3.10) limiteagatik desberdintzako ezkerreko aldeak infinitura jotzen duelako, eta beraz, ez dagoelako bornatuta.  $\square$

### 3.2.3 Lagrangeren soluzio zirkularrak

Azken atal honetan, hiru gorputzetako problemaren kasu partikular bat ebartziko dugu. Plano batean dauden soluzioak aztertuko ditugu, eta horretarako, plano erreala eta plano konplexuaren arteko identifikazioa erabiliko dugu,  $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ .

**3.2.13 teorema.** *Izan bitez  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  lerrokatuta ez dauden hiru puntu,  $i$  unitate irudikaria eta  $w \in \mathbb{R}$ . Orduan,  $r_j(t) = e^{iwt} z_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  (3.1) sistemaren soluzioa da baldin eta soilik baldin hiru baldintza hauek betetzen badira:*

(i) *Masa-zentroa jatorrian dago,*

(ii)  *$z_1, z_2$  eta  $z_3$  hiruki aldeakide baten erpinak dira,*

(iii)  *$|w| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$  da,  $M = m_1 + m_2 + m_3$  eta  $d$  hirukiaren aldean luzera izanik.*

*Froga.*  $|r_j(t) - r_k(t)| = |e^{iwt}||z_j - z_k| = |z_j - z_k|$  da, eta  $r_{jk}$  deituko diogu notazioa arintzeko.  $\frac{d^2}{dt^2}(e^{iwt}) = -w^2 e^{iwt}$  denez,  $r = (r_1, r_2, r_3)$  (3.1) sistemaren soluzioa da baldin eta soilik baldin

$$\begin{cases} -w^2 z_1 = \frac{Gm_2}{r_{12}^3}(z_2 - z_1) + \frac{Gm_3}{r_{13}^3}(z_3 - z_1), \\ -w^2 z_2 = \frac{Gm_1}{r_{12}^3}(z_1 - z_2) + \frac{Gm_3}{r_{23}^3}(z_3 - z_2), \\ -w^2 z_3 = \frac{Gm_1}{r_{13}^3}(z_1 - z_3) + \frac{Gm_2}{r_{23}^3}(z_2 - z_3) \end{cases} \quad (3.12)$$

betetzen bada. Berez, sistema ez-lineala da, baina pentsatuko dugu  $r_{jk}$  finkoak direla eta ezezagunak  $z_j$  direla. Lehen ekuazioa  $m_1$ -ekin, bigarrena  $m_2$ -ekin eta hirugarrena  $m_3$ -ekin biderkatuz, eta hiru ekuazioak batuz,

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$$

lortzen dugu, hau da, masa-zentroa jatorrian dago. (3.12) sistemako ekuazio bat ordezkatu dezakegu, adibidez, azkena:

$$\begin{cases} -w^2 z_1 = \frac{Gm_2}{r_{12}^3}(z_2 - z_1) + \frac{Gm_3}{r_{13}^3}(z_3 - z_1), \\ -w^2 z_2 = \frac{Gm_1}{r_{12}^3}(z_1 - z_2) + \frac{Gm_3}{r_{23}^3}(z_3 - z_2), \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0. \end{cases}$$

Izenda ditzagun  $x_j = \text{Re}(z_j)$  eta  $y_j = \text{Im}(z_j)$   $j = 1, 2, 3$  guztietarako.  $x = (x_1, x_2, x_3)$  eta  $y = (y_1, y_2, y_3)$  bektoreek  $A\xi = 0$  ekuazioa bete behar dute,

$$A = \begin{pmatrix} w^2 - \frac{Gm_2}{r_{12}^3} - \frac{Gm_3}{r_{13}^3} & \frac{Gm_2}{r_{12}^3} & \frac{Gm_3}{r_{13}^3} \\ \frac{Gm_1}{r_{12}^3} & w^2 - \frac{Gm_1}{r_{12}^3} - \frac{Gm_3}{r_{23}^3} & \frac{Gm_3}{r_{23}^3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

izanik.  $z_1, z_2$  eta  $z_3$  ez daudenez lerrokatuta,  $x$  eta  $y$  linealki independenteak dira. Ondorioz,  $A\xi = 0$  ekuazioaren soluzioen multzoaren dimentsioa gutxienez 2 da. Hemendik  $\text{hein}(A) = 1$  dela lortzen dugu, bereziki,

$$\begin{vmatrix} \frac{Gm_1}{r_{12}^3} & \frac{Gm_3}{r_{23}^3} \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{Gm_2}{r_{12}^3} & \frac{Gm_3}{r_{13}^3} \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

izan behar dira. Bi determinante horiek garatuz,

$$\frac{Gm_1 m_3}{r_{12}^3} - \frac{Gm_1 m_3}{r_{23}^3} = \frac{Gm_2 m_3}{r_{12}^3} - \frac{Gm_2 m_3}{r_{13}^3} = 0$$

da. Hortaz,  $r_{12}^3 = r_{13}^3 = r_{23}^3$  izan behar dira, edo baliokidea dena,  $r_{12} = r_{23} = r_{13}$ . Hau da,  $r$  soluzioa bada,  $z_1, z_2, z_3$  puntuak hiruki aldekilde baten erpinak dira. Izenda dezagun  $d = r_{12}$ .  $A$ -ren determinante kalkulatzeko, hirugarren lerroa  $\frac{G}{d^3}$ -rekin biderkatu, eta lehen ekuazioari kenduko diogu. Horrela,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} w^2 - \frac{GM}{d^3} & 0 & 0 \\ \frac{Gm_1}{d^3} & w^2 - \frac{G(m_1 + m_3)}{d^3} & \frac{Gm_3}{d^3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = m_3 \left( w^2 - \frac{GM}{d^3} \right)^2$$

lortzen dugu.  $\text{hein}(A) = 1$  denez,  $\det(A) = 0$  da, eta beraz,  $|\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$  da.

Beste inplikazioa ikusteko, (3.12) sistema betetzen dela ikusi behar dugu, hipotesiko hiru baldintzak betetzen direla jakinda. Froga dezagun lehen



ekuazioa betetzen dela, beste bi kasuak era berean egiten baitira. (ii) eta (iii) baldintzak erabiliz,

$$\begin{aligned}
 & \omega^2 z_1 + \frac{Gm_2}{r_{12}^3}(z_2 - z_1) + \frac{Gm_3}{r_{13}^3}(z_3 - z_1) \\
 &= \frac{GM}{d^3}z_1 + \frac{Gm_2}{d^3}(z_2 - z_1) + \frac{Gm_3}{d^3}(z_3 - z_1) \\
 &= \frac{G}{d^3}((m_1 + m_2 + m_3)z_1 + m_2z_2 - m_2z_1 + m_3z_3 - m_3z_1) \\
 &= \frac{G}{d^3}(m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3)
 \end{aligned}$$

lortzen dugu. (i)-gatik masa-zentroa jatorrian dagoenez, azken berdintza 0 da. Beraz, lehen ekuazioa betetzen da.  $\square$

Ohartu  $r_j = e^{i\omega t} z_j$  itxurako soluzioak zirkunferentzietan mugitzen direla  $j = 1, 2, 3$  guztietarako. Horregatik, teorema honen bidez, 3 gorputzetako problemaren soluzio zirkularrak aurkitu ditugu.



## A. Eranskina

# Ariketa ebatziak

**1 Ariketa.** Izan bitez  $e \in \mathbb{R}^2$  eta  $k > 0$ . (1.3) foku bat jatorrian duen hiperbola baten adarraren (jatorritik gertuen dagoena) ekuazioa da baldin eta soilik baldin  $|e| > 1$  bada. Antzeko eran ikus daiteke hiperbolaren beste adarra ekuazio honen bidez adieraz daitekeela:

$$|x| + \langle -e, x \rangle = -k,$$

$e$  eta  $k$  beste adarraren ekuazioko konstante berak izanik.

*Ebazpena.* Izan bitez  $0$  eta  $A$  hiperbolaren fokuak.  $x$  hiperbolako puntu bat bada, hiperbolaren definizioagatik, existitzen da  $c > 0$  konstante bat non  $|x - A| - |x| = c$  den. Hortaz,  $|x - A|^2 = (c + |x|)^2$  dugu, eta hau garatzen badugu,  $|x|^2 + |A|^2 - 2 \langle A, x \rangle = c^2 + |x|^2 + 2c|x|$  da. Sinplifikatuz,

$$|x| + \langle \frac{1}{c}A, x \rangle = \frac{|A|^2 - c^2}{2c}$$

adierazpenera heltzen gara.  $e = \frac{1}{c}A$  eta  $k = \frac{|A|^2 - c^2}{2c}$  definituz, (1.3) ekuazioa iristen gara. Desberdintza triangeluarra erabiltzen badugu, kontuan hartuta  $A$  eta  $-x$  bektoreak ez daudela lerrokatuta edo aurkako noranzkoa dutela,

$$|A - x| < |A| + |x|$$

da, edo baliokidea dena,  $c = |x - A| - |x| < |A|$ . Beraz,  $k > 0$  eta  $|e| > 1$  dira.

Beste inplikazioa frogatzeko, (1.3) ekuazioa betetzen dela jakinda,  $|e| < 1$  izanik,  $x$  hiperbola batean dagoela ikusi behar dugu. Izan bitez  $c = \frac{2k}{|e|^2 - 1}$  eta  $A = ce$ . Hortaz,  $e = \frac{A}{c}$  eta  $k = \frac{c(|e|^2 - 1)}{2}$  dira. (1.3) ekuazioan ordezkaturaz,

$$|x| + \langle \frac{A}{c}, x \rangle = \frac{c(|e|^2 - 1)}{2} = \frac{|A|^2 - c^2}{2c}$$

lortzen dugu. Hemendik,  $2c|x| + 2 < A, x > = |A|^2 - c^2$  berdintza dugu, hots,  $|A|^2 - 2 < A, x > = c^2 + 2c|x|$ . Bi aldeetan  $|x|^2$  batuz,  $(|A - x|)^2 = (c + |x|)^2$  lortzen dugu, eta beraz,  $|A - x| = c + |x|$  izan behar da, bi gaiak positiboak direlako. Ondorioz, hiperbolaren definizioagatik,  $x$  hiperbolako puntu bat dela lortzen dugu.  $\square$

**2 Ariketa.** Izan bitez  $e \in \mathbb{R}^2$  eta  $k > 0$ . (1.3) fokua jatorrian duen parabola baten ekuazioa da baldin eta soilik baldin  $|e| = 1$  bada.

*Ebazpena.* Izan bitez 0 fokua,  $L$  zuzen zuzentzailea eta  $x$  parabolako puntu bat.  $x$ -tik fokurako distantziari  $d_1$  deitzen badiogu, eta  $x$ -tik  $L$ -rako distantziari  $d_2$ , orduan,  $d_1 = d_2$  izango da. Har dezagun  $L$ -ri perpendikularra den  $v$  bektore unitario bat. Bi aukera daude, baina zuzen zuzentzailearen ekuazioa

$$\langle x, v \rangle + c = 0 \quad (c > 0 \text{ izanik})$$

eran idazten dena aukeratuko dugu. Hortaz,  $d_1 = d_2$  denez,

$$|x| = \langle x, v \rangle + c$$

da eta  $e = -v$  eta  $k = c$  hartuz, (1.3) ekuaziora iristen gara. Kasu honetan,  $k > 0$  eta  $|e| = 1$  dira.

Beste inplikazioa frogatzeko,  $x$ -k (1.3) ekuazioa betetzen duela jakinda,  $|e| = 1$  izanik,  $x$  fokua jatorrian duen parabola bateko puntu bat dela ikusi behar dugu. Defini ditzagun  $v = -e$  zuzen zuzentzaileari perpendikularra den bektore bat eta  $c = k$ , eta ordezkia ditzagun (1.3) ekuazioan. Horrela,  $|x| + \langle -v, x \rangle = c$  betetzen dela lortzen dugu, hots,  $|x| = \langle v, x \rangle + c$ . Hortaz, parabolaren definizioagatik,  $x$  parabolaren dago.  $\square$

**3 Ariketa.** Izan bedi  $(x, y)$  (3.2) sistemaren soluzio bat,  $t = t_0$  une jakin batean  $x(t_0) = (2, 0, 0)$ ,  $y(t_0) = (0, 2, 2)$ ,  $x'(t_0) = (1, 1, -1)$  eta  $y'(t_0) = (1, -1, 1)$  betetzen dituena. Demagun  $(x, y)$  posizio bektorea duten bi gorputzek  $m$  masa bera dutela. Erantzun hurrengo galderak:

- (i) *Posible al da astebetara bi gorputzek talka egitea? Arrazoitu erantzuna.*
- (ii) *Zein da bi gorputzen masa-zentroa? Norengandik dago gertuen?*

*Ebazpena.* Has gaitezen (i) atalarekin. 3.2.2 proposizioagatik, badakigu gure sistemaren energia konstantea dela, eta (3.5) adierazpenetik

$$\begin{aligned} E &= \frac{m|x'(t_0)|^2}{2} + \frac{m|y'(t_0)|^2}{2} - \frac{Gm^2}{|x(0) - y(0)|} = \frac{3m}{2} + \frac{3m}{2} - \frac{Gm^2}{\sqrt{4+4+4}} \\ &= 3m - \frac{Gm^2}{2\sqrt{3}} < +\infty \end{aligned}$$

dela lortzen dugu. Demagun  $t = t_1$  unean bi gorputzek talka egiten dutela. Orduan,  $x(t_1) = y(t_1)$  denez,  $E(t_1) = -\infty$  izango da, baina hau kontraesana da, lehen esan dugun bezala energia konstantea baita eta  $t_0$  unean finitua baita. Beraz, ez da posible bi gorputzek talka egitea.

Masa-zentroaren 3.0.1 definizioa  $n = 2$  kasurako hartuz,

$$C(t) = \frac{m}{m+m}x(t) + \frac{m}{m+m}y(t) = \frac{x(t) + y(t)}{2}$$

dugu, hau da, masa-zentroa bi gorputzak lotzen dituen zuzenkiaren erdikopuntuan dago uneoro.  $\square$

**4 Ariketa.** *Izan bedi  $(x, y)$  (3.2) sistemaren soluzio bat, masa-zentroa jatorrian duena. Aurkitu  $\mu$ -ren zein baliotarako den  $y$  (2.3) ekuazioaren soluzio bat. Zein erlazio dago (3.2) eta (2.3) sistemen energien artean?*

*Ebazpena.* Izan bitez  $m_1$  eta  $m_2$   $x$  eta  $y$  posizioetan dauden gorputzen masak, hurrenez hurren. Masa-zentroa jatorrian dagoenez,  $\frac{m_1}{m_1+m_2}x + \frac{m_2}{m_1+m_2}y = 0$  da, eta hemendik  $x = -\frac{m_2}{m_1}y$  dela lortzen dugu. (3.2) sistemako bigarren ekuazioan ordezkatzuz,

$$\begin{aligned} m_2 y'' &= Gm_1 m_2 \frac{-\frac{m_2}{m_1}y - y}{\left|-\frac{m_2}{m_1}y - y\right|^3} = -Gm_1 m_2 \frac{\frac{m_1 + m_2}{m_1}y}{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^3 |y|^3} \\ &= -\frac{Gm_1^3 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{y}{|y|^3} \end{aligned}$$

ekuaziora iristen gara.  $m_2$  sinplifikatuz,

$$y'' = -\frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{y}{|y|^3}$$

da, hau da,  $\mu = \frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$  da.

Kalkula ditzagun orain bi sistemen energiak. (3.2) sistemaren energia (3.5) adierazpenetik lortzen dugu:

$$E_1 = \frac{m_1 |x'(t)|^2}{2} + \frac{m_2 |y'(t)|^2}{2} - \frac{Gm_1 m_2}{|x(t) - y(t)|}$$

$x = -\frac{m_2}{m_1}y$  denez,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{m_1}{2} \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 |y'(t)|^2 + \frac{m_2}{2} |y'(t)|^2 - \frac{Gm_1m_2}{\left| -\frac{m_2}{m_1}y(t) - y(t) \right|} \\ &= \frac{(m_1 + m_2)m_2}{2m_1} |y'(t)|^2 - \frac{Gm_1^2m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{1}{|y(t)|} \end{aligned}$$

da. Kalkula dezagun orain beste sistemaren energia, (2.4) adierazpenak ematen diguna:

$$E_2 = \frac{m_2}{2} |y'(t)|^2 - \frac{\mu m_2}{|y(t)|} = \frac{m_2}{2} |y'(t)|^2 - \frac{Gm_1^3m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{|y(t)|}.$$

Erraz ikusten da  $\frac{m_1}{m_1 + m_2}E_1 = E_2$  dela.  $\square$

**5 Ariketa.** Izan bitez  $r = (r_1, r_2, r_3) : (\alpha, +\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^3)^3$  (3.1) sistemaren soluzioa  $n = 3$  kasurako, eta  $I$  bere inertzia momentua. Demagun

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} r_2(t) \quad (\text{A.1})$$

betetzen duela. Orduan, frogatu ondorengo baieztapenak:

- (i)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I''(t) = +\infty$  da.
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t^2} = +\infty$  da.
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r_3(t)| = +\infty$  da, baina  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|r_3(t)|}{t}$  existitzen da eta finitua da.
- (iv) Aurkitu kontraesan bat.

*Ebazpena.* Has gaitezen (i) atala frogatzen. Izan bedi  $\mathcal{V}$   $r$ -ren potentziala. (A.1) berdintza kontutan hartuta,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(r(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{Gm_i m_j}{|r_i(t) - r_j(t)|} = -\infty$$

dela lortzen dugu. Bestalde, (3.8) ekuaziotik  $I'' = 2E - \mathcal{V}(r(t))$  berdintza dugu. Horrela,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I''(t) = +\infty$  dela lortzen dugu, nahi genuen bezala.

(i) atalaren ondorioz, existitzen da  $t_0 < +\infty$  non  $I''(t) \geq 1$  den  $t \geq t_0$  guztietarako. Ondorioz,

$$I'(t) = I'(t_0) + \int_{t_0}^t I''(s) ds \geq I'(t_0) + (t - t_0)$$

da  $t \geq t_0$  guztietarako. Antzeko eran,

$$\begin{aligned} I(t) &= I(t_0) + \int_{t_0}^t I'(s) ds \geq I(t_0) + \int_{t_0}^t (I'(t_0) + (s - t_0)) ds \\ &= I(t_0) + I'(t_0)(t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

betetzen da  $t \geq t_0$  guztietarako. Ondorioz,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = +\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} I'(t) = +\infty \quad (\text{A.2})$$

dira. Bi aldiz L'Hopital-en erregela erabiliz, eta (i) atala kontuan hartuz,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I'(t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I''(t)}{2} = +\infty$$

dela lortzen dugu. Froga dezagun (iii) atala. (A.1) eta (A.2)-ko lehen limitea kontuan hartuz,

$$\begin{aligned} +\infty &= \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} (m_1|r_1(t)|^2 + m_2|r_2(t)|^2 + m_3|r_3(t)|^2) \\ &= \frac{m_3}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} |r_3(t)|^2 \end{aligned}$$

da, eta hortaz,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |r_3(t)| = +\infty$  da. Izan bedi  $\mathcal{C}$   $r$ -ren masa-zentroa.  $r$  3 gorputzetako problemaren soluzioa denez, 3.0.1 proposizioagatik, badakigu existitzen direla  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$  non  $\mathcal{C}(t) = \alpha + \beta t$  den. Beraz, batetik

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{C}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha}{t} + \beta \right) = \beta$$

dugu, eta bestetik, (A.1) berdintza kontuan hartuz,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{C}(t)}{t} = \frac{1}{M} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{m_1 r_1(t)}{t} + \frac{m_2 r_2(t)}{t} + \frac{m_3 r_3(t)}{t} \right) = \frac{1}{M} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{r_3(t)}{t}$$

da. Hortaz,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{r_3(t)}{t}$  finitua izan behar denez,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|r_3(t)|}{t}$  ere finitua izan behar da.

Bukatzeko, aurki dezagun kontraesana. (ii) atala erabiliz,

$$\begin{aligned} +\infty &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{m_1|r_1(t)|^2}{t^2} + \frac{m_2|r_2(t)|^2}{t^2} + \frac{m_3|r_3(t)|^2}{t^2} \right) \\ &= \frac{m_3}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|r_3(t)|^2}{t^2} \end{aligned}$$

lortzen dugu, eta beraz,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|r_3(t)|}{t} = +\infty$  da. Baina, hau kontraesana da (iii) atalagatik.  $\square$





# Bibliografia

- [1] N. Arrizabalaga eta J. Rivas, *Ekuzio diferentzialak*, Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, UPV/EHU, 2019.
- [2] J.E. Marsden eta A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- [3] R. Ortega Ríos eta A. Ureña Alcázar, *Introducción a la Mecánica Celeste*, Editorial Universitaria de Granada, 2010.

