

Erik Macho

Mecánica Aplicada

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Mecánica Aplicada

Erik Macho

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Macho Mier, Erik

Mecánica aplicada [Recurso electrónico] / Erik Macho Mier. – Datos. – [Leioa]: Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, 2023. – 1 recurso en línea: PDF (322 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)

En la cub.: Bilboko Ingeniaritza Eskola=Escuela de Ingeniería de Bilbao,
UPV/EHU. Departamento de Ingeniería Mecánica.

Modo de acceso: World Wide Web

ISBN: 978-84-1319-548-3.

1. Mecánica aplicada.

(0.034)531

1.	Sistemas de fuerzas	1
1.1	Magnitudes vectoriales	1
1.1.1	Diferencia entre magnitud escalar y vectorial y unidades de una magnitud.....	1
1.1.2	Vectores	1
1.1.3	Componentes y módulo	2
1.1.4	Suma de vectores	2
1.1.5	Producto de un vector por un escalar	2
1.1.6	Formas de definir un vector	3
1.1.7	Vector unitario y cosenos directores	4
1.1.8	Producto escalar.....	4
1.1.9	Producto vectorial	5
1.2	Concepto de fuerza.....	5
1.2.1	Modelización	5
1.2.2	Fuerza como interacción entre dos cuerpos	6
1.2.3	Principio de acción y reacción	6
1.2.4	Definición de fuerza.....	7
1.2.5	Principio de transmisibilidad.....	7
1.2.6	Ley de gravitación.....	7
1.2.7	Clasificación.....	7
1.3	Momento de una fuerza respecto de un punto	9
1.3.1	Definición	9
1.3.2	Brazo del momento.....	9
1.3.3	Interpretación y representación.....	10
1.3.4	Teorema de Varignon	10
1.3.5	Cálculo vectorial.....	10
1.3.6	Cálculo escalar.....	11
1.4	Momento de una fuerza respecto de un eje.....	12
1.4.1	Definición	12
1.4.2	Propiedades	12
1.4.3	Uso de momentos respecto de ejes para calcular momentos respecto de puntos	13
1.5	Par de fuerzas y momento puro	15
1.6	Composición de fuerzas.....	17
1.6.1	Sistemas de fuerzas equivalentes.....	17
1.6.2	Reducción a un sistema equivalente fuerza-par en un punto	17
1.6.3	Teorema del momento	19
1.6.4	Propiedades de los sistemas de fuerzas.....	19
2.	Centroides	23
2.1	Centro de gravedad.....	23
2.1.1	Concepto de centro de gravedad	23
2.1.2	Posición del centro de gravedad.....	24
2.1.3	Centroides.....	25
2.1.4	Propiedades de simetría.....	25
2.2	Momento estático.....	26

2.3	Centroides de figuras elementales	28
2.3.1	Triángulo.....	28
2.3.2	Semicírculo	28
2.3.3	Semicircunferencia.....	28
2.3.4	Semiesfera	29
2.3.5	Cono	29
2.4	Figuras compuestas.....	29
2.5	Teoremas de Pappus-Guldin.....	30
3.	Equilibrio estático.....	31
3.1	Grados de libertad en el espacio y en el plano	31
3.2	Uniones entre sólidos. Fuerzas de enlace.....	32
3.3	Diagrama de sólido libre	34
3.4	Ecuaciones de equilibrio	35
3.4.1	Axioma fundamental del equilibrio estático	35
3.4.2	Estrategias de resolución en sistemas planos	36
3.4.3	Comprobación de resultados	38
3.5	Cargas distribuidas	40
3.6	Elemento biarticulado sin cargas aplicadas	41
3.7	Articulaciones con más de dos elementos.....	45
3.8	Número de ecuaciones de equilibrio independientes.....	46
3.9	Celosías planas	49
3.9.1	Definición	49
3.9.2	Método de las secciones	49
3.9.3	Método de los nudos.....	51
3.10	Estructuras espaciales	53
4.	Rozamiento.....	65
4.1	Contacto entre sólidos. Fuerza normal.....	65
4.2	Contacto con fricción. Fuerza de rozamiento	66
4.2.1	Contacto puntual	66
4.2.2	Contacto no puntual	67
4.2.3	Ángulo de fricción.....	67
4.3	Autorretención.....	68
5.	Cables.....	77
5.1	Propiedades de los sólidos funiculares	77
5.2	Cable parabólico.....	78
5.2.1	Componentes de tensión y forma del cable	78
5.2.2	Metodología de cálculo	80
5.2.3	Longitud aproximada del cable parabólico.....	87
5.3	Catenaria	88

6.	Cinemática del sólido rígido.....	93
6.1	Cinemática del punto.....	93
6.2	Movimientos elementales.....	96
6.2.1	Traslación pura.....	96
6.2.2	Rotación pura o con eje fijo.....	96
6.3	Movimiento General.....	99
6.3.1	Significado de la velocidad angular y la aceleración angular	99
6.3.2	Ley de derivación en bases móviles.....	100
6.3.3	Campos de velocidades y aceleraciones	101
6.4	Movimiento Relativo	102
6.4.1	Movimiento de un punto respecto de un sólido	102
6.4.2	Movimiento de un sólido respecto de otro	103
6.5	Estrategias de resolución.....	105
6.5.1	Comprobación del resultado de un producto vectorial.....	105
6.5.2	Rotación pura de un elemento respecto de otro	107
6.5.3	Deslizadera sobre guía rectilínea fija.....	114
6.5.4	Deslizadera sobre guía móvil.....	115
7.	Cinemática del movimiento plano.....	121
7.1	Particularidades del movimiento plano	121
7.1.1	Punto con movimiento plano.....	121
7.1.2	Sólido con movimiento plano	121
7.1.3	Campo de aceleraciones en movimiento plano	122
7.2	Polo de velocidades	122
7.2.1	Definición y propiedades	122
7.2.2	Construcciones gráficas	123
7.3	Mecanismos de cadena cerrada.....	125
7.4	Estrategias de resolución.....	126
7.4.1	Recopilación de ideas clave.....	126
7.4.2	Articulación entre dos elementos de magnitudes angulares desconocidas.....	127
7.4.3	Deslizadera sobre guía rectilínea fija.....	130
7.4.4	Deslizadera sobre guía rectilínea móvil.....	133
7.4.5	Deslizadera sobre guía circular fija	135
7.5	Movimiento de rodadura	136
7.5.1	Curvas polares.....	136
7.5.2	Velocidad de sucesión.....	137
7.5.3	Aceleración del CIR	137
7.5.4	Rodadura pura entre dos elementos móviles	138
7.5.5	Rodadura pura sobre pista fija.....	139
7.6	Polo de aceleraciones.....	142
7.6.1	Definición y propiedades	142
7.6.2	Circunferencias notables.....	143

8.	Propiedades de inercia de sólido	151
8.1	Momento de inercia.....	151
8.1.1	Radio de giro	152
8.2	Producto de inercia.....	153
8.3	Teoremas de Steiner	154
8.4	Momentos de inercia de figuras elementales	156
8.4.1	Esfera.....	157
8.4.2	Prisma recto y chapa rectangular	157
8.4.3	Cilindro y disco.....	158
8.4.4	Barra.....	158
8.4.5	Cono	159
8.5	Figuras compuestas.....	159
8.6	Tensor de inercia.....	160
8.6.1	Momento de inercia respecto de un eje cualquiera	160
8.6.2	Elipsoide de inercia	161
8.6.3	Cálculo de momentos principales y direcciones principales de inercia.....	163
9.	Dinámica del sólido rígido	165
9.1	Magnitudes fundamentales de la dinámica.....	165
9.1.1	Cantidad de movimiento	165
9.1.2	Momento cinético.....	166
9.1.3	Sistema dinámico	167
9.2	Teoremas fundamentales de la dinámica.....	168
9.2.1	Teorema de la cantidad de movimiento.....	168
9.2.2	Teorema del momento cinético	168
9.3	Momento cinético de un sólido rígido.....	169
9.4	Teorema del momento cinético para un sólido rígido	170
9.4.1	Ecuaciones de Euler.....	171
9.4.2	Sistema de referencia no vinculado al sólido.....	171
9.5	Principio de d'Alembert.....	172
9.5.1	Diagramas compuestos por varios sólidos	174
9.6	Sistemas de ejes principales de inercia	181
9.7	Reacciones dinámicas	187
9.8	Trabajo y energía	190
9.8.1	Energía cinética.....	190
9.8.2	Trabajo de las fuerzas aplicadas	191
9.8.3	Teoremas energéticos.....	191
9.8.4	Energía cinética de un sólido con eje fijo	192
9.8.5	Energía cinética de un sólido con movimiento plano	192
10.	Dinámica del sólido con eje fijo.....	197
10.1	Particularización del teorema del momento cinético	197
10.2	Reacciones en los apoyos.....	198
10.3	Equilibrado de rotores.....	200

11. Dinámica plana.....	203
11.1 Particularización de los teoremas fundamentales.....	203
11.2 Problemas dinámicos.....	205
11.3 Elementos biarticulados, sin cargas aplicadas, de masa despreciable	211
11.4 Estrategias de resolución para mecanismos de un grado de libertad.....	213
12. Propiedades de inercia de área	237
12.1 Definiciones y propiedades	237
12.1.1 Relación con las propiedades de inercia de un sólido.....	238
12.2 Áreas elementales.....	239
12.2.1 Rectángulo.....	239
12.2.2 Triángulo general	239
12.2.3 Triángulo rectángulo.....	240
12.2.4 Círculo.....	240
12.2.5 Semicírculo.....	241
12.2.6 Cuarto de círculo.....	241
12.3 Círculo de Mohr. Momentos y direcciones principales	242
12.4 Áreas compuestas.....	244
13. Esfuerzos internos	265
13.1 Introducción	265
13.2 Axial, cortante y flector.....	266
13.3 Diagramas de esfuerzos internos.....	267
13.4 Relaciones entre cargas y diagramas.....	268
13.5 Método de los cortes	270
13.6 Método de integración	281
13.7 Caso espacial.....	296
14. Tensiones normales	303
14.1 Tensión normal y deformación unitaria	303
14.1.1 Posición de la fuerza axial.....	304
14.1.2 Elasticidad lineal.....	305
14.2 Tensiones en flexión.....	306
14.2.1 Flexión simple.....	306
14.2.2 Flexión compuesta.....	309

1. SISTEMAS DE FUERZAS

1.1 MAGNITUDES VECTORIALES

1.1.1 Diferencia entre magnitud escalar y vectorial y unidades de una magnitud

Las *magnitudes escalares* son aquellas que quedan completamente definidas con un número, una cantidad. Ejemplos: *masa, longitud, área, densidad*, etc.

Por el contrario, las *magnitudes vectoriales* son aquellas que, para ser completamente definidas, además de un número que determine cómo de ‘grandes’ son, es decir, su *módulo*, requieren de información adicional: *dirección, sentido y punto de aplicación*. En otras palabras, una magnitud vectorial queda definida mediante un *vector*. Ejemplos: *fuerza, momento, velocidad, aceleración*, etc.

Toda magnitud, sea escalar o vectorial, posee unidades, que constituyen una información fundamental y siempre deben indicarse (cuánto de qué). Sin unidades una magnitud no está definida.

Aunque existen un total de siete *unidades básicas* e independientes entre sí, en el ámbito de la mecánica sólo se emplean tres. En el sistema internacional (*SI*):

- Unidad de *longitud*: - metro, *m*
- Unidad de *masa*: - kilogramo, *kg*
- Unidad de *tiempo*: - segundo, *s*

Todas las demás magnitudes tienen *unidades derivadas* (de las anteriores). Por ejemplo, en el *SI* la unidad de fuerza es el *Newton* $N = kg \cdot m/s^2$. Magnitudes con diferentes unidades pueden multiplicarse (dividirse) entre sí para dar lugar a nuevas unidades (*fuerza = masa \cdot aceleración*). Sin embargo, para que varios términos puedan sumarse (restarse) han de tener necesariamente las mismas unidades.

1.1.2 Vectores

Para indicar que una magnitud posee un carácter vectorial sobre su nombre se dibuja una flecha (\vec{v}). Esta notación resulta de vital importancia ya que las magnitudes vectoriales requieren de un tratamiento matemático específico, por lo que en la nomenclatura deben quedar claramente diferenciadas de las magnitudes escalares (no es lo mismo sumar dos números que sumar dos vectores). Cuando sobre el nombre de la magnitud vectorial no se dibuje la flecha se estará haciendo referencia al módulo (‘longitud’) de la misma (v es el módulo del vector \vec{v}).

Un vector es una entidad matemática que puede representarse gráficamente como un *segmento orientado*. Sus características por tanto son:

- *Módulo*: Es el valor de la longitud del segmento. Establece cuánto vale (cómo de grande es) la magnitud que representa.
- *Dirección*: Viene definida por la recta que contiene (sobre la que se apoya) el segmento. Dicha recta también se denomina *línea de acción* del vector.
- *Sentido*: Determina hacia dónde apunta el vector y queda definido por una flecha dibujada en uno de sus extremos.

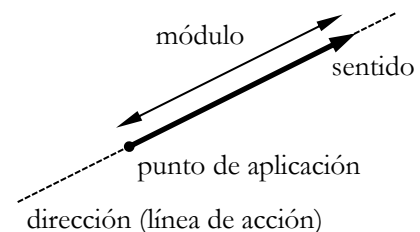


Fig. 1.1 Características de un vector

- *Punto de aplicación*: También denominado *origen* del vector. Indica el punto del espacio en el que actúa (existe) la magnitud vectorial. En función de esta característica las magnitudes vectoriales pueden clasificarse en:
 - Vectores *fijos* (o ligados): Cuando el punto de aplicación es uno concreto.
 - Vectores *deslizantes*: Cuando el punto de aplicación puede ser cualquiera a lo largo de la línea de acción de la magnitud. Como se verá, las fuerzas son vectores deslizantes.
 - Vectores *libres*: Cuando el punto de aplicación puede ser cualquiera del espacio. Como se verá, los momentos son vectores libres.

1.1.3 Componentes y módulo

Para definir matemáticamente un vector en primer lugar es necesario establecer un sistema de coordenadas dado por unos ejes cartesianos xyz , que sirvan de referencia. Las proyecciones del vector sobre dichos ejes, v_x , v_y , v_z , se denominan *componentes*. Un vector puede expresarse matemáticamente a través de sus componentes de varias formas, una de ellas es:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

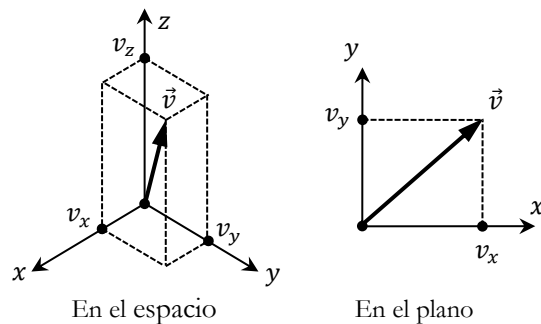


Fig. 1. 2 Componentes

El módulo de un vector en función de sus componentes viene dado por: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

1.1.4 Suma de vectores

La suma de dos vectores da como resultado otro vector denominado *resultante*. Analíticamente se suman las componentes.

Sean: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

Entonces: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$

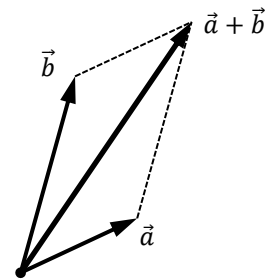


Fig. 1. 3 Ley del paralelogramo

Este resultado también puede construirse gráficamente. Debido a la forma que toma, esta construcción gráfica se denomina *ley del paralelogramo*.

1.1.5 Producto de un vector por un escalar

El resultado de multiplicar un vector \vec{v} por un número n es otro vector, de la misma dirección y módulo multiplicado por n :

$$n \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} n \cdot v_x \\ n \cdot v_y \\ n \cdot v_z \end{pmatrix}$$

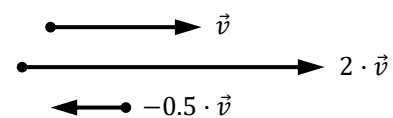


Fig. 1. 4 Vector escalado

Si el escalar es negativo se invierte el sentido. Resulta prácticamente trivial comprobar que esta operación posee la propiedad distributiva:

- Respecto de la suma de vectores: $n \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = n \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$
- Respecto de la suma de escalares: $(n + m) \cdot \vec{v} = n \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{v}$

1.1.6 Formas de definir un vector

Matemáticamente los vectores se expresan a partir de sus componentes. Las formas más habituales, aparte de la vista hasta ahora, son:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \text{así como:} \quad \vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

\vec{i} , \vec{j} y \vec{k} se denominan *versores* y son los vectores unitarios en las direcciones y sentidos positivos de los ejes x , y y z respectivamente.

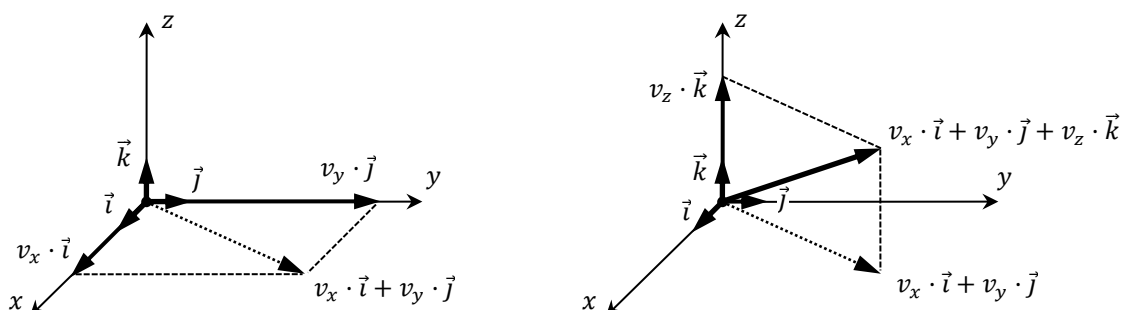


Fig. 1. 5 Componentes cartesianas

Cuando un vector forme parte de un sistema plano xy , bidimensional, en lugar de espacial, bastará con definir sus dos componentes activas, puesto que la componente perpendicular al plano, z , es siempre nula:

$$\vec{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

Finalmente, las componentes cartesianas de un vector también pueden obtenerse a partir de sus coordenadas esféricas (en el espacio) o polares (en el plano):

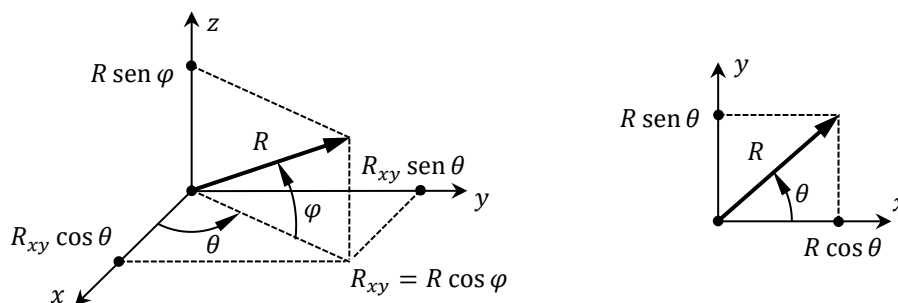


Fig. 1. 6 Coordenadas esféricas y polares

1.1.7 Vector unitario y cosenos directores

Se denomina *vector unitario* a todo aquel cuyo módulo es la unidad. Para cualquier vector \vec{v} se puede definir un vector unitario \vec{u}_v que tiene la misma dirección y sentido, pero módulo unidad:

$$\vec{u}_v = \frac{1}{v} \cdot \vec{v}$$

Por lo tanto, todo vector puede expresarse en función de su módulo y su vector unitario $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_v$.

Los *cosenos directores* vienen dados por los ángulos que forma el vector con los ejes del sistema de referencia y determinan la dirección y el sentido del vector.

$$\vec{v} = \begin{Bmatrix} v \cos \alpha \\ v \cos \beta \\ v \cos \gamma \end{Bmatrix} \quad \text{es decir:} \quad \vec{u}_v = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

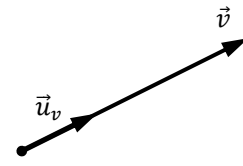


Fig. 1. 7 Vector unitario

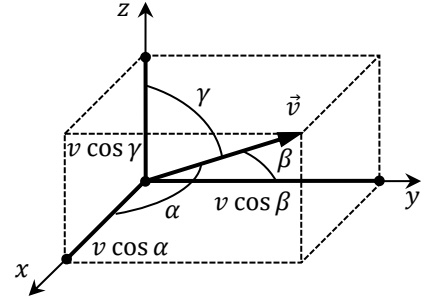


Fig. 1. 8 Cosenos directores

1.1.8 Producto escalar

Se trata de una multiplicación entre dos vectores que, a diferencia del producto vectorial, tiene como resultado una magnitud escalar (un número y no otro vector).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = a \cdot b \cdot \cos \theta$$

Siendo θ el ángulo que forman entre sí ambos vectores, por lo que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es 0. Esta operación tiene las propiedades conmutativa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, y distributiva respecto de la suma de vectores, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Su mayor utilidad consiste en que permite calcular la proyección de un vector \vec{v} sobre una recta cualquiera, definida por un vector unitario en su dirección \vec{u}_r (distinta de la del propio vector):

$$v_r = \vec{v} \cdot \vec{u}_r = v \cdot 1 \cdot \cos \theta = v \cos \theta$$

Obviamente, si posteriormente se desea expresar dicha proyección vectorialmente:

$$\vec{v}_r = v_r \cdot \vec{u}_r = (\vec{v} \cdot \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_r$$

Si la recta está definida mediante dos puntos A y B de coordenadas conocidas, en primer lugar, se puede definir un vector \vec{r} sobre la recta que vaya desde A hasta B . Si \vec{a} y \vec{b} son los vectores que definen las posiciones de los dos puntos (las componentes de los vectores son las coordenadas de los puntos), se cumple que $\vec{b} = \vec{a} + \vec{r}$, y por lo tanto, $\vec{r} = \vec{b} - \vec{a}$, a partir del cual resulta inmediato obtener \vec{u}_r .

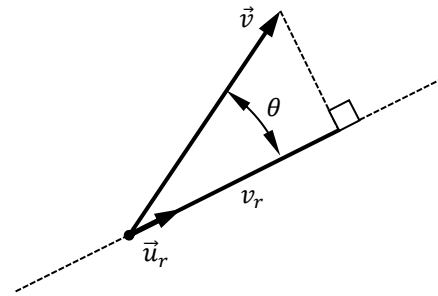


Fig. 1. 9 Proyección de un vector

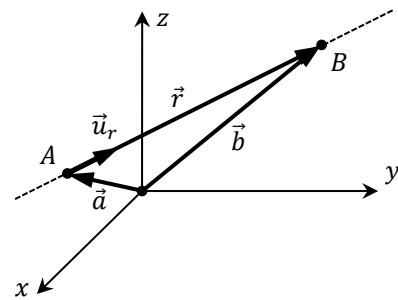


Fig. 1. 10 Dirección dada por dos puntos

1.1.9 Producto vectorial

El resultado de multiplicar vectorialmente dos vectores $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es otro vector \vec{c} tal que:

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \quad c_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Los vectores \vec{a} y \vec{b} llevados a un origen común en general definen un plano π , siendo θ el ángulo que forman entre ellos. El resultado de realizar el producto vectorial entre ellos es un vector con las siguientes propiedades:

- Su módulo es $c = a \cdot b \cdot \text{sen } \theta$.
- Su dirección es perpendicular al plano π . Es perpendicular, por tanto, a cada uno de los vectores que se multiplican.
- Su sentido viene dado por la *regla de la mano derecha* al reproducir el giro de avance desde \vec{a} hacia \vec{b} .

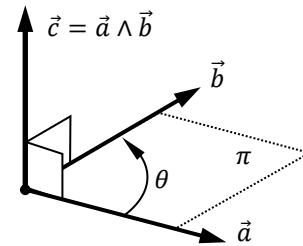


Fig. 1.11 Producto vectorial

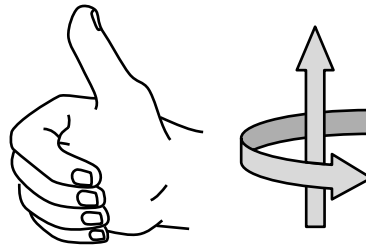


Fig. 1.12 Regla de la mano derecha

El producto vectorial tiene las propiedades:

- Anticonmutativa: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- Distributiva respecto de la suma de vectores: $\vec{v} \wedge (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{v} \wedge \vec{a} + \vec{v} \wedge \vec{b}$
- El módulo del producto vectorial de dos vectores perpendiculares es el producto de sus módulos.
- El producto vectorial de dos vectores paralelos es el *vector nulo*: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.2 CONCEPTO DE FUERZA

1.2.1 Modelización

Físicamente una *fuerza* es una *acción* que se ejerce sobre *algo*. Esa *acción* y ese *algo* son cosas que suceden y existen en el mundo real, pero cuando se quiere tratar la realidad matemáticamente hay que traducirla a un modelo matemático. De eso se encarga la *física*. Pues bien, por ejemplo, esa acción física, o *mecánica*, que se ejerce sobre algo material se modeliza mediante una entidad matemática denominada *fuerza*.

A continuación, se dará una breve indicación sobre cómo modelizar ese *algo* sobre lo que se ejerce la acción. En función de qué es lo que se quiere analizar, el modelo matemático que se haga de un determinado fenómeno real puede ser más o menos complejo, o sofisticado.

- La forma más simple posible de considerar un cuerpo es como un *punto material*, o *partícula*. No se tienen en cuenta sus dimensiones reales, y el cuerpo queda idealizado con toda su masa concentrada en un punto del espacio. Para el estudio de ciertos fenómenos físicos con esto es suficiente. Siempre que sea posible se debe acudir al modelo más simple. Este modelo es válido por ejemplo para analizar el movimiento de traslación.
- El siguiente paso en complejidad consiste en considerar el sólido como un *sólido rígido*. Este modelo tiene en cuenta el tamaño y forma real del cuerpo, pero todos los puntos del sólido ocupan posiciones fijas entre sí. Si las posiciones relativas de dos puntos no pueden cambiar, como su propio nombre indica, este modelo matemático asume que se tratará el cuerpo como un sólido indeformable. Este modelo permite tener en cuenta las rotaciones del cuerpo, es decir, contempla la orientación que este posee, o adquiere.
- El último paso consiste en el estudio de lo que se conoce como *sólido deformable*, que permite tener en cuenta la flexibilidad del material. A medida que se aumenta la complejidad del modelo matemático, éste se va pareciendo más a la realidad.

1.2.2 Fuerza como interacción entre dos cuerpos

Cuando se tienen dos cuerpos A y B interactuando entre sí, se entiende como fuerza la acción que cada uno ejerce sobre el otro. De tal manera, se puede sustituir en el sistema uno de los cuerpos, por ejemplo el B , por la acción que éste ejerce sobre el otro, en este caso sobre A , sin que nada cambie.

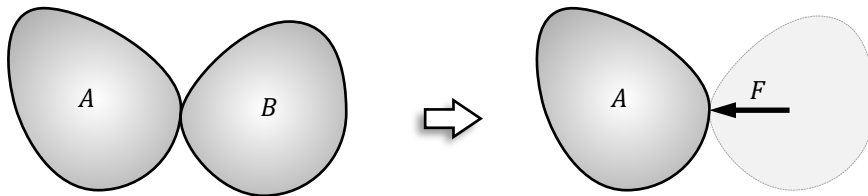


Fig. 1. 13 Interacción entre sólidos

1.2.3 Principio de acción y reacción

Para toda acción siempre existe una reacción igual y opuesta. Cuando dos cuerpos A y B interactúan entre sí ejercen fuerzas cada uno de ellos sobre el otro. Dichas fuerzas son siempre de la misma magnitud (módulo), son colineales (comparten la misma línea de acción), pero tienen sentidos opuestos, es decir $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. Nunca puede existir una acción sin su reacción correspondiente en alguna parte.

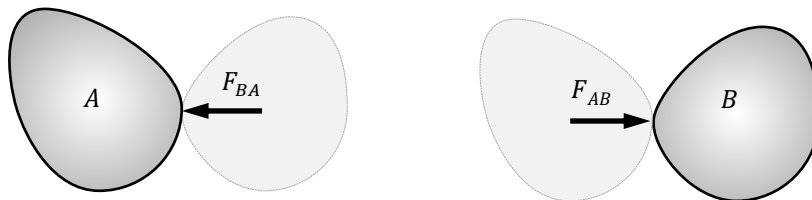


Fig. 1. 14 Principio de acción y reacción

1.2.4 Definición de fuerza

Fuerza es toda acción que *tiende* a modificar el estado de movimiento (y por tanto, también de *reposo*, que no es sino un caso particular de movimiento) de un cuerpo. La palabra *tiende* quiere decir que la fuerza intenta (le gustaría) cambiar el estado de movimiento del cuerpo, lo cual no quiere decir que en realidad vaya a realizarlo. Si sobre un cuerpo firmemente sujeto se ejerce una fuerza, ésta tenderá a moverlo, pero el cuerpo permanecerá en reposo.

La fuerza es una magnitud vectorial, por lo que todo lo contemplado en dicho apartado es aplicable. Así por ejemplo, las características que definen una fuerza son su:

- Módulo: *cuánto* vale, cómo de grande es.
- Punto de aplicación: *dónde* se ejerce esa acción.
- Dirección y sentido: *hacia dónde* apunta.

1.2.5 Principio de transmisibilidad

La fuerza se puede tratar como un vector deslizante, es decir, aunque en la realidad tenga un punto de aplicación concreto, desde un punto de vista matemático (a la hora de considerarla en las ecuaciones), su efecto es el mismo si dicha fuerza se considerara aplicada sobre cualquier otro punto de su línea de acción.

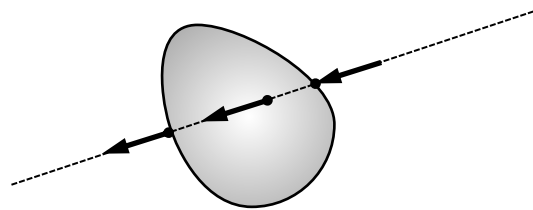


Fig. 1. 15 Fuerza como vector deslizante

1.2.6 Ley de gravitación

Sobre todo cuerpo, debido a la acción gravitatoria, existe una fuerza de valor P , denominada *peso*, proporcional a su *masa*, m , es decir, $P = m \cdot g$. Esta fuerza siempre ‘apunta hacia el suelo’. La constante de proporcionalidad, g , se denomina *gravedad* y en *La Tierra* toma el valor $9.81 \dots \approx 10 \text{ m/s}^2$.

1.2.7 Clasificación

Las fuerzas pueden clasificarse atendiendo a diversos criterios. En función de cómo se consideren aplicadas, o mejor dicho, repartidas, se tendrán fuerzas:

- *Puntuales*. Toda la fuerza está concentrada en único punto. Las unidades de una fuerza puntual son las ordinarias, N , en *SI*.
- *Distribuidas*, que a su vez podrán encontrarse repartidas a lo largo de:
 - Una línea: N/m
 - Una superficie: N/m^2
 - Un volumen: N/m^3

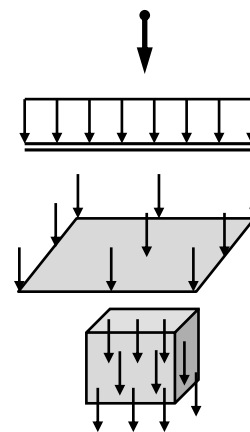
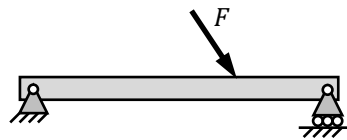


Fig. 1. 16 Fuerzas puntuales y distribuidas

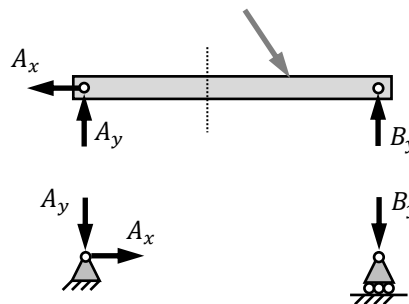
Desde otro punto de vista, atendiendo a dónde se consideren actuando, las fuerzas se clasifican en:

- *Aplicadas*: Son las acciones que directamente se ejercen sobre el sistema mecánico. Normalmente éstas son cargas conocidas.
- *De enlace, o reacciones*: En sistemas mecánicos, los sólidos están unidos entre sí, de manera que al aplicar cargas sobre ellos, a través de dichas uniones se transmiten fuerzas de unos a otros. Para poder determinarlas es necesario aislar cada cuerpo y analizarlo por separado.
- *Internas, o esfuerzos*: Una carga aplicada se transmite por el interior del sólido desde su punto de aplicación a los puntos de enlace. Para poder determinarlas es necesario cortar virtualmente el sólido y analizar por separado las mitades resultantes.

Fuerzas aplicadas



Fuerzas de enlace



Fuerzas internas

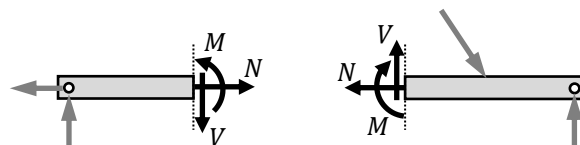


Fig. 1. 17 Fuerzas aplicadas, de enlace e internas

Las fuerzas aplicadas y de enlace son fuerzas *externas*. El conjunto de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema material aislado se denomina sistema de fuerzas *actuantes*. Si este sistema material aislado es un elemento completo, todas las fuerzas actuantes serán externas, sin embargo, si dicho elemento está cortado, el sistema de fuerzas actuantes incluirá tanto fuerzas externas como internas. La representación de un sistema material aislado (“flotando”) bajo la acción del sistema completo de fuerzas actuantes que le afectan se denomina *diagrama de sólido libre*.

A la hora de trabajar tanto con fuerzas de enlace, como internas, hay que considerar siempre el principio de *acción y reacción*.

1.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN PUNTO

1.3.1 Definición

Supóngase:

- Una fuerza \vec{F} aplicada en un punto A
- Un punto O

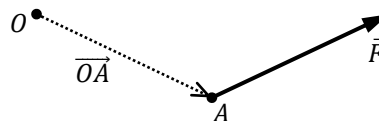


Fig. 1. 18 Fuerza y punto

Se define el momento de la fuerza \vec{F} respecto del punto O (o momento de \vec{F} respecto de O), \vec{M}_O , como el producto vectorial del vector \vec{OA} por \vec{F} , es decir: $\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$.

Sus características son, por tanto, las propias de un producto vectorial, a saber:

- Su *dirección* es la perpendicular al plano que forman \vec{F} y \vec{OA} (o \vec{F} y O).
- Su *sentido* es el que establece la regla de la mano derecha al representar \vec{F} y \vec{OA} con un origen común y reproducir el giro para ir de \vec{OA} a \vec{F} . Este sentido coincide con el del giro que tiende a producir \vec{F} respecto de O .
- Su *módulo* es $F \cdot OA \cdot \text{sen } \theta$, siendo θ el ángulo que forman \vec{OA} y \vec{F} .

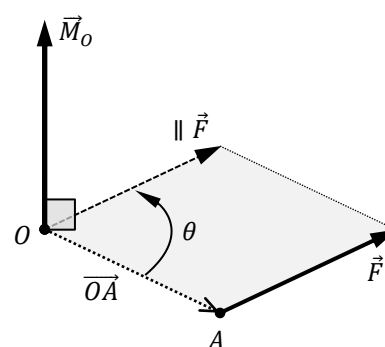


Fig. 1. 19 Vector momento

Puesto que un momento proviene de multiplicar un vector de posición por una fuerza, sus unidades son *[fuerza · distancia]*, $N \cdot m$ en SI.

1.3.2 Brazo del momento

La distancia en perpendicular desde el punto O a la línea de acción de \vec{F} se denomina *brazo* del momento, d . Adviértase que como $d = OA \cdot \text{sen } \theta$, $M_O = F \cdot d$.

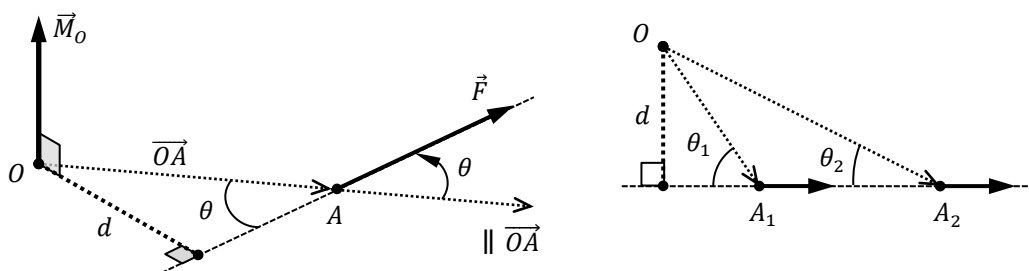


Fig. 1. 20 Brazo

Además, se comprueba fácilmente que el brazo, y por tanto el propio momento, es independiente del punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. Al ir moviendo la fuerza en su línea de acción, variando la posición de A , cambia la distancia OA , pero a su vez también cambia el valor de θ , de tal manera que el producto $OA \cdot \text{sen } \theta$ se mantiene constante. Es decir, el brazo sólo depende la posición de la línea de acción de la fuerza respecto de O . Obsérvese que este hecho concuerda con el principio de transmisibilidad (el efecto de una fuerza es el mismo cuando ésta se aplica sobre cualquier punto de su línea de acción).

1.3.3 Interpretación y representación

El momento de una fuerza respecto de un punto sirve para determinar la tendencia de dicha fuerza a producir un giro (del cuerpo sobre el que se aplica, por ejemplo) en torno a dicho punto.

- El módulo del momento indica cómo de grande es esa tendencia a producir un giro.
- La dirección determina el eje en torno al cual se produciría el giro.
- El sentido, de acuerdo a la regla de la mano derecha, proporcionaría el sentido del giro.

Se debe hablar de una *tendencia* a producir un giro y no de una rotación real, dado que el cuerpo sobre el que se aplica dicha fuerza puede estar sujeto de tal manera que tal movimiento se vea impedido en la realidad (del mismo modo que una fuerza *tiende a*, o *'le gustaría'*, producir un desplazamiento, o traslación, del cuerpo sobre el que se aplica, movimiento que para dicho cuerpo puede que sea físicamente imposible, por ejemplo, el peso empuja un cuerpo hacia abajo, pero el suelo le impide descender).

Un momento es una magnitud vectorial ordinaria. Sin embargo, con objeto de diferenciarlo visualmente de los vectores fuerza, como el momento tiende a producir un giro, se suele representar ese efecto.

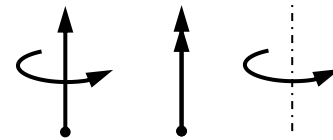


Fig. 1. 21 Vectores que representan giro

1.3.4 Teorema de Varignon

La suma de los momentos de varias fuerzas concurrentes (todas aplicadas en un mismo punto A) respecto de un punto O , es igual al momento de la resultante (suma) de dichas fuerzas.

Sean $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, tal que:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{M}_{F_1 O} + \vec{M}_{F_2 O} + \dots + \vec{M}_{F_n O} = \\ &= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_n = \\ &= \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

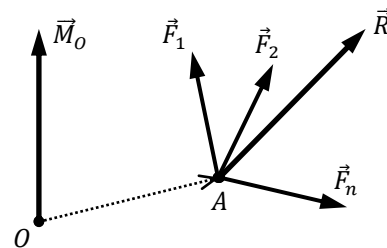


Fig. 1. 22 Resultante de fuerzas concurrentes

Este teorema también ofrece la siguiente lectura:

Descomponiendo una fuerza en determinadas direcciones de interés, componentes, el momento de dicha fuerza será la suma de los momentos de sus componentes (que son siempre fuerzas concurrentes).

1.3.5 Cálculo vectorial

Cuando \vec{F} y \overrightarrow{OA} son vectores tridimensionales, para calcular el momento lo más inmediato es utilizar directamente la fórmula de las coordenadas cartesianas del producto vectorial.

• Ejemplo 1.1

Dada la fuerza $\vec{F} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix} N$, aplicada en el punto $A(4, -1, 6) m$, calcular su momento respecto de $O(-2, 3, 4) m$.

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - 3 \\ 6 - 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} (-4) \cdot (-5) - 3 \cdot 2 \\ -6 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \\ 6 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 \\ 34 \\ 26 \end{Bmatrix} N \cdot m$$

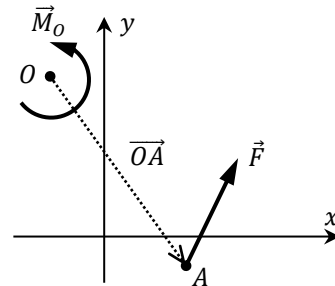
Obviamente, este enfoque también puede aplicarse a un caso plano, sobre todo cuando la geometría del problema es tal que resulta laborioso determinar el brazo.

• Ejemplo 1.2

Dada la fuerza $\vec{F} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} N$, aplicada en el punto $A(3, -1) m$, calcular su momento respecto de $O(-2, 6) m$.

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -7 \end{Bmatrix} m$$

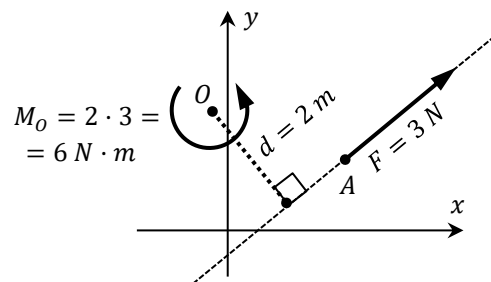
$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \cdot 4 - 2 \cdot (-7) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 34 \end{Bmatrix} N \cdot m$$



1.3.6 Cálculo escalar

Sin embargo, para casos sencillos, en el plano por ejemplo, sabiendo cómo calcular el módulo del momento, utilizando el concepto del brazo, de forma directa se puede hacer un cálculo escalar y construir el vector más fácilmente.

• Ejemplo 1.3

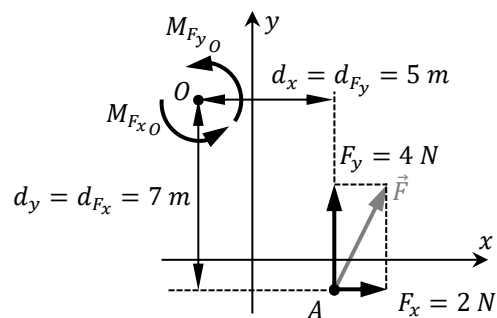


Otra posibilidad consiste en considerar la fuerza como suma de sus componentes y sumar los momentos de cada componente (teorema de Varignon).

• Ejemplo 1.4

Dada la fuerza $\vec{F} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix} N$, aplicada en el punto $A(3, -1) m$, calcular su momento respecto de $O(-2, 6) m$.

$$M_O = M_{F_x O} + M_{F_y O} = F_x \cdot d_y + F_y \cdot d_x = 2 \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 34 N \cdot m$$



1.4 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN EJE

1.4.1 Definición

Dada una fuerza \vec{F} , aplicada en un punto A , y un eje e , cuya dirección queda definida por un vector unitario \vec{u}_e , el momento de la fuerza respecto del eje, \vec{M}_e , sirve para medir la tendencia de la fuerza a producir giro en torno a dicho eje. Dado un punto O cualquiera sobre el eje, y calculado el momento de la fuerza respecto de dicho punto, \vec{M}_O , el momento respecto del eje es simplemente la proyección de éste sobre el propio eje e , es decir:

- Su módulo vale: $M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_e = (\vec{OA} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_e$
- Y el vector por tanto es: $\vec{M}_e = M_e \cdot \vec{u}_e$

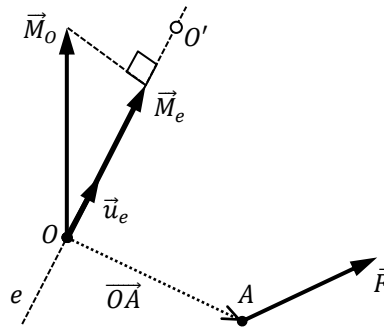


Fig. 1. 23 Momento de una fuerza respecto de un eje

Este resultado es independiente del punto O escogido sobre el eje. Para comprobarlo se considera un segundo punto O' sobre el eje. Los momentos de la fuerza respecto de ambos puntos son distintos ($\vec{M}_O \neq \vec{M}_{O'}$), pero la proyección de ambos vectores sobre el eje e es la misma ($\vec{M}_O \cdot \vec{u}_e = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u}_e$).

Para demostrarlo, se sabe que: $\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$ $\vec{M}_{O'} = \vec{O'A} \wedge \vec{F}$

Además, se tiene que: $\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}$

Por tanto: $\vec{M}_O \cdot \vec{u}_e = ((\vec{OO'} + \vec{O'A}) \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_e = (\vec{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_e + (\vec{O'A} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_e = \vec{0} + \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u}_e$

Como $\vec{OO'} \wedge \vec{F}$ es perpendicular a $\vec{OO'}$ (y por tanto a \vec{u}_e), al multiplicarlo escalarmente por \vec{u}_e el resultado de $(\vec{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_e$ es nulo y por tanto las proyecciones de los momentos respecto de cualquier punto del eje son iguales, es decir, existe un único momento respecto del eje.

1.4.2 Propiedades

- Si la línea de acción de la fuerza se corta con el eje, el momento de la fuerza respecto del eje es nulo. Evidentemente, si se toma como punto cualquiera O sobre el eje el punto de intersección con la línea de acción de la fuerza, $\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ por ser \vec{OA} y \vec{F} vectores paralelos (o por ser nulo el brazo de la fuerza respecto del punto), por tanto, $M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_e = 0$.
- El momento de una fuerza respecto de un eje paralelo a ella es nulo. Efectivamente, si \vec{F} es paralelo a \vec{u}_e , $\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$, que por definición es perpendicular a \vec{F} , también será perpendicular a e . Por tanto $M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_e = 0$. Esto quiere decir que, tal como concuerda con la intuición, una fuerza no puede producir un giro en torno a un eje paralelo a sí misma.

- Cuando la fuerza es perpendicular al eje, considerando la distancia d entre el eje e y la línea de acción de la fuerza F , entonces:

$$M_e = F \cdot d$$

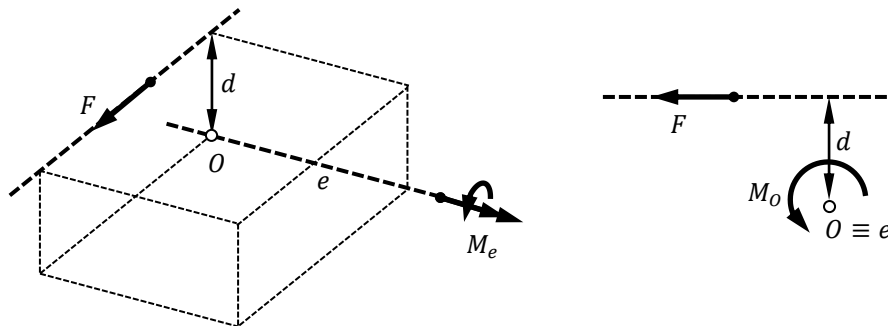


Fig. 1. 24 Fuerza y eje perpendiculares

Es muy fácil comprobarlo. Si se toma el punto O sobre e en la posición más cercana a la línea de acción de la fuerza (la que determina la distancia d entre ambas rectas), el plano que forman F y O es perpendicular al eje e . El momento respecto de punto O vale en módulo $F \cdot d$ (puesto que d es el brazo del momento) y es perpendicular al plano que forman F y O . El momento respecto de O tiene por tanto la dirección de e y su proyección sobre e es él mismo.

Mediante esta sencilla operación se determina el módulo del momento. Evidentemente, el sentido del mismo es el del giro que físicamente tendería a producir la fuerza en torno al eje. Adviértase que si se visualizara el sistema con el eje de punta, tanto F como d se verían en verdadera magnitud, en un plano perpendicular a e . En esta visualización, en la que O se confunde con e , se evidencia que el momento respecto del eje coincide con el momento respecto del punto O .

1.4.3 Uso de momentos respecto de ejes para calcular momentos respecto de puntos

En el apartado anterior se ha presentado el concepto de momento respecto de un eje definiéndolo a partir del momento respecto de un punto, como una proyección de éste. Sin embargo, es muy útil darle la vuelta a esta idea para calcular de una manera muy práctica los momentos de fuerzas respecto de puntos en casos espaciales complejos. El método que se va a describir es una alternativa escalar a la realización del clásico producto vectorial. Esta propuesta constituye un enfoque menos matemático y más ingenieril, menos abstracto y más intuitivo ya que, como se verá, permite ‘seguirle la pista’ a los efectos físicos de tendencia a producir giros de las fuerzas en la determinación de los momentos. Los sencillos cálculos escalares simplemente hacen uso de las propiedades presentadas.

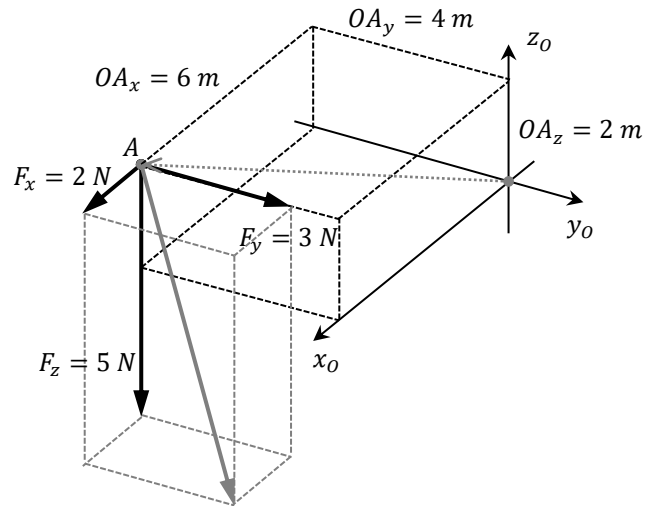
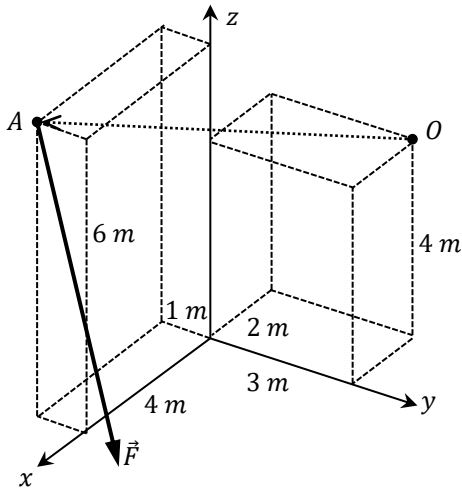
Dada una fuerza \vec{F} aplicada en un punto A , se desea calcular el momento de dicha fuerza respecto de otro punto O . Matemáticamente, las componentes cartesianas de cualquier vector son sencillamente las proyecciones del mismo sobre las direcciones de los ejes del sistema de referencia, x , y , z . Es decir, la componente x del vector \vec{M}_O es la proyección del mismo sobre dicho eje. Pero además, también se ha definido el momento de una fuerza respecto de un eje como la proyección del momento respecto de un punto cualquiera del eje, sobre el propio eje.

Por lo tanto, se dispondrán en O unos ejes paralelos a los del sistema de referencia, x_o , y_o , z_o . Calcular el momento respecto del eje x_o es lo mismo que calcular la componente x del momento respecto del punto O , e igualmente con el resto de ejes-componentes.

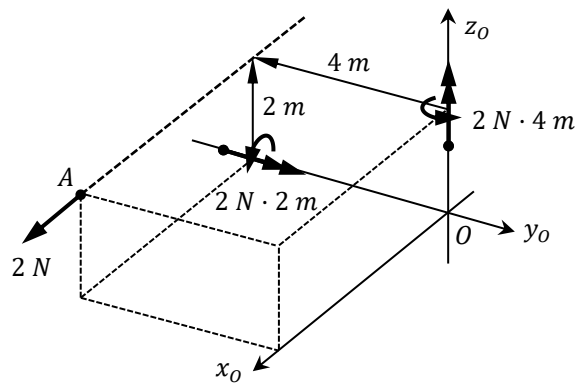
Obviamente, para poder sacar partido de las propiedades de los momentos respecto de ejes se ha de operar con cada una de las componentes de \vec{F} por separado, F_x , F_y y F_z , ya que cada una de ellas es paralela a uno de los ejes del sistema y perpendicular a los otros dos.

• Ejemplo 1.5

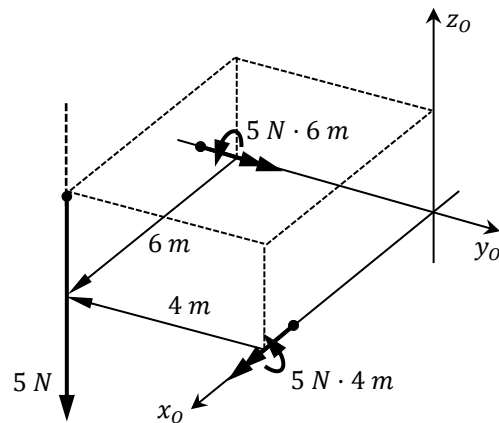
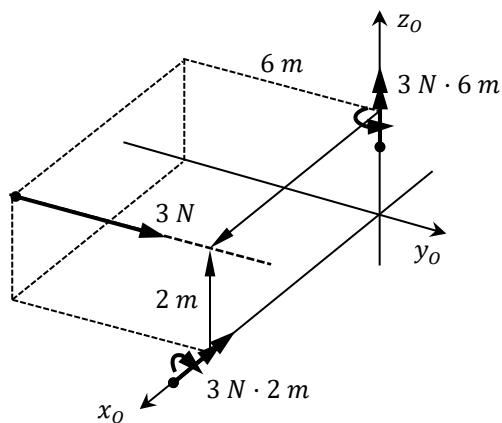
Dada la fuerza $\vec{F} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix} \text{ N}$, aplicada en el punto $A(4, -1, 6) \text{ m}$, calcular su momento respecto de $O(-2, 3, 4) \text{ m}$.



F_x no produce momento respecto del eje x_0 , y los brazos de sus momentos respecto de los ejes y_0 y z_0 son distancias inmediatas:



Se procede de la misma manera con F_y y F_z :



La composición de los resultados obtenidos coincide con el momento respecto de O de la fuerza \vec{F} aplicada en A :

$$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} 0 - 6 + 20 \\ 4 + 0 + 30 \\ 8 + 18 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

1.5 PAR DE FUERZAS Y MOMENTO PURO

Cuando dos fuerzas, \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , tienen la misma magnitud (módulo F), líneas de acción paralelas (pero no colineales) y sentidos opuestos, es decir, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, se dice que forman un *par de fuerzas*.

Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza, ésta tiende a desplazarlo en la dirección de su línea de acción. Así mismo, cuando sobre un cuerpo actúa un par de fuerzas, puesto que la resultante de ambas es nula, éste no tiende a desplazarse. Sin embargo, la aplicación de estas fuerzas sí tiene un efecto medible sobre el sólido, dado que tienden a hacerlo rotar.

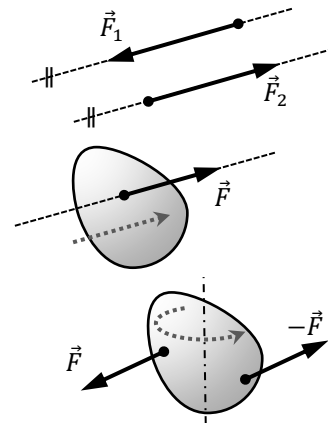


Fig. 1. 25 Par de fuerzas

La tendencia de una fuerza a producir una rotación en torno a un punto se mide con el momento de la fuerza respecto del punto (además, se recuerda que el eje del giro sería la dirección de dicho vector momento, perpendicular al plano que definen la fuerza y el punto y que el sentido del giro sería el que proporciona la regla de la mano derecha).

La tendencia que tiene el par de fuerzas a hacer girar el sólido sobre el que se aplica vendrá dada por la suma de los momentos cada una de las dos fuerzas que lo componen. Sean A y B los puntos de aplicación de ambas fuerzas, considerando un punto O cualquiera:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{FO} + \vec{M}_{-FO} = \vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OB} \wedge (-\vec{F}) = (\vec{OA} - \vec{OB}) \wedge \vec{F}$$

Como $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}$:

$$\vec{M}_O = \vec{BA} \wedge \vec{F} \quad (= \vec{M}_{FB})$$

Por tanto, se demuestra que el momento del par de fuerzas puede calcularse como el momento de una de las fuerzas del par, \vec{F} , aplicada en A , respecto de B . El momento de un par de fuerzas es, por tanto, independiente del punto O , es decir, vale lo mismo que respecto de cualquier otro punto O' :

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} = \vec{M}$$

El momento de un par de fuerzas depende exclusivamente del valor de las fuerzas y de la posición relativa entre ellas. Sea d la distancia (en perpendicular) entre las líneas de acción del par de fuerzas el momento del par es un vector de:

- Módulo: $M = F \cdot d$.
- Dirección: Perpendicular al plano que contiene las fuerzas.
- Sentido: El que indica hacia dónde tienden a producir el giro ambas fuerzas.

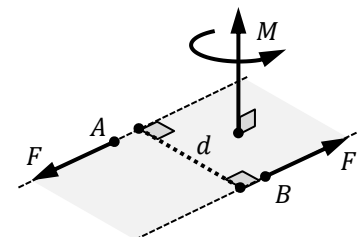


Fig. 1. 27 Momento del par

Como la resultante en fuerza del par es nula, pero éste sí tiene efecto en cuanto al giro del sólido sobre el que se aplica, en la práctica muchas veces se sustituye la representación de un par de fuerzas por el vector momento del par. Esto es debido a que normalmente interesa que en la representación quede definido simplemente el efecto que dicho par tiene sobre el sólido. Cualquiera de las dos representaciones proporciona la misma información. Cuando se representa el momento en lugar del par:

- El módulo indica cómo de grande es la tendencia a producir un giro (fuerzas más grandes, o más separadas entre sí)
- La dirección y sentido marcan el eje y sentido del giro

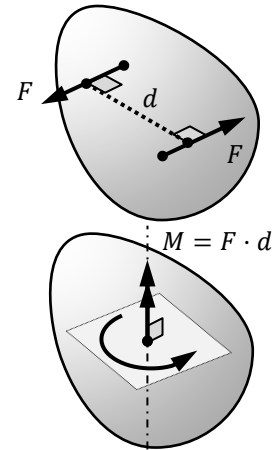


Fig. 1. 28 Momento del par

Por lo tanto, teniendo en cuenta lo anterior, el momento de un par de fuerzas puede entenderse como una magnitud que representa algo ‘similar’ a una fuerza, en el sentido en que se trata de una acción en sí misma sobre el sólido. Si una fuerza se puede entender como una acción de tipo ‘empujar’, un par de fuerzas (o su momento) es una acción de tipo ‘retorcer’.

Dada la importancia de este nuevo concepto, puesto que constituye otro tipo de acción directa sobre un cuerpo, el momento de un par de fuerzas recibe otros nombres, como *par de fuerza*, o simplemente *par*, o *momento (puro)*.

En resumen, sobre un sistema mecánico pueden aplicarse acciones de dos tipos:

- Fuerzas, que tienden a producir un desplazamiento en su dirección. Es como empujar.
- Momentos, que tienden a producir un giro en torno a su dirección. Es como retorcer.

Sobre un cuerpo puede haber actuando fuerzas y momentos a la vez. Fuerzas y momentos son acciones, pero no son entidades del mismo tipo (de hecho, las unidades del momento son [*fuerza·distancia*]). Las fuerzas pueden sumarse entre ellas para obtener una resultante y del mismo modo los momentos pueden sumarse vectorialmente para obtener su cómputo global, pero fuerzas y momento no pueden mezclarse en la suma.

Puesto que el momento de un par es independiente del punto que se considere, se trata de un vector libre. Entendiendo este momento puro como una acción sobre un sistema mecánico, aunque su punto de aplicación en la realidad sea uno concreto, desde un punto de vista matemático (a la hora de considerarlo en las ecuaciones), su efecto es el mismo sea cual sea su punto de aplicación.

1.6 COMPOSICIÓN DE FUERZAS

1.6.1 Sistemas de fuerzas equivalentes

Se llama *sistema de fuerzas* al conjunto de acciones al que está sometido un sistema mecánico. Dichas acciones podrán ser fuerzas y momentos. El sistema mecánico sobre el que actúan podrá ser un determinado cuerpo sólido, un conjunto de sólidos vinculados entre sí, o cualquier parte cortada de un sólido o un conjunto.

Se dice que dos sistemas de fuerzas son *equivalentes* cuando producen el mismo efecto sobre el sistema mecánico sobre el que actúan. Dado un sistema mecánico sobre el que actúa un determinado sistema de fuerzas, lo que se va a hacer es obtener un sistema de fuerzas equivalente, pero más adecuado para determinados propósitos, lo más sencillo posible, de tal manera que, sustituyendo el sistema de fuerzas original por su sistema equivalente, pueda analizarse de un modo más conveniente el efecto que el sistema de fuerzas real tiene sobre el sistema mecánico.

1.6.2 Reducción a un sistema equivalente fuerza-par en un punto

Cualquier sistema de fuerzas actuando sobre un sistema mecánico, por complejo que sea, puede reducirse a una única fuerza más un único momento, aplicados en un determinado punto.

Dado un sistema mecánico sobre el que actúa un conjunto de fuerzas y momentos, para determinar el sistema de fuerzas equivalente reducido, en primer lugar es necesario especificar un punto, es decir, siempre tendrá que considerarse la reducción del sistema de fuerzas original en un punto concreto. Como posteriormente se verá, dicho punto se elige en función del tipo de cálculo que se tenga que plantear.

Dado un sólido con un sistema de fuerzas, fuerzas $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_i \dots \vec{F}_n$ aplicadas en los puntos $A_1 \dots A_i \dots A_n$ respectivamente y momentos $\vec{M}_1 \dots \vec{M}_j \dots \vec{M}_m$ aplicados en los puntos $B_1 \dots B_j \dots B_m$, va a calcularse el *sistema reducido fuerza-par* en el punto O . Todas las fuerzas y momentos actuantes van a tener que trasladarse al punto O .

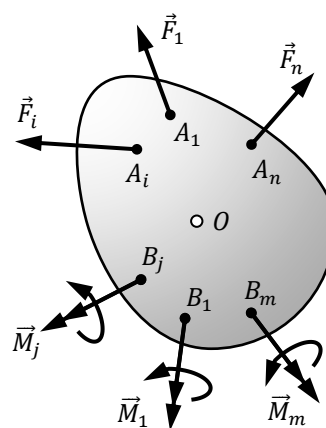


Fig. 1. 29 Sistema de fuerzas

Los momentos puros, $\vec{M}_1 \dots \vec{M}_j \dots \vec{M}_m$, dado que se trata de vectores libres, tienen el mismo efecto independientemente del punto de aplicación, por lo que pueden trasladarse directamente desde sus puntos de aplicación originales, $B_1 \dots B_j \dots B_m$, hasta el punto O .

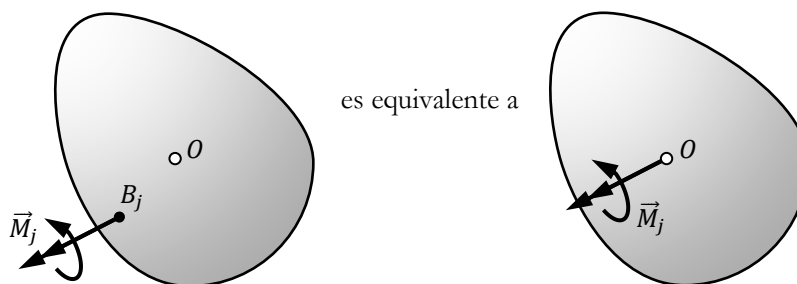


Fig. 1. 30 El momento es un vector libre

Sin embargo, las fuerzas actuantes, puesto que son vectores deslizantes, sólo pueden trasladarse sin variar su efecto a lo largo de su línea de acción. Trasladar directamente una fuerza cualquiera \vec{F}_i desde su punto de aplicación original A_i , al punto O (que en general no se encontrará sobre su línea de acción), modificaría su efecto. Lo que sí se puede hacer es aplicar en el punto O un sistema de fuerzas nulo, $\vec{F}_i' = \vec{F}_i$, $\vec{F}_i'' = -\vec{F}_i$. En realidad, haciendo esto no se ha cambiado nada (es como sumar y restar lo mismo). Adviértase que \vec{F}_i' es como si \vec{F}_i hubiera sido trasladada desde su punto de aplicación original a O , mientras que \vec{F}_i y \vec{F}_i'' forman un par de fuerzas. El efecto de dicho par es, tal como se ha visto, el de un momento puro aplicado de valor $\vec{M}_{iO} = \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i$, es decir, el momento de la fuerza \vec{F}_i respecto de O .

Por lo tanto, al trasladar la fuerza \vec{F}_i desde A_i a O , es necesario añadir al sistema mecánico el momento \vec{M}_{iO} .

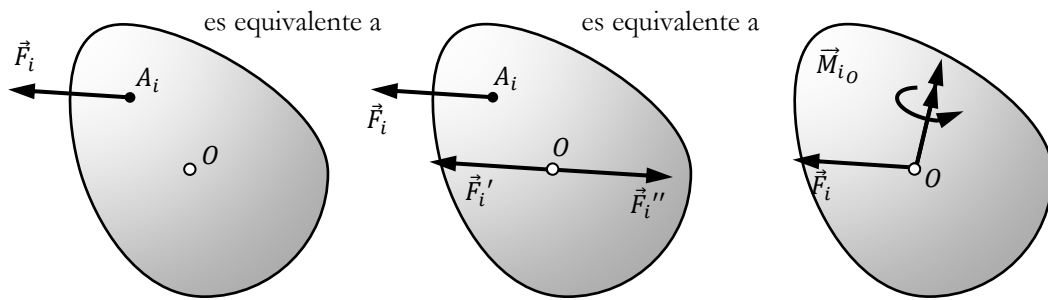


Fig. 1. 31 Traslación de una fuerza sin variar su efecto

Tras hacer lo mismo con todas las fuerzas del sistema, se tiene que todas ellas son concurrentes en el mismo punto, O , y por tanto pueden sumarse vectorialmente en una única resultante:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n$$

Obviamente, esta única fuerza es simplemente la suma de la totalidad de fuerzas actuantes sobre el sistema original, aplicada en O .

Del mismo modo, todos los momentos existentes, llevados al mismo punto, pueden sumarse vectorialmente en una única resultante \vec{M}_O . Por un lado se tienen todos los momentos puros aplicados, pero por otro están también los momentos de todas las fuerzas originales respecto de O :

$$\vec{M}_O = \sum_{j=1}^m \vec{M}_j + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iO} = \vec{M}_1 + \dots + \vec{M}_j + \dots + \vec{M}_m + \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i + \dots + \vec{OA}_n \wedge \vec{F}_n$$

Por lo tanto, cualquier sistema de fuerzas puede reducirse a un sistema equivalente en un punto que consta de una fuerza igual a la suma de las fuerzas del sistema inicial y un momento igual a la suma de los momentos del sistema inicial más la suma de los momentos de las fuerzas del sistema inicial respecto de dicho punto.

- \vec{R} indica la tendencia del sistema de fuerzas a trasladar el sólido (es como si se empujara en O con una intensidad equivalente a su módulo, en su dirección y sentido).
- \vec{M}_O indica la tendencia del sistema de fuerzas a hacer girar el sólido en torno a O (es como si se retorciera con una intensidad equivalente a su módulo, en torno a un eje dado por su dirección y en el sentido de giro que marca la regla de la mano derecha).

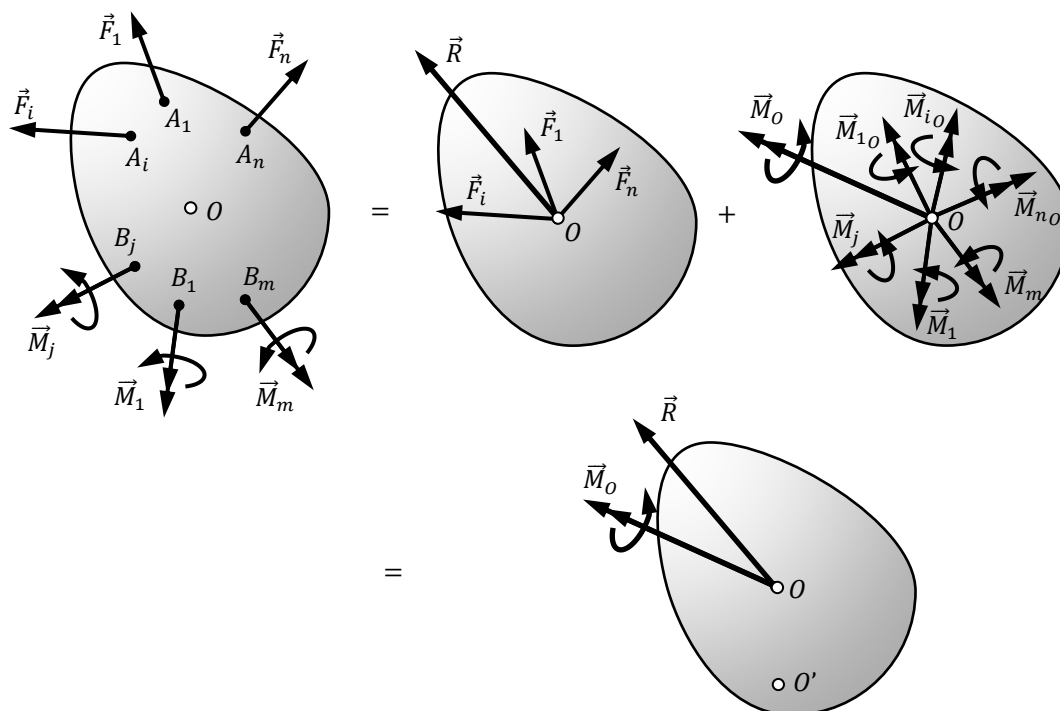


Fig. 1. 32 Sistema equivalente reducido

1.6.3 Teorema del momento

El teorema del momento relaciona entre sí los momentos de una misma fuerza respecto de dos puntos diferentes.

Ténganse una fuerza \vec{F} aplicada en un punto A , y dos puntos O y O'

Se cumple: $\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$ y $\vec{M}_{O'} = \vec{O'A} \wedge \vec{F}$

Puesto que: $\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}$

Entonces: $\vec{M}_O = (\vec{OO'} + \vec{O'A}) \wedge \vec{F} =$
 $= \vec{OO'} \wedge \vec{F} + \vec{O'A} \wedge \vec{F}$

Por tanto: $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} + \vec{OO'} \wedge \vec{F} = \vec{M}_{O'} + \vec{M}_{F'O}$

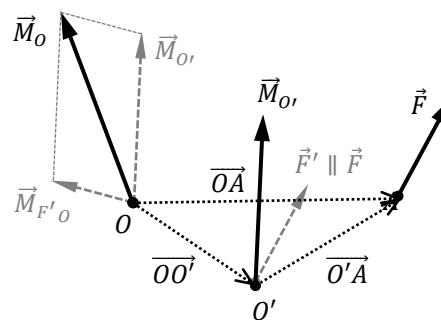


Fig. 1. 33 Traslación de un momento

El momento de una fuerza \vec{F} , aplicada en un punto A , respecto de un punto O se puede calcular como la suma del momento de dicha fuerza respecto de otro punto O' , más el momento que daría dicha fuerza respecto de O si estuviera aplicada en el punto O' (en lugar de en A).

1.6.4 Propiedades de los sistemas de fuerzas.

Una vez que se ha reducido un sistema de fuerzas a un punto O , es inmediato determinar el sistema equivalente en otro punto O' .

Obviamente, realizar la suma de todas las fuerzas del sistema en O o en O' produce el mismo resultado. De hecho, la resultante \vec{R} recibe el nombre de *primer invariante* del sistema de fuerzas, ya que es independiente del punto que se escoja para hacer la equivalencia.

Sin embargo, los momentos de las fuerzas del sistema respecto de O y O' serán distintos. Pero una vez reducido el sistema original a O , como ambos sistemas, original y reducido, son equivalentes, para calcular el momento respecto de O' se puede usar el reducido en lugar del original, dada su mayor simplicidad. Se trata de un sistema formado por una única fuerza \vec{R} , aplicada en O , y un único momento puro \vec{M}_O . El momento puro es un vector libre, por lo que puede llevarse directamente de O a O' . Sin embargo, como ya se ha hecho anteriormente, para mover la fuerza \vec{R} de O a O' sin modificar su efecto se debe añadir el momento que la fuerza producía respecto de O' cuando estaba aplicada en O , es decir $\vec{O'O} \wedge \vec{R}$.

El momento total en O' es por tanto la suma de los dos:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R}$$

Esta ecuación se conoce como *campo de momentos* y relaciona los momentos resultantes de un sistema de fuerzas respecto de dos puntos cualesquiera. Obsérvese que su expresión es análoga a la del teorema de momento.

Otra propiedad de los sistemas de fuerzas es la siguiente. Sea cual sea el punto elegido para reducir el sistema, el producto escalar entre la resultante y el momento resultante en dicho punto es constante. De hecho, dicho producto se denomina *segundo invariante* del sistema.

Para demostrarlo se multiplica escalarmente por \vec{R} la ecuación del campo de momentos:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + (\vec{O'O} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R}$$

Como $\vec{O'O} \wedge \vec{R}$ es perpendicular \vec{R} , al multiplicarlo escalarmente por \vec{R} el resultado es 0, por tanto:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{R}$$

Esta propiedad tiene la interpretación geométrica de que la proyección del momento sobre la resultante es independiente del punto escogido. Efectivamente, dividiendo la expresión anterior entre el módulo de la resultante y teniendo en cuenta que $\vec{R}/R = \vec{u}_R$ se obtiene:

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u}_R = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u}_R$$

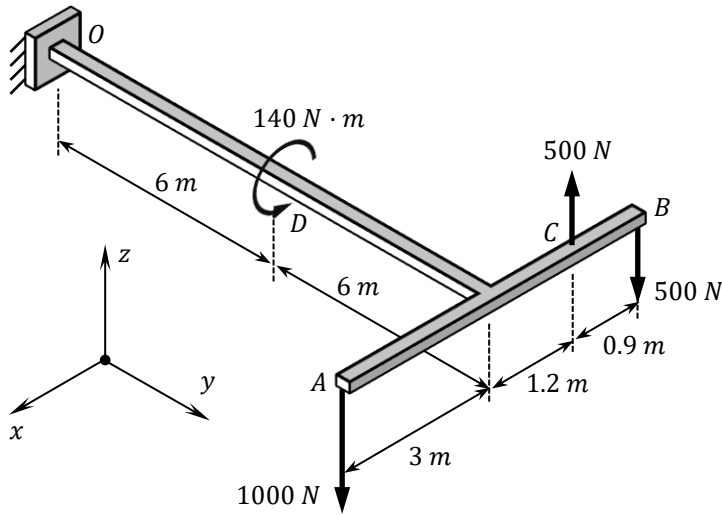
El vector momento resultante va cambiando a medida que lo hace la posición del punto de referencia, sin embargo, su proyección sobre la dirección de la resultante se mantiene constante. De aquí se deduce que el momento de menor módulo posible se dará en aquellos puntos en los que momento y resultante sean paralelos, cuando el propio momento coincida con dicha proyección. Éste se denomina *momento mínimo* del sistema, \vec{m} . Al ser \vec{m} y \vec{R} paralelos $\vec{m} \cdot \vec{u}_R = m \cdot 1 \cdot \cos 0$, por tanto:

$$m = \vec{m} \cdot \vec{u}_R = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_R = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{R}$$

Problemas

Calcular el sistema equivalente reducido en el punto O .

1.

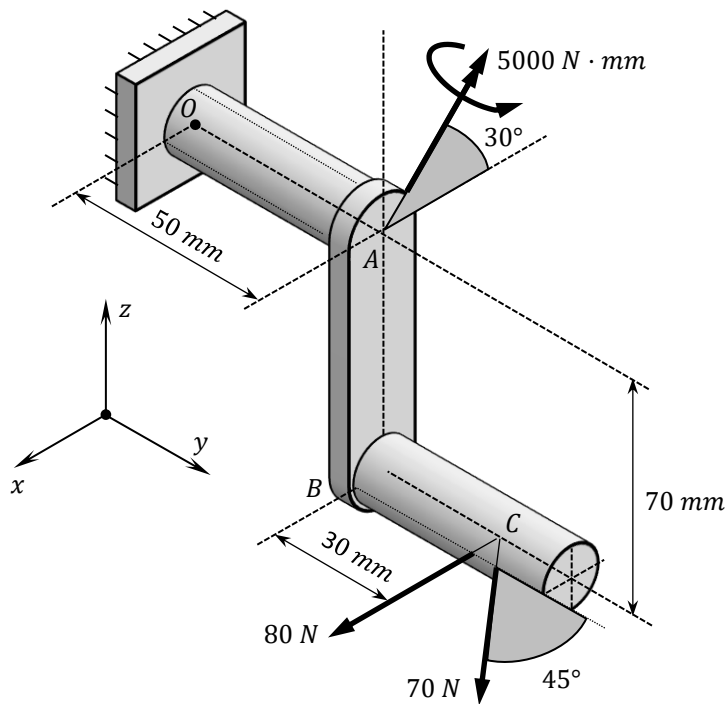


Solución:

$$\text{Fuerza: } \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1000 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

$$\text{Momento: } \begin{Bmatrix} -12000 \\ 2690 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.

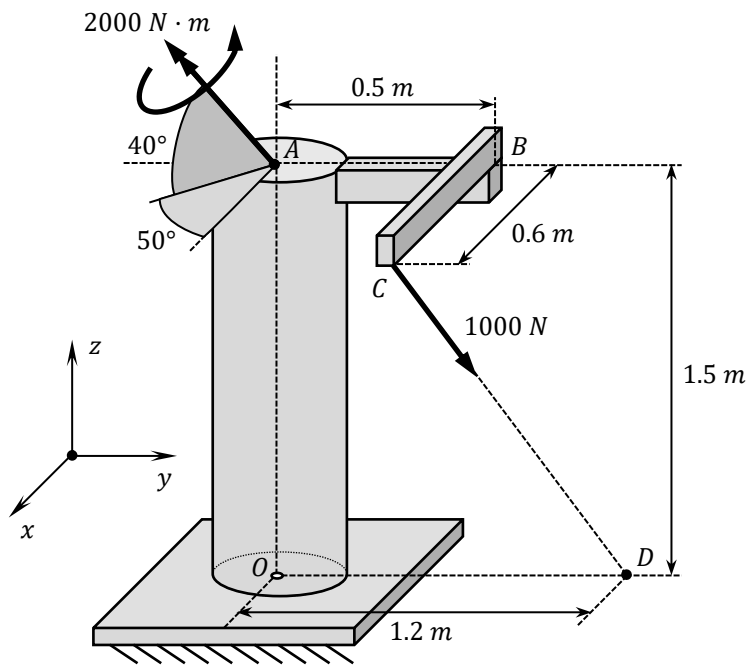


Solución:

$$\text{Fuerza: } \begin{Bmatrix} 129.5 \\ 49.5 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

$$\text{Momento: } \begin{Bmatrix} -865.3 \\ -9064.8 \\ -7859.8 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{mm}$$

3.

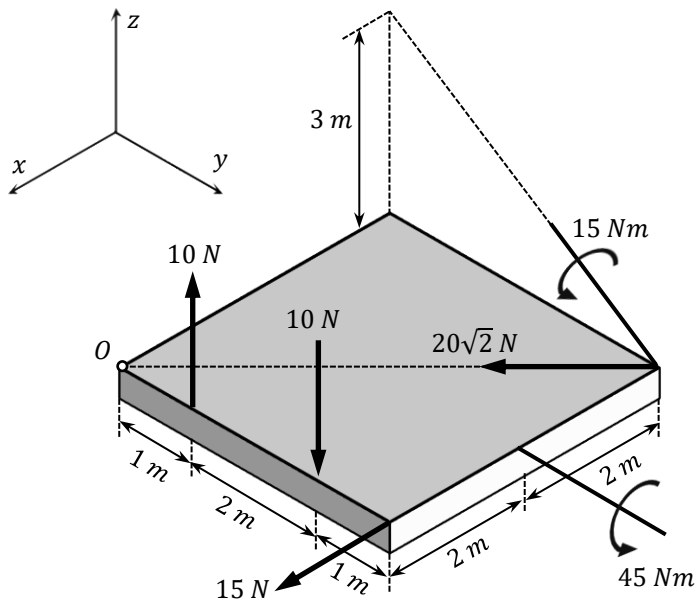


Solución:

$$\text{Fuerza: } \begin{Bmatrix} -340.77 \\ 397.57 \\ -851.94 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

$$\text{Momento: } \begin{Bmatrix} -37.52 \\ -1173.65 \\ 1694.51 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

4.



Solución:

$$\text{Fuerza: } \begin{Bmatrix} 35 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

$$\text{Momento: } \begin{Bmatrix} -20 \\ 57 \\ -69 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. CENTROIDES

2.1 CENTRO DE GRAVEDAD

2.1.1 Concepto de centro de gravedad

Por sencillez se considerará inicialmente que un cuerpo sólido de masa m , uniformemente distribuida por todo su volumen, es un sistema discreto formado por un número finito de masas puntuales m_i repartidas por el mismo, de tal manera que $m = \sum m_i$. Cada una de dichas partículas experimenta la acción gravitatoria, de modo que está sometida a una fuerza $F_i = m_i g$. Todas las fuerzas son paralelas, por lo que definido un vector unitario \vec{u} en la dirección y sentido de la acción gravitatoria $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{u}$.

Se tiene por lo tanto un sólido sometido a un sistema de fuerzas, formado por ‘muchas pequeñas’ fuerzas paralelas. Para simplificar su tratamiento matemático puede plantearse la transformación del sistema de fuerzas existente a un sistema equivalente reducido en un punto O , que como se sabe se compone de una única fuerza resultante aplicada en O y un único momento resultante.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \sum (m_i g \cdot \vec{u}) = (\sum m_i g) \cdot \vec{u} = (\sum m_i) \cdot g \cdot \vec{u} = mg \cdot \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_{O_i} = \sum \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i$$

Obviamente, como todas las fuerzas \vec{F}_i son paralelas, su suma \vec{R} , que es sencillamente el peso total del sólido, también tiene esa dirección. Además, por las propiedades del producto vectorial $\vec{M}_{O_i} = \vec{OA}_i \wedge (F_i \cdot \vec{u})$ es perpendicular a \vec{u} . Es decir, si \vec{u} define la dirección vertical, el momento de cada fuerza es un vector contenido en un plano horizontal. Por lo tanto, como todos los vectores \vec{M}_{O_i} carecen de la componente vertical, su suma \vec{M}_O también será un vector horizontal. Resultante y momento resultante son, por tanto, perpendiculares.

Por este razonamiento se concluye que un sistema de fuerzas paralelas tiene siempre el segundo invariante nulo, $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$. Como el momento mínimo de un sistema de vectores es proporcional al segundo invariante, se sabe que es posible encontrar un punto en el que el momento resultante sea nulo. En dicho punto, por tanto, el sistema equivalente reducido se limita a la resultante \vec{R} , de módulo mg . Dicho punto se denomina centro de gravedad del sólido, se denota como G , y para obtenerlo debe buscarse el punto que cumple $\vec{M}_G = \sum \vec{M}_{G_i} = \vec{0}$.

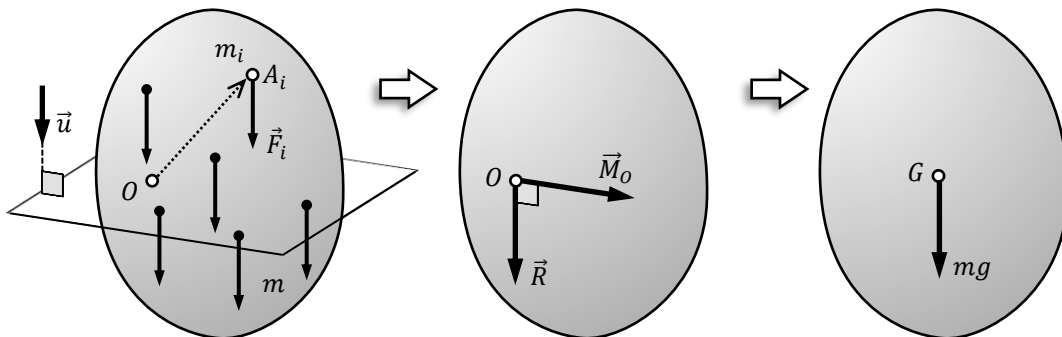


Fig. 2.1 Reducción del sistema de fuerzas gravitatorias

2.1.2 Posición del centro de gravedad

El objetivo es encontrar la expresión matemática que permita determinar la posición del centro de gravedad de un sólido. Las coordenadas de un punto siempre se definen en un determinado sistema de referencia. Establecidos unos ejes cartesianos, definir la posición de G es determinar el vector \vec{r}_G .

Se sabe que:

$$\vec{F}_i = m_i g \cdot \vec{u} \quad \vec{r}_i = \vec{r}_G + \overrightarrow{GA}_i \quad \sum m_i = m$$

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} \quad \sum \overrightarrow{M}_{G_i} = \vec{0}$$

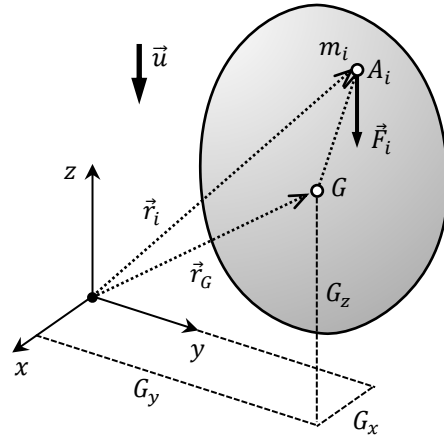


Fig. 2. 2 Posición del centro de gravedad

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{M}_G &= \sum \overrightarrow{M}_{G_i} = \sum [\overrightarrow{GA}_i \wedge (m_i g \cdot \vec{u})] = \sum [(\overrightarrow{GA}_i \cdot m_i) \wedge (g \cdot \vec{u})] = [\sum (\overrightarrow{GA}_i \cdot m_i)] \wedge (g \cdot \vec{u}) = \vec{0} \\ \sum [(\vec{r}_i - \vec{r}_G) \cdot m_i] &= \vec{0} \\ \sum (\vec{r}_i \cdot m_i) &= \sum (\vec{r}_G \cdot m_i) = \vec{r}_G \cdot \sum m_i = \vec{r}_G \cdot m \\ \vec{r}_G &= \frac{\sum (\vec{r}_i \cdot m_i)}{m} \end{aligned}$$

Ésta es una ecuación vectorial, las coordenadas de G pueden obtenerse separando por componentes.

$$G_x = \frac{\sum (x_i \cdot m_i)}{m} \quad G_y = \frac{\sum (y_i \cdot m_i)}{m} \quad G_z = \frac{\sum (z_i \cdot m_i)}{m}$$

Para obtener el centro de gravedad de un sólido continuo se ha de considerar que está formado por infinitas masas infinitamente pequeñas. Realizar la transformación de las expresiones obtenidas a este enfoque es muy sencillo:

- Cada una de las partículas en la que el sólido se considera dividido debe poseer una masa infinitamente pequeña, es decir, un diferencial de masa del sólido, $m_i \rightarrow dm$.
- El sumatorio de infinitos términos infinitamente pequeños no es más que la integral de dichos diferenciales, $\sum \rightarrow \int$. Así por ejemplo, $m = \sum m_i \rightarrow \int dm$.
- Las coordenadas de la partícula son genéricas puesto que la posición de dm varía de forma continua por el interior del sólido, $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}$, $x_i \rightarrow x$, $y_i \rightarrow y$, $z_i \rightarrow z$. Pero no debe olvidarse que \vec{r} es la posición del dm , por lo que sus componentes x , y y z no son constantes respecto de la variable diferencial de la integral.

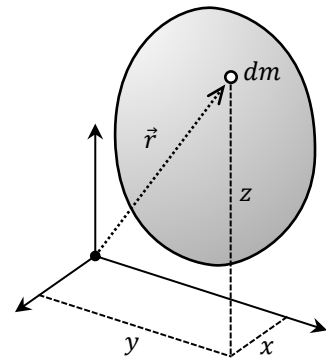


Fig. 2. 3 Sólido continuo

Teniendo en cuenta esto finalmente resulta:

$$G_x = \frac{1}{m} \int x \cdot dm \quad G_y = \frac{1}{m} \int y \cdot dm \quad G_z = \frac{1}{m} \int z \cdot dm$$

O de forma abreviada: $\vec{r}_G \cdot m = \int \vec{r} \cdot dm$

2.1.3 Centroides

El centro de gravedad es un concepto propio de los cuerpos con masa. Sin embargo, el concepto puede extrapolarse a figuras geométricas (entidades matemáticas sin masa) como curvas, superficies o volúmenes. En estos casos G se denomina *centroide* de la figura. Las expresiones que determinan su posición se obtienen transformando de maneras muy sencillas las obtenidas para un sólido.

- En el caso de un volumen de valor V , considerando un sólido con la misma forma y de densidad constante ρ , como $m = \rho \cdot V \rightarrow dm = \rho \cdot dV$.

$$\text{Por tanto: } \vec{r}_G \cdot \rho \cdot V = \int \vec{r} \cdot \rho \cdot dV \rightarrow \vec{r}_G \cdot V = \int \vec{r} \cdot dV$$

- En el caso de una superficie de área S , considerando un volumen con una forma de chapa delgada de espesor constante e , como $V = e \cdot S \rightarrow dV = e \cdot dS$.

$$\text{Por tanto: } \vec{r}_G \cdot e \cdot S = \int \vec{r} \cdot e \cdot dS \rightarrow \vec{r}_G \cdot S = \int \vec{r} \cdot dS$$

- En el caso de una curva de longitud L , considerando un volumen con una forma de alambre de sección transversal constante A , como $V = A \cdot L \rightarrow dV = A \cdot dL$.

$$\text{Por tanto: } \vec{r}_G \cdot A \cdot L = \int \vec{r} \cdot A \cdot dL \rightarrow \vec{r}_G \cdot L = \int \vec{r} \cdot dL$$

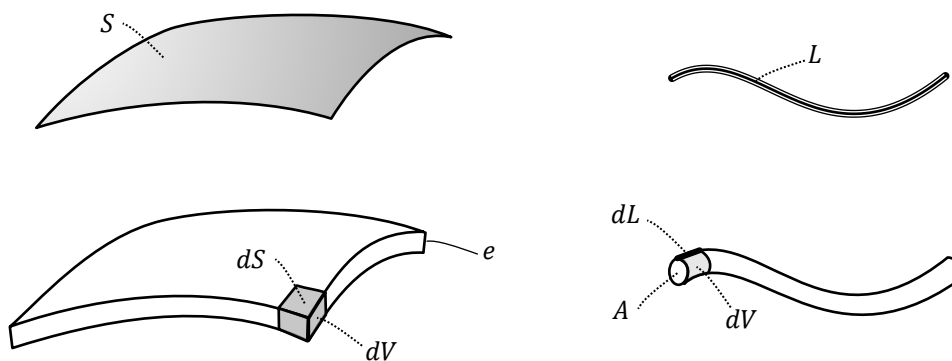


Fig. 2. 4 Centroides de superficies y curvas

2.1.4 Propiedades de simetría

Resulta trivial deducir que cuando una entidad geométrica posee un plano de simetría su centroide está contenido en el mismo. En consecuencia, cuando existan dos planos de simetría el centroide estará contenido en la recta de intersección de los mismos. Obviamente, un cuerpo de revolución tendrá el centroide contenido en su eje. Del mismo modo, cuando existan tres planos de simetría el centroide será el punto de intersección de los mismos.

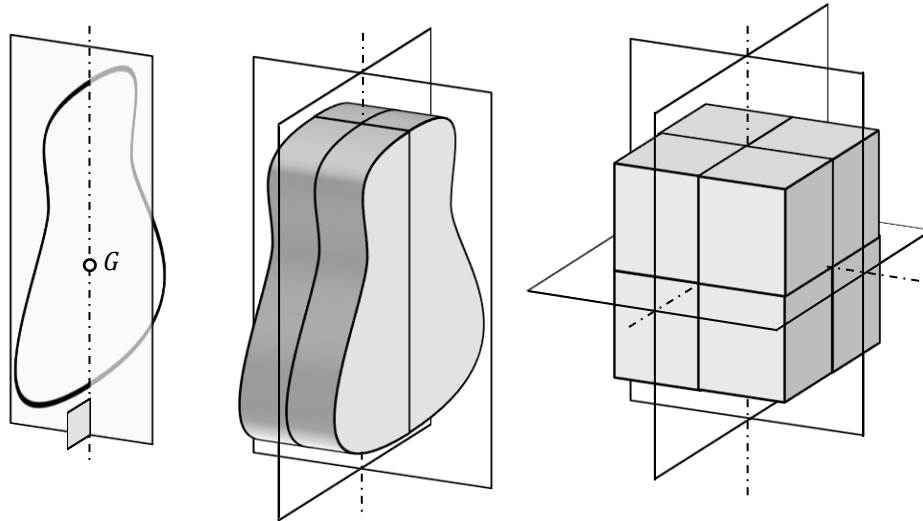


Fig. 2.5 Figuras simétricas

2.2 MOMENTO ESTÁTICO

El momento estático de un sistema material respecto de un plano π es un balance que contabiliza distribución de la masa del sistema a ambos lados del plano, teniendo en cuenta la distancia de la masa al mismo. Para ello se toma como positivo uno de los dos lados del plano y se consideran distancias positivas las que quedan de dicho lado y negativas las que se miden hacia el otro. Se trata de una magnitud escalar.

- Para sistemas materiales discretos: $Q_\pi = \sum r_{\pi_i} \cdot m_i$
- Para sólidos continuos: $Q_\pi = \int r_\pi \cdot dm$

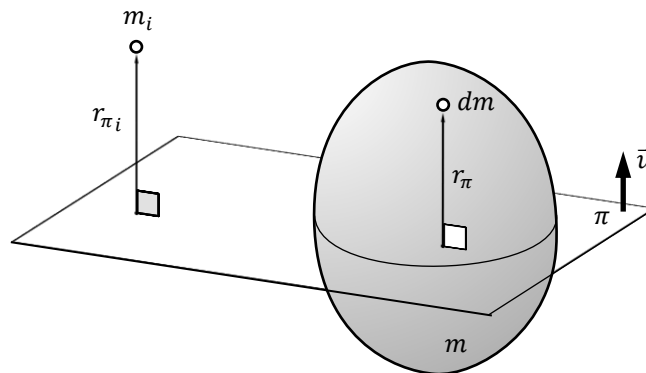


Fig. 2.6 Momento estático

Obsérvese que en las expresiones de las coordenadas del centro de gravedad de un sistema material de masa total m en un determinado sistema de referencia aparecen los momentos estáticos respecto de los planos coordenados de dicho sistema, ya que:

$$Q_{yz} = \int x \cdot dm \quad Q_{zx} = \int y \cdot dm \quad Q_{xy} = \int z \cdot dm$$

Por lo que:

$$G_x = \frac{Q_{yz}}{m} \quad G_y = \frac{Q_{zx}}{m} \quad G_z = \frac{Q_{xy}}{m}$$

La propiedad más importante de esta magnitud es que el momento estático de un sistema material respecto de un plano que contiene al centro de gravedad de dicho sistema es nulo.

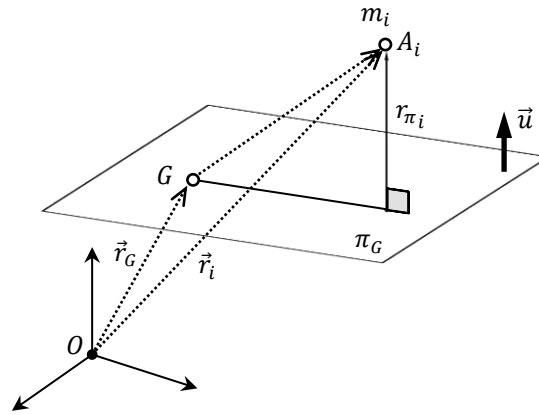


Fig. 2. 7 Plano que contiene al centro de gravedad

Como r_{π_i} es la proyección de $\overrightarrow{GA_i}$ sobre la dirección perpendicular al plano π_G , si \vec{u} es el vector director unitario del plano:

$$r_{\pi_i} = \overrightarrow{GA_i} \cdot \vec{u}$$

Por lo tanto:

$$Q_{\pi_G} = \sum r_{\pi_i} \cdot m_i = \sum \overrightarrow{GA_i} \cdot \vec{u} \cdot m_i = \vec{u} \cdot \sum \overrightarrow{GA_i} \cdot m_i$$

El factor $\sum \overrightarrow{GA_i} \cdot m_i$ se denomina *momento estático respecto de centro de gravedad* y se denota como \vec{Q}_G (es una magnitud vectorial). Por tanto, se cumple:

$$Q_{\pi_G} = \vec{u} \cdot \vec{Q}_G$$

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \overrightarrow{GA_i}$$

$$\sum \overrightarrow{GA_i} \cdot m_i = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \cdot m_i = \sum \vec{r}_i \cdot m_i - \sum \vec{r}_G \cdot m_i = \sum \vec{r}_i \cdot m_i - \vec{r}_G \cdot \sum m_i = \sum \vec{r}_i \cdot m_i - \vec{r}_G \cdot m$$

Como por la definición de centro gravedad se sabe que $\vec{r}_G \cdot m = \sum \vec{r}_i \cdot m_i$, se tiene que el momento estático respecto de G es nulo:

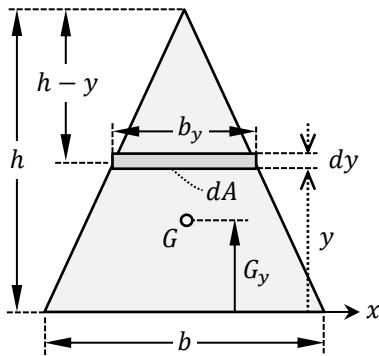
$$\vec{Q}_G = \sum \overrightarrow{GA_i} \cdot m_i = \vec{0}$$

Por lo tanto, sea cual sea la orientación del plano (para cualquier \vec{u}), siempre que contenga a G , el momento estático respecto del plano es:

$$Q_{\pi_G} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$$

2.3 CENTROIDES DE FIGURAS ELEMENTALES

2.3.1 Triángulo



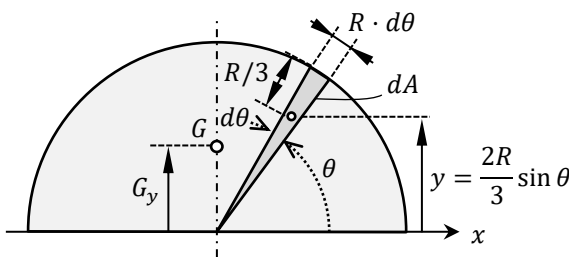
$$A = \frac{bh}{2} \quad dA = b_y \cdot dy$$

Por proporcionalidad de triángulos:

$$\frac{b}{h} = \frac{b_y}{h-y} \rightarrow dA = \frac{b}{h}(h-y)dy$$

$$\begin{aligned} G_y &= \frac{1}{A} \int y \cdot dA = \frac{2}{bh} \int_0^h y \frac{b}{h}(h-y) dy = \\ &= \frac{2}{h^2} \int_0^h (h \cdot y - y^2) dy = \frac{2}{h^2} \left(h \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \\ &= 2h \frac{3-2}{6} = \frac{h}{3} \end{aligned}$$

2.3.2 Semicírculo

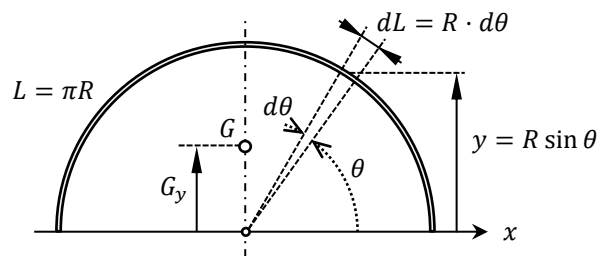


$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \pi R^2 \\ dA &= \frac{1}{2} (R \cdot d\theta) R = \frac{R^2 d\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_y &= \frac{1}{A} \int y \cdot dA = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \frac{2R}{3} \sin \theta \cdot \frac{R^2}{2} d\theta = \\ &= \frac{2R}{3\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta = \\ &= \frac{2R}{3\pi} ((-\cos \pi) - (-\cos 0)) = \frac{2R}{3\pi} (1 + 1) = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

Para un cuarto de círculo el área sería la mitad y el límite superior de la integral también, obteniéndose el mismo resultado.

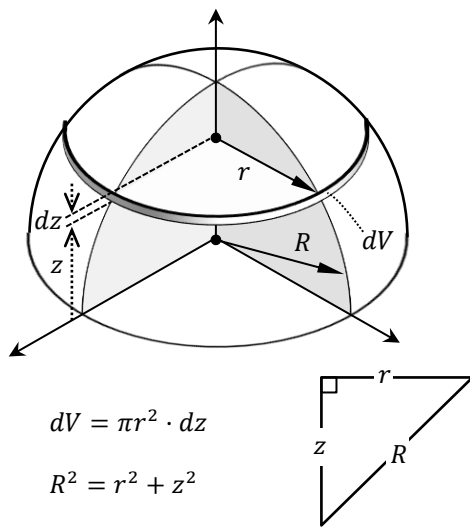
2.3.3 Semicircunferencia



$$G_y = \frac{1}{L} \int y \cdot dL = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R \sin \theta \cdot R \cdot d\theta = \frac{R}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{2R}{\pi}$$

El mismo resultado se obtiene para un cuarto de circunferencia.

2.3.4 Semiesfera



$$V = \int dV = \int_0^R \pi \cdot r^2 \cdot dz = \pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz =$$

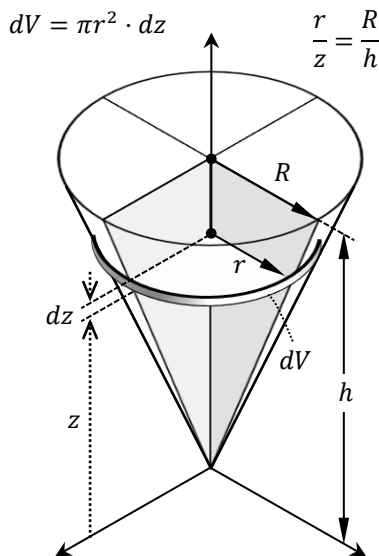
$$= \pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$G_z = \frac{1}{V} \int z \cdot dV = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^R z \cdot \pi (R^2 - z^2) dz =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \int_0^R (R^2 \cdot z - z^3) dz =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{3R}{2} \cdot \frac{2-1}{4} = \frac{3}{8} R$$

2.3.5 Cono



$$V = \int dV = \int_0^h \pi \cdot r^2 \cdot dz = \int_0^h \pi \cdot \left(\frac{R}{h} z \right)^2 \cdot dz =$$

$$= \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \cdot dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$G_z = \frac{1}{V} \int z \cdot dV = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h z \cdot \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 \cdot dz =$$

$$= \frac{3}{h^3} \int_0^h z^3 \cdot dz = \frac{3}{h^3} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{3}{4} h$$

2.4 FIGURAS COMPUESTAS

Cuando pueda descomponerse un sólido de geometría compleja en sumas y restas de sólidos elementales de propiedades conocidas, es inmediato obtener del centro de gravedad del sólido total.

$$\vec{r}_{G_T} = \frac{\sum \vec{r}_{G_i} \cdot m_i}{\sum m_i} \rightarrow G_{x_T} = \frac{\sum G_{x_i} \cdot m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum G_{x_i} \cdot V_i}{\sum V_i}, \dots$$

Tanto las posiciones de los centros de gravedad elementales, como la posición del centro de gravedad total, se miden desde una misma referencia. Obviamente en cada uno de los términos de los sumatorios debe tenerse en cuenta si el sólido elemental correspondiente está sumando o restando en la composición del sólido total. Para el caso de centroides de superficies o curvas, de igual modo:

$$G_{x_T} = \frac{\sum G_{x_i} \cdot S_i}{\sum S_i}, \dots \quad G_{x_T} = \frac{\sum G_{x_i} \cdot L_i}{\sum L_i}, \dots$$

2.5 TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN

Se hace girar una curva plana alrededor de un eje coplanario con ella y que no la corte. De esta manera se engendra una superficie de revolución. La curva tiene una longitud total L . Su centro de gravedad describe un arco de circunferencia de radio G_z . Si el ángulo girado es φ , la longitud de dicho arco, la distancia recorrida por G , es $\varphi \cdot G_z$. Del mismo modo, un diferencial de longitud de la curva engendra un diferencial de superficie de valor $dS = dL \cdot (\varphi \cdot z)$.

Teniendo en cuenta que $G_z \cdot L = \int z \cdot dL$

Se tiene que: $S = \int dS = \int \varphi \cdot z \cdot dL = \varphi \cdot \int z \cdot dL = \varphi \cdot G_z \cdot L$

Luego el área de la superficie engendada por la curva es igual a la longitud de dicha curva multiplicada por la longitud del arco recorrido por su centro de gravedad.

Análogamente, se hace girar una superficie plana alrededor de un eje coplanario con ella y que no la corte. De esta manera se engendra un volumen de revolución. La superficie tiene un área total A . Su centro de gravedad describe un arco de circunferencia de radio G_z . Si el ángulo girado es φ , la longitud de dicho arco, la distancia recorrida por G , es $\varphi \cdot G_z$. Del mismo modo, un diferencial de área de la superficie engendra un diferencial de volumen de valor $dV = dA \cdot (\varphi \cdot z)$.

Teniendo en cuenta que $G_z \cdot A = \int z \cdot dA$

Se tiene que: $V = \int dV = \int \varphi \cdot z \cdot dA = \varphi \cdot \int z \cdot dA = \varphi \cdot G_z \cdot A$

Luego el volumen engendrado por la superficie es igual al área de dicha superficie multiplicada por la longitud del arco recorrido por su centro de gravedad.

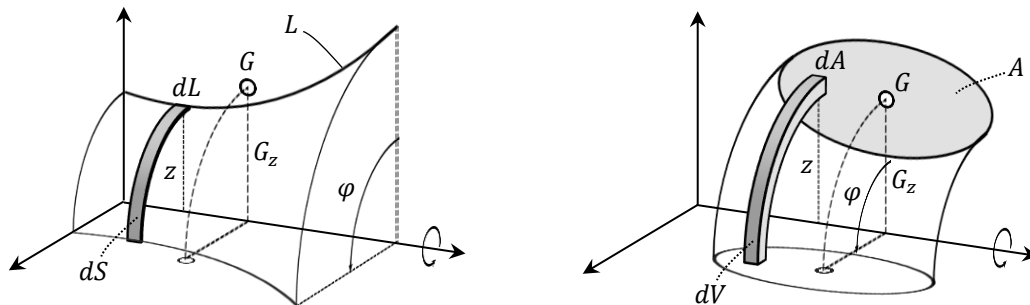


Fig. 2. 8 Superficie y volumen de revolución

Ejemplos:

- *Área de una esfera.* Una superficie esférica se engendra al hacer girar una semicircunferencia una vuelta completa respecto de su base, por tanto:

$$S = 2\pi \cdot \frac{2R}{\pi} \cdot \pi R = 4\pi R^2$$

- *Volumen de una esfera.* Un volumen esférico se engendra al hacer girar un semicircular una vuelta completa respecto de su base, por tanto:

$$V = 2\pi \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

3. EQUILIBRIO ESTÁTICO

3.1 GRADOS DE LIBERTAD EN EL ESPACIO Y EN EL PLANO

Se entiende por *grados de libertad* de un sólido todos aquellos movimientos independientes que éste es capaz de realizar cuando está libre. Los grados de libertad se pueden clasificar en dos tipos de movimientos, las traslaciones y los giros.

Un sólido libre en el espacio es capaz de realizar tres traslaciones independientes. Piénsese por ejemplo en las traslaciones en las direcciones de los tres ejes del sistema de referencia. Otra traslación cualquiera, en una dirección inclinada respecto de dichos ejes siempre podrá ser expresada como una combinación de esas tres traslaciones básicas.

Pero un sólido en el espacio, además de cambiar su posición también puede cambiar su orientación, aparte de trasladarse también puede rotar. Del mismo modo, en el caso general se pueden definir tres rotaciones independientes, los giros en torno cada uno de los tres ejes del sistema de referencia. Al igual que sucede con la traslación, un giro en torno a un eje cualquiera, inclinado respecto de los ejes de referencia, no es sino una combinación de dichos giros básicos.

Teniendo en cuenta esto, un sólido en el espacio cuenta con un total de seis grados de libertad, tres traslaciones y tres rotaciones.

En el caso plano, cuando un sólido (imágenes un sólido con forma de chapa plana) está restringido a permanecer en todo momento en un mismo plano, el xy por ejemplo, el número de movimientos independientes se reduce. En esta situación es posible definir dos traslaciones independientes a lo largo de los dos ejes del plano. El grado de libertad de traslación en la dirección z , perpendicular plano, se ha perdido. Análogamente, la única rotación posible, sin que el sólido salga del plano, es precisamente el giro en torno al eje perpendicular al mismo, es decir, la rotación en torno a z . Las rotaciones en torno a los dos ejes del plano x e y no son posibles.

Por lo tanto, en una situación bidimensional el sólido cuenta con un total de tres grados de libertad, las dos traslaciones a lo largo de los ejes del plano y la rotación en torno al eje perpendicular al mismo.

En los sistemas mecánicos existen cargas (fuerzas y momentos), actuando sobre los sólidos. En un sistema mecánico espacial dichos vectores pueden tener cualquier dirección. Sin embargo, para que se pueda considerar que el sistema mecánico es plano todas las fuerzas deben ser vectores contenidos en el plano (como las traslaciones) y todos los momentos deben ser perpendiculares al plano (como los giros).



Fig. 3.1 Grados de libertad en el espacio y en el plano

3.2 UNIONES ENTRE SÓLIDOS. FUERZAS DE ENLACE

En la práctica los sistemas mecánicos son más complejos que un simple sólido ‘flotando’ libre en el espacio, están constituidos por varios sólidos unidos entre sí, de tal manera que el sistema desempeña la función para la que fue diseñado (una estructura o un mecanismo). Estas uniones restringen el libre movimiento de los sólidos que conforman el sistema mecánico. En una estructura las uniones entre sólidos son de tal naturaleza que impiden cualquier movimiento del sistema a pesar de que a éste se le apliquen cargas. En un mecanismo, aunque existe posibilidad de movimiento, éste no es libre, sino que las uniones entre sólidos determinan que éstos tengan unos movimientos concretos.

Los sólidos que conforman un sistema mecánico están relacionados entre sí a través de sus uniones. Cuando se aplica una carga en un sólido, ésta se transmite a los restantes a través de dichas uniones. Las cargas transmitidas a través de las uniones se denominan *fuerzas de enlace*. Las fuerzas directamente aplicadas sobre los elementos del sistema mecánico son normalmente conocidas. Las fuerzas de enlace, que aparecen como consecuencia de la existencia de las anteriores, son por el contrario reacciones desconocidas que han de calcularse.

Lo más habitual es que los sistemas mecánicos, en la práctica, estén anclados a un ‘suelo fijo’, a un bastidor. Es decir, algunos de los elementos que forman parte del sistema tienen uniones con un elemento fijo. Cuando se separa (virtualmente) el sistema mecánico por las uniones que lo vinculan a dicho elemento fijo, las fuerzas de enlace que se dejan al descubierto se denominan *reacciones*.

Las fuerzas de enlace cumplen siempre el principio de acción y reacción. Por este motivo, cuando se consideran conjuntamente los dos sólidos involucrados en la unión éstas no se manifiestan. Para poder ‘verlas’ es necesario separar virtualmente ambos sólidos y considerarlos por separado. Entonces, sobre cada uno de ellos aparece el efecto del otro, en forma de fuerzas de enlace. Las fuerzas de enlace sobre uno son precisamente las opuestas que sobre el otro. Por este motivo al recomponer los sólidos (volver a montar la unión) las fuerzas de uno se anulan completamente con las del otro y no se ven, pero existen.

Las uniones entre sólidos restringen el libre movimiento de los mismos y a su vez transmiten cargas entre ellos. Estas dos ideas están íntimamente relacionadas. De hecho, la carga que se transmite a través de una unión es precisamente la necesaria para impedir el movimiento que restringe dicha unión.

Existe por tanto una vinculación total entre movimientos impedidos en una unión y fuerzas de enlace que existen en la misma. Además, es necesario hacer uso del concepto de grados de libertad a la hora de identificar los movimientos impedidos y permitidos y el tipo de fuerzas de enlace que se dan en la unión.

Se deben analizar las uniones entre sólidos una por una. Lo más frecuente es que se trate de uniones entre dos sólidos y la mayoría de los sistemas presentarán además uniones entre algunos de los sólidos que los forman y el elemento fijo.

En una unión de un sólido con el elemento fijo se comienza considerando que sólo existiera dicho elemento, es decir, se prescinde del resto de la estructura. A continuación, se identifica cuáles son los movimientos que la unión le permite realizar al sólido y cuáles impide. Siempre se cumple que el total de grados de libertad de un sólido libre se divide entre los movimientos permitidos y los movimientos impedidos por la unión. La regla general es siempre la misma:

- Una traslación impedida en una determinada dirección lleva asociada la existencia de una fuerza de reacción en dicha dirección.
- Un giro impedido en torno a un determinado eje lleva asociado un momento de reacción en la dirección de dicho eje de giro.

Cuando se analiza cuáles son las fuerzas de enlace entre dos sólidos del sistema el procedimiento anterior también es aplicable. Lo único que hay que hacer es considerar que uno de los dos sólidos estuviera completamente fijo y estudiar cuál es la capacidad de movimiento del segundo respecto del primero.

Las uniones más importantes de los sistemas planos son las siguientes:

- *Empotramiento plano*: Impide cualquier tipo de movimiento, las dos traslaciones y el giro. Por lo tanto, aparecen como reacciones del enlace dos fuerzas en dos direcciones del plano y un momento perpendicular al mismo.
- *Articulación plana*: Impide cualquier desplazamiento, por lo que transmite fuerzas en dos direcciones, pero permite el giro, por lo que no hay momento de reacción.
- *Articulación deslizante plana* o también *deslizadera articulada plana*: Permite el giro y además el desplazamiento en una dirección concreta. Aparece como reacción una fuerza en la dirección del desplazamiento impedido.
- *Deslizadera rígida*: Permite únicamente la traslación en una determinada dirección. Como impide el desplazamiento en la dirección perpendicular a la de deslizamiento, genera una fuerza según dicha perpendicular, y como además impide el giro en el plano, transmite un momento de eje perpendicular al mismo.

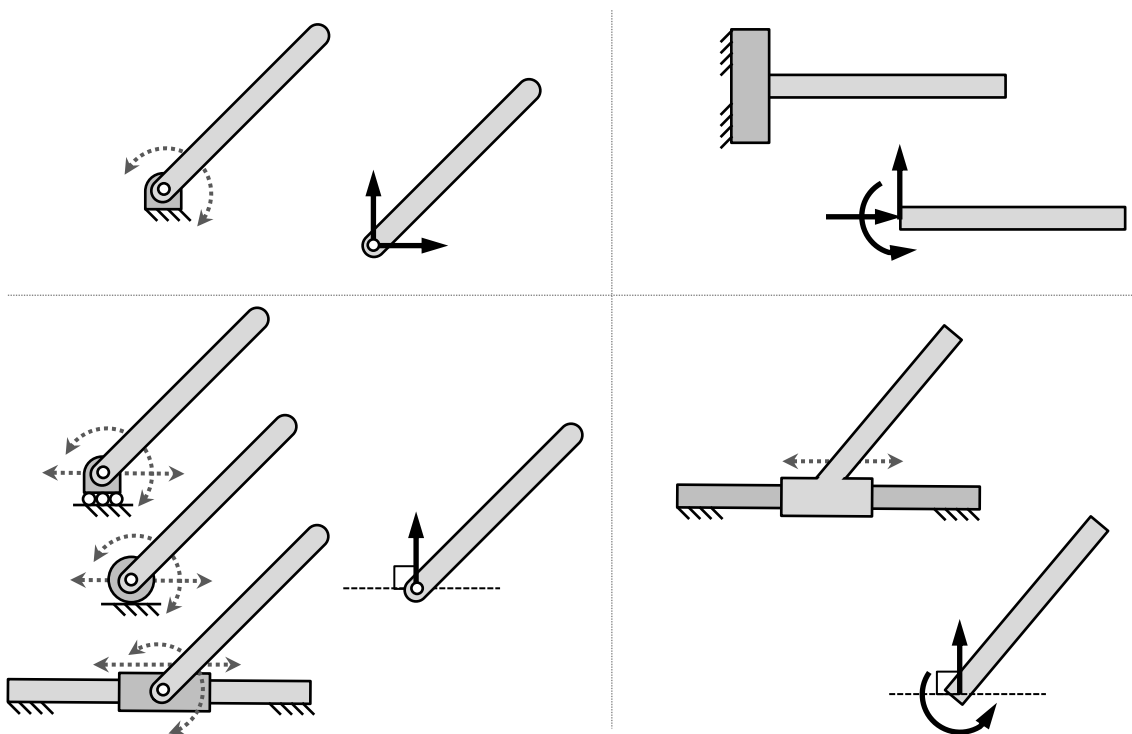


Fig. 3. 2 Principales uniones planas, movimientos permitidos y fuerzas de enlace

3.3 DIAGRAMA DE SÓLIDO LIBRE

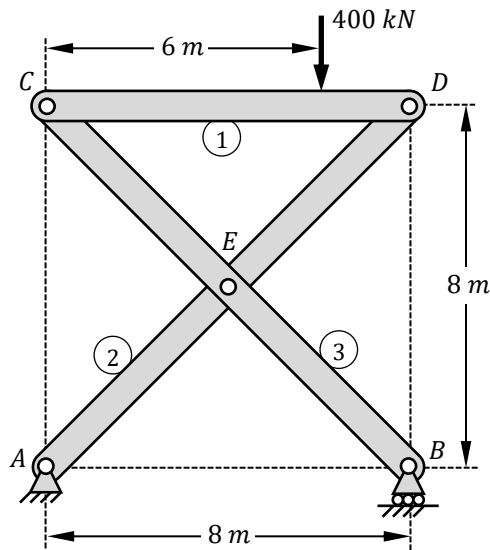
Un sistema mecánico está formado por un conjunto de sólidos sobre los que se aplican determinadas cargas. Estos sólidos están enlazados entre sí y al elemento fijo mediante una serie de uniones. Cuando se quiere analizar qué fuerzas está soportando o transmitiendo un determinado sólido, se debe aislar del resto de la estructura ‘soltándolo’ por sus uniones. Al hacer esto, deben añadirse en las uniones las fuerzas de enlace, que sustituyen el efecto del resto del sistema del que se ha prescindido. El diagrama resultante, es decir, el sólido aislado (‘flotando’) y sometido al conjunto total de fuerzas que soporta en la realidad se conoce como *diagrama de sólido libre* de dicho elemento. Algunas de estas fuerzas serán las cargas directamente aplicadas sobre el cuerpo, si las hubiera, normalmente conocidas, pero otras de las cargas del diagrama serán las fuerzas de enlace que se generan en las uniones, que son incógnitas a determinar.

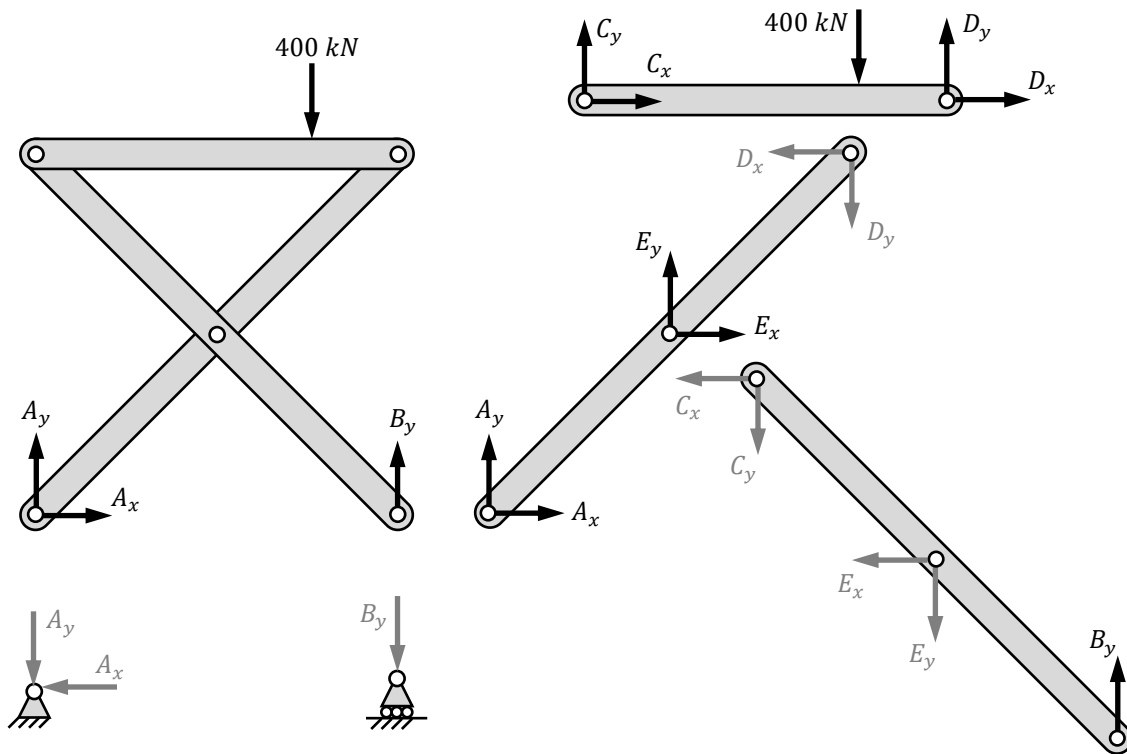
El concepto de diagrama de sólido libre no se limita exclusivamente a un único sólido. Es posible separar el sistema en su conjunto del elemento fijo, es decir, dejarlo flotando al completo con sus cargas aplicadas, conocidas, y las reacciones que existen en las uniones con elemento fijo, del que se ha separado, fuerzas de enlace desconocidas. De igual modo, para cualquier parte de la estructura formada por varios sólidos que se aisle por completo, es posible trazar el diagrama de sólido libre.

Los diagramas de sólido libre de distintas partes de una misma estructura siempre deben verificar, en los sentidos de las fuerzas de enlace, el principio de acción y reacción. La primera vez que se dibuja una fuerza de enlace, puesto que hasta que se calcule su valor es una incógnita, puede elegirse libremente el sentido. Sin embargo, cuando esa misma fuerza de enlace se dibuje sobre el otro sólido con el que el primero estaba unido, el sentido de la fuerza debe invertirse. De la misma manera, cuando la fuerza de enlace se dibuje en otro diagrama de sólido libre, pero sobre el mismo elemento en el que se definió originalmente, debe mantenerse el sentido. (Se ha podido dibujar inicialmente en el diagrama de sólido libre del conjunto, por ejemplo, y después en el diagrama del elemento aislado)

- Ejemplo 3.1

Dibujar los diagramas de sólido libre del sistema completo y de cada uno de los sólidos de la siguiente estructura:





3.4 ECUACIONES DE EQUILIBRIO

3.4.1 Axioma fundamental del equilibrio estático

Se dice que un sistema mecánico constituye una *estructura* cuando los elementos sólidos que lo forman están unidos entre sí de tal manera que ni el sistema en su conjunto, ni ninguno de tales elementos, tiene posibilidad de moverse sean cuales sean las cargas que se apliquen. Es decir, una estructura es un sistema mecánico en el que todos los sólidos permanecen en lo que se denomina *equilibrio estático*.

El diagrama de sólido libre de cualquier parte de una estructura contiene el sistema completo de cargas que soporta dicha parte. Una vez trazado tal diagrama se podría, elegido un punto cualquiera, obtener el sistema de fuerzas equivalente reducido en dicho punto, que se compondría, como es sabido, de una fuerza resultante y un momento resultante.

La parte de la estructura que se haya aislado se encuentra flotando libremente, por lo que una resultante en fuerza produciría un desplazamiento de la misma, así como una resultante en momento produciría una rotación. Sin embargo, a todos los efectos el subsistema flotante debe comportarse como cuando estaba enlazado al resto de la estructura, ya que las fuerzas de enlace que se han incluido en diagrama de sólido libre sustituyen el efecto real de aquello que se ha quitado.

Por lo tanto, puesto que cualquier parte de una estructura se encuentra en equilibrio estático, el sistema de fuerzas que se define en cualquier diagrama de sólido libre de la misma, que contiene la totalidad de cargas que dicha parte está soportando, debe ser equivalente a un *sistema de fuerzas nulo*, es decir:

- La resultante de todas las fuerzas es nula: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$
- Elegido un punto O cualquiera, la resultante de momentos respecto a dicho punto es nula:

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_j + \sum \vec{M}_{iO} = \vec{0}$$

La imposición del cumplimiento de estas dos ecuaciones vectoriales es lo que permitirá determinar los valores de las incógnitas del sistema, las fuerzas de enlace.

Obviamente, debe transformarse este sistema de ecuaciones vectoriales en uno de ecuaciones escalares, para poder aplicar los métodos de resolución elementales del álgebra al cálculo de las cargas desconocidas en las uniones. La forma más inmediata de hacer esto consiste en igualar a 0 cada una de las componentes de ambos vectores, es decir plantear el sistema de seis ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_{O_x} = 0 \\ \sum M_{O_y} = 0 \\ \sum M_{O_z} = 0 \end{cases}$$

En un sistema plano, todas las fuerzas están contenidas en el plano y todos los momentos son perpendiculares al mismo, por lo que tres de las ecuaciones anteriores se cumplen de forma trivial:

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_{O_x} = 0 \quad \sum M_{O_y} = 0$$

Por lo que en un caso plano el sistema de ecuaciones escalares útiles queda reducido a tres:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{O_z} = 0 \end{cases}$$

La transformación del sistema original de dos ecuaciones vectoriales a seis ecuaciones escalares, o tres en sistemas planos, que se ha realizado no es la única que se puede hacer, ni en muchos casos la más conveniente. Una interpretación más generalizada del axioma fundamental del equilibrio estático, que establece que el sistema de fuerzas de un diagrama de sólido libre es equivalente a un sistema nulo, es:

- La suma de fuerzas en cualquier dirección es 0.
- La suma de momentos respecto a cualquier eje es 0.

Adviértase que esta filosofía permite plantear un número infinito de ecuaciones. Sin embargo, este planteamiento no permitiría calcular un número cualquiera de incógnitas, puesto que de las infinitas ecuaciones sólo seis (cualesquiera) son linealmente independientes en el espacio, y tres en el plano. La ventaja del método, sin embargo, es indudable, puesto que da la libertad de elegir libremente la combinación de ecuaciones a emplear durante el proceso de cálculo, lo cual, si se realiza convenientemente, simplifica notablemente la resolución del sistema.

3.4.2 Estrategias de resolución en sistemas planos

Está claro que para un diagrama de sólido libre plano se pueden establecer tres ecuaciones de equilibrio independientes. Por tanto, siempre que se pueda, deben buscarse diagramas de sólido libre que sólo tengan tres incógnitas. De esta manera, se dispondrá de un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas y, en consecuencia, incluso antes de resolver, se sabrá que sus incógnitas son resolubles.

Dicho esto, para resolver dichas incógnitas, lo más conveniente es establecer estratégicamente el tipo y orden de las ecuaciones de equilibrio, de modo que en cada ecuación haya sólo una incógnita. De esta manera, en lugar de resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en realidad se estarán resolviendo tres ecuaciones con una incógnita cada una, lo cual resulta siempre más sencillo. Las dos estrategias fundamentales son:

- Si las incógnitas son tres fuerzas, siendo dos de ellas paralelas, mientras que la tercera tiene otra dirección, al plantear el equilibrio de fuerzas en la dirección perpendicular a las dos primeras, éstas no aparecerán en la ecuación, pero sí la tercera, por lo que su valor podrá despejarse directamente.
- Si las incógnitas son tres fuerzas, al plantear el equilibrio de momentos respecto del punto en el que corten las líneas de acción de dos de ellas (no paralelas), éstas no aparecerán en la ecuación, pero sí la tercera, por lo que su valor podrá despejarse directamente.

Está claro que, si un diagrama de sólido libre plano tiene tres incógnitas, todas serán resolubles (a no ser que se esté en uno de los casos degenerados explicados más adelante). De la misma manera, es posible afirmar que, si un diagrama de sólido libre plano posee más de tres incógnitas, sólo con sus ecuaciones de equilibrio no van a poder determinarse la totalidad de las incógnitas (aunque haya posibilidad de plantear más de tres ecuaciones, sólo tres serán linealmente independientes). Sin embargo, puede darse el caso de que, teniendo más de tres incógnitas y no pudiendo por tanto resolverse todas, sí puedan resolverse al menos algunas de ellas. El caso más evidente es que haya cuatro fuerzas desconocidas y las líneas de acción de tres de ellas concurren en punto. En tal caso, planteando el equilibrio de momentos respecto a dicho punto se determina el valor de la cuarta.

El caso más habitual en la práctica se da cuando dos de las cuatro fuerzas comparten una misma línea de acción. Supóngase cuatro fuerzas desconocidas, F_1 , F_2 , F_3 y F_4 , de tal manera que F_1 y F_2 , no sólo son paralelas, sino que se apoyan sobre una misma recta. Además, ni F_3 ni F_4 son paralelas a las dos anteriores. Por tanto, la línea de acción común a F_1 y F_2 se corta con la línea de acción de F_3 en un punto A . Al plantear el equilibrio de momentos respecto de dicho punto se obtiene F_4 .

En esta situación, además a continuación se podrá determinar el valor de F_3 sin más que aplicar un equilibrio de fuerzas en la dirección perpendicular a la línea de acción común a F_1 y F_2 . Alternativamente, podría haberse utilizado el punto B de intersección de la línea de acción común a F_1 y F_2 con la línea de acción de F_4 , puesto que, planteando el equilibrio de momentos respecto de dicho punto se obtiene directamente F_3 .

La última ecuación independiente que se puede plantear proporcionará la relación existente entre las dos incógnitas que quedan, F_1 y F_2 , pero no el valor de ninguna de ellas. Esta ecuación, que puede ser, por ejemplo, el equilibrio de fuerzas en la dirección de F_1 y F_2 , no se podrá utilizar hasta que, de otro diagrama, se haya obtenido el valor de una cualquiera de las dos.

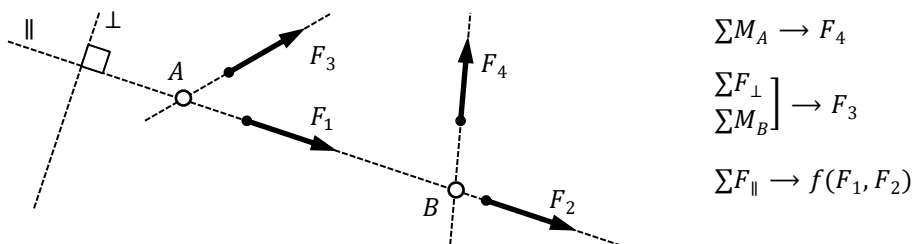


Fig. 3.3 Cálculo de incógnitas parcial

Lo más interesante a la hora de resolver cualquier problema es ser capaz de establecer la estrategia que permita diseñar la ecuación necesaria para resolver cada incógnita. Se tiende a pensar que lo más inmediato es plantear las tres ecuaciones de equilibrio estándar, fuerzas horizontales y verticales y momentos respecto de un punto, además en ese mismo orden. Sin embargo, puede que sea más conveniente plantear sólo una ecuación de equilibrio de fuerzas y dos de momentos, respecto de dos puntos distintos, o incluso ninguna ecuación de fuerzas y aplicar tres ecuaciones de momentos. De la misma manera, el equilibrio de fuerzas más conveniente, según el caso, puede que no sea en ninguna de las direcciones cartesianas, sino en una determinada dirección inclinada.

Se ha dicho que para un diagrama de sólido libre plano pueden establecerse tres ecuaciones independientes. Sin embargo, existen dos excepciones en las que el sistema degenera, perdiendo una ecuación, por lo que sólo podrán resolverse dos incógnitas:

- Cuando todas las fuerzas desconocidas son paralelas, puesto que ninguna aparece en la ecuación de equilibrio de fuerzas en la dirección perpendicular a ellas.
- Cuando las líneas de acción de todas las fuerzas desconocidas se cortan en un mismo punto, puesto que ninguna aparece en la ecuación de equilibrio de momentos respecto a dicho punto.

3.4.3 Comprobación de resultados

Una de las ventajas de poder plantear infinitas ecuaciones de equilibrio para un mismo diagrama de sólido libre es que, como tienen que cumplirse todas, una vez que se han resuelto las incógnitas y se han sustituido en el diagrama de sólido libre por sus valores, pueden plantearse ecuaciones adicionales de comprobación. En la práctica, lo más conveniente es comprobar que se verifica el equilibrio de momentos respecto de un punto cualquiera, distinto a los que se hayan utilizado para calcular. Obsérvese que la ecuación de comprobación no contiene ninguna incógnita, está formada en su totalidad por términos conocidos, es simplemente una ecuación que se cumple.

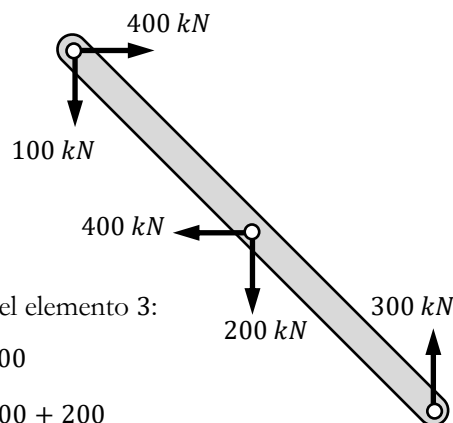
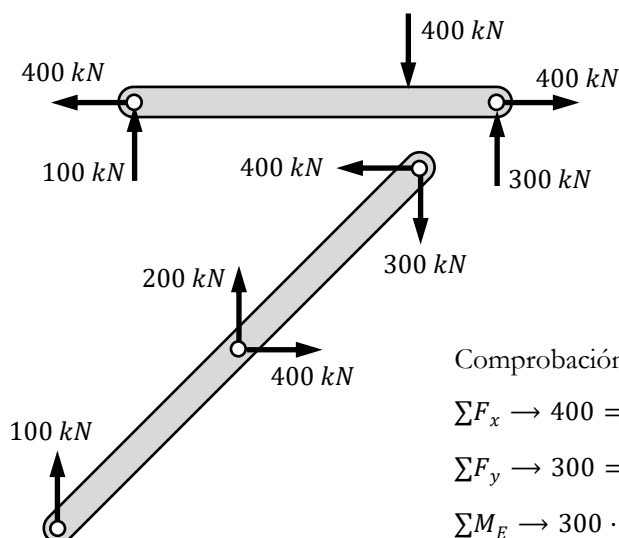
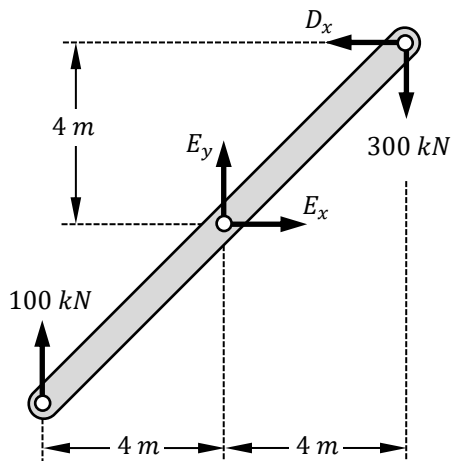
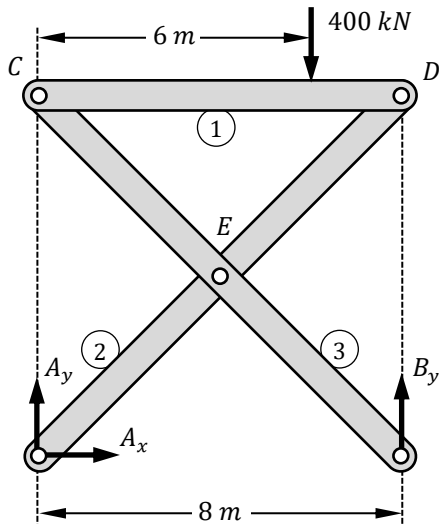
Pero sin duda, la mejor manera de tener la seguridad de que los resultados del cálculo de una estructura son correctos es hacer uso de lo que se podría denominar como el *diagrama de sólido libre sobrante*. Supóngase que el objetivo es dibujar los diagramas de sólido libre resueltos de cada uno de los elementos que forman parte de una estructura. Si se ha comenzado resolviendo el diagrama de sólido de libre del conjunto y luego se ha ido avanzando resolviendo elementos individuales o subconjuntos, resultará que aquel elemento que haya quedado para el final se tendrá totalmente resuelto sin necesidad de hacer nada, sin tener que plantear sus ecuaciones, es decir, se podrá dibujar directamente su diagrama de sólido libre con valores conocidos, sin incógnitas.

Sus ecuaciones de equilibrio, sin embargo, deben cumplirse, por lo que dicho elemento, sobrante desde el punto de vista del cálculo (puesto que al llegar a él ya está todo calculado), constituye el elemento de comprobación de propio cálculo previo. Realizar la comprobación consiste simplemente en verificar que se cumplen tres ecuaciones de equilibrio independientes. La parte más sencilla es comprobar el equilibrio de fuerzas en dos direcciones distintas (lo cual en muchas ocasiones puede realizarse por simple inspección visual al tener dibujado su diagrama de sólido libre). Hecho esto, se ha de elegir un punto cualquiera para verificar que se cumple también el equilibrio de momentos. Es imprescindible no olvidarse de realizar esta última comprobación, ya que, en ocasiones, aunque la resolución sea incorrecta, se cumple el equilibrio de fuerzas. Para tener la certeza de que los resultados son correctos es necesario comprobar que se cumple también el equilibrio de momentos respecto de un punto cualquiera.

Sin embargo, si no se ha podido comenzar el problema resolviendo el diagrama de sólido libre del conjunto, por ejemplo, porque contiene de partida demasiadas incógnitas, sucederá que para resolver por completo el problema habrán de plantearse ecuaciones de equilibrio para todos los elementos de la estructura, no sobrando ninguno. En tal caso, podría pensarse que no se dispone de diagrama de sólido libre de comprobación. Esto no es así, puesto que, si se han resuelto los diagramas de todos los elementos, a continuación, se podrá dibujar resuelto el diagrama del conjunto, que no se ha empleado para calcular, pero cuyas ecuaciones de equilibrio deben, en cualquier caso, cumplirse.

• Ejemplo 3.2

Calcular todas las fuerzas que actúan sobre cada elemento de la estructura del ejemplo anterior y dibujar el diagrama de sólido libre de cada elemento con los valores obtenidos.



Comprobación del elemento 3:

$$\sum F_x \rightarrow 400 = 400$$

$$\sum F_y \rightarrow 300 = 100 + 200$$

$$\sum M_E \rightarrow 300 \cdot 4 + 100 \cdot 4 = 400 \cdot 4$$

▪ Para el conjunto:

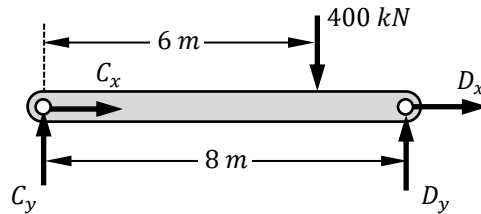
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot 8 = 400 \cdot 6 \rightarrow B_y = 300 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 400 \rightarrow A_y = 100 \text{ kN}$$

$$\text{Comprobación: } \sum M_B = 400 \cdot 2 - 100 \cdot 8 = 0$$

▪ Para el elemento 1:



$$\sum M_C = 0 \rightarrow D_y \cdot 8 = 400 \cdot 6 \rightarrow D_y = 300 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y + D_y = 400 \rightarrow C_y = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x + D_x = 0 \leftarrow (*)$$

▪ Para el elemento 2:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow E_y + 100 = 300 \rightarrow E_y = 200 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow D_x \cdot 4 = 300 \cdot 4 + 100 \cdot 4 \rightarrow D_x = 400 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow D_x = E_x = 400 \text{ kN}$$

Comprobación:

$$\sum M_D = 400 \cdot 4 - 200 \cdot 4 - 100 \cdot 8 = 0$$

$$(*) \rightarrow C_x = -D_x = -400 \text{ kN}$$

3.5 CARGAS DISTRIBUIDAS

Hasta el momento se han considerado exclusivamente fuerzas aplicadas de carácter puntual. Sin embargo, es frecuente que los sistemas mecánicos también se encuentren sometidos a cargas distribuidas, por ejemplo, una fuerza por unidad de longitud aplicada a lo largo de un cierto tramo.

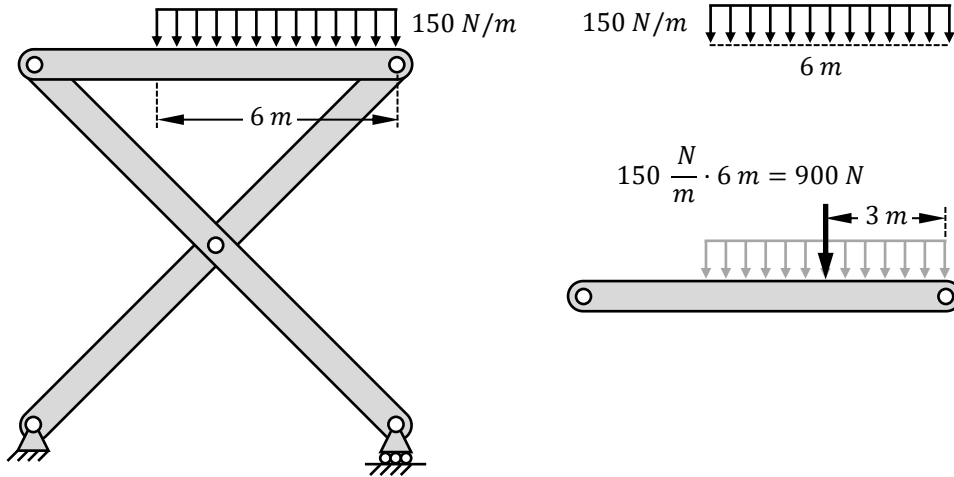


Fig. 3. 4 Fuerza uniformemente distribuida

Obviamente, al igual que las fuerzas puntuales ordinarias, las cargas distribuidas afectan al estado del sistema y por tanto también han de tenerse en cuenta en las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, tanto los balances de fuerzas como los de momentos, matemáticamente, sólo pueden expresarse en términos de fuerzas puntuales. En consecuencia, para tener en cuenta el efecto de una fuerza distribuida, ésta previamente debe transformarse en una *fuerza puntual equivalente*.

La manera de llevar a cabo esta transformación es muy simple. La representación de la distribución de carga define un área. Esta área tiene una forma concreta por lo que es posible determinar el valor de su superficie y la posición de su centroide. Pues bien:

- El valor de la fuerza puntual equivalente es la superficie del área (obsérvese además la coherencia dimensional que se produce). Naturalmente, la dirección y sentido de la fuerza puntual son los mismos de la distribuida.
- La línea de acción de la fuerza puntual equivalente pasa por el centroide del área.

Esta transformación es aplicable a cualquier tipo de distribución. Véase otro ejemplo común, la carga triangular:

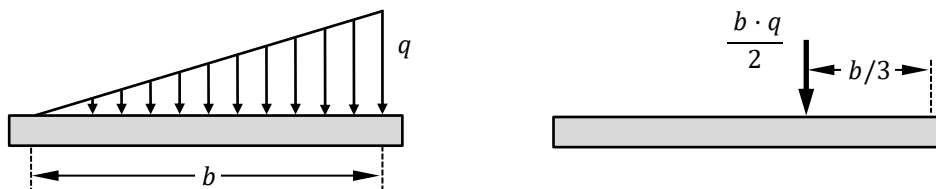


Fig. 3. 5 Fuerza puntual equivalente a una distribución de carga triangular

3.6 ELEMENTO BIARTICULADO SIN CARGAS APLICADAS

Existe una situación particular, cuando sobre un elemento con dos articulaciones no se aplica ninguna carga, en la que el diagrama de sólido libre puede simplificarse notablemente. Al no haber cargas externamente aplicadas, las únicas fuerzas que actúan sobre el sólido son las fuerzas de enlace en sus dos articulaciones. El diagrama de sólido libre sería, por tanto:

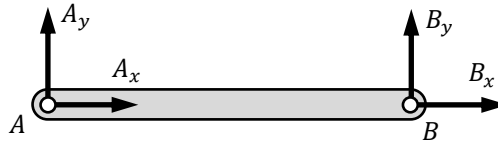


Fig. 3. 6 Diagrama de sólido libre de un elemento biarticulado sin cargas externas

Por comodidad se ha elegido un sistema de referencia en el que el eje x coincide con la dirección de la línea que une las dos articulaciones. Se observa que este diagrama comprende cuatro fuerzas de enlace a determinar. Al tratarse de un sistema plano se pueden plantear tres ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y = 0$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow A_y = 0 \quad \text{o indistintamente, conocido el resultado anterior, } \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + B_x = 0 \rightarrow A_x = -B_x$$

Es decir, es posible rehacer el diagrama de sólido libre original de manera que sólo contenga una única incógnita:

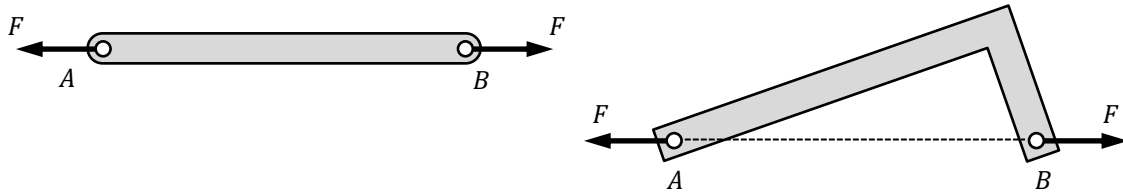


Fig. 3. 7 Fuerzas de enlace en un elemento biarticulado sin cargas externas

En conclusión, en un elemento biarticulado sin cargas aplicadas, y sólo en dicho caso, las fuerzas de enlace son dos fuerzas iguales y opuestas en la dirección de la recta que une ambas articulaciones. El elemento biarticulado no tiene por qué ser una barra recta.

Cuando sea necesario trabajar con las componentes de estas fuerzas de enlace, por ejemplo, porque la línea que une las articulaciones esté inclinada, debe hacerse uso del hecho de que la dirección de las fuerzas es conocida, de modo que al final, todas componentes dibujadas engloben una única incógnita:

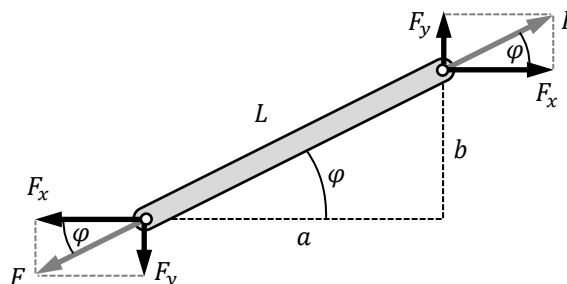


Fig. 3. 8 Fuerzas de enlace en un elemento biarticulado en una dirección conocida

Una posibilidad es elegir F como variable dominante y expresar las componentes en función de ésta:

$$F_x = F \cos \varphi = F \frac{a}{L} \quad F_y = F \sin \varphi = F \frac{b}{L}$$

Sin embargo, en muchas ocasiones resulta más cómodo elegir una de las componentes como variable dominante y expresar la otra en función de ésta, haciendo uso de que la relación entre ambas es conocida:

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{F_y}{F_x} \rightarrow \frac{F_x}{a} = \frac{F_y}{b} \rightarrow F_x = F_y \frac{a}{b} = F_y / \tan \varphi$$

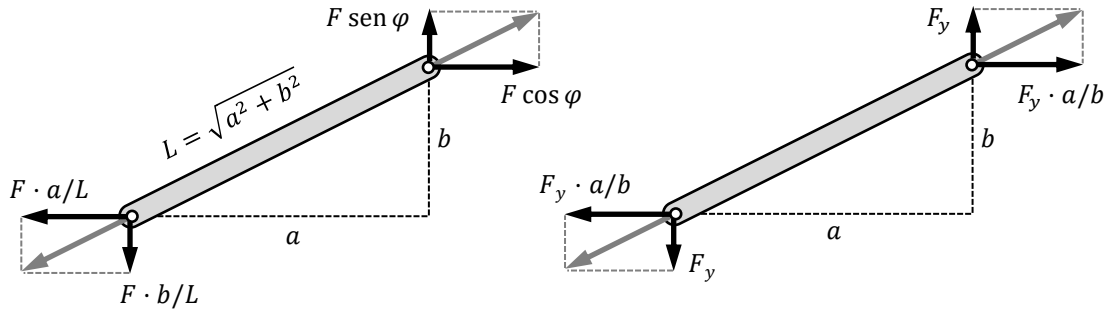


Fig. 3. 9 En un elemento biarticulado sin carga sólo hay una fuerza incógnita

La identificación de estos elementos en las estructuras que vayan a analizarse debe constituir siempre el primer paso del proceso de cálculo, ya que ello simplifica notablemente tanto el planteamiento como la resolución de las ecuaciones de equilibrio. Antes de realizar ningún cálculo, para cada uno de los elementos detectados con una única incógnita, se ha de representar el diagrama de sólido libre que manifieste el valor único en dirección conocida, y los sentidos opuestos de las fuerzas de enlace. Acto seguido, en el caso de que se trate de una dirección inclinada, debe establecerse la relación entre las componentes, que no son independientes.

Hacer esto sustituye al proceso de haber planteado un diagrama de sólido libre con cuatro incógnitas (fuerza horizontal y vertical en cada una de las dos articulaciones) y haber aplicado sus tres ecuaciones de equilibrio (pasando de cuatro incógnitas a tan sólo una). Por tanto, para dichos elementos ya no se puede plantear ninguna ecuación de equilibrio. Las incógnitas que en ellos aparecen se resolverán cuando se lleven dichas fuerzas de enlace a otros diagramas de sólido libre (por ejemplo, por aplicación del principio de acción-reacción en los elementos conectados en las uniones implicadas), para los cuales sí tendrá sentido plantear las ecuaciones de equilibrio ordinarias.

En realidad, el elemento biarticulado sin cargas aplicadas es un caso particular de una situación más general a la que lo anterior es igualmente aplicable, que es el elemento sometido únicamente a fuerzas en dos puntos. Si en el diagrama de sólido libre únicamente existen fuerzas en dos puntos, aunque pueda haber más de una fuerza en cada uno de tales puntos, para que dicho elemento esté en equilibrio estático, ha de cumplirse que las resultantes de las fuerzas en ambos puntos sean del mismo módulo, en la dirección de la línea que los une y de sentidos opuestos.

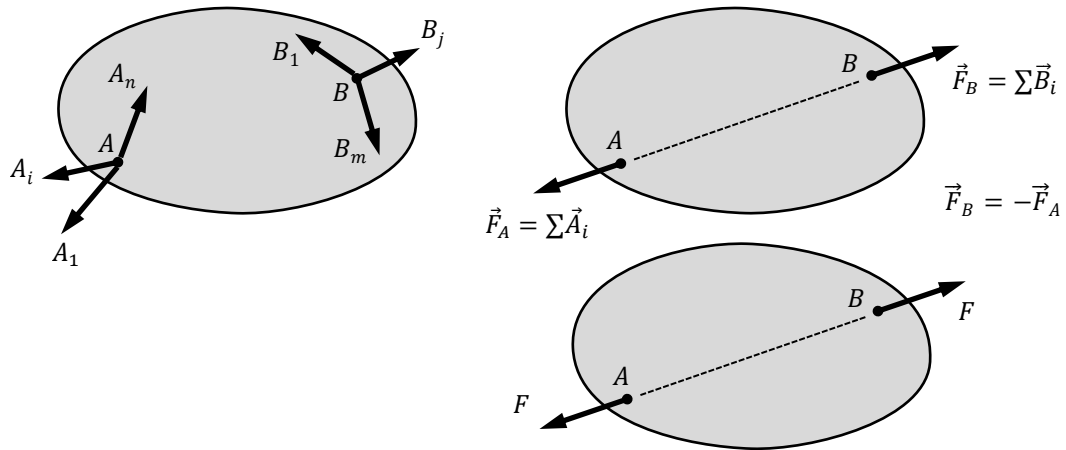
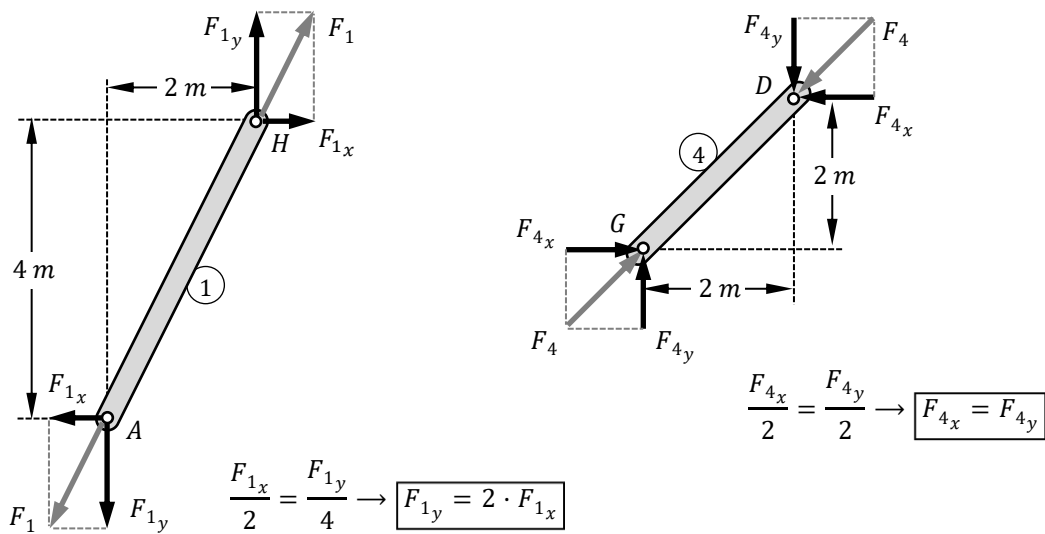
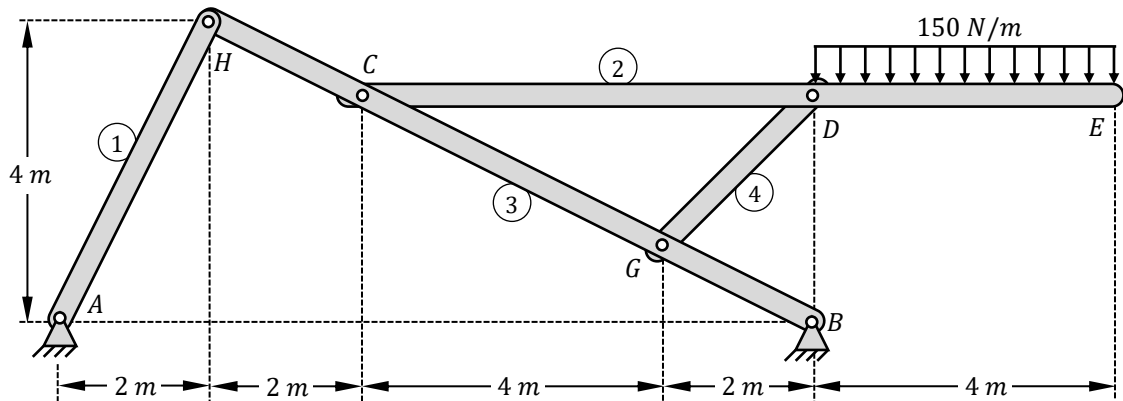
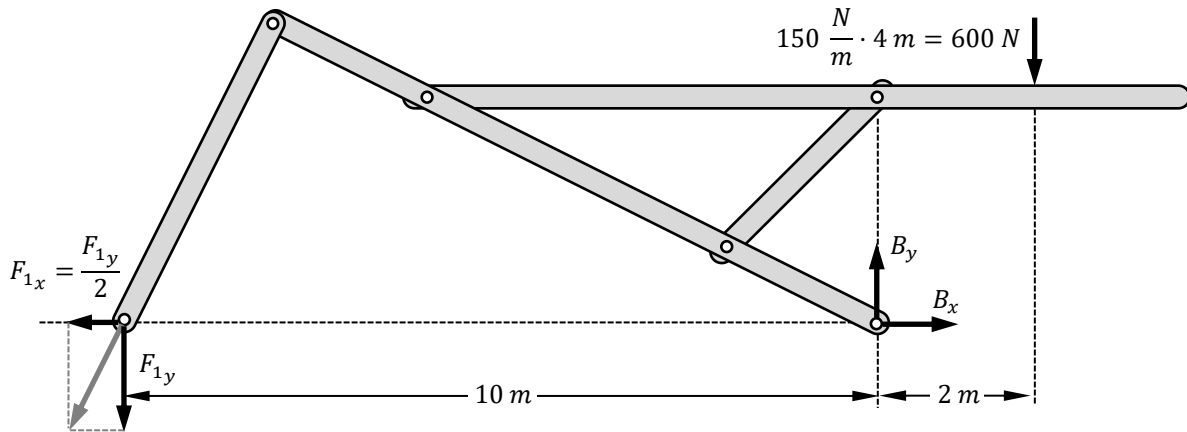


Fig. 3.10 Elemento con tan sólo fuerzas en dos puntos

• Ejemplo 3.3

Calcular todas las fuerzas que actúan sobre cada elemento de la estructura y dibujar el diagrama de sólido libre de cada elemento con los valores obtenidos.

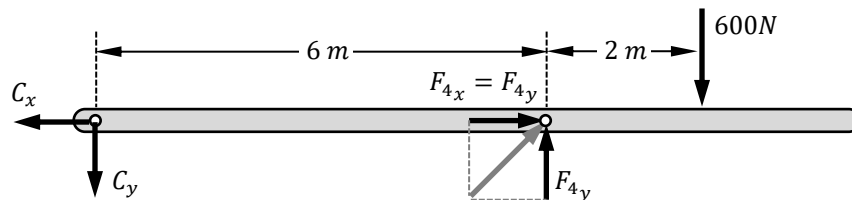




$$\sum M_B = 0 \rightarrow F_{1y} \cdot 10 = 600 \cdot 2 \rightarrow F_{1y} = 60 \cdot 2 = 120 \text{ N} \rightarrow F_{1x} = F_{1y}/2 = 120/2 = 60 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y = F_{1y} + 600 = 120 + 600 = 720 \text{ N}$$

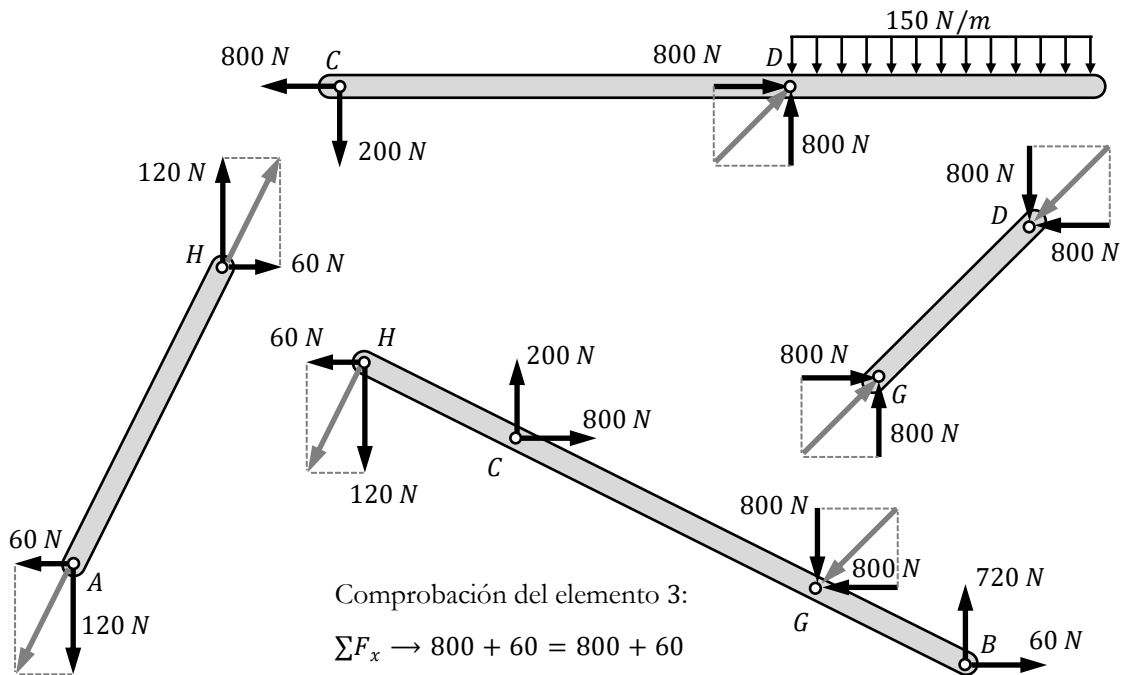
$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = F_{1x} = 60 \text{ N} \quad \text{Comprobación: } \sum M_A = 720 \cdot 10 - 600 \cdot 12 = 0$$



$$\sum M_D = 0 \rightarrow C_y \cdot 6 = 600 \cdot 2 \rightarrow C_y = 100 \cdot 2 = 200 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{4y} = C_y + 600 = 200 + 600 = 800 \text{ N} \rightarrow F_{4x} = 800 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = F_{4x} = 800 \text{ N} \quad \text{Comprobación: } \sum M_C = 800 \cdot 6 - 600 \cdot 8 = 0$$



Comprobación del elemento 3:

$$\sum F_x \rightarrow 800 + 60 = 800 + 60$$

$$\sum F_y \rightarrow 200 + 720 = 800 + 120$$

$$\sum M_B \rightarrow 800 \cdot 1 + 800 \cdot 2 + 60 \cdot 4 + 120 \cdot 8 = 800 \cdot 3 + 200 \cdot 6$$

3.7 ARTICULACIONES CON MÁS DE DOS ELEMENTOS

Cuando una articulación enlaza dos elementos es inmediato aplicar el principio de acción y reacción. Sin embargo, puede resultar más confuso plantear las fuerzas de enlace cuando en una articulación confluyen tres o más elementos. Para entender mejor cómo ha de abordarse esta situación, en primer lugar, se explicará más a fondo qué está sucediendo en realidad en el caso más simple de unión entre dos sólidos. Piénsese que la articulación se construyera en la realidad haciendo pasar un perno, o bulón, por sendos agujeros practicados en las piezas a enlazar. En este caso, las fuerzas en el enlace no se transmiten directamente entre los dos elementos, sino que lo hacen a través de dicho tercer sólido intermedio, el pasador. Por tanto, se puede comenzar suponiendo que las fuerzas de enlace son independientes (distintas) en cada uno de los dos elementos y que el principio de acción-reacción ha de verificarse entre cada uno de los elementos y el pasador. Sin embargo, al estudiar el equilibrio del propio pasador se observa que dichas fuerzas de enlace tienen los mismos valores, por lo que se podía haber establecido el principio de acción-reacción directamente entre ambos elementos, sin necesidad de considerar dicho elemento intermedio.

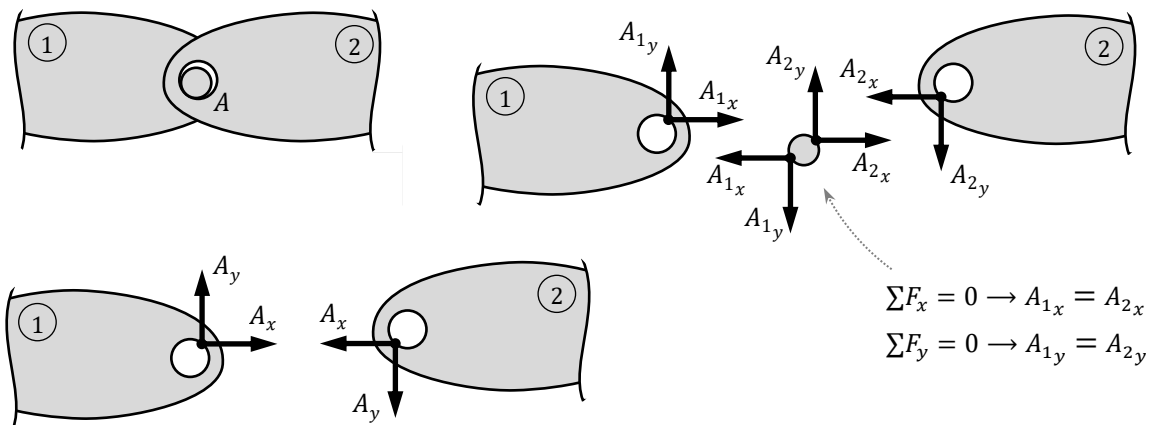


Fig. 3. 11 Articulación con dos elementos

Un proceso similar ha de aplicarse cuando confluyan más de dos elementos en la articulación. Debe suponerse que las fuerzas de enlace son incógnitas independientes en cada sólido y establecer las relaciones entre ellas planteando el equilibrio del pasador, donde se han aplicado todas las anteriores de acuerdo al principio de acción-reacción.

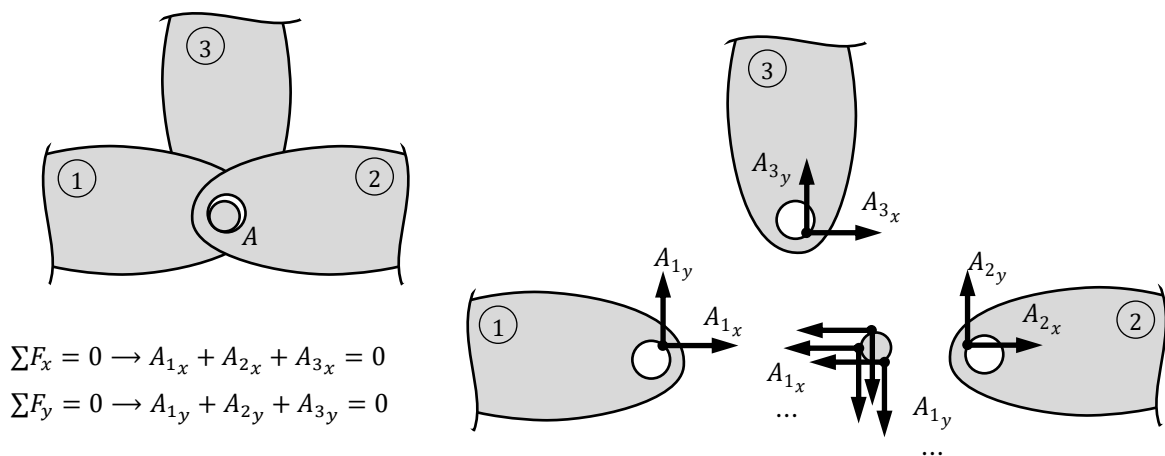


Fig. 3. 12 Articulación con más de dos elementos

3.8 NÚMERO DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO INDEPENDIENTES

Una práctica muy recomendable previa al lanzamiento de la resolución de cualquier problema consiste en verificar que el problema en cuestión es efectivamente resoluble. En los problemas de equilibrio lo primero que conviene comprobar es que se dispone de un número de ecuaciones de equilibrio independientes que iguale al número total de incógnitas existente.

En primer lugar, es necesario contar el número de elementos individuales que componen la estructura. En principio, para cada diagrama de sólido libre de un elemento individual, en el caso plano, existen tres ecuaciones de equilibrio independientes. Además, los diagramas de sólido libre de los distintos elementos individuales son independientes entre sí, por lo que en principio se dispondría de un número total de ecuaciones independientes igual a tres por el número de elementos.

Sin embargo, esta regla requiere dos puntualizaciones importantes que tienen que ver con la existencia en la estructura de:

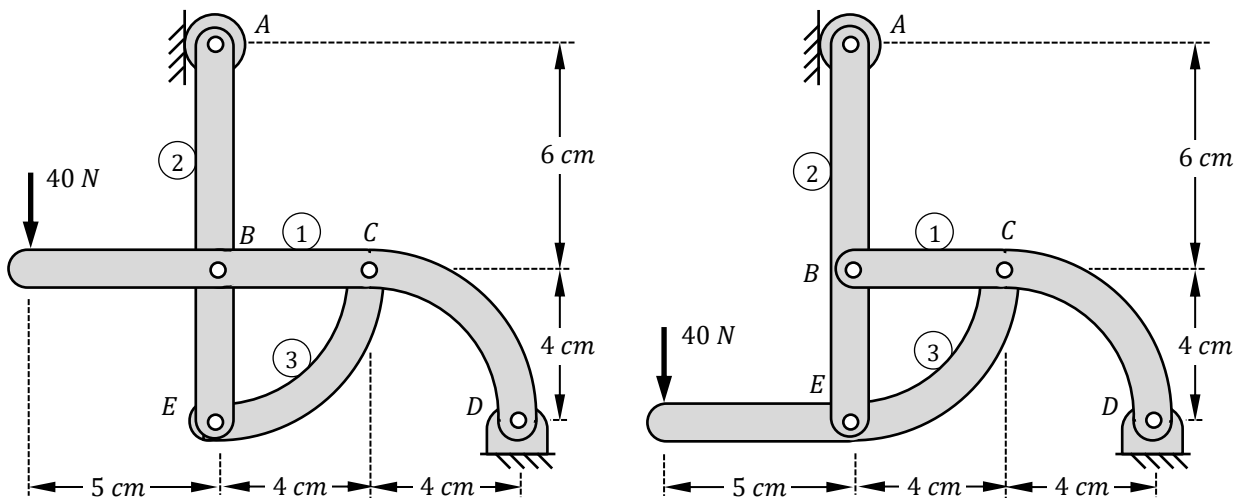
- Elementos que trabajen axialmente. Sus tres ecuaciones de equilibrio ya están implícitamente aplicadas al haberlos planteado directamente en equilibrio en función de una única incógnita, en lugar de cuatro, por lo tanto, ya no pueden contabilizarse.
- Articulaciones múltiples. El pasador de cada articulación múltiple puede plantearse como un diagrama de sólido libre de un elemento individual adicional, pero degenerado, que añade sus dos ecuaciones de equilibrio de fuerza independientes.

Por lo tanto, habiendo realizado inicialmente la identificación de los elementos que trabajan axialmente (y habiéndolos planteado desde el principio trabajando de esa forma), así como de las articulaciones en las que no se puede aplicar directamente el principio de acción reacción entre los elementos enlazados, el número total de ecuaciones independientes resulta:

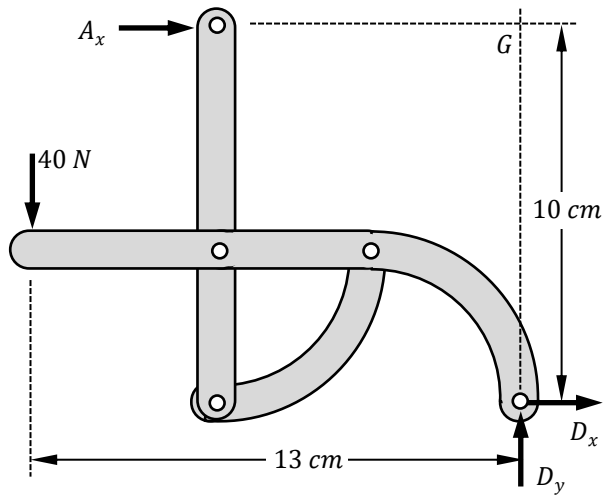
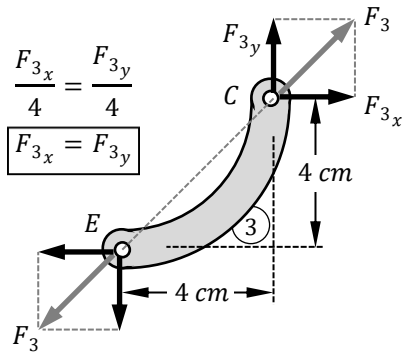
$$3 \times \text{número de elementos que NO trabajan axialmente} + 2 \times \text{número de articulaciones múltiples}$$

• *Ejemplo 3.4*

Representar los diagramas de sólido libre resueltos de todos los elementos de las estructuras:



Aunque ambas estructuras en apariencia son similares, en la primera existe un elemento biarticulado sin carga y se puede representar desde el principio en equilibrio con una única incógnita. En la segunda estructura, sin embargo, no existe ningún elemento sometido únicamente a fuerzas en dos puntos. El primer caso presenta $3 \cdot 2 = 6$ ecuaciones (incógnitas), mientras que el segundo $3 \cdot 3 = 9$.

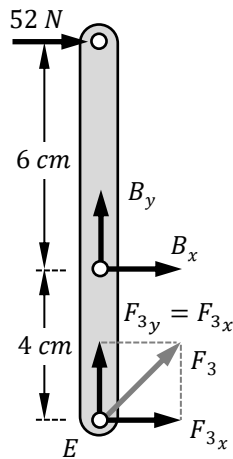


$$\sum F_y \rightarrow D_y = 40 \text{ N}$$

$$\sum M_D \rightarrow A_x \cdot 10 = 40 \cdot 13 \rightarrow A_x = 52 \text{ N}$$

$$\sum F_x \rightarrow A_x + D_x = 0 \rightarrow D_x = -52 \text{ N}$$

Comprobación: $\sum M_G = 40 \cdot 13 + (-52) \cdot 10 = 0$

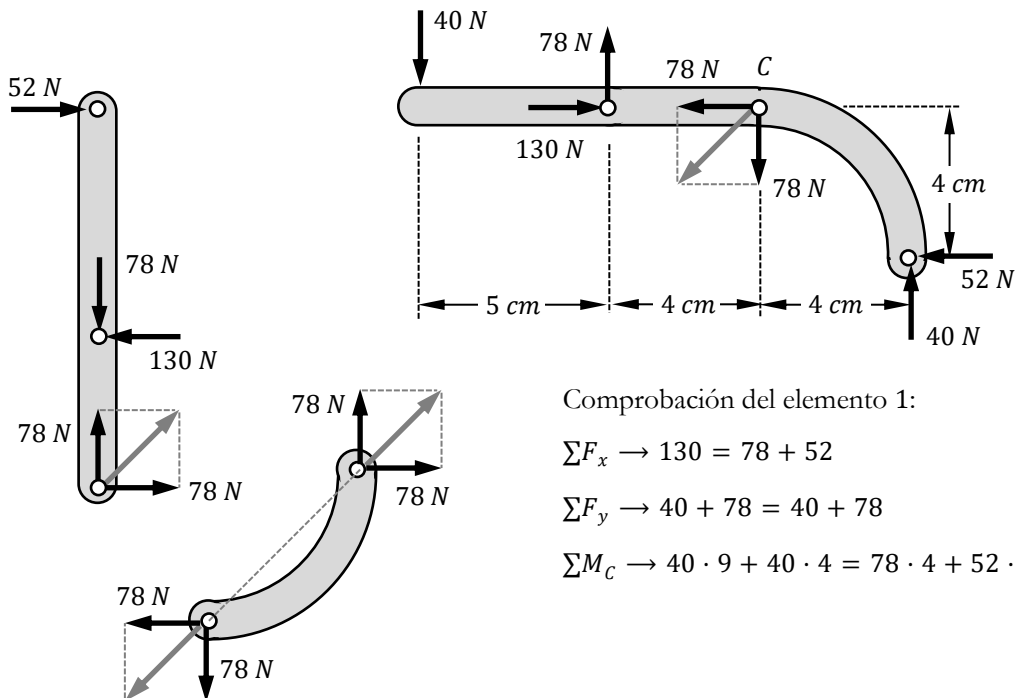


$$\sum M_B \rightarrow F_{3x} \cdot 4 = 52 \cdot 6 \rightarrow F_{3x} = 78 \text{ N} \rightarrow F_{3y} = 78 \text{ N}$$

$$\sum F_x \rightarrow B_x + F_{3x} + 52 = 0 \rightarrow B_x = -130 \text{ N}$$

$$\sum F_y \rightarrow B_y + F_{3y} = 0 \rightarrow B_y = -78 \text{ N}$$

Comprobación: $\sum M_E = -52 \cdot 10 - (-130) \cdot 4 = 0$

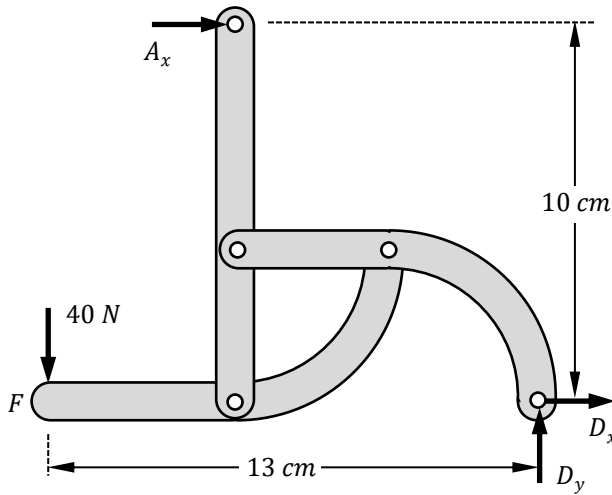


Comprobación del elemento 1:

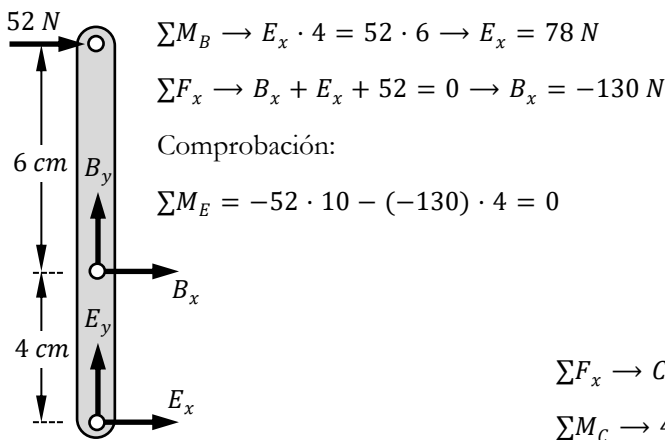
$$\sum F_x \rightarrow 130 = 78 + 52$$

$$\sum F_y \rightarrow 40 + 78 = 40 + 78$$

$$\sum M_C \rightarrow 40 \cdot 9 + 40 \cdot 4 = 78 \cdot 4 + 52 \cdot 4$$

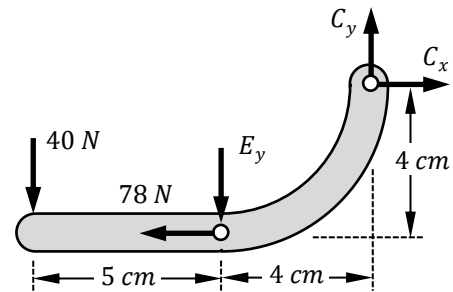


$$\begin{aligned} \sum F_y &\rightarrow D_y = 40 \text{ N} \\ \sum M_D &\rightarrow A_x \cdot 10 = 40 \cdot 13 \rightarrow A_x = 52 \text{ N} \\ \sum F_x &\rightarrow A_x + D_x = 0 \rightarrow D_x = -52 \text{ N} \\ \text{Comprobación:} \\ \sum M_F &= 40 \cdot 13 - 52 \cdot 10 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_B &\rightarrow E_x \cdot 4 = 52 \cdot 6 \rightarrow E_x = 78 \text{ N} \\ \sum F_x &\rightarrow B_x + E_x + 52 = 0 \rightarrow B_x = -130 \text{ N} \\ \text{Comprobación:} \\ \sum M_E &= -52 \cdot 10 - (-130) \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\sum F_y \rightarrow B_y + E_y = 0 \rightarrow B_y = 12 \text{ N}$$

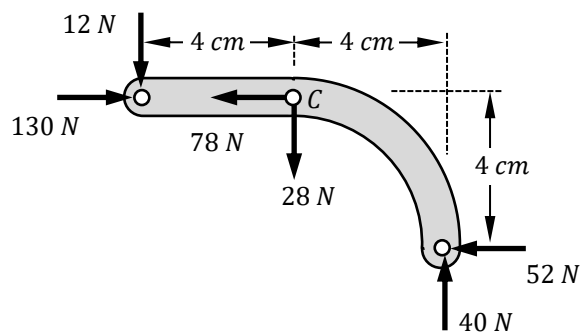
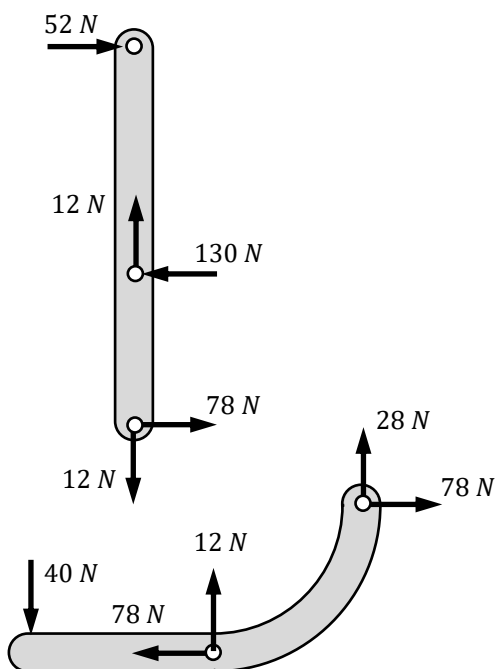


$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow C_x = 78 \text{ N} \\ \sum M_C &\rightarrow 40 \cdot 9 + E_y \cdot 4 = 78 \cdot 4 \rightarrow E_y = -12 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\sum F_y \rightarrow C_y = 40 + E_y = 28 \text{ N}$$

Comprobación:

$$\sum M_E = 40 \cdot 5 + 28 \cdot 4 - 78 \cdot 4 = 0$$



Comprobación del elemento 1:

$$\begin{aligned} \sum F_x &\rightarrow 130 = 78 + 52 \\ \sum F_y &\rightarrow 40 = 12 + 28 \\ \sum M_C &\rightarrow 12 \cdot 4 + 40 \cdot 4 = 52 \cdot 4 \end{aligned}$$

3.9 CELOSÍAS PLANAS

3.9.1 Definición

Se denomina celosía a la estructura exclusivamente formada por elementos biarticulados sin carga, todos ellos con forma de *barra recta*. Las fuerzas externas por tanto sólo pueden estar aplicadas en las articulaciones, también denominadas *nudos* de la celosía. Debido a que la totalidad de los elementos transmiten las cargas axialmente, ya sea en tracción o en compresión, existe una única fuerza a determinar por elemento. Por este motivo existen métodos de resolución específicos para este tipo de estructuras. Cualquiera de los métodos de cálculo de celosías hace uso del hecho de que la fuerza a determinar en cada barra, aun siendo de valor desconocido, tiene una dirección conocida, la de la propia barra.

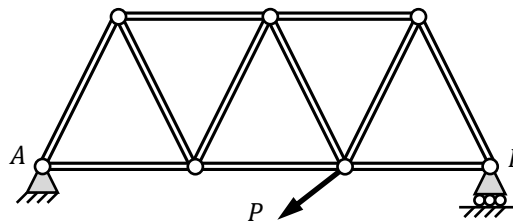


Fig. 3.13 Celosía plana

3.9.2 Método de las secciones

El método de las secciones, también conocido como *método de Ritter*, consiste en dar un corte a la celosía de modo que quede completamente dividida en dos partes. Todas las barras afectadas por el corte realizado 'dejan a la vista' las fuerzas axiales que están soportando. El método consiste en determinar dichas fuerzas incógnita aplicando las ecuaciones del equilibrio estático a una cualquiera de las dos mitades resultantes de la división de la estructura. Obviamente, la resolución de ambas partes produce el mismo resultado, por lo que para resolver conviene elegir la más sencilla.

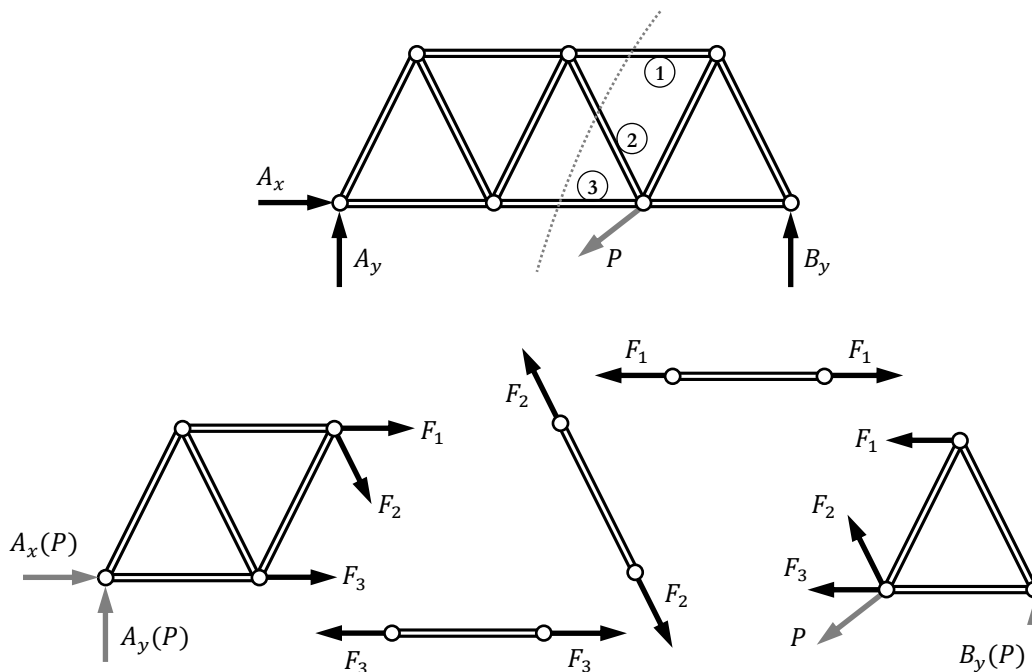


Fig. 3.14 Corte que requiere haber calculado las reacciones

Evidentemente, en el caso de una celosía plana, puesto que se dispone de tres ecuaciones de equilibrio, deberá buscarse un corte que afecte a un máximo de tres barras (no concurrentes) con fuerzas desconocidas. Un corte puede afectar a más de tres barras, pero sólo cuando algunas de ellas ya se hayan resuelto con anterioridad, de tal modo que en el corte haya como mucho tres barras sin determinar.

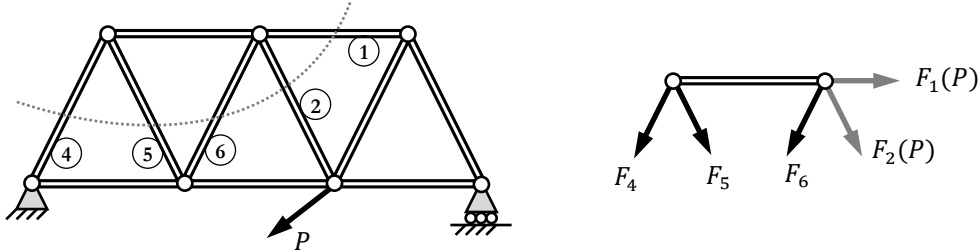


Fig. 3.15 Corte basado en cálculos previos

Cuando el corte sea tal que en las dos partes resultantes exista una unión con el elemento fijo, para que el diagrama de sólido libre de cualquiera de ellas sea resoluble, previamente habrá sido necesario determinar las reacciones de enlace en dichos apoyos, planteando el equilibrio de la estructura completa. Sin embargo, cuando la disposición de los apoyos sea tal que un corte permita aislar en una de las mitades todas las uniones con el elemento fijo, será posible, eligiendo de las dos mitades la que no contiene a los apoyos, resolver el corte sin necesidad de haber resuelto previamente las reacciones del conjunto.

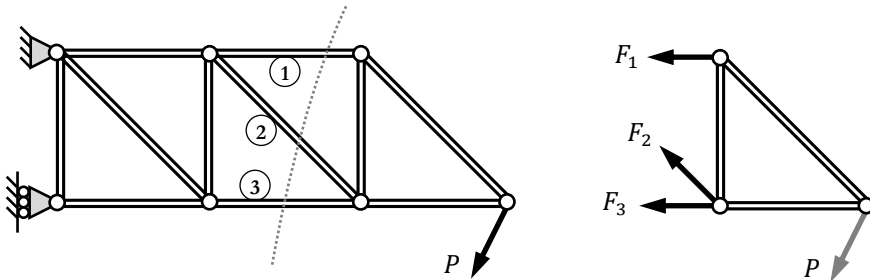


Fig. 3.16 Corte que no requiere haber calculado las reacciones

Finalmente, es posible aplicar el método de las secciones en ciertas situaciones en las que el corte afecte a más de tres barras incógnita, de manera que, si bien no todas las barras afectadas por éste podrán resolverse, sí pueda determinarse alguna de ellas. Por ejemplo, si un corte deja al descubierto cuatro fuerzas desconocidas de manera que tres de ellas concurren en un mismo punto, y la cuarta no, planteando la ecuación de equilibrio de momentos respecto de dicho punto la única incógnita de la ecuación será la cuarta fuerza.

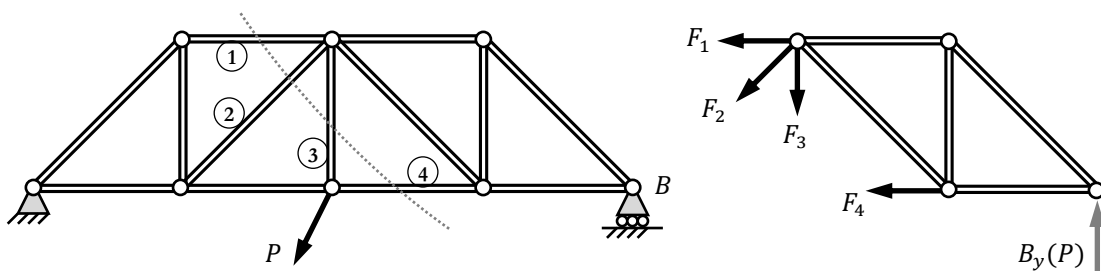


Fig. 3.17 Corte que permite resolver sólo una barra

3.9.3 Método de los nudos

El método de los nudos consiste en plantear el equilibrio de las articulaciones de la celosía. En cada nudo, aparte de la carga externa que pudiera tener aplicada, existe una fuerza por cada una de las barras que llegan a él. Al ser todas las fuerzas concurrentes en un mismo punto, se produce una degeneración que hace que se pierda una de las ecuaciones de equilibrio. De hecho, el equilibrio de momentos respecto del propio nudo es una ecuación que se verifica de forma trivial ($0 = 0$). Es por ello que en cada nudo sólo pueden plantearse dos ecuaciones, las de equilibrio de fuerzas en dos direcciones, pudiendo elegirse libremente las más convenientes. Por lo tanto, la forma más razonable de aplicar este método de resolución es ir buscando, en un proceso secuencial, nudos que contengan dos barras incógnita.

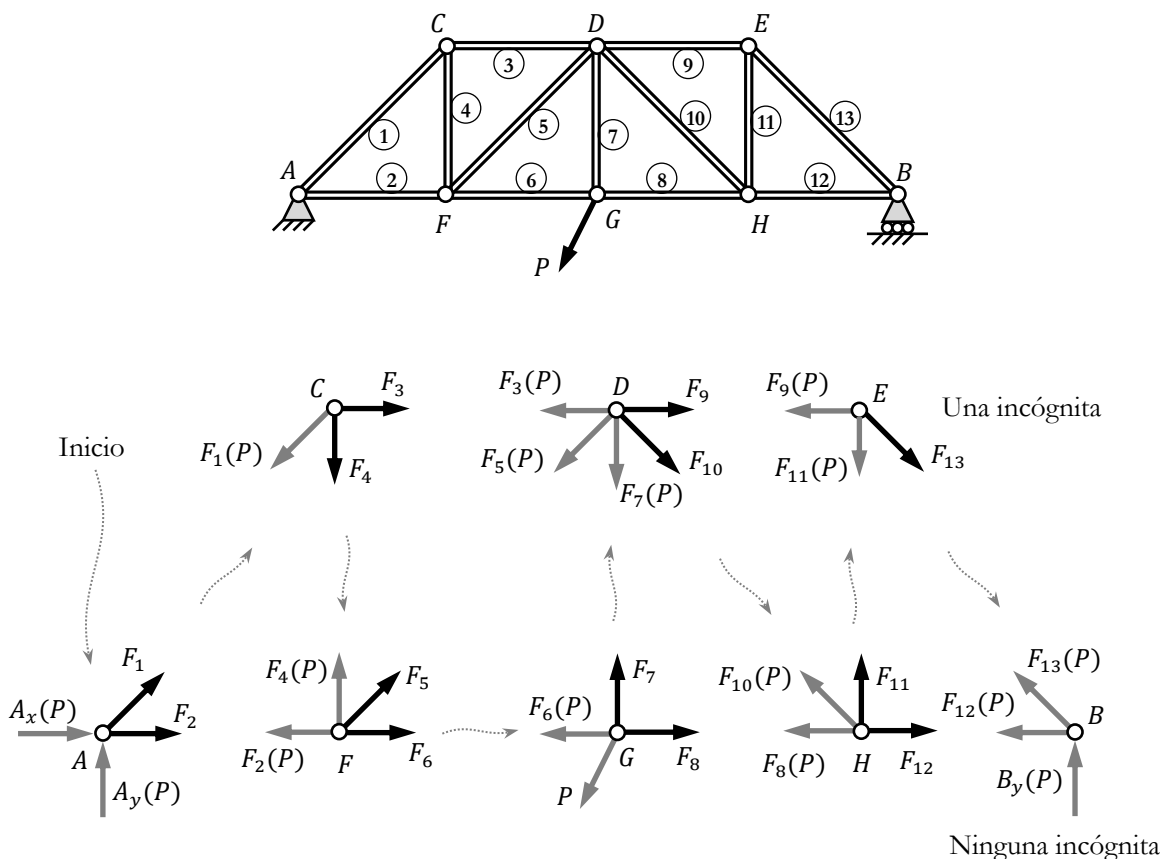


Fig. 3. 18 Resolución secuencial

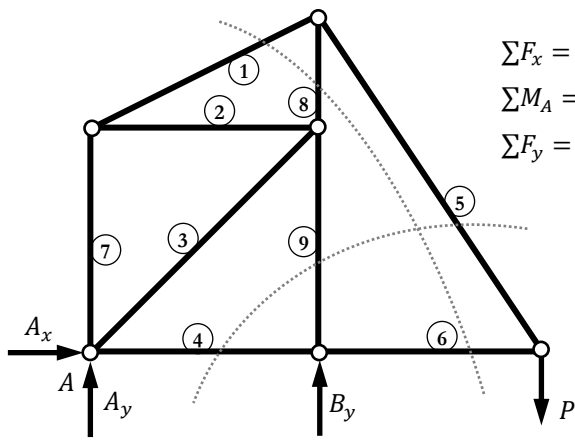
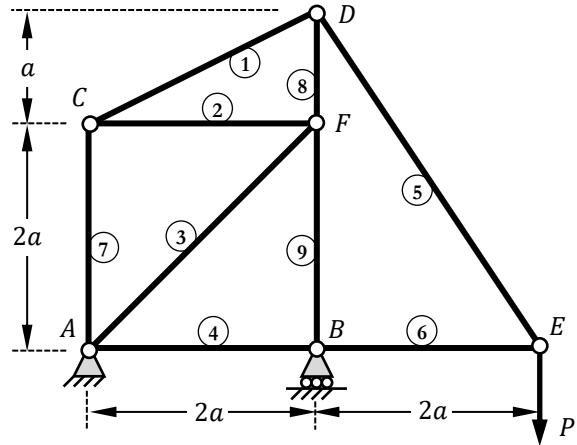
Si se han aplicado las tres ecuaciones del equilibrio del conjunto para determinar las reacciones, en el penúltimo nudo de la secuencia sólo queda una incógnita y en el último ninguna, es decir, en el penúltimo nudo sobra una ecuación y en el último sobran las dos. Estas tres ecuaciones sobrantes sin embargo han de verificarse, por lo que pueden utilizarse como método de comprobación.

En una celosía resulta muy sencillo realizar el cómputo del total de incógnitas y del total de ecuaciones independientes para verificar si es resoluble con las condiciones del equilibrio estático. Todas las barras son elementos que trabajan axialmente, por lo que hay una incógnita por barra. Además, existirán las reacciones de los apoyos de la estructura sobre el elemento fijo. Por otro lado, todas las uniones entre elementos son tomadas como articulaciones múltiples, por lo que hay dos ecuaciones independientes por nudo. La celosía se puede calcular si:

$$\text{número de barras} + \text{número de reacciones} = 2 \times \text{número de nudos}$$

• Ejemplo 3.5

Calcular las fuerzas que actúan sobre cada elemento de la estructura.

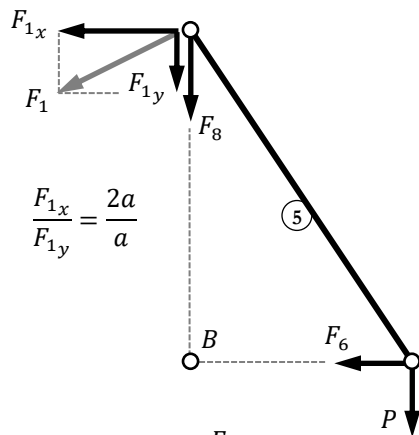
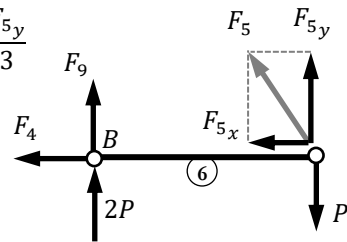


$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot 2a = P \cdot 4a \rightarrow B_y = 2P$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = P \rightarrow A_y = P - 2P = -P$$

$$\frac{F_{5x}}{2} = \frac{F_{5y}}{3}$$



$$\frac{F_{1x}}{F_{1y}} = \frac{2a}{a}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow F_{5y} \cdot 2a = P \cdot 2a \rightarrow F_{5y} = P \rightarrow F_{5x} = 2P/3$$

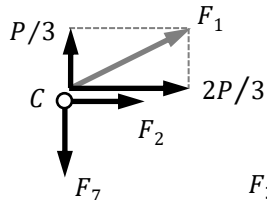
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_9 + F_{5y} + 2P = P \rightarrow F_9 = -P - P = -2P$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_4 + F_{5x} = 0 \rightarrow F_4 = -2P/3$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow F_{1x} \cdot 3a = P \cdot 2a \rightarrow F_{1x} = 2P/3 \rightarrow F_{1y} = P/3$$

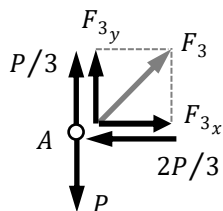
$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_6 + F_{1x} = 0 \rightarrow F_6 = -2P/3$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_8 + F_{1y} + P = 0 \rightarrow F_8 = -P - P/3 = -4P/3$$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_2 + 2P/3 = 0 \rightarrow F_2 = -2P/3$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_7 = P/3$$



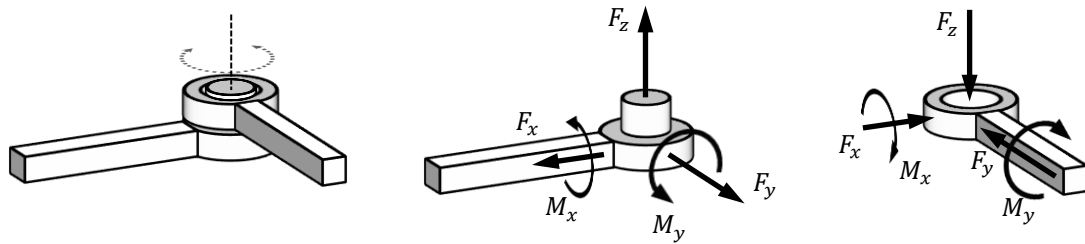
$$\frac{F_{3x}}{2} = \frac{F_{3y}}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{3x} = 2P/3 \rightarrow F_{3y} = 2P/3$$

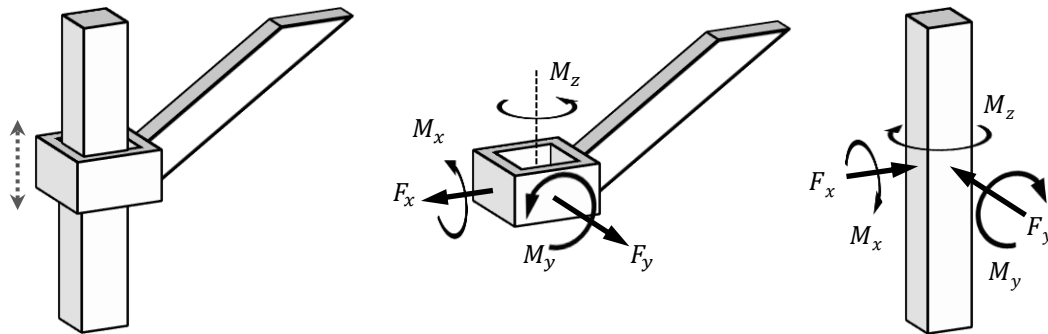
3.10 ESTRUCTURAS ESPACIALES

En los sistemas tridimensionales, el principio para determinar qué fuerzas y momentos se transmiten en cada unión es análogo al del caso plano, sin más que tener en cuenta los seis grados de libertad del sólido en el espacio. Es decir, es necesario fijarse en desplazamientos en tres direcciones y giros en torno a tres ejes. La casuística es muy amplia, de modo que a continuación se muestran tan sólo algunos ejemplos representativos.

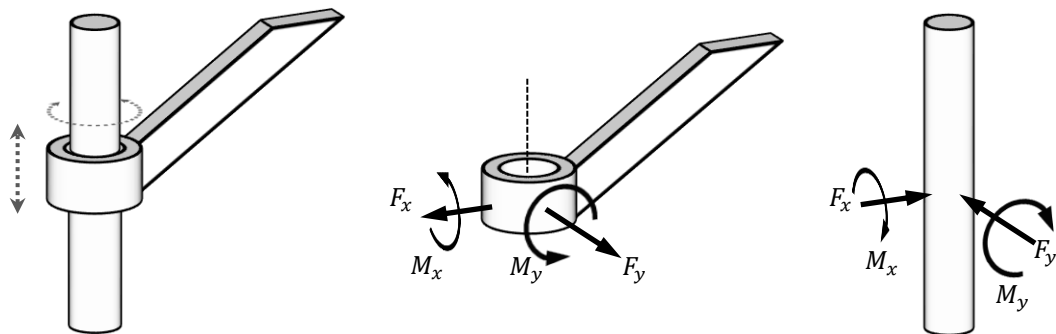
Bisagra, o articulación simple



Deslizadera prismática



Deslizadera cilíndrica



Rótula esférica

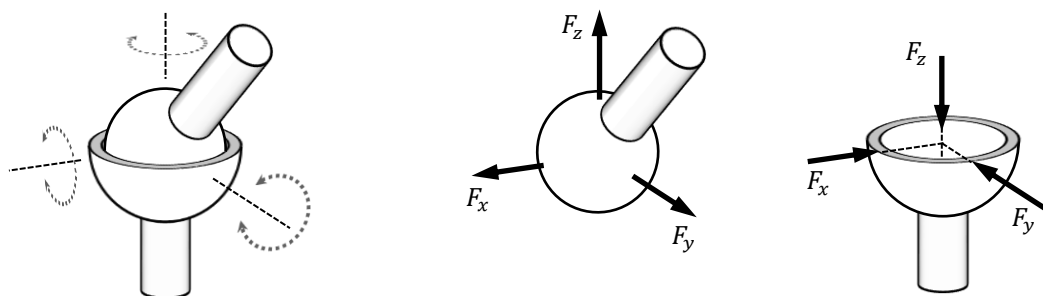


Fig. 3. 19 Ejemplos de uniones espaciales. Movimientos permitidos y reacciones

Respecto de la metodología general, que sostiene que en cada enlace ha de plantearse una reacción por cada movimiento individual impedido, existen algunas excepciones, cuando varias uniones se disponen para trabajar de manera colaborativa. A modo de ejemplo, se presenta a continuación la comparativa entre dos alternativas a la hora de sustentar un eje rotatorio.

Una forma muy simple de hacerlo es disponer un único cojinete, que por sí sólo es capaz de impedir cualquier desplazamiento lateral del eje y en cuanto a giros, sólo permite la rotación en torno al propio eje. Dicho cojinete ha de ser capaz, además, de impedir el desplazamiento axial (en la dirección del propio eje). Con esta manera de sostener el eje, en el extremo en el que se encuentra el cojinete, existen, por tanto, una fuerza en dirección axial y dos fuerzas en direcciones laterales, además de dos momentos en direcciones laterales, es decir, todas las reacciones posibles excepto el momento en la dirección del único giro permitido.

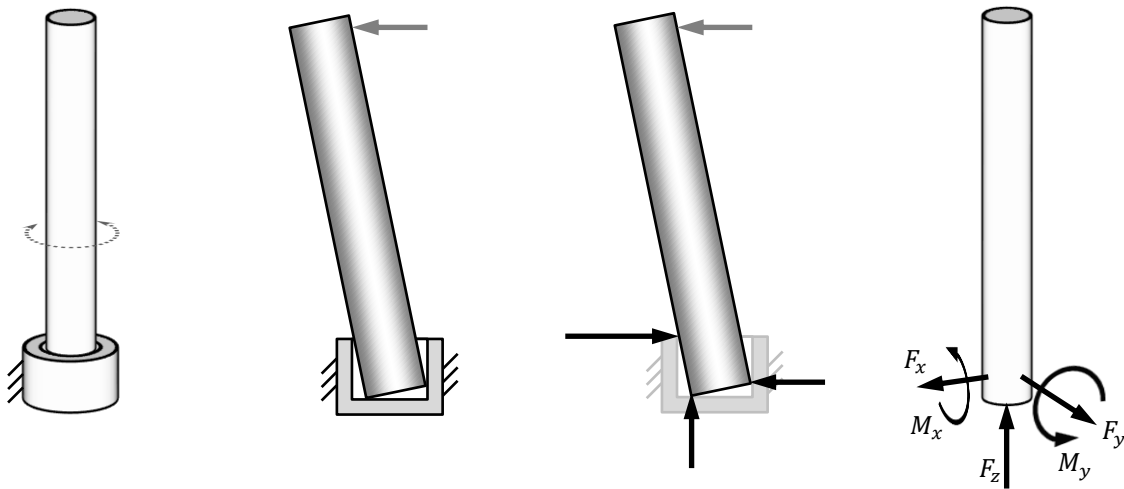


Fig. 3. 20 Reacciones en un eje sustentado por un único cojinete

Sin embargo, si se disponen dos cojinetes alineados, aunque cada uno de ellos conserva el potencial para impedir los giros laterales, en realidad, ninguno de los dos está siendo aisladamente el responsable de hacerlo, sino que es la acción combinada de que ambos impiden los desplazamientos laterales, lo que hace que elemento no pueda girar lateralmente. Por tanto, en esta situación, no se manifiestan los momentos laterales en ninguno de los dos cojinetes.

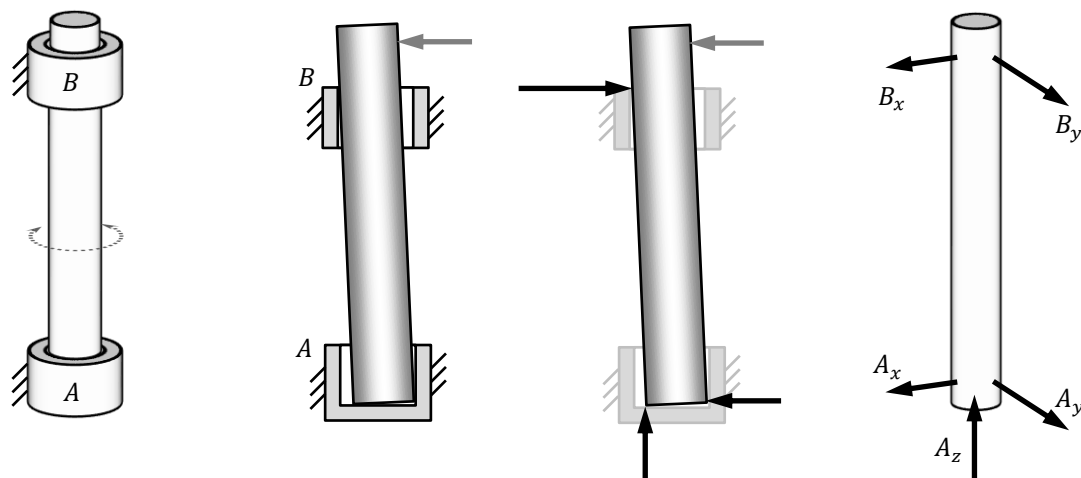


Fig. 3. 21 Reacciones en un eje sustentado por dos cojinetes

Obsérvese que, en cualquiera de los dos casos, el número total de reacciones es el mismo.

Finalmente, también se puede considerar como enlace el anclaje del sólido con un tirante. En este caso, existe una única fuerza de enlace, la tensión en dicho tirante, que es siempre una tracción en la dirección del propio tirante. Es decir, la tensión, aunque es una fuerza de magnitud desconocida, es de dirección conocida (por ejemplo, porque sean conocidas las posiciones de los extremos del tirante). Esta circunstancia implica que, cuando el tirante esté inclinado y para plantear las ecuaciones de equilibrio sea necesario trabajar con las componentes cartesianas de la tensión, éstas no constituyen en realidad incógnitas independientes, sino que están relacionadas entre sí.

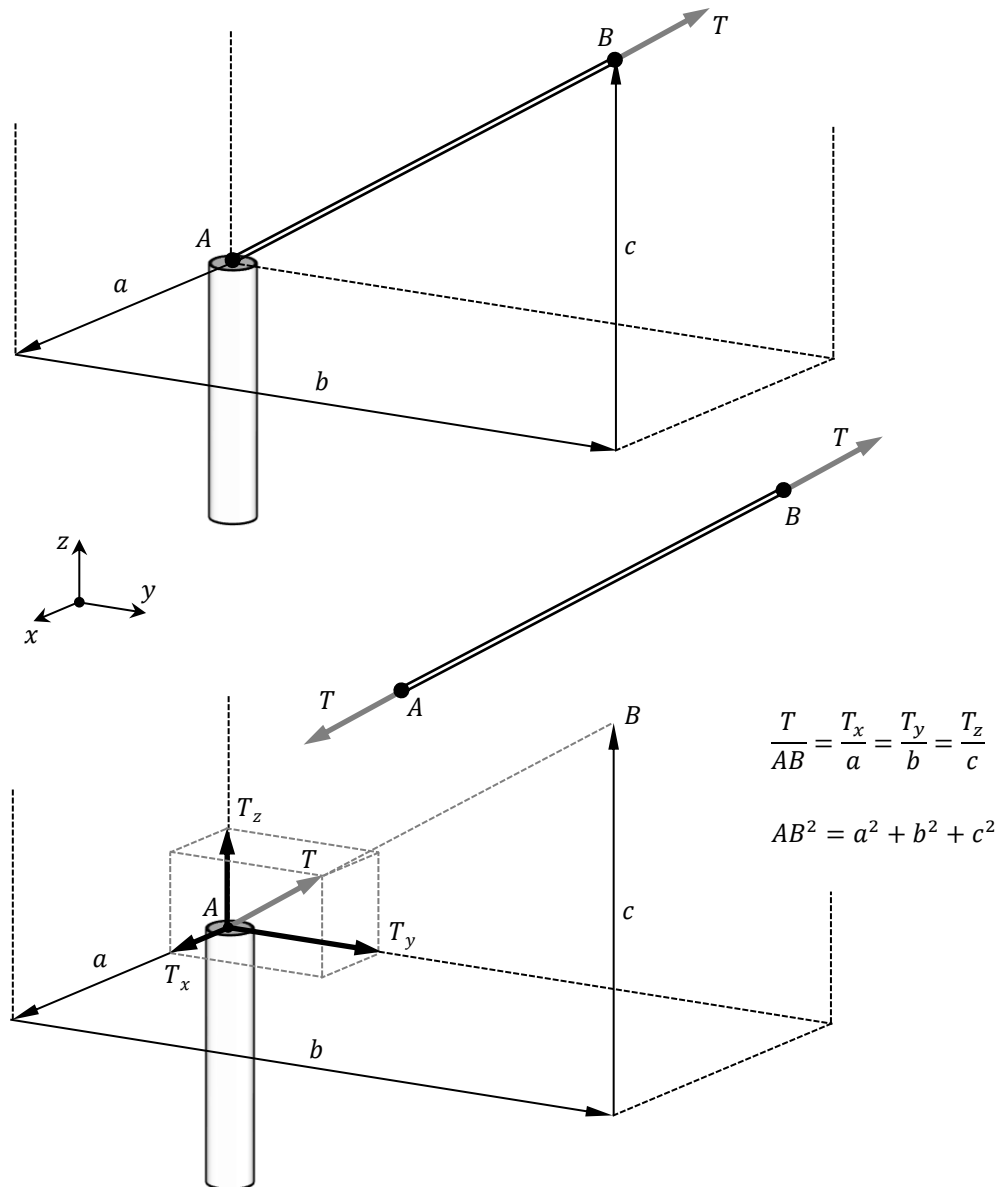
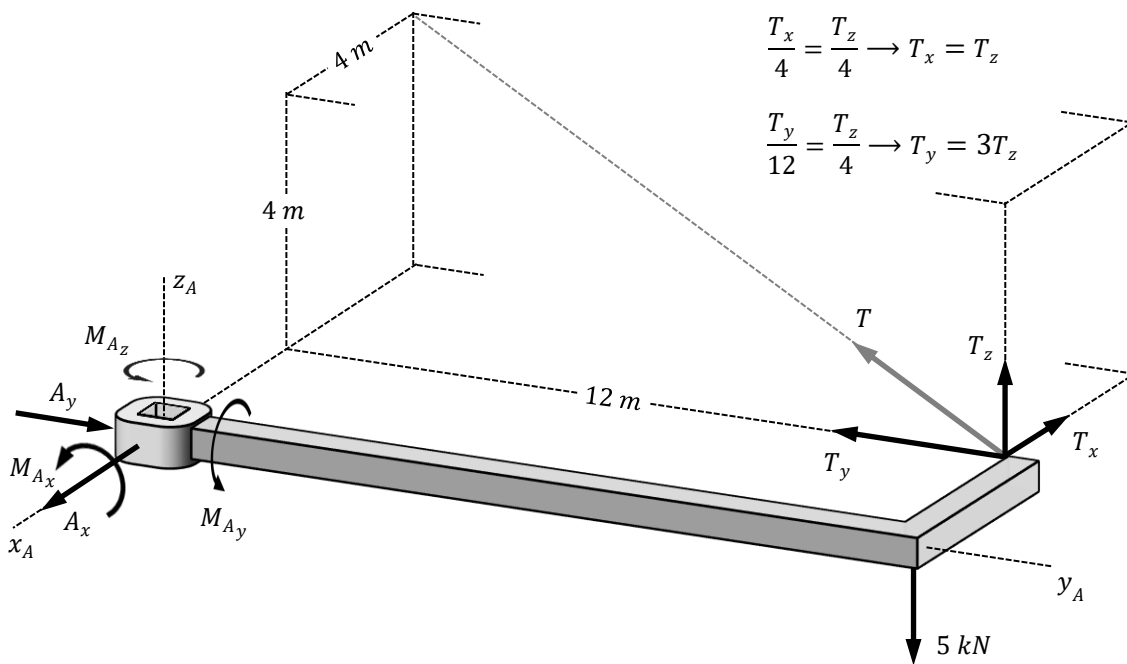
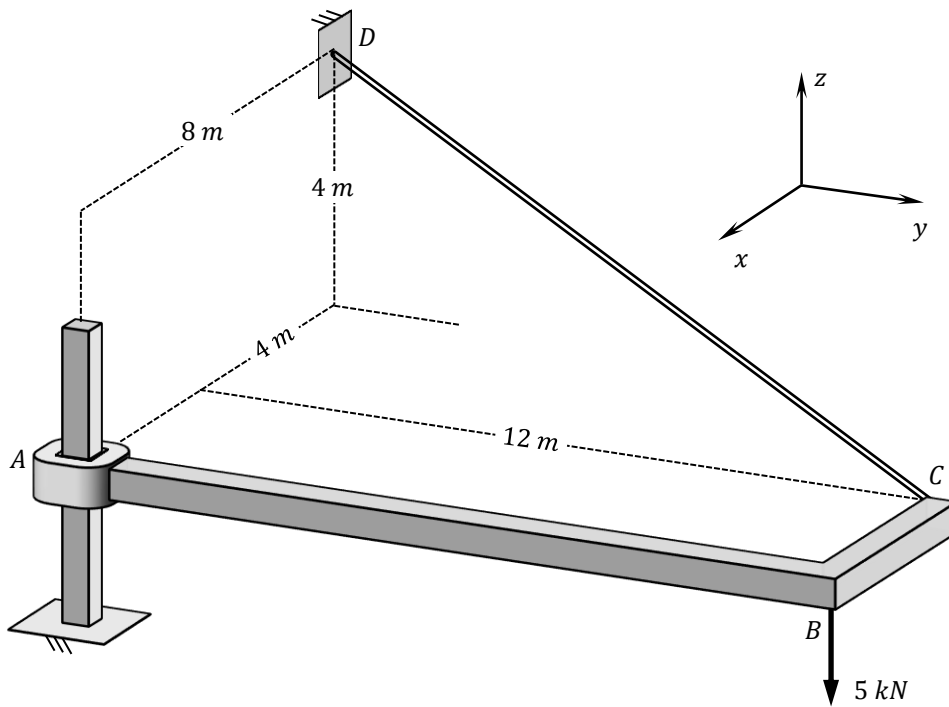


Fig. 3. 22 Relaciones entre componentes y tensión en un tirante

En el caso espacial se dispone de un total de seis ecuaciones de equilibrio independientes para el diagrama de sólido libre de cada elemento individual (las tres componentes de la resultante de fuerza y las tres componentes de la resultante de momento respecto de un punto deben ser nulas). Sin embargo, la manera más eficiente de resolver las incógnitas en los enlaces es diseñando las ecuaciones adecuadamente, puesto que en realidad se puede plantear el equilibrio de momentos respecto de cualquier eje del espacio. No obstante nunca debe olvidarse, dentro de esta flexibilidad de planteamiento de infinitas ecuaciones, que el grado de independencia lineal de dicho sistema es seis.

• Ejemplo 3.6

Representar el diagrama de sólido libre resuelto del elemento ABC (deslizadera prismática en A y tirante en C).



$$F_z \rightarrow T_z = 5 \rightarrow \begin{matrix} T_x = 5 \\ T_y = 3 \cdot 5 = 15 \end{matrix}$$

$$F_x \rightarrow A_x = T_x = 5$$

$$F_y \rightarrow A_y = T_y = 15$$

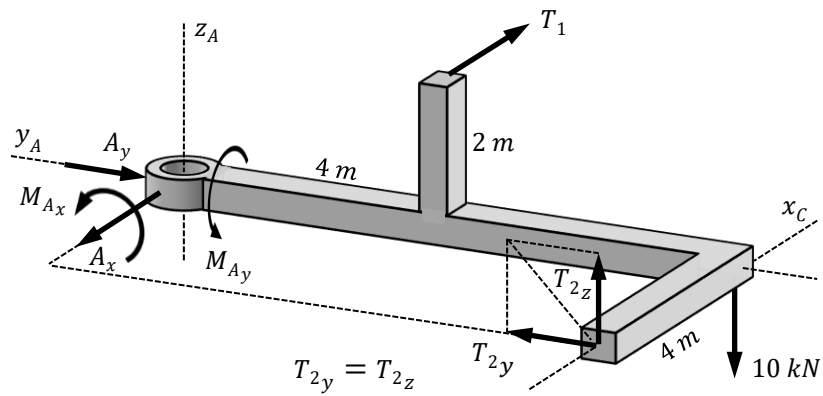
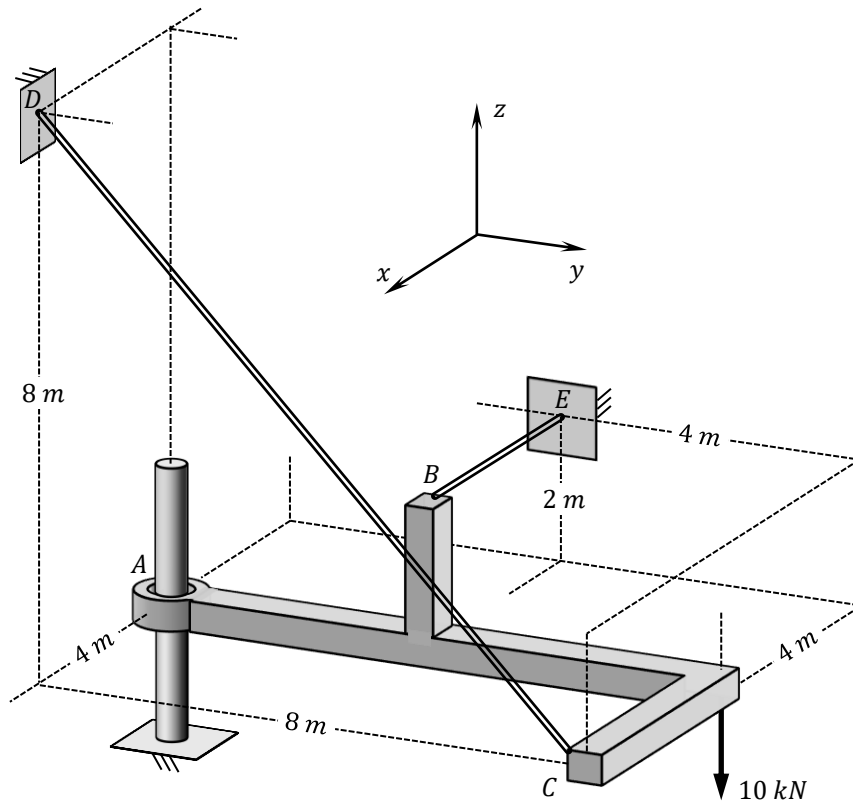
$$M_{y_A} \rightarrow M_{A_y} + T_z \cdot 4 = 0 \rightarrow M_{A_y} = -20$$

$$M_{x_A} \rightarrow M_{A_x} + T_z \cdot 12 - 5 \cdot 12 = 0 \rightarrow M_{A_x} = 0$$

$$M_{z_A} \rightarrow M_{A_z} + T_x \cdot 12 + T_y \cdot 4 = 0 \rightarrow M_{A_z} = -120$$

• Ejemplo 3.7

Representar el diagrama de sólido libre resuelto del elemento ABC (deslizadera cilíndrica en A y tirantes en B y C).



$$\sum F_z \rightarrow T_{2z} = 10 \text{ kN} \rightarrow T_{2y} = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_{z_A} \rightarrow T_1 \cdot 4 = T_{2y} \cdot 4 \rightarrow T_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_{y_A} \rightarrow M_{A_y} = T_1 \cdot 2 + T_{2z} \cdot 4 = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

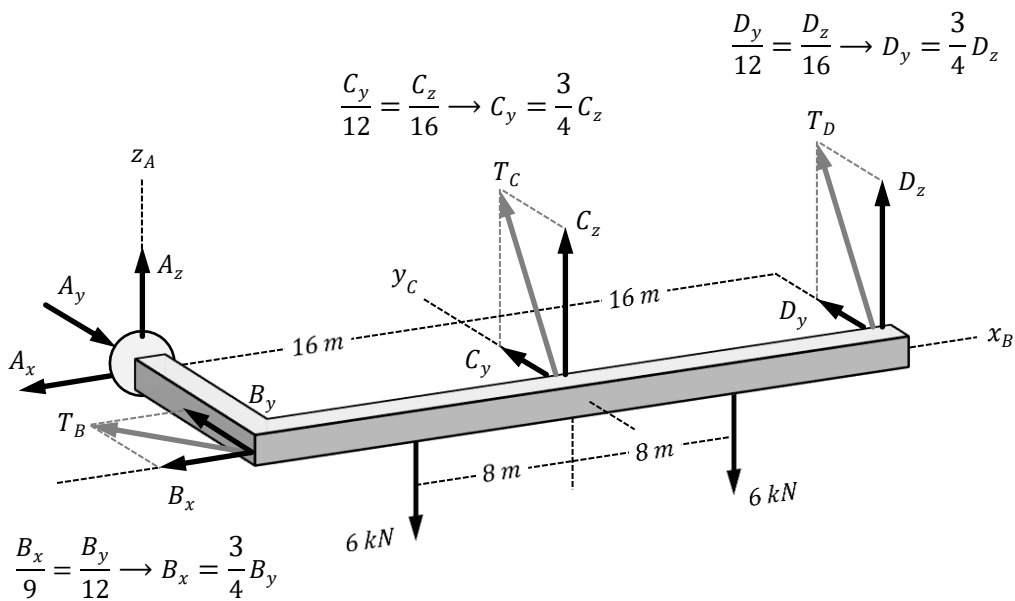
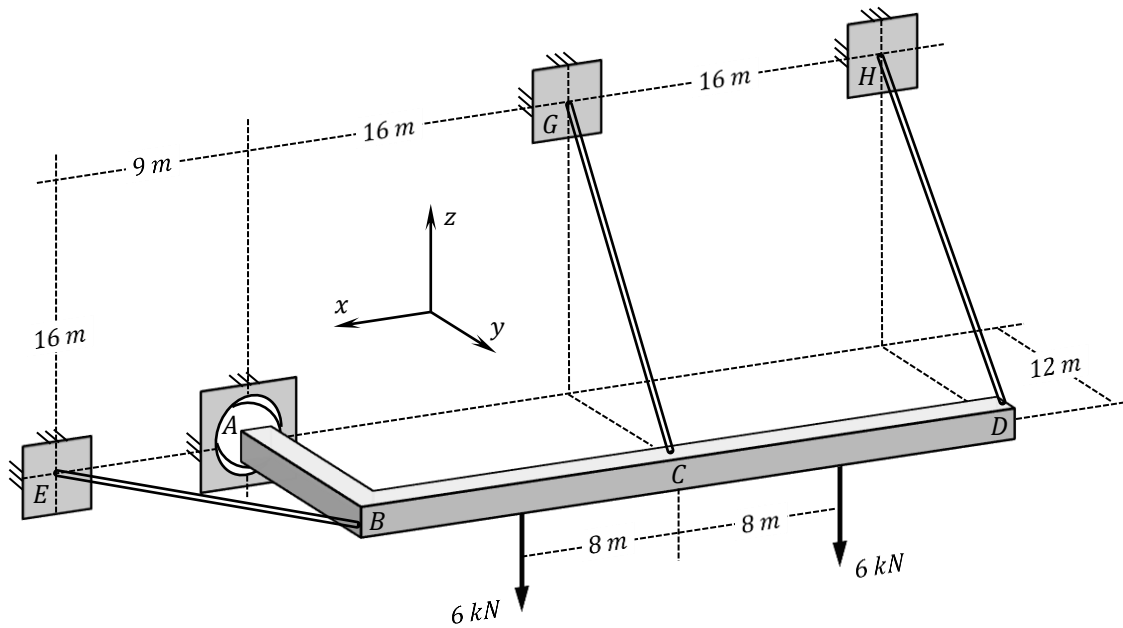
$$\sum F_y \rightarrow A_y = T_{2y} = 10 \text{ kN}$$

$$\sum F_x \rightarrow A_x = T_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_{x_C} \rightarrow M_{A_x} = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

• Ejemplo 3.8

Representar el diagrama de sólido libre resuelto del elemento $ABCD$ (rótula esférica en A y tirantes en B, C y D).



$$\sum M_{x_B} = 0 \rightarrow A_z \cdot 12 = 0 \rightarrow A_z = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_{y_C} = 0 \rightarrow 6 \cdot 8 + D_z \cdot 16 = 6 \cdot 8 + A_z \cdot 16 \rightarrow D_z = 0 \text{ kN} \rightarrow D_y = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow A_z + C_z + D_z = 6 + 6 \rightarrow C_z = 12 \text{ kN} \rightarrow C_y = 9 \text{ kN}$$

$$\sum M_{z_A} = 0 \rightarrow C_y \cdot 16 + D_y \cdot 32 = B_x \cdot 12 \rightarrow B_x = 12 \text{ kN} \rightarrow B_y = 16 \text{ kN}$$

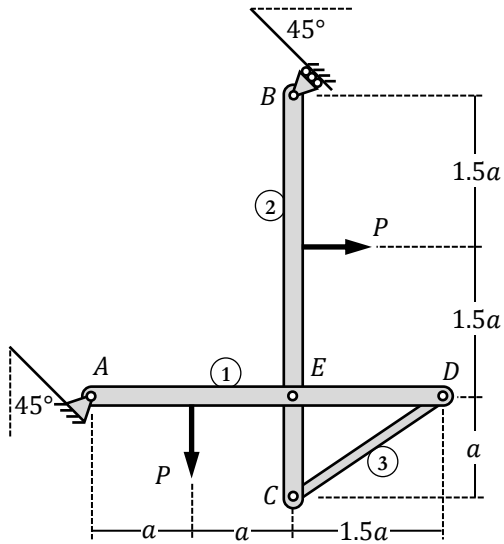
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + B_x = 0 \rightarrow A_x = -12 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y = B_y + C_y + D_y \rightarrow A_y = 25 \text{ kN}$$

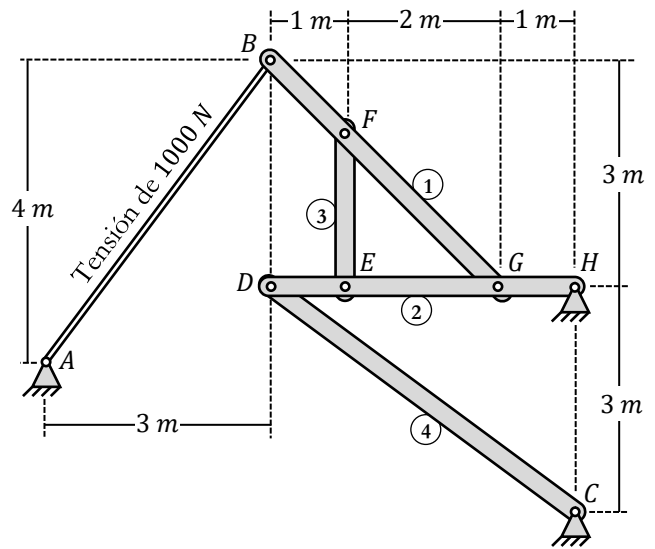
Problemas

Representar los diagramas de sólido libre resueltos de todos los elementos.

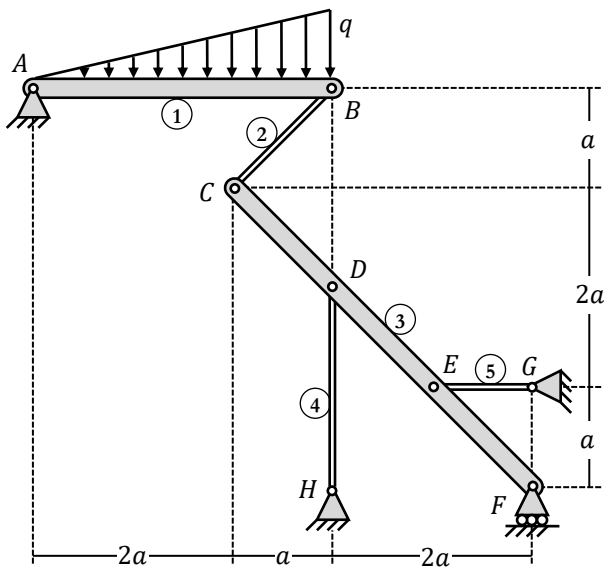
1.



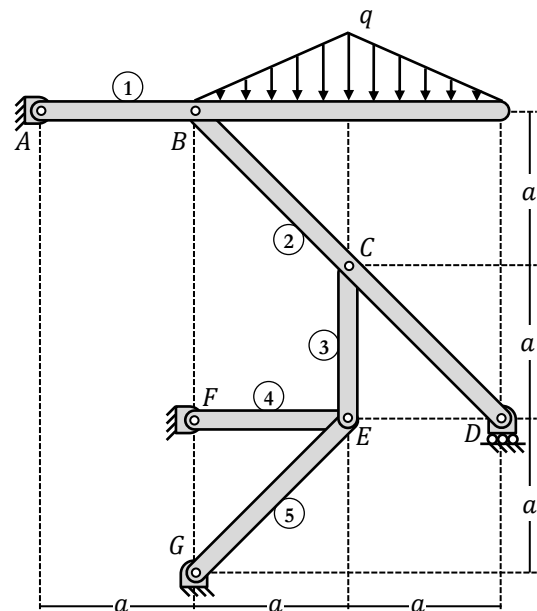
2.



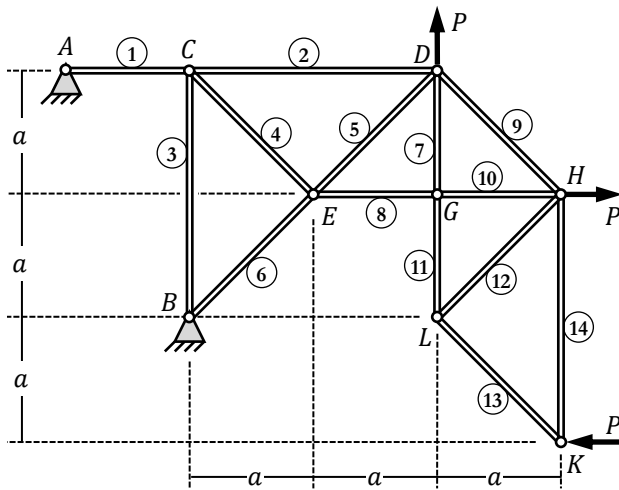
3.



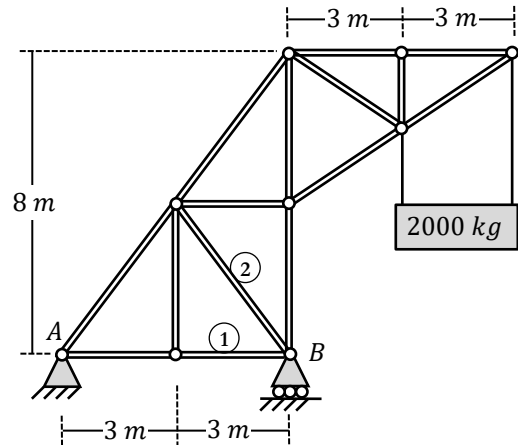
4.



5. Calcular las fuerzas en todas las barras.

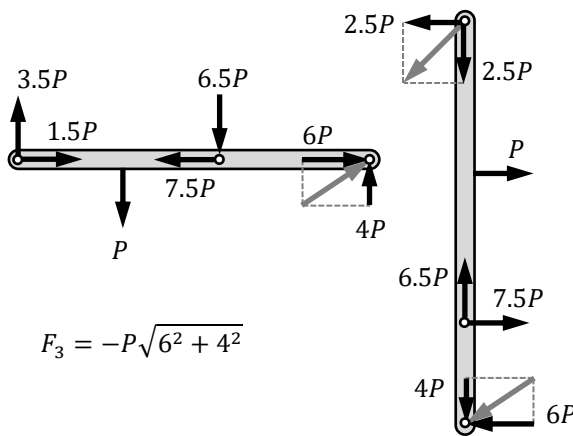


6. Calcular únicamente las barras 1 y 2.



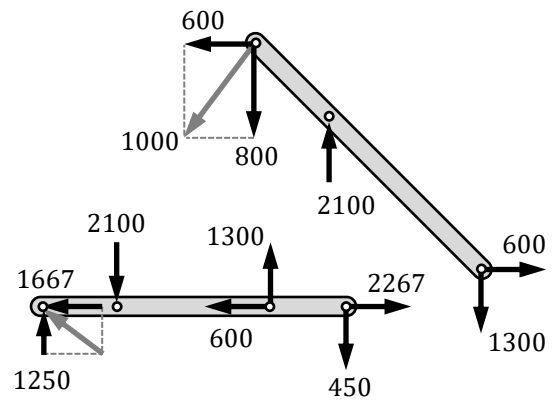
Soluciones:

1.

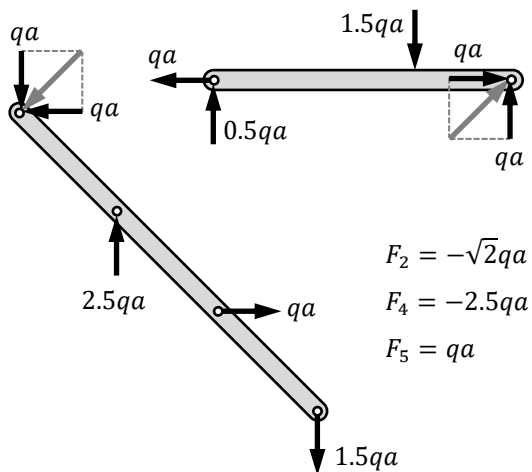


$$F_3 = -P\sqrt{6^2 + 4^2}$$

2.



3.

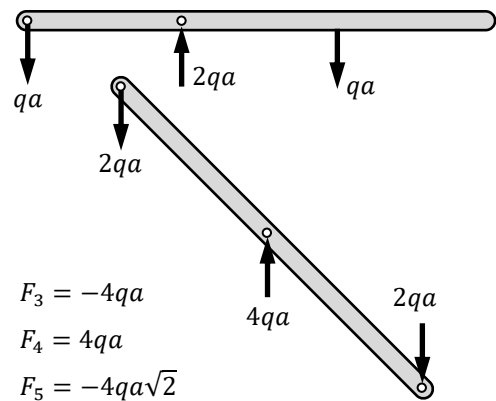


$$F_2 = -\sqrt{2}qa$$

$$F_4 = -2.5qa$$

$$F_5 = qa$$

4.



$$F_3 = -4qa$$

$$F_4 = 4qa$$

$$F_5 = -4qa\sqrt{2}$$

5.

$$F_1 = F_6 = 0$$

$$F_2 = F_3 = F_{14} = P \quad F_9 = 2\sqrt{2}P$$

$$F_7 = F_8 = F_{10} = F_{11} = -2P$$

$$F_5 = F_{12} = \sqrt{2}P \quad F_4 = F_{13} = -\sqrt{2}P$$

6.

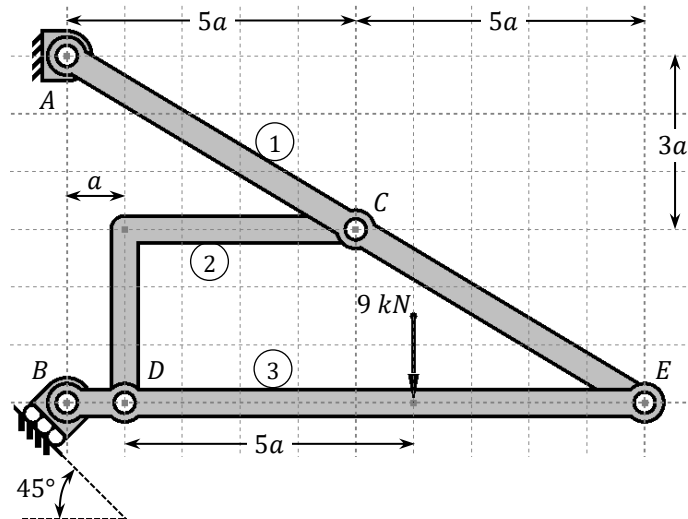
$$F_1 = -11.25 \text{ kN}$$

$$F_2 = 18.75 \text{ kN}$$

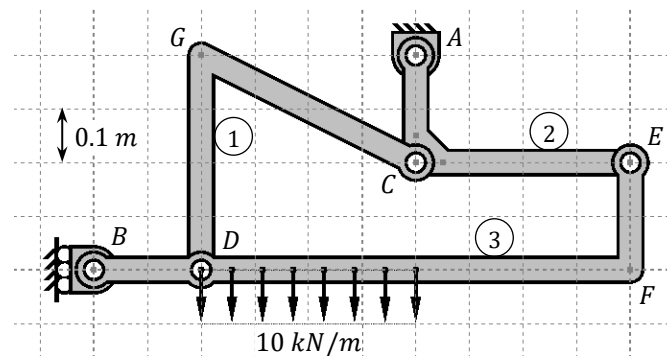
Problemas de Examen

Representar los diagramas de sólido libre resueltos de todos los elementos y comprobar si los resultados son correctos.

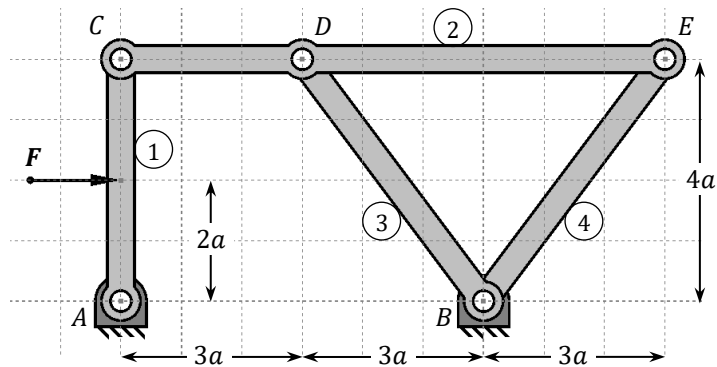
- Problema 3.1 *enero 2015* 35 minutos [2.5 puntos]



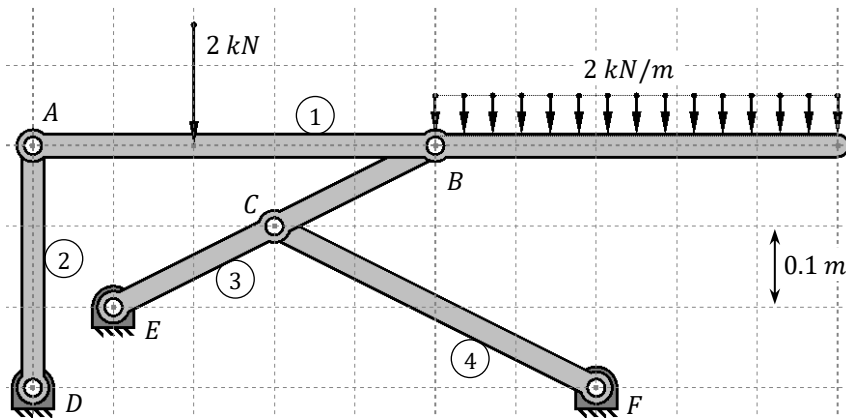
- Problema 3.2 *enero 2016* 35 minutos [2.5 puntos]



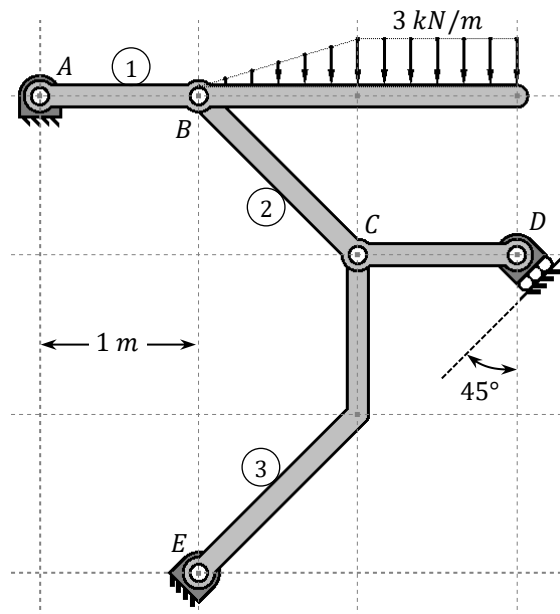
- Problema 3.3 *enero 2017* 40 minutos [2.5 puntos]



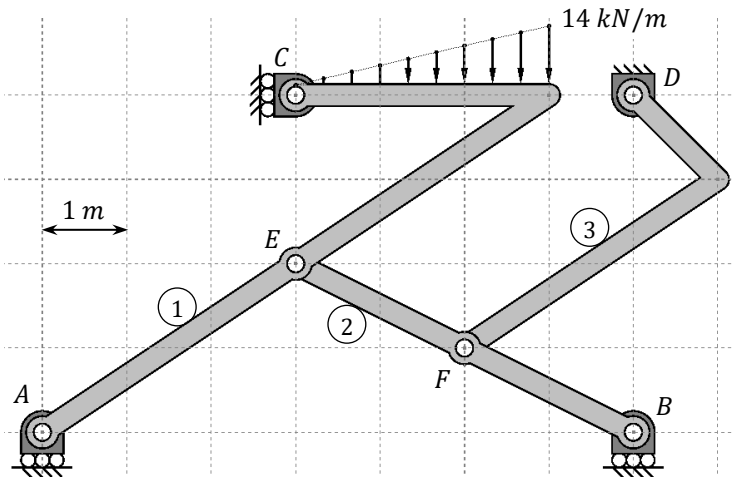
- Problema 3.4 mayo 2017 40 minutos [1.6 puntos]



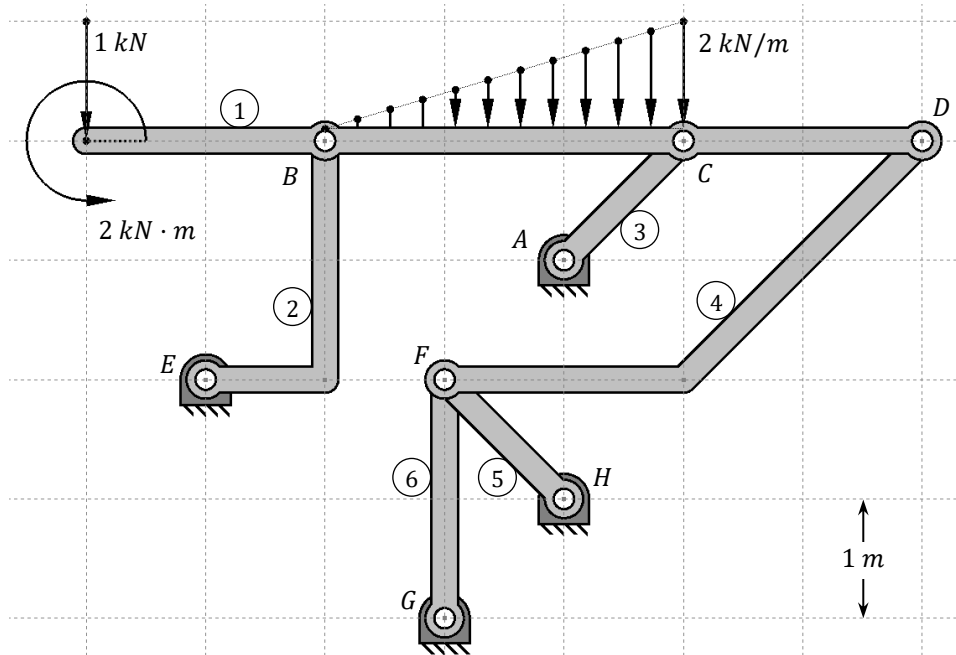
- Problema 3.5 enero 2020 40 minutos [1.8 puntos]



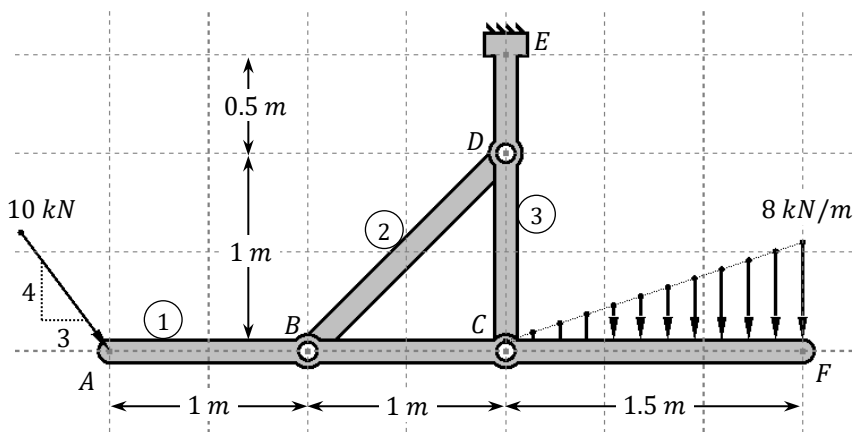
- Problema 3.6 enero 2021 40 minutos [1.6 puntos]



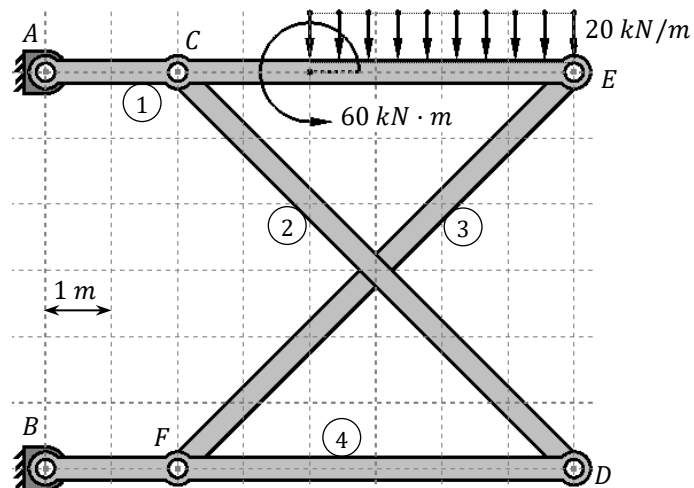
- Problema 3.7 *enero 2023* 45 minutos [2.6 puntos]



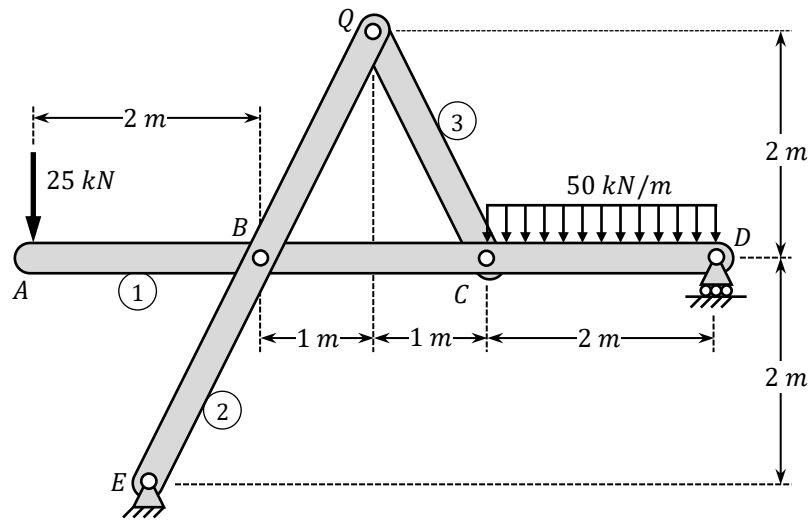
- Problema 3.8 *junio 2015*



- Problema 3.9 *junio 2017*



■ Problema 3.10 mayo 2018



4. ROZAMIENTO

4.1 CONTACTO ENTRE SÓLIDOS. FUERZA NORMAL

Es posible considerar un tipo especial de enlace entre dos sólidos cuando éstos se encuentran simplemente presionados uno contra el otro. A continuación, se describirán las dos fuerzas involucradas en este tipo de enlace, denominado *contacto*. Para poder ilustrar los conceptos con mayor claridad se planteará la situación en la que uno de los sólidos está fijo, pero las nociones que se van a describir son directamente extrapolables al caso general de dos sólidos en contacto cualesquiera, entre los que exista la posibilidad de un movimiento relativo.

Suponiendo un sistema plano, siempre es posible definir la *recta tangente* a las superficies en contacto, así como la perpendicular a ésta, denominada *recta normal*. Supóngase inicialmente que los sólidos pudieran ‘resbalar’ libremente entre ellos, es decir, que no hubiera ningún tipo de fricción entre las superficies en contacto. En tal caso, la traslación en la dirección de la tangente al contacto sería un movimiento permitido por el enlace que supone el contacto entre ambos y por tanto no podría existir fuerza en dicha dirección. Sin embargo, dado que los sólidos no pueden interpenetrarse, este tipo de unión impide el movimiento en la dirección de la normal, por lo que se tendrá una fuerza de enlace en la dirección de dicha recta, denominada *fuerza normal*, y habitualmente denotada como N .

Una característica de este tipo de unión entre sólidos, que la diferencia de las consideradas hasta el momento, es que no es bidireccional. Esto es debido a que la fuerza normal no puede tener cualquiera de los dos sentidos, ya que el contacto impide que un sólido penetre en el otro, pero no impide que los sólidos se separen. Por lo tanto, la fuerza normal no sólo tiene definida la dirección, sino también el sentido, que en el diagrama de sólido libre es siempre entrante hacia el sólido (‘empuja’ o ‘presiona’ al sólido, nunca ‘tira’ de él).

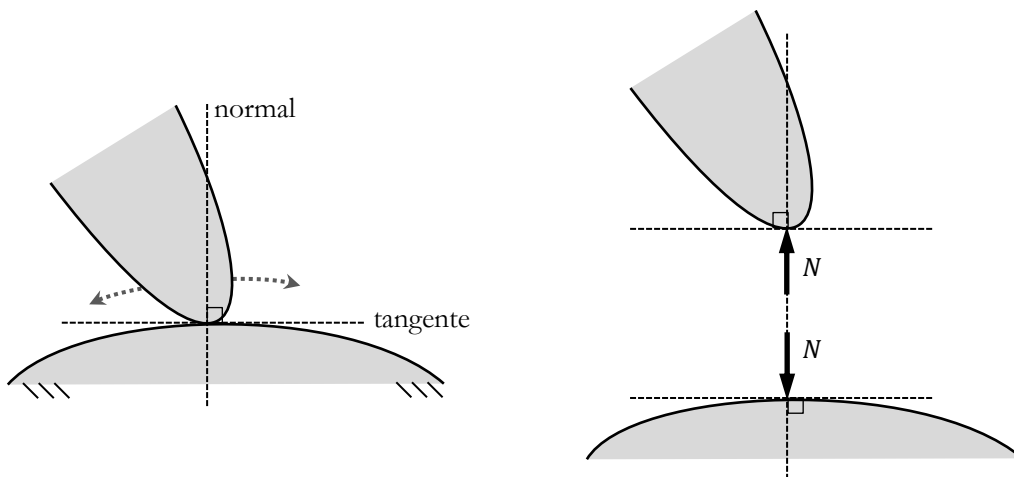


Fig. 4.1 Sólidos en contacto sin fricción, fuerza normal

4.2 CONTACTO CON FRICCIÓN. FUERZA DE ROZAMIENTO

4.2.1 Contacto puntual

Cuando se tienen dos cuerpos presionados uno contra el otro, debido a factores como la rugosidad de las superficies en contacto, se genera otra fuerza de enlace que se opone al deslizamiento relativo entre ambos sólidos, es decir, al movimiento en la dirección de la tangente al contacto, denominada *fuerza de rozamiento*, que se denotará como F_R . La fuerza de rozamiento también tiene siempre definido su sentido, que es el de oposición a la tendencia al movimiento del cuerpo sobre el que actúa. En una situación de equilibrio estático no existe movimiento real de los cuerpos, por eso se considera la tendencia al movimiento (el sentido en el que éste se produciría si resbalaran).

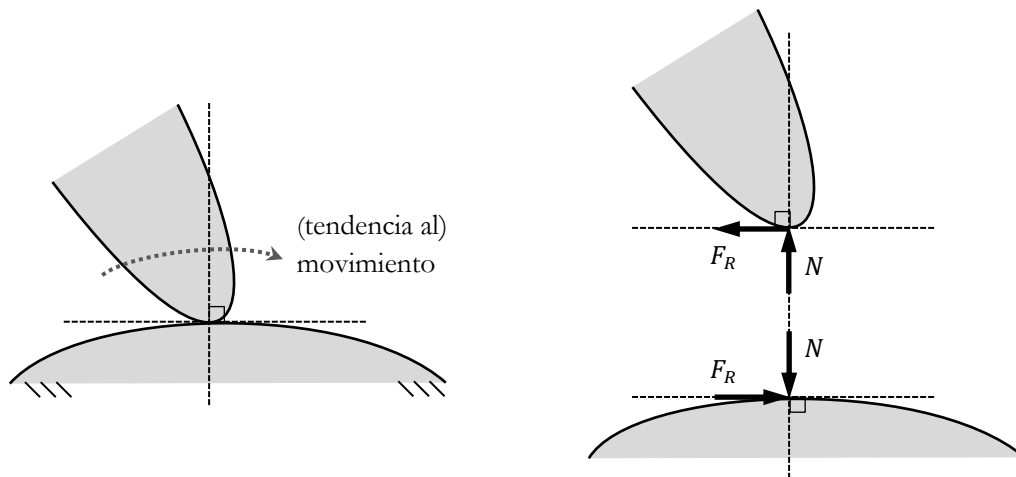


Fig. 4. 2 Sólidos en contacto con fricción, fuerza de rozamiento

Ambas fuerzas de enlace, generadas en el contacto entre los dos sólidos, tienen dirección y sentido definidos a priori y en una situación estática sus módulos tendrán el valor necesario para mantener el equilibrio (impedir el movimiento). Sin embargo, si se aumentaran progresivamente las cargas que tienden a mover el sistema, llegaría un momento en el que la fricción ya no sería capaz de retener el movimiento. Esto es debido a que la fuerza de rozamiento, que habrá ido aumentando de valor con el incremento de la carga para mantener el sistema en equilibrio, no puede crecer indefinidamente, ya que presenta un límite, un valor máximo, que no puede ser rebasado.

El rozamiento es en la realidad un fenómeno muy complejo en que influyen multitud de factores, lo que lo convierte a dicha fuerza de rozamiento máxima en una entidad muy difícil de parametrizar matemáticamente de un modo exacto. De las diferentes aproximaciones existentes se considerará la más simple de todas, denominada *ley de fricción seca*, o *rozamiento de Coulomb*, que establece que la fuerza de rozamiento máxima que puede proporcionar un contacto es directamente proporcional a la fuerza normal existente en el mismo:

$$F_{R_{max}} = \mu \cdot N$$

La constante de proporcionalidad, μ , obviamente adimensional, se denomina *coeficiente de rozamiento* y su valor engloba los múltiples y diversos factores implicados en el fenómeno de la fricción, como la naturaleza de los materiales en contacto, o rugosidad de las superficies los mismos. Es importante recordar que esta relación entre F_R y N sólo se verifica cuando el equilibrio estático está a punto de romperse, y que si no es así la fuerza de rozamiento no es la máxima que puede proporcionar el contacto y por tanto es una incógnita más a determinar, del mismo modo en que lo es la propia fuerza normal.

4.2.2 Contacto no puntual

Es necesario realizar una consideración adicional cuando el contacto entre los sólidos no se produce en único punto, sino que se reparte a lo largo de toda una superficie. Éste es el caso de bloques con caras planas. En esta situación sigue siendo posible determinar las direcciones tangente y normal al contacto, pero no se puede considerar un punto de contacto concreto en el que aplicar la fuerza normal y la de rozamiento. De hecho, ninguna de ellas será en esta situación una fuerza puntual, sino que ambas serán en la realidad fuerzas distribuidas por toda la superficie de contacto. Además, no se puede conocer a priori cuál es la forma de dichas distribuciones ya que el reparto de las fuerzas normal y de rozamiento por dicha superficie no tiene por qué ser uniforme.

A la hora de abordar la resolución de un problema en el que se dé esta situación se dispondrán unas fuerzas puntuales equivalentes, N y F_R , que representen las resultantes de las distribuciones de fuerza normal y de rozamiento reales. Al ser la superficie de contacto plana, la línea de acción de la fuerza puntual equivalente a la distribución de la fuerza de rozamiento (la línea de acción de F_R) está definida, ya que viene dada por el propio plano de contacto. Sin embargo, para la fuerza puntual equivalente a la distribución de la fuerza normal, aunque se conoce la dirección (perpendicular al plano de contacto) y el sentido (entrante hacia el sólido), no se puede determinar la posición exacta de su línea de acción.

Esta circunstancia tiene la implicación de que no es posible, a la hora de estudiar el equilibrio estático, plantear ninguna ecuación de equilibrio de momentos, ya que el brazo de N no está determinado. En este tipo de sólidos sólo podrán plantearse por tanto dos ecuaciones de equilibrio independientes, los balances de fuerzas en dos direcciones distintas.

4.2.3 Ángulo de fricción

Se ha visto que en el contacto entre sólidos aparecen dos fuerzas, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento. Estas dos pueden componerse (sumarse) para dar lugar a una única fuerza resultante R en el enlace. Se denomina *ángulo de fricción* φ al ángulo que forma dicha resultante con la normal cuando la fuerza de rozamiento toma su valor máximo.

El ángulo de fricción no es más que una forma alternativa de definir el coeficiente de rozamiento, ya que μ y φ están directamente relacionados:

$$\tan \varphi = \frac{\mu \cdot N}{N} = \mu \rightarrow \varphi = \arctan \mu$$

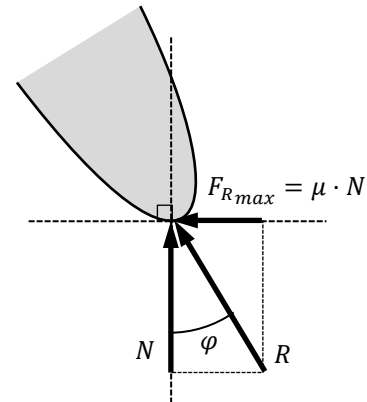


Fig. 4.3 Ángulo de fricción

De aquí en adelante, para cualquier ángulo θ , se expresará $\sin \theta$ como $s \theta$ y $\cos \theta$ como $c \theta$.

El ángulo de fricción es simplemente una herramienta matemática que permite resolver de una forma más conveniente algunos tipos de problemas en los que interviene el rozamiento. Para utilizarlo adecuadamente conviene recordar algunas propiedades trigonométricas:

$$\begin{aligned} s(a+b) &= s a \cdot c b + c a \cdot s b & s(a-b) &= s a \cdot c b - c a \cdot s b \\ c(a+b) &= c a \cdot c b - s a \cdot s b & c(a-b) &= c a \cdot c b + s a \cdot s b \\ s(2a) &= 2 s a \cdot c a & s(-a) &= -s a \\ c(2a) &= c^2 a - s^2 a & c(-a) &= c a \end{aligned}$$

4.3 AUTORRETENCIÓN

Se explicará este concepto haciendo uso de un sencillo caso de ejemplo. Supóngase un bloque que reposa sobre un plano inclinado un ángulo θ , siendo μ el coeficiente de rozamiento en el contacto. El bloque soporta un peso P y se actúa sobre él, para subirlo o bajarlo por el plano, aplicando una fuerza horizontal F . Se va a determinar, en función de los parámetros P , θ y μ , el rango de valores de F para los cuales el sistema permanece en equilibrio, es decir, los valores extremos de F entre los cuales el bloque no se mueve. Existen dos extremos porque el equilibrio se puede romper en los dos sentidos del movimiento, el de ascenso F_{\uparrow} y el de descenso F_{\downarrow} .

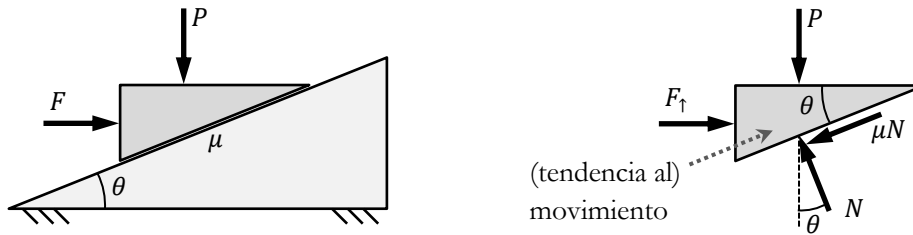


Fig. 4. 4 Bloque sobre plano inclinado. Movimiento de ascenso

Se determinará en primer lugar el límite superior del rango, el valor de F que provocaría el bloque comenzase a moverse hacia arriba.

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\rightarrow P + \mu N \operatorname{sen} \theta = N \operatorname{cosec} \theta \rightarrow N = \frac{P}{\operatorname{cosec} \theta - \mu \operatorname{sen} \theta} \\ \sum F_x = 0 &\rightarrow F_{\uparrow} = \mu N \operatorname{cosec} \theta + N \operatorname{sen} \theta = N(\mu \operatorname{cosec} \theta + \operatorname{sen} \theta) = P \frac{\mu \operatorname{cosec} \theta + \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \mu \operatorname{sen} \theta}\end{aligned}$$

Aunque no es imprescindible, esta expresión se puede simplificar notablemente haciendo uso del concepto de ángulo de fricción, $\mu = \tan \varphi$:

$$F_{\uparrow} = P \frac{\operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{cosec} \theta} \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{cosec} \theta} \operatorname{sen} \theta} = P \frac{\operatorname{cosec} \theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{cosec} \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi} = P \frac{\operatorname{sen}(\theta + \varphi)}{\operatorname{cosec}(\theta + \varphi)} = P \tan(\theta + \varphi)$$

Debe observarse que para que este planteamiento tenga sentido, puesto que la fuerza N por definición no puede ser opuesta a la que se ha representado debe cumplirse:

$$\operatorname{cosec} \theta > \mu \operatorname{sen} \theta \rightarrow \tan \theta < 1/\mu$$

Para valores de θ superiores a este límite no sería posible hacer ascender el bloque de ninguna manera (piénsese en el caso extremo de un bloque presionado contra una pared). En función del ángulo de fricción, la condición anterior quedaría $\tan \theta \tan \varphi < 1$, que se puede demostrar que equivale a $\tan(\theta + \varphi) > 0 \rightarrow \theta + \varphi < \pi/2$. Para $\theta + \varphi = \pi/2$ (o $\tan \theta = 1/\mu$) se obtendría $N = F_{\uparrow} = \infty$.

Para estudiar el valor de F que rompe el equilibrio del sistema en el sentido de descenso no es necesario rehacer todo el planteamiento. Adviértase que en el diagrama de sólido libre analizado en el caso anterior, lo único que cambiaría es el sentido de la fuerza de rozamiento. Por tanto, las ecuaciones resultantes son muy parecidas a las ya obtenidas, con la única diferencia de que todos los términos en los que aparece μ tendrían el signo invertido. En consecuencia, en la expresión final de F deducida en el caso anterior sencillamente se debe sustituir μ por $-\mu$ (o por extensión φ por $-\varphi$), de manera que:

$$F_{\downarrow} = P \frac{s\theta - \mu c\theta}{c\theta + \mu s\theta} = P \tan(\theta - \varphi)$$

Obsérvese que al evaluar esta expresión, en función de la combinación de valores de θ y μ (o φ), el resultado puede ser positivo o negativo, lo cual conduce a realizar la siguiente discusión:

- Si F_{\downarrow} es positiva significa que el equilibrio, en el sentido de descenso del sistema, se rompe aplicando una fuerza en el sentido de ascenso, es decir, que es necesario sujetar el sistema para que no caiga, que el bloque cargado con P no se sujeta por sí solo sobre el plano inclinado. Obviamente, aunque F_{\uparrow} y F_{\downarrow} sean en el mismo sentido, el valor de F_{\downarrow} es menor que el de F_{\uparrow} . Esto es debido a que en el sentido de ascenso F_{\uparrow} debe vencer la fuerza de rozamiento para elevar el bloque cargado con P , mientras que en el sentido de descenso la fuerza de rozamiento colabora con F_{\downarrow} para evitar que el bloque baje, para sujetar P .
- Si F_{\downarrow} es negativa significa que el equilibrio, en el sentido de descenso del sistema, se rompe aplicando una fuerza en sentido opuesto al de ascenso, es decir, que es necesario aplicar una F_{\downarrow} en sentido opuesto al que está representado para que el bloque baje. Si el rango de valores de F entre los cuales el sistema permanece en equilibrio tiene el límite inferior negativo, significa que el valor nulo pertenece a dicho rango, lo cual quiere decir que si se retira la fuerza F el sistema no se mueve. Los sistemas basados en el rozamiento que se sostienen por sí mismos se denominan sistemas *autorretenidos*, o se dice que poseen capacidad de *autorretención*. En este caso, la fuerza de rozamiento es capaz de sujetar por sí sola el bloque cargado con P para que no deslice hacia abajo por el plano inclinado.

Es posible deducir la *condición de autorretención* del sistema, que es la relación que deben satisfacer los parámetros involucrados en el fenómeno para que se verifique esta capacidad. En este caso de ejemplo, simplemente se impondrá la condición de que para que el sistema sea autorretenido es necesario aplicar una fuerza en el sentido de descenso para que el bloque descienda, es decir, $F_{\downarrow} < 0$:

$$F_{\downarrow} = P \frac{s\theta - \mu c\theta}{c\theta + \mu s\theta} < 0 \rightarrow s\theta < \mu c\theta \rightarrow \tan \theta < \mu$$

Lógicamente, a una condición análoga se llega partiendo de la expresión de F_{\downarrow} en función de φ :

$$F_{\downarrow} = P \tan(\theta - \varphi) < 0 \rightarrow \theta < \varphi$$

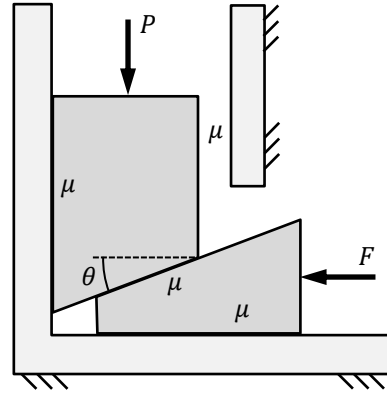
Esta condición puede interpretarse de la siguiente manera. Si el sistema no es autorretenido, en ausencia de la fuerza F el bloque cargado con el peso P bajaría. En esta situación, dado un valor del coeficiente de rozamiento μ , para que el movimiento de descenso no se produjera habría que disminuir el ángulo inclinación del plano θ hasta que $\theta < \arctan \mu$ (o $\theta < \varphi$). Una interpretación análoga es que, para un θ dado, habría que aumentar el valor de μ hasta que $\mu > \tan \theta$.

Podría llamar inicialmente la atención la circunstancia de que la condición de autorretención no dependa de la carga P . Podría pensarse que si el sistema se está sosteniendo por sí solo, una forma de conseguir que baje sería aumentando el valor de P . Sin embargo, la capacidad de autorretención del sistema sólo depende de θ y μ . Esto es debido a que al aumentar P aumenta en la misma medida N y por tanto la fuerza de rozamiento máxima que puede proporcionar el contacto (μN es la fuerza que retiene el movimiento).

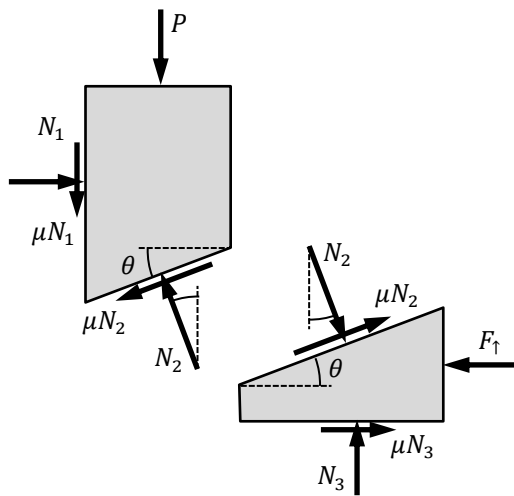
• Ejemplo 4.1

En el sistema de cuñas de la figura, en función de los datos P , θ y μ , determinar:

- Los límites del valor de F entre los cuales el sistema permanece en equilibrio.
- La condición de autorretención.



En primer lugar, se determinará el valor de F que rompe el equilibrio en el sentido de ascenso del sistema, F_{\uparrow} . Para ello, en los diagramas de sólido libre de cada bloque, todas las fuerzas de rozamiento se disponen en el sentido de oposición al movimiento de ascenso. Por tratarse de contacto no puntual no podrán plantearse ecuaciones de equilibrio de momentos, por lo que se cuenta con las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada bloque. En este caso se van a usar las direcciones horizontal y vertical. Por la forma en la que funciona el sistema, cuando se pone en movimiento desliza en los tres contactos simultáneamente, por lo que cuando se rompe el equilibrio todas las fuerzas de rozamiento están en sus valores máximos (μN). El sistema de cuatro ecuaciones resultante tiene como incógnitas las tres fuerzas normales y la fuerza F .



$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\rightarrow N_1 = N_2 s \theta + \mu N_2 c \theta \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow N_2 c \theta = P + \mu N_1 + \mu N_2 s \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\rightarrow N_3 + \mu N_2 s \theta = N_2 c \theta \\ \sum F_x = 0 &\rightarrow F_{\uparrow} = \mu N_3 + N_2 s \theta + \mu N_2 c \theta\end{aligned}$$

Una técnica recomendable para eliminar del sistema las fuerzas normales consiste en agruparlas en cada ecuación:

$$\begin{aligned}N_1 &= N_2(s \theta + \mu c \theta) \\ N_2(c \theta - \mu s \theta) - \mu N_1 &= P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_3 &= N_2(c \theta - \mu s \theta) \\ F_{\uparrow} &= \mu N_3 + N_2(s \theta + \mu c \theta)\end{aligned}$$

De las dos ecuaciones del bloque superior puede eliminarse N_1 y obtenerse N_2 en función de P :

$$N_2(c \theta - \mu s \theta) - \mu N_2(s \theta + \mu c \theta) = N_2(c \theta - \mu s \theta - \mu s \theta - \mu^2 c \theta) = P$$

$$N_2 = \frac{P}{(1 - \mu^2) c \theta - 2 \mu s \theta}$$

De las dos ecuaciones del bloque inferior puede eliminarse N_3 y obtenerse F en función de N_2 :

$$F_{\uparrow} = \mu N_2(c \theta - \mu N_2 s \theta) + N_2(s \theta + \mu c \theta) = N_2(\mu c \theta - \mu^2 s \theta + s \theta + \mu c \theta)$$

$$F_{\uparrow} = P \frac{(1 - \mu^2) s \theta + 2 \mu c \theta}{(1 - \mu^2) c \theta - 2 \mu s \theta}$$

Usando el ángulo de fricción φ en lugar del coeficiente de rozamiento μ :

$$1 - \mu^2 = 1 - \frac{s^2 \varphi}{c^2 \varphi} = \frac{c^2 \varphi - s^2 \varphi}{c^2 \varphi} = \frac{c(2\varphi)}{c^2 \varphi} \quad 2\mu = 2 \frac{s \varphi}{c \varphi} = \frac{2 s \varphi c \varphi}{c \varphi c \varphi} = \frac{s(2\varphi)}{c^2 \varphi}$$

$$F_{\uparrow} = P \frac{c(2\varphi) s \theta + s(2\varphi) c \theta}{c(2\varphi) c \theta - s(2\varphi) s \theta} = P \frac{s(2\varphi + \theta)}{c(2\varphi + \theta)} = P \tan(\theta + 2\varphi)$$

La expresión de F_{\uparrow} será válida mientras:

$$(1 - \mu^2) c \theta > 2\mu s \theta \rightarrow \tan \theta < \frac{1 - \mu^2}{2\mu} = \frac{c(2\varphi)}{s(2\varphi)} = \frac{1}{\tan(2\varphi)} \rightarrow \tan \theta \tan(2\varphi) < 1$$

Esto será equivalente a que se cumpla que $\tan(\theta + 2\varphi) > 0 \rightarrow \theta + 2\varphi < \pi/2$.

El límite inferior del rango de valores de F entre cuales el sistema permanece en equilibrio es el que rompe el equilibrio en el sentido de descenso, F_{\downarrow} . Puesto que todas las fuerzas de rozamiento invierten su sentido respecto al caso anteriormente analizado:

$$F_{\downarrow} = P \frac{(1 - \mu^2) s \theta - 2\mu c \theta}{(1 - \mu^2) c \theta + 2\mu s \theta} = P \tan(\theta - 2\varphi)$$

Esta expresión corresponde a una fuerza F aplicada en el sentido que se muestra en las figuras (es decir, en el mismo sentido que la que se aplica para que el sistema ascienda). Pero en función de la combinación de valores de los parámetros θ y μ el resultado puede ser positivo o negativo.

Si $\theta > 2\varphi$, F_{\downarrow} es positiva y por tanto ese valor corresponde a una fuerza que tiene el mismo sentido en que se ha planteado. Es por lo tanto una fuerza que está sujetando el sistema para que no descienda. Si esta fuerza se retirara el sistema caería.

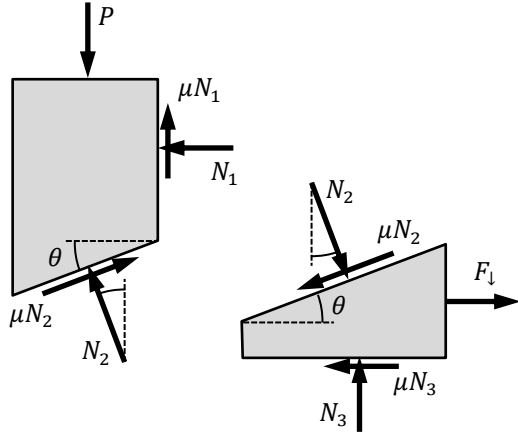
Si $\theta < 2\varphi$, F_{\downarrow} es negativa y su valor absoluto corresponde a una fuerza que tiene sentido opuesto al que se ha planteado. Es por lo tanto una fuerza que está tirando del bloque inferior para que el sistema descienda. Si esta fuerza se retirara, lógicamente el sistema no caería. Ésta es por tanto la condición de autorretención. Una forma alternativa de expresarla es:

$$F_{\downarrow} < 0 \rightarrow (1 - \mu^2) s \theta < 2\mu c \theta \rightarrow \tan \theta < \frac{2\mu}{1 - \mu^2}$$

Sin embargo, en este ejemplo, en el caso de sistema autorretenido, el estudio de la fuerza necesaria para hacer descender el sistema requiere realizar una consideración adicional. Al aplicar una fuerza que mueva el bloque inferior hacia la derecha pueden darse dos situaciones distintas.

- Que el bloque superior deslice hacia abajo sobre el plano inclinado por sí solo y por tanto contacte con la pared del mismo modo que cuando el sistema estaba en movimiento de ascenso. De acuerdo al caso de autorretención de bloque sobre plano inclinado anteriormente analizado, esto sucede cuando $\theta > \varphi$.
- Que el bloque superior no deslice por sí solo hacia abajo sobre el plano inclinado y que se mueva 'montado' sobre el bloque inferior a medida que éste se mueve hacia a derecha, hasta que contacta con la otra pared y comienza forzosamente el descenso. Esto sucede cuando $\theta < \varphi$.

En el primer caso, el movimiento de descenso tiene los mismos contactos que el de ascenso, para el cual se plantearon los diagramas de sólido libre iniciales. Por lo tanto, la expresión de F_{\downarrow} anteriormente deducida es válida. Sin embargo, en el segundo caso, el contacto con la pared pasa a estar al otro lado, por lo que respecto del movimiento de ascenso, no sólo cambian los sentidos de las fuerzas de rozamiento, sino también el de una de las fuerzas normales, con lo que el planteamiento del ascenso no es aprovechable y es necesario rehacer por completo el proceso de obtención de F_{\downarrow} .



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \rightarrow N_1 + N_2 s \theta = \mu N_2 c \theta \\ \sum F_y &= 0 \rightarrow \mu N_1 + N_2 c \theta + \mu N_2 s \theta = P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \rightarrow N_3 = \mu N_2 s \theta + N_2 c \theta \\ \sum F_x &= 0 \rightarrow F_{\downarrow} + N_2 s \theta = \mu N_3 + \mu N_2 c \theta\end{aligned}$$

Sacando factor común todas las normales:

$$\begin{aligned}N_1 &= N_2(\mu c \theta - s \theta) \\ N_2(c \theta + \mu s \theta) + \mu N_1 &= P \\ N_3 &= N_2(c \theta + \mu s \theta) \\ F_{\downarrow} &= \mu N_3 + N_2(\mu c \theta - s \theta)\end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones: $N_2(c \theta + \mu s \theta + \mu^2 c \theta - \mu s \theta) = P \rightarrow N_2 = \frac{P}{(1 + \mu^2) c \theta}$

De las dos últimas ecuaciones: $F_{\downarrow} = N_2(\mu c \theta + \mu^2 s \theta + \mu c \theta - s \theta) = P \frac{2\mu c \theta - (1 - \mu^2) s \theta}{(1 + \mu^2) c \theta}$

Teniendo en cuenta que: $1 + \mu^2 = 1 + \frac{s^2 \varphi}{c^2 \varphi} = \frac{c^2 \varphi + s^2 \varphi}{c^2 \varphi} = \frac{1}{c^2 \varphi}$

También se podría utilizar la expresión: $F_{\downarrow} = P \frac{s(2\varphi) c \theta - c(2\varphi) s \theta}{c \theta} = P \frac{s(2\varphi - \theta)}{c \theta}$

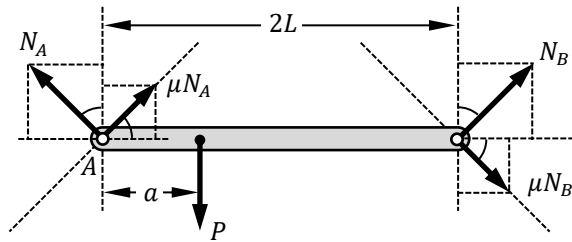
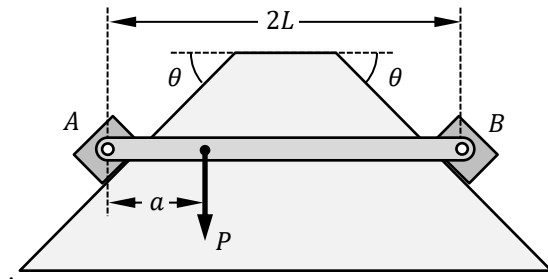
En resumen:

- En el sentido de ascenso, la mínima fuerza necesaria para subir P es $F_{\leftarrow} = P \tan(\theta + 2\varphi)$, obviamente hacia la izquierda, siempre y cuando $\tan(\theta + 2\varphi) > 0$.
- En el sentido de descenso:
 - Si $\theta > 2\varphi$ el sistema no tiene autorretención, y en tal caso, la mínima fuerza necesaria para sujetar P es $F_{\leftarrow} = P \tan(\theta - 2\varphi)$, también hacia la izquierda.
 - Si $\theta < 2\varphi$ el sistema es autorretenido, y en tal caso es necesario aplicar una fuerza hacia la derecha para que descienda. En ese movimiento de descenso podrían darse dos situaciones:
 - Si $\theta > \varphi$, el bloque superior no se sujeta sólo sobre el plano inclinado y contacta también en descenso en la pared de la izquierda. En tal caso, la mínima fuerza necesaria para bajar P es $F_{\rightarrow} = P \tan(2\varphi - \theta)$, hacia la derecha.
 - Si $\theta < \varphi$, en ausencia de una pared a la derecha el bloque superior se trasladaría montado sobre el plano inclinado sin descender. Sólo al contactar con la pared de la derecha se forzaría el descenso. En tal caso, la mínima fuerza necesaria para bajar P es $F_{\rightarrow} = P \sin(2\varphi - \theta) / \cos \theta$, lógicamente hacia la derecha.

• Ejemplo 4.2

Despreciando el peso propio de todos los elementos, determinar en función del ángulo θ y el coeficiente de rozamiento μ , el valor de la relación a/L para que se rompa el equilibrio del sistema.

Particularizar la expresión general obtenida para el caso en que $\theta = 45^\circ$.



$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_B s \theta + \mu N_B c \theta + \mu N_A c \theta = N_A s \theta \rightarrow N_B (s \theta + \mu c \theta) = N_A (s \theta - \mu c \theta)$$

$$N_A = N_B \frac{s \theta + \mu c \theta}{s \theta - \mu c \theta}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_A c \theta + \mu N_A s \theta + N_B c \theta = \mu N_B s \theta + P \rightarrow N_A (c \theta + \mu s \theta) + N_B (c \theta - \mu s \theta) = P$$

$$N_B \frac{s \theta + \mu c \theta}{s \theta - \mu c \theta} (c \theta + \mu s \theta) + N_B (c \theta - \mu s \theta) = P$$

$$N_B \frac{(s \theta + \mu c \theta)(c \theta + \mu s \theta) + (c \theta - \mu s \theta)(s \theta - \mu c \theta)}{s \theta - \mu c \theta} = P$$

$$(s \theta + \mu c \theta)(c \theta + \mu s \theta) = s \theta c \theta + \mu s^2 \theta + \mu c^2 \theta + \mu^2 s \theta c \theta = s \theta c \theta (1 + \mu^2) + \mu (s^2 \theta + c^2 \theta)$$

$$(c \theta - \mu s \theta)(s \theta - \mu c \theta) = c \theta s \theta - \mu c^2 \theta - \mu s^2 \theta + \mu^2 s \theta c \theta = s \theta c \theta (1 + \mu^2) - \mu (s^2 \theta + c^2 \theta)$$

$$s 2 \theta = 2 s \theta c \theta$$

$$s^2 \theta + c^2 \theta = 1$$

$$N_B (s \theta c \theta (1 + \mu^2) + \mu + s \theta c \theta (1 + \mu^2) - \mu) = P (s \theta - \mu c \theta) \rightarrow N_B = P \frac{s \theta - \mu c \theta}{\text{sen } 2 \theta (1 + \mu^2)}$$

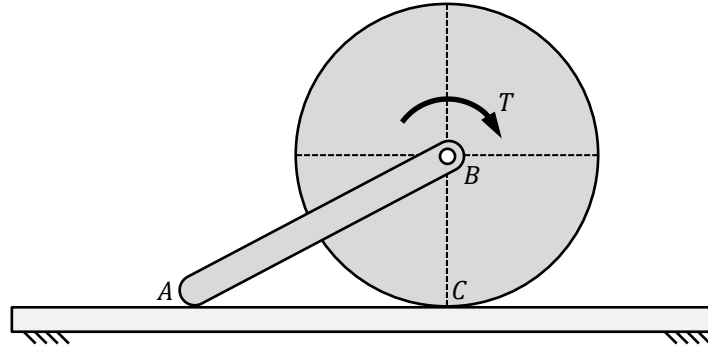
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow N_B c \theta \cdot 2L = \mu N_B s \theta \cdot 2L + P \cdot a \rightarrow N_B (c \theta - \mu s \theta) 2L = P \cdot a$$

$$\frac{a}{L} = 2(c \theta - \mu s \theta) \frac{N_B}{P} = 2(c \theta - \mu s \theta) \frac{(s \theta - \mu c \theta)}{s 2 \theta (1 + \mu^2)} = \frac{s 2 \theta (1 + \mu^2) - 2 \mu}{s 2 \theta (1 + \mu^2)} = 1 - \frac{2 \mu}{s 2 \theta (1 + \mu^2)}$$

$$\theta = 45^\circ \rightarrow s 2 \theta = s 90^\circ = 1 \rightarrow \frac{a}{L} = 1 - \frac{2 \mu}{1 + \mu^2} = \frac{1 + \mu^2 - 2 \mu}{1 + \mu^2} = \frac{(1 - \mu)^2}{1 + \mu^2}$$

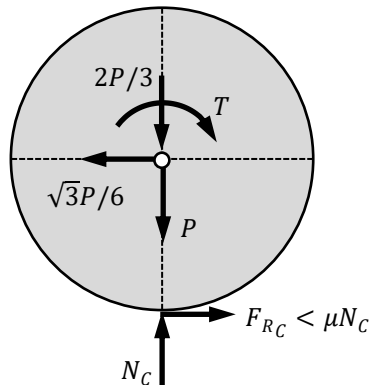
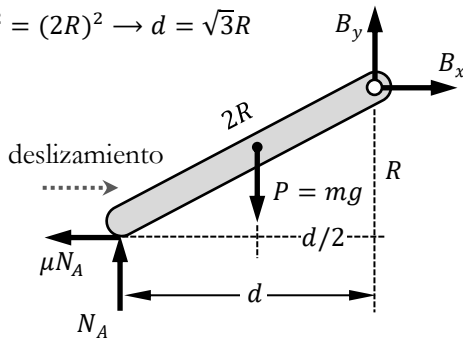
• Ejemplo 4.3

Una barra AB de masa m y longitud $2R$ está articulada en su extremo B al centro de un disco de masa m y radio R . El sistema se apoya en el suelo en A y C , siendo en ambos contactos el coeficiente de rozamiento $\mu = \sqrt{3}/2$. Se desea obtener el momento T que es necesario aplicar al disco para que el sistema comience su movimiento.



Se supondrá inicialmente que el equilibrio se rompe porque comienza a deslizar en A , rodando sin deslizar en C , es decir, que en el contacto A la fuerza de rozamiento está en su valor máximo posible (vale el coeficiente de rozamiento por la normal en ese contacto) mientras que en el contacto C aún no (la fuerza de rozamiento tiene un valor independiente de la fuerza normal). Cuando se haya resuelto el problema de acuerdo con esta hipótesis de partida será necesario verificarla.

$$d^2 + R^2 = (2R)^2 \rightarrow d = \sqrt{3}R$$



$$M_B \rightarrow N_A \cdot d + \mu N_A \cdot R = P \cdot d/2$$

$$N_A \cdot \sqrt{3}R + \frac{\sqrt{3}}{2} N_A \cdot R = P \frac{\sqrt{3}R}{2}$$

$$3N_A = P \rightarrow N_A = mg/3$$

$$F_x \rightarrow B_x = \mu N_A = \frac{\sqrt{3}}{6} P$$

$$F_y \rightarrow B_y + N_A = P \rightarrow B_y = 2P/3$$

$$F_x \rightarrow F_{RC} = \frac{\sqrt{3}}{6} P$$

$$F_y \rightarrow N_C = P + \frac{2}{3} P = \frac{5}{3} P$$

Se verifica que $F_{RC} < \mu N_C$:

$$\frac{\sqrt{3}}{6} P < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{3} P \rightarrow 1 < 5 \rightarrow OK$$

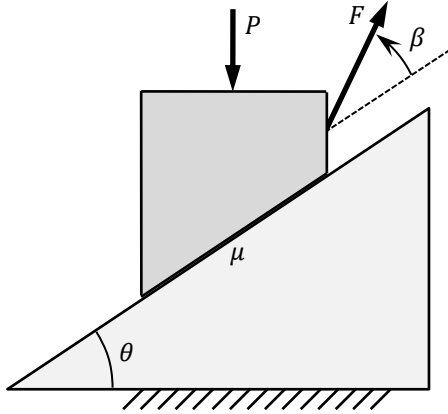
$$M_B \rightarrow T = F_{RC} \cdot R = \frac{\sqrt{3}}{6} mgR$$

En este caso se ha verificado la suposición de partida. Si se hubiese obtenido al resolver un valor de F_{RC} superior a μN_C , habría sido necesario rehacer el cálculo, ya que ese resultado estaría indicando que al aplicar T la rueda en realidad estaría patinando en C , es decir, había que plantear $F_{RC} = \mu N_C$, mientras que el rozamiento en A estaría siendo capaz de retener ese deslizamiento, es decir, habría que replantear una F_{RA} independiente de N_A , que al resolver daría unos valores tales que $F_{RA} < \mu N_A$.

Problemas

1. P , θ y μ son dato.

- Si β es dato, calcular la F mínima necesaria para que el bloque ascienda.
- Si F es dato, calcular el β mínimo para que el bloque ascienda.



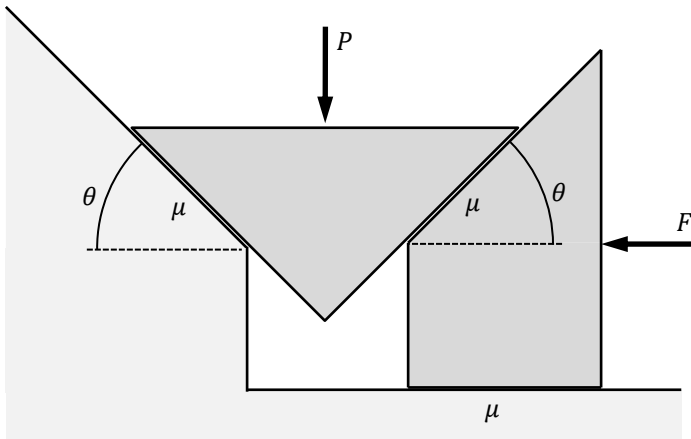
Solución:

$$F = P \frac{s\theta + \mu c\theta}{c\beta + \mu s\beta}$$

$$\beta = \varphi + \arccos\left(\frac{P}{F} \sin(\theta + \varphi)\right)$$

siendo $\varphi = \arctan \mu$

2. La carga P , el ángulo θ y el coeficiente de rozamiento μ son conocidos. Determinar el rango de valores de F entre los cuales el sistema permanece en equilibrio.

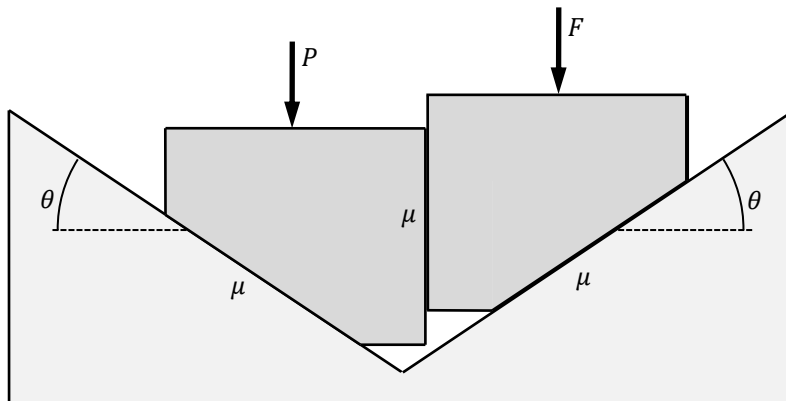


Solución:

$$F_{\uparrow} = \frac{P}{2} \cdot \frac{(1 - \mu^2) s\theta + 2\mu c\theta}{c\theta - \mu s\theta}$$

3. Calcular la fuerza F que es necesario aplicar para hacer ascender una carga $P = 1000 \text{ kg}$, siendo el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto $\mu = 0.2$ y el ángulo $\theta = 30^\circ$.

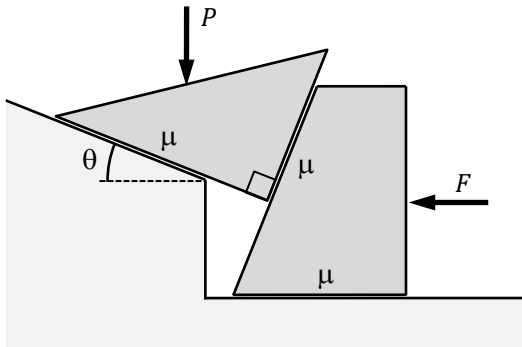
- Cuál es el mínimo valor de F necesario para mantener la carga P elevada.
- Cuál es el mínimo valor de F necesario para bajar la carga P .



Solución:

$$F_{\uparrow} = P \frac{\mu + \frac{c\theta + \mu s\theta}{s\theta - \mu c\theta}}{-\mu + \frac{c\theta - \mu s\theta}{s\theta + \mu c\theta}}$$

4. En el sistema de cuñas de la figura, en función de los datos P , θ y μ , determinar el mínimo valor de F necesario para que el bloque triangular ascienda por el plano inclinado.



Solución:

$$F_{\uparrow} = P(s\theta + \mu c\theta) \left(\frac{2\mu}{1 - \mu^2} s\theta + c\theta \right)$$

5. CABLES

5.1 PROPIEDADES DE LOS SÓLIDOS FUNICULARES

Un *sólido funicular* es todo aquel que se comporta como una ‘cuerda’, es decir, un elemento del tipo ‘longitudinal flexible’. Por este motivo, es también habitual referirse a este tipo de cuerpos como *cables*. Debe mencionarse que existen sistemas mecánicos formados por una serie de sólidos rígidos que en su conjunto se comportan como un único sólido funicular, como es el caso de las *cadena*s.

Una característica elemental de los sólidos funiculares es que no tienen una forma geométrica definida a priori, ya que no son sólidos rígidos, por lo que en principio su forma puede modificarse libremente (pueden enrollarse, etc.). Y en relación con esta característica se manifiesta una importante propiedad, cuando un sólido funicular se somete a cargas mecánicas, éste se tensa y adquiere una forma geométrica concreta. La forma del sólido, que depende de las cargas que se le apliquen y de por dónde esté sujeto, es precisamente aquella que le proporciona las condiciones para mantenerse en equilibrio estático. En esta situación el sólido funicular, que en la realidad es flexible, puede analizarse como si fuera un sólido rígido. Es decir, el diagrama de sólido libre del cable en su conjunto, o de cualquier tramo del mismo, debe satisfacer las ecuaciones del equilibrio estático ordinarias.

A la hora de realizar tales diagramas de sólido libre, como es sabido, ha de aislarse por completo la parte a analizar, por lo que debe cortarse virtualmente el cable por dos puntos, para estudiar el equilibrio del tramo que queda entre esos dos extremos. Al cortar el cable por un punto se deja ‘a la vista’ la fuerza interna que está transmitiéndose por dicha sección. Esta fuerza, que se denomina comúnmente *tensión* en el cable y se denota como T , tiene dirección y sentido predefinidos, ya que es siempre una tracción tangente al propio cable.

Una manera muy sencilla de entender por qué esto es así es considerar un sólido funicular de tipo cadena, formado por numerosos eslabones (como una cadena de bicicleta). La unión entre cada dos eslabones contiguos es una articulación, por lo que, suponiendo que cualquier carga estuviera aplicada en los nudos, cada eslabón es un sólido rígido biarticulado sin carga. El equivalente a cortar el cable, en este caso sería separar dos eslabones por la articulación que los une y la tensión en el cable sería la fuerza de enlace dejada al descubierto. Finalmente, como es sabido, cuando a una articulación llega una barra biarticulada sin carga, la fuerza que transmite al enlace tiene la dirección de la propia barra.

Obviamente, un sólido funicular no es capaz de trabajar a compresión. El valor de la tensión en el cable no se mantiene en general constante a lo largo de toda su longitud, por lo que normalmente habrá que determinar el punto en que dicha tensión es máxima.

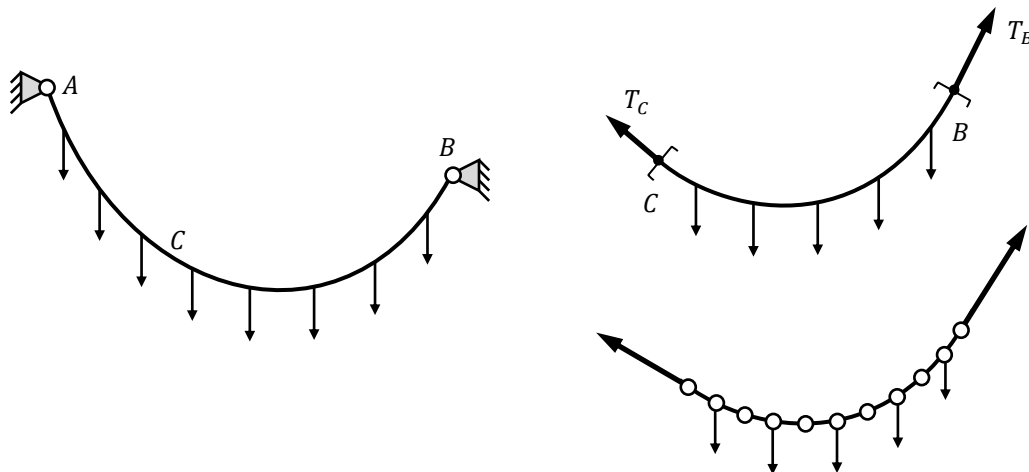


Fig. 5.1 Fuerzas internas en un sólido funicular

5.2 CABLE PARABÓLICO

5.2.1 Componentes de tensión y forma del cable

Se denomina *cable parabólico* a aquel que está soportando una carga vertical uniformemente distribuida a lo largo de una dirección horizontal. El valor de esta carga es tal que permite considerar despreciable frente a ella el peso propio del cable. Cables de este tipo son los que se emplean, por ejemplo, para sustentar los puentes colgantes. La carga distribuida se suele denotar como q y constituye una fuerza por unidad de longitud (sus unidades son $[fuerza]/[longitud]$) que se transmite al cable normalmente mediante una serie de tirantes verticales. Que la distribución de carga sea uniforme implica que q es constante a lo largo de la longitud en la que se aplica.

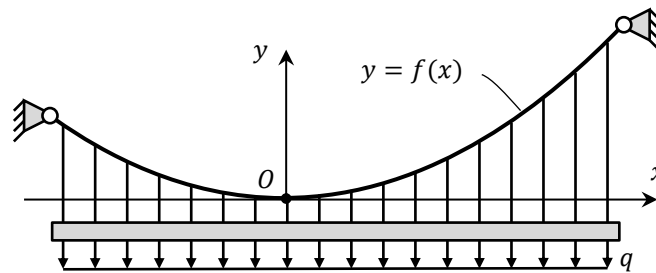


Fig. 5.2 Cable con carga vertical uniformemente distribuida en la horizontal

A continuación se va a deducir el valor de la tensión en cualquier punto del cable, así como la forma geométrica que adquiere el mismo en esta situación de carga, es decir, la ecuación de la curva matemática que define su forma, $y = f(x)$.

Para ello, en primer lugar, es necesario posicionar el origen de un sistema de referencia, es decir, especificar una ubicación concreta para los ejes x y y . En este tipo de carga se sitúa O en el punto del cable con tangente horizontal. En segundo lugar, se plantea el equilibrio estático del diagrama de sólido libre de un tramo de cable comprendido entre dicho origen y otro punto cualquiera:

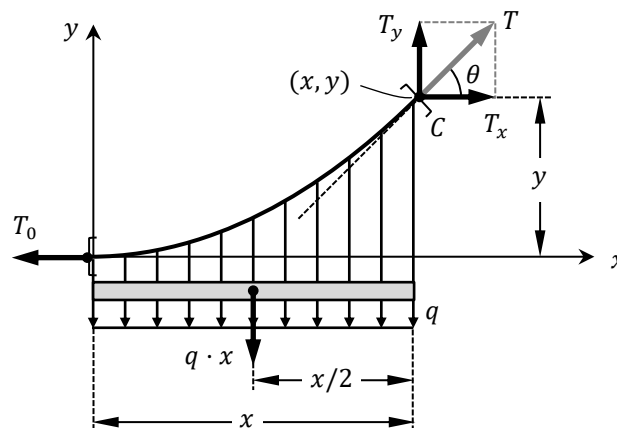


Fig. 5.3 Tramo de cable parabólico

Las fuerzas que se han dejado al descubierto en los dos puntos por los que se ha cortado, los cuales constituyen los extremos del tramo a analizar, son tangentes a la propia curva que define la forma del cable y tienen el sentido de tracción. Por tanto, la tensión en el punto más bajo (origen del sistema de referencia) T_0 es horizontal, mientras que la tensión T en la sección de coordenadas genéricas (x, y) tiene una inclinación dada por un ángulo θ , es decir, dos componentes T_x y T_y .

Por otro lado, la carga externamente aplicada es la fuerza distribuida q , que está actuando en toda la proyección del tramo de cable sobre la horizontal, es decir, a lo largo de toda la longitud x . Para poder plantear las ecuaciones de equilibrio es necesario sustituir esa carga repartida por una fuerza puntual estáticamente equivalente. Por el hecho de ser la distribución de carga uniforme, dicha carga puntual valdrá la fuerza por unidad de longitud multiplicada por la longitud sobre la que está actuando ($q \cdot x$) y estará aplicada en el punto medio de la distribución original ($x/2$).

Ahora ya es posible plantear las ecuaciones del equilibrio estático. En primer lugar se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_x = T_0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_y = q \cdot x$$

La primera conclusión fundamental que se deduce es que la componente horizontal de la tensión en cualquier punto del cable es constante. Esta constante es precisamente la tensión en el punto más bajo del cable, la sección con tangente horizontal. Enlazada con esta idea, la segunda conclusión es que la componente vertical de la tensión aumenta a medida que la sección se aleja del punto más bajo, aumenta linealmente con la coordenada x del punto. Obviamente, en función de estas componentes:

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 = T_0^2 + (q \cdot x)^2 \quad \tan \theta = \frac{T_y}{T_x} = \frac{q}{T_0} x$$

Se observa cómo a medida que el punto del cable se va alejando del punto más bajo la tensión resultante aumenta, así como el ángulo que define la pendiente de la recta tangente al propio cable. Esto permite concluir que el punto del cable con mayor tensión es el punto más elevado. Así mismo, también se pone de manifiesto que para alcanzar el equilibrio, el cable adquiere una forma curva con una pendiente cada vez más pronunciada. Finalmente, para obtener la ecuación matemática $y = f(x)$ de la curva que define la forma del cable, siendo C el punto de coordenadas (x, y) (punto de corte superior):

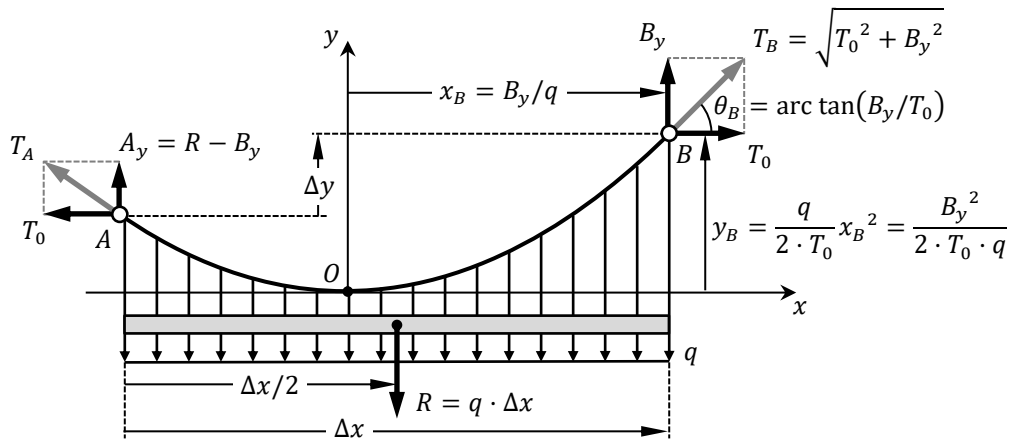
$$\sum M_C = 0 \rightarrow q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = T_0 \cdot y \rightarrow y = \frac{q}{2T_0} x^2$$

Se trata de un polinomio de segundo grado, o parábola, que es de dónde este tipo de cables toma su nombre. Recordando que la pendiente de la recta tangente a una curva es la derivada de la función (y que tanto q como T_0 son constantes) se comprueba cómo efectivamente la tensión es una fuerza tangente al cable en cualquier punto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{q}{2T_0} 2x = \frac{q}{T_0} x = \tan \theta$$

5.2.2 Metodología de cálculo

A continuación, se presenta una metodología de aplicación a la resolución de los diversos problemas de cables parabólicos.



$$M_A = 0 \rightarrow B_y \cdot \Delta x = R \cdot \frac{\Delta x}{2} + T_0 \cdot \Delta y \rightarrow \boxed{B_y = \frac{R}{2} + T_0 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Fig. 5.4 Relaciones entre variables en un cable parabólico

Supóngase que q es conocido. Así mismo, las posiciones de los puntos de anclaje A y B están definidas (Δx , Δy). En consecuencia, también se conoce la fuerza puntual equivalente R . Resolver el cable consiste en determinar las reacciones (tensiones) en los anclajes A y B (calcular T_0 , A_y y B_y) y acotar la posición del punto O (calcular x_B e y_B). El resultado de tensión en un anclaje, por ejemplo el B , se puede dar en resultante y dirección T_B y θ_B (coordenadas polares) en lugar de las componentes T_0 y B_y (coordenadas cartesianas).

Siempre será necesario disponer de un dato adicional para poder resolver el cable. Este dato extra suele ser alguna de las magnitudes mencionadas, es decir:

- T_0 : La componente horizontal de la tensión en cualquier punto del cable, y por tanto en B .
- B_y : La componente vertical de la tensión en B .
- T_B : La tensión total, resultante, en B .
- θ_B : El ángulo de la tangente al cable en B .
- x_B : La posición horizontal de O , o distancia en x del origen de la parábola al extremo B .
- y_B : La flecha del cable, o distancia en vertical del origen de la parábola al anclaje B .

Cualquiera que sea el dato que se proporcione, el objetivo es calcular todos los parámetros anteriores. Obsérvese que en cuanto se determine el valor de T_0 , el resto de magnitudes quedan definidas.

Se pueden dar dos situaciones diferentes:

Anclajes a la misma altura: $\Delta y = 0$

Se trata de la situación más sencilla, ya que en este caso se tiene directamente que:

$$B_y = \frac{R}{2} = \frac{q \cdot \Delta x}{2} = q \cdot x_B \rightarrow x_B = \frac{\Delta x}{2}$$

Es decir, los valores de B_y y x_B están predeterminados en función de los valores de los parámetros conocidos q y Δx y por tanto no pueden ser dato, no pueden elegirse libremente. Por tanto, en el caso de que el dato no sea T_0 , el objetivo se reduce simplemente a obtener T_0 en función del dato que se proporcione:

$$y_B \rightarrow T_0 = \frac{q}{2 \cdot y_B} x_B^2 = \frac{q \cdot \Delta x^2}{8 \cdot y_B} = R \cdot \frac{\Delta x}{8 \cdot y_B}$$

$$T_B \rightarrow T_0 = \sqrt{T_B^2 - B_y^2} = \sqrt{T_B^2 - (q \cdot x_B)^2} = \sqrt{T_B^2 - \left(q \cdot \frac{\Delta x}{2}\right)^2} = \sqrt{T_B^2 - \frac{R^2}{4}}$$

$$\theta_B \rightarrow T_0 = \frac{B_y}{\tan \theta_B} = \frac{q \cdot x_B}{\tan \theta_B} = \frac{q \cdot \Delta x}{2 \cdot \tan \theta_B} = \frac{R}{2 \cdot \tan \theta_B}$$

Anclajes a distintas alturas: $\Delta y \neq 0$.

Este caso es un poco más complejo. Se asumirá por simplicidad que tanto Δx como Δy siempre tienen valor positivo (B se encuentra siempre a la derecha y por encima de A). En el caso de que el dato no sea T_0 , habrá que calcularlo en función del dato que se proporcione. Pueden darse las siguientes variantes:

- Si se conoce B_y , de la ecuación del equilibrio de momentos respecto de A se despeja directamente:

$$T_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \left(B_y - \frac{R}{2}\right)$$

Como T_0 es por definición una magnitud positiva, esta situación sólo tiene sentido si $B_y > R/2$.

- Si se conoce x_B , se particulariza en la expresión anterior $B_y = q \cdot x_B$. Para realizar mejor el estudio de las condiciones en las que existe solución, puede reescribirse:

$$T_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot q \cdot \left(x_B - \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Obsérvese que para obtener un valor positivo de T_0 , debe cumplirse que $x_B > \Delta x/2$.

- Si se conoce θ_B , introduciendo en la ecuación del equilibrio de momentos respecto de A la condición:

$$\tan \theta_B = \frac{B_y}{T_0} \rightarrow B_y = T_0 \cdot \tan \theta_B = \frac{R}{2} + T_0 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow T_0 = \frac{R/2}{\tan \theta_B - \Delta y/\Delta x}$$

Es inmediato comprobar que esta situación sólo tiene sentido físico si $\tan \theta_B > \Delta y/\Delta x$.

- Si se conoce T_B , la ecuación a emplear es:

$$T_B^2 = T_0^2 + B_y^2$$

Para obtener T_0 , lo más directo es hacer:

$$B_y = \frac{R}{2} + T_0 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow B_y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(T_0 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot T_0 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Al combinar estas dos ecuaciones se llega a un polinomio de segundo grado en T_0 :

$$T_B^2 = T_0^2 + \frac{R^2}{2^2} + T_0^2 \cdot \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + R \cdot T_0 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right) \cdot T_0^2 + R \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot T_0 + \frac{R^2}{2^2} - T_B^2 = 0$$

Llamando:

$$a = 1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \quad b = R \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad c = \frac{R^2}{2^2} - T_B^2$$

Se reescribe:

$$a \cdot T_0^2 + b \cdot T_0 + c = 0$$

De donde se obtiene:

$$T_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Puesto que por definición $a > 0$, el denominador es positivo. Recordando que tanto Δx como Δy se están asumiendo positivas, y puesto que R lo es por definición, se tiene que $b > 0$ y por tanto la raíz negativa queda automáticamente descartada. Además, para que T_0 sea positiva, la raíz positiva debe verificar:

$$b < \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \rightarrow b^2 < b^2 - 4 \cdot a \cdot c \rightarrow 4 \cdot a \cdot c < 0 \rightarrow c < 0 \rightarrow T_B > \frac{R}{2}$$

Adicionalmente, para que exista solución debería verificarse que $b^2 > 4 \cdot a \cdot c$, lo cual se cumple siempre, ya que previamente se ha impuesto que $c < 0$.

- Si se conoce y_B , se emplea la condición de que el punto B verifica la ecuación de la parábola:

$$y_B = \frac{q}{2 \cdot T_0} x_B^2 = \frac{B_y^2}{2 \cdot T_0 \cdot q} \rightarrow T_0 = \frac{B_y^2}{2 \cdot y_B \cdot q}$$

En este caso, lo más directo es introducir esta expresión de T_0 en la ecuación de momentos respecto de A . Al hacerlo se elimina T_0 y lo que se obtiene es B_y :

$$B_y = \frac{R}{2} + \frac{B_y^2}{2 \cdot y_B \cdot q} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Teniendo en cuenta que $q = R/\Delta x$ se llega a la siguiente ecuación de segundo grado en B_y :

$$\frac{\Delta y}{2 \cdot y_B \cdot R} \cdot B_y^2 - B_y + \frac{R}{2} = 0$$

De donde se despeja:

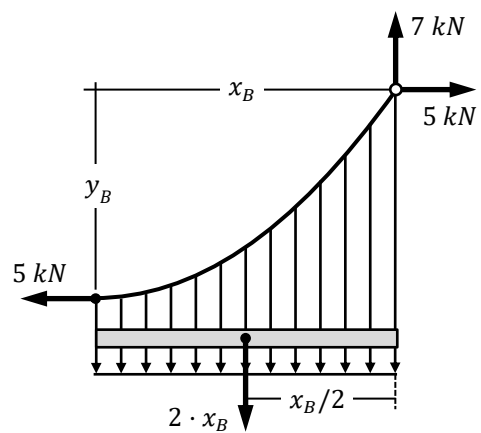
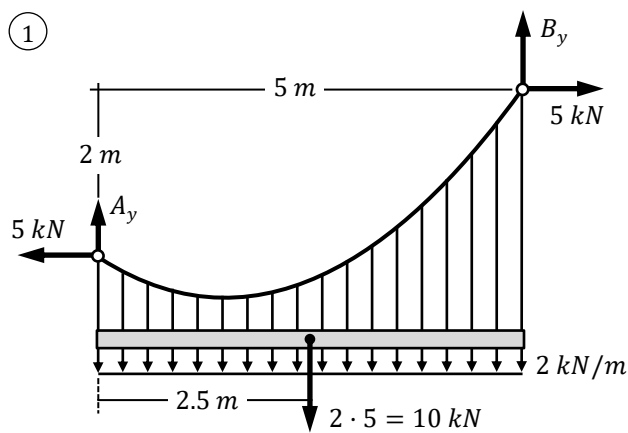
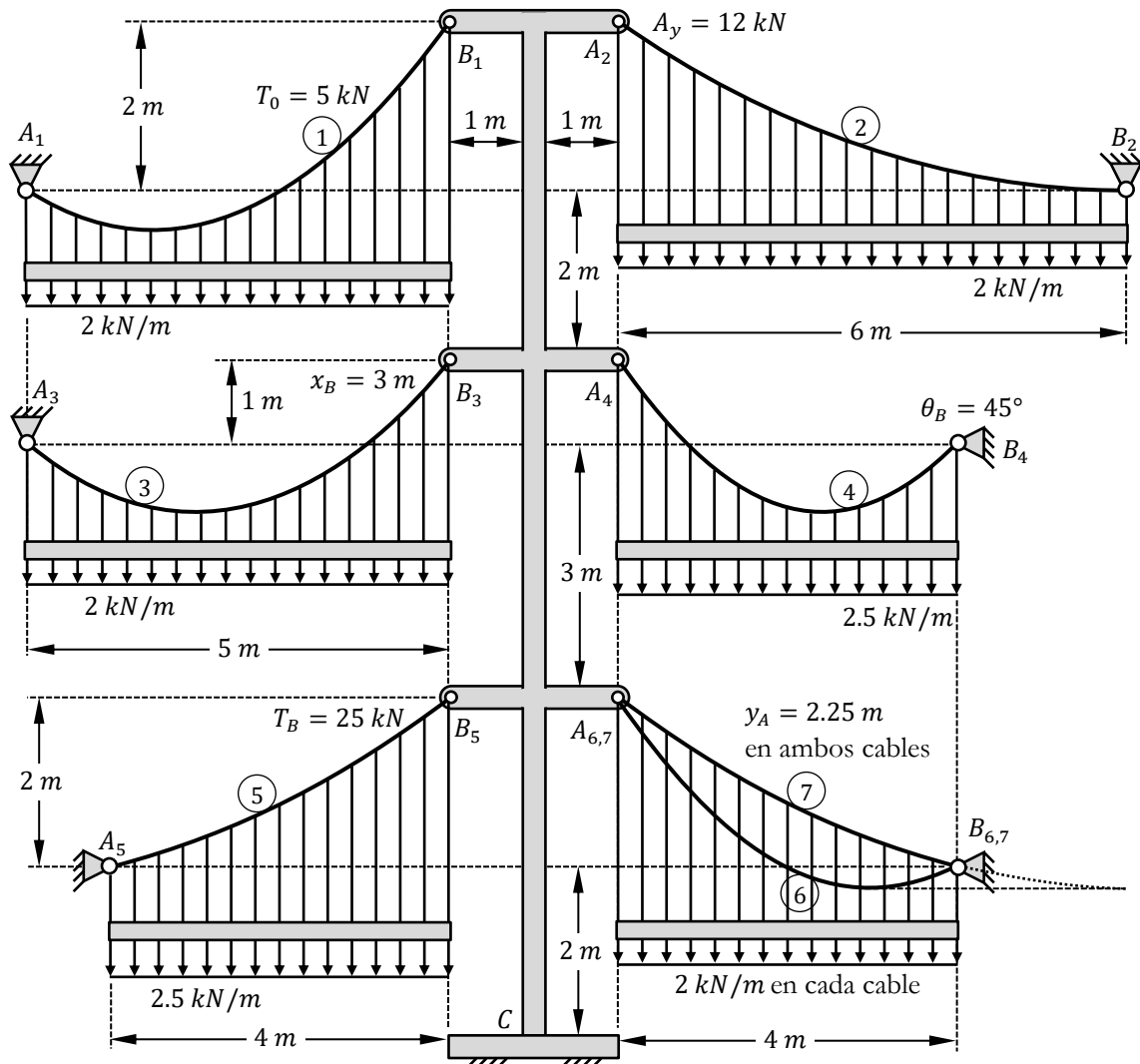
$$B_y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{\Delta y}{2 \cdot y_B \cdot R} \cdot \frac{R}{2}}}{2 \cdot \frac{\Delta y}{2 \cdot y_B \cdot R}} = R \cdot \frac{y_B}{\Delta y} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \Delta y/y_B}\right)$$

Evidentemente, sólo existen las soluciones en el caso en que $\Delta y/y_B < 1 \rightarrow y_B > \Delta y$.

Pero además, se puede afirmar que en caso de la condición anterior se cumpla, es decir, que exista solución, las dos soluciones de la ecuación cuadrática son válidas. Por lo tanto, existen dos cables distintos que verifican la condición impuesta de valor de y_B .

• Ejemplo 5.1

Acotar la posición del punto de tangente horizontal de cada uno de los 7 cables respecto del punto de anclaje de cada uno con la torre y determinar las reacciones en el empotramiento C.



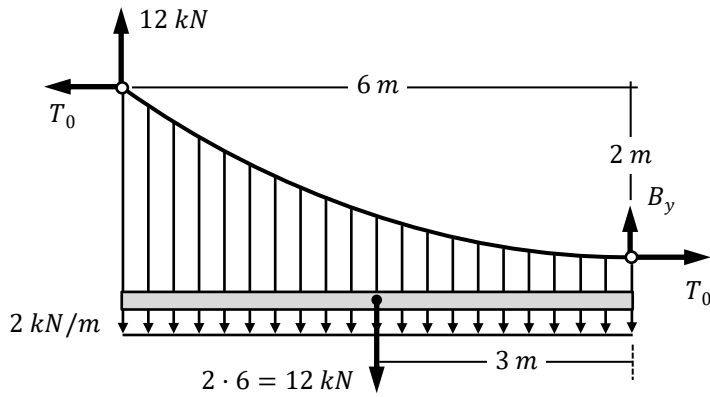
$$M_{A_1} \rightarrow B_y \cdot 5 = 10 \cdot 2.5 + 5 \cdot 2 \rightarrow B_y = 7 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow A_y + 7 = 10 \rightarrow A_y = 3 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow 2 \cdot x_B = 7 \rightarrow x_B = 3.5 \text{ m}$$

$$M_{B_1} \rightarrow 7 \cdot 3.5/2 = 5 \cdot y_B \rightarrow y_B = 2.45 \text{ m}$$

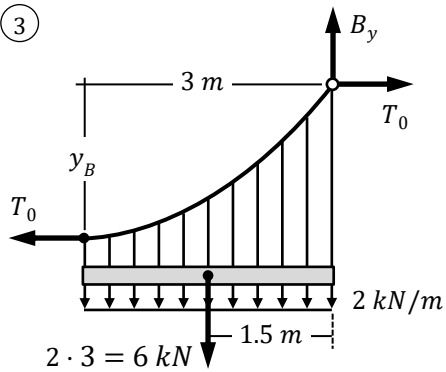
②



$$M_{B_2} \rightarrow T_0 \cdot 2 + 12 \cdot 3 = 12 \cdot 6 \rightarrow T_0 = 18 \text{ kN}$$

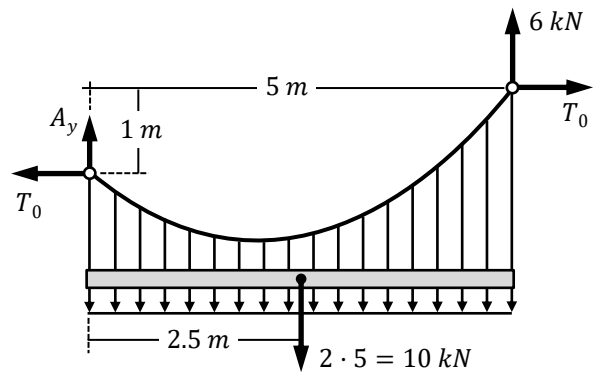
$$F_y \rightarrow B_y = 12 - 12 = 0 \text{ kN} \rightarrow B \text{ es el punto de tangente horizontal}$$

③



$$F_y \rightarrow B_y = 6 \text{ kN}$$

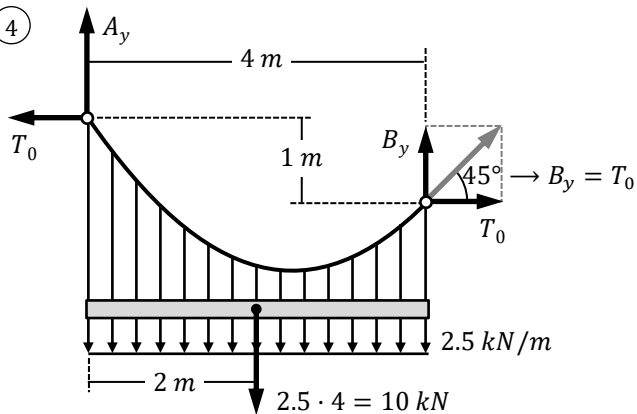
$$M_{B_3} \rightarrow 6 \cdot 1.5 = T_0 \cdot y_B = 5 \cdot y_B \rightarrow y_B = 1.8 \text{ m}$$



$$M_{A_3} \rightarrow 6 \cdot 5 = 10 \cdot 2.5 + T_0 \cdot 1 \rightarrow T_0 = 5 \text{ kN}$$

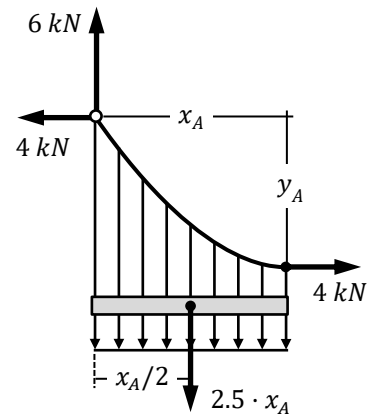
$$F_y \rightarrow A_y + 6 = 10 \rightarrow A_y = 3 \text{ kN}$$

④



$$M_{A_4} \rightarrow B_y \cdot 4 + T_0 \cdot 1 = 10 \cdot 2 \rightarrow B_y = T_0 = 4 \text{ kN}$$

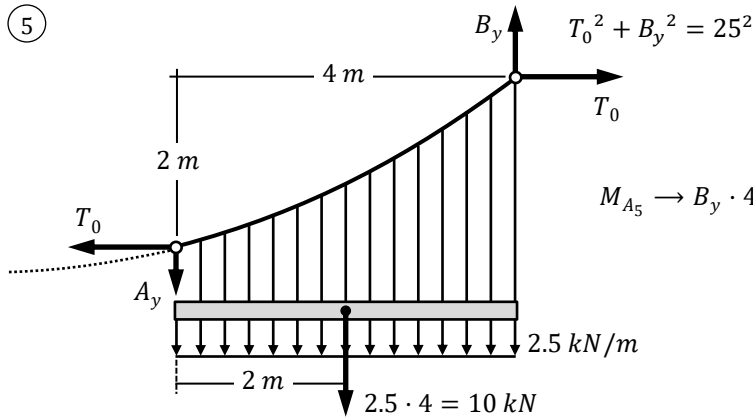
$$F_y \rightarrow A_y + 4 = 10 \rightarrow A_y = 6 \text{ kN}$$



$$F_y \rightarrow 2.5 \cdot x_A = 6 \rightarrow x_A = 2.4 \text{ m}$$

$$M_{A_1} \rightarrow 4 \cdot y_A = 6 \cdot 2.4/2 \rightarrow y_A = 1.8 \text{ m}$$

5



$$M_{A_5} \rightarrow B_y \cdot 4 = T_0 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \rightarrow B_y = \frac{T_0}{2} + 5$$

$$\rightarrow B_y^2 = \left(\frac{T_0}{2}\right)^2 + 5^2 + 2 \frac{T_0}{2} \cdot 5$$

$$\rightarrow B_y^2 = \frac{T_0^2}{4} + 25 + 5 \cdot T_0$$

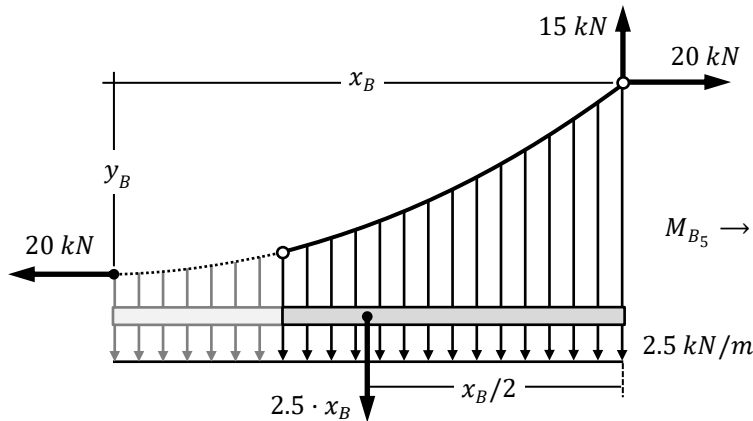
$$T_0^2 + B_y^2 = 25^2 \rightarrow T_0^2 + 0.25 \cdot T_0^2 + 5 \cdot T_0 + 25 = 25^2 \rightarrow 1.25 \cdot T_0^2 + 5 \cdot T_0 - 600 = 0$$

$$T_0 = \frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1.25 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1.25} = 20 \text{ kN} \rightarrow B_y = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ kN}$$

la solución $T_0 < 0$

$$F_y \rightarrow A_y + 10 = 15 \rightarrow A_y = 5 \text{ kN}$$

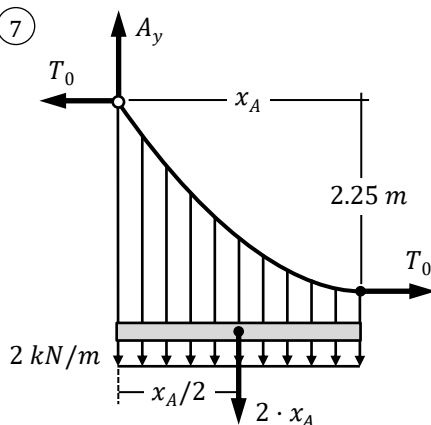
no tiene sentido



$$F_y \rightarrow 2.5 \cdot x_B = 15 \rightarrow x_B = 6 \text{ m}$$

$$M_{B_5} \rightarrow 15 \cdot 6/2 = 20 \cdot y_B \rightarrow y_B = 2.25 \text{ m}$$

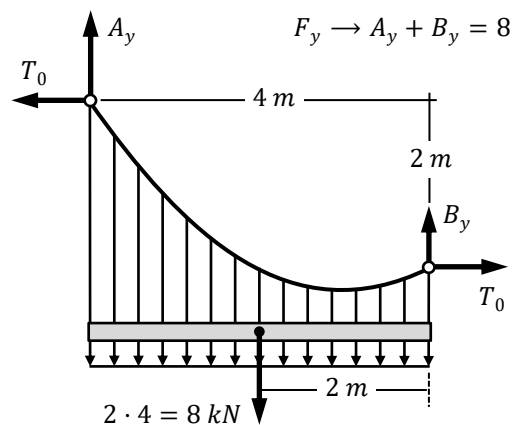
6 7



$$F_y \rightarrow A_y = 2 \cdot x_A \rightarrow x_A = A_y/2$$

$$M_{A_{6,7}} \rightarrow T_0 \cdot 2.25 = 2 \cdot x_A \cdot x_A/2 = x_A^2 = (A_y/2)^2$$

$$\rightarrow T_0 = A_y^2/9$$



$$F_y \rightarrow A_y + B_y = 8$$

$$M_{B_{6,7}} \rightarrow T_0 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = A_y \cdot 4$$

$$\rightarrow T_0 + 8 = 2 \cdot A_y \rightarrow$$

$$\frac{A_y^2}{9} - 2 \cdot A_y + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} A_{y6} = 6 \text{ kN} \\ A_{y7} = 12 \text{ kN} \end{cases}$$

Las dos soluciones tienen sentido físico. Evidentemente el cable 7 está más tenso que el 6, por eso se identifica con él la solución de mayor valor.

$$T_{0_6} = A_{y_6}^2 / 9 = 6^2 / 9 = 4 \text{ kN}$$

$$x_{A_6} = A_{y_6} / 2 = 6 / 2 = 3 \text{ m}$$

$$B_{y_6} = 8 - A_{y_6} = 8 - 6 = 2 \text{ kN}$$

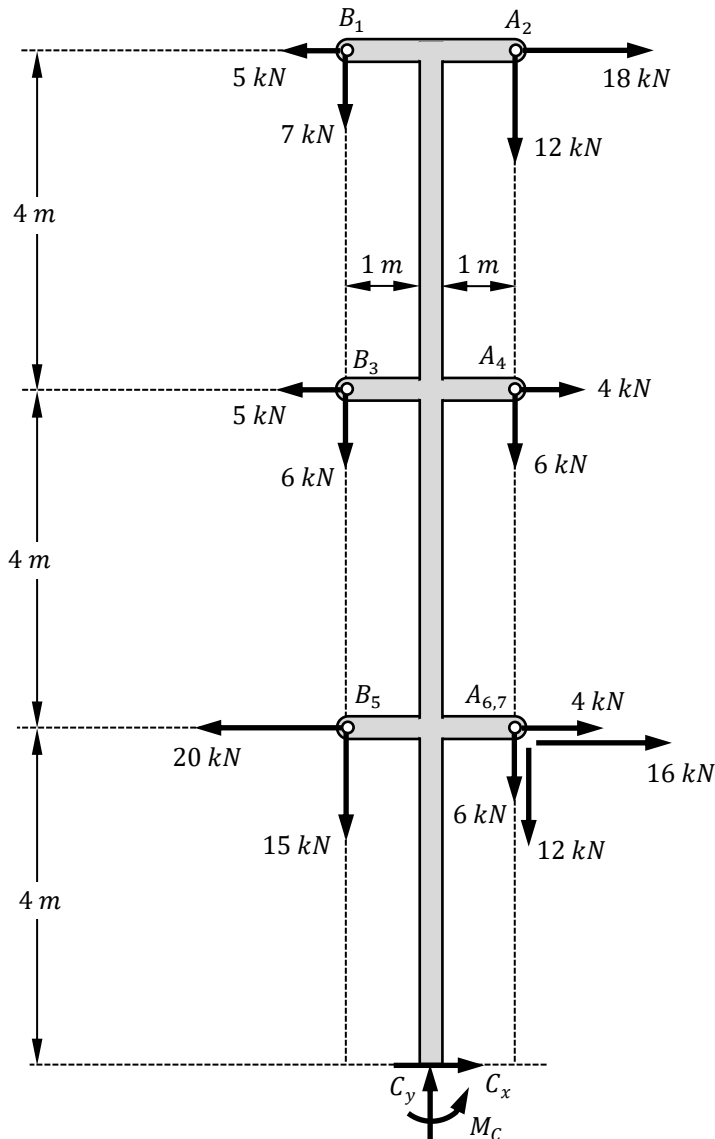
$$T_{0_7} = A_{y_7}^2 / 9 = 12^2 / 9 = 16 \text{ kN}$$

$$x_{A_7} = A_{y_7} / 2 = 12 / 2 = 6 \text{ m}$$

$$B_{y_7} = 8 - A_{y_7} = 8 - 12 = -4 \text{ kN}$$

La componente B_y del cable 7 sale negativa porque en la realidad es al revés de como se ha planteado en el cálculo, es decir es 4 kN hacia abajo, lo cual es coherente con el hecho de que el punto de tangente horizontal de la parábola que determina la forma del cable quede fuera del cable físico.

Para calcular las reacciones en el empotramiento C, se plantea el diagrama de sólido libre de la torre. Obviamente, en los anclajes de la torre se aplica la acción-reacción de las componentes calculadas en los diagramas de sólido libre de los cables (cada cable, como elemento traccionado que es, tira del elemento al que va anclado).



$$\sum F_x \rightarrow C_x = -12 \text{ kN}$$

$$\sum F_y \rightarrow C_y = 64 \text{ kN}$$

$$\sum M_C \rightarrow M_C = 156 \text{ N} \cdot \text{m}$$

5.2.3 Longitud aproximada del cable parabólico

A continuación se va a determinar cuál es la longitud s de un tramo de cable desde el punto de tangente horizontal a un punto cualquiera de coordenadas (x, y) .

Se parte de:

$$s = \int ds$$

Donde como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + dy^2 \frac{dx^2}{dx^2} = dx^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

Por lo tanto, en el caso de cable parabólico:

$$s = \int_0^x \left[1 + \left(\frac{q}{T_0} x \right)^2 \right]^{1/2} dx$$

Esta integral se puede resolver de forma aproximada transformando la función a integrar en un polinomio, mediante un desarrollo en serie de Taylor. Esta transformación resulta más sencilla haciendo las siguientes agrupaciones de parámetros:

$$\frac{q}{T_0} = c \quad \left(\frac{q}{T_0} x \right)^2 = (c \cdot x)^2 = z$$

De esta manera, la función a integrar puede reescribirse como $f(z) = (1 + z)^{1/2}$

El desarrollo en serie de una función viene dado por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0) \cdot z + \frac{1}{2} f''(0) \cdot z^2 + \dots$$

En este caso, $f(0) = 1$, y además:

$$f'(z) = \frac{1}{2} (1 + z)^{-1/2} \rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \quad f''(z) = -\frac{1}{4} (1 + z)^{-3/2} \rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, se puede aproximar $f(z) \approx 1 + z/2 - z^2/8$.

Deshaciendo ahora el cambio de variable y volviendo a la integral original:

$$s \approx \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} (c \cdot x)^2 - \frac{1}{8} (c \cdot x)^4 \right) dx = x + \frac{c^2}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{c^4}{8} \cdot \frac{x^5}{5} = x \left(1 + \frac{(c \cdot x)^2}{6} - \frac{(c \cdot x)^4}{40} \right)$$

Finalmente, teniendo en cuenta la ecuación del cable parabólico:

$$y = \frac{q}{2T_0} x^2 = \frac{c}{2} x^2 = \frac{c \cdot x}{2} x \rightarrow c \cdot x = 2 \frac{y}{x}$$

$$s \approx x \left(1 + \frac{2^2}{6} \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{2^4}{40} \left(\frac{y}{x} \right)^4 \right) = x \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y}{x} \right)^4 \right)$$

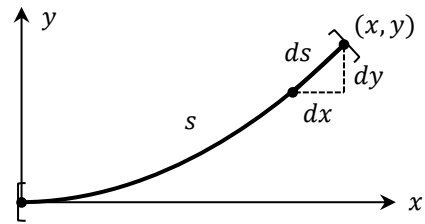


Fig. 5.5 Relación de diferenciales

5.3 CATENARIA

Se denomina *catenaria* al cable que está sometido exclusivamente a la acción de su propio peso. Éste es el caso típico, por ejemplo, de los cables de transporte de energía eléctrica, sustentados por postes o torres. Se trata por tanto de una carga vertical uniformemente distribuida a lo largo de la longitud del propio cable.

Dicho peso por unidad de longitud del cable se denota w . En este estado de carga, para determinar la tensión en cualquier punto del cable y ecuación matemática de la curva que define la forma que adquiere, se toma un sistema de referencia cartesiano con origen a una distancia c debajo del punto del cable con tangente horizontal. Se define así mismo la variable s que mide la longitud de cable desde una referencia en su punto más bajo.

Como en el caso anterior, se va a analizar el equilibrio de un tramo de cable comprendido entre el punto con tangente horizontal y un punto de coordenadas genéricas (x, y) , por tanto, de longitud genérica s . Por lo tanto, la fuerza puntual equivalente a la carga distribuida (el peso propio del tramo de cable) es $w \cdot s$. La tensión en el punto más bajo se denota T_0 . La diferencia fundamental con el cable parabólico es que aquí el peso expresado como fuerza puntual no tiene una línea de acción conocida, ya que como aún no se ha determinado la forma del cable no se conoce la posición del centro de gravedad del tramo.

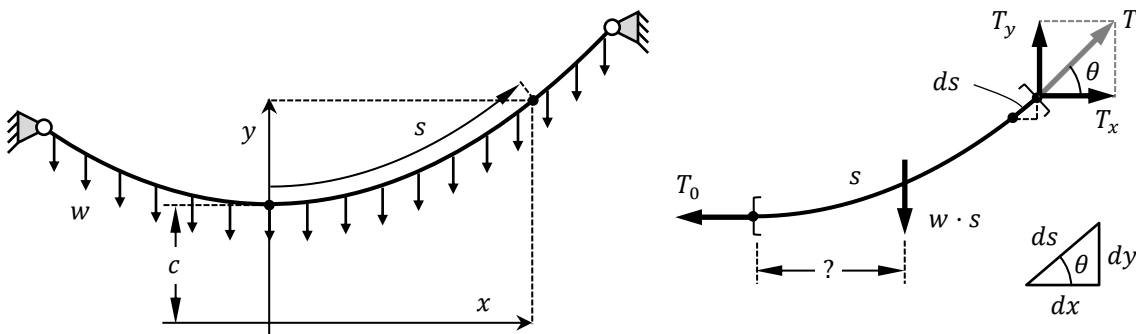


Fig. 5.6 Cable sometido a su peso propio

La altura c , se denomina *parámetro de la catenaria* y se define de tal manera que:

$$T_0 = w \cdot c$$

Haciendo esto:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow T_x = T_0 = w \cdot c & T &= \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \sqrt{(w \cdot c)^2 + (w \cdot s)^2} = w\sqrt{c^2 + s^2} \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow T_y = w \cdot s \end{aligned}$$

Para encontrar la relación entre las variables x , y y s , se considera un diferencial de longitud de cable, ds , adyacente al extremo superior del tramo y por lo tanto alineado con T .

- En primer lugar se plantea:

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \frac{T_x}{T} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2 \frac{c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} \rightarrow dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Integrando esta expresión diferencial entre los límites correspondientes (para $x = 0 \rightarrow s = 0$):

$$\int_0^x dx = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} \xrightarrow{\text{senh } 0=0} x = c \cdot \text{arc senh} \frac{s}{c} \rightarrow \text{senh} \frac{x}{c} = \frac{s}{c} \rightarrow s = c \cdot \text{senh} \frac{x}{c}$$

- Análogamente, a continuación se tiene:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{T_x} = \frac{s}{c} = \sinh \frac{x}{c} \rightarrow dy = \sinh \frac{x}{c} \cdot dx$$

Integrando esta expresión diferencial entre los límites correspondientes (para $x = 0 \rightarrow y = c$):

$$\int_c^y dy = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} \cdot dx \xrightarrow{\cosh 0=1} y - c = c \cdot \cosh \frac{x}{c} - c \rightarrow y = c \cdot \cosh \frac{x}{c}$$

Que constituye la denominada ecuación de la catenaria.

Como por las propiedades de las funciones hiperbólicas se cumple que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, se deduce:

$$y^2 - s^2 = c^2 \rightarrow c^2 + s^2 = y^2$$

Llevando este resultado a la expresión de la resultante de tensión se concluye:

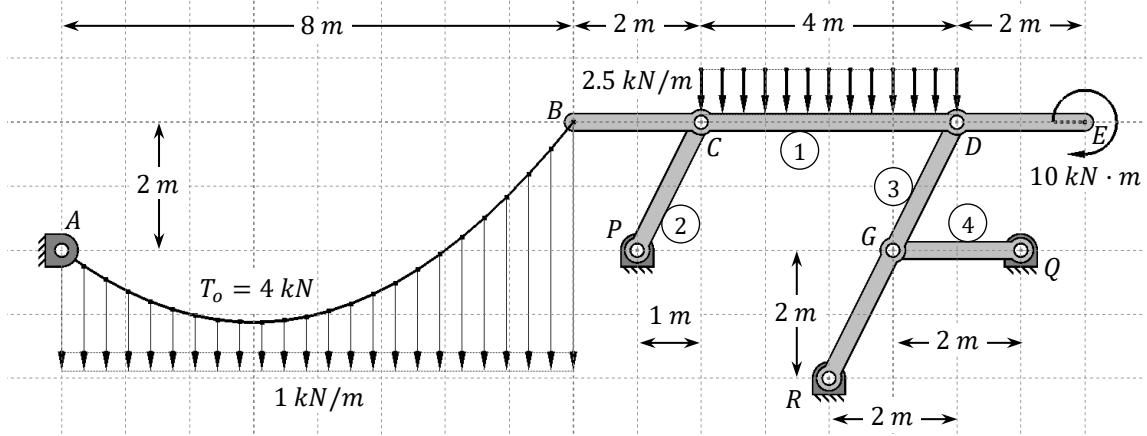
$$T = w \cdot y$$

Se comprueba cómo efectivamente para $x = 0 \rightarrow y = c \rightarrow T = w \cdot c = T_0$

Problemas de Examen

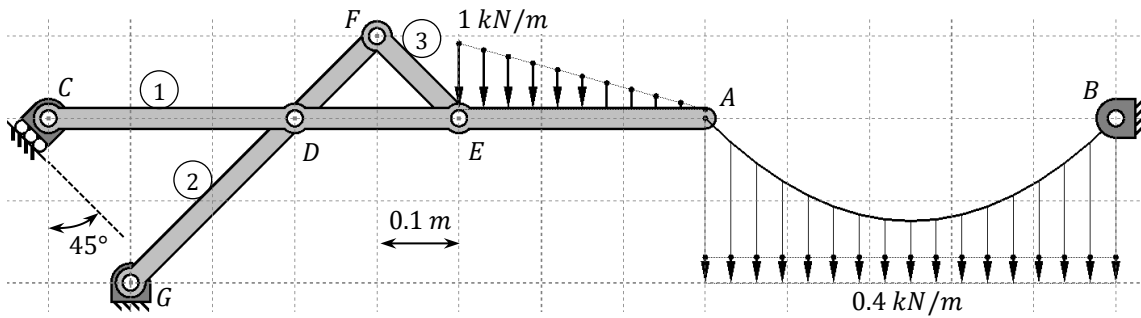
▪ **Problema 5.1 mayo 2015**

- a) Dibujar el diagrama de sólido libre resuelto del cable y acotar la posición del punto más bajo. [0.5 puntos]
- b) Dibujar el diagrama de sólido libre resuelto de cada elemento de la estructura. [1 punto]



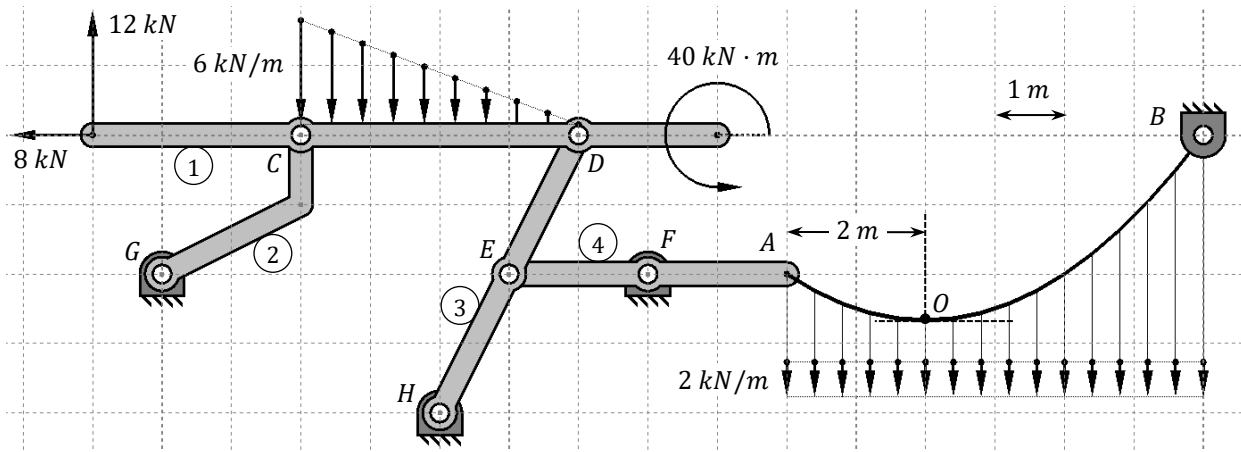
▪ **Problema 5.2 junio 2018**

- a) Sabiendo que el cable llega al anclaje B con un ángulo de 45°, calcular la flecha del cable. [0.4 puntos]
- b) Dibujar el diagrama de sólido libre resuelto de cada elemento. [0.8 puntos]



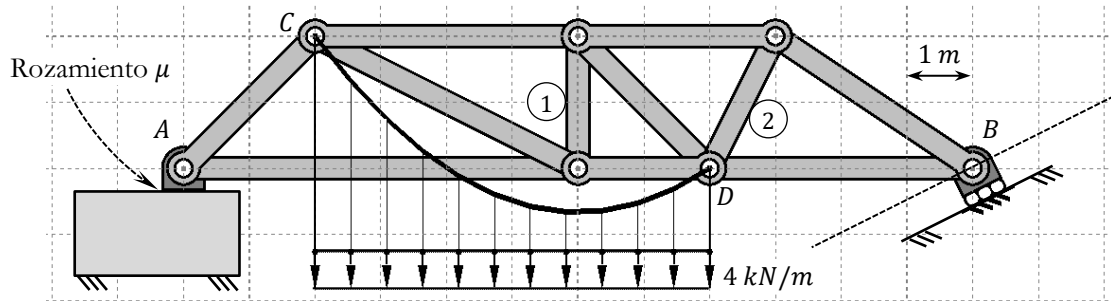
▪ **Problema 5.3 junio 2019**

- a) Resolver las fuerzas en los anclajes del cable y obtener la posición vertical del punto más bajo. [0.4 puntos]
- b) Representar los diagramas de sólido libre resueltos de cada uno de los elementos. [0.8 puntos]



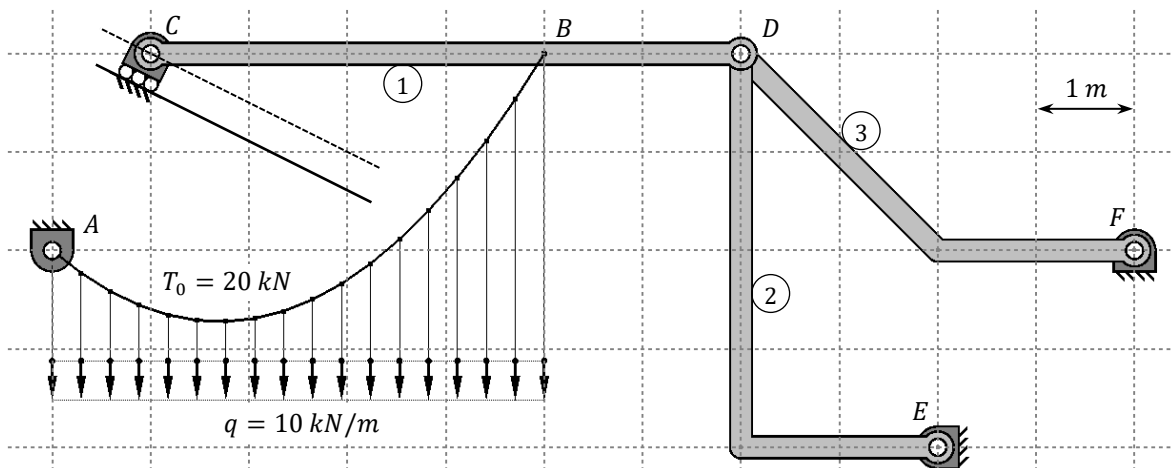
▪ **Problema 5.4** *enero 2019* **40 minutos**

- Sabiendo que el punto más bajo del cable se encuentra alineado con la barra 1, calcular las fuerzas en los anclajes C y D y la posición vertical de dicho punto. [0.5 puntos]
- Calcular el valor del coeficiente de rozamiento mínimo en A para que dicho apoyo no deslice. [0.5 puntos]
- Calcular las fuerzas en las barras 1 y 2. [0.5 puntos]



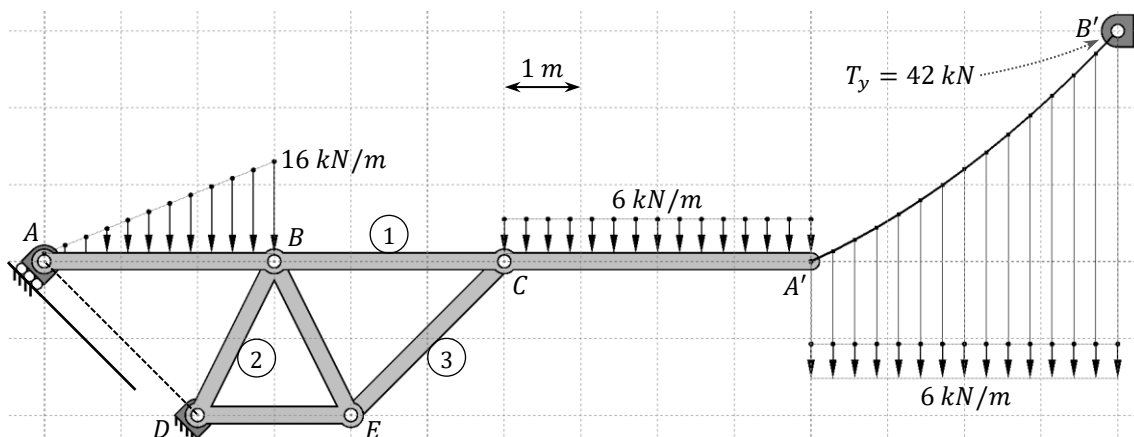
▪ **Problema 5.5** *enero 2022* **45 minutos**

- Representar el diagrama de sólido libre resuelto del cable, acotando la posición del punto más bajo. [0.8 puntos]
- Representar los diagramas de sólido libre resueltos de cada elemento de la estructura. [1.6 puntos]



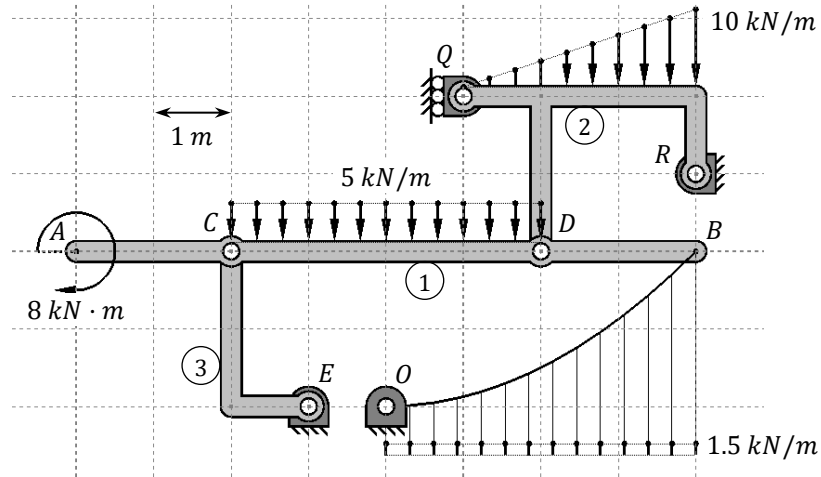
▪ **Problema 5.6** *mayo 2022*

- Representar el diagrama de sólido libre resuelto del cable, acotando la posición del punto de la parábola con tangente horizontal. La componente vertical de la tensión en el anclaje B' es 42 kN. [0.4 puntos]
- Representar los diagramas de sólido libre resueltos de cada elemento de la estructura. [0.8 puntos]



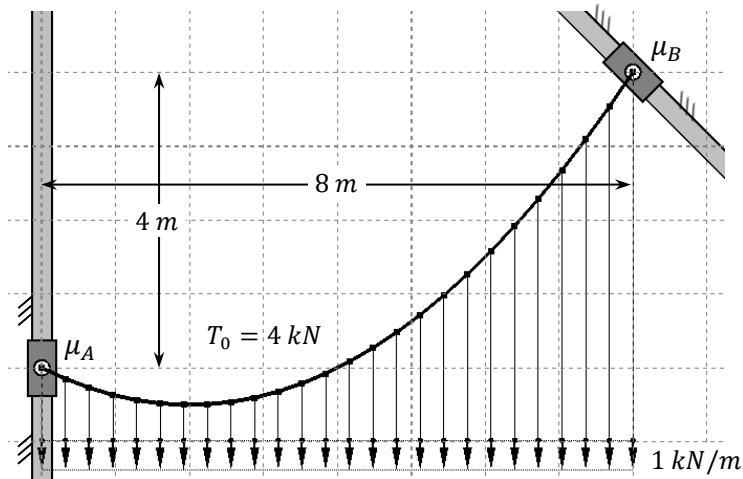
▪ **Problema 5.7** mayo 2016

- a) Dibujar el diagrama de sólido libre resuelto del cable OB , sabiendo que en el anclaje O la tangente es horizontal. [0.5 puntos]
- b) Dibujar el diagrama de sólido libre resuelto de cada elemento de la estructura y comprobar que los resultados son correctos. [1 punto]



▪ **Problema 5.8** enero 2020 40 minutos

- a) Calcular las fuerzas en los anclajes del cable y determinar la posición de su punto más bajo. [0.6 puntos]
- b) Calcular los coeficientes de rozamiento mínimos en las deslizaderas A y B para que éstas se mantengan estáticas. [0.6 puntos]



6. CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

6.1 CINEMÁTICA DEL PUNTO

6.1.1 Posición

La posición de un punto en un sistema de referencia se define matemáticamente mediante un *vector de posición*, \vec{r} . Se trata de un vector con origen en el propio origen del sistema de referencia que tiene por componentes las coordenadas del punto. Cuando un punto se mueve, su posición varía en el tiempo, es decir, su vector de posición cambia. La curva que describe se denomina *trayectoria*.

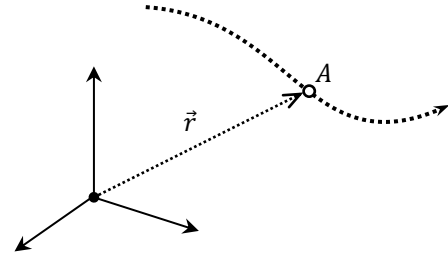


Fig. 6. 1 Vector de posición

6.1.2 Velocidad

La *velocidad* de un punto mide cómo cambia la posición con el tiempo. Es por tanto una magnitud vectorial que se calcula derivando el vector de posición respecto del tiempo:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}}}$$

Para comprender mejor el sentido físico de esta magnitud se estudian dos posiciones infinitamente cercanas, separadas entre sí tan sólo un diferencial de tiempo.

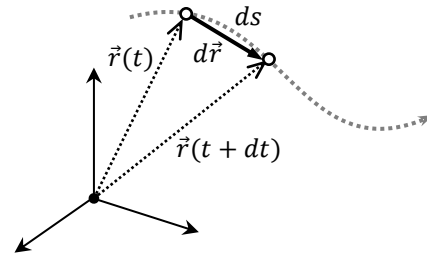


Fig. 6. 2 Posiciones consecutivas

$d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$ representa lo que ha variado \vec{r} en un tiempo dt . Así mismo, ds representa la distancia que ha recorrido el punto en dt y se mide sobre la trayectoria. Una derivada se puede tratar como un cociente de diferenciales:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Donde $ds/dt = \dot{s}$ expresa la distancia recorrida por unidad de tiempo, por lo tanto su valor indica cómo de rápido se mueve el punto. Entre dos puntos infinitamente próximos de una curva el arco se confunde con la cuerda y por lo tanto $ds = dr$ (módulo de $d\vec{r}$). Por lo tanto, ya que cualquier vector dividido entre su módulo es su vector unitario:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \vec{u}_{dr} = \vec{u}_T$$

Donde \vec{u}_{dr} es un vector de módulo la unidad en la dirección y sentido de $d\vec{r}$. Como $d\vec{r}$ se define entre dos puntos infinitamente cercanos de la trayectoria \vec{u}_{dr} es en realidad tangente a dicha curva y su sentido es el del propio movimiento del punto, por lo que se renombra como \vec{u}_T , denominado *vector unitario tangente* a la trayectoria.

Por lo tanto: $\boxed{\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{u}_T}$

Obviamente, como cualquier vector puede expresarse como el producto de su módulo por su vector unitario, $\vec{s} = v \cdot \vec{u}_T$. Con lo que finalmente se llega a la conclusión a que la velocidad de un punto es un vector con las siguientes características:

- *Módulo*: Expresa cómo de rápido se mueve el punto.
- *Dirección*: Siempre tangente a la trayectoria que describe el punto.
- *Sentido*: El del propio movimiento.

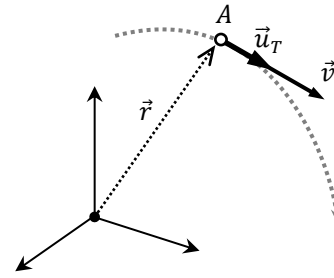


Fig. 6.3 Velocidad

6.1.3 Aceleración

La *aceleración* de un punto mide la variación de su velocidad en el tiempo. Por lo tanto se trata de una magnitud vectorial definida como la derivada temporal del vector velocidad. Para comprender completamente su significado, como el vector velocidad puede cambiar en módulo y en dirección:

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d(v \cdot \vec{u}_T)}{dt} = \dot{v} \cdot \vec{u}_T + v \cdot \frac{d\vec{u}_T}{dt}}$$

Donde \dot{v} representa la variación del módulo de la velocidad en el tiempo, es decir, indica si el punto se mueve cada vez más rápido o más despacio.

Para averiguar el significado de $d\vec{u}_T/dt$ es necesario introducir el concepto de *radio de curvatura* de la trayectoria, ρ . Para ello, considérense dos posiciones del punto en movimiento infinitamente cercanas, separadas entre sí por un tiempo dt .

Cada posición tiene una tangente a la trayectoria. Las dos rectas normales a dichas tangentes se cortan en un punto C que constituye el *centro de curvatura* de la trayectoria. Tanto las dos rectas tangentes como las dos normales forman entre sí un ángulo $d\theta$. El tramo de trayectoria entre ambas posiciones, ds , puede aproximarse como un arco de circunferencia de centro C y radio ρ , es decir, $ds = \rho \cdot d\theta$, o también $d\theta = ds/\rho$.

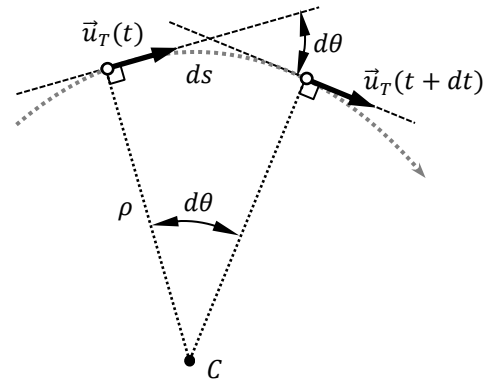


Fig. 6.4 Curvatura de la trayectoria

Llevando los dos vectores unitarios tangentes hasta un origen común, la diferencia entre ellos será lo que ha variado \vec{u}_T en el intervalo de tiempo dt , es decir, $d\vec{u}_T$. Trazando, con centro en dicho origen, un arco circular entre los dos extremos (obviamente, de radio unidad), la longitud de dicho arco será $1 \cdot d\theta$.

Como en realidad las dos posiciones están infinitamente próximas:

- El arco se confunde con la cuerda, es decir, $du_T = 1 \cdot d\theta$ (módulo de $d\vec{u}_T$).
- $d\vec{u}_T$ es tangente al arco y por lo tanto es perpendicular a \vec{u}_T . Además, tal y como se observa, su sentido es hacia C .

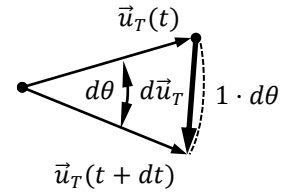


Fig. 6. 5 Construcción auxiliar

Se define \vec{u}_N como el *vector unitario normal* a la trayectoria, perpendicular a \vec{u}_T y con sentido hacia el centro de curvatura de la misma. \vec{u}_N es por tanto el vector director de $d\vec{u}_T$, por lo que se concluye:

$$d\vec{u}_T = d\theta \cdot \vec{u}_N = \frac{ds}{\rho} \vec{u}_N$$

Ahora, tratando $d\vec{u}_T/dt$ como un cociente de diferenciales y recordando que $ds/dt = v$:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{ds/\rho \cdot \vec{u}_N}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt} \vec{u}_N = \frac{v}{\rho} \vec{u}_N$$

Por tanto:

$$\vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{u}_T + v \frac{v}{\rho} \vec{u}_N = \dot{v} \cdot \vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

La aceleración de un punto puede descomponerse en las direcciones tangente y perpendicular a la trayectoria, dando lugar a lo que se conoce como las dos *componentes intrínsecas* de la aceleración. Cada una de ellas tiene una interpretación (o proporciona una información) diferente:

- Aceleración tangencial: $\boxed{\vec{a}_T = \dot{v} \cdot \vec{u}_T}$
 - *Módulo:* Mide el cambio en el módulo del vector velocidad. Si v es constante, aunque \vec{v} cambie de dirección, $\dot{v} = 0$ y por tanto $\vec{a}_T = \vec{0}$.
 - *Dirección:* Tangente a la trayectoria, como la velocidad.
 - *Sentido:* Si en ese instante el punto está ganando velocidad, tiene el mismo sentido que el movimiento y por tanto que la velocidad, sin embargo, si el punto está frenando tiene sentido opuesto al movimiento y por tanto es opuesta a la velocidad.
- Aceleración normal: $\boxed{\vec{a}_N = v^2/\rho \cdot \vec{u}_N}$
 - *Módulo:* Mide el cambio en la dirección del vector velocidad. Si la dirección de la velocidad es constante, es decir, si la trayectoria es una línea recta ($\rho = \infty$), aunque v cambie de valor, $v^2/\rho = 0$ y por tanto $\vec{a}_N = \vec{0}$. Del mismo modo, aunque el módulo de la velocidad fuera constante, si el punto describe una trayectoria curva ($\rho \neq \infty$) como \vec{v} cambia de dirección, el vector no se mantiene constante en el tiempo y el punto tendría aceleración, normal.
 - *Dirección:* Perpendicular la trayectoria y por tanto a la velocidad.
 - *Sentido:* Siempre hacia el centro de curvatura de la trayectoria, independientemente del sentido del movimiento.

6.2 MOVIMIENTOS ELEMENTALES

6.2.1 Traslación pura

Se dice que un sólido tiene un movimiento de traslación pura cuando no cambia de orientación en el tiempo, es decir, cuando se mueve siempre paralelamente a sí mismo, ya sea en línea recta o siguiendo una trayectoria curvilínea. Si se toman dos puntos A y B de dicho sólido y se traza el vector \overline{AB} , éste permanece constante en módulo (por formar los dos puntos parte de un mismo sólido rígido, la distancia entre ellos nunca cambia), pero también en dirección y sentido, es decir, $\overline{AB} = c\vec{t}\vec{e}$ y su derivada respecto de tiempo es por tanto el vector nulo.

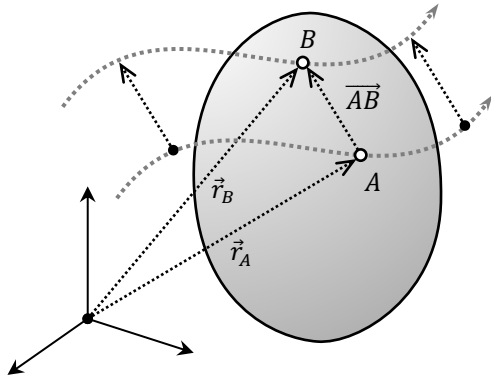


Fig. 6. 6 Traslación pura

De la figura se deduce que $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}$

Derivando la relación entre los vectores de posición de A y B respecto del tiempo:

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\overline{AB}} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A}$$

Y derivando una segunda vez:

$$\dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A \rightarrow \boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A}$$

En conclusión, se deduce que en un movimiento de traslación pura todos los puntos del sólido poseen la misma velocidad y la misma aceleración.

6.2.2 Rotación pura o con eje fijo

Un sólido tiene un movimiento de rotación pura cuando gira alrededor de un eje fijo. Puesto que el sólido gira, cambia de orientación y la manera de definir matemáticamente cómo de rápido gira es mediante un parámetro denominado *velocidad angular*, ω , que exprese el ángulo girado por unidad de tiempo. Si se define θ como el ángulo que gira el sólido en torno a su eje:

$$\boxed{\omega = \dot{\theta}}$$

En esta situación, todos los puntos del sólido describen trayectorias circulares. El radio de curvatura de la trayectoria de un punto es el radio de la circunferencia descrita, R (que es la distancia del punto al eje de giro), y por tanto constante.

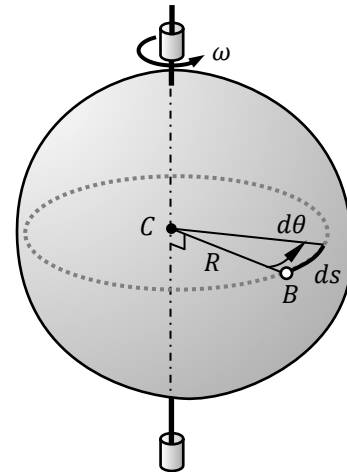


Fig. 6. 7 Rotación pura

Obsérvese que $ds = R \cdot d\theta$, por lo que el módulo de la velocidad de un punto B cualquiera se puede expresar: $v_B = ds/dt = R \cdot d\theta/dt = \omega R$.

Obviamente, \vec{v}_B es tangente a la circunferencia (perpendicular al radio que une B con C) y en el sentido del giro.

Toda la información del vector velocidad, módulo, dirección y sentido, puede obtenerse mediante una única operación. Para ello, es necesario definir un sistema de referencia con origen en un punto A cualquiera del eje de rotación.

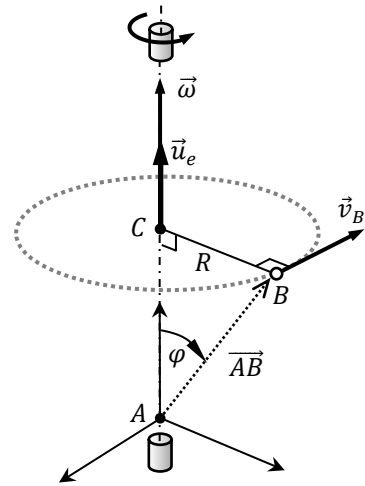


Fig. 6. 8 Velocidad en rotación pura

A continuación, se define la velocidad angular como una magnitud vectorial:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_e$$

Siendo \vec{u}_e el vector unitario en la dirección del eje de giro cuyo sentido se corresponde con el del propio giro de acuerdo a la regla de la mano derecha. De esta manera:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

Obsérvese cómo, efectivamente, el resultado de este producto vectorial tiene:

- *Módulo:* $\omega \cdot AB \cdot \sin \varphi = \omega R$. Obviamente, este valor es independiente de la posición del punto A sobre el eje, puesto que siempre $AB \cdot \sin \varphi = R$.
- *Dirección:* Perpendicular al plano formado por $\vec{\omega}$ y \vec{AB} , es decir al plano ABC y por tanto tangente a la circunferencia que describe el punto.
- *Sentido:* El del paso de $\vec{\omega}$ a \vec{AB} de acuerdo a la regla de la mano derecha. Concuerda con el sentido del movimiento.

Cuando el giro no se produce a velocidad angular constante, el sólido posee *aceleración angular*, α :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Cuando el sólido gira cada vez más rápido α va en el mismo sentido que ω , pero si el sólido está frenando en su giro α es opuesta a ω . La aceleración angular también se expresa vectorialmente, como un vector en la dirección del eje de giro:

$$\vec{\alpha} = \alpha \cdot \vec{u}_e$$

La aceleración de cualquier punto puede obtenerse como $\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{AB}}$

Como \vec{u}_e no varía a lo largo el tiempo (es unitario y tiene la dirección del eje de giro, que es fijo):

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d(\omega \cdot \vec{u}_e)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_e = \alpha \cdot \vec{u}_e = \vec{\alpha}$$

Como \overline{AB} es el vector de posición del punto B , entonces $\dot{\overline{AB}} = \vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$.

Por lo que finalmente se llega a la expresión:

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overline{AB} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_B = \vec{\alpha} \wedge \overline{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AB}) = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Donde se pueden identificar las dos componentes intrínsecas de la aceleración:

- *Aceleración tangencial:* $\boxed{\vec{a}_T = \vec{\alpha} \wedge \overline{AB}}$
 - *Módulo:* $\alpha_T = \alpha \cdot AB \cdot \sin \varphi = \alpha R$
 - *Dirección:* La misma que la velocidad, tangente a la trayectoria.
 - *Sentido:* El que determine el sentido de α de acuerdo a la regla de la mano derecha. Si el sólido gira cada vez más deprisa, el sentido será el mismo que el de la velocidad del punto, y si está frenando el opuesto.
- *Aceleración normal:* $\boxed{\vec{a}_N = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AB})}$
 - *Módulo:* $\alpha_N = \omega \cdot v_B \cdot 1 = \omega \cdot \omega R = \omega^2 R$, puesto que $\vec{\omega}$ y \vec{v}_B son perpendiculares. Obviamente, este resultado concuerda con la expresión general de la aceleración normal $a_N = v^2/\rho = (\omega R)^2/R = \omega^2 R$.
 - *Dirección y sentido:* Siempre hacia el centro de curvatura, punto C , independientemente de los sentidos de ω y α .

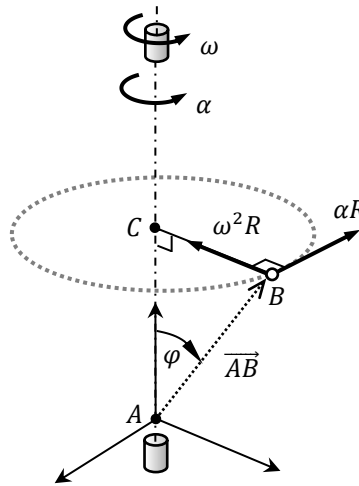


Fig. 6. 9 Componentes de la aceleración en rotación pura

6.3 MOVIMIENTO GENERAL

6.3.1 Significado de la velocidad angular y la aceleración angular

Los conceptos de velocidad angular y aceleración angular se han presentado para describir el movimiento de rotación pura, alrededor de un eje fijo. Sin embargo, tanto este tipo de movimiento, como el de traslación pura, son casos particulares del movimiento general que un sólido puede tener.

En una situación de movimiento general, el sólido se mueve cambiando de orientación, pero el eje en torno al cual gira puede ir, a su vez, cambiando su orientación a lo largo del tiempo. Por lo tanto, $\vec{\omega}$, que es un vector definido siempre en la dirección del eje de giro (y en el sentido del propio giro), ya no tiene dirección constante. En esta situación sigue siendo válida la expresión $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_e$, donde ω determina cómo de rápido es el giro del sólido, pero ese eje de giro ya no es fijo, sino instantáneo, es decir, en un instante dado es uno concreto, pero \vec{u}_e cambia de posición en el tiempo.

Como se ha visto, en una situación en la que el eje de rotación no cambia de orientación, $\vec{\alpha}$ también posee la dirección de dicho eje y por tanto es paralelo a $\vec{\omega}$. Sin embargo, en una situación general, en la que $\vec{\omega}$ puede cambiar tanto en módulo como en dirección, $\vec{\alpha}$ se desalinea respecto al eje de giro. En efecto:

$$\boxed{\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}} = \frac{d(\omega \cdot \vec{u}_e)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{u}_e + \omega \cdot \frac{d\vec{u}_e}{dt}$$

El primer término es un vector paralelo a $\vec{\omega}$ que expresa cómo está cambiando su módulo, es decir, si el sólido está girando cada vez a mayor o menor velocidad angular. (Sería el equivalente a la aceleración tangencial de un punto, que es paralela a su velocidad y que expresa cómo cambia el módulo de la misma en el tiempo)

El segundo término es un vector que indica si $\vec{\omega}$ está cambiando de dirección. Obviamente es nulo si el eje de giro mantiene su orientación constante. Tiene la dirección de $d\vec{u}_e/dt$. Como \vec{u}_e es un vector unitario tiene módulo constante. Además $\vec{u}_e \cdot \vec{u}_e = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$ independiente del tiempo. Derivando esta expresión:

$$\frac{d(\vec{u}_e \cdot \vec{u}_e)}{dt} = 0 = 2 \cdot \vec{u}_e \cdot \frac{d\vec{u}_e}{dt}$$

Como \vec{u}_e no es nulo, en el caso general en el que $d\vec{u}_e/dt \neq \vec{0}$ (es decir, cuando la dirección de \vec{u}_e no es fija), para que producto escalar entre ambos vectores sea cero han de ser necesariamente perpendiculares entre sí. Por lo tanto, el segundo sumando de $\vec{\alpha}$, de existir, es perpendicular a $\vec{\omega}$, haciendo que $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ pierdan su paralelismo. (Sería el equivalente a la aceleración normal de un punto, que es perpendicular a su velocidad y que expresa cómo cambia la dirección de la misma en el tiempo)

Nota: La deducción de que la derivada temporal de un vector unitario que cambia de dirección es perpendicular al dicho vector es general y, de hecho, ya se ha presentado este resultado anteriormente al analizar la derivada del vector unitario tangente a la trayectoria, \vec{u}_T .

6.3.2 Ley de derivación en bases móviles

A lo largo de los desarrollos anteriores se han definido múltiples conceptos basados en la derivación temporal de vectores: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$, etc., es decir, basados en la determinación de cómo se ven cambiar ciertas magnitudes vectoriales a lo largo del tiempo.

A la hora de expresar la derivada de cualquier magnitud vectorial relacionada con el movimiento, es imprescindible especificar cuál es el sistema de referencia desde el que se observa dicho movimiento. Así por ejemplo, la trayectoria de la Luna, aunque su movimiento sea único, es completamente diferente para un observador situado en la Tierra y para otro situado en el Sol. Las derivadas de la posición (es decir, las mediciones de la velocidad) hechas desde ambos sistemas de referencia son por tanto diferentes. Sin embargo, existe una relación matemática entre las derivadas temporales de una misma magnitud vectorial realizadas desde referencias distintas, conocida como *ley de derivación en bases móviles*, o *Ley de Bourne*.

Supóngase un sistema de referencia fijo y otro móvil. Desde el sistema fijo se observa moverse al sistema móvil, como si fuera un sólido rígido, que está animado de un movimiento general. Además de que su origen describa una trayectoria, como los ejes también cambian de orientación, el sistema móvil tiene una velocidad angular.

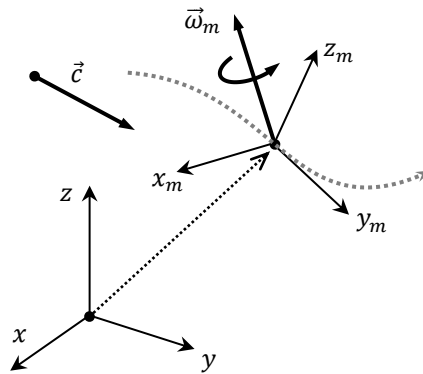


Fig. 6. 10 Sistemas de referencia fijo y móvil

Pues bien, sean:

- \vec{c} una magnitud vectorial cualquiera.
- $\dot{\vec{c}}$ la derivada temporal que haría un observador situado en el sistema de referencia fijo.
- $\dot{\vec{c}}|_m$ la derivada temporal que haría un observador situado en el sistema de referencia móvil.
- $\vec{\omega}_m$ la velocidad angular del sistema de referencia móvil, vista desde el sistema fijo.

Se puede demostrar que se siempre se verifica la relación:

$$\dot{\vec{c}} = \dot{\vec{c}}|_m + \vec{\omega}_m \wedge \vec{c}$$

La derivada de un vector respecto del tiempo en un sistema fijo es igual a la derivada que de ese mismo vector se haría desde un sistema de referencia en movimiento más el producto vectorial entre la velocidad angular de dicho sistema móvil y el vector que se está derivando.

6.3.3 Campos de velocidades y aceleraciones

Sean A y B dos puntos de un mismo sólido animado de movimiento general. Se sitúa, con origen en A , un sistema de referencia que se mueve con el sólido (solidario o soldado a él), es decir, que la velocidad angular del sistema móvil es la misma que la del sólido, $\vec{\omega}_m \equiv \vec{\omega}$.

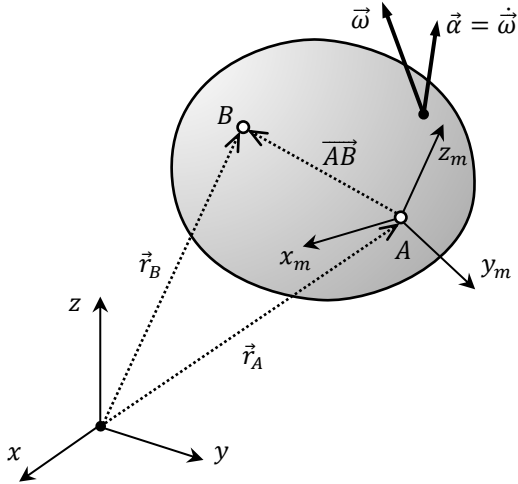


Fig. 6. 11 Movimiento general

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}$$

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\overline{AB}}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \dot{\overline{AB}}$$

No es trivial determinar qué representa $\dot{\overline{AB}}$, pero se sabe que:

$$\dot{\overline{AB}} = \dot{\overline{AB}}\Big|_m + \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$$

Y sí es trivial determinar que $\dot{\overline{AB}}\Big|_m = \vec{0}$, puesto que al ser rígido el sólido, para un observador situado sobre el propio sólido, \overline{AB} es constante en módulo y dirección.

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AB}}$$

Esta ecuación relaciona las velocidades de dos puntos cualesquiera de un mismo sólido y se denomina *campo de velocidades* del sólido.

Derivando respecto del tiempo el campo de velocidades y recordando que $\dot{\overline{AB}} = \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$:

$$\dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{AB} + \vec{\omega} \wedge \dot{\overline{AB}}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AB})}$$

Esta ecuación relaciona las aceleraciones de dos puntos cualesquiera de un mismo sólido y se denomina *campo de aceleraciones* del sólido.

6.4 MOVIMIENTO RELATIVO

6.4.1 Movimiento de un punto respecto de un sólido

Supóngase un punto B y un sólido m , ambos moviéndose de manera independiente respecto de un sistema fijo. Si en un punto A del sólido se posiciona un sistema de referencia que se mueva solidariamente con éste, podrá definirse también el movimiento del punto B respecto del dicho sistema móvil. \vec{r}_B es el vector de posición de B en el sistema de referencia fijo y \overline{AB} es el vector de posición de dicho punto en el sistema móvil.

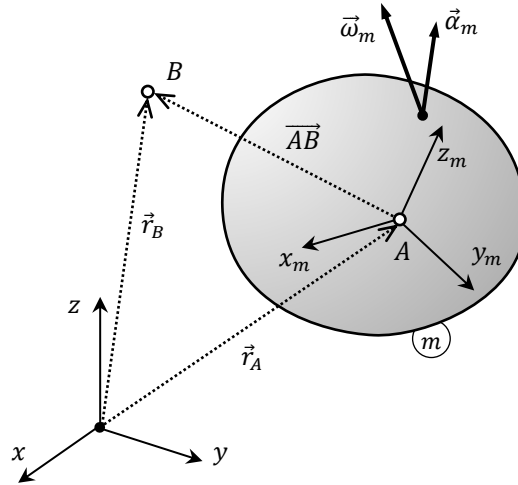


Fig. 6.12 Movimiento de punto respecto a sólido

Obviamente, se satisfacen las relaciones: $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \rightarrow \dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\overline{AB}} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \dot{\overline{AB}}$

Donde:

$$\dot{\overline{AB}} = \left. \dot{\overline{AB}} \right|_m + \vec{\omega}_m \wedge \overline{AB}$$

Pero ahora, puesto que B se mueve respecto del sólido, $\left. \dot{\overline{AB}} \right|_m = \vec{v}_{B/m}$ ya no es nulo, y como es la derivada temporal del vector de posición del punto en el sistema móvil, realizada desde el propio sistema móvil, representa en realidad la velocidad con la que un observador situado en el sólido vería moverse al punto, es decir la *velocidad relativa* al sólido m . La velocidad del punto medida desde el sistema de referencia fijo, $\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B$, se denomina *velocidad absoluta*. Se tiene, por tanto:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_m \wedge \overline{AB} + \vec{v}_{B/m}$$

Obsérvese que $\vec{v}_A + \vec{\omega}_m \wedge \overline{AB} = \vec{v}_{B_m}$ es la velocidad que habría tenido B si hubiese sido un punto del sólido m . Esta componente se denomina *velocidad de arrastre* con el sólido m . De manera que se concluye que cuando un punto se mueve respecto de un sólido, su velocidad absoluta es la suma de dos velocidades:

- Velocidad de arrastre con el sólido: Es la que tendría si el punto perteneciera al sólido. Puede obtenerse por tanto mediante la ecuación del campo de velocidades del sólido.
- Velocidad relativa al sólido: Es la que mediría un observador ubicado en el sólido.

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_{B_m} + \vec{v}_{B/m}}$$

Derivando de nuevo:
$$\dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}}_m \wedge \overline{AB} + \vec{\omega}_m \wedge \overline{AB} + \dot{\vec{v}}_{B/m}$$

Donde:
$$\overline{AB} = \vec{v}_{B/m} + \vec{\omega}_m \wedge \overline{AB}$$

Y:
$$\dot{\vec{v}}_{B/m} = \dot{\vec{v}}_{B/m}|_m + \vec{\omega}_m \wedge \vec{v}_{B/m}$$

$\dot{\vec{v}}_{B/m}|_m = \vec{a}_{B/m}$ es la derivada temporal de la velocidad relativa al sistema móvil realizada desde el propio sistema móvil, por lo tanto, representa la aceleración del punto que ve un observador ‘montado’ en el sólido, es decir, la denominada *aceleración relativa* al sólido m . La aceleración del punto medida desde el sistema fijo, $\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B$ es la *aceleración absoluta*.

Se tiene por tanto:
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\alpha}}_m \wedge \overline{AB} + \vec{\omega}_m \wedge (\vec{v}_{B/m} + \vec{\omega}_m \wedge \overline{AB}) + \vec{a}_{B/m} + \vec{\omega}_m \wedge \vec{v}_{B/m}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\alpha}}_m \wedge \overline{AB} + \vec{\omega}_m \wedge (\vec{\omega}_m \wedge \overline{AB}) + \vec{a}_{B/m} + 2 \cdot \vec{\omega}_m \wedge \vec{v}_{B/m}$$

Obsérvese que $\vec{a}_A + \dot{\vec{\alpha}}_m \wedge \overline{AB} + \vec{\omega}_m \wedge (\vec{\omega}_m \wedge \overline{AB}) = \vec{a}_{B_m}$ es la aceleración que tendría B si perteneciera al sólido. Este término es lo que se conoce como *aceleración de arrastre* con el sólido m . Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en velocidades, la aceleración absoluta no puede componerse simplemente sumando las aceleraciones de arrastre y relativa, puesto que, como se observa, aparece un tercer término complementario, $2 \cdot \vec{\omega}_m \wedge \vec{v}_{B/m}$, denominado *aceleración de Coriolis*:

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_{B_m} + \vec{a}_{B/m} + 2 \cdot \vec{\omega}_m \wedge \vec{v}_{B/m}}$$

6.4.2 Movimiento de un sólido respecto de otro

Supónganse dos sólidos, 1 y 2, ambos moviéndose de manera independiente respecto de un sistema fijo. En un punto O del sólido 1 se ubica un sistema referencia móvil vinculado a dicho sólido, es decir, $\vec{\omega}_m \equiv \vec{\omega}_1$.

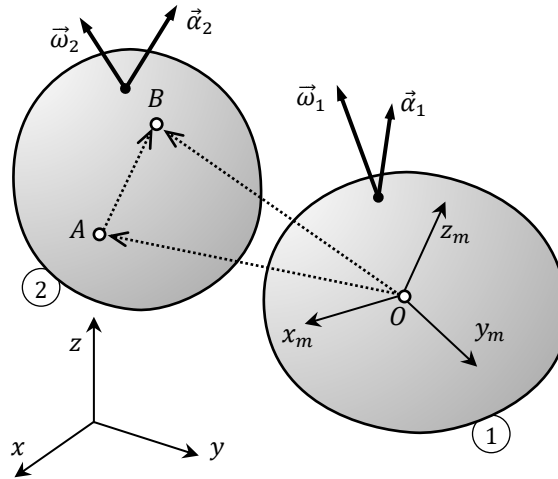


Fig. 6.13 Movimiento de punto respecto a sólido

Como los puntos A y B pertenecen al mismo sólido 2:
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \wedge \overline{AB}$$

Pero se pueden plantear las velocidades de ambos puntos en su movimiento relativo al sólido 1:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{OA} + \vec{v}_{A/1} \quad \text{y} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{OB} + \vec{v}_{B/1}$$

Por lo tanto:
$$\vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{OB} + \vec{v}_{B/1} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{OA} + \vec{v}_{A/1} + \vec{\omega}_2 \wedge \overline{AB}$$

$$\vec{v}_{B/1} = \vec{v}_{A/1} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{OA} - \vec{OB}) + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{AB}$$

Como $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$:

$$\vec{v}_{B/1} = \vec{v}_{A/1} + \vec{\omega}_1 \wedge (-\vec{AB}) + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{v}_{B/1} = \vec{v}_{A/1} + (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \wedge \vec{AB}$$

Esta expresión tiene la estructura propia de un campo de velocidades, sólo que expresada en términos de velocidades relativas en lugar de absolutas:

$$\boxed{\vec{v}_{B/1} = \vec{v}_{A/1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{AB}}$$

Por lo tanto, se deduce claramente la expresión de la *velocidad angular relativa* al sólido 1, es decir la velocidad angular con la que un observador situado en el sólido 1 vería girar al sólido 2, es decir:

Entonces:

$$\vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$$

Y por tanto:

$$\boxed{\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1}}$$

Al igual que sucede con las velocidades lineales de puntos, la velocidad angular absoluta de un sólido puede obtenerse como suma de la velocidad angular de otro sólido (movimiento de arrastre con el sólido 1) y la velocidad angular relativa a éste.

Derivando esta expresión: $\dot{\vec{\omega}}_2 = \dot{\vec{\omega}}_1 + \dot{\vec{\omega}}_{2/1}$

Donde: $\dot{\vec{\omega}}_1 = \vec{\alpha}_1$, $\dot{\vec{\omega}}_2 = \vec{\alpha}_2$ y: $\dot{\vec{\omega}}_{2/1} = \dot{\vec{\omega}}_{2/1}|_m + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1}$

$\dot{\vec{\omega}}_{2/1}|_m = \vec{\alpha}_{2/1}$ es la derivada de la velocidad angular relativa al sistema móvil realizada desde el propio sistema móvil. Se trata por tanto de la *aceleración angular relativa* al sólido 1, es decir, la aceleración angular del sólido 2 'vista' desde el sólido 1.

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1}}$$

Al igual que sucede con las aceleraciones lineales de puntos, la aceleración angular absoluta de un sólido puede obtenerse como suma de la aceleración angular de otro sólido (movimiento de arrastre con el sólido 1), la aceleración angular relativa a éste y un tercer término complementario, denominado *aceleración angular de Resal*.

Teniendo en cuenta que $\vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$, el término de Resal también puede calcularse como:

$$\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} = \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2$$

Finalmente, derivando temporalmente la ecuación del campo de velocidades en relativo, respecto del sistema móvil, se comprueba que también se ha de verificar la ecuación del campo de aceleraciones entre los puntos A y B expresada en términos de movimiento visto desde el sistema de referencia móvil:

$$\dot{\vec{v}}_{B/1}|_m = \dot{\vec{v}}_{A/1}|_m + \dot{\vec{\omega}}_{2/1}|_m \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \dot{\vec{AB}}|_m$$

Como $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$:

$$\dot{\vec{AB}}|_m = \dot{\vec{OB}}|_m - \dot{\vec{OA}}|_m = \vec{v}_{B/1} - \vec{v}_{A/1} = \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{AB}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{a}_{B/1} = \vec{a}_{A/1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge (\vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{AB})}$$

6.5 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

6.5.1 Comprobación del resultado de un producto vectorial

En la ecuación del campo de velocidades entre dos puntos de un sólido aparece un producto vectorial que involucra a la velocidad angular del elemento que los contiene:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$$

Evidentemente, el resultado de ese producto vectorial es un vector perpendicular a $\vec{\omega}$, es decir, está contenido en un plano perpendicular a la dirección de $\vec{\omega}$. Dicho producto vectorial tiene una interpretación física propia, ya que representa la velocidad que tendría B si estuviera girando con esa ω en torno a un eje fijo (en la misma dirección y mismo sentido que la propia $\vec{\omega}$), que pasara por A .

Esta circunstancia hace que, en determinadas condiciones, sea muy sencillo determinar el resultado del producto vectorial a través de un enfoque gráfico-escalar, sin necesidad de realizar la operación vectorial propiamente dicha. En concreto, la situación en la que dicho enfoque alternativo es útil, es cuando el vector velocidad angular está definido en la dirección de uno de los ejes del sistema de referencia, es decir, cuando dicho vector tiene nulas dos de sus tres componentes matemáticas (sólo es distinta de 0 una de las componentes).

Se ilustrará la manera de proceder haciendo uso de uno de los tres casos posibles, aquel en el que, por ejemplo, $\vec{\omega}$ sólo tiene componente z . Lo primero que se puede comprobar es cómo, efectivamente, el resultado del producto vectorial, independientemente de los valores de las componentes de \overline{AB} , es un vector contenido en un plano xy , es decir, perpendicular al eje z (dirección de $\vec{\omega}$):

$$\vec{\omega} \wedge \overline{AB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega b \\ \omega a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es posible, realizar una representación gráfica en la que la dirección de $\vec{\omega}$ se visualice de punta (dirección z en el caso presentado) y el plano perpendicular a la misma, por tanto, en verdadera magnitud (plano xy en el caso presentado). Al hacer esto, se está visualizando, de hecho, el vector $\vec{\omega} \wedge \overline{AB}$ en verdadera magnitud. En esta representación se pierde la visualización de la componente de \overline{AB} en la dirección de $\vec{\omega}$ (c en el caso presentado), pero, como se ha visto, dicha magnitud no afecta al resultado del producto vectorial. Ahora, en esta representación se dibuja ω , centrada en el punto A , y el vector $\vec{\omega} \wedge \overline{AB}$, aplicado en el punto B .

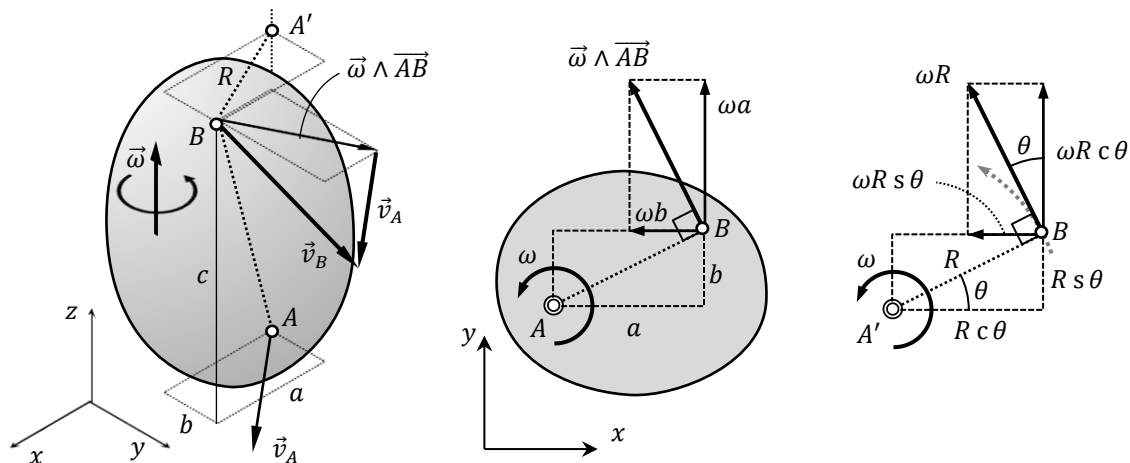


Fig. 6.14 Velocidad angular en un eje puro del sistema de referencia

En primer lugar, es bastante sencillo comprender en esta visualización, que $\vec{\omega} \wedge \overline{AB}$ es perpendicular, no sólo al propio vector \overline{AB} , sino también a la proyección de \overline{AB} sobre el plano perpendicular a $\vec{\omega}$. Como el resultado del producto vectorial es independiente del valor de c , puede sustituirse el valor real de esta componente por un valor nulo sin que cambie el resultado. Hacer eso es equivalente a considerar un punto A' , tal que $z_{A'} = z_B$. En esta situación, el dibujo bidimensional sería idéntico, pero al estar el vector $\overline{A'B}$ contenido en el plano de dibujo, se estaría visualizando en verdadera magnitud. Por definición, $\vec{\omega} \wedge \overline{A'B}$ es perpendicular a $\overline{A'B}$.

Todo esto hace que $\vec{\omega} \wedge \overline{AB}$ se pueda construir gráficamente, realizando sólo operaciones escalares sencillas, imaginando que fuera la velocidad de B en un giro alrededor de A' . En efecto, siendo R y θ las coordenadas polares del vector $\overline{A'B}$:

$$|\vec{\omega} \wedge \overline{AB}| = \sqrt{(-\omega b)^2 + (\omega a)^2 + 0^2} = \omega \sqrt{a^2 + b^2} = \omega R$$

Adviértase que R no es otra cosa que el radio de la circunferencia que describiría B , de centro A' en este movimiento ficticio de rotación pura.

En cualquier caso, recuérdese que para obtener la velocidad real de B , a $\vec{\omega} \wedge \overline{AB}$ ha de sumarse la velocidad de A .

Idéntico procedimiento se puede aplicar a la hora de calcular el término $\vec{\alpha} \wedge \overline{AB}$ de la ecuación del campo de aceleraciones. En este caso, el resultado del producto vectorial coincide con la aceleración tangencial que tendría B , si estuviera girando en torno a un eje fijo, en la dirección de $\vec{\alpha}$, que pasase por A :

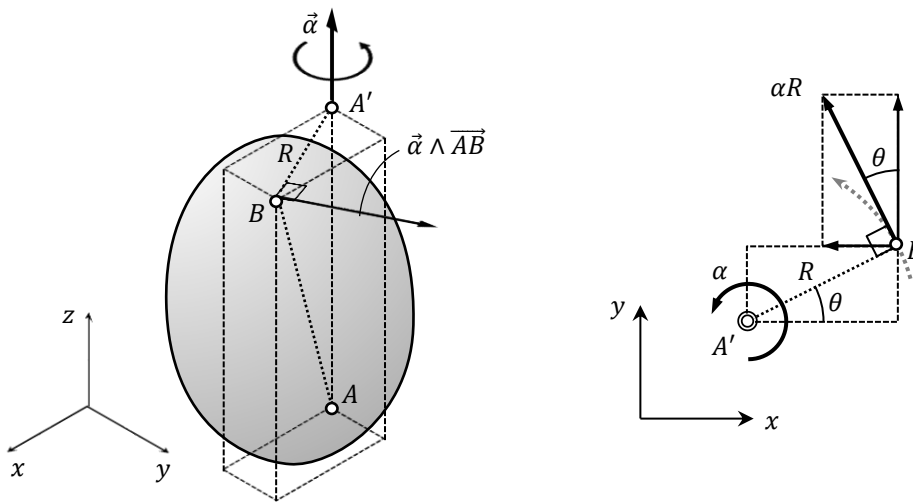


Fig. 6. 15 Aceleración angular en un eje puro del sistema de referencia

Finalmente, el doble producto vectorial $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AB})$ también puede interpretarse físicamente y obtenerse de manera gráfica, con operaciones escalares, cuando el vector $\vec{\omega}$ tiene la dirección de un eje del sistema de referencia. Representa la aceleración normal que tendría B si estuviera girando en torno a un eje definido por la dirección $\vec{\omega}$ que pasara por A , es decir, un vector de módulo $\omega^2 R$ que aplicado en B apunta hacia A' .

6.5.2 Rotación pura de un elemento respecto de otro

Supóngase que se tienen dos elementos, sólido 1 y sólido 2, enlazados de manera que el movimiento relativo entre ellos es tal que el sólido 2 simplemente puede girar en torno a un eje definido en el sólido 1. El sólido 1 tiene su propio movimiento absoluto, pero para poder analizar el movimiento relativo existente, de 2 respecto de 1, es necesario imaginar qué vería un observador montado en el elemento 1, mirando al elemento 2. Para dicho observador, el elemento 1, sobre el que está subido, no se mueve y, por tanto, está fijo. Evidentemente, el eje en torno al cual ve girar al sólido 2 es, para él, un eje fijo. Por lo tanto, el movimiento que ve es una rotación pura en torno a un eje que no cambia de dirección. Como es sabido, en esta situación, además de la velocidad angular, la aceleración angular también tiene la dirección del eje de giro. El eje de giro relativo define, por tanto, la dirección de las magnitudes angulares relativas, $\vec{\omega}_{2/1}$ y $\vec{\alpha}_{2/1}$.

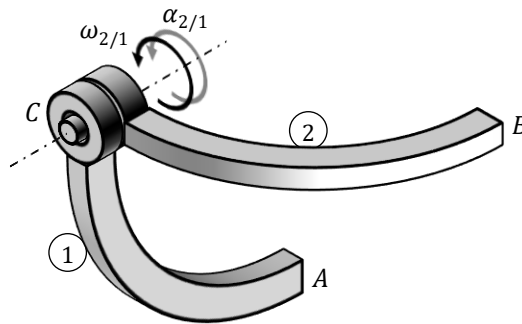


Fig. 6. 16 movimiento relativo de rotación pura

Sea A un punto cualquiera del sólido 1, y B un punto cualquiera en el sólido 2. Existe un punto C , sobre el eje de rotación relativa que puede considerarse indistintamente como perteneciente a ambos elementos. En realidad, existen dos puntos C , uno en cada elemento, un punto C_1 que físicamente pertenece al sólido 1 y un punto C_2 que físicamente pertenece al sólido 2. Lo que sucede, es que estos dos puntos se mueven siempre juntos, es decir, describen la misma trayectoria, las coordenadas de uno son permanentemente las mismas que las del otro. Por tanto, puesto que cambian de posición en el tiempo de la misma manera, ambos tienen también la misma velocidad y aceleración, por lo que es factible considerarlos, a efectos cinemáticos, como un único punto, compartido entre ambos elementos.

Supóngase que fueran conocidas, además de las magnitudes angulares relativas, $\vec{\omega}_{2/1}$ y $\vec{\alpha}_{2/1}$, las magnitudes angulares absolutas del sólido 1, $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\alpha}_1$, así como las magnitudes lineales absolutas del punto A del mismo, \vec{v}_A y \vec{a}_A . Supóngase así mismo, que a partir de dichos datos el objetivo fuera determinar la velocidad y la aceleración del punto B . Se puede abordar este problema aplicando dos estrategias distintas:

- Por movimiento absoluto

Esta técnica consiste en aplicar campos de movimiento absolutos entre dos puntos del mismo sólido, es decir, entre B y otro punto del elemento 2. Evidentemente, el segundo punto ha de ser uno de velocidad y aceleración absolutas conocidas. Así mismo, en este caso, también es necesario determinar la velocidad y aceleración angulares absolutas de dicho sólido.

Como el sólido 1 tiene un punto de velocidad y aceleración conocidas, el punto A , y también son conocidas la velocidad y la aceleración angulares absolutas de dicho elemento, es posible determinar la velocidad y aceleración absolutas de cualquier otro punto del mismo y, por tanto, del punto C :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{AC}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{AC} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overline{AC})$$

A continuación, hay que determinar las magnitudes angulares absolutas del sólido 2. Para ello, aunque este procedimiento esté basado en campos del movimiento absolutos, es necesario aplicar los conceptos de movimiento relativo de sólido respecto a sólido:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1}$$

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

Finalmente, como ahora el sólido 2 ya tiene un punto de velocidad y aceleración conocidas, el punto C , y también son conocidas la velocidad y la aceleración angulares absolutas de dicho elemento, es posible determinar la velocidad y aceleración absolutas de cualquier otro punto del mismo y, por tanto, del punto B :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega}_2 \wedge \overline{CB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{CB} + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \overline{CB})$$

▪ Por movimiento relativo

Esta técnica consiste en aplicar los conceptos de movimiento relativo de punto respecto a sólido, concretamente del punto B respecto del sólido 1. Adviértase que el punto B no pertenece al elemento 1, por lo que no es correcto plantear directamente campos de movimiento absolutos del sólido 1 entre los puntos A (o C) y B . Un observador montado en el sólido 1 vería moverse al punto B .

Los campos de velocidades y aceleraciones absolutos del sólido 1 entre un punto cualquiera de dicho elemento, A o C , y el punto B , en realidad, lo que proporcionan son las correspondientes magnitudes de arrastre con el mismo:

$$\vec{v}_{B_1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{AB} = \vec{v}_C + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{CB}$$

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{AB} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overline{AB}) = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{CB} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overline{CB})$$

Para obtener las magnitudes absolutas, a las anteriores hay que sumarles las correspondientes magnitudes relativas (más el término complementario de Coriolis en el caso de aceleraciones):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B_1} + \vec{v}_{B/1}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B_1} + \vec{a}_{B/1} + 2 \cdot \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{B/1}$$

La velocidad y aceleración relativas se obtienen planteando campos del movimiento del sólido 2, es decir entre dos puntos del sólido 2, pero con todas las magnitudes cinemáticas relativas al elemento 1 (recuérdese que las magnitudes angulares relativas, del sólido 2 respecto del 1, son conocidas). Evidentemente, uno de esos dos puntos ha de ser B , puesto que es el objeto del cálculo, y el otro tiene que ser uno de velocidad y aceleración relativas conocidas. Este segundo punto ha de ser, por tanto, el punto compartido entre ambos sólidos, el punto C , ya que un observador montado en 1 vería que dicho punto permanece inmóvil (velocidad y aceleración relativas nulas). Por tanto:

$$\vec{v}_{B/1} = \vec{v}_{C/1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overline{CB} = \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overline{CB}$$

$$\vec{a}_{B/1} = \vec{a}_{C/1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overline{CB} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge (\vec{\omega}_{2/1} \wedge \overline{CB}) = \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overline{CB} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge (\vec{\omega}_{2/1} \wedge \overline{CB})$$

Estos resultados de velocidad y aceleración relativas son, además, muy fácilmente comprobables a través un enfoque grafico-escalar, debido al hecho de que el movimiento relativo es un movimiento de rotación pura en torno a un eje fijo. Llamando R al radio de la circunferencia que describe en su movimiento relativo el punto B (siendo O el centro de la misma sobre el eje de giro relativo):

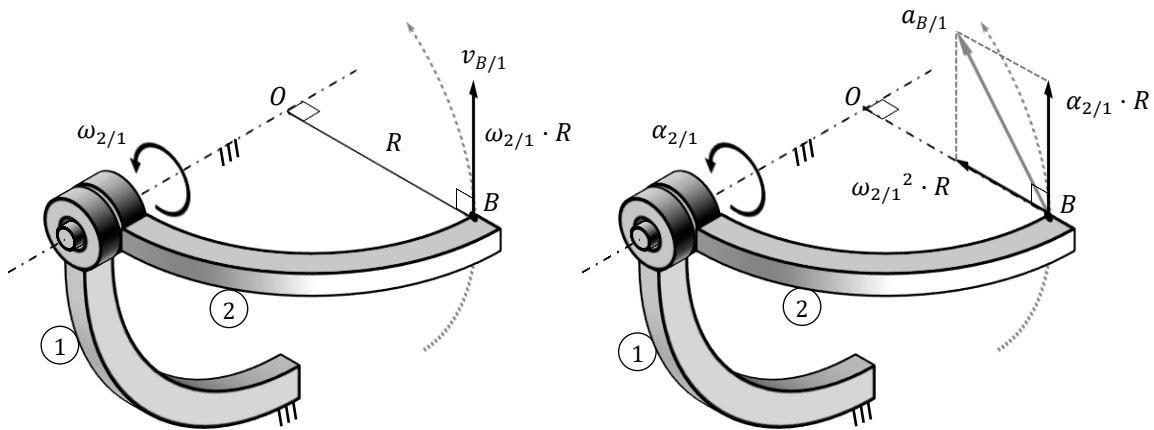


Fig. 6.17 movimiento relativo de rotación pura

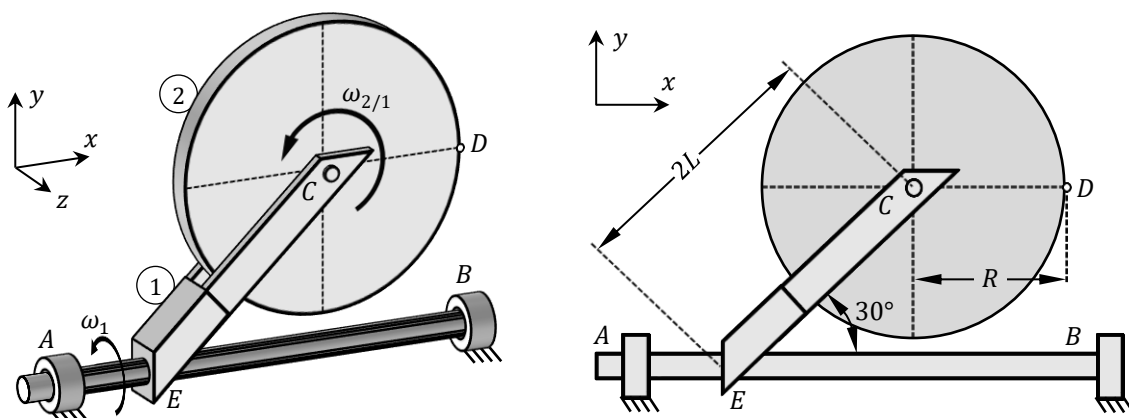
Evidentemente, ambos procedimientos conducen a idéntico resultado. Obsérvese que, en cualquiera de los casos, es necesario haber resuelto por completo el problema de velocidades antes de comenzar a resolver el de aceleraciones. Ésta es una regla general que debe aplicarse en cualquier mecanismo, nunca pueden resolverse las aceleraciones si no se han resuelto previamente las velocidades. Velocidades y aceleraciones no constituyen problemas cinemáticos independientes, que puedan resolverse por separado, si no que siempre deben resolverse en secuencia.

Otra regla general que se cumple en cualquier sistema a analizar es, que la misma estrategia que se haya establecido para resolver velocidades, puede seguirse idénticamente, paso por paso, para plantear la resolución de aceleraciones.

• Ejemplo 6.1

Sabiendo que las dos velocidades angulares indicadas son de valor constante (no hay deslizamiento en E), calcular, en la posición mostrada:

- $\vec{\omega}_2, \vec{v}_C$ y \vec{v}_D .
- $\vec{\alpha}_2, \vec{a}_C$ y \vec{a}_D .

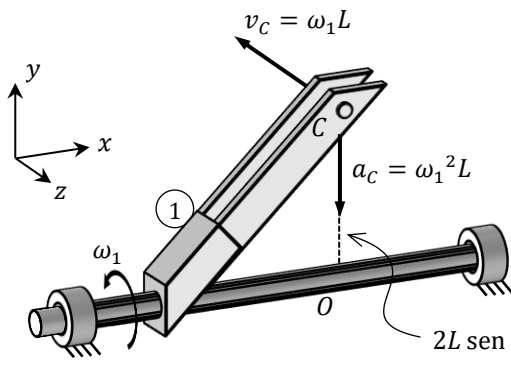


Las magnitudes angulares absolutas del disco se obtienen por movimiento relativo de sólido respecto a sólido:

$$\vec{\omega}_1 = \begin{Bmatrix} -\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{\omega}_{2/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{2/1} \end{Bmatrix} \quad \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} = \begin{Bmatrix} -\omega_1 \\ 0 \\ \omega_{2/1} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_{2/1} = \vec{0} \quad \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} = \begin{vmatrix} -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{2/1} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \omega_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Magnitudes absolutas del punto C:



$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OC} = \vec{0} + \begin{vmatrix} -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 L \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{OC} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OC}) =$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \begin{vmatrix} -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 L \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2L \sin 30^\circ = L \rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

\vec{v}_D y \vec{a}_D por movimiento absoluto:

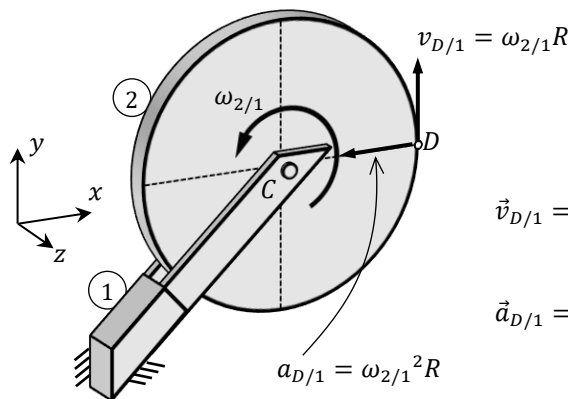
$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{v}_C + \begin{vmatrix} -\omega_1 & 0 & \omega_{2/1} \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{v}_C + \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_{2/1} R \\ -\omega_1 L \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_2 \wedge \overrightarrow{CD} + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{CD}) = \vec{a}_C + \begin{vmatrix} 0 & \omega_1 \omega_{2/1} & 0 \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\omega_1 & 0 & \omega_{2/1} \\ 0 & \omega_{2/1} R & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{v}_C + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \omega_{2/1} R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\omega_{2/1}^2 R \\ 0 \\ -\omega_1 \omega_{2/1} R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_{2/1}^2 R \\ -\omega_1^2 L \\ -2\omega_1 \omega_{2/1} R \end{Bmatrix}$$

\vec{v}_D y \vec{a}_D por movimiento relativo de punto respecto a sólido:

Movimiento relativo al sólido 1:

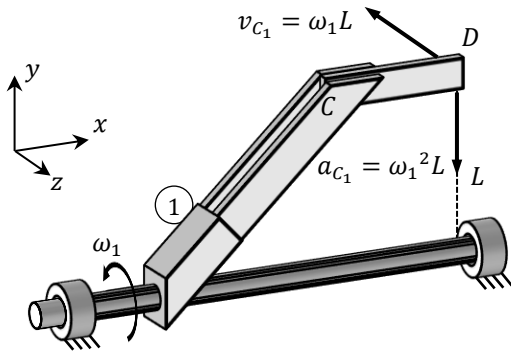


$$\vec{v}_{D/1} = \vec{v}_{C/1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{CD} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_{2/1} \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_{2/1} R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{D/1} = \vec{a}_{C/1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{CD} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge (\vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{CD}) =$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_{2/1} \\ 0 & \omega_{2/1} R & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_{2/1}^2 R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Movimiento de arrastre con el sólido 1:



$$\vec{v}_{D_1} = \vec{v}_C + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{CD} = \vec{v}_C + \begin{vmatrix} -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{v}_C + \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 L \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{D_1} = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{CD} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overline{CD}) = \vec{a}_C + \vec{0} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{D_1} + \vec{v}_{D/1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{2/1} R \\ -\omega_1 L \end{pmatrix}$$

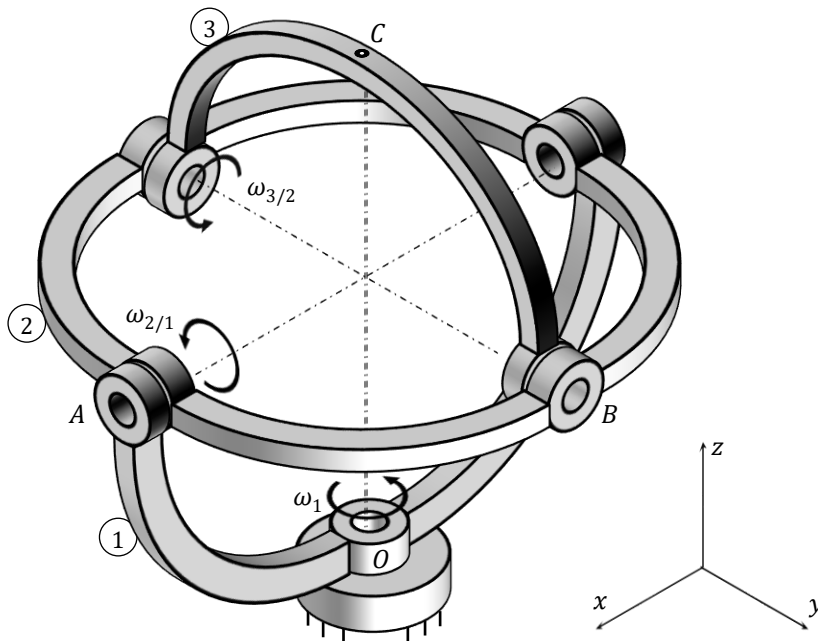
$$\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{D/1} = \begin{vmatrix} -\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{2/1} R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \omega_{2/1} R \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{D_1} + \vec{a}_{D/1} + 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{D/1} = \begin{pmatrix} -\omega_{2/1}^2 R \\ -\omega_1^2 L \\ -2\omega_1 \omega_{2/1} R \end{pmatrix}$$

• Ejemplo 6.2

En el dispositivo de la figura, formado por tres sólidos, los tres giros indicados se realizan a velocidad angular constante. En el instante representado los tres ejes son mutuamente perpendiculares. Asumiendo que los tres anillos tengan un mismo radio R , calcular, en dicho instante:

- Las velocidades angulares de los tres sólidos y las velocidades de los puntos A , B y C .
- Las aceleraciones angulares de los tres sólidos y las aceleraciones de los puntos A , B y C .
- La velocidad y aceleración angulares del sólido 3 relativas al sólido 1.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ R \end{pmatrix} & \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} & \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ R \end{pmatrix} & \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ R \end{pmatrix} & \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \\ \vec{\omega}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} & \vec{\omega}_{2/1} &= \begin{pmatrix} \omega_{2/1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{\omega}_2 &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} = \begin{pmatrix} \omega_{2/1} \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aplicando campos de movimiento absolutos de los sólidos 1 y 2:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ R & 0 & R \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & \omega_1 \\ -R & R & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega_1 R \\ -\omega_1 R \\ \omega_{2/1} R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 R \\ 0 \\ \omega_{2/1} R \end{pmatrix}$$

\vec{v}_B también se puede calcular aplicando un campo de movimiento relativo al sólido 1:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{B_1} + \vec{v}_{B/1} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{B_1} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & R & R \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_{B/1} = \vec{v}_{A/1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & 0 \\ -R & R & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{2/1} R \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_{2/1} = \vec{0} \quad \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} = \vec{0} + \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ \omega_{2/1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \omega_{2/1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando campos de movimiento absolutos de los sólidos 1 y 2:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OA}) = \vec{0} + \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_1 R & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AB}) = \vec{a}_A + \begin{vmatrix} 0 & \omega_1 \omega_{2/1} & 0 \\ -R & R & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 R & -\omega_1 R & \omega_{2/1} R \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_1^2 R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \omega_{2/1} R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 R \\ -\omega_{2/1}^2 R - \omega_1^2 R \\ -\omega_1 \omega_{2/1} R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\omega_1^2 + \omega_{2/1}^2) R \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

\vec{a}_B también se puede calcular aplicando un campo de movimiento relativo al sólido 1:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B_1} + \vec{a}_{B/1} + 2 \cdot \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{B/1} \rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{B_1} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{OB}) \\ \vec{a}_{B/1} = \vec{a}_{A/1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge (\vec{\omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{AB}) \\ \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{B/1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_{2/1} R \end{vmatrix} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{0} + \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 R & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{B/1} = \vec{0} + \vec{0} + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{2/1} R \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_{2/1}^2 R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{3/2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_{3/2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{\alpha}_{3/2} = \vec{0} \quad \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{3/2} = \begin{Bmatrix} \omega_{2/1} \\ \omega_{3/2} \\ \omega_1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_2 + \vec{\alpha}_{3/2} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{\omega}_{3/2} = \vec{a}_2 + \vec{0} + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & \omega_1 \\ 0 & \omega_{3/2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 \omega_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\omega_1 \omega_{3/2} \\ 0 \\ \omega_{2/1} \omega_{3/2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_1 \omega_{3/2} \\ \omega_1 \omega_{2/1} \\ \omega_{2/1} \omega_{3/2} \end{Bmatrix}$$

Aplicando campos de movimiento absoluto del sólido 3:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_3 \wedge \vec{BC} = \vec{v}_B + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & \omega_{3/2} & \omega_1 \\ 0 & -R & R \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_1 R \\ 0 \\ \omega_{2/1} R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_{3/2} R + \omega_1 R \\ -\omega_{2/1} R \\ -\omega_{2/1} R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{3/2} R \\ -\omega_{2/1} R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{\alpha}_3 \wedge \vec{BC} + \vec{\omega}_3 \wedge (\vec{\omega}_3 \wedge \vec{BC}) = \\ &= \vec{a}_B + R \cdot \begin{vmatrix} -\omega_1 \omega_{3/2} & \omega_1 \omega_{2/1} & \omega_{2/1} \omega_{3/2} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & \omega_{3/2} & \omega_1 \\ \omega_{3/2} + \omega_1 & -\omega_{2/1} & -\omega_{2/1} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 - \omega_{2/1}^2 \\ 0 \end{Bmatrix} R + \begin{Bmatrix} \omega_{2/1}(\omega_1 + \omega_{3/2}) \\ \omega_1 \omega_{3/2} \\ \omega_1 \omega_{3/2} \end{Bmatrix} R + \begin{Bmatrix} \omega_{2/1}(\omega_1 - \omega_{3/2}) \\ \omega_{2/1}^2 + \omega_1(\omega_{3/2} + \omega_1) \\ -\omega_{2/1}^2 + \omega_{3/2}(\omega_{3/2} + \omega_1) \end{Bmatrix} R = \begin{Bmatrix} 2\omega_1 \omega_{2/1} R \\ 2\omega_1 \omega_{3/2} R \\ -(\omega_{2/1}^2 + \omega_{3/2}^2) R \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

A estos resultados también se puede llegar aplicando campos de movimiento relativo al sólido 2:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C_2} + \vec{v}_{C/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{C_2} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{AC} = \vec{v}_A + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & \omega_1 \\ -R & 0 & R \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_{2/1} R - \omega_1 R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_{2/1} R \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vec{v}_{C/2} = \vec{v}_{B/2} + \vec{\omega}_{3/2} \wedge \vec{BC} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & \omega_{3/2} & 0 \\ 0 & -R & R \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{3/2} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C_2} + \vec{a}_{C/2} + 2 \cdot \vec{\omega}_2 \wedge \vec{v}_{C/2} \rightarrow \begin{cases} \vec{a}_{C_2} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{AC} + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \vec{AC}) = \dots = \begin{Bmatrix} 2\omega_1 \omega_{2/1} R \\ 0 \\ -\omega_1^2 R \end{Bmatrix} \\ \vec{a}_{C/2} = \vec{a}_{B/2} + \vec{\alpha}_{3/2} \wedge \vec{BC} + \vec{\omega}_{3/2} \wedge (\vec{\omega}_{3/2} \wedge \vec{BC}) = \dots = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{3/2}^2 R \end{Bmatrix} \\ 2 \cdot \vec{\omega}_2 \wedge \vec{v}_{C/2} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & \omega_1 \\ \omega_{3/2} R & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\omega_1 \omega_{3/2} R \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Empleando la relación general entre las magnitudes angulares absolutas de dos sólidos cualesquiera:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_3 &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{3/1} \rightarrow \vec{\omega}_{3/1} = \begin{Bmatrix} \omega_{2/1} \\ \omega_{3/2} \\ \omega_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{2/1} \\ \omega_{3/2} \\ 0 \end{Bmatrix} & \vec{\alpha}_3 &= \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{3/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{3/1} \rightarrow \\ & \rightarrow \vec{\alpha}_{3/1} &= \vec{\alpha}_3 - \vec{0} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ \omega_{2/1} & \omega_{3/2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_1 \omega_{3/2} \\ \omega_1 \omega_{2/1} \\ \omega_{2/1} \omega_{3/2} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\omega_1 \omega_{3/2} \\ \omega_1 \omega_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{2/1} \omega_{3/2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

A este resultado también se puede llegar estudiando el movimiento de todo el sistema relativo al sólido 1 (como si éste estuviera parado):

$$\vec{\omega}_{3/1} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{3/2} \quad \vec{\alpha}_{3/1} = \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\alpha}_{3/2} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{\omega}_{3/2} = \vec{0} + \vec{0} + \begin{vmatrix} \omega_{2/1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{3/2} & 0 \end{vmatrix}$$

6.5.3 Deslizadera sobre guía rectilínea fija

Cuando se tiene una deslizadera que se mueve a lo largo de una guía rectilínea que está fija, su trayectoria, evidentemente, es la línea definida por la propia guía de deslizamiento. Como se sabe, la velocidad de un punto es siempre tangente a su trayectoria, por lo que, la primera conclusión que puede extraerse en esta situación es que la velocidad de la deslizadera ha de ser un vector en la dirección de la propia guía.

Además, por el hecho de ser la trayectoria de la deslizadera rectilínea, la velocidad de ésta, aunque cambie de valor (módulo y sentido), mantiene constante la dirección. Puesto que el radio de curvatura de la trayectoria es infinito, la aceleración normal es nula, y la deslizadera sólo puede tener aceleración tangencial, que como se sabe, es siempre en la dirección de la propia velocidad y, por tanto, también en la dirección de la propia guía de deslizamiento. Otra forma de llegar a esta misma conclusión es tener en cuenta que, cuando una magnitud vectorial no cambia de dirección a lo largo del tiempo, su derivada respecto del tiempo es siempre otro vector en su misma dirección.

En resumen, cuando se tiene una deslizadera sobre una guía rectilínea fija, tanto su velocidad como su aceleración, son siempre vectores en dirección conocida. Si cualquiera de dichas magnitudes fuera dato en un problema, bastaría con especificar su módulo y su sentido, y a partir de dicha información se podrían obtener sus componentes cartesianas. De modo análogo, si alguna de estas magnitudes fuera desconocida, habría que plantear el vector en función de una única incógnita.

Dicho de otra manera, al tratarse de un vector en dirección conocida, habría que hacer uso de las relaciones entre componentes (tal como se hace por ejemplo, en estática, para expresar matemáticamente una fuerza en dirección conocida).

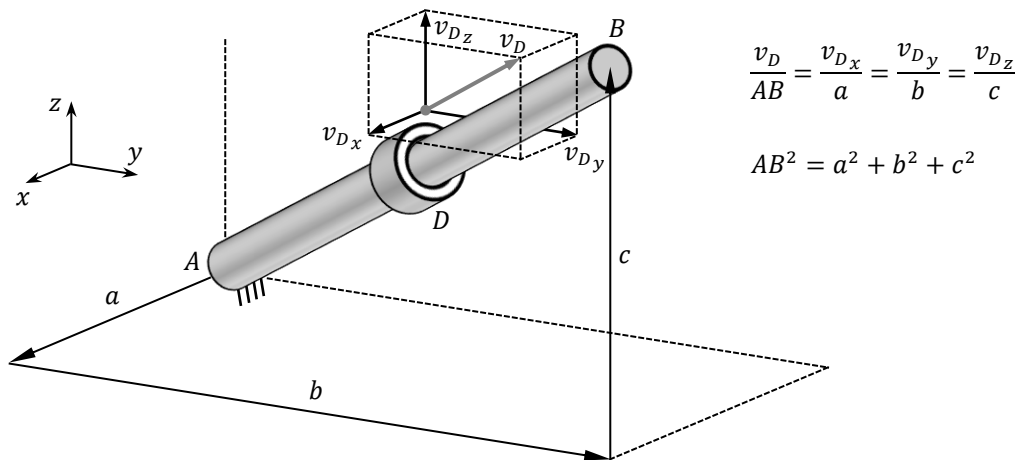


Fig. 6. 18 Relaciones entre componentes

$$\vec{v}_D = \begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dy} \\ v_{Dz} \end{Bmatrix} = v_D \begin{Bmatrix} a/AB \\ b/AB \\ c/AB \end{Bmatrix} = v_D \cdot \vec{u}_{AB} = \begin{Bmatrix} v_{Dx} \\ v_{Dx} \cdot b/a \\ v_{Dx} \cdot c/a \end{Bmatrix} = v_{Dy} \begin{Bmatrix} a/b \\ 1 \\ c/b \end{Bmatrix} = \frac{v_{Dz}}{c} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$$

Evidentemente, cuando se construya el vector matemático \vec{v}_D a partir de sus componentes habrá que verificar que se ha considerado signo negativo en todas aquellas componentes que tengan sentido opuesto a su correspondiente eje.

6.5.4 Deslizadera sobre guía móvil

Cuando una deslizadera avanza por un elemento que hace las veces de guía, pero dicho elemento a su vez tiene movimiento, el único planteamiento posible consiste en aplicar los conceptos de movimiento relativo de punto respecto a sólido. El punto es la propia deslizadera y el sólido es el elemento que actúa como guía. Es decir, es necesario aplicar movimiento relativo de la deslizadera respecto de su guía (móvil).

Obsérvese que el ‘punto deslizadera’, punto D , no pertenece al ‘sólido guía’, sólido AB , ya que, de hecho, se mueve sobre él. Un observador montado en AB vería que D se mueve. Por lo tanto, siendo A un punto cualquiera de AB , es incorrecto plantear un campo de velocidades, o aceleraciones, directamente entre A y D , ya que no se trata de dos puntos del mismo sólido. Si se hace eso, lo que se está planteando, de hecho, no es otra cosa que el movimiento de arrastre de la deslizadera con la guía, es decir, la velocidad, o aceleración, que tendría D si fuera un punto perteneciente a AB . A estos valores habrá que sumarles la velocidad o aceleración relativas y en este último caso, además, el término complementario de Coriolis. Por tanto:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{D/AB} + \vec{v}_{D/AB} \leftarrow \vec{v}_{D/AB} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$$

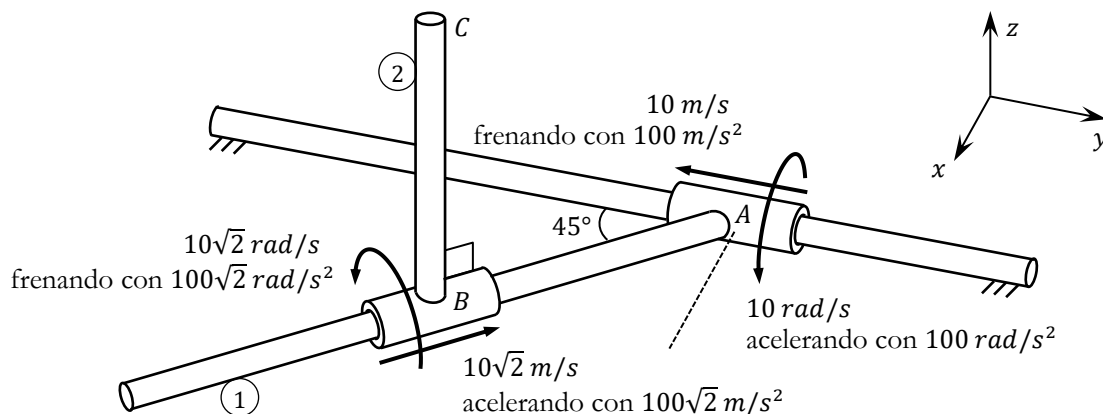
$$\vec{a}_D = \vec{a}_{D/AB} + \vec{a}_{D/AB} + 2 \cdot \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{v}_{D/AB} \leftarrow \vec{a}_{D/AB} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AD} + \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$$

Por otro lado, para realizar el estudio del movimiento relativo, para plantear $\vec{v}_{D/AB}$ y $\vec{a}_{D/AB}$, hay que determinar el movimiento de D que vería un observador subido en AB . Si un observador está subido en la guía, ésta constituye su suelo, para él no se mueve, es decir, es como si se tratara de un elemento fijo. Aunque la trayectoria real (absoluta) de D sea una curva, si la guía es rectilínea, un observador móvil, subido en la propia guía, ve una trayectoria rectilínea (un observador posicionado por ejemplo en A , simplemente ve que D se acerca y se aleja en línea recta).

Por lo tanto, toda la discusión realizada en el apartado anterior respecto a la velocidad o aceleración absolutas de una deslizadera sobre guía rectilínea fija, es aplicable ahora a las correspondientes magnitudes relativas cuando la guía no es fija. Tanto la velocidad relativa, como la aceleración relativa, de la deslizadera respecto de la guía, son vectores en dirección conocida, precisamente la de la propia guía.

- Ejemplo 6.3

En el instante representado, la barra 1 se encuentra en el plano xy , la distancia entre los puntos A y B es $\sqrt{2} \text{ m}$ y la barra 2, que mide 1.5 m , es paralela al eje z . Calcular la aceleración del punto C .



En primer lugar se identifican y definen todas las magnitudes vectoriales:

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s & \vec{a}_A &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2 & \vec{\omega}_1 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} rad/s & \vec{\alpha}_1 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} rad/s^2 \\ \vec{v}_{B/1} &= \begin{Bmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s & \vec{a}_{B/1} &= \begin{Bmatrix} -100 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s^2 & \vec{\omega}_{2/1} &= \begin{Bmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} rad/s & \vec{\alpha}_{2/1} &= \begin{Bmatrix} -100 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} rad/s^2 \\ \vec{AB} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} m & \vec{BC} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{Bmatrix} m & \vec{AC} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1.5 \end{Bmatrix} m\end{aligned}$$

- Primera manera de resolver: \rightarrow movimiento absoluto del elemento 2.

Aunque sea el método del movimiento absoluto, al ser el punto B del sólido 2 una deslizadera que recorre una guía móvil, su velocidad absoluta sólo puede obtenerse planteando un movimiento relativo respecto del elemento que actúa como guía, el sólido 1.

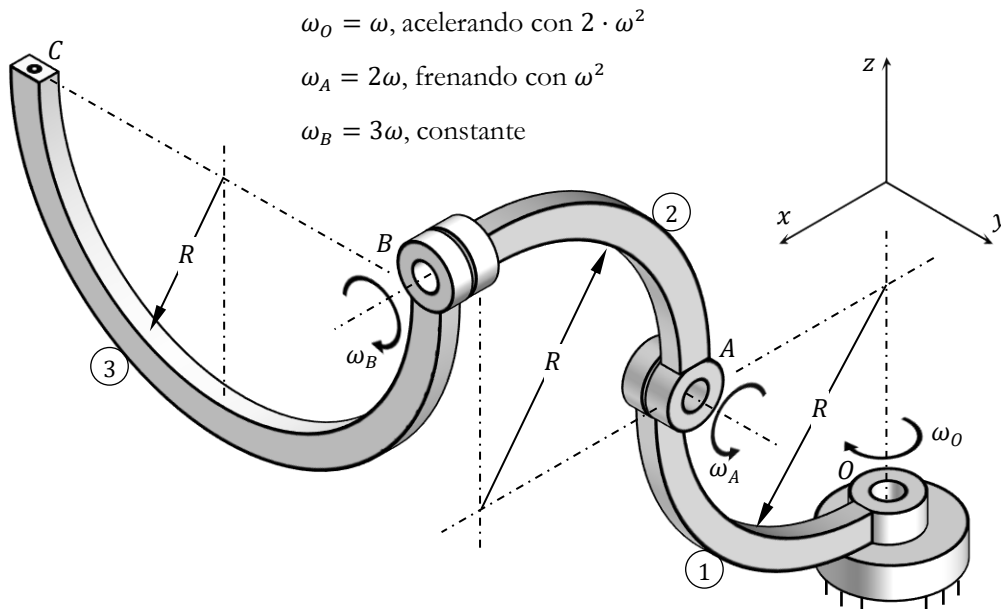
$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_{B_1} + \vec{v}_{B/1} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix} m/s & \leftarrow \vec{v}_{B_1} &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ -10 \end{Bmatrix} m/s \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{BC} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -15 \\ -10 \end{Bmatrix} m/s & \leftarrow \vec{\omega}_2 &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} rad/s \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_{B_1} + \vec{a}_{B/1} + 2 \cdot \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{B/1} = \begin{Bmatrix} -200 \\ 200 \\ 100 \end{Bmatrix} m/s^2 & \leftarrow & \begin{cases} \vec{a}_{B_1} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{AB}) = \begin{Bmatrix} -100 \\ 100 \\ -100 \end{Bmatrix} m/s^2 \\ 2 \cdot \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{B/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix} m/s^2 \end{cases} \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{BC} + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \vec{BC}) = \begin{Bmatrix} 100 \\ 350 \\ -50 \end{Bmatrix} m/s^2 & \leftarrow \vec{\alpha}_2 &= \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 200 \\ -100 \end{Bmatrix} rad/s^2\end{aligned}$$

- Segunda manera de resolver: \rightarrow movimiento relativo del punto C respecto del elemento 1.

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= \vec{v}_{C_1} + \vec{v}_{C/1} \leftarrow \begin{cases} \vec{v}_{C_1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{AC} = \begin{Bmatrix} 15 \\ -10 \\ -10 \end{Bmatrix} m/s \\ \vec{v}_{C/1} = \vec{v}_{B/1} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{BC} = \begin{Bmatrix} -25 \\ -5 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s \end{cases} \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_{C_1} + \vec{a}_{C/1} + 2 \cdot \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{C/1} \leftarrow \begin{cases} \vec{a}_{C_1} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{AC} + \vec{\omega}_1 \wedge (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{AC}) = \begin{Bmatrix} 50 \\ 100 \\ -250 \end{Bmatrix} m/s^2 \\ \vec{a}_{C/1} = \vec{a}_{B/1} + \vec{\alpha}_{2/1} \wedge \vec{BC} + \vec{\omega}_{2/1} \wedge (\vec{\omega}_{2/1} \wedge \vec{BC}) = \begin{Bmatrix} 50 \\ 250 \\ -300 \end{Bmatrix} m/s^2 \\ 2 \cdot \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{C/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \end{Bmatrix} m/s^2 \end{cases}\end{aligned}$$

Problemas

1. En la posición dibujada, para los datos ω y R , calcular:
- \vec{v}_A y \vec{a}_A , tanto analíticamente como gráficamente.
 - \vec{v}_{B_1} y \vec{a}_{B_1} , tanto analíticamente como gráficamente.
 - $\vec{v}_{B/1}$ y $\vec{a}_{B/1}$, tanto analíticamente como gráficamente.
 - $\vec{v}_{C/2}$ y $\vec{a}_{C/2}$, tanto analíticamente como gráficamente.
 - \vec{v}_B y \vec{a}_B , tanto por movimiento absoluto, como por movimiento relativo respecto a 1.
 - \vec{v}_C y \vec{a}_C , tanto por movimiento absoluto, como por movimiento relativo respecto a 2.
 - $\vec{\omega}_{3/1}$ y $\vec{\alpha}_{3/1}$.
 - \vec{v}_{C_1} y \vec{a}_{C_1} , tanto analíticamente como gráficamente.
 - $\vec{v}_{C/1}$ y $\vec{a}_{C/1}$.
 - \vec{v}_C y \vec{a}_C , por movimiento relativo respecto a 1.



Solución:

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 R \quad \vec{v}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_{B_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 R$$

$$\vec{v}_{B/1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_{B/1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \omega^2 R \quad \vec{v}_{C/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_{C/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 R$$

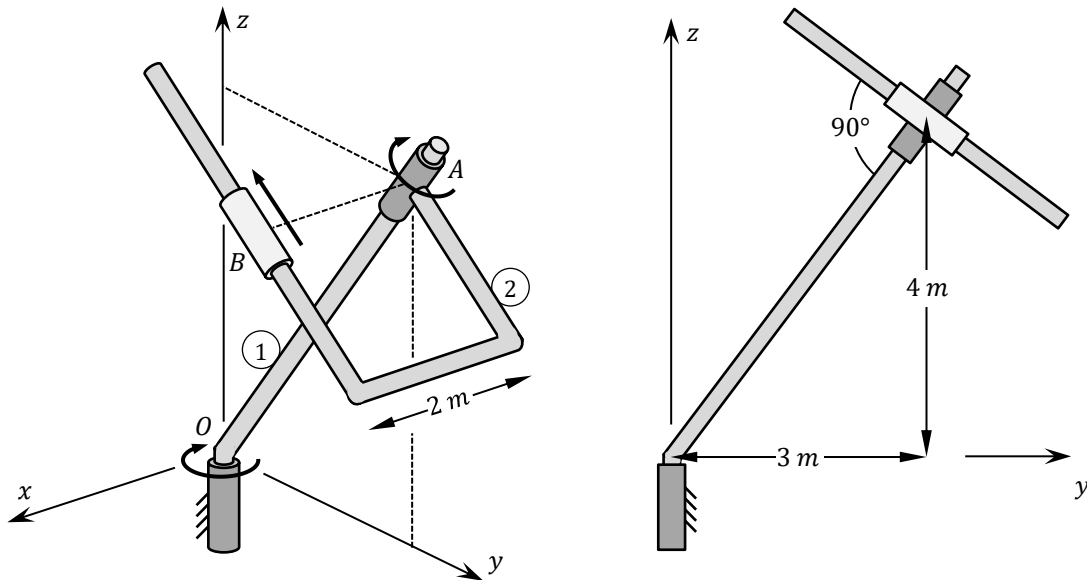
$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} \omega^2 R \quad \vec{v}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_C = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} \omega^2 R$$

$$\vec{v}_{C_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_{C_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 R \quad \vec{v}_{C/1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \omega R \quad \vec{a}_{C/1} = \begin{pmatrix} 19 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} \omega^2 R$$

$$\vec{\omega}_{3/1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \omega \quad \vec{\alpha}_{3/1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \omega^2$$

2. En la posición dibujada, el motor que hay en O gira a 5 rad/s en el sentido indicado, frenando en su giro a 14 rad/s^2 , el motor que hay en A gira a 10 rad/s en el sentido indicado, acelerando en su giro a 20 rad/s^2 y la deslizadera B avanza por su guía a 20 m/s en el sentido indicado, frenando en su avance a 60 m/s^2 . Calcular:

- La velocidad absoluta del punto del elemento 2 que coincide en ese instante con la posición de la deslizadera B , aplicando el movimiento absoluto del elemento 2.
- La velocidad absoluta del punto del elemento 2 que coincide en ese instante con la posición de la deslizadera B , aplicando el movimiento relativo al elemento 1.
- La aceleración absoluta del punto del elemento 2 que coincide en ese instante con la posición de la deslizadera B , aplicando el movimiento absoluto del elemento 2.
- La aceleración absoluta del punto del elemento 2 que coincide en ese instante con la posición de la deslizadera B , aplicando el movimiento relativo al elemento 1.
- La velocidad y la aceleración absolutas de la deslizadera B .
- La aceleración de Coriolis de la deslizadera B en su movimiento relativo al elemento 1.



Solución:

$$\vec{\omega}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix} \text{ rad/s} \quad \vec{\alpha}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{Bmatrix} \text{ rad/s}^2$$

$$\vec{\omega}_{2/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6 \\ -8 \end{Bmatrix} \text{ rad/s} \quad \vec{\alpha}_{2/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12 \\ -16 \end{Bmatrix} \text{ rad/s}^2$$

$$\vec{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6 \\ -13 \end{Bmatrix} \text{ rad/s} \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{Bmatrix} -30 \\ -12 \\ -2 \end{Bmatrix} \text{ rad/s}^2$$

$$\vec{v}_{B/2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -16 \\ 12 \end{Bmatrix} \text{ m/s} \quad \vec{a}_{B/2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 48 \\ -36 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v}_{B_2} = \begin{Bmatrix} 15 \\ -26 \\ 12 \end{Bmatrix} \text{ m/s} \quad \vec{a}_{B_2} = \begin{Bmatrix} -452 \\ -79 \\ 24 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 15 \\ -42 \\ 24 \end{Bmatrix} \text{ m/s} \quad \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} -1012 \\ -31 \\ -12 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v}_{B/1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -32 \\ 24 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

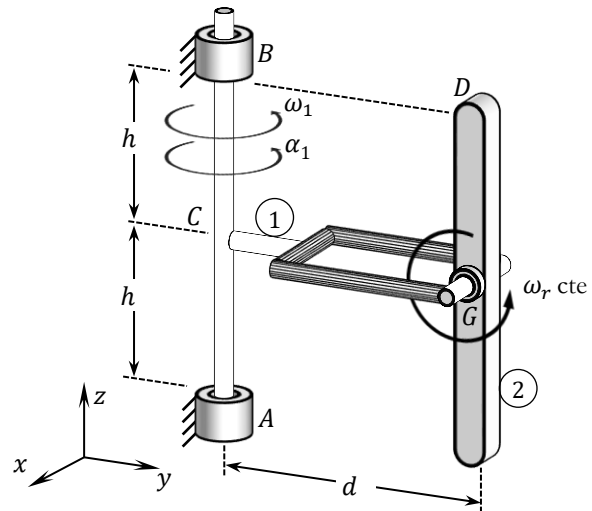
$$2 \cdot \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{B/1} = \begin{Bmatrix} -320 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Problemas de Examen

▪ **Problema 6.1** mayo 2015 30 minutos

En el instante del movimiento representado, en función de los datos que aparecen en la figura, calcular:

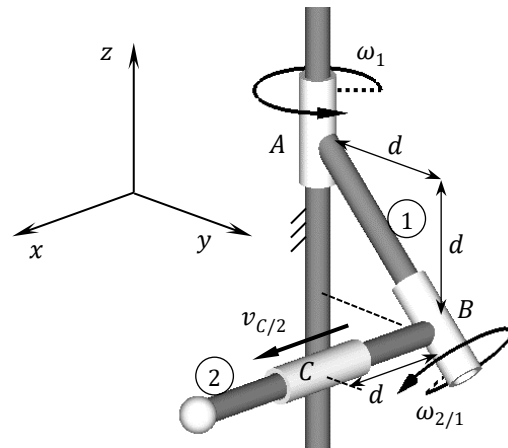
- La velocidad del punto D y la velocidad angular absoluta de la barra 2. [0.8 puntos]
- La aceleración del punto D y la aceleración angular absoluta de la barra 2. [1.2 puntos]



▪ **Problema 6.2** enero 2018 40 minutos

Sabiendo que $\omega_1 = 2\omega$, que $\omega_{2/1} = \sqrt{2}\omega$ y que $v_{C/2} = 3\omega d$, todas de valor constante a lo largo del tiempo y en los sentidos indicados en la figura, calcular, en la posición representada, en función de los datos ω y d :

- La velocidad angular absoluta de la barra 2 y la velocidad absoluta del punto C . [1 punto]
- La aceleración angular absoluta de la barra 2 y la aceleración absoluta del punto C . [1.5 puntos]



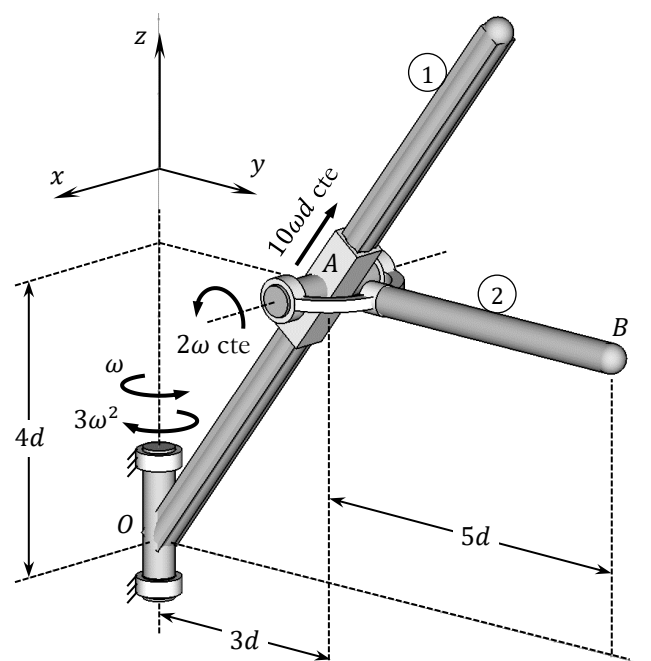
▪ **Problema 6.3** enero 2021 40 minutos

La barra 1 gira en torno a un eje fijo vertical con una velocidad angular ω , frenando en el giro con una aceleración angular $3 \cdot \omega^2$.

La deslizadera A recorre la barra 1 ascendiendo por ésta a velocidad constante $10\omega d$.

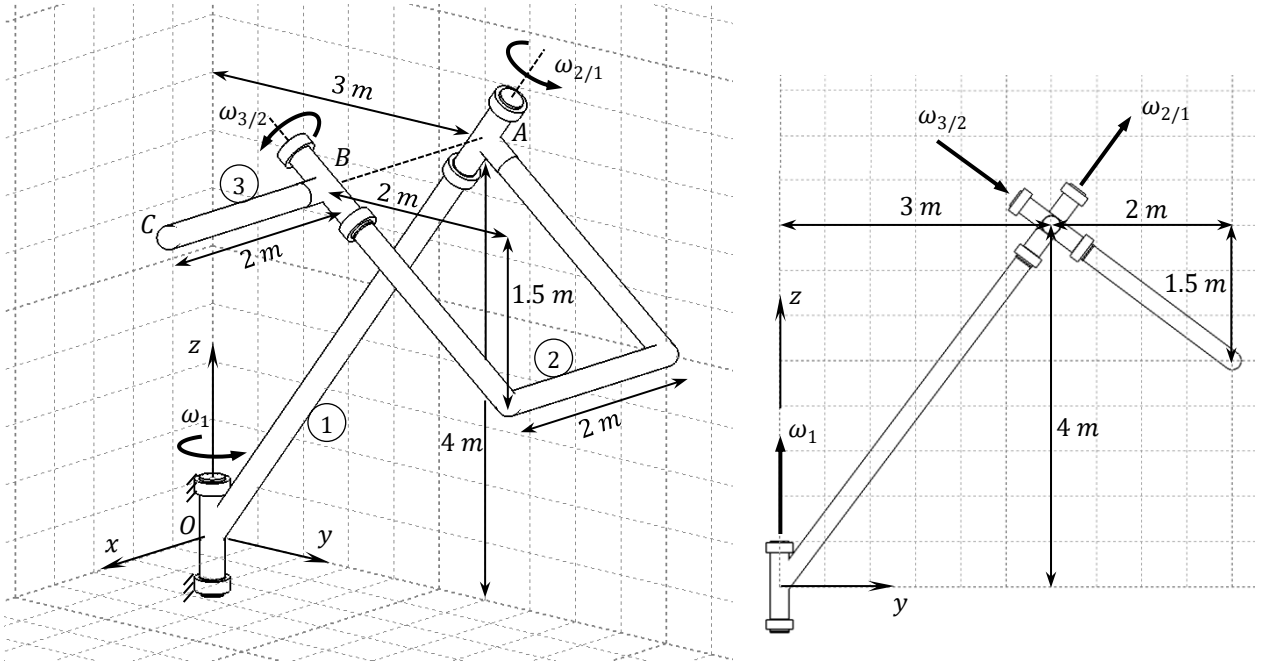
Sobre dicha deslizadera va montado un segundo eje en torno al cual gira la barra 2 con una velocidad angular constante 2ω .

Calcular, en la posición mostrada en la figura, la aceleración del punto B . [1.6 puntos]



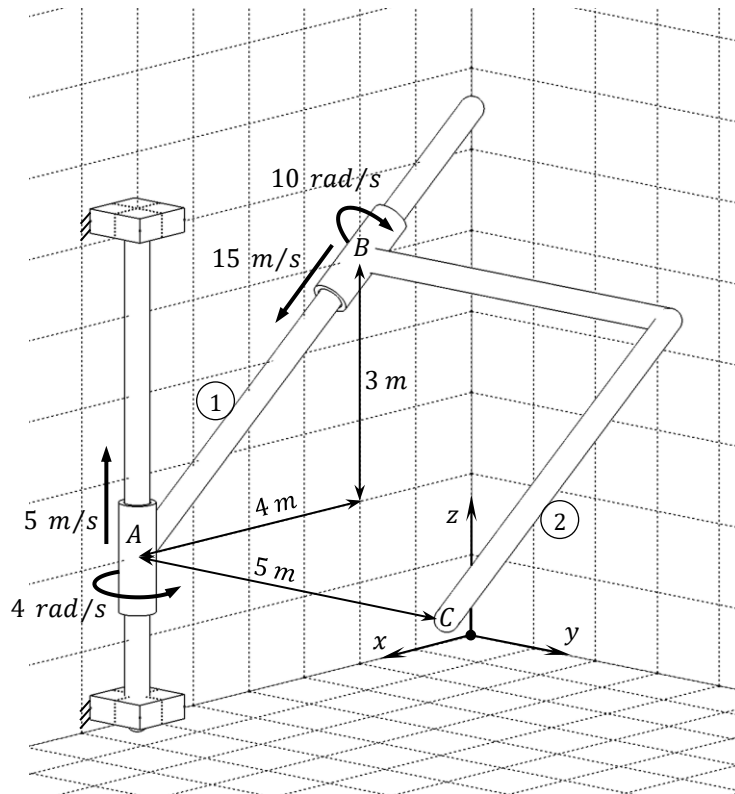
▪ **Problema 6.4** enero 2022 40 minutos

En la posición mostrada $\omega_1 = 8 \text{ rad/s}$ acelerando a 12 rad/s^2 , $\omega_{2/1} = 5 \text{ rad/s}$ frenando a 10 rad/s^2 y $\omega_{3/2} = 10 \text{ rad/s}$ constante. Calcular, la velocidad y la aceleración del punto C. [1.8 puntos]



▪ **Problema 6.5** enero 2023 45 minutos

Sabiendo que todas las velocidades indicadas son de módulo constante, calcular la velocidad y la aceleración del punto C. [1.8 puntos]



7. CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO PLANO

7.1 PARTICULARIDADES DEL MOVIMIENTO PLANO

7.1.1 Punto con movimiento plano

Se dice que un punto tiene movimiento plano cuando su trayectoria es una curva completamente contenida en un plano. Se supondrá que dicho plano es el xy . En tal caso, en todo momento la coordenada z de su vector de posición es nula.

Puesto que r_z es constante, $v_z = \dot{r}_z = 0$ a lo largo de todo el movimiento. Del mismo modo, puesto que v_z es constante en el tiempo, $a_z = \dot{v}_z = 0$. Por lo tanto, los vectores velocidad y aceleración del punto con movimiento plano, al igual que su vector de posición, están contenidos en el plano del movimiento.

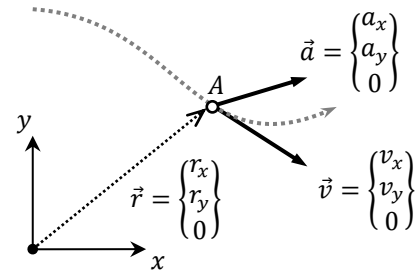


Fig. 7.1 Punto con movimiento plano

7.1.2 Sólido con movimiento plano

Se dice que un sólido tiene movimiento plano cuando todos sus puntos se mueven en un mismo plano (o en planos paralelos). Para que esto sea así, el sólido sólo puede cambiar de orientación girando en torno a un eje perpendicular a dicho plano. Por lo tanto, las componentes x e y del vector velocidad angular han de ser nulas. Esto puede demostrarse a través de la ecuación del campo de velocidades entre dos puntos del sólido:

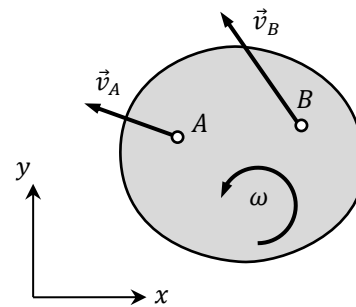


Fig. 7.2 Sólido con movimiento plano

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AB}$$

Puesto que \vec{v}_A y \vec{v}_B son vectores contenidos en el plano xy , el resultado de la operación $\vec{\omega} \wedge \overline{AB}$ también debe tener componente la z nula.

$$\vec{\omega} \wedge \overline{AB} = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ AB_x & AB_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z \cdot AB_y \\ \omega_z \cdot AB_x \\ \omega_x \cdot AB_y - \omega_y \cdot AB_x \end{pmatrix}$$

Puesto que el vector \overline{AB} es genérico y $(\omega_x \cdot AB_y - \omega_y \cdot AB_x)$ debe ser 0 para cualquier valor de AB_x y AB_y , debe verificarse $\omega_x = \omega_y = 0$ para cualquier instante de tiempo. Además, como $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$ y tanto ω_x como ω_y se mantienen constantes en el tiempo:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

7.1.3 Campo de aceleraciones en movimiento plano

Las particularidades del movimiento plano permiten el empleo de una expresión simplificada de la ecuación del campo de aceleraciones entre dos puntos de un sólido:

$$\vec{\omega} \wedge \overline{AB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ AB_x & AB_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot AB_y \\ \omega \cdot AB_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AB}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -\omega \cdot AB_y & \omega \cdot AB_x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \cdot AB_x \\ -\omega^2 \cdot AB_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \overline{AB}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overline{AB} - \omega^2 \cdot \overline{AB}}$$

7.2 POLO DE VELOCIDADES

7.2.1 Definición y propiedades

La ecuación del campo de velocidades de un sólido proporciona la velocidad de cualquier punto B del mismo a partir de la velocidad de otro punto A (del mismo sólido) y la velocidad angular de dicho sólido. Cada punto del sólido tiene, por tanto, una velocidad diferente. El punto del sólido que en un determinado instante posee velocidad nula se denomina *polo de velocidades* del sólido en dicho instante. Se denotará como P .

Para determinar su posición, en primer lugar, se impone la condición de velocidad nula en la ecuación del campo de velocidades:

$$\vec{v}_P = \vec{0} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overline{AP}$$

Suponiendo conocidas \vec{v}_A y ω , de la ecuación anterior interesa despejar \overline{AP} , lo cual proporcionaría las coordenadas del punto P a partir de la posición de A . Sin embargo, como \overline{AP} se encuentra involucrado en un producto vectorial, no se puede despejar directamente. Es necesario manipular la expresión anterior premultiplicándola por $\vec{\omega}$ y teniendo en cuenta que $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AP}) = -\omega^2 \cdot \overline{AP}$ (al igual que se comprobó para el término final de la ecuación del campo de aceleraciones). Entonces se tiene:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{0} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{AP}) \rightarrow \vec{0} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A - \omega^2 \cdot \overline{AP}$$

$$\overline{AP} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ v_{Ax} & v_{Ay} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} -\omega \cdot v_{Ay} \\ \omega \cdot v_{Ax} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{Ay}/\omega \\ v_{Ax}/\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo primero que se observa es que, como \overline{AP} es perpendicular a $\vec{\omega}$, el polo de velocidades se encuentra en el plano del movimiento. Una vez obtenida la posición de P , el cálculo de la velocidad de cualquier punto puede realizarse de una manera simplificada:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \overline{PB}$$

Esta expresión pone de manifiesto otra de las principales características del polo de velocidades. Si se conoce su posición, la velocidad de cualquier punto del sólido pueden calcularse como si el sólido estuviera realizando un movimiento de rotación pura alrededor de dicho punto. Es por ello que el polo de velocidades también recibe el nombre de *centro instantáneo de rotación*, o CIR.

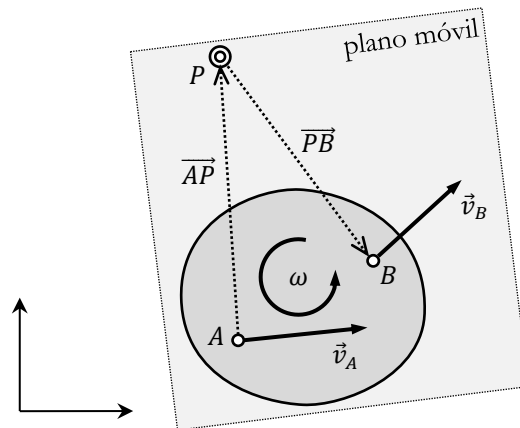


Fig. 7. 3 Polo de velocidades

Adviértase que la posición del punto P puede quedar fuera del sólido. Es por ello que se hace necesario definir el concepto de *plano móvil*, que no es más que un plano infinito que se mueve solidariamente con el sólido, es decir, es como una extensión infinita del propio sólido en movimiento. El polo de velocidades, aunque quede fuera del sólido, siempre estará en dicho plano móvil, como punto perteneciente al sólido.

7.2.2 Construcciones gráficas

Supónganse conocidas \vec{v}_A y ω . En la expresión deducida para obtener \vec{AP} se comprueba que dicho vector es perpendicular a \vec{v}_A , por lo que P se encuentra sobre la recta que pasando por el punto A es perpendicular su velocidad. Además, como $\vec{\omega}$ y \vec{v}_A son, a su vez, perpendiculares entre sí, la distancia de A a P (sobre dicha recta) es:

$$AP = \frac{\omega \cdot v_A \cdot 1}{\omega^2} = \frac{v_A}{\omega}$$

Finalmente, el sentido, de los posibles, hacia el que llevar dicha distancia desde A , es aquel que posiciona P de tal manera que al considerar que el sólido estuviera girando en torno a él con el sentido dado de ω , se produciría el sentido dado de \vec{v}_A .

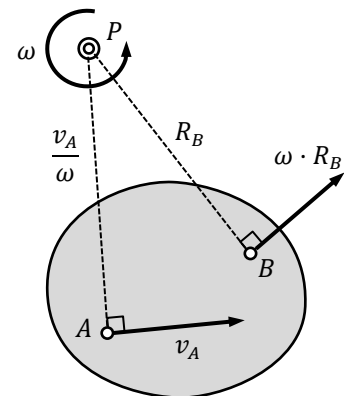


Fig. 7. 4 CIR

Del mismo modo, una vez posicionado P , cualquier punto B del sólido, desde el punto de vista de las velocidades, se comporta como si estuviera teniendo un movimiento de rotación pura con ω en torno al CIR. Por lo tanto, basta con trazar el radio R , que une el polo con el punto y componer el vector \vec{v}_B de la forma:

- *Módulo:* $v_B = \omega \cdot R_B$. Obviamente, cuanto más alejado se encuentre un punto del centro instantáneo de rotación de sólido mayor será su velocidad.
- *Dirección:* Perpendicular al 'radio' \vec{PB} .
- *Sentido:* El que marque el sentido de ω si el sólido estuviera girando en torno a P .

Como se verá más adelante, el polo de velocidades, como punto perteneciente al sólido, aunque posee velocidad nula, no posee aceleración nula, es decir, $v_P = 0$ pero $a_P \neq 0$. Por lo tanto, el polo de velocidades sólo puede usarse como centro de rotación para calcular velocidades.

La posición del polo de velocidades de un sólido se puede determinar mediante una construcción gráfica muy simple siempre que se conozcan las direcciones de las velocidades de dos puntos de éste. Evidentemente, P se encontrará en la intersección de las perpendiculares a dichas direcciones. Las direcciones de las velocidades se conocen siempre que las trayectorias de los puntos están determinadas, ya que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

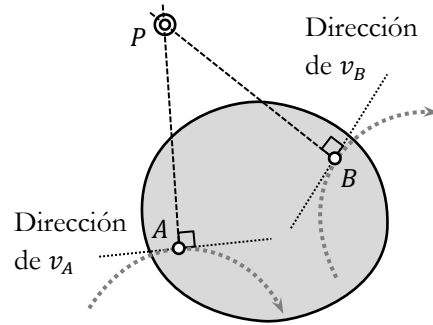


Fig. 7. 5 Posición del CIR

Obviamente, cuando las dos direcciones son paralelas, la construcción degenera en que sus perpendiculares se cortan en el infinito. Si en un cierto instante el sólido está girando en torno a un punto del infinito significa que, aunque sea de un modo instantáneo, se está trasladando, por lo que esta situación se corresponde con una posición del movimiento en la que $\omega = 0$ y todos los puntos tienen la misma \vec{v} .

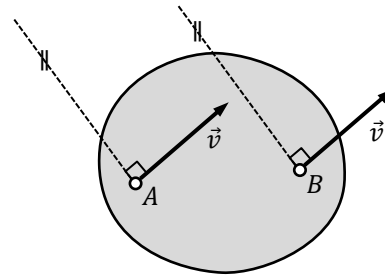


Fig. 7. 6 Traslación instantánea

Se da una excepción cuando los dos puntos con velocidades paralelas se encuentran precisamente sobre la recta perpendicular a la dirección de sus velocidades, ya que en este caso las dos perpendiculares a las velocidades son coincidentes y el punto de intersección está, por tanto, indeterminado. En este caso las velocidades no tienen por qué ser iguales ya que, de hecho, el CIR se obtiene gráficamente en la intersección de la línea que une a ambos puntos (perpendicular a las velocidades de ambos) y la línea que une los extremos de los vectores velocidad de ambos.

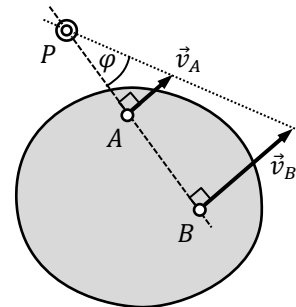


Fig. 7. 7 Excepción

Una situación muy habitual es que, para un sólido, en lugar de conocerse \vec{v}_A y ω y que el objetivo sea determinar \vec{v}_B (vector, sus dos componentes), los datos de partida sean \vec{v}_A y la dirección de la velocidad de B y que el objetivo sea determinar ω y v_B (módulo). En esta situación, el empleo del CIR facilita notablemente el cálculo frente al enfoque analítico. El proceso requiere calcular la intersección de las perpendiculares a las direcciones de ambas velocidades y determinar las distancias de P a cada uno de los puntos, R_A y R_B :

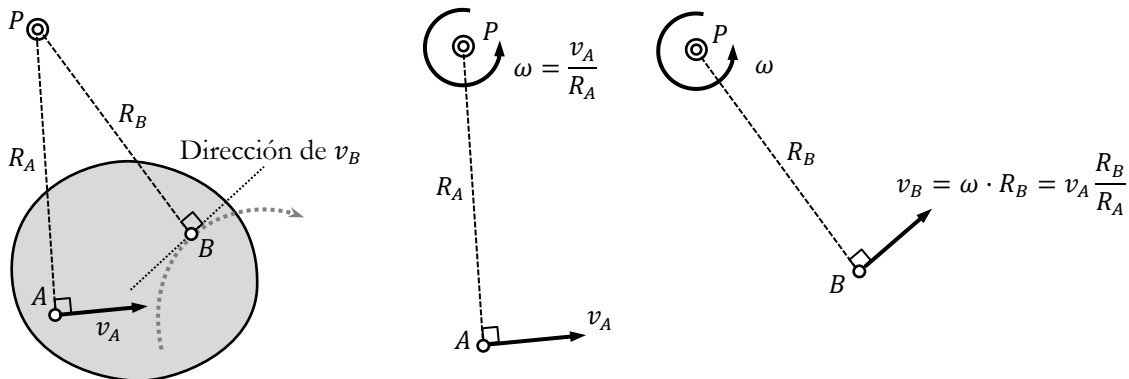


Fig. 7. 8 Cálculo gráfico de velocidades

7.3 MECANISMOS DE CADENA CERRADA

Los mecanismos de cadena abierta son aquellos en los que los elementos que los componen están conectados en serie, uno a continuación del otro, de tal manera que sólo uno de ellos está unido al elemento fijo. En un mecanismo de cadena abierta el movimiento relativo de cada elemento respecto del elemento anterior constituye un movimiento independiente. El tipo de movimiento relativo dependerá de la naturaleza del enlace entre los dos elementos, por ejemplo, si la unión entre dos elementos de la cadena es una articulación, un elemento podrá rotar respecto del anterior.

El hecho de que los movimientos de los distintos enlaces sean independientes entre sí implica que, para que el mecanismo tenga movimiento totalmente definido, es necesario especificar los datos cinemáticos en cada enlace entre sólidos. Si el mecanismo fuese a ser actuado con motores, se necesitaría un motor en cada unión. O visto de otra manera, si se quisiera bloquear por completo el movimiento del mecanismo, sería necesario disponer frenos en todos los enlaces. Para poder realizar un movimiento controlado es necesario que todas las uniones sean “activas”.

Por el contrario, los mecanismos de cadena cerrada se caracterizan por poseer más de un elemento conectado con bastidor fijo. En este tipo de mecanismos el número de movimientos independientes es siempre inferior al número de uniones entre elementos. Esto quiere decir que, para que todos los elementos del mecanismo se muevan de manera controlada, hacen falta menos motores que enlaces (o menos frenos para dejar todos los elementos inmóviles). En un mecanismo de cadena cerrada, de hecho, la mayor parte de las uniones entre elementos son “pasivas”.



Fig. 7.9 Mecanismo de cadena abierta y de cadena cerrada

La cinemática de cualquier mecanismo siempre queda gobernada por las magnitudes angulares absolutas de los sólidos. Esto quiere decir que las estrategias de resolución que se planteen siempre deberán priorizar la obtención de la velocidad y aceleración angular absoluta de cada uno de los elementos del mecanismo. En mecanismos de cadena abierta la determinación de las magnitudes angulares absolutas es directa, puesto que, al ser cada movimiento independiente, siempre se dispone de la información del movimiento relativo de cada sólido respecto del anterior y se puede componer:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_2 &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} & \vec{\alpha}_2 &= \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} \\ \vec{\omega}_3 &= \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{3/2} & \vec{\alpha}_3 &= \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_{3/2} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{\omega}_{3/2} \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

Sin embargo, en mecanismos de cadena cerrada, aunque las expresiones anteriores siguen siendo estrictamente correctas, no pueden utilizarse para determinar las magnitudes angulares absolutas, puesto que en las articulaciones pasivas no se dispone de la información de la rotación relativa ($\omega_{2/1}$ es desconocida y no puede usarse para calcular $\vec{\omega}_2$). Por tanto, para este tipo de mecanismos va a ser necesario establecer otro tipo de estrategias de resolución más complejas que permitan determinar las magnitudes angulares absolutas de los elementos a partir de los datos cinemáticos reales (los de los enlaces actuados).

7.4 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

7.4.1 Recopilación de ideas clave

- Si de un elemento se conocen su velocidad angular y la velocidad lineal de uno de sus puntos, se puede obtener la velocidad de cualquier otro punto, por aplicación directa de la ecuación de su campo de velocidades. De la misma manera, si se conocen la aceleración angular y la aceleración lineal de uno de sus puntos, además de la velocidad angular, la obtención de la aceleración de cualquier otro punto de dicho elemento es directa aplicando la ecuación de su campo de aceleraciones.
- Los productos vectoriales que aparecen en las ecuaciones de los campos de velocidades y aceleraciones siempre pueden interpretarse a través de un enfoque gráfico-escalar, es decir, sin necesidad de realizar operaciones vectoriales.
 - El resultado de $\vec{\omega} \wedge \vec{AB}$ es la velocidad que tendría B si estuviera girando con dicha ω en torno a A .
 - El resultado de $\vec{\alpha} \wedge \vec{AB}$ es la aceleración tangencial que tendría B si estuviera girando con dicha α en torno a A .
 - El resultado de $-\omega^2 \cdot \vec{AB}$ es la aceleración normal (centrípeta) que tendría B si estuviera girando con dicha ω en torno a A .

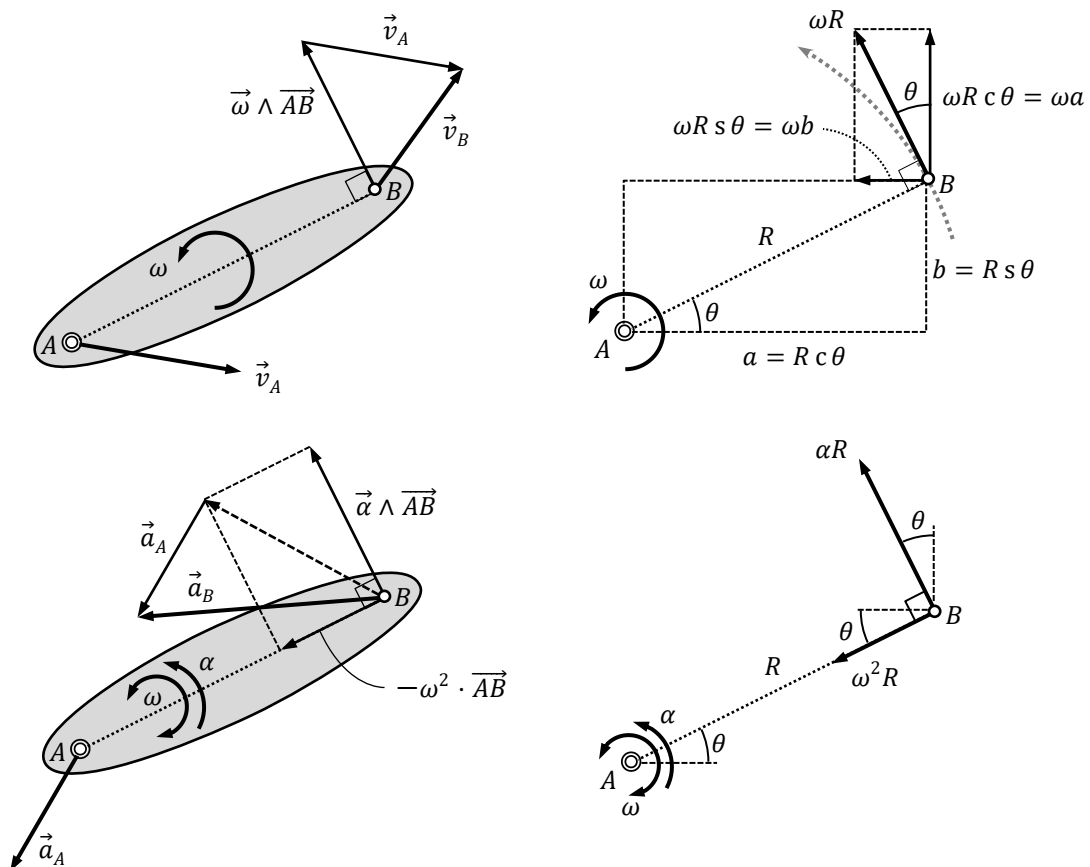


Fig. 7.10 Enfoque gráfico-escalar en el plano

- La estrategia que se haya establecido para resolver el problema de velocidades es la que ha de seguirse, literalmente, para resolver el problema de aceleraciones, simplemente cambiando las ecuaciones de velocidad que se hayan usado, por las correspondientes ecuaciones de aceleración.
- Para resolver aceleraciones es imprescindible tener previamente resueltas las velocidades, siempre. Esto se debe a que en todas las ecuaciones de aceleración siempre existen términos relacionados con la velocidad (como $\omega_i^2 \cdot \overline{AB}$, o $2 \cdot \vec{\omega}_i \wedge \vec{v}_{P/i}$).
- Una ecuación vectorial plana da lugar a un sistema de dos ecuaciones escalares. Por tanto, siempre que se pueda, deberán plantearse ecuaciones vectoriales con dos incógnitas escalares. De esta manera, se tiene la garantía de que dichas incógnitas pueden resolverse.
- Cualquier punto que no represente una unión entre elementos no se debe utilizar para resolver el mecanismo, debe dejarse para el final, cuando ya se tengan resueltas las magnitudes angulares del elemento (único) que lo contiene.
- Cuando una magnitud angular es incógnita conviene considerarla antihoraria. De esta manera, al introducirla en un producto vectorial siempre llevará signo positivo. Además, así, la interpretación del valor que se obtenga al resolverla es inmediata (si se llega a un valor negativo, la magnitud en la realidad es en sentido horario).

7.4.2 Articulación entre dos elementos de magnitudes angulares desconocidas

Cuando dos elementos, 1 y 2, comparten una articulación C , se pueden expresar las magnitudes cinemáticas lineales (velocidad o aceleración) de dicho punto a través de los campos del movimiento de ambos sólidos por separado. La explicación se desarrollará para el problema de velocidades, pero la argumentación es idéntica para el planteamiento de las aceleraciones.

Supóngase que las velocidades angulares de ambos elementos son desconocidas, pero se dispone, en cada uno de los elementos, de un punto de velocidad conocida. Por ejemplo, en el elemento 1 se conoce \vec{v}_A y en el elemento 2 se conoce \vec{v}_B .

La manera de proceder consiste en plantear \vec{v}_C por dos caminos distintos, como punto perteneciente al sólido 1, a partir de \vec{v}_A , y por otro lado, como punto perteneciente al sólido 2, a partir de \vec{v}_B . Al igualar la \vec{v}_C planteada por ambos caminos se llega a una ecuación vectorial plana (sistema de dos ecuaciones escalares), cuyas únicas incógnitas escalares son precisamente ω_1 y ω_2 .

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{AC} \\ 2 \rightarrow \vec{v}_C &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \overline{BC} \end{aligned} \rightarrow \frac{\vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{AC}}{\vec{v}_C} = \frac{\vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \overline{BC}}{\vec{v}_C} \rightarrow \omega_1, \omega_2$$

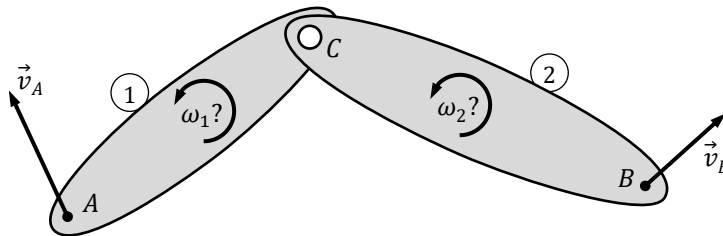
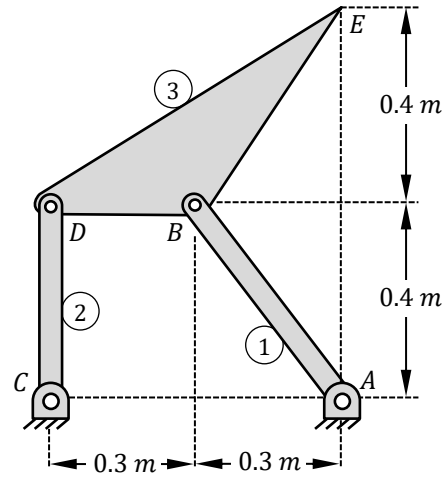


Fig. 7.11 Articulación entre dos elementos

Una vez resueltas las velocidades angulares, obtener las componentes de \vec{v}_C es inmediato, sin más que sustituir ω_1 en el primer camino, o indistintamente sustituir ω_2 en el segundo.

• Ejemplo 7.1

En el instante del movimiento representado se sabe que $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ y $\alpha_1 = 20 \text{ rad/s}^2$, ambas en sentido antihorario. Calcular, en función de dichos datos, así como los que aparecen en la figura, la aceleración del punto E .



Aunque no sea objetivo del problema calcular velocidades, éstas deben resolverse siempre antes de comenzar el cálculo de aceleraciones. Por otro lado, el planteamiento para resolver las magnitudes angulares de los distintos elementos debe apoyarse en las uniones entre ellos y nunca en puntos que no representen una unión (como el punto E), que deben dejarse para el final. El elemento 1 tiene el punto A de velocidad conocida y además tiene velocidad angular conocida. Por lo tanto, la velocidad del punto B es totalmente determinable:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{AB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -0.3 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -1.5 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

Las velocidades angulares de los elementos 2 y 3 son desconocidas, pero ambos comparten la articulación D y además en elemento 2 la velocidad de C es conocida y en elemento 3 lo es la de B .

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega}_2 \wedge \overline{CD} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.4\omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{\omega}_3 \wedge \overline{BD} = \vec{v}_B + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_3 \\ -0.3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -1.5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.3\omega_3 \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow -0.4\omega_2 = -2 \rightarrow \omega_2 = 5 \text{ rad/s}$$

$$y \rightarrow 0 = -1.5 - 0.3\omega_3 \rightarrow \omega_3 = -5 \text{ rad/s}$$

Ahora ya se puede calcular la velocidad del punto E , que no relaciona elementos. Pertenece al sólido 3, de velocidad angular conocida. Partiendo de un punto de dicho sólido que tenga velocidad conocida, como B :

$$\vec{v}_E = \vec{v}_B + \vec{\omega}_3 \wedge \overline{BE} = \vec{v}_B + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0.3 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -1.5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ -1.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

Obsérvese que también se podría haber partido del punto D . De hecho, la velocidad de D se tenía planteada por dos caminos para resolver las velocidades angulares ω_2 y ω_3 . Una vez resueltas éstas, evidentemente por cualquiera de los dos caminos se llega al mismo resultado:

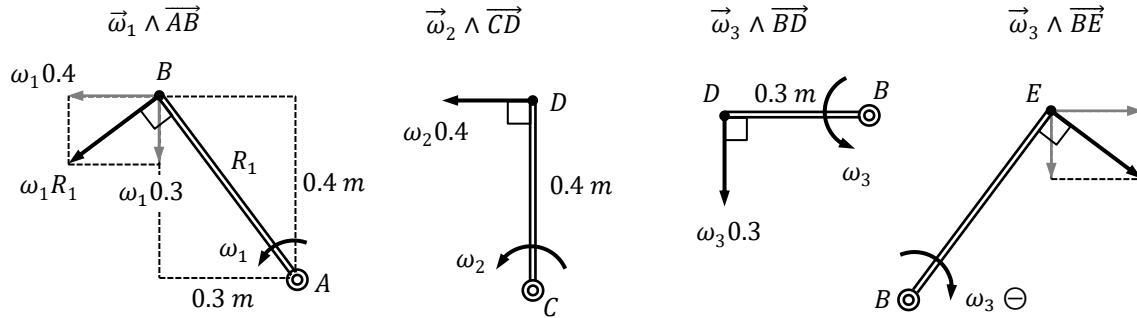
$$\vec{v}_D = \begin{Bmatrix} -0.4 \cdot 5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_D = \begin{Bmatrix} -2 \\ -1.5 - 0.3 \cdot (-5) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

Es suficiente sustituir la velocidad angular en tan sólo uno de los dos caminos, aquel que resulte más sencillo (en este caso, el primero). Hecho esto, como se decía anteriormente se puede calcular también:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{\omega}_3 \wedge \overline{DE} = \vec{v}_D + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

Todos los productos vectoriales que implican a magnitudes angulares admiten una interpretación gráfico-escalar que conviene realizar a modo de comprobación. En estas construcciones las magnitudes angulares de valor conocido deben representarse en su sentido real, y las magnitudes angulares incógnita en el sentido que se hayan supuesto (en este caso todas antihorarias).



Una vez obtenidas las velocidades, para resolver las aceleraciones se reproduce exactamente el mismo camino, pero con ecuaciones de aceleración (donde intervienen resultados del cálculo de velocidades). Además, obsérvese que no es necesario rehacer los productos vectoriales en los que intervienen las aceleraciones angulares desconocidas, puesto que al tener la misma estructura matemática que en el problema de velocidades, simplemente hay que cambiar ω por α .

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{AB} - \omega_1^2 \cdot \overline{AB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 20 \\ -0.3 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} - 5^2 \begin{Bmatrix} -0.3 \\ 0.4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ -6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 7.5 \\ -10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ -16 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{CD} - \omega_2^2 \cdot \overline{CD} = \vec{0} + \begin{Bmatrix} -0.4\alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} - 5^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.4\alpha_2 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_3 \wedge \overline{BD} - \omega_3^2 \cdot \overline{BD} = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ -16 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.3\alpha_3 \end{Bmatrix} - (-5)^2 \begin{Bmatrix} -0.3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -16 - 0.3\alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow -0.4\alpha_2 = 7 \rightarrow \alpha_2 = -17.5 \text{ rad/s}^2$$

$$y \rightarrow -10 = -16 - 0.3\alpha_3 \rightarrow \alpha_3 = -20 \text{ rad/s}^2$$

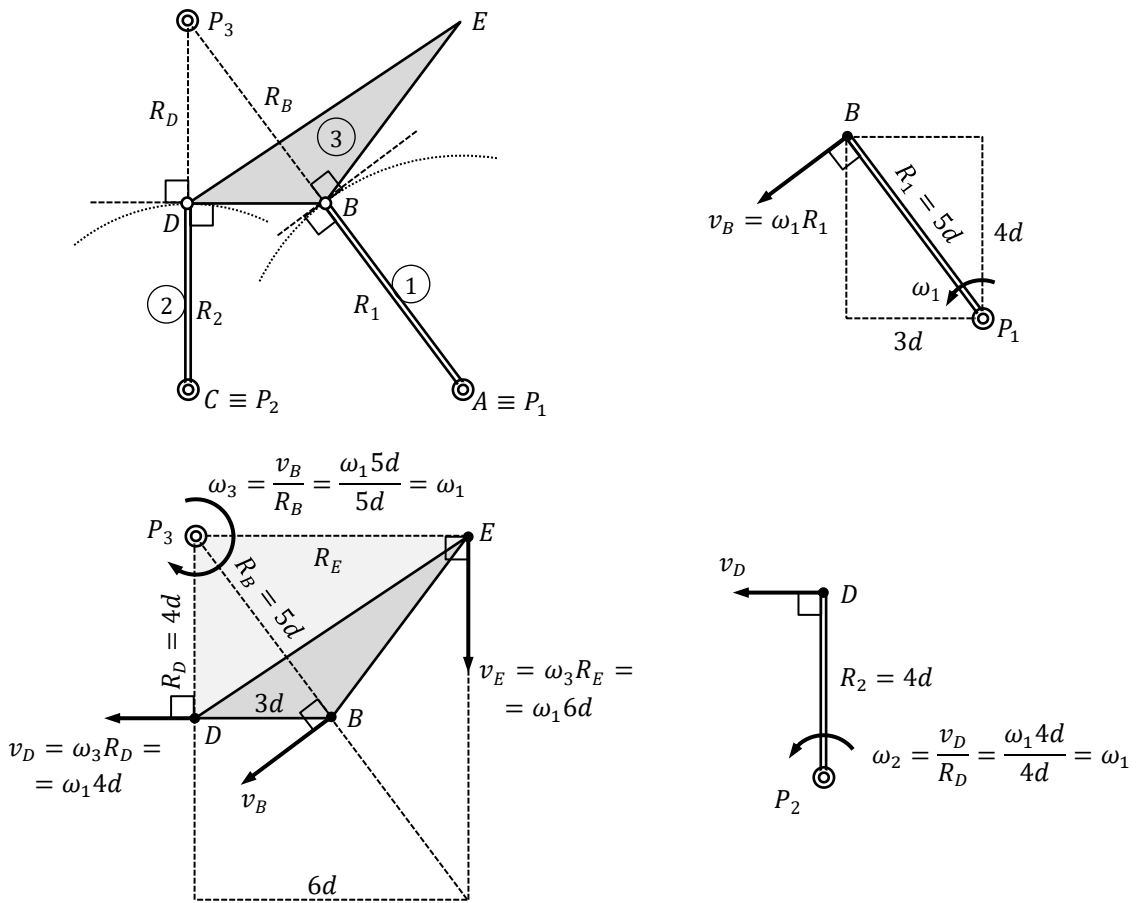
$$\vec{a}_D = \begin{Bmatrix} -0.4 \cdot (-17.5) \\ -10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -10 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_E = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_3 \wedge \overline{BE} - \omega_3^2 \cdot \overline{BE} &= \vec{a}_B + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -20 \\ 0.3 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} - 25 \begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ -16 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8 \\ -6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -7.5 \\ -10 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -32 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

El problema de velocidades podría haberse resuelto mediante un enfoque totalmente gráfico-escalar, sin realizar ninguna operación vectorial, haciendo uso de los polos de velocidades de los elementos. Cada elemento del mecanismo tiene su propio centro instantáneo de rotación:

- Como A es un punto del elemento 1 con velocidad nula es P_1 .
- Como C es un punto del elemento 2 con velocidad nula es P_2 .
- Las trayectorias de los puntos B y C del elemento 3 son circunferencias conocidas, por lo tanto, las direcciones de sus velocidades (tangentes a las trayectorias) son también conocidas. P_3 está en la intersección de las perpendiculares a dichas direcciones.

Tomando $d = 0.1 \text{ m}$ y sabiendo que ω_1 es dato:



7.4.3 Deslizadera sobre guía rectilínea fija

Una deslizadera que discurre por una guía rectilínea fija constituye un punto cuya trayectoria es una línea recta. Siendo así, puesto que la velocidad es tangente a la trayectoria, es un vector de dirección conocida, la de la propia guía. Del mismo modo, como la velocidad, aunque cambie de módulo, tiene dirección constante, la aceleración también constituye un vector en dicha dirección. Una magnitud vectorial incógnita, pero de dirección conocida, en realidad lleva asociada una única incógnita escalar, su módulo (esta incógnita lleva implícito el hecho de que el sentido también es desconocido, el cual se manifiesta en el signo obtenido al resolver el valor de la incógnita). Recuérdese que las siguientes alternativas constructivas son equivalentes, representan la misma condición cinemática:

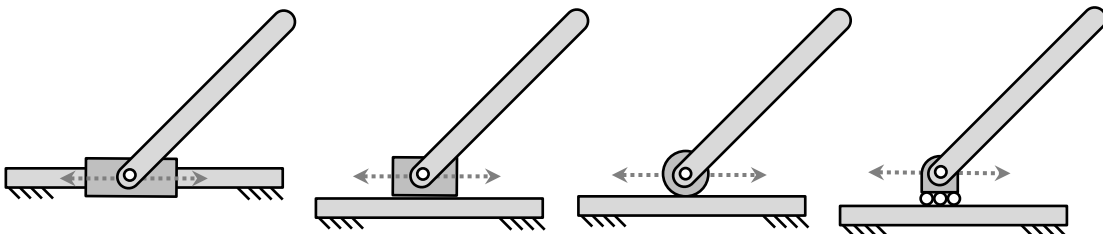
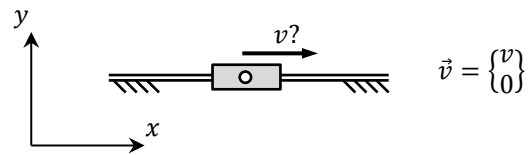


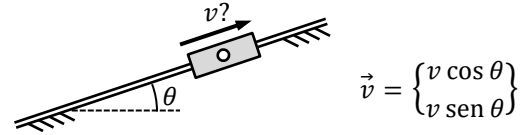
Fig. 7.12 Punto con trayectoria recta

Aunque en un principio pueda pensarse que las dos componentes del vector velocidad, o del vector aceleración, son desconocidas, al tener que quedar la resultante en una determinada dirección, siempre pueden plantearse ambas componentes en función de una única incógnita. Existen varias estrategias para hacer esto:

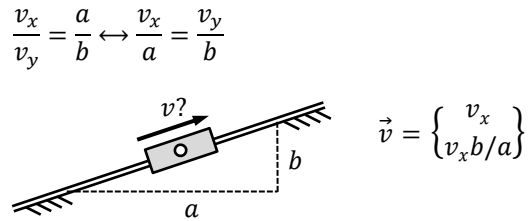
Si la guía tiene la dirección de uno de los ejes del sistema de referencia que va usarse para realizar las operaciones vectoriales, se sabe que la componente en el eje perpendicular a la guía es nula.



Si se conoce el valor del ángulo que forma la guía con una dirección de referencia, pueden establecerse fácilmente las expresiones de las componentes en función del módulo de la magnitud desconocida.



Si la guía es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos conocidos (en las direcciones de los ejes), por semejanza, o proporcionalidad, la relación entre las componentes del vector es la misma que existe entre dichos catetos.



Al relacionar las dos componentes en función de un único parámetro, en su formato vectorial siempre habrá que considerar el signo que corresponda para que ambas componentes den lugar a una resultante en la dirección impuesta.

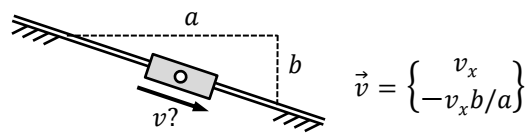
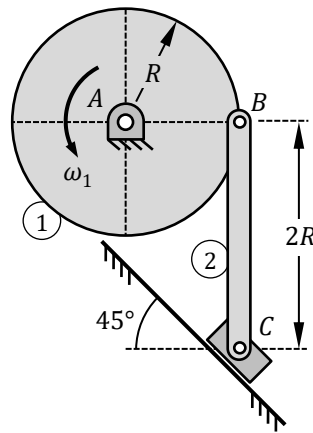


Fig. 7. 13 Componentes de vector en dirección conocida

• Ejemplo 7. 2

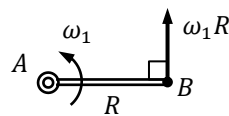
Sabiendo que el disco 1 gira a velocidad angular constante, en función de los datos mostrados en la figura, calcular, en el instante del movimiento representado:

- \vec{v}_C y ω_2 .
- \vec{a}_C y α_2 .

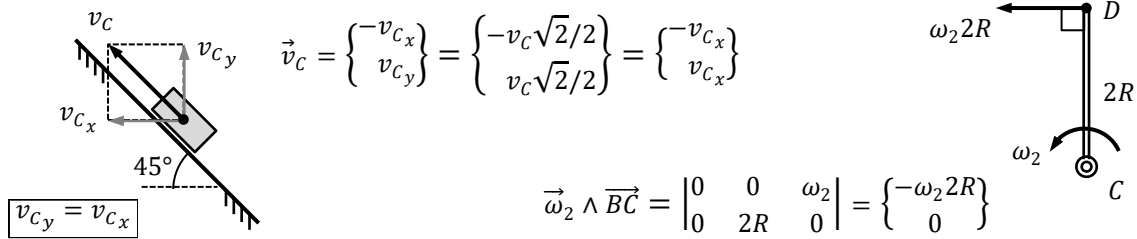


El punto B pertenece a un elemento de velocidad angular conocida (1) que a su vez posee un punto de velocidad conocida (C), por lo que su velocidad es directa:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{AB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 R \end{Bmatrix}$$



La trayectoria del punto C es una línea recta, por lo que la dirección de su velocidad es conocida. Esto implica que en el vector existe únicamente una incógnita. En este caso, puede escogerse entre dejar como incógnita el módulo, o bien poner una de las componentes en función de la otra:



B y C pertenecen al sólido 2, por lo que se puede plantear un campo de velocidades entre ambos puntos. Esta ecuación vectorial, equivalente a un sistema de dos ecuaciones escalares tiene dos incógnitas, ω_2 y v_{C_x} , por lo que ambas son determinables. Empleando la relación entre las componentes:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{BC} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_{C_x} \\ v_{C_x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\omega_2 2R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obsérvese que, en este caso, la ecuación en x contiene a ambas incógnitas, mientras que la ecuación en y contiene sólo a una de ellas, por lo que resulta más conveniente plantearla en primer lugar:

$$y \rightarrow \omega_1 R = v_{C_x} \rightarrow \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} -\omega_1 R \\ \omega_1 R \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow 0 = -v_{C_x} - \omega_2 2R \rightarrow \omega_2 2R = -\omega_1 R \rightarrow \omega_2 = -\frac{\omega_1}{2}$$

El planteamiento utilizando como incógnita el módulo de \vec{v}_C hubiese sido “menos elegante”:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_1 R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_C \sqrt{2}/2 \\ v_C \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\omega_2 2R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y \rightarrow \omega_1 R = \frac{v_C}{\sqrt{2}} \rightarrow v_C = \sqrt{2} \omega_1 R \rightarrow \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \omega_1 R \cdot \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} \omega_1 R \cdot \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_1 R \\ \omega_1 R \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow 0 = -\frac{v_C \sqrt{2}}{2} - \omega_2 2R \rightarrow \omega_2 2R = -\sqrt{2} \omega_1 R \cdot \sqrt{2}/2 \rightarrow \omega_2 = -\omega_1/2$$

Para resolver el problema de aceleraciones se sigue el mismo camino ($\alpha_1 = 0$ porque ω_1 es constante):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_1 \wedge \vec{AB} - \omega_1^2 \cdot \vec{AB} = \vec{0} + \vec{0} - \omega_1^2 \begin{Bmatrix} R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_1^2 R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La aceleración de C tiene también la dirección de la trayectoria recta y el producto vectorial realizado en velocidades es “reutilizable”:

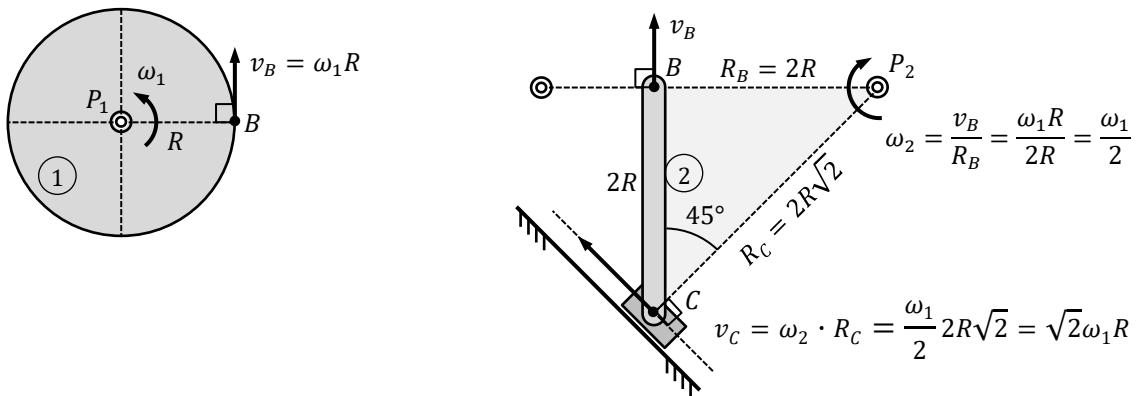
$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_2 \wedge \vec{BC} - \omega_2^2 \cdot \vec{BC} \rightarrow \begin{Bmatrix} -\omega_1^2 R \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_{C_x} \\ a_{C_x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\alpha_2 2R \\ 0 \end{Bmatrix} - \left(-\frac{\omega_1}{2}\right)^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 2R \end{Bmatrix}$$

$$y \rightarrow 0 = a_{C_x} - \frac{\omega_1^2}{4} 2R \rightarrow a_{C_x} = \frac{\omega_1^2 R}{2} \rightarrow \vec{a}_C = \frac{\omega_1^2 R}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow -\omega_1^2 R = -a_{C_x} - \alpha_2 2R \rightarrow \alpha_2 2R = \omega_1^2 R - \frac{\omega_1^2 R}{2} \rightarrow \alpha_2 = \frac{\omega_1^2}{4}$$

El problema de velocidades podría haberse resuelto sin operaciones vectoriales mediante el empleo de los polos de velocidades:

- Como A es un punto del elemento 1 con velocidad nula es P_1 .
- Como se conoce la posición de P_1 y el valor ω_1 , y B pertenece a 1, se determina v_B .
- Como se conocen las direcciones de las velocidades de B y C , ambos puntos pertenecientes a la barra 2, se determina la posición de P_2 en la intersección de las perpendiculares a éstas. Se calculan por geometría las distancias (radios) R_B y R_C .
- Como la barra 2 en ese instante se comporta en velocidades como si estuviera girando en torno a una articulación fija P_2 , conocidos el valor y el sentido de la velocidad de B , se determinan el sentido y el valor de ω_2 .
- Una vez conocidos el valor y el sentido de ω_2 , se determinan el sentido y el valor de la velocidad de C .



7.4.4 Deslizadera sobre guía rectilínea móvil

Siempre que una deslizadera recorra una guía que a su vez tenga movimiento (por ejemplo, la guía es una barra que gira alrededor de una articulación fija), es necesario plantear el movimiento relativo. No se puede plantear directamente un campo de movimiento absoluto entre un punto de la guía y la deslizadera, puesto que, de hecho, la deslizadera es un punto que no pertenece físicamente al elemento que actúa de guía (si no que se mueve sobre él). Al hacerlo, lo que se está obteniendo son en realidad las magnitudes de arrastre de la deslizadera con el elemento guía (la velocidad o aceleración que tendría la deslizadera si fuera un punto que perteneciera a la guía), no las absolutas.

Como se ha dicho, siempre debe plantearse el movimiento relativo del *punto deslizadera* respecto del *elemento guía*. El movimiento relativo es el que plantearía un observador “montado” en el elemento guía, para el cual, al moverse con el propio elemento, dicho sólido constituye su “suelo fijo”. Por lo tanto, si dicha guía es rectilínea, todo lo explicado en el apartado anterior es aplicable, es decir, tanto la velocidad relativa, como la aceleración relativa, son vectores en dirección conocida, la de la propia guía.

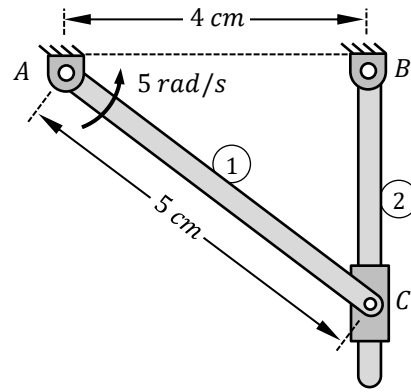
$$\vec{v}_{\text{Deslizadera}} = \vec{v}_{\text{Deslizadera/Guía}} + \vec{v}_{\text{Deslizadera/Guía}}$$

$$\vec{a}_{\text{Deslizadera}} = \vec{a}_{\text{Deslizadera/Guía}} + \vec{a}_{\text{Deslizadera/Guía}} + 2 \cdot \vec{\omega}_{\text{Guía}} \wedge \vec{v}_{\text{Deslizadera/Guía}}$$

Cuando exista una deslizadera sobre guía móvil no se puede plantear el cálculo de velocidades mediante el enfoque gráfico-escalar de polos de velocidades.

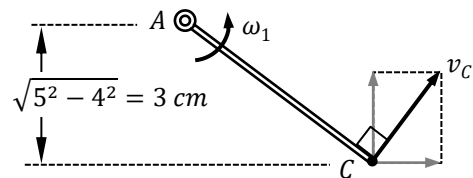
• Ejemplo 7.3

Sabiendo que la barra 1 gira a velocidad angular constante, para los valores mostrados en la figura, calcular la aceleración angular de la barra 2 en el instante del movimiento representado.



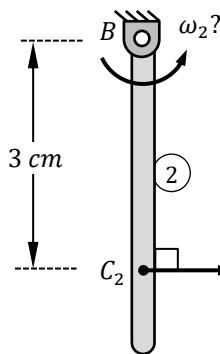
Puesto que el punto C representa una deslizadera cuya guía es la barra 2 (elemento móvil), será necesario plantear el movimiento relativo de C respecto de 2. El punto C pertenece físicamente a la barra 1 (un observador montado en 1 vería a C siempre en la misma posición, fijo), pero no a la barra 2, sobre la cual desliza (un observador montado en 2 vería a C recorriendo el elemento, avanzando por él). Se puede plantear directamente, por tanto, un campo de velocidades absolutas entre los puntos entre los puntos A y C de la barra 1:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 20 \end{Bmatrix} \text{ cm/s}$$



Pero entre la deslizadera C y el elemento 2, es necesario plantear el movimiento de arrastre y el movimiento relativo.

Movimiento de C de arrastre con la barra 2



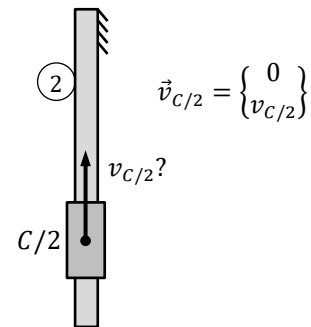
$$\begin{aligned} \vec{v}_{C_2} &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{BC} = \\ &= \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\omega_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$v_{C_2} = \omega_2 \cdot 3$$

Movimiento absoluto de C

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C_2} + \vec{v}_{C/2}$$

Movimiento de C relativo (o respecto) a la barra 2

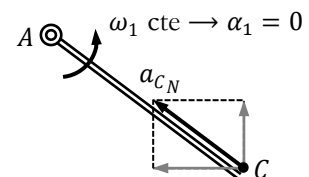


$$\vec{v}_{C/2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_{C/2} \end{Bmatrix}$$

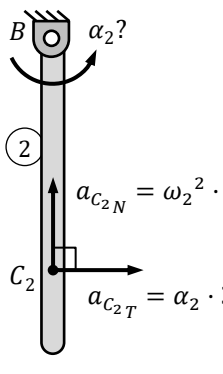
Por tanto: $\begin{Bmatrix} 15 \\ 20 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\omega_2 \\ v_{C/2} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 3\omega_2 &= 15 \rightarrow \omega_2 = 5 \text{ rad/s} \\ v_{C/2} &= 20 \text{ cm/s} \end{aligned}$

Para resolver aceleraciones se reproduce la misma estrategia. Por un lado:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{AC} - \omega_1^2 \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0} + \vec{0} - 5^2 \begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 75 \end{Bmatrix} \text{ cm/s}^2$$

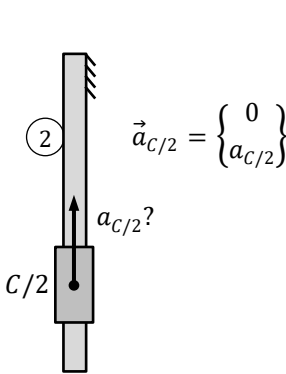


Por otro lado:



$\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC} =$
 $= \vec{0} + \begin{Bmatrix} 3\alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} - 5^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\alpha_2 \\ 75 \end{Bmatrix}$

$a_{C_2N} = \omega_2^2 \cdot 3$
 $a_{C_2T} = \alpha_2 \cdot 3$



$\vec{a}_{C/2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_{C/2} \end{Bmatrix}$

$\vec{a}_C = \vec{a}_{C_2} + \vec{a}_{C/2} + 2\vec{\omega}_2 \wedge \vec{v}_{C/2}$
 $2\vec{\omega}_2 \wedge \vec{v}_{C/2} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -200 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm/s}^2$

Por tanto: $\begin{Bmatrix} -100 \\ 75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\alpha_2 \\ 75 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ a_{C/2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -200 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -100 = 3\alpha_2 - 200 \rightarrow \alpha_2 = 33.3 \text{ rad/s}^2 \\ 75 = 75 + a_{C/2} \rightarrow a_{C/2} = 0 \text{ cm/s}^2 \end{matrix}$

7.4.5 Deslizadera sobre guía circular fija

Si se tiene una deslizadera que recorre una guía circular fija (o un seguidor o patín que recorre una pista circular fija), se sabe que la trayectoria del punto es una circunferencia. El movimiento sería idéntico si se dispusieran una articulación fija en el centro de dicha circunferencia y una barra de dicha articulación a la propia deslizadera. Hecho esto, puesto ya se cuenta con una alternativa redundante de conseguir el mismo movimiento, puede prescindirse de la guía y de la propia deslizadera.

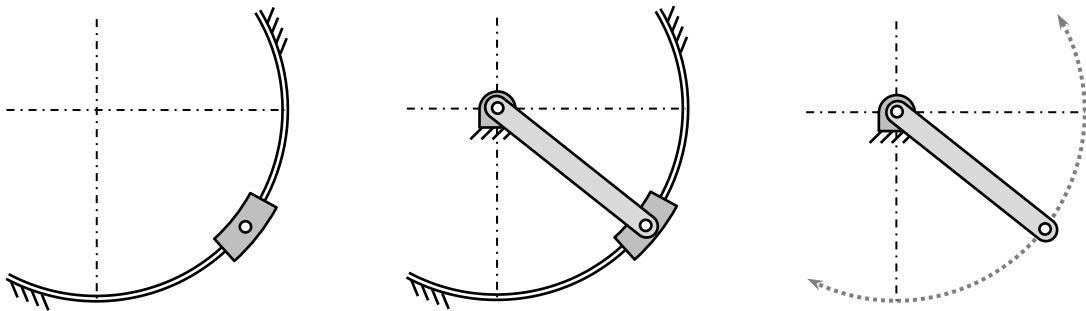


Fig. 7. 14 Transformación de guía circular fija a barra con articulación fija

7.5 MOVIMIENTO DE RODADURA

7.5.1 Curvas polares

El polo de velocidades constituye un centro instantáneo de rotación (para velocidades) que sólo es válido en la posición concreta del sólido en la que se ha obtenido, sólo en ese instante. En el instante siguiente, el punto del plano móvil que tiene (es decir, el punto del sólido que tiene, o que si perteneciera al sólido tendría) velocidad nula será distinto.

Supóngase que el CIR se determina gráficamente en la intersección de las perpendiculares a las velocidades de dos puntos. Como el sólido está en movimiento, ambos puntos describen determinadas trayectorias y las direcciones de las velocidades, siempre tangentes a las trayectorias, van cambiando. Por lo tanto, como las dos perpendiculares a ambas velocidades se mueven, su punto de intersección también lo hace.

Evidentemente el punto P , visto desde el sistema de referencia fijo, va cambiando de coordenadas a lo largo del tiempo, es decir, describe una trayectoria. Esta curva, la sucesión de posiciones que el polo de velocidades ha ido ocupando a lo largo del movimiento del sólido, se denomina *curva polar fija* o *base* del movimiento del sólido.

Pero el CIR tampoco es un punto fijo en el plano móvil, en el propio sólido, sino que va cambiando su posición en el tiempo dentro de éste, es decir, visto desde el propio sólido también se va moviendo. Dicho de otra manera, el punto del sólido que tiene velocidad nula no es siempre el mismo, sino que es distinto en cada instante del movimiento. Para un observador situado en el propio sólido, el punto P describe una trayectoria. Debido a que dicha sucesión de posiciones del polo se define en un sistema de referencia móvil, vinculado al propio sólido, es una curva que se mueve rígidamente unida al mismo, por lo que se denomina *curva polar móvil* o *ruleta*.

Como ambos sistemas de referencia son distintos, las trayectorias del CIR que ven el observador fijo y el observador móvil son curvas distintas. Sin embargo, existe una importante relación entre ambas curvas polares. La base es una curva fija, mientras que la ruleta es una curva que se mueve ‘soldada’ al sólido, pero ambas representan las posiciones que ha ido ocupando un mismo punto, el de velocidad nula del sólido a lo largo de su movimiento.

Evidentemente, en un instante concreto, en una posición específica del sólido, su polo de velocidades es uno, tiene una determinada ubicación independientemente del sistema de referencia desde el que ésta se mida. Por lo tanto, la posición ‘actual’ del polo debe pertenecer simultáneamente a ambas curvas. De hecho, base y ruleta son siempre tangentes entre sí (siendo el CIR el punto de tangencia). Además, como esta relación debe verificarse para cualquier instante, a medida que el sólido se mueve, se comprueba que la ruleta rueda sin deslizar sobre la base.

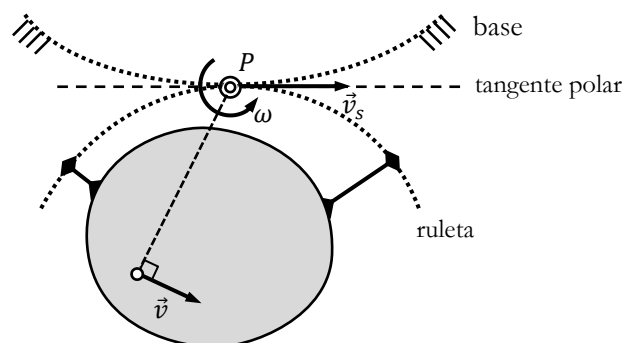


Fig. 7. 15 Base y ruleta

Una manera muy intuitiva de comprender los conceptos de base y ruleta consiste en imaginar que el sólido se extiende hasta tomar el perfil dado por la ruleta y que la base es el perfil de un suelo fijo curvo. Las propiedades de estas curvas, asociadas al propio movimiento del sólido, son tales que el sólido se mueve exactamente igual que si el ‘perfil ruleta’ que lo contiene rodara sin deslizar sobre el ‘suelo base’.

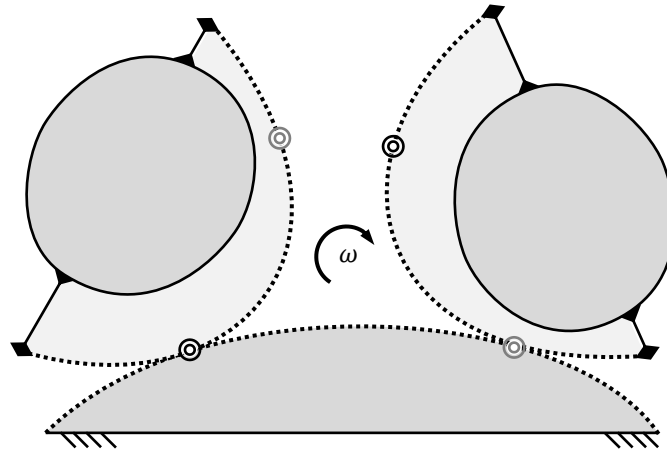


Fig. 7.16 Rodadura de la ruleta sobre la base

7.5.2 Velocidad de sucesión

El CIR tiene un doble comportamiento, en función de que se considere su existencia en un instante concreto, o bien a lo largo del tiempo.

- *En un instante concreto:* Es un punto del sólido, el punto de éste que posee velocidad nula.
- *A lo largo del tiempo:* Es un punto matemático con movimiento, se mueve por el sólido.

Como punto perteneciente al sólido en un instante concreto, $v_p = 0$.

Sin embargo, como punto matemático con movimiento a lo largo del tiempo (independiente del sólido), el punto P tiene una determinada velocidad en cada instante. Recuérdese que, visto desde el sistema de referencia fijo, este punto matemático describe una trayectoria que es la base. El punto se mueve recorriendo dicha curva con velocidad determinada, que se denomina *velocidad de sucesión*, o *velocidad de cambio de polo* y que denota como \vec{v}_s .

Como la velocidad de sucesión es la velocidad de un punto que describe una determinada trayectoria, es tangente a la misma. Como base y ruleta son tangentes entre sí, la velocidad de sucesión es, obviamente, tangente a ambas curvas polares. De hecho, esta recta tangente, que define la dirección de \vec{v}_s , se denomina *tangente polar*.

7.5.3 Aceleración del CIR

Como se ha visto, el polo de velocidades como punto perteneciente al sólido, por el hecho de poseer velocidad nula, actúa como un centro instantáneo de rotación de dicho sólido de cara al cálculo de la velocidad de cualquier punto del mismo. Sin embargo, no sería correcto calcular en ese instante las aceleraciones como si el cuerpo estuviera girando en torno al CIR, porque, como se demostrará, dicho punto, como punto perteneciente al sólido, no posee aceleración nula, es decir, $a_p \neq 0$.

Derivando respecto del tiempo la expresión: $\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \overline{PB} \rightarrow \dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{PB} + \vec{\omega} \wedge \dot{\overline{PB}}$

Como: $\vec{r}_B = \vec{r}_P + \overline{PB} \rightarrow \overline{PB} = \vec{r}_B - \vec{r}_P = \vec{v}_B - \vec{v}_s$

Por tanto: $\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overline{PB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_B - \vec{v}_s)$

El punto B puede ser cualquiera del plano móvil, por lo que la expresión anterior también ha de verificarse al particularizarla para el punto P :

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \wedge \overline{PP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_P - \vec{v}_s)$$

Teniendo en cuenta que tanto \overline{PP} como \vec{v}_P son vectores nulos queda finalmente:

$$\vec{a}_P = -\vec{\omega} \wedge \vec{v}_s = \vec{v}_s \wedge \vec{\omega}$$

Obviamente, este resultado es perpendicular a $\vec{\omega}$, es decir, \vec{a}_P es un vector contenido en el plano del movimiento. Pero además se observa que \vec{a}_P es perpendicular a \vec{v}_s y por lo tanto a la tangente polar. La recta que da soporte a la aceleración del CIR se denomina *normal polar*.

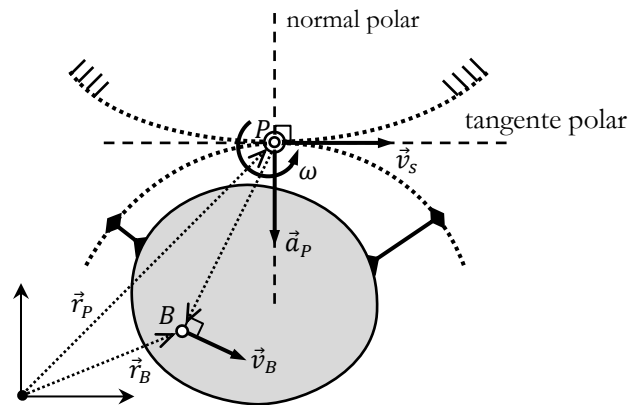


Fig. 7.17 Aceleración del CIR

7.5.4 Rodadura pura entre dos elementos móviles

Supónganse dos sólidos 1 y 2 con movimiento plano, de tal manera que se produce una rodadura sin deslizamiento entre ellos. Siempre existe un punto de contacto, A , entre ambos, pero en este punto contactan en realidad un punto de cada sólido, A_1 y A_2 . El estudio de la rodadura plana consiste en determinar las relaciones que se dan entre las velocidades y las aceleraciones de estos dos puntos en contacto. Para ello se realiza un análisis de movimiento relativo del punto A_1 respecto del sólido 2.

Para un observador situado en el sólido 2, el sólido 1 rueda sin deslizar sobre una pista fija. Esto significa que en el movimiento relativo el perfil del sólido 2 es la base del sólido 1, mientras que el propio perfil del sólido 1 es la ruleta. Es posible por tanto aprovechar todas las características conocidas de las curvas polares. Se consideran en el punto de contacto las rectas tangente y normal a los perfiles, definiendo los vectores unitarios \vec{u}_T y \vec{u}_N . En el movimiento de 1 respecto de 2 el punto de contacto entre base y ruleta es el CIR, por lo tanto:

- $\vec{v}_{A_1/2} = \vec{v}_P = \vec{0}$
- $\vec{a}_{A_1/2} = \vec{a}_P = a_P \cdot \vec{u}_N$

Además, en el movimiento de arrastre, como los puntos A_1 y A_2 coinciden en posición, la velocidad que tendría A_1 si perteneciera al sólido 2 es la velocidad de A_2 y lo mismo para las aceleraciones.

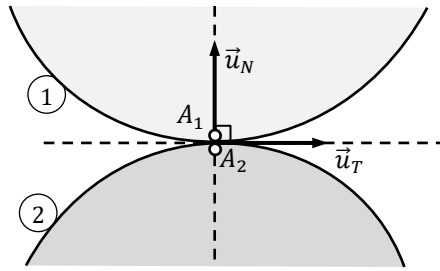


Fig. 7.18 Rodadura plana

Teniendo en cuenta esto: $\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_{1/2}} + \vec{v}_{A_1/2} = \vec{v}_{A_2} + \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{v}_{A_1} = \vec{v}_{A_2}}$

Es decir, en rodadura pura (sin deslizamiento) los dos puntos en contacto, aunque pertenezcan a sólidos diferentes tienen la misma velocidad.

En lo que respecta a las aceleraciones:

$$\vec{a}_{A_1} = \vec{a}_{A_{1/2}} + \vec{a}_{A_1/2} + 2\vec{\omega}_2 \wedge \vec{v}_{A_1/2} = \vec{a}_{A_2} + a_p \cdot \vec{u}_N + \vec{0}$$

Multiplicando escalarmente esta ecuación por \vec{u}_T y teniendo en cuenta que $\vec{u}_N \cdot \vec{u}_T = 0$:

$$\vec{a}_{A_1} \cdot \vec{u}_T = \vec{a}_{A_2} \cdot \vec{u}_T + a_p \cdot \vec{u}_N \cdot \vec{u}_T \rightarrow \boxed{\vec{a}_{A_1} \cdot \vec{u}_T = \vec{a}_{A_2} \cdot \vec{u}_T}$$

Es decir, en rodadura pura los dos puntos en contacto, aunque no tienen la misma aceleración, siempre cumplen que las proyecciones de sus aceleraciones sobre la recta tangente al contacto son iguales.

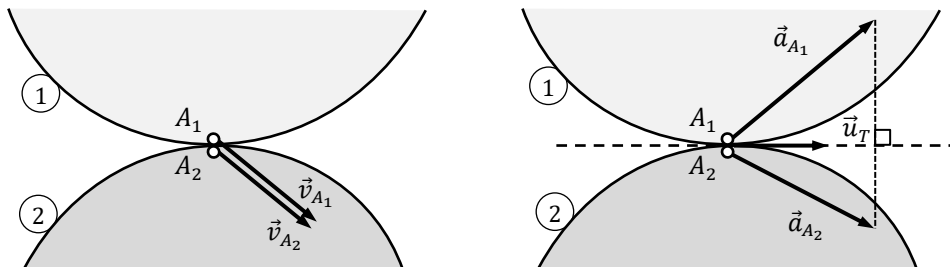


Fig. 7.19 Velocidades y aceleraciones en rodadura

7.5.5 Rodadura pura sobre pista fija

En el caso de que se tenga una rodadura pura sobre una pista fija, las condiciones generales de rodadura quedan particularizadas de la siguiente manera. Evidentemente, el punto de contacto en el elemento fijo no se mueve, por lo que tiene velocidad y aceleración nulas.

En primer lugar, puesto que los dos puntos en contacto han de tener la misma velocidad, se deduce que el punto de contacto en el sólido móvil tiene también velocidad nula. Dicho punto de contacto es, por tanto, el polo de velocidades del elemento que rueda.

Por otro lado, la proyección de las aceleraciones de los dos puntos en contacto sobre la tangente al contacto ha de ser la misma. El punto del suelo no tiene aceleración, por lo que dicha proyección es nula. Para que la proyección de la aceleración del punto de contacto del elemento móvil sea igualmente nula, la aceleración de dicho punto debe ser perpendicular a la tangente al contacto. Se trata por tanto de un vector que, aun siendo de módulo desconocido, tiene una dirección conocida.

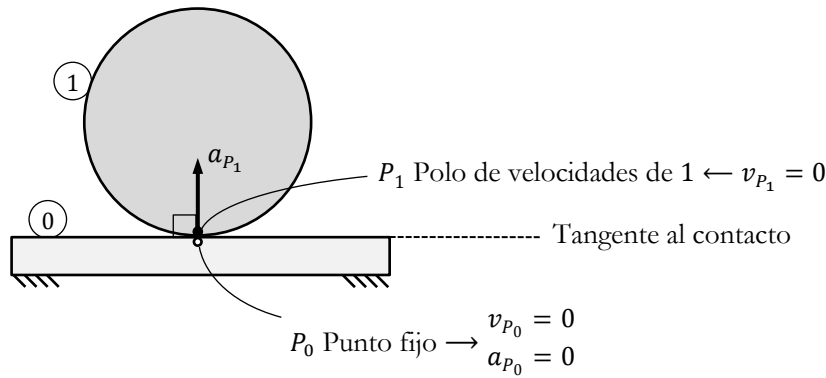
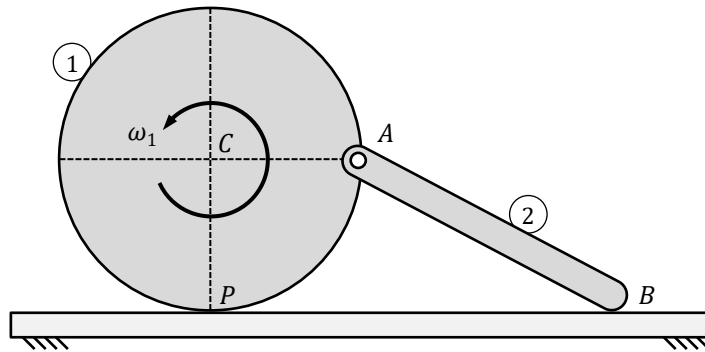


Fig. 7. 20 Velocidad y aceleración del punto de contacto en rodadura pura sobre pista fija

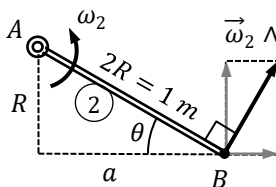
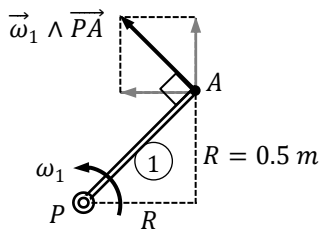
• Ejemplo 7. 4

El diámetro del disco es de 1 m y la longitud de la barra es de 1 m. El disco rueda sin deslizar sobre el suelo hacia la izquierda con velocidad angular constante de 4 rad/s, mientras que el extremo B de la barra resbala sobre el suelo. En la posición representada, calcular la velocidad angular y la aceleración angular de la barra.



El punto P es el polo de velocidades del disco, puesto que tiene velocidad nula, la misma que el punto del suelo en contacto con el disco. Por tanto:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega}_1 \wedge \overline{PA} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$



$$\theta = \arcsen R/2R = \arcsen 1/2 = 30^\circ$$

$$a = 2R \cos 30^\circ = 2R \sqrt{3}/2 = R\sqrt{3}$$

$$\text{O también: } a = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

La trayectoria del punto B es una línea horizontal, por lo que la velocidad de dicho punto tiene dirección definida:

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} v_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2 \wedge \overline{AB} = \vec{v}_A + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_2/2 \\ \sqrt{3}\omega_2/2 \end{Bmatrix}$$

$$y \rightarrow 0 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_2 \rightarrow \omega_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ rad/s}$$

Como el punto C avanza a velocidad constante a largo de una trayectoria rectilínea (el vector \vec{v}_C tiene constante el módulo y la dirección), $\vec{a}_C = \vec{0}$. Como además ω_1 es constante $\rightarrow \alpha_1 = 0$. Por tanto:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{CA} - \omega_1^2 \cdot \overline{CA} = \vec{0} + \vec{0} - 4^2 \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} a_B \\ 0 \end{Bmatrix} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{AB} - \omega_2^2 \cdot \overline{AB} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_2/2 \\ \sqrt{3}\alpha_2/2 \end{Bmatrix} - \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \begin{Bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$$

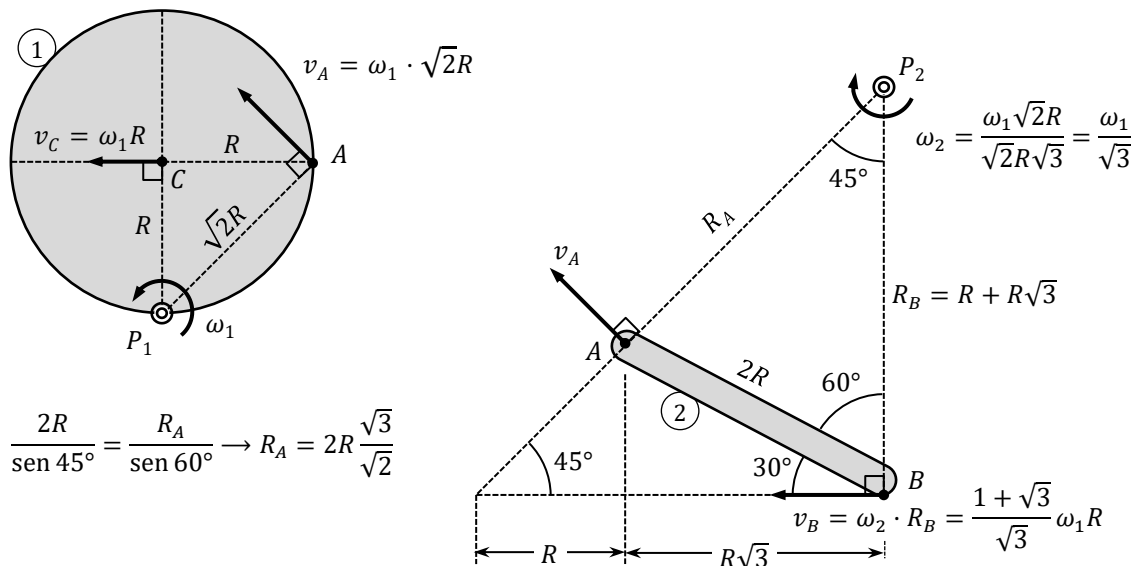
$$y \rightarrow 0 = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_2 + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 = -\frac{16}{3\sqrt{3}} \text{ rad/s}^2$$

Adviértase que, aunque $v_P = 0$:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{CP} - \omega_1^2 \cdot \overline{CP} = \vec{0} + \vec{0} - 4^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Es decir, que, como es sabido, la aceleración del punto de contacto en una rodadura pura sobre un elemento fijo, tiene la dirección perpendicular a la tangente al propio contacto.

El problema de velocidades también podría haberse resuelto alternativamente sin operaciones vectoriales, mediante un enfoque gráfico-escalar basado en el empleo de centros instantáneos de rotación. El punto P del disco, puesto que tiene velocidad nula, constituye el polo de velocidades de dicho sólido, P_1 . Su empleo permite calcular la velocidad del punto A del disco, que a su vez es también un punto de la barra. Se dispone también de la dirección de la velocidad del punto B de la barra (trayectoria conocida). En la intersección de las perpendiculares a las velocidades de A y B se encuentra P_2 .



El resultado de v_B es el que se habría obtenido de la ecuación x el procedimiento vectorial (recordando que para los datos del problema $\omega_1 R = 4 \text{ rad/s} \cdot 0.5 \text{ m} = 2 \text{ m/s}$):

$$x \rightarrow v_B = -2 + \frac{\omega_2}{2} = -2 - \frac{4/\sqrt{3}}{2} = -2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ m/s}$$

7.6 POLO DE ACELERACIONES

7.6.1 Definición y propiedades

La ecuación del campo de aceleraciones de un sólido proporciona la aceleración de un punto cualquiera del sólido a partir de la aceleración de otro punto, la velocidad angular y la aceleración angular del sólido. Salvo en el caso particular de sólido en traslación ($\omega = \alpha = 0$), cada punto del plano móvil tiene una aceleración distinta. Existirá, por tanto, de forma análoga a lo que sucedía con el polo de velocidades, un punto con la particularidad de que su aceleración es nula. Este punto se denomina *polo de aceleraciones* y se denota como Q .

$$\vec{a}_Q = \vec{0} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AQ} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{AQ}$$

Como la posición de A es conocida, para determinar la posición de Q simplemente se debe despejar de la ecuación anterior el vector \overrightarrow{AQ} . Sin embargo, esta extracción no es inmediata ya que se encuentra formando parte de un producto vectorial. Para lograr ese objetivo, es necesario premultiplicar vectorialmente la ecuación por $\vec{\alpha}$, teniendo en cuenta que por ser $\vec{\alpha}$ perpendicular a \overrightarrow{AQ} se verifica que $\vec{\alpha} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AQ}) = -\alpha^2 \cdot \overrightarrow{AQ}$

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{0} = \vec{\alpha} \wedge \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AQ}) - \vec{\alpha} \wedge (\omega^2 \cdot \overrightarrow{AQ})$$

$$\vec{0} = \vec{\alpha} \wedge \vec{a}_A - \alpha^2 \cdot \overrightarrow{AQ} - \omega^2 \cdot (\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AQ})$$

$$\vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AQ} = \frac{\vec{\alpha} \wedge \vec{a}_A - \alpha^2 \cdot \overrightarrow{AQ}}{\omega^2}$$

Llevando ahora esta expresión a la de partida:

$$\vec{0} = \vec{a}_A + \frac{\vec{\alpha} \wedge \vec{a}_A - \alpha^2 \cdot \overrightarrow{AQ}}{\omega^2} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{\omega^2 \cdot \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{a}_A - \alpha^2 \cdot \overrightarrow{AQ} - \omega^4 \cdot \overrightarrow{AQ}}{\omega^2}$$

$$(\alpha^2 + \omega^4) \cdot \overrightarrow{AQ} = \omega^2 \cdot \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{a}_A$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\omega^2 \cdot \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{a}_A}{\alpha^2 + \omega^4} = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^4} \left\{ \begin{matrix} \omega^2 \cdot a_{Ax} - \alpha \cdot a_{Ay} \\ \omega^2 \cdot a_{Ay} + \alpha \cdot a_{Ax} \end{matrix} \right\}$$

Una vez obtenida la posición de Q , la aceleración de cualquier punto B del sólido puede obtenerse como si éste estuviera girando en torno a dicho punto:

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{QB} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{QB}$$

La principal propiedad del polo de aceleraciones es que, en un mismo instante, para cualquier punto B del plano móvil, el ángulo φ que forman \vec{a}_B y \overrightarrow{QB} es el mismo:

$$\tan \varphi = \frac{\alpha \cdot R}{\omega^2 \cdot R} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

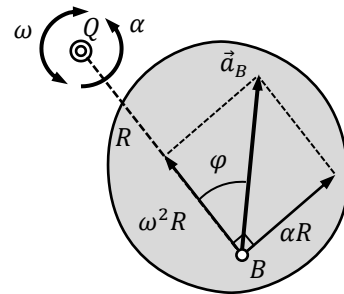


Fig. 7. 21 Polo de aceleraciones

7.6.2 Circunferencias notables

Considérese el triángulo rectángulo formado por la velocidad de un punto y el radio que lo une con P . Es prácticamente inmediato comprobar que todos los puntos del sólido, independientemente de su posición, forman triángulos semejantes, mismo ángulo φ .

$$\tan \varphi = \frac{\omega R}{R} = \omega$$

O también:

$$\tan \varphi = \frac{v_A}{v_A/\omega} = \omega$$

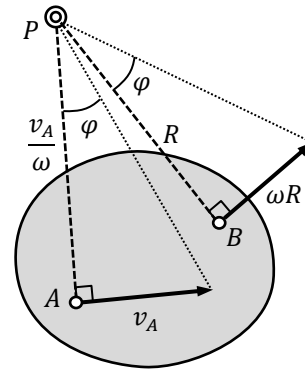


Fig. 7. 22 Semejanza de triángulos

Otra propiedad de los sólidos con movimiento plano es la siguiente. En un cierto instante de tiempo, cualquier punto del sólido tiene una velocidad y una aceleración. Pues bien, si se traza en el plano móvil una circunferencia cualquiera que contenga simultáneamente al polo de velocidades y al polo de aceleraciones del sólido, el ángulo β que forman entre sí los vectores velocidad y aceleración de un punto, se mantiene constante para todos los puntos de dicha circunferencia. Circunferencias de distinto diámetro se corresponden con distinto valor de dicho ángulo.

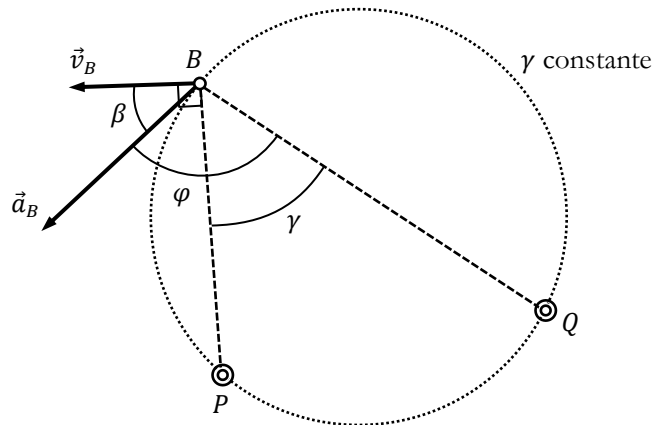


Fig. 7. 23 Ángulo entre velocidad y aceleración de un punto

Para demostrar esta propiedad debe recordarse que, para cualquier punto de un mismo sólido, en un determinado instante:

- El ángulo que forma la velocidad del punto con el vector que lo une al polo de velocidades es constante (de hecho, es siempre un ángulo recto).
- El ángulo que forma la aceleración con el vector que lo une al polo de aceleraciones, φ , es constante.

Si ahora se considera el ángulo γ que forman entre sí los vectores que unen un mismo punto del sólido con los polos de velocidades y de aceleraciones, se tiene:

$$\beta + \varphi = \gamma + \pi/2 \rightarrow \beta = \gamma + \pi/2 - \varphi$$

Por lo tanto, para que β sea constante ha de serlo γ . Recordando el concepto de arco capaz, todos los puntos del plano que mantienen un ángulo constante al unirlos con dos puntos fijos definen precisamente una circunferencia que pasa por dichos puntos.

De las infinitas circunferencias que pasan por P y Q , cada una de las cuales se corresponde con un valor distinto de β , tienen especial importancia las asociadas a $\beta = 0$ y $\beta = \pi/2$, es decir los lugares geométricos de puntos del plano móvil en los que \vec{v} y \vec{a} son paralelas y perpendiculares respectivamente. Éstas reciben el nombre de *circunferencias notables* y ponen de manifiesto interesantes características del movimiento del sólido. Para comprenderlas debe recordarse que la aceleración tangencial, \vec{a}_T , es la componente de la aceleración en la dirección de la velocidad, mientras que la aceleración normal, \vec{a}_N , es la componente de la aceleración perpendicular a la velocidad.

Circunferencia de las inflexiones:

Cuando un punto tiene \vec{v} y \vec{a} paralelas quiere decir que toda la aceleración es tangencial, es decir que $a_N = v^2/\rho = 0$. Como sólo P tiene velocidad nula, el resto de puntos del sólido que cumplen esta condición, los que se encuentran sobre la circunferencia de $\beta = 0$, han de cumplir que $\rho = \infty$. Recuérdese que ρ es el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el punto y que el hecho de que una curva tenga en un punto el centro de curvatura en el infinito significa que ese punto es un punto de inflexión de la curva, de inversión de su curvatura. De ahí proviene el nombre de circunferencia de las inflexiones, puesto que define, en un instante dado, el lugar geométrico de puntos del sólido cuyas trayectorias están pasando por un punto de inflexión.

Circunferencia de las inversiones (o de Bresse):

Cuando un punto tiene \vec{v} y \vec{a} perpendiculares quiere decir que toda la aceleración es normal, es decir que $a_T = \dot{v} = 0$. Que la derivada temporal del módulo de la velocidad sea nula quiere decir que dicho punto está invirtiendo el sentido de crecimiento de su velocidad, es decir, que está pasando de acelerar a frenar (en el movimiento a lo largo de su trayectoria), o viceversa. Es por ello la circunferencia de puntos con $\beta = \pi/2$ se denomina circunferencia de las inversiones. Además, es inmediato deducir que para todos estos puntos la línea de acción de la aceleración pasa por el polo de velocidades P .

Se puede demostrar que la circunferencia de las inflexiones es tangente a la tangente polar (su centro está en la normal polar), mientras que la circunferencia de las inversiones es tangente a la normal polar (su centro está en la tangente polar).

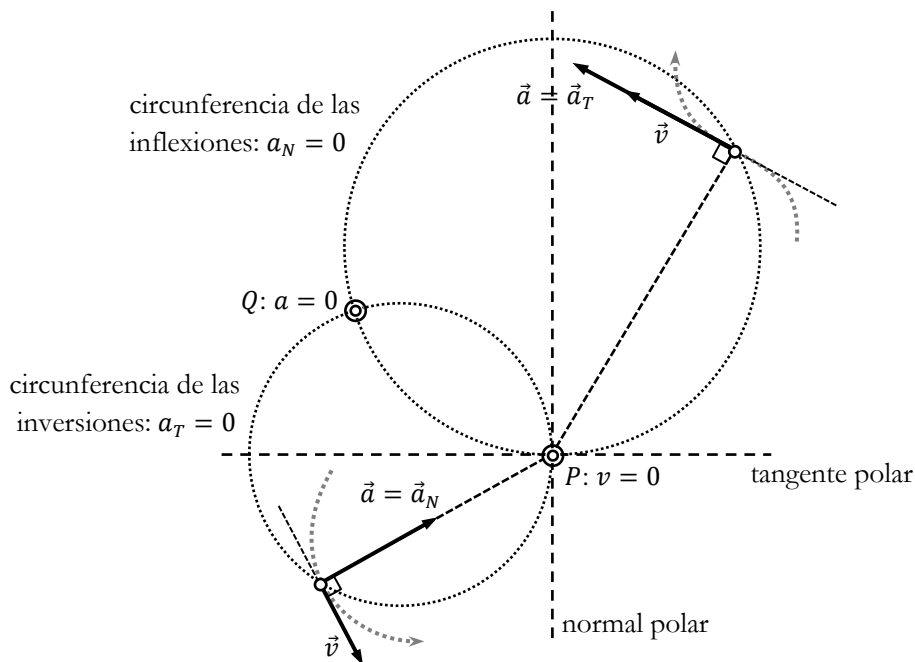
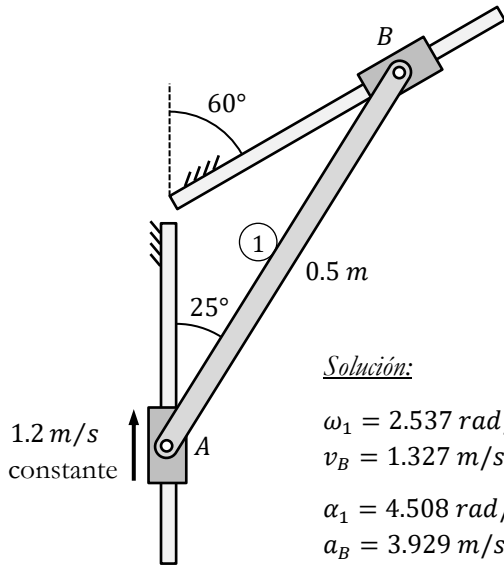


Fig. 7. 24 Circunferencias notables

Problemas

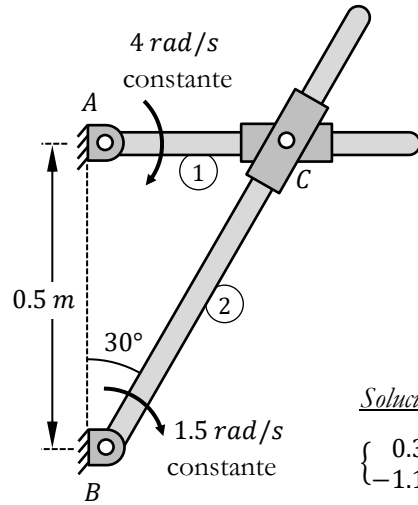
1. Calcular v_B , a_B , ω_1 , α_1 .



Solución:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.537 \text{ rad/s } \curvearrowright \\ v_B &= 1.327 \text{ m/s } \nearrow \\ \alpha_1 &= 4.508 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \\ a_B &= 3.929 \text{ m/s}^2 \swarrow \end{aligned}$$

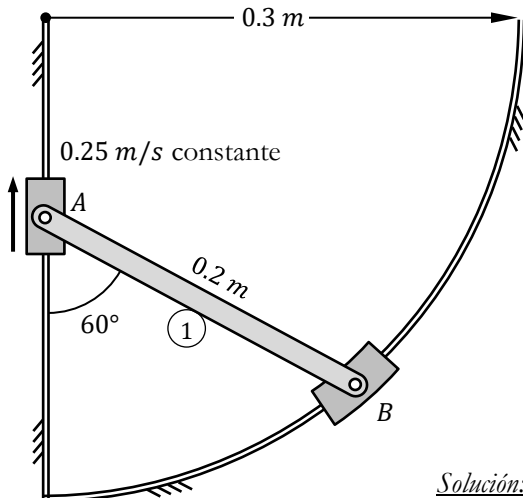
2. Calcular \vec{v}_P y \vec{a}_P .



Solución:

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} 0.333 \\ -1.154 \end{Bmatrix} \text{ m/s} \\ &\begin{Bmatrix} -4.426 \\ -2.666 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

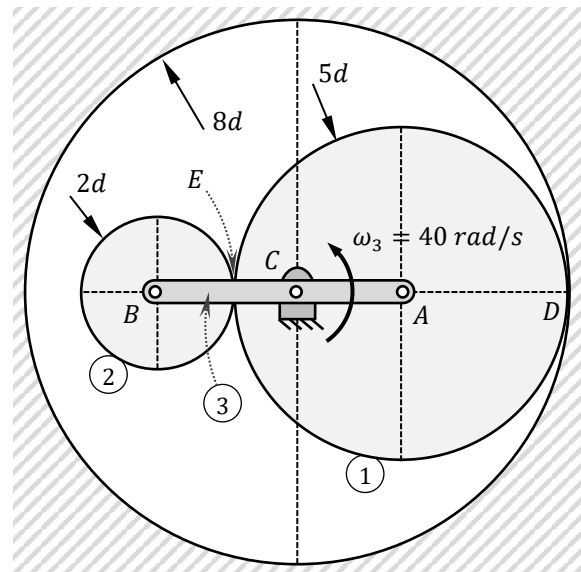
3. Calcular ω_1 , \vec{v}_B , α_1 , \vec{a}_B .



Solución:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2.44 \text{ rad/s } \curvearrowright & \vec{v}_B &= \begin{Bmatrix} -0.244 \\ -0.172 \end{Bmatrix} \text{ m/s} \\ \alpha_1 &= 9.36 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright & \vec{a}_B &= \begin{Bmatrix} -1.966 \\ -1.026 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

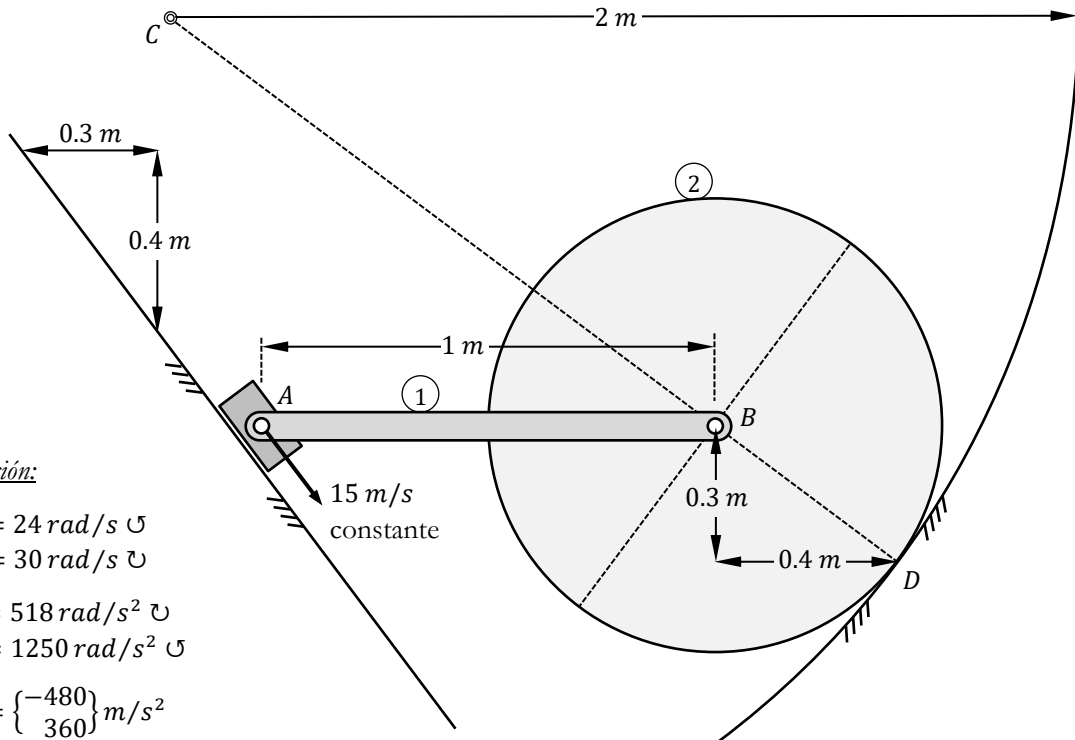
4. Calcular ω_1 y ω_2 .



Solución: $\omega_1 = 24 \text{ rad/s } \curvearrowright$ $\omega_2 = 200 \text{ rad/s } \curvearrowright$

5. Calcular:

- Las velocidades angulares de los elementos 1 y 2 mediante centros instantáneos de rotación.
- Las aceleraciones angulares de los elementos 1 y 2 y la aceleración del punto D del elemento 2.

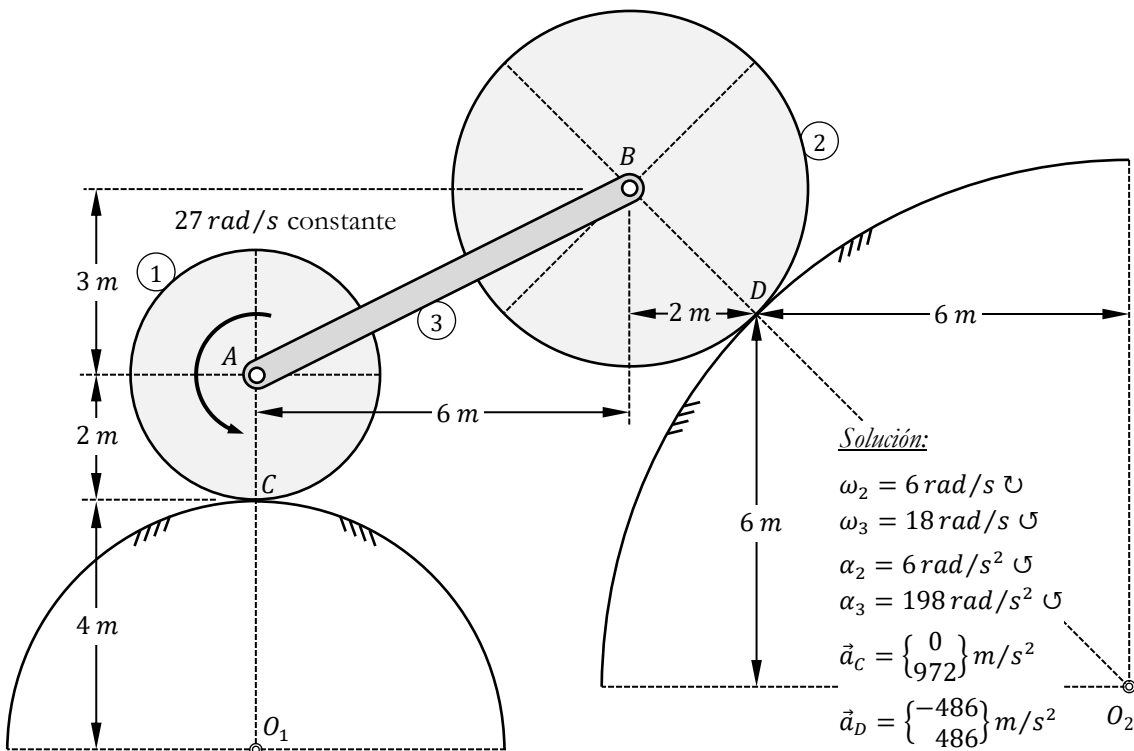


Solución:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 24 \text{ rad/s } \curvearrowright \\ \omega_2 &= 30 \text{ rad/s } \curvearrowleft \\ \alpha_1 &= 518 \text{ rad/s}^2 \curvearrowleft \\ \alpha_2 &= 1250 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \\ \vec{a}_D &= \begin{Bmatrix} -480 \\ 360 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

6. Calcular:

- La velocidad angular de la rueda 2 mediante un enfoque gráfico-escalar y uno analítico-vectorial.
- La aceleración angular de la rueda 2 y las aceleraciones de los polos de velocidades de ambas ruedas.



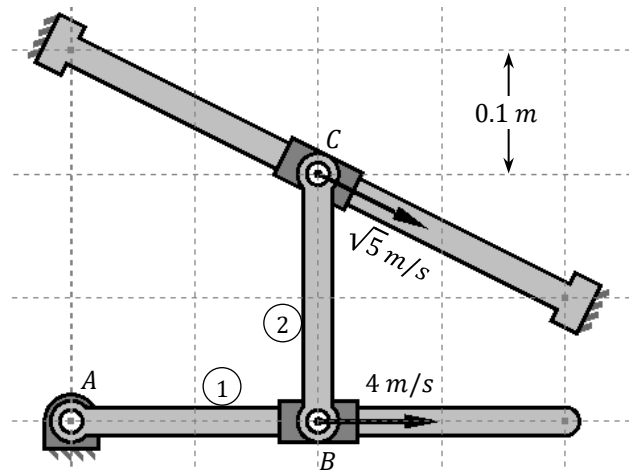
Solución:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 6 \text{ rad/s } \curvearrowleft \\ \omega_3 &= 18 \text{ rad/s } \curvearrowright \\ \alpha_2 &= 6 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \\ \alpha_3 &= 198 \text{ rad/s}^2 \curvearrowright \\ \vec{a}_C &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 972 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \\ \vec{a}_D &= \begin{Bmatrix} -486 \\ 486 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Problemas de Examen

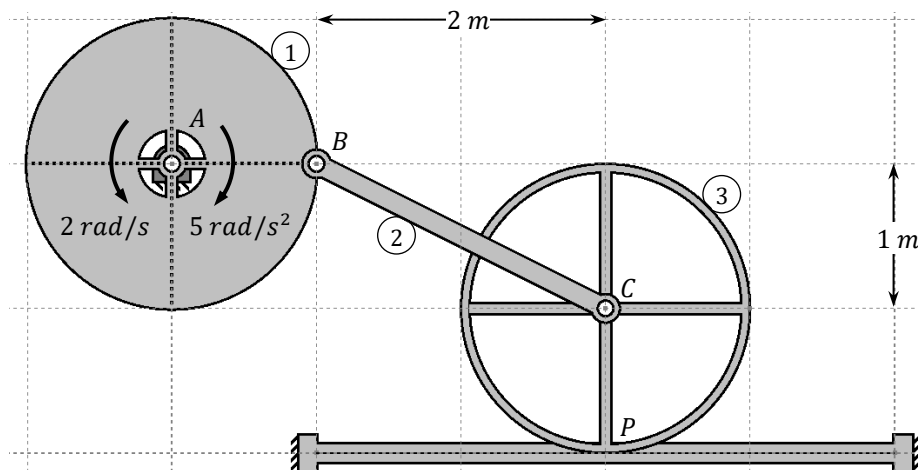
▪ Problema 7.1 *enero 2016* 45 minutos

Sabiendo que las velocidades de avance de ambas deslizaderas sobre sus guías poseen los valores y sentidos indicados en la figura y que son constantes, calcular, en la posición mostrada, la aceleración angular de la barra 2. [2.5 puntos]



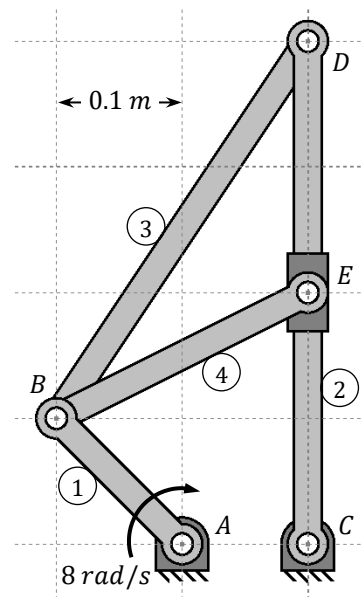
▪ Problema 7.2 *enero 2018* 40 minutos

El disco 1 gira en torno a la articulación fija A con las magnitudes angulares indicadas. El disco 3 rueda sin deslizarse sobre el suelo. Calcular, en la posición representada, la aceleración angular de la barra 2 y la aceleración del punto P del disco 3. [2.5 puntos]



▪ Problema 7.3 *enero 2020* 40 minutos

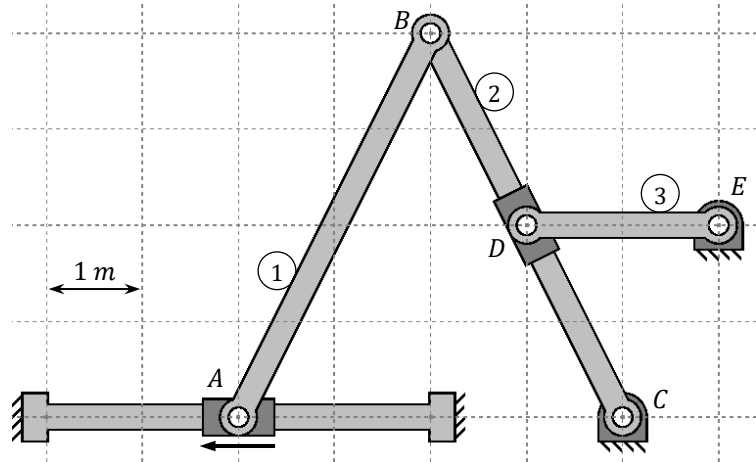
Calcular ω_4 y la aceleración de Coriolis de la deslizadera E (en su movimiento respecto de la barra 2). [1.4 puntos]



▪ **Problema 7.4 ene 2021 35 min**

La deslizadera A se mueve hacia la izquierda a 16 m/s . Calcular la velocidad angular de la barra 3.

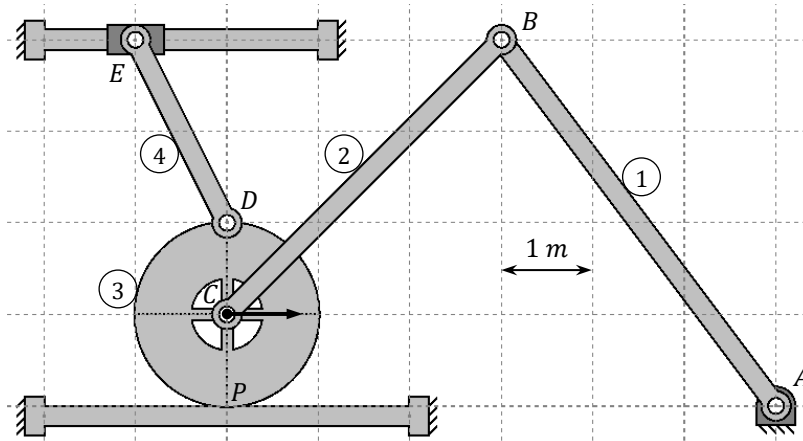
[1.4 puntos]



▪ **Problema 7.5 enero 2022 45 minutos**

Sabiendo que el centro del disco se mueve hacia la derecha a 7 m/s , acelerando a 40 m/s^2 , calcular:

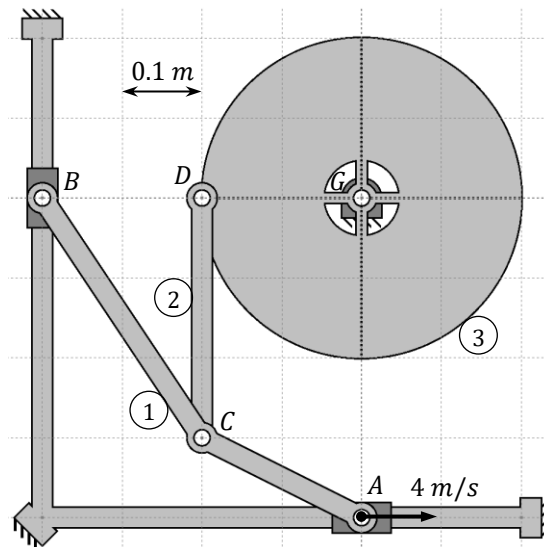
- a) La velocidad angular de todos los elementos. [1.2 puntos]
- b) La aceleración del punto P del elemento 3. [0.6 puntos]



▪ **Problema 7.6 enero 2023 40 minutos**

Sabiendo que la deslizadera A se mueve hacia la derecha a velocidad constante 4 m/s , calcular:

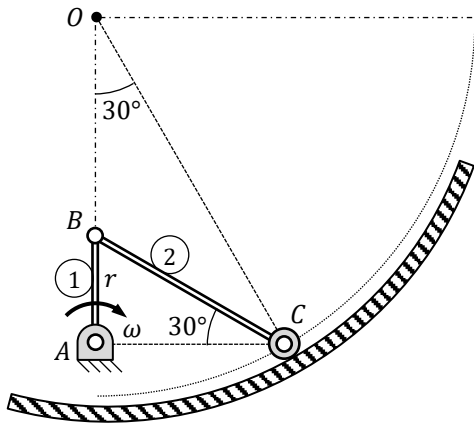
- a) La velocidad angular de los 3 elementos. [0.8 puntos]
- b) La aceleración angular de los 3 elementos. [0.8 puntos]



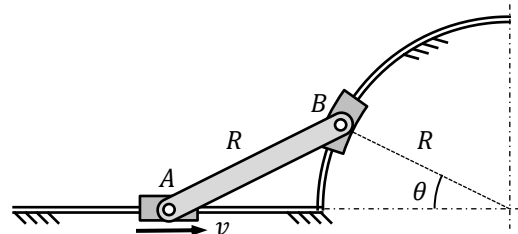
Teoría aplicada de Examen

Resolver el problema de velocidades completo del mecanismo en función de los datos de la figura mediante el uso exclusivo de polos de velocidades y a través de un enfoque puramente gráfico-escalar (sin operaciones vectoriales).

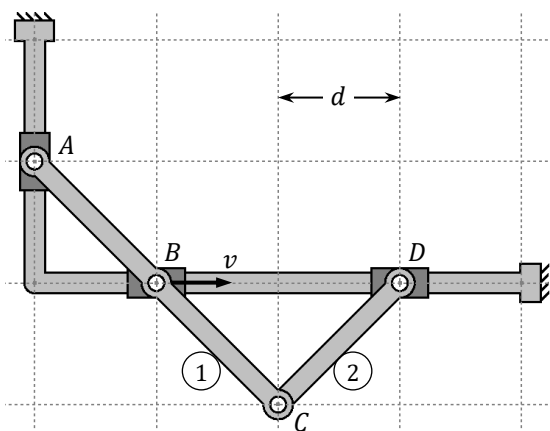
- CIR 1 enero 2019



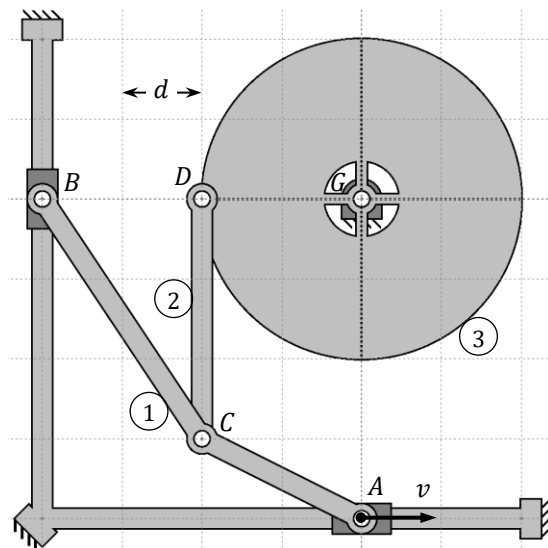
- CIR 2 mayo 2019



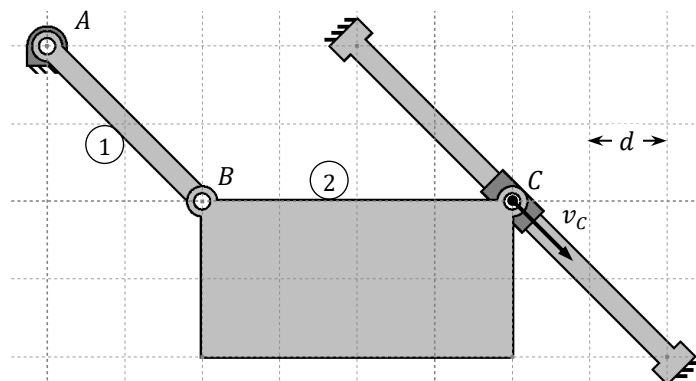
- CIR 3 enero 2021



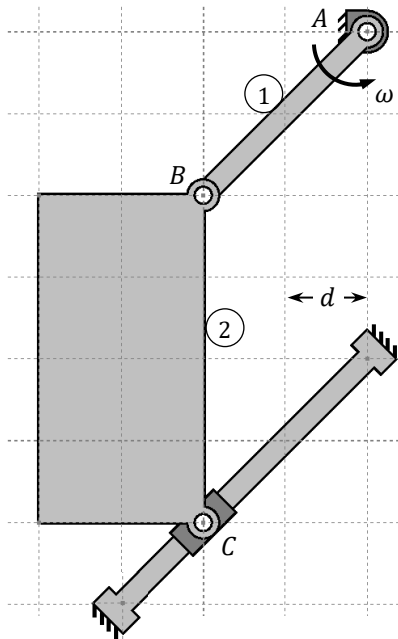
- CIR 4 mayo 2022



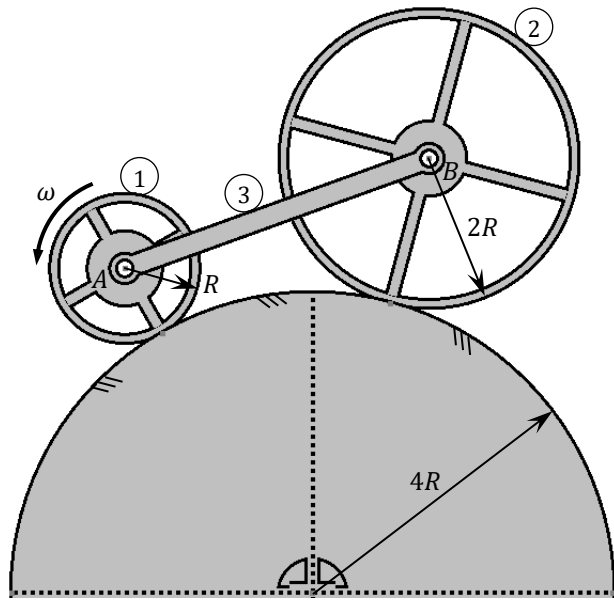
- CIR 5 mayo 2018



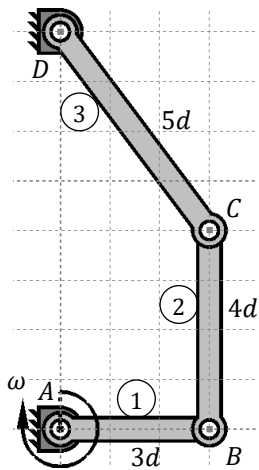
▪ CIR 6 mayo 2016



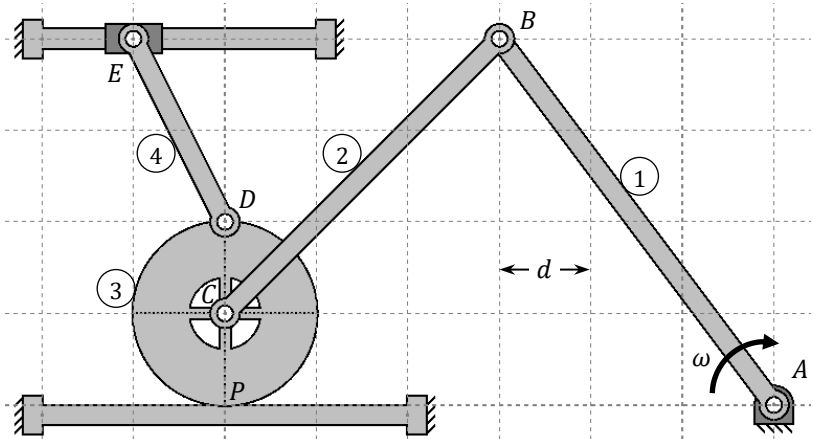
▪ CIR 7 enero 2020



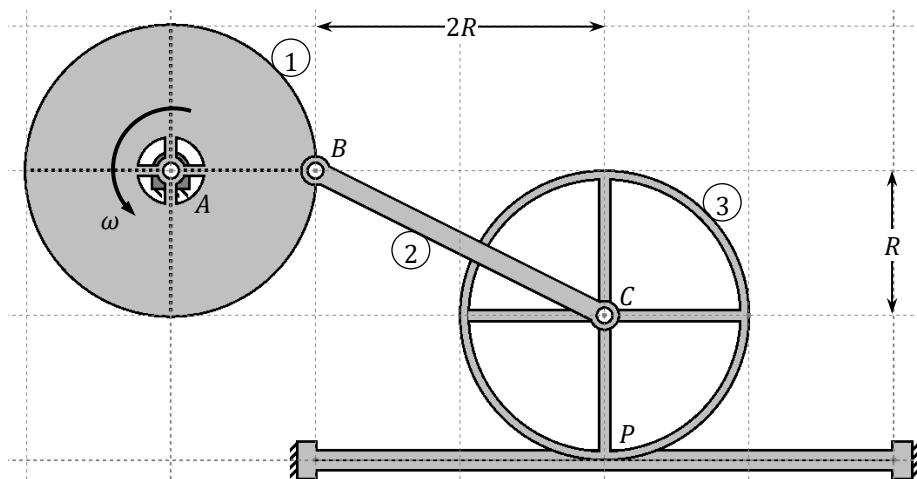
▪ CIR 8 junio 2015



▪ CIR 9 mayo 2021



▪ CIR 10 enero 2018



8. PROPIEDADES DE INERCIA DE SÓLIDO

8.1 MOMENTO DE INERCIA

El concepto general de momento de inercia es un cómputo de *masa·distancia²*. Se trata por tanto de una magnitud escalar positiva.

- Para sistemas materiales discretos, de partículas: $I = \sum r_i^2 \cdot m_i$
- Para sólidos continuos: $I = \int r^2 \cdot dm$

El momento de inercia siempre se define respecto de una referencia geométrica, aquella respecto de la que se mide la distancia. Existen tres tipos de momento de inercia en función del tipo de referencia:

- Momento de inercia respecto de un punto O : $I_O = \int r_O^2 \cdot dm$
- Momento de inercia respecto de un eje e : $I_e = \int r_e^2 \cdot dm$
- Momento de inercia respecto de un plano π : $I_\pi = \int r_\pi^2 \cdot dm$

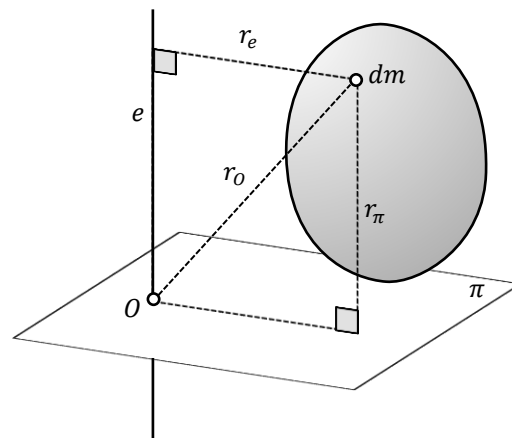


Fig. 8.1 Distancias a punto, eje y plano

El momento de inercia constituye una propiedad física de un sólido (o un sistema material) respecto de una referencia geométrica. Es una magnitud ‘de algo respecto de algo’, siempre hay que especificar de quién y respecto a qué está definida. De los tres presentados, el más importante es el momento de inercia de un sólido respecto de un eje, ya que de algún modo representa la inercia física del sólido a girar alrededor de dicho eje.

Entre los momentos de inercia respecto de distintas entidades se verifican las siguientes relaciones:

- Si se tienen un eje e y un plano π perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto O :
Como $r_O^2 = r_e^2 + r_\pi^2$:

$$I_O = \int r_O^2 \cdot dm = \int (r_e^2 + r_\pi^2) \cdot dm = \int r_e^2 \cdot dm + \int r_\pi^2 \cdot dm = I_e + I_\pi$$

- Si se tienen tres planos π_1 , π_2 y π_3 perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto O :
Como $r_O^2 = r_{\pi_1}^2 + r_{\pi_2}^2 + r_{\pi_3}^2$:

$$I_O = \int r_O^2 \cdot dm = \int (r_{\pi_1}^2 + r_{\pi_2}^2 + r_{\pi_3}^2) \cdot dm = I_{\pi_1} + I_{\pi_2} + I_{\pi_3}$$

- Si se tienen dos planos π_1 y π_2 perpendiculares entre sí, que se cortan en un eje e :
 Como $r_e^2 = r_{\pi_1}^2 + r_{\pi_2}^2$:

$$I_e = \int r_e^2 \cdot dm = \int (r_{\pi_1}^2 + r_{\pi_2}^2) \cdot dm = I_{\pi_1} + I_{\pi_2}$$

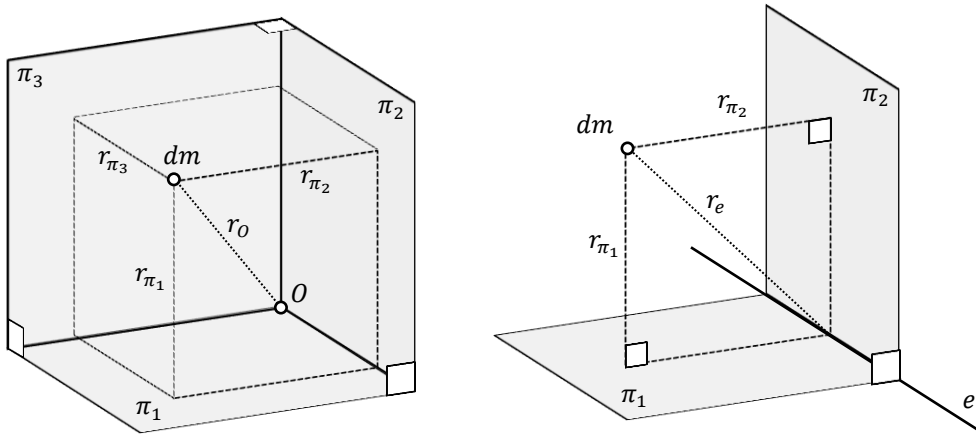


Fig. 8. 2 Sistemas de planos perpendiculares

8.1.1 Radio de giro

Supóngase que un sólido de masa m posee, respecto de un eje e , un momento de inercia I_e . El *radio de giro*, r_g , de dicho sólido respecto de dicho eje es la distancia al eje a la que habría que poner una masa puntual de valor m para que tuviera el mismo momento de inercia. Por lo tanto, conocida la masa del sólido y su radio de giro respecto de e :

$$I_e = m \cdot r_g^2$$

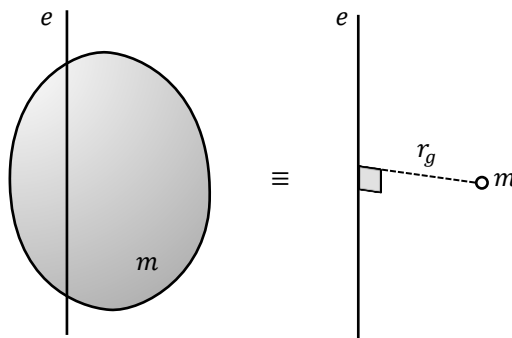


Fig. 8. 3 Radio de giro

8.2 PRODUCTO DE INERCIA

El producto de inercia de un sólido, o sistema material, es una propiedad definida respecto de dos planos. Normalmente, para denotarlo se utiliza el nombre del eje en el que ambos planos se cortan. Por ejemplo, si los planos π_1 y π_2 se cortan en un eje e , $C_{\pi_1\pi_2} \equiv C_e$.

- Para sistemas de partículas: $C_e = \sum r_{\pi_1 i} \cdot r_{\pi_2 i} \cdot m_i$
- Para sólidos continuos: $C_e = \int r_{\pi_1} \cdot r_{\pi_2} \cdot dm$

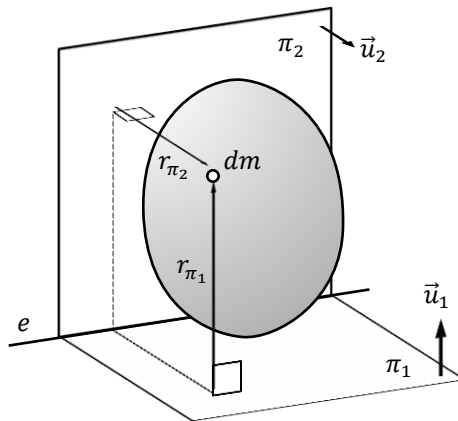


Fig. 8. 4 Producto de inercia

Las distancias r_{π_1} y r_{π_2} llevan signo, en función del lado del plano en que quede la masa, por lo tanto el producto de inercia puede ser positivo, negativo, o nulo.

La principal propiedad del producto de inercia es que si los dos planos son perpendiculares entre sí y al menos uno de ellos es de simetría del sólido (o sistema material), entonces el producto de inercia es nulo. Esto se justifica porque en esta situación, para cada m_i o dm siempre es posible encontrar otro, simétricamente dispuesto, en el que una de las distancias es idéntica (en valor y signo) y la otra es opuesta (del mismo valor, pero signo contrario).

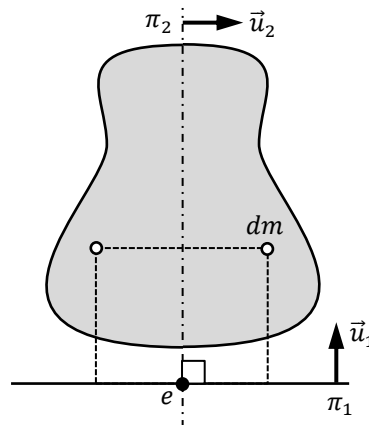


Fig. 8. 5 Sólido simétrico

8.3 TEOREMAS DE STEINER

Sean π un plano cualquiera y π_G un plano paralelo al primero que contiene al centro de gravedad del sistema material, de masa total m . La distancia entre ambos planos es D_π .

Análogamente, sean e un eje cualquiera y e_G un eje paralelo a éste que pasa por dicho centro de gravedad. La distancia entre ambos ejes es D_e .

Obviamente, G es el punto intersección entre π_G y e_G . Finalmente sea O el punto de intersección entre π y e . La distancia entre ambos puntos será OG .

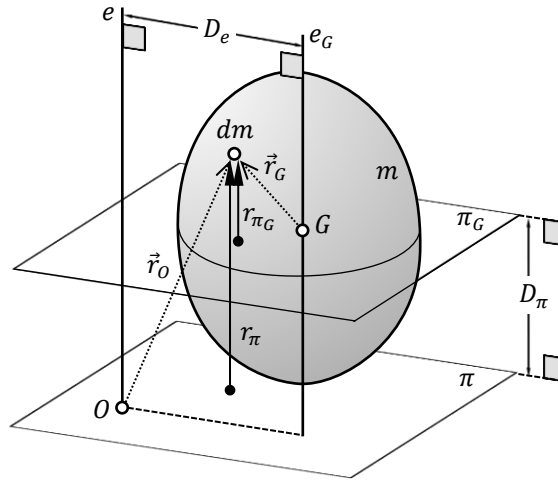


Fig. 8. 6 Referencias paralelas

Teniendo en cuenta que el producto escalar de un vector por sí mismo es su módulo al cuadrado:

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r \cdot r \cdot \cos 0 = r^2$$

Y que : $\vec{r}_o = \overrightarrow{OG} + \vec{r}_G$ y que OG es independiente de dm :

$$\begin{aligned} I_o &= \int r_o^2 \cdot dm = \int \vec{r}_o \cdot \vec{r}_o \cdot dm = \int (\overrightarrow{OG} + \vec{r}_G) \cdot (\overrightarrow{OG} + \vec{r}_G) \cdot dm = \\ &= \int \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OG} \cdot dm + \int \vec{r}_G \cdot \vec{r}_G \cdot dm + 2 \cdot \int \overrightarrow{OG} \cdot \vec{r}_G \cdot dm = \\ &= OG^2 \cdot \int dm + \int r_G^2 \cdot dm + 2 \cdot \overrightarrow{OG} \cdot \int \vec{r}_G \cdot dm = \\ &= OG^2 \cdot m + I_G + 2 \cdot \overrightarrow{OG} \cdot \vec{0} \end{aligned}$$

Ya que $\int dm = m$ y $\int \vec{r}_G \cdot dm = \vec{0}$ puesto que es el momento estático del sistema respecto del centro de gravedad.

Por lo que finalmente se tiene la relación existente entre los momentos de inercia respecto de un punto cualquiera y el centro de gravedad del sistema:

$$I_o = I_G + m \cdot OG^2$$

Ahora, teniendo en cuenta que $r_\pi = D_{\pi_G} + r_{\pi_G}$ y que D_π es independiente de dm :

$$\begin{aligned} I_\pi &= \int r_\pi^2 \cdot dm = \int (D_\pi + r_{\pi_G})^2 \cdot dm = \int D_\pi^2 \cdot dm + \int r_{\pi_G}^2 \cdot dm + 2 \cdot \int D_\pi \cdot r_{\pi_G} \cdot dm = \\ &= D_\pi^2 \cdot \int dm + I_{\pi_G} + 2 \cdot D_\pi \int r_{\pi_G} \cdot dm \end{aligned}$$

Como el momento estático respecto de un plano que pasa por G es nulo, $\int r_{\pi_G} \cdot dm = 0$, finalmente:

$$I_\pi = I_{\pi_G} + m \cdot D_\pi^2$$

Y finalmente, tomando unos ejes perpendiculares a los planos ($OG^2 = D_e^2 + D_\pi^2$) y teniendo en cuenta las propiedades de los momentos de inercia respecto de puntos, planos y ejes:

$$I_e = I_O - I_\pi = I_G + m \cdot OG^2 - (I_{\pi_G} + m \cdot D_\pi^2) = (I_G - I_{\pi_G}) + m \cdot (OG^2 - D_\pi^2)$$

$$I_e = I_{e_G} + m \cdot D_e^2$$

Esta expresión se conoce como teorema de Steiner, o de los ejes paralelos. Adviértase que esta expresión no sirve para relacionar directamente los momentos de inercia respecto de dos ejes paralelos cualesquiera, sino que siempre uno de ellos ha de contener al punto G . De la expresión obtenida se deduce que el momento de inercia respecto de un eje que pasa por G es menor que respecto de cualquier otro eje paralelo a éste.

Los productos de inercia respecto de parejas de planos perpendiculares, mutuamente paralelos, también están directamente relacionados, siempre que los dos planos de una de las parejas se corten en el centro de gravedad del sistema.

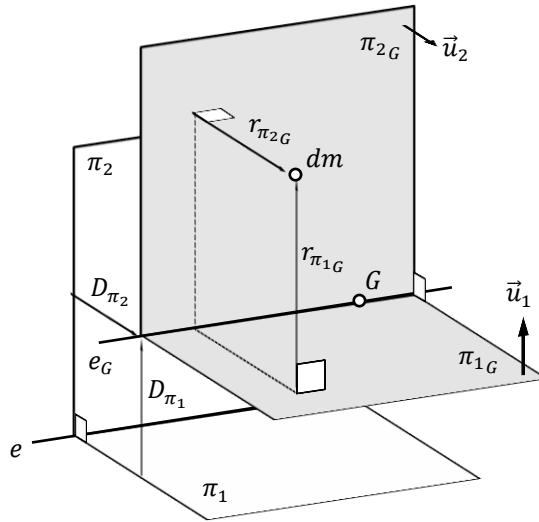


Fig. 8. 7 Parejas de planos paralelos

$$\begin{aligned} C_e &= \int r_{\pi_1} \cdot r_{\pi_2} \cdot dm = \int (D_{\pi_1} + r_{\pi_{1G}}) \cdot (D_{\pi_2} + r_{\pi_{2G}}) \cdot dm = \\ &= \int D_{\pi_1} \cdot D_{\pi_2} \cdot dm + \int r_{\pi_{1G}} \cdot r_{\pi_{2G}} \cdot dm + \int D_{\pi_1} \cdot r_{\pi_{2G}} \cdot dm + \int r_{\pi_{1G}} \cdot D_{\pi_2} \cdot dm = \\ &= D_{\pi_1} \cdot D_{\pi_2} \cdot \int dm + C_{e_G} + D_{\pi_1} \cdot \int r_{\pi_{2G}} \cdot dm + D_{\pi_2} \cdot \int r_{\pi_{1G}} \cdot dm \end{aligned}$$

Donde $\int r_{\pi_1 G} \cdot dm$ y $\int r_{\pi_2 G} \cdot dm$ son momentos estáticos respecto de planos que pasan por G , por lo que finalmente queda:

$$C_e = C_{e_G} + m \cdot D_{\pi_1} \cdot D_{\pi_2}$$

Adviértase que D_{π_1} y D_{π_2} son distancias afectadas de signo.

La técnica más adecuada para tomar los signos correctamente consiste en mirar las parejas de planos desde una visual proyectante, de manera que se visualicen como líneas que se puedan identificar con los ejes de sistemas de referencia planos y paralelos. En esta visualización las líneas de intersección de cada pareja de planos perpendiculares serían los orígenes de dichos sistemas.

Una vez hecho esto se traza el vector que va de un origen a otro, cuyas componentes son precisamente las distancias entre las parejas de planos paralelos, y se toma el signo de cada componente.

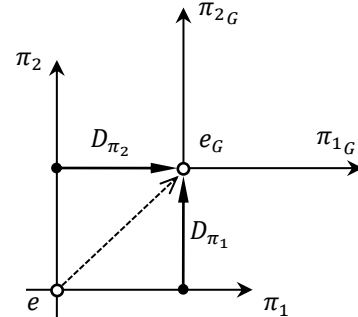


Fig. 8. 8 Referencias planas

8.4 MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS ELEMENTALES

Todos los sólidos considerados en este apartado son de densidad ρ constante, es decir, tiene la masa homogéneamente repartida por todo su volumen, $\rho = m/V$. Un diferencial de masa de un sólido siempre ocupa un volumen diferencial, siendo la relación entre ambos:

$$dm = \rho \cdot dV = \frac{m}{V} \cdot dV \rightarrow I_{ref} = \int r^2 \cdot dm = \frac{m}{V} \int r_{ref}^2 \cdot dV$$

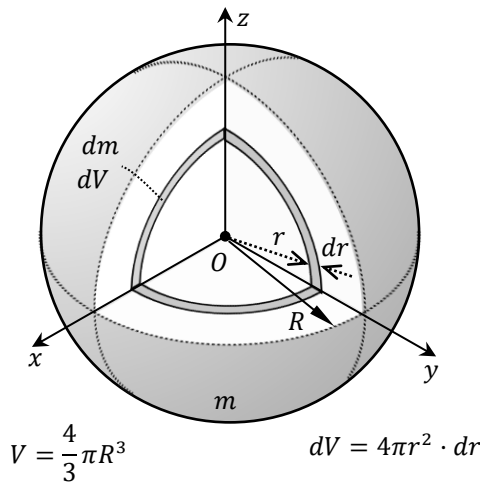
Adicionalmente, para que la integración sea simple, resulta conveniente que el diferencial de volumen tenga una forma geométrica tal que posea una única dimensión infinitamente pequeña. En esta situación, dV no será un único punto del sólido, sino que tendrá los infinitos puntos que conformen dicha forma geométrica.

Como en la integral para calcular el momento de inercia del sólido respecto de una entidad de referencia hace falta considerar la distancia r del dV a dicha entidad de referencia, es necesario darle al dV una forma tal que, además de tener un volumen infinitamente pequeño, sus infinitos puntos equidisten de la referencia.

Por lo tanto, en función de cuál sea la entidad respecto de la que esté calculando el momento de inercia por integración:

- $I_O \rightarrow dV$ debe ser una capa esférica infinitamente fina de centro O .
Llamando r al radio de la capa y dr a su espesor $\rightarrow dV = 4\pi r^2 \cdot dr$
- $I_e \rightarrow dV$ debe ser una capa cilíndrica infinitamente fina de eje e .
Llamando r al radio de la capa, h a su longitud y dr a su espesor $\rightarrow dV = 2\pi r \cdot h \cdot dr$
- $I_\pi \rightarrow dV$ debe ser una capa plana infinitamente fina paralela a π .
Llamando S a la superficie de la capa y dz a su espesor $\rightarrow dV = S \cdot dz$

8.4.1 Esfera



Un diferencial de masa con forma de casquete esférico concéntrico y de espesor diferencial es equidistante del punto O . Su volumen, obviamente diferencial, es la superficie por el espesor. El momento de inercia respecto de dicho punto es, por tanto:

$$\begin{aligned}
 I_O &= \int r^2 \cdot dm = \frac{m}{V} \int r^2 \cdot dV = \\
 &= \frac{3m}{4\pi R^3} \int_0^R r^2 \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{3m}{R^3} \int_0^R r^4 \cdot dr = \\
 &= \frac{3m}{R^3} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} mR^2
 \end{aligned}$$

Por otro lado se sabe que, puesto que los tres planos coordenados son mutuamente perpendiculares:

$$I_O = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$$

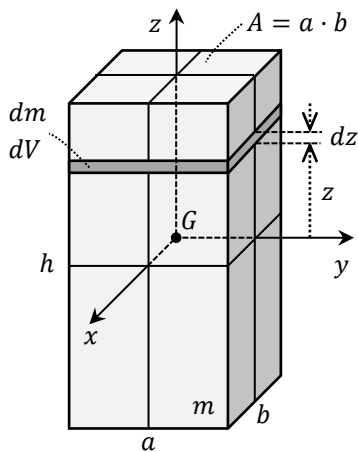
Pero además, por la simetría del sólido, los momentos de inercia respecto de los tres planos han de ser idénticos, por lo que:

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = \frac{I_O}{3} = \frac{mR^2}{5}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $I_z = I_{yz} + I_{zx}$ y la simetría del sólido:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} mR^2$$

8.4.2 Prisma recto y chapa rectangular



Un diferencial de masa con forma de rodaja plana es equidistante del plano xy , por tanto:

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int z^2 \cdot dm = \frac{m}{V} \int z^2 \cdot dV = \\
 &= \frac{m}{A \cdot h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot A \cdot dz = \frac{m}{h} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} - \frac{(-h)^3}{8} \right) = \\
 &= \frac{1}{12} mh^2
 \end{aligned}$$

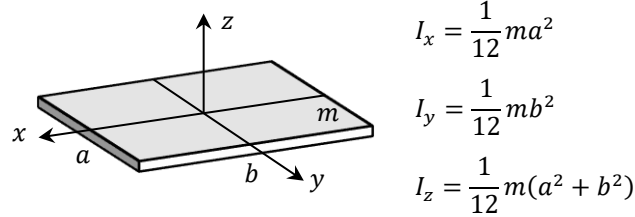
Análogamente:

$$I_{zx} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{yz} = \frac{1}{12} mb^2$$

Por lo tanto:

$$I_z = I_{zx} + I_{yz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad I_x = \frac{1}{12} m(a^2 + h^2) \quad I_y = \frac{1}{12} m(b^2 + h^2)$$

Una chapa plana de forma rectangular es como un prisma recto en el que $h \ll a$ y b , por lo que:



$$I_x = \frac{1}{12} ma^2$$

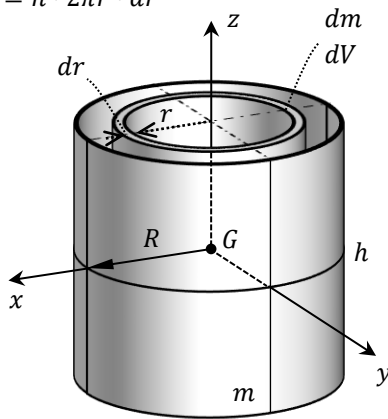
$$I_y = \frac{1}{12} mb^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

8.4.3 Cilindro y disco

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

$$dV = h \cdot 2\pi r \cdot dr$$



Un diferencial de masa con forma de anillo cilíndrico es equidistante del eje z , por tanto:

$$\begin{aligned} I_z &= \int r^2 \cdot dm = \frac{m}{V} \int r^2 \cdot dV = \\ &= \frac{m}{\pi R^2 \cdot h} \int_0^R r^2 \cdot h \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 \cdot dr = \\ &= \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} mR^2 \end{aligned}$$

Además, al igual que en el prisma:

$$I_{xy} = \frac{1}{12} mh^2$$

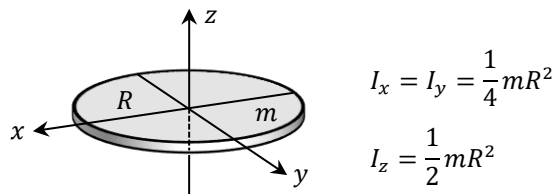
Como es sabido, $I_z = I_{zx} + I_{yz}$, pero además debido a la simetría $I_{zx} = I_{yz}$, por lo que:

$$I_{zx} = I_{yz} = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{4} mR^2$$

Finalmente:

$$I_x = I_y = I_{xy} + I_{zx} = \frac{1}{12} mh^2 + \frac{1}{4} mR^2 = \frac{m}{12} (h^2 + 3R^2)$$

Una chapa plana de forma circular (o disco) es como un cilindro en el que $h \ll R$, por lo que:



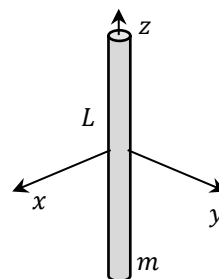
$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2$$

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2$$

8.4.4 Barra

Una barra recta de masa m y longitud L se puede obtener degenerando un prisma recto tal que a y $b \ll h$, o bien un cilindro tal que $R \ll h$, siendo en cualquiera de los dos casos $L \equiv h$.

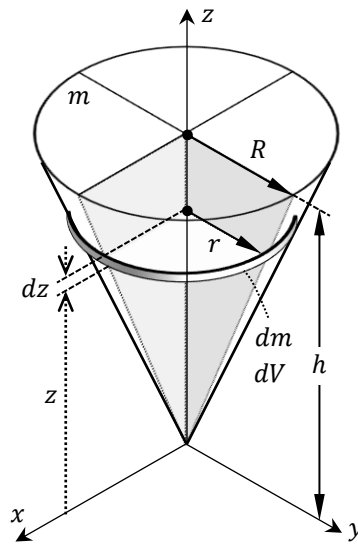
En ambos casos se obtienen idénticas expresiones.



$$I_x = I_y = \frac{1}{12} mL^2$$

$$I_z \approx 0$$

8.4.5 Cono



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$dV = \pi r^2 \cdot dz$$

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{h}$$

En este caso, en lugar de proceder a realizar la integración en la forma habitual, se considerará que el cono está formado por la suma de infinitos discos. Como los momentos de inercia de un disco son expresiones conocidas, simplemente habrá que sumar el aporte de inercia de todos ellos.

Como cada disco es de espesor diferencial, su masa también lo será y por tanto sus momentos de inercia, es decir:

$$dI_z = \frac{1}{2} dm \cdot r^2 \rightarrow I_z = \int dI_z$$

Teniendo en cuenta que $dm = m/V \cdot dV$:

$$I_z = \frac{3m}{\pi R^2 h} \int_0^h \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi r^2 \cdot dz = \frac{3m}{2R^2 h} \int_0^h r^4 \cdot dz = \frac{3m}{2R^2 h} \int_0^h \frac{R^4}{h^4} z^4 \cdot dz = \frac{3mR^2}{2h^5} \cdot \frac{h^5}{5} = \frac{3}{10} mR^2$$

Aplicando el teorema de Steiner:

$$dI_x = dI_y = \frac{1}{4} dm \cdot r^2 + dm \cdot z^2 = \left(\frac{r^2}{4} + z^2 \right) \frac{3m}{\pi R^2 h} \cdot dV = \left(\frac{R^2 z^2}{4h^2} + z^2 \right) \frac{3m}{\pi R^2 h} \cdot \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 \cdot dz$$

$$I_x = I_y = \int dI_x = \frac{3m}{h^3} \left(\frac{R^2}{4h^2} + 1 \right) \int_0^h z^4 \cdot dz = \frac{3m}{h^3} \left(\frac{R^2}{4h^2} + 1 \right) \frac{h^5}{5} = \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right)$$

8.5 FIGURAS COMPUESTAS

Cuando pueda descomponerse un sólido de geometría compleja en sumas y restas de sólidos elementales de propiedades conocidas, resulta inmediato obtener las propiedades del sólido original:

$$I_{ref_T} = \sum I_{ref_i} \quad C_{ref_T} = \sum C_{ref_i}$$

Obviamente en cada uno de los términos de los sumatorios debe tenerse en cuenta si el sólido elemental correspondiente está sumando o restando en la composición del sólido total.

Es importante recalcar que la entidad geométrica respecto de la que define la propiedad inercial es literalmente la misma para al sólido compuesto y cada uno de sus integrantes elementales.

8.6 TENSOR DE INERCIA

8.6.1 Momento de inercia respecto de un eje cualquiera

Se tiene un sólido y se define un sistema de referencia cartesiano xyz con origen en un punto O .

Supóngase que se conocen los momentos de inercia del sólido respecto de los tres ejes del sistema de referencia, I_x , I_y e I_z , así como los productos de inercia respecto de las tres parejas de planos coordenados, C_x , C_y y C_z .

Considérese un eje cualquiera e que pase por O , cuya orientación queda definida por un vector unitario \vec{u}_e . El objetivo es encontrar la expresión que proporcione, en función de los parámetros conocidos, el valor del momento de inercia del sólido respecto del eje e , es decir, I_e .

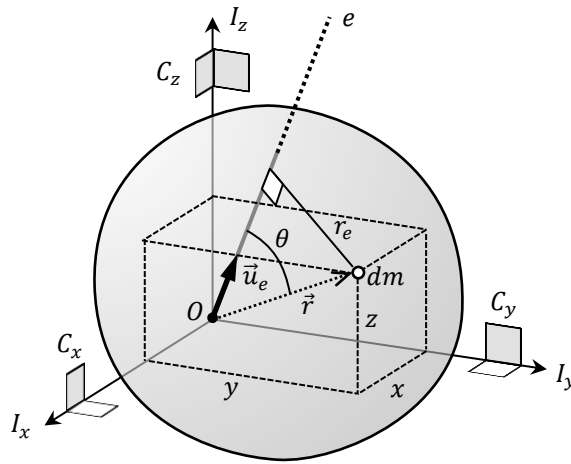


Fig. 8. 9 Eje cualquiera que pasa por un punto

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int (z^2 + x^2) dm \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$C_x = \int y \cdot z \cdot dm \quad C_y = \int z \cdot x \cdot dm \quad C_z = \int x \cdot y \cdot dm$$

$$I_e = \int r_e^2 \cdot dm$$

$$|\vec{u}_e \wedge \vec{r}| = 1 \cdot r \cdot \sin \theta = r_e$$

$$\vec{u}_e = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad \vec{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{u}_e \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u_y z - u_z y \\ u_z x - u_x z \\ u_x y - u_y x \end{Bmatrix}$$

$$r_e^2 = |\vec{u}_e \wedge \vec{r}|^2 = (u_y z - u_z y)^2 + (u_z x - u_x z)^2 + (u_x y - u_y x)^2 =$$

$$= u_y^2 z^2 + u_z^2 y^2 + u_z^2 x^2 + u_x^2 z^2 + u_x^2 y^2 + u_y^2 x^2 -$$

$$- 2 \cdot u_y z \cdot u_z y - 2 \cdot u_z x \cdot u_x z - 2 \cdot u_x y \cdot u_y x$$

Como las componentes de \vec{u}_e son independientes de dm :

$$I_e = u_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + u_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + u_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - \\ - 2u_y u_z \int y \cdot z \cdot dm - 2u_z u_x \int z \cdot x \cdot dm - 2u_x u_y \int x \cdot y \cdot dm \\ I_e = u_x^2 \cdot I_x + u_y^2 \cdot I_y + u_z^2 \cdot I_z - 2u_y u_z \cdot C_x - 2u_z u_x \cdot C_y - 2u_x u_y \cdot C_z$$

Realizando la siguiente agrupación de las propiedades de inercia en una matriz:

$$[I_O] = \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix}$$

La operación para obtener I_e puede expresarse de una manera compacta como:

$$I_e = \{u_x \quad u_y \quad u_z\} \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \vec{u}_e^T \cdot [I_O] \cdot \vec{u}_e$$

Donde la matriz $[I_O]$ se denomina *tensor de inercia* del sólido en el punto O .

8.6.2 Elipsoide de inercia

El valor de I_e cambia con la dirección del eje, ya que depende de los valores de las componentes de \vec{u}_e . Existe una forma de visualizar gráficamente la evolución del valor de I_e a medida que e va variando su orientación. Supóngase que para una orientación dada, sobre el propio eje se posiciona el punto que está a una distancia $\rho = 1/\sqrt{I_e}$ del origen O . Las coordenadas x , y y z de dicho punto vendrán dadas como $\vec{\rho} = \rho \cdot \vec{u}_e$.

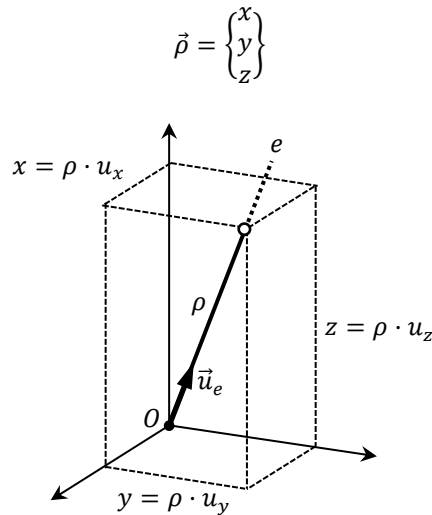


Fig. 8. 10 Inercia medida sobre el eje

Al ir variando la orientación de e irá cambiando el valor de I_e y por tanto de ρ . El lugar geométrico de todos los puntos obtenidos forma una superficie en el espacio, $f(x, y, z)$. Esta ecuación de superficie se puede obtener llevando a la expresión de I_e en función de las componentes de \vec{u}_e :

$$I_e = \frac{1}{\rho^2} \quad u_x = \frac{x}{\rho} \quad u_y = \frac{y}{\rho} \quad u_z = \frac{z}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} \cdot I_x + \frac{y^2}{\rho^2} \cdot I_y + \frac{z^2}{\rho^2} \cdot I_z - 2 \frac{yz}{\rho \rho} \cdot C_x - 2 \frac{zx}{\rho \rho} \cdot C_y - 2 \frac{xy}{\rho \rho} \cdot C_z$$

$$I_x \cdot x^2 + I_y \cdot y^2 + I_z \cdot z^2 - 2C_x \cdot yz - 2C_y \cdot zx - 2C_z \cdot xy = 1$$

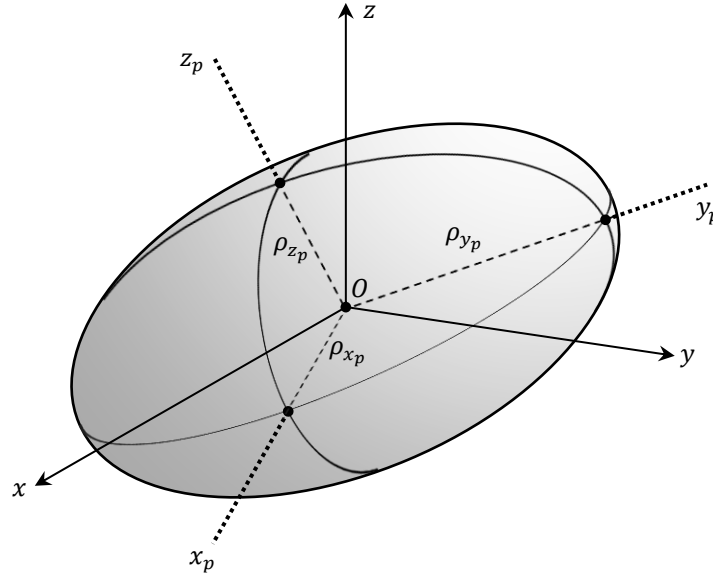


Fig. 8. 11 Elipsoide de inercia

Esta es la ecuación de un elipsoide en el espacio. Se denomina *elipsoide de inercia* del sólido en el punto O . Geométricamente un elipsoide es como una esfera que ha sido deformada, de manera independiente, en tres direcciones mutuamente perpendiculares entre sí. Éstas se denominan direcciones principales del elipsoide. Si se establece un sistema de referencia con origen en el centro del elipsoide, orientado de tal manera que sus ejes coincidan con las tres direcciones principales, éstos constituyen los denominados ejes principales del elipsoide, x_p , y_p y z_p . Las tres curvas de intersección del elipsoide con los tres planos del sistema de ejes principales, o planos principales, son elipses. Así mismo, la ecuación de un elipsoide expresada en el sistema de ejes principales del mismo queda reducida a:

$$\left(\frac{x_p}{\rho_{x_p}}\right)^2 + \left(\frac{y_p}{\rho_{y_p}}\right)^2 + \left(\frac{z_p}{\rho_{z_p}}\right)^2 = 1$$

Donde ρ_{x_p} , ρ_{y_p} y ρ_{z_p} son los valores de los semiejes del elipsoide. Por lo tanto, expresando esta ecuación en función de los momentos de inercia respecto de los ejes principales:

$$I_{x_p} = \frac{1}{\rho_{x_p}^2} \quad I_{y_p} = \frac{1}{\rho_{y_p}^2} \quad I_{z_p} = \frac{1}{\rho_{z_p}^2}$$

Finalmente queda:

$$I_{x_p} \cdot x_p^2 + I_{y_p} \cdot y_p^2 + I_{z_p} \cdot z_p^2 = 1$$

Como el elipsoide de inercia proporciona los valores de los momentos de inercia respecto de cualquier eje que pase por O :

- Las direcciones principales del elipsoide se denominan *direcciones principales de inercia* del sólido.
- Los momentos de inercia respecto de los ejes principales del elipsoide (o del sólido), I_{x_p} , I_{y_p} e I_{z_p} , se denominan *momentos principales de inercia* del sólido.

Al comparar las expresiones de un elipsoide de inercia en un sistema de ejes cualquiera y en un sistema de ejes principales, se comprueba que respecto de cualquier pareja de planos principales el producto de inercia es nulo, es decir, $C_{x_p} = C_{y_p} = C_{z_p} = 0$.

Las distancias extremas, la máxima y la mínima, desde el centro del elipsoide a un punto de su superficie coincidirán con dos de los tres semiejes del mismo. Por lo tanto, la dirección principal de inercia asociada al semieje más corto, definirá el eje, de todos los que pasan por O , respecto del cual el momento de inercia del sólido toma el valor más alto posible, y dicho valor será el momento principal de inercia correspondiente. Del mismo modo, el menor momento de inercia posible, será el menor de los tres momentos principales, y será respecto del eje que corresponda a la dirección principal dada por el semieje más largo del elipsoide de inercia.

8.6.3 Cálculo de momentos principales y direcciones principales de inercia

Las direcciones principales y los momentos principales de inercia de un sólido pueden obtenerse a partir del tensor de inercia en un punto (es decir, a partir de los valores de I_x , I_y , I_z , C_x , C_y y C_z en un sistema de referencia O_{xyz} cualquiera). Para ello, se emplea la condición de que sólo en los puntos principales de elipsoide (intersecciones con los ejes principales) el vector normal a la superficie, \vec{n} , es paralelo al vector que va del origen al punto de la misma, $\vec{\rho}$, es decir $\vec{n} = \lambda \cdot \vec{\rho}$.

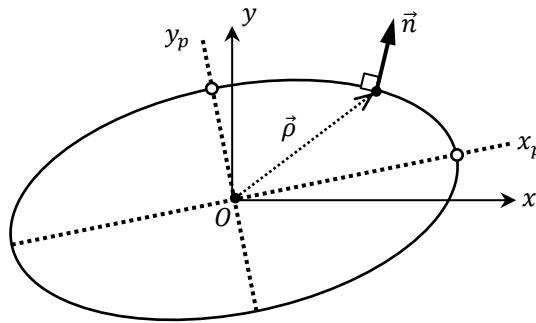


Fig. 8. 12 Vector normal a la superficie

Si la ecuación del elipsoide es $f(x, y, z) = 0$, el vector normal a la superficie en un punto cualquiera de la misma viene dado como:

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_x \cdot 2x - 2C_y \cdot z - 2C_z \cdot y \\ I_y \cdot 2y - 2C_z \cdot x - 2C_x \cdot z \\ I_z \cdot 2z - 2C_x \cdot y - 2C_y \cdot x \end{Bmatrix}$$

Obviamente, también será vector normal cualquiera proporcional al anterior, por lo que se tomará:

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} I_x \cdot x - C_z \cdot y - C_y \cdot z \\ -C_z \cdot x + I_y \cdot y - C_x \cdot z \\ -C_y \cdot x - C_x \cdot y + I_z \cdot z \end{Bmatrix}$$

Adviértase que este vector puede expresarse en función del tensor de inercia, ya que:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [I_0] \cdot \vec{\rho}$$

Por último, imponiendo que \vec{n} sea paralelo a $\vec{\rho}$:

$$\vec{n} = \lambda \cdot \vec{\rho} \rightarrow [I_0] \cdot \vec{\rho} = \lambda \cdot \vec{\rho}$$

Esto constituye un problema *valores y vectores propios*, o *autovalores y autovectores*, de la matriz $[I_0]$. A continuación se recuerda cómo se resuelve dicho problema. $[I_0] \cdot \vec{\rho} - \lambda \cdot \vec{\rho} = \vec{0}$ define un sistema de ecuaciones homogéneo $[A] \cdot \vec{\rho} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} I_x - \lambda & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y - \lambda & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \vec{0}$$

Para que este sistema tenga una solución distinta de la trivial ($x = y = z = 0$) la matriz del sistema $[A]$ debe tener determinante nulo:

$$|A| = 0$$

Plantear esta ecuación proporciona un polinomio de tercer grado en la variable λ :

$$c_3 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

Este polinomio tiene tres raíces reales λ_1 , λ_2 y λ_3 , que son los autovalores de $[I_0]$.

Cuando en el sistema de ecuaciones λ toma el valor de uno cualquiera de los autovalores, el sistema tiene solución. Por lo tanto, $[A] \cdot \vec{\rho} = \vec{0}$ puede resolverse por separado para λ_1 , λ_2 y λ_3 , obteniéndose respectivamente tres combinaciones de las variables x , y y z , es decir, tres vectores $\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_2$ y $\vec{\rho}_3$, que son los autovectores de $[I_0]$. Cada vector propio va asociado al valor propio para el que se ha obtenido. Pues bien, cada valor propio es un momento principal de inercia, y el vector propio asociado define la dirección principal correspondiente.

9. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

9.1 MAGNITUDES FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA

9.1.1 Cantidad de movimiento

Para un punto material de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} se define la magnitud vectorial *cantidad de movimiento* (también llamada *momento lineal*) como:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Se considerará un sólido rígido de masa m como un sistema de puntos materiales A_i tal que:

$$m = \sum m_i$$

Al tratarse de un cuerpo en movimiento, cada punto tiene una velocidad \vec{v}_i . El sistema de vectores definido por las cantidades de movimiento de todas las partículas, \vec{p}_i , se denomina *sistema cinético*.

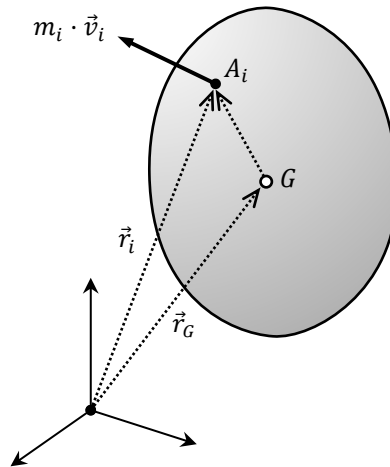


Fig. 9. 1 Sistema cinético

La resultante (suma) de este sistema de vectores constituye la cantidad de movimiento total del sólido:

$$\vec{P} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i$$

Se recuerda de la definición de centro de gravedad de un sólido que $m \cdot \vec{r}_G = \sum m_i \cdot \vec{r}_i$

Y que la velocidad de un punto es siempre la derivada temporal de su posición, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$

Utilizando estos conceptos:

$$\vec{P} = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum \frac{d(m_i \cdot \vec{r}_i)}{dt} = \frac{d(\sum m_i \cdot \vec{r}_i)}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{r}_G)}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{r}_G}{dt} = m \cdot \vec{v}_G$$

Es decir, la cantidad de movimiento total del cuerpo es la que tendría su centro de gravedad, como punto material, si en él estuviera concentrada toda la masa del cuerpo.

9.1.2 Momento cinético

Para un punto material posicionado en A , que tiene una cantidad de movimiento \vec{p} , se define la magnitud vectorial *momento cinético* respecto del punto O (también llamada *momento angular*) como:

$$\vec{h}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}$$

Es decir, el momento cinético es el momento de la cantidad de movimiento respecto del punto O .
Para un sólido:

$$\vec{H}_O = \sum \overrightarrow{OA}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_i$$

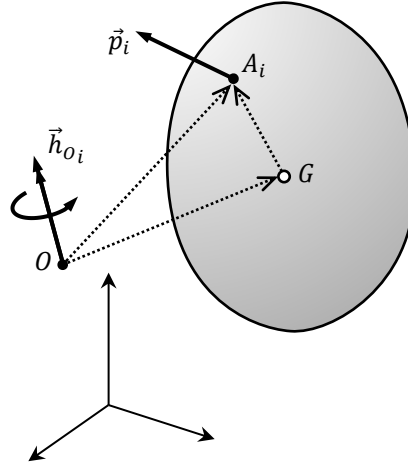


Fig. 9. 2 Cantidad de movimiento y momento cinético

Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OA}_i = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}_i$

$$\vec{H}_O = \sum \overrightarrow{OG} \wedge m_i \cdot \vec{v}_i + \sum \overrightarrow{GA}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_i = \overrightarrow{OG} \wedge \sum m_i \cdot \vec{v}_i + \vec{H}_G = \vec{H}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

Que constituye la expresión del campo de momentos cinéticos.

Por otro lado, utilizando el campo de velocidades del sólido, $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA}_i$.

Donde se recuerda que el término $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA}_i = \vec{v}_{r_i}$ representa la velocidad del punto A_i en su movimiento de rotación respecto al punto G . Entonces:

$$\vec{H}_G = \sum \overrightarrow{GA}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_G + \sum \overrightarrow{GA}_i \wedge m_i \cdot (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA}_i) = (\sum m_i \cdot \overrightarrow{GA}_i) \wedge \vec{v}_G + \sum \overrightarrow{GA}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_{r_i}$$

Y recordando también que el momento estático de un sistema material respecto de su centro de gravedad es nulo, $\sum m_i \cdot \overrightarrow{GA}_i = \vec{0}$, se tiene:

$$\vec{H}_G = \sum \overrightarrow{GA}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_{r_i} = \sum m_i \cdot \overrightarrow{GA}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GA}_i)$$

Esta expresión se conoce como *Teorema de Koenig* y establece que el momento cinético de un sólido respecto de su centro de gravedad se puede calcular considerando exclusivamente el movimiento de rotación en torno a dicho punto, las \vec{v}_{r_i} , es decir, que es independiente de la traslación del sólido, de \vec{v}_G .

9.1.3 Sistema dinámico

Sobre cada punto material del sólido A_i , existirá una resultante de fuerzas actuantes \vec{F}_i . El sistema de vectores dado por todas las fuerzas actuantes en cada punto se denomina *sistema dinámico*.

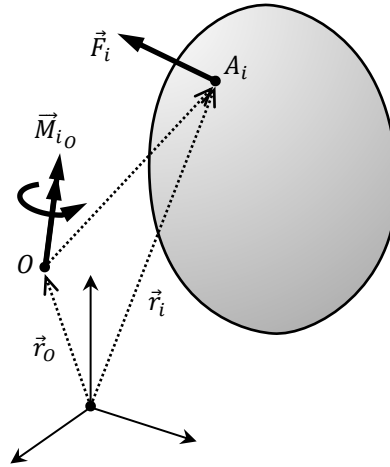


Fig. 9. 3 Sistema dinámico

La segunda ley de Newton establece que $\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}_i$, donde \vec{F}_i representa la suma de todas las fuerzas que estén actuando sobre la partícula, las cuales pueden ser clasificadas en:

- *Fuerzas aplicadas*: Aquellas que son directamente ejercidas con el fin de lograr algún propósito.
- *Fuerzas de enlace*: Son las reacciones generadas en las uniones con otros elementos que imponen restricciones al libre movimiento del cuerpo.
- *Fuerzas interiores*: Son las que garantizan el comportamiento de sólido rígido del sistema material.

Las fuerzas aplicadas y de enlace constituyen las denominadas *fuerzas exteriores* del sistema.

La resultante de las fuerzas que conforman el sistema dinámico será:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{apl_i} + \sum \vec{F}_{ent_i} + \sum \vec{F}_{int_i}$$

A la hora de realizar la suma de todas las fuerzas interiores debe tenerse en cuenta el principio de acción y reacción. Para una pareja de puntos A_i y A_j , si la fuerza en A_i responsable de mantener su posición relativa respecto de A_j es $\vec{F}_{int_{ji}}$, entonces, la fuerza en A_j responsable de mantener su posición relativa respecto de A_i será $\vec{F}_{int_{ij}} = -\vec{F}_{int_{ji}}$. Extrapolando esta idea a todas las parejas de puntos que conforman el sólido se tiene que $\sum \vec{F}_{int_i} = \vec{0}$, por lo que:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{apl_i} + \sum \vec{F}_{ent_i} = \sum \vec{F}_{ext_i}$$

Análogamente, el momento resultante de todas las fuerzas actuantes respecto de un punto O será:

$$\vec{M}_O = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i$$

Por el motivo expuesto anteriormente, los momentos de las fuerzas interiores se anulan dos a dos, de modo que:

$$\vec{M}_O = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_{ext_i}$$

9.2 TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA DINÁMICA

Los teoremas fundamentales relacionan las magnitudes de los sistemas dinámico y cinético, es decir relacionan las causas que producen el movimiento, las fuerzas, con el propio movimiento producido, las aceleraciones. Para deducirlos se realiza la derivación respecto del tiempo de la cantidad de movimiento y el momento cinético del sólido.

9.2.1 Teorema de la cantidad de movimiento

Se sabe que $\vec{P} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i = m \cdot \vec{v}_G$.

Y que la aceleración de un punto es siempre la derivada temporal de su velocidad, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

Por un lado:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\sum m_i \cdot \vec{v}_i)}{dt} = \sum m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}_{ext_i} = \vec{F}$$

Por otro lado:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v}_G)}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} = m \cdot \vec{a}_G$$

Por lo tanto:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{apl_i} + \sum \vec{F}_{ent_i} = m \cdot \vec{a}_G$$

La resultante de las fuerzas a las que se ve sometido el sólido es igual al producto de su masa por la aceleración de su centro de gravedad.

9.2.2 Teorema del momento cinético

$$\dot{\vec{H}}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d(\sum \overline{OA}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_i)}{dt} = \sum \frac{d\overline{OA}_i}{dt} \wedge m_i \cdot \vec{v}_i + \sum \overline{OA}_i \wedge m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

Como $\vec{r}_i = \vec{r}_O + \overline{OA}_i$

$$\frac{d\overline{OA}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_O$$

Luego: $\dot{\vec{H}}_O = \sum m_i \cdot \vec{v}_i \wedge \vec{v}_i - \vec{v}_O \wedge \sum m_i \cdot \vec{v}_i + \sum \overline{OA}_i \wedge m_i \cdot \vec{a}_i$

Donde: $\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{0}$ $\sum m_i \cdot \vec{v}_i = \vec{P}$ $m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i$

Por lo que finalmente se llega a: $\sum \overline{OA}_i \wedge \vec{F}_i = \sum \overline{OA}_i \wedge \vec{F}_{ext_i} = \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O + \vec{v}_O \wedge \vec{P}$

Que constituye la expresión general del teorema del momento cinético. Normalmente ésta se aplica en dos situaciones particulares en las que adquiere una forma más simplificada:

- Si O es un **punto fijo**, entonces $\vec{v}_O = \vec{0} \rightarrow \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O$
- Si O es el **centro de gravedad**, entonces $\vec{v}_G \wedge \vec{P} = \vec{v}_G \wedge (m \cdot \vec{v}_G) = \vec{0} \rightarrow \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$

9.3 MOMENTO CINÉTICO DE UN SÓLIDO RÍGIDO

A continuación va a deducirse qué forma toma, en el caso de un sólido rígido, la expresión del momento cinético respecto del centro de gravedad:

$$\vec{H}_G = \sum m_i \cdot \vec{GA}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GA}_i), \text{ donde } \vec{GA}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

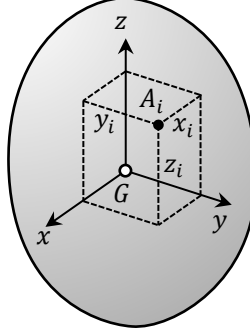


Fig. 9. 4 Sistema de referencia con origen en el centro de gravedad

Previamente, deben recordarse los conceptos de geometría de masas relativos al tensor de inercia de un sólido en un sistema de referencia cartesiano con origen, en este caso, en G .

$$[I_G] = \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} I_x &= \sum m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) & C_x &= \sum m_i \cdot y_i \cdot z_i \\ I_y &= \sum m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) & C_y &= \sum m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ I_z &= \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) & C_z &= \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i \end{aligned}$$

$$\vec{v}_{r_i} = \vec{\omega} \wedge \vec{GA}_i = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{pmatrix}, \quad \vec{GA}_i \wedge \vec{v}_{r_i} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ v_{r_{x_i}} & v_{r_{y_i}} & v_{r_{z_i}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_i v_{r_{z_i}} - z_i v_{r_{y_i}} \\ z_i v_{r_{x_i}} - x_i v_{r_{z_i}} \\ x_i v_{r_{y_i}} - y_i v_{r_{x_i}} \end{pmatrix}$$

Desarrollando los productos y sacando como factor común las componentes de la velocidad angular:

$$\vec{GA}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GA}_i) = \begin{pmatrix} \omega_x(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \cdot x_i \cdot y_i - \omega_z \cdot x_i \cdot z_i \\ -\omega_x \cdot x_i \cdot y_i + \omega_y(x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \cdot y_i \cdot z_i \\ -\omega_x \cdot x_i \cdot z_i - \omega_y \cdot y_i \cdot z_i + \omega_z(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente se llega a:

$$\begin{aligned} \vec{H}_G &= \sum m_i \cdot \vec{GA}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GA}_i) = \begin{pmatrix} \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i - \omega_z \sum m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ -\omega_x \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i + \omega_y \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum m_i \cdot y_i \cdot z_i \\ -\omega_x \sum m_i \cdot x_i \cdot z_i - \omega_y \sum m_i \cdot y_i \cdot z_i + \omega_z \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_x \cdot \omega_x - C_z \cdot \omega_y - C_y \cdot \omega_z \\ -C_z \cdot \omega_x + I_y \cdot \omega_y - C_x \cdot \omega_z \\ -C_y \cdot \omega_x - C_x \cdot \omega_y + I_z \cdot \omega_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es decir:

$$\vec{H}_G = [I_G] \cdot \vec{\omega}$$

Si O es un punto fijo de sólido, $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}_i$.

Por analogía con el desarrollo anterior, $\vec{H}_O = \sum \vec{OA}_i \wedge m_i \cdot \vec{v}_i = \sum m_i \cdot \vec{OA}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OA}_i) = [I_O] \cdot \vec{\omega}$.

9.4 TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO PARA UN SÓLIDO RÍGIDO

Los elementos del tensor de inercia en un punto son los momentos de inercia del sólido respecto de los ejes de un sistema de referencia cartesiano con origen en dicho punto los y productos de inercia respecto de las parejas de planos de dicho sistema.

En la expresión del teorema del momento cinético aparece la derivada del momento cinético respecto del tiempo. Obsérvese, que si se quisiera trabajar con un sistema de referencia que no girara (que fuera fijo, o que se trasladara paralelamente al fijo con origen en el centro de gravedad del sólido), entonces el sólido, que está animado de movimiento general, giraría respecto a dicho sistema. Esto implica que los momentos y productos de inercia respecto de los ejes y parejas de planos dicho sistema no serían constantes en el tiempo y habría que determinar las expresiones de sus valores en función del tiempo para poder hacer las correspondientes derivadas.

Evidentemente, este proceso puede resultar muy complicado. Sin embargo, este problema desaparecería si se encontrara un sistema de referencia móvil, que se moviera de tal manera que los elementos del tensor de inercia respecto de dicho sistema mantuvieran un valor constante. El caso más evidente es el de unos ejes que se mueven solidariamente unidos al sólido, sin embargo, en muchas ocasiones es posible encontrar otros triedros que, teniendo un movimiento de rotación más sencillo que el del sólido, mantienen constantes en el tiempo las propiedades de inercia.

En cualquier caso, a la hora de aplicar el teorema del momento cinético, puesto que ahora se plantearía la derivación respecto de un sistema móvil, será necesario aplicar la *Ley de Bourc*:

$$\dot{\vec{H}}_G = \dot{\vec{H}}_G|_m + \vec{\omega}_m \wedge \vec{H}_G$$

Donde, como el tensor de inercia se mantiene constante en el sistema móvil:

$$\dot{\vec{H}}_G|_m = \frac{d([I_G] \cdot \vec{\omega})}{dt}|_m = [I_G] \cdot \dot{\vec{\omega}}|_m$$

Para poder aplicar este enfoque, lo único que queda por determinar es $\dot{\vec{\omega}}|_m$. Considerando de nuevo la ley de derivación en bases móviles, pero en esta ocasión aplicada al vector $\vec{\omega}$, se tiene que:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}|_m + \vec{\omega}_m \wedge \vec{\omega} \rightarrow \dot{\vec{\omega}}|_m = \vec{\alpha} - \vec{\omega}_m \wedge \vec{\omega}$$

Por lo que finalmente se llega a:

$$\dot{\vec{H}}_G = [I_G] \cdot \dot{\vec{\omega}}|_m + \vec{\omega}_m \wedge \vec{H}_G = [I_G] \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\omega}_m \wedge \vec{\omega}) + \vec{\omega}_m \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega})$$

Si además, dichos ejes se escogen de modo que se sean principales de inercia, todos los productos de inercia serían nulos (tensor de inercia diagonal), por lo que en las expresiones anteriores:

$$\vec{H}_G = [I_G] \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{cases} I_x \cdot \omega_x \\ I_y \cdot \omega_y \\ I_z \cdot \omega_z \end{cases} \quad \dot{\vec{H}}_G|_m = [I_G] \cdot \dot{\vec{\omega}}|_m = \begin{cases} I_x \cdot \dot{\omega}_x|_m \\ I_y \cdot \dot{\omega}_y|_m \\ I_z \cdot \dot{\omega}_z|_m \end{cases}$$

Ahora sólo queda elegir un sistema de referencia con un movimiento tal que en él las propiedades de inercia de inercia del sólido no cambien de valor medida que dicho sólido también se mueve.

Supóngase en primer lugar que se elige un sistema de referencia que se mueva totalmente vinculado al sólido, que gire solidariamente unido al mismo, es decir, que $\vec{\omega}_m = \vec{\omega}$. Obviamente, este sistema satisface de manera trivial la condición de que en él todas las propiedades de inercia son constantes en el tiempo.

En esta situación:
$$\vec{\omega}_m \wedge \vec{\omega} = \vec{0} \rightarrow \dot{\vec{\omega}}|_m = \vec{\alpha}$$

Por lo que finalmente se tiene:

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_G = [I_G] \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega})}$$

9.4.1 Ecuaciones de Euler

Si además esos ejes vinculados al sólido, que se pueden disponer orientados como se desee con relación al sólido, se toman en las direcciones principales de inercia ($C_x = C_y = C_z = 0$):

$$\vec{H}_G = [I_G] \cdot \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \omega_x \\ I_y \cdot \omega_y \\ I_z \cdot \omega_z \end{Bmatrix} \quad [I_G] \cdot \vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \alpha_x \\ I_y \cdot \alpha_y \\ I_z \cdot \alpha_z \end{Bmatrix}$$

Desarrollando:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{H}_G = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_x \cdot \omega_x & I_y \cdot \omega_y & I_z \cdot \omega_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_y \omega_z (I_z - I_y) \\ -\omega_x \omega_z (I_z - I_x) \\ \omega_x \omega_y (I_y - I_x) \end{Bmatrix}$$

Se llega a las denominadas *ecuaciones de Euler*:

$$\begin{aligned} M_{xG} &= \dot{H}_{Gx} = I_x \alpha_x + (I_z - I_y) \omega_z \omega_y \\ M_{yG} &= \dot{H}_{Gy} = I_y \alpha_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z \\ M_{zG} &= \dot{H}_{Gz} = I_z \alpha_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x \end{aligned}$$

9.4.2 Sistema de referencia no vinculado al sólido

Supóngase en segundo lugar que el sistema de referencia móvil elegido, que únicamente debe cumplir la condición de que, respecto de él, el tensor de inercia del sólido se mantenga constante en el tiempo, no se moviera con el sólido, sino que existiera un movimiento relativo entre sistema móvil y sólido.

Sean:

- $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$: la velocidad y la aceleración angulares absolutas del sólido.
- $\vec{\omega}_m$ y $\vec{\alpha}_m$: la velocidad y la aceleración angulares absolutas del sistema móvil.
- $\vec{\omega}_r$ y $\vec{\alpha}_r$: la velocidad y la aceleración angulares relativas del sólido respecto del sistema móvil.

Obviamente se cumple:
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_m + \vec{\omega}_r \quad \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_m \wedge \vec{\omega}$$

Por tanto:
$$\vec{\alpha} - \vec{\omega}_m \wedge \vec{\omega} = \vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}_r$$

Y finalmente se tiene:
$$\dot{\vec{H}}_G = [I_G] \cdot (\vec{\alpha}_m + \vec{\alpha}_r) + \vec{\omega}_m \wedge ([I_G] \cdot (\vec{\omega}_m + \vec{\omega}_r))$$

9.5 PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Los teoremas fundamentales de la dinámica establecen que para un sólido rígido las ecuaciones del equilibrio dinámico son:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = \dot{\vec{P}} = m \cdot \vec{a}_G \\ \sum \vec{M}_{i_G} = \dot{\vec{H}}_G \end{cases}$$

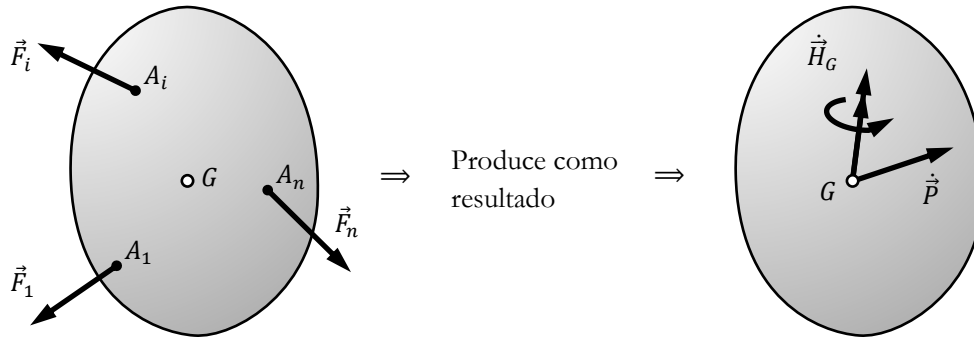


Fig. 9. 5 Efecto de las fuerzas exteriores

El principio de D'Alembert consiste en pasar en las dos ecuaciones anteriores los términos de la derecha a la izquierda, de tal manera que pueda estudiarse el sistema como si estuviera verificando un equilibrio estático, es decir:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i - m \cdot \vec{a}_G = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{i_G} - \dot{\vec{H}}_G = \vec{0} \end{cases}$$

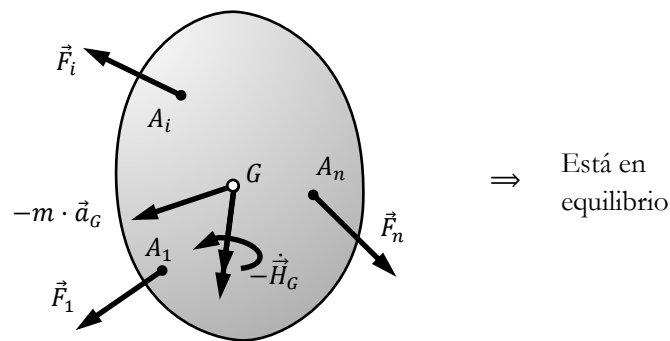


Fig. 9. 6 Fuerza de inercia y par giroscópico

En este planteamiento, además de las fuerzas reales actuantes sobre el sólido, se introducen dos acciones virtuales extra:

- $m \cdot \vec{a}_G$: Denominada *fuerza de inercia*, aplicada en el centro de gravedad.
- $\dot{\vec{H}}_G$: Es un momento puro aplicado, que representa el momento resultante de las fuerzas de inercia en el sólido respecto del centro de gravedad, y se denomina *par giroscópico*.

Adviértase que en realidad se han añadido al sistema de fuerzas reales los vectores opuestos a la fuerza de inercia y el par giroscópico. La principal ventaja de transformar conceptualmente el problema original de dinámica en uno de equilibrio estático consiste en que, de esta forma, todas las estrategias

de planteamiento y resolución de ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos vistas en estática pueden aplicarse también aquí:

- La suma de fuerzas en cualquier dirección es nula, incluyendo las fuerzas exteriores y la fuerza de inercia.
- La suma de momentos respecto de cualquier punto, incluyendo los momentos de las fuerzas exteriores (y los momentos exteriores actuantes si los hubiera), el momento de la fuerza de inercia y el par giroscópico es nula.

Obsérvese cuál es la ventaja fundamental de este planteamiento:

Si se aplica estrictamente el teorema del momento cinético, se está en la obligación de plantear los momentos de las fuerzas actuantes respecto del centro de gravedad, o un punto fijo. Sin embargo, es posible que exista algún otro punto respecto del cual plantear los momentos de dichas fuerzas resulte más sencillo. En tal caso, la aplicación del principio de D'Alembert permitirá elegir el punto respecto del cual plantear los momentos, sin más que considerar que, además de las fuerzas y momentos reales, el sólido está sometido también a la acción de la fuerza de inercia y el par giroscópico, ambos cambiados de sentido.

Esta estrategia de resolución también admite otra interpretación:

Se define un sistema de fuerzas, reducido al centro de gravedad, denominado sistema de fuerzas de inercia, formado por:

- Una fuerza en G , de valor $m \cdot \vec{a}_G$.
- Un momento, de valor \vec{H}_G .

El sistema de fuerzas reales es equivalente al sistema de fuerzas de inercia. Esto implica que:

- La suma de fuerzas en cualquier dirección en ambos sistemas es la misma.
- La suma de momentos respecto de cualquier eje en ambos sistemas es la misma.

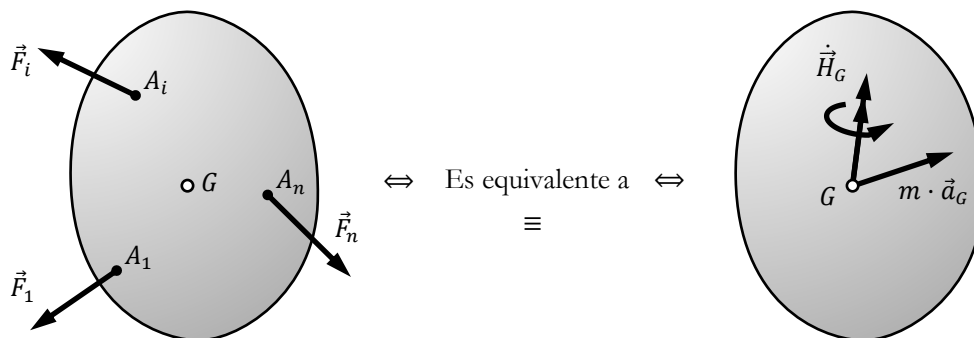


Fig. 9. 7 Sistema de fuerzas exteriores y sistema de fuerzas de inercia

9.5.1 Diagramas compuestos por varios sólidos

Cuando se tiene un sistema formado por varios sólidos enlazados, formando un mecanismo, una de las maneras de proceder es analizar el equilibrio de cada uno de los elementos por separado. Para ello, hay que trazar el diagrama de sólido libre de cada elemento. Como es sabido, esto se realiza colocando, en cada sólido, además de las cargas aplicadas que tenga, las reacciones de enlace que existan en las uniones que se han liberado para dejarlo flotando. Además, evidentemente, entre los distintos sólidos, estas reacciones en los enlaces deben plantearse verificando el principio de acción reacción. Hecho esto, para cada elemento se obtiene la aceleración del centro de gravedad y el par giroscópico respecto del centro de gravedad y se plantean las ecuaciones de los teoremas fundamentales del equilibrio dinámico (o se establece la equivalencia entre el sistema de fuerzas del diagrama de sólido libre y el sistema de fuerzas de inercia).

Sin embargo, también es posible proceder de una manera alternativa, estudiando el equilibrio dinámico de un conjunto de sólidos enlazados. Elegida una parte del sistema total, formada por varios de sus elementos (puede ser el propio sistema total, incluyendo todos sus elementos), se traza el diagrama de sólido libre del conjunto. Como es sabido, en este caso, además de todas las cargas aplicadas en los elementos que formen parte del conjunto, en aquellas uniones por las que el conjunto se ha liberado, se deben incluir las correspondientes reacciones de enlace, mientras que en las uniones internas (entre elementos del propio conjunto), en virtud del cumplimiento del principio de acción reacción, las fuerzas de enlace se anulan y no se manifiestan.

Hecho esto, se deben obtener, para cada elemento por separado, las cargas inerciales, es decir, la aceleración de su centro de gravedad (multiplicada por su masa) y su par giroscópico (respecto de su centro de gravedad). En paralelo al diagrama de sólido libre del sistema a analizar, se traza el sistema el sistema de fuerzas de inercia del conjunto. Este paso simplemente consiste en redibujar el conjunto, colocando en cada uno de los elementos sus dos resultantes inerciales, es decir, su propia fuerza de inercia, aplicada en su centro de gravedad y su propio par giroscópico respecto de su centro de gravedad.

Ahora, plantear el sistema de ecuaciones de equilibrio del conjunto, consiste sencillamente y como siempre, en establecer la equivalencia entre el sistema de fuerzas reales del diagrama de sólido libre y el sistema de (múltiples) fuerzas inerciales. Además, en este proceso, ha de tenerse en cuenta la siguiente circunstancia. Cuando alguno de los elementos del conjunto a analizar pueda ser considerado de masa despreciable, tanto su fuerza de inercia (proporcional a la masa) como su par giroscópico (proporcional a los momentos y productos de inercia, que a su vez son proporcionales a la masa) pueden tomarse nulos.

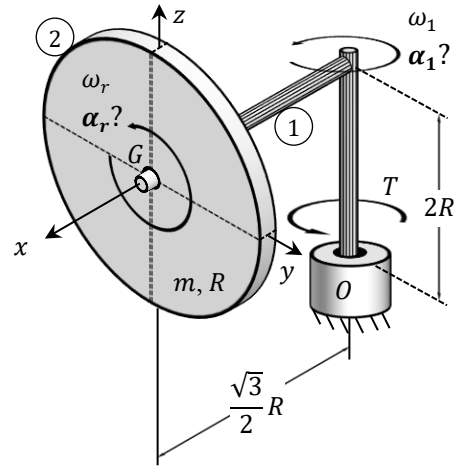
Finalmente, cuando alguno de los sólidos posea una geometría compleja, que dificulte el cálculo de su centro de gravedad y de su tensor de inercia, si dicho sólido puede descomponerse en sumas y restas de sólidos elementales, es posible aplicar el procedimiento anteriormente descrito a cada una de sus partes. Es decir, es posible considerar por separado cada uno de los sólidos elementales que componen el sólido complejo. Evidentemente, será necesario conocer, o poder determinar, la masa correspondiente a cada uno de los elementos de la descomposición. Cuando en esta descomposición haya algún sólido elemental restándose (que represente un vaciado), simplemente habrá que considerarlo de masa negativa.

• Ejemplo 9.1

Calcular en función de los datos $m, R, \omega_1, \omega_r,$ y el par aplicado T :

- La aceleración angular con la que gira la varilla y la aceleración angular con la que gira el disco respecto de la varilla (α_1 y α_r).
- Las reacciones en el cojinete O .

La varilla giratoria que da soporte al disco se puede considerar de masa despreciable.



Aceleración del centro de gravedad del disco:
$$\vec{a}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \cdot \sqrt{3}/2 R \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\omega_1^2 \cdot \sqrt{3}/2 R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Velocidad angular absoluta del disco:
$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_r \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix}$$

Aceleración angular del disco:
$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ \omega_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \omega_r \cdot \omega_1 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

Par giroscópico del disco:
$$\vec{H}_G = [I_G] \cdot \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega}_2)$$

Como los ejes xyz son principales de inercia:
$$[I_G] \cdot \vec{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \omega_r \\ 0 \\ I_z \cdot \omega_1 \end{Bmatrix} \quad [I_G] \cdot \vec{\alpha}_2 = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \alpha_r \\ I_y \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ I_z \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_2 \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega}_2) = \begin{vmatrix} \omega_r & 0 & \omega_1 \\ I_x \cdot \omega_r & 0 & I_z \cdot \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_r + I_x \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

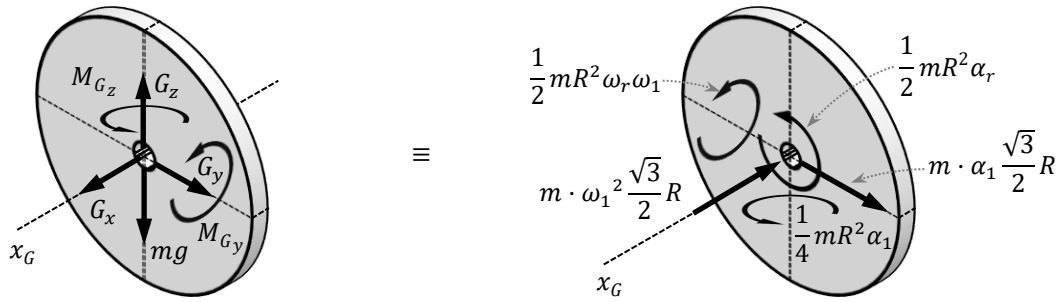
$$\vec{H}_G = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \alpha_r \\ (I_y - I_z + I_x) \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ I_z \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \alpha_r \\ I_x \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ I_z \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 mR^2 \cdot \alpha_r \\ 1/2 mR^2 \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ 1/4 mR^2 \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

Puesto que en este caso $I_y = I_z$.

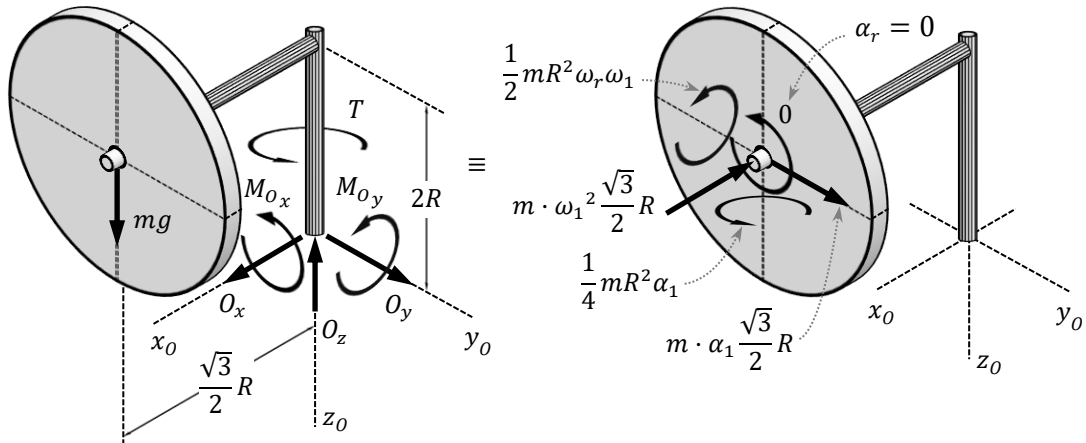
Obsérvese que en un sistema de referencia que se mueva con el sólido 1 el tensor de inercia del disco también permanece constante, por tanto, el par giroscópico también podría haberse obtenido a partir de la expresión:

$$\vec{H}_G = [I_G] \cdot (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_r) + \vec{\omega}_1 \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega}_2)$$

$$[I_G] \cdot (\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_r) = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \alpha_r \\ 0 \\ I_z \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad \vec{\omega}_1 \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ I_x \cdot \omega_r & 0 & I_z \cdot \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_x \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$M_{x_G} \rightarrow 0 = \frac{1}{2} mR^2 \alpha_r \rightarrow \alpha_r = 0$$



$$M_{z_0} \rightarrow T = \frac{1}{4} mR^2 \alpha_1 + m \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = mR^2 \alpha_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = mR^2 \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{T}{mR^2}$$

$$F_x \rightarrow O_x = -m \omega_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$F_y \rightarrow O_y = m \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} R = m \frac{T}{mR^2} \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{\sqrt{3} T}{2 R}$$

$$F_z \rightarrow O_z = mg$$

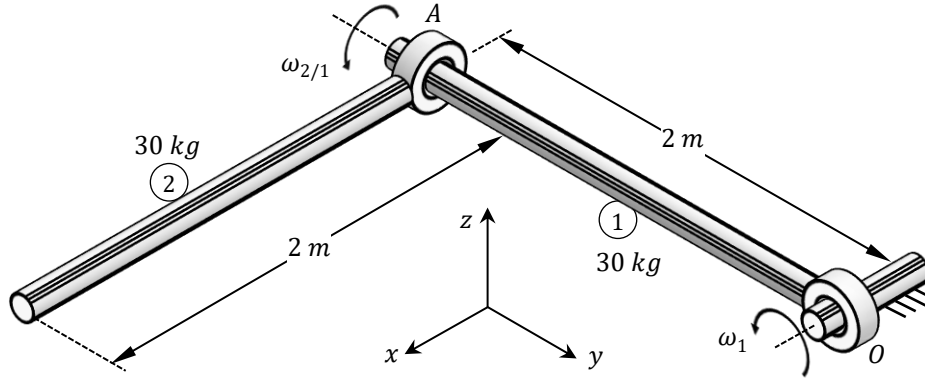
$$M_{x_0} \rightarrow M_{O_x} = -m \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot 2R = -m \frac{T}{mR^2} \sqrt{3} R^2 = -\sqrt{3} T$$

$$M_{y_0} \rightarrow M_{O_y} + mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{1}{2} mR^2 \omega_r \omega_1 - m \omega_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot 2R \rightarrow$$

$$\rightarrow M_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} mgR + mR^2 \omega_1 \left(\frac{1}{2} \omega_r - \sqrt{3} \omega_1 \right)$$

• Ejemplo 9.2

El sistema se abandona desde el reposo en la posición mostrada a la acción del peso propio. Calcular, en el instante inicial del movimiento, cuando el sistema aún no ha adquirido velocidad ($\omega_1 = 0$ y $\omega_{2/1} = 0$), las aceleraciones angulares de ambas barras.



Existen dos movimientos independientes, el giro absoluto de la barra 1, y el giro relativo de la barra 2 respecto de la barra 1. El movimiento absoluto de la barra 2 es una combinación de estos dos movimientos:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} = \vec{0} + \vec{0} \qquad \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1}$$

Existen por tanto dos incógnitas de aceleración, una por cada movimiento independiente, α_1 y $\alpha_{2/1}$.

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{\alpha}_2 = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Las aceleraciones de los dos centros de gravedad han de plantearse también en función de estas dos incógnitas:

$$\vec{a}_{G_1} = \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{OG_1} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_1 \end{Bmatrix} \qquad \vec{a}_A = \vec{\alpha}_1 \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge \overrightarrow{AG_2} = \vec{a}_A + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{2/1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{a}_A + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_{2/1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(2\alpha_1 + \alpha_{2/1}) \end{Bmatrix}$$

Siendo para una barra $I_{G_\perp} = m \cdot L^2/12$ e $I_{G_\parallel} \approx 0$ y tomando $I = 30 \cdot 2^2/12 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ los pares giroscópicos de ambas barras resultan:

$$\vec{H}_{G_1} = [I_{G_1}] \cdot \vec{\alpha}_1 + \vec{0} = \begin{Bmatrix} I \cdot \alpha_1 \\ 0 \cdot 0 \\ I \cdot 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I \cdot \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{H}_{G_2} = [I_{G_2}] \cdot \vec{\alpha}_2 + \vec{0} = \begin{Bmatrix} 0 \cdot \alpha_1 \\ I \cdot \alpha_{2/1} \\ I \cdot 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I \cdot \alpha_{2/1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O y A son articulaciones que permiten un único giro. Tienen por tanto cinco reacciones cada una:

- Tres fuerzas, en las tres direcciones del espacio x, y, z .
- Dos momentos, en las dos direcciones perpendiculares al eje del giro permitido:
 - O permite el giro en x , tiene momentos en y, z .
 - A permite el giro en y , tiene momentos en x, z .

Diagramas de sólido libre de los elementos individuales:

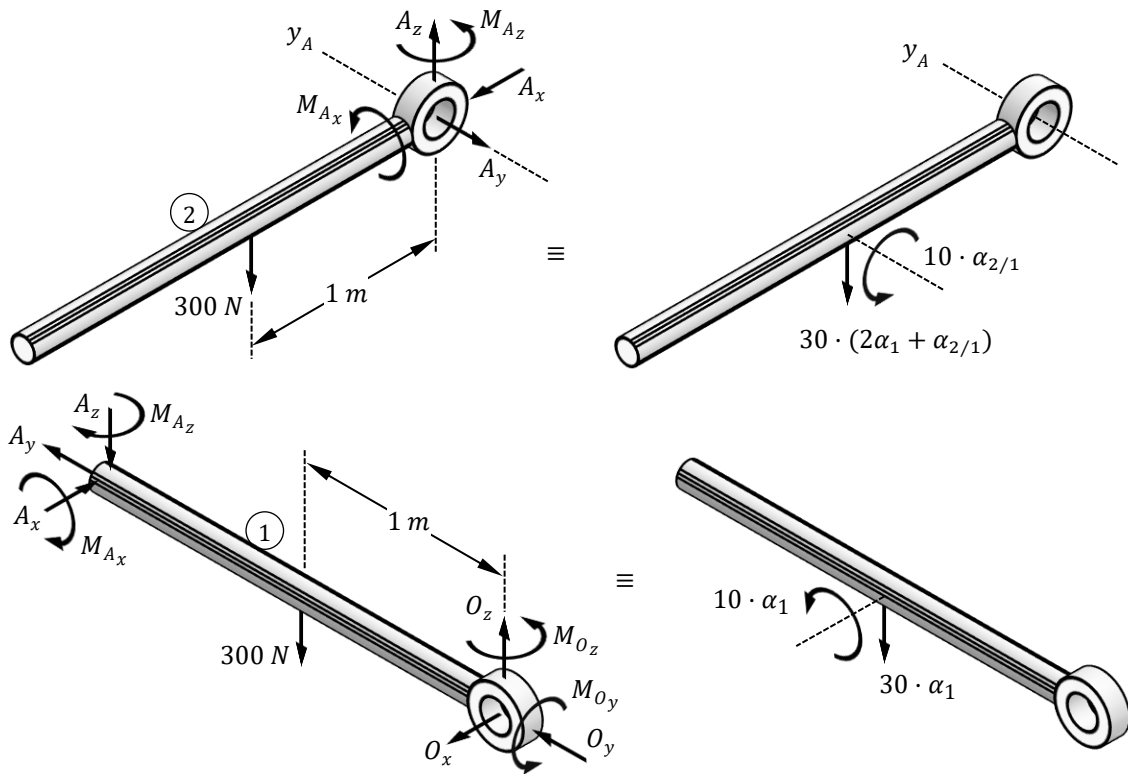
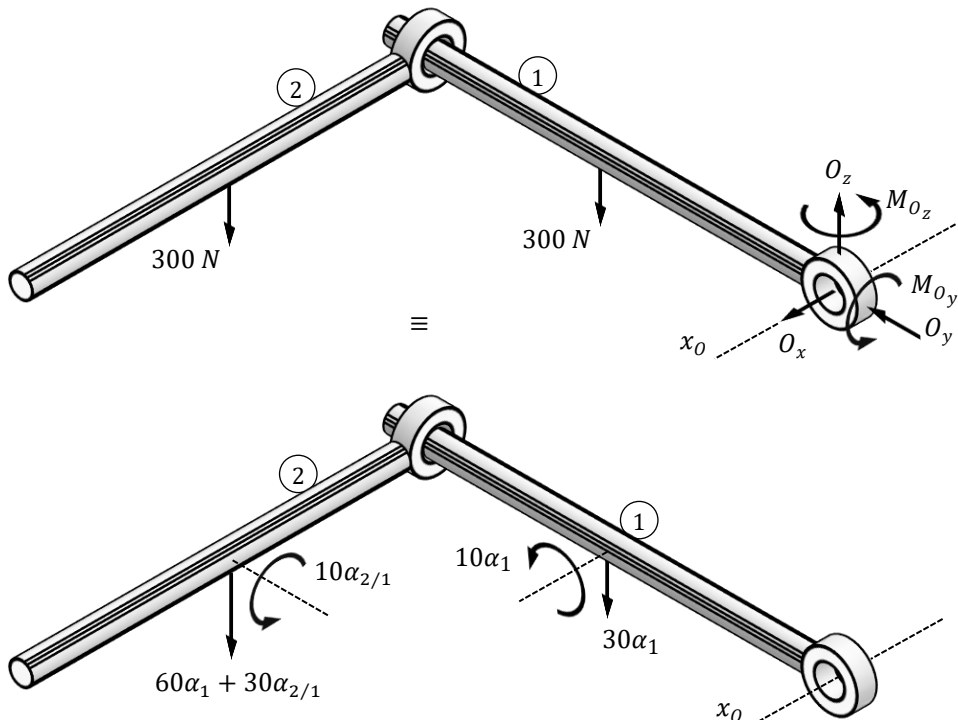


Diagrama de sólido libre del conjunto:



La estructura matemática del problema dinámico es la siguiente:

- Existen un total de 12 incógnitas: 2 aceleraciones y 10 reacciones (5 en O y 5 en A).
- Se dispone de un total de 12 ecuaciones equilibrio dinámico independientes, 6 por cada uno de los 2 sólidos individuales.

El problema por tanto se puede resolver. Sin embargo, no es necesario resolver las doce incógnitas que existen, ya que sólo dos de ellas, α_1 y $\alpha_{2/1}$, son necesarias para componer el objetivo, $\vec{\alpha}_1$ y $\vec{\alpha}_2$. ¿Cuál es entonces la estrategia de resolución más adecuada?

- El equilibrio del sólido 2 contiene 7 incógnitas:
 - Las 5 reacciones en A en el sistema de fuerzas reales.
 - α_1 y $\alpha_{2/1}$ en el sistema de fuerzas de inercia.
- El equilibrio del sólido 1 contiene 11 incógnitas:
 - Las 5 reacciones en O y las 5 reacciones en A en el sistema de fuerzas reales.
 - α_1 en el sistema de fuerzas de inercia.
- Pero el equilibrio de uno de los elementos individuales se puede remplazar por el diagrama de sólido libre del conjunto, el cual contiene:
 - Las 5 reacciones en O en el sistema de fuerzas reales, al no haberse soltado el enlace A .
 - α_1 y $\alpha_{2/1}$ en los sistemas de fuerzas de inercia de ambos sólidos.

Obsérvese que:

- Si en el diagrama del sólido 2 se encuentra una ecuación de equilibrio que no contenga ninguna de las reacciones de A , dicha ecuación sólo contendrá a las dos incógnitas de aceleración:

$$M_{y_A} \rightarrow 300 \cdot 1 = 10\alpha_{2/1} + (60\alpha_1 + 30\alpha_{2/1}) \cdot 1$$

- Si en el diagrama del conjunto se encuentra una ecuación que no contenga ninguna de las reacciones de O , dicha ecuación únicamente contendrá precisamente las mismas dos incógnitas de la primera ecuación planteada:

$$M_{x_O} \rightarrow 300 \cdot 1 + 300 \cdot 2 = 10\alpha_1 + 30\alpha_1 \cdot 1 + (60\alpha_1 + 30\alpha_{2/1}) \cdot 2$$

Se tiene por tanto el siguiente subsistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 30 = 6\alpha_1 + 4\alpha_{2/1} \\ 90 = 16\alpha_1 + 6\alpha_{2/1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -9\alpha_1 - 6\alpha_{2/1} = -45 \\ 16\alpha_1 + 6\alpha_{2/1} = 90 \end{cases} \rightarrow 7\alpha_1 = 45 \rightarrow \alpha_1 = \frac{45}{7} = 6.4285 \text{ rad/s}^2$$

$$15 = 3\alpha_1 + 2\alpha_{2/1} \rightarrow \alpha_{2/1} = \frac{15 - 3 \cdot 45/7}{2} = -2.1428 \text{ rad/s}^2$$

Y la respuesta final a la pregunta del problema es:

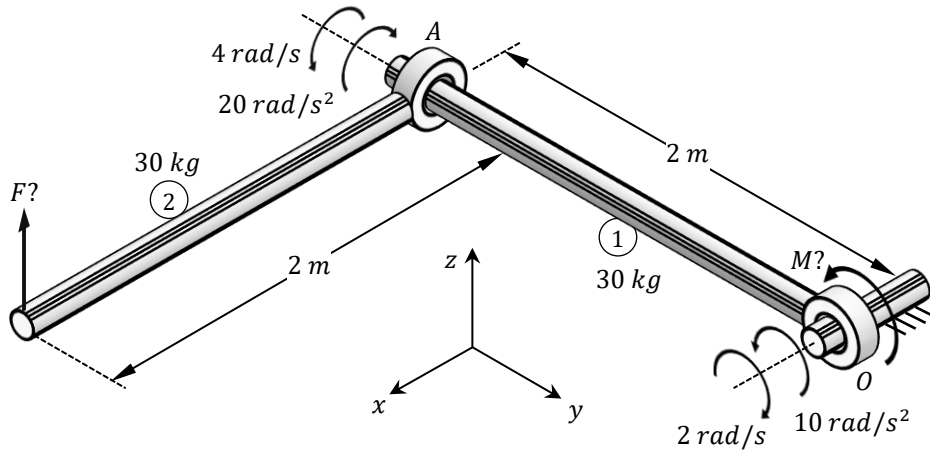
$$\vec{\alpha}_1 = \begin{Bmatrix} 6.43 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ rad/s}^2 \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{Bmatrix} 6.43 \\ -2.14 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ rad/s}^2$$

Resueltas las incógnitas de aceleración los sistemas inerciales quedan completamente determinados, con lo que se podrían resolver las 10 reacciones muy fácilmente de manera desacoplada planteando adecuadamente las 10 ecuaciones de equilibrio que no se han utilizado:

$$\begin{array}{l} \text{En el sólido 2:} \\ F_x \rightarrow A_x \\ F_y \rightarrow A_y \\ F_z \rightarrow A_z \end{array} \quad \begin{array}{l} M_{x_A} \rightarrow M_{A_x} \\ M_{y_A} \rightarrow M_{A_y} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{En el conjunto:} \\ F_x \rightarrow O_x \\ F_y \rightarrow O_y \\ F_z \rightarrow O_z \end{array} \quad \begin{array}{l} M_{y_O} \rightarrow M_{O_y} \\ M_{z_O} \rightarrow M_{O_z} \end{array}$$

• Ejemplo 9.3

En la posición mostrada, el sistema se está moviendo con las velocidades y aceleraciones indicadas. Calcular en dicho instante los valores de las dos cargas motoras F y M .



$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{2/1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\alpha}_{2/1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{2/1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s}$$

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{2/1} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ rad/s}^2$$

$$\vec{a}_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^2 \cdot 1 \\ -10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2$$

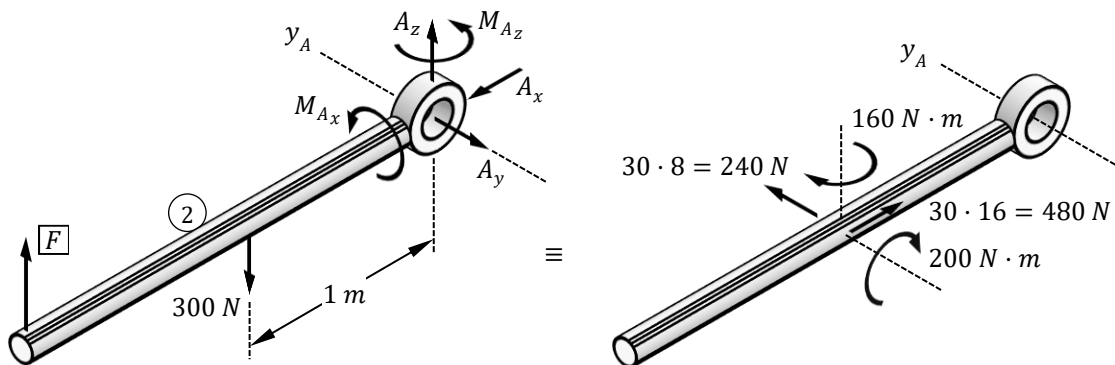
$$\vec{a}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2^2 \cdot 2 \\ -10 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge \overrightarrow{AG_2} + \vec{\omega}_2 \wedge (\vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{AG_2}) = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s}^2$$

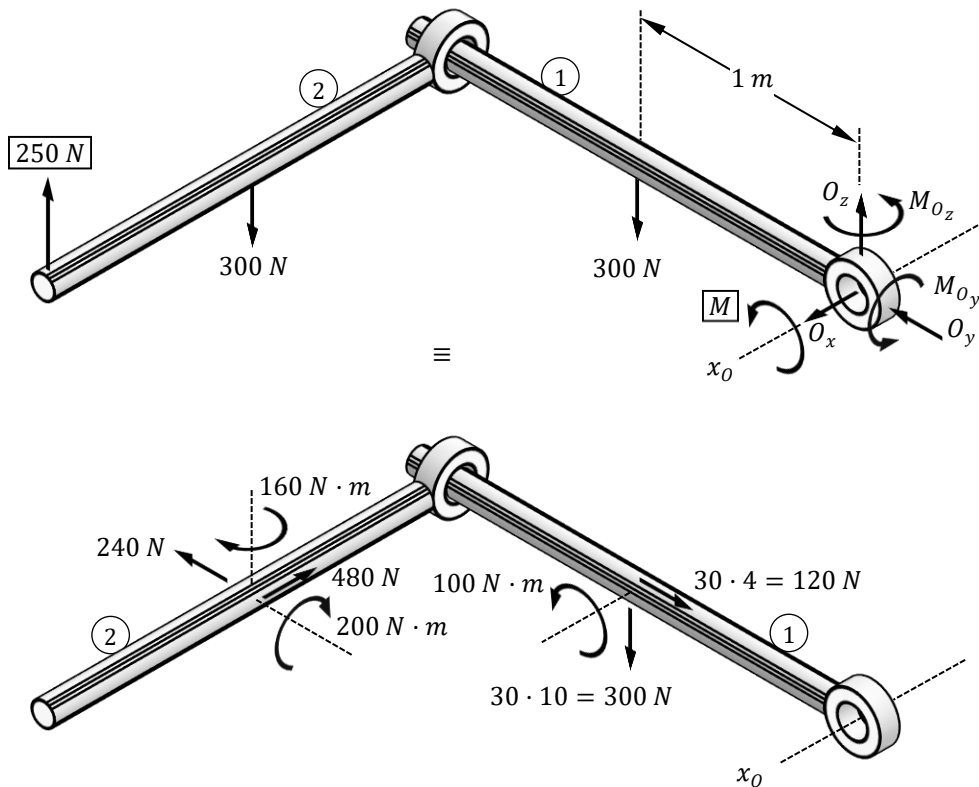
$$I = \frac{1}{12} 30 \cdot 2^2 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\dot{\vec{H}}_{G_1} = [I_{G_1}] \cdot \vec{\alpha}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge ([I_{G_1}] \cdot \vec{\omega}_1) = \begin{pmatrix} 10 \cdot 10 \\ 0 \cdot 0 \\ 10 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 10 \cdot (-2) & 0 \cdot 0 & 10 \cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\dot{\vec{H}}_{G_2} = [I_{G_2}] \cdot \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge ([I_{G_2}] \cdot \vec{\omega}_2) = \begin{pmatrix} 0 \cdot 10 \\ 10 \cdot (-20) \\ 10 \cdot (-8) \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 \cdot (-2) & 10 \cdot 4 & 10 \cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \\ -160 \end{pmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$



$$M_{y_A} \rightarrow -F \cdot 2 + 300 \cdot 1 = -200 \rightarrow F = 500/2 = 250 \text{ N}$$



$$M_{x_0} \rightarrow M - 250 \cdot 2 + 300 \cdot 2 + 300 \cdot 1 = 100 + 300 \cdot 1 \rightarrow M = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

9.6 SISTEMAS DE EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Tanto si se están analizando los elementos del sistema individualmente, como si se está trabajando con conjuntos formados por varios elementos enlazados, las cargas inerciales siempre se obtienen individualmente para cada sólido. El cálculo de la fuerza de inercia y el par giroscópico de cada sólido siempre requiere realizar el planteamiento de la cinemática completa del mecanismo, de manera que para, cada sólido i , se disponga de \vec{a}_{G_i} , $\vec{\omega}_i$ y $\vec{\alpha}_i$. De este modo, a partir de dichos parámetros cinemáticos, para cada sólido se tiene:

$$\vec{P}_i = m_i \cdot \vec{a}_{G_i} \qquad \vec{H}_{G_i} = [I_{G_i}] \cdot \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \wedge ([I_{G_i}] \cdot \vec{\omega}_i)$$

Estas dos magnitudes fundamentales de la dinámica son magnitudes vectoriales que existen físicamente. Son una fuerza y un momento que, aunque virtuales y no reales, tienen, cada una de ellas, un módulo, una dirección y un sentido que permiten ‘dibujarlas’. Esta representación, al igual que la de cualquier magnitud cinemática, es independiente del sistema de referencia empleado para calcular la magnitud en cuestión.

Por ejemplo, si un sólido tiene un eje de rotación permanente vertical, su velocidad angular es un vector vertical. Además, si en dicho caso la velocidad de giro es constante, la aceleración del centro de gravedad de dicho sólido apunta hacia el centro de la circunferencia que describe. Para dibujar dichas magnitudes, que existen físicamente, no se necesita un sistema de referencia. Dicho de otra manera, las magnitudes vectoriales son como son (valen lo que valen y apuntan hacia donde apuntan), independientemente de cualquier sistema de referencia.

Sin embargo, muchas de las magnitudes vectoriales que intervienen en la resolución un problema no es posible dibujarlas hasta que no se calculen y para calcularlas es necesario realizar ciertas operaciones vectoriales. Es en este proceso donde se hace necesario definir un sistema de referencia. Para realizar una operación vectorial es necesario expresar matemáticamente las magnitudes vectoriales que intervengan en la misma. Para poder expresar matemáticamente un vector es necesario establecer un sistema de referencia de tal manera que las componentes matemáticas del vector sean las proyecciones de éste sobre los ejes de dicho sistema.

Pero el sistema de referencia no es algo que exista en la realidad, es una herramienta matemática que, quien tiene que hacer la operación, necesita definir 'artificialmente'. Este hecho presenta la ventaja de que se puede establecer libremente el sistema de referencia que resulte más cómodo para expresar las magnitudes que intervengan en la operación. No obstante, en cualquier caso, deben cumplirse dos condiciones. En primer lugar, debe tratarse de un sistema dextrógiro, es decir, que al girar del eje x al eje y , se defina el sentido positivo del eje z . En segundo lugar, dentro de una misma operación vectorial, todos los términos que intervengan han de estar expresados en un mismo sistema de referencia, es decir, no se pueden mezclar magnitudes expresadas en distintos sistemas dentro de la misma operación. En este sentido, también es necesario dejar constancia de que, si el resultado de la operación es otra magnitud vectorial, ésta queda expresada en ese mismo sistema de referencia.

Obsérvese que, una vez calculada, para realizar la representación gráfica de dicha magnitud, es necesario apoyarse en el sistema de ejes empleado, para representar cada componente y componer con ellas la resultante. Pero, una vez dibujado ese vector resultado, el sistema de referencia empleado para obtenerlo puede eliminarse y si dicho vector ha de intervenir posteriormente en otra operación, puede proyectarse a voluntad en otras direcciones diferentes más convenientes.

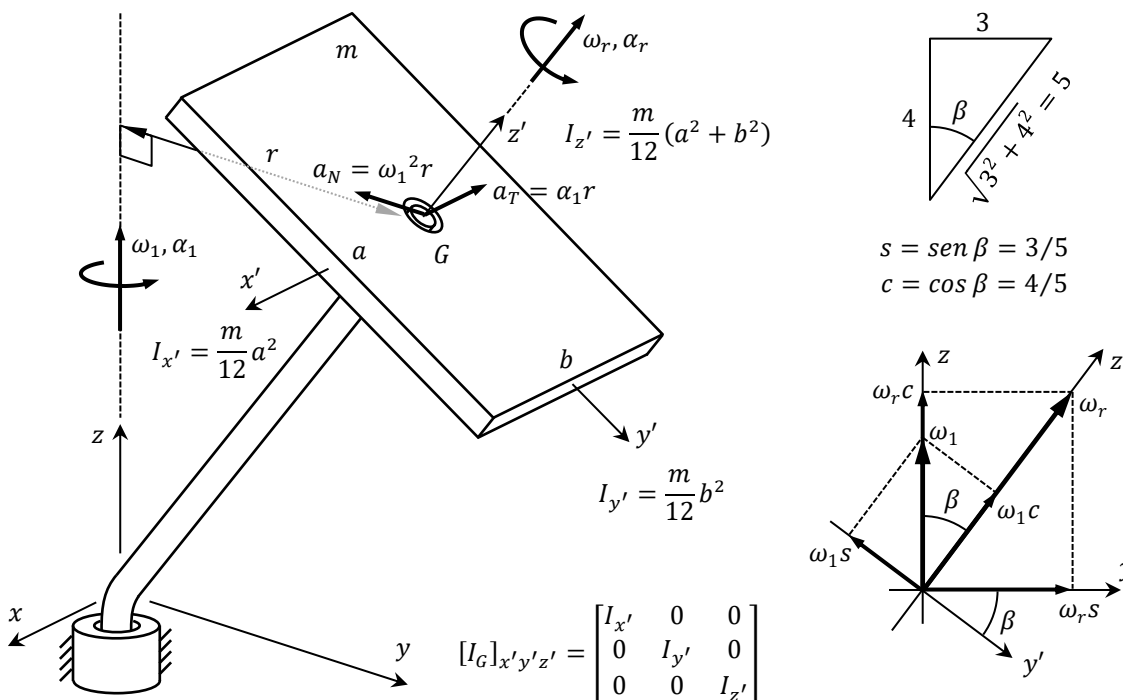
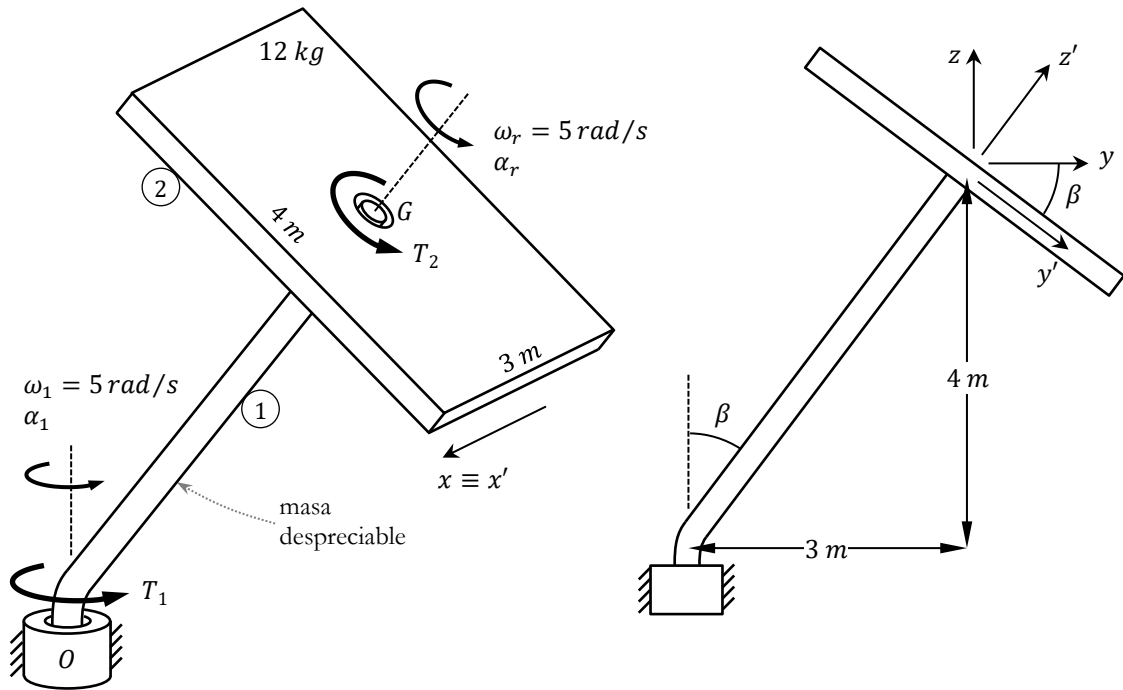
Toda esta disquisición resulta de especial importancia, o interés, a la hora de obtener el par giroscópico de un elemento. En la operación que hay que hacer para calcular este vector, intervienen las magnitudes vectoriales de velocidad y aceleración angular, pero también está el tensor de inercia. Dicha matriz agrupa los momentos y productos de inercia respecto de las referencias geométricas (ejes y parejas de planos, respectivamente) de un sistema de referencia con origen en el centro de gravedad del elemento. Pues bien, para que la operación matemática tenga sentido, el sistema de ejes en el que se obtiene el tensor de inercia, ha de ser el mismo que en el que se expresen el resto de vectores. Así mismo, el propio par giroscópico queda expresado en dicho sistema. Lo más conveniente es, por tanto, elegir para el sólido, unos ejes que, con origen en su centro de gravedad, estén orientados de tal manera que el tensor de inercia, que constituye la magnitud más compleja, sea fácil de definir.

Normalmente, se toman los ejes principales del sólido, en los cuales todos los productos de inercia son nulos, para que el tensor quede como una matriz diagonal, siendo, además, los elementos de dicha diagonal momentos de inercia provenientes de expresiones conocidas. Es decir, es la orientación real del sólido la que condiciona la orientación del sistema de referencia a emplear. En caso contrario, estableciendo unos ejes que no coincidieran con las direcciones principales de inercia, sería necesario aplicar complejos procedimientos para determinar los valores de los seis elementos independientes del tensor. Ahora, establecido el sistema de referencia más adecuado para calcular el par giroscópico, es necesario proyectar en dichas direcciones el resto magnitudes vectoriales.

Obsérvese que, de acuerdo con esta argumentación, es posible que el par giroscópico de cada sólido requiera ser calculado en un sistema de ejes diferente.

• Ejemplo 9.4

- a) Si se sabe que $T_1 = 2781 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $T_2 = 0$, calcular α_1 y α_r .
- b) Si se sabe que $\alpha_1 = 25 \text{ rad/s}^2$ y $\alpha_r = 0$, calcular T_1 y T_2 .



Las magnitudes vectoriales pueden expresarse matemáticamente por componentes en cualquiera de los dos sistemas de referencia. Evidentemente, las proyecciones sobre distintos ejes son diferentes:

$$\vec{\omega}_{1xyz} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} \quad \vec{\omega}_{rxyz} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_r s \\ \omega_r c \end{Bmatrix} \quad \vec{\omega}_{1x'y'z'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\omega_1 s \\ \omega_1 c \end{Bmatrix} \quad \vec{\omega}_{rx'y'z'} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \end{Bmatrix}$$

Sin embargo, el tensor de inercia de la placa rectangular únicamente es diagonal en el sistema de ejes definido por las direcciones principales de inercia de dicho sólido, es decir, el sistema $x'y'z'$. Por lo tanto, el cálculo vectorial del par giroscópico sólo puede plantearse con las magnitudes vectoriales absolutas del sólido 2 expresadas también en el sistema de ejes girados, en el cual queda también expresado el resultado:

$$\dot{\vec{H}}_{G_{x'y'z'}} = [I_G]_{x'y'z'} \cdot \vec{\alpha}_{2_{x'y'z'}} + \vec{\omega}_{2_{x'y'z'}} \wedge ([I_G]_{x'y'z'} \cdot \vec{\omega}_{2_{x'y'z'}})$$

Las operaciones vectoriales para obtener las magnitudes angulares absolutas en los ejes girados también han de hacerse con todos los vectores involucrados expresados en dicho sistema:

$$\vec{\omega}_{2_{x'y'z'}} = \vec{\omega}_{1_{x'y'z'}} + \vec{\omega}_{r_{x'y'z'}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1 s \\ \omega_1 c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1 s \\ \omega_1 c + \omega_r \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_{2_{x'y'z'}} = \vec{\alpha}_{1_{x'y'z'}} + \vec{\alpha}_{r_{x'y'z'}} + \vec{\omega}_{1_{x'y'z'}} \wedge \vec{\omega}_{r_{x'y'z'}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_1 s \\ \alpha_1 c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_r \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\omega_1 s & \omega_1 c \\ 0 & 0 & \omega_r \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 \omega_r s \\ -\alpha_1 s \\ \alpha_1 c + \alpha_r \end{pmatrix}$$

Por tanto, las componentes (proyecciones) del par giroscópico de la placa 2, en sus direcciones principales son:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_{G_{x'y'z'}} &= \begin{pmatrix} (-\omega_1 \omega_r s) \cdot I_{x'} \\ (-\alpha_1 s) \cdot I_{y'} \\ (\alpha_1 c + \alpha_r) \cdot I_{z'} \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\omega_1 s & \omega_1 c + \omega_r \\ 0 \cdot I_{x'} & (-\omega_1 s) \cdot I_{y'} & (\omega_1 c + \omega_r) \cdot I_{z'} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -I_{x'} \cdot \omega_1 \omega_r s + (-\omega_1 s)(\omega_1 c + \omega_r)(I_{z'} - I_{y'}) \\ -I_{y'} \cdot \alpha_1 s \\ I_{z'} \cdot (\alpha_1 c + \alpha_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{H}_{G_{x'}} \\ \dot{H}_{G_{y'}} \\ \dot{H}_{G_{z'}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

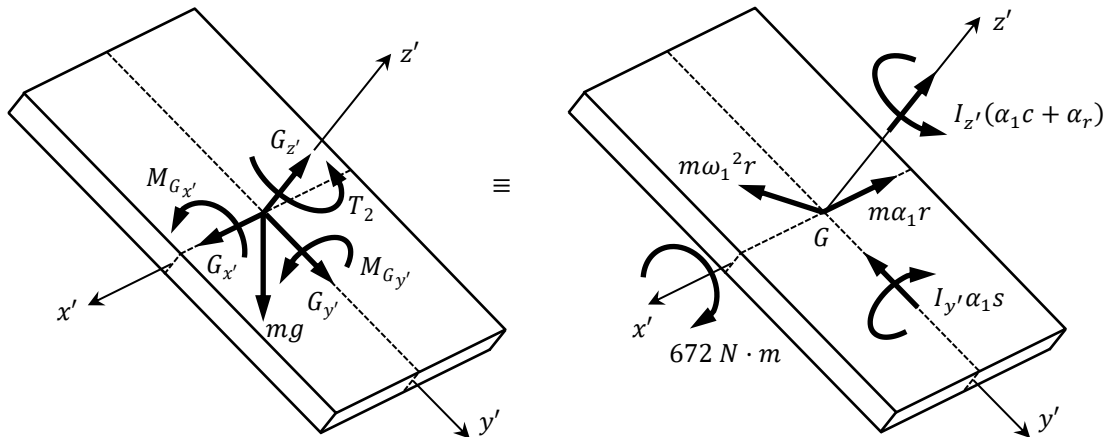
Obsérvese que en el caso de este sólido se cumple que $I_{z'} = I_{x'} + I_{y'}$, por lo que se puede simplificar:

$$\dot{H}_{G_{x'}} = -I_{x'} \cdot \omega_1 \omega_r s - \omega_1 s(\omega_1 c + \omega_r) \cdot I_{x'} = -I_{x'} \cdot \omega_1 s(\omega_1 c + 2\omega_r)$$

$$I_{x'} = 12/12 \cdot 4^2 = 16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_{y'} = 12/12 \cdot 3^2 = 9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_{z'} = 16 + 9 = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\dot{H}_{G_{x'}} = -16 \cdot 5 \cdot 3/5 \cdot (5 \cdot 4/5 + 2 \cdot 5) = -672 \text{ N} \cdot \text{m}$$

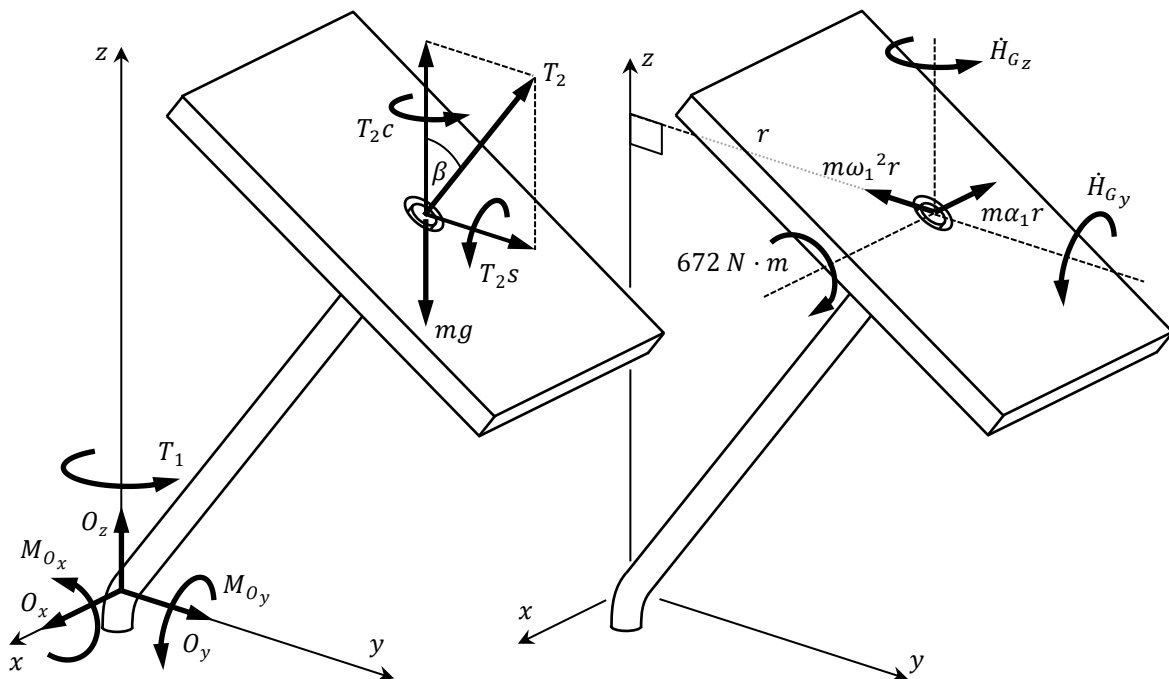
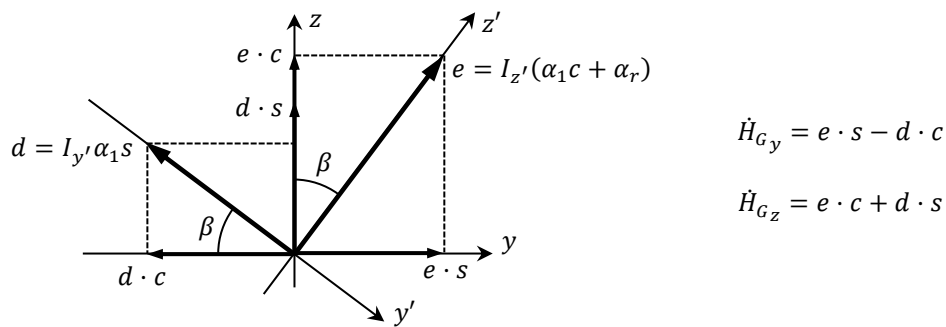
De cara al planteamiento de las ecuaciones de equilibrio los valores de estas tres componentes pueden interpretarse como tres momentos en el sistema de fuerzas de inercia, en las direcciones de los tres ejes del sistema inclinado.



De hecho, como las reacciones en el enlace entre los elementos 1 y 2 también tienen esas mismas direcciones, para plantear las ecuaciones de equilibrio del sólido individual lo más conveniente es utilizar las componentes inclinadas del par giroscópico. De entre las 6 ecuaciones independientes que pueden plantearse, la “ecuación maestra” es aquella en la que no aparece ninguna de las 5 reacciones, es decir, el equilibrio de momentos respecto del eje en el cual el enlace permite el giro:

$$M_z' \rightarrow T_2 = \dot{H}_{Gz'} = I_{z'}(\alpha_1 c + \alpha_r)$$

Sin embargo, para plantear el equilibrio del conjunto, como en su diagrama de sólido libre aparecen las reacciones en O , que tienen las direcciones del sistema no girado xyz , es más adecuado transformar el par giroscópico desproyectándolo a los ejes no inclinados para considerarlo como tres momentos en dichas direcciones. La dirección del eje x es la misma que la del x' , por lo tanto, esa proyección es la misma en ambos sistemas, $\dot{H}_{Gx} \equiv \dot{H}_{Gx'}$. En las otras dos direcciones:



El momento aplicado inclinado T_2 también debe proyectarse sobre las direcciones de las reacciones en O . En este diagrama, de entre sus 6 ecuaciones independientes, la “ecuación clave” es aquella en la que no aparece ninguna de las 5 reacciones que existen en O , es decir, el equilibrio de momentos respecto del eje en el cual dicho enlace permite el giro:

$$M_z \rightarrow T_1 + T_2 c = \dot{H}_{Gz} + m \alpha_1 r \cdot r = I_{z'}(\alpha_1 c + \alpha_r) \cdot c + I_{y'} \alpha_1 s \cdot s + m \alpha_1 r^2$$

- Apartado a) Si $T_1 = 2781 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $T_2 = 0$, calcular α_1 y α_r :
 - La primera ecuación maestra queda: $M_{z'} \rightarrow 0 = I_{z'}(\alpha_1 c + \alpha_r) \rightarrow \alpha_1 c + \alpha_r = 0$
 - La segunda ecuación clave, introduciendo lo anterior: $M_z \rightarrow T_1 = I_{y'}\alpha_1 s^2 + m\alpha_1 r^2$

$$\alpha_1 = \frac{T_1}{I_{y'} \cdot s^2 + m \cdot r^2} = \frac{2781}{9 \cdot (3/5)^2 + 12 \cdot 3^2} = 25 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_r = -\alpha_1 c = -25 \cdot (4/5) = -20 \text{ rad/s}^2$$

En este caso resulta:

$$\dot{\vec{H}}_{G_{x'y'z'}} = \begin{Bmatrix} -672 \\ -9 \cdot 25 \cdot (3/5) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672 \\ -135 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m} \quad \dot{\vec{H}}_{G_{xyz}} = \begin{Bmatrix} -672 \\ -135 \cdot (4/5) \\ 135 \cdot (3/5) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672 \\ -108 \\ 81 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

- Apartado b) Si $\alpha_1 = 25 \text{ rad/s}^2$ y $\alpha_r = 0$, calcular T_1 y T_2 :
 - La primera ecuación queda: $M_{z'} \rightarrow T_2 = I_{z'}\alpha_1 c = 25 \cdot 25 \cdot (4/5) = 500 \text{ N} \cdot \text{m}$
 - La segunda ecuación queda:

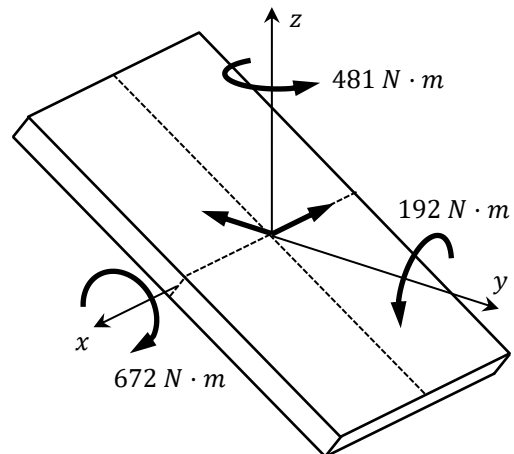
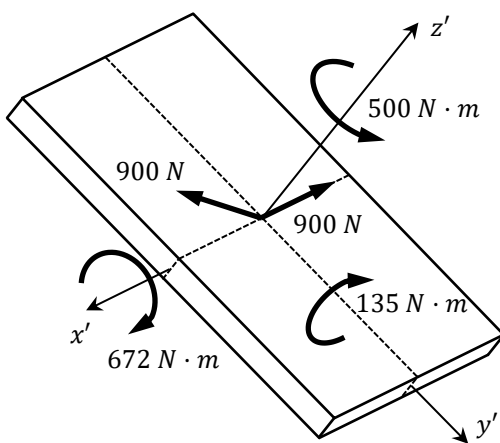
$$M_z \rightarrow T_1 + T_2 c = I_{z'}\alpha_1 c \cdot c + I_{y'}\alpha_1 s \cdot s + m\alpha_1 r^2 = \alpha_1 \cdot (I_{z'} \cdot c^2 + I_{y'} \cdot s^2 + m \cdot r^2)$$

$$T_1 = -500 \cdot (4/5) + 25 \cdot (25 \cdot (4/5)^2 + 9 \cdot (3/5)^2 + 12 \cdot 3^2) = 2781 \text{ N} \cdot \text{m}$$

En este caso resulta:

$$\dot{\vec{H}}_{G_{x'y'z'}} = \begin{Bmatrix} -672 \\ -9 \cdot 25 \cdot (3/5) \\ 25 \cdot 25 \cdot (4/5) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672 \\ -135 \\ 500 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\dot{\vec{H}}_{G_{xyz}} = \begin{Bmatrix} -672 \\ 500 \cdot (3/5) - 135 \cdot (4/5) \\ 500 \cdot (4/5) + 135 \cdot (3/5) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -672 \\ 192 \\ 481 \end{Bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}$$



9.7 REACCIONES DINÁMICAS

Supóngase un sistema mecánico con capacidad de movimiento en una situación estática, es decir, parado, o frenado. En dicha situación, las aceleraciones angulares de todos los elementos son nulas, así como las aceleraciones lineales de cualquier centro de gravedad. En esta situación de equilibrio estático existen fuerzas de enlace, ya que sobre el sistema estarían actuando cargas permanentes, como los pesos propios (o si fueran necesarios, los esfuerzos de los dispositivos encargados de retener el movimiento). Estas fuerzas de enlace que existen en el sistema cuando está quieto se denominan *reacciones estáticas*.

Si ese mismo sistema mecánico se pone en movimiento, es decir, se introducen las cargas de accionamiento (motores), debido a los efectos dinámicos las fuerzas de enlace cambian de valor. Los incrementos en el valor de las fuerzas transmitidas en las uniones como consecuencia de haber puesto el sistema en movimiento se conocen como *reacciones dinámicas*. Obsérvese que la reacción dinámica no es el valor total de la fuerza de enlace, sino la variación en el valor de la misma respecto del que tenía cuando el sistema estaba estático.

Cuando el sistema está en movimiento, tiene las mismas cargas que tenía cuando estaba quieto (los pesos propios, etc.), más las cargas que lo han sacado de ese equilibrio estático (los pares motores, etc.). La suma de ambos tipos de cargas produce los valores totales de las reacciones. Por lo tanto, si la diferencia entre ambos estados, parado y en movimiento, son las cargas motoras, la diferencia entre los valores de las reacciones en ambas situaciones es debida exclusivamente a la acción de dichas cargas. En consecuencia, las reacciones dinámicas se obtienen analizando el sistema sometido exclusivamente a la acción de las cargas motoras, es decir, quitando las cargas actuantes en la situación estática.

Mediante la aplicación del principio de superposición, los valores totales de las reacciones pueden obtenerse, en lugar de resolviendo el problema con movimiento con todas las cargas existentes, sumando:

- Las reacciones estáticas, calculadas resolviendo el sistema con las cargas estáticas, permanentes, aplicadas sobre el sistema parado, es decir, resolviendo un equilibrio estático.
- Más las reacciones dinámicas, calculadas resolviendo el equilibrio dinámico del sistema, pero retirando todas las cargas anteriores y aplicando exclusivamente las cargas que sólo existen si hay movimiento.

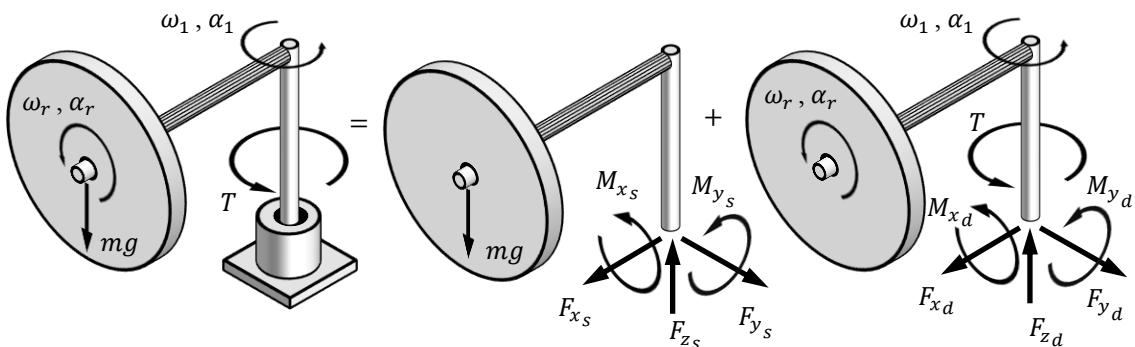
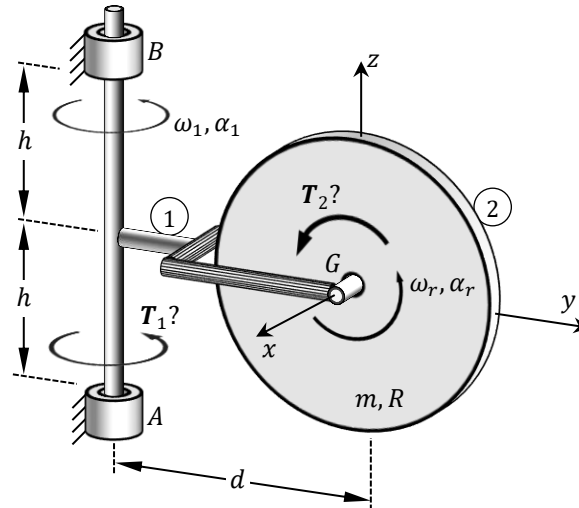


Fig. 9. 8 Reacciones estáticas y dinámicas

• Ejemplo 9.5

El disco de masa $m = 0.5 \text{ kg}$ y radio $R = 50 \text{ mm}$ gira con respecto a su elemento de soporte con $\omega_r = 60 \text{ rad/s}$ constante como consecuencia de la aplicación sobre él de un par motor T_2 . Al mismo tiempo, el propio soporte, de dimensiones $h = 75 \text{ mm}$ y $d = 100 \text{ mm}$, gira con $\alpha_1 = 64 \text{ rad/s}^2$ como consecuencia de la aplicación sobre él de un par motor T_1 . Sabiendo que el soporte puede considerarse de masa despreciable, calcular en el instante en el que ω_1 toma un valor de 12 rad/s :

- Los valores de los dos pares motores (T_1 y T_2).
- Las reacciones dinámicas en los cojinetes A y B.



Aceleración del centro de gravedad del disco:
$$\vec{a}_G = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 \cdot d \\ -\omega_1^2 \cdot d \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Velocidad angular absoluta del disco:
$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_r \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_r \\ 0 \\ \omega_1 \end{Bmatrix}$$

Aceleración angular del disco:
$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} + \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_1 \\ \omega_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega_r \cdot \omega_1 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

Par giroscópico del disco:
$$\vec{H}_G = [I_G] \cdot \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_2 \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega}_2)$$

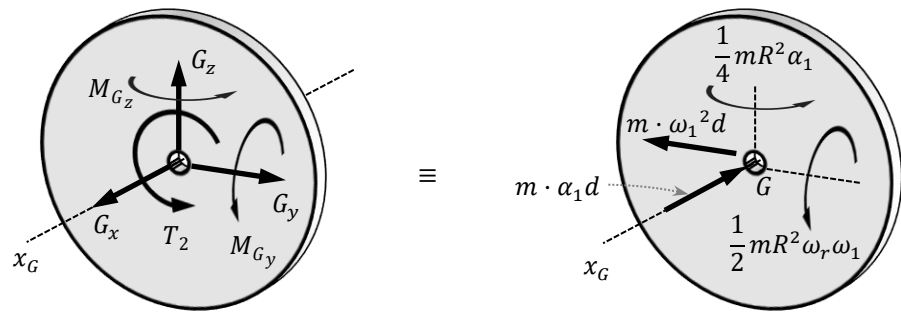
Como los ejes xyz son principales de inercia:
$$[I_G] \cdot \vec{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} I_x \cdot \omega_r \\ 0 \\ I_z \cdot \omega_1 \end{Bmatrix} \quad [I_G] \cdot \vec{\alpha}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_y \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ I_z \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_2 \wedge ([I_G] \cdot \vec{\omega}_2) = \begin{vmatrix} \omega_r & 0 & \omega_1 \\ I_x \cdot \omega_r & 0 & I_z \cdot \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_z \cdot \omega_1 \cdot \omega_r + I_x \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

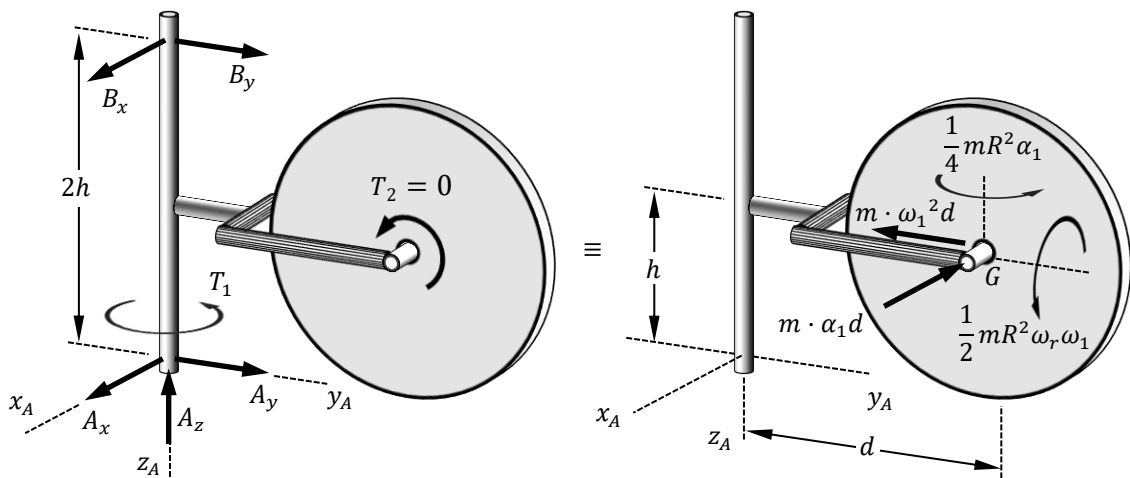
$$\vec{H}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ (I_y - I_z + I_x) \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ I_z \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_x \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ I_z \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/2 mR^2 \cdot \omega_r \cdot \omega_1 \\ 1/4 mR^2 \cdot \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

Puesto que en este caso $I_y = I_z$.

Como se piden las reacciones dinámicas, en el diagrama de sólido libre no se considera la gravedad.



$$M_{x_G} \rightarrow T_2 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$



$$M_{z_A} \rightarrow T_1 = \frac{1}{4} m R^2 \alpha_1 + m \alpha_1 d \cdot d = m \alpha_1 (d^2 + R^2/4) = 0.34 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{x_A} \rightarrow -B_y \cdot 2h = m \omega_1^2 d \cdot h \rightarrow B_y = -\frac{m \omega_1^2 d}{2} = -3.6 \text{ N}$$

$$F_y \rightarrow A_y + B_y = -m \omega_1^2 d \rightarrow A_y = -m \omega_1^2 d + m \omega_1^2 d / 2 = -\frac{m \omega_1^2 d}{2} = -3.6 \text{ N}$$

$$M_{y_A} \rightarrow B_x \cdot 2h = \frac{1}{2} m R^2 \omega_r \omega_1 - m \alpha_1 d \cdot h \rightarrow B_x = \frac{m R^2 \omega_r \omega_1}{4h} - \frac{m \alpha_1 d}{2} = 1.4 \text{ N}$$

$$F_x \rightarrow A_x + B_x = -m \alpha_1 d \rightarrow A_x = -m \alpha_1 d - \frac{m R^2 \omega_r \omega_1}{4h} + \frac{m \alpha_1 d}{2} = -\frac{m R^2 \omega_r \omega_1}{4h} - \frac{m \alpha_1 d}{2} = -4.6 \text{ N}$$

$$F_z \rightarrow A_z = 0$$

9.8 TRABAJO Y ENERGÍA

9.8.1 Energía cinética

Para un punto material de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} se define la magnitud escalar *energía cinética* como:

$$t = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Para un sólido rígido:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{r_i}) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}_{r_i}) = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{r_i} \cdot \vec{v}_{r_i} + \sum m_i \vec{v}_G \cdot \vec{v}_{r_i} = \\ &= \frac{1}{2} (\sum m_i) v_G^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{r_i}^2 + (\sum m_i \vec{v}_{r_i}) \cdot \vec{v}_G \end{aligned}$$

Donde $\sum m_i \vec{v}_{r_i} = m \vec{v}_{r_G} = \vec{0}$, ya que la velocidad del centro de gravedad respecto a sí mismo es nula. Por lo tanto:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_{r_i}^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + T_r$$

Esta expresión constituye el *Teorema de Koenig de la energía cinética* y establece que la energía cinética de un sólido puede descomponerse en suma de dos términos. El primero de ellos tiene en cuenta la traslación del sólido y coincide con la energía cinética que tendría una partícula si toda la masa del cuerpo estuviera concentrada en su centro de gravedad. El segundo término añade la energía cinética debida al movimiento de rotación del sólido en torno a su centro de gravedad y puede calcularse considerando exclusivamente las velocidades de sus puntos relativas al centro de gravedad (en lugar de las velocidades totales).

$$\begin{aligned} v_{r_i}^2 &= |\vec{\omega} \wedge \vec{GA}_i|^2 = (\omega_y \cdot z_i - \omega_z \cdot y_i)^2 + (\omega_z \cdot x_i - \omega_x \cdot z_i)^2 + (\omega_x \cdot y_i - \omega_y \cdot x_i)^2 = \\ &= \omega_x^2 (y_i^2 + z_i^2) + \omega_y^2 (x_i^2 + z_i^2) + \omega_z^2 (x_i^2 + y_i^2) - \\ &- 2 \cdot \omega_y \cdot \omega_z \cdot y_i \cdot z_i - 2 \cdot \omega_x \cdot \omega_z \cdot x_i \cdot z_i - 2 \cdot \omega_x \cdot \omega_y \cdot x_i \cdot y_i \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$T_r = \frac{1}{2} (I_x \cdot \omega_x^2 + I_y \cdot \omega_y^2 + I_z \cdot \omega_z^2 - 2 \cdot C_x \cdot \omega_y \cdot \omega_z - 2 \cdot C_y \cdot \omega_x \cdot \omega_z - 2 \cdot C_z \cdot \omega_x \cdot \omega_y)$$

Esta expresión puede compactarse en una operación matricial:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [I_G] \vec{\omega}$$

Si los ejes fueran principales de inercia: $T_r = \frac{1}{2} (I_x \cdot \omega_x^2 + I_y \cdot \omega_y^2 + I_z \cdot \omega_z^2)$

Por analogía con el desarrollo anterior, si el sólido tiene un punto fijo O :

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [I_O] \vec{\omega}$$

9.8.2 Trabajo de las fuerzas aplicadas

Para una partícula sobre la que actúa una fuerza \vec{F} y que experimenta en un tiempo infinitesimal un desplazamiento diferencial \vec{dr} , se define la magnitud escalar *trabajo mecánico elemental* (realizado por la fuerza) como:

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Para un sólido:
$$dW = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{dr}_i = \sum \vec{F}_{apl_i} \cdot \vec{dr}_i + \sum \vec{F}_{ent_i} \cdot \vec{dr}_i + \sum \vec{F}_{int_i} \cdot \vec{dr}_i$$

En un sólido rígido las fuerzas interiores no realizan trabajo. Además, si los enlaces del sólido son perfectos, las fuerzas de enlace no realizan trabajo. Un enlace es perfecto cuando en él:

- No hay rozamiento.
- Sí hay rozamiento, pero en rodadura pura.

Por lo tanto, en un sólido rígido con enlaces perfectos:
$$dW = \sum \vec{F}_{apl_i} \cdot \vec{dr}_i$$

9.8.3 Teoremas energéticos

La energía cinética es una magnitud propia del sistema cinético, mientras que el trabajo elemental es una magnitud propia del sistema dinámico. Como se ha hecho en la deducción de los teoremas fundamentales, para relacionar ambas se debe derivar la primera respecto del tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right)}{dt} = \sum m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{a}_i = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{F}_i = \frac{\sum d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

Por lo tanto, $dT = dW$, es decir, en un desplazamiento elemental de un sólido rígido con enlaces perfectos, el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas es igual a la variación (incremento) de energía de energía cinética del cuerpo.

Se dice que una fuerza es conservativa cuando depende exclusivamente de la posición, $\vec{F}(x, y, z)$. Para una fuerza conservativa siempre puede definirse una función potencial (o *energía potencial*), $V(x, y, z)$, tal que:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\begin{pmatrix} dV/dx \\ dV/dy \\ dV/dz \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$, para una fuerza conservativa $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$.

Es decir, que el trabajo elemental que realiza la fuerza es la pérdida de energía potencial del sistema. Por lo tanto, si en un sólido rígido con enlaces perfectos las fuerzas aplicadas conservativas:

$$dT = -dV \rightarrow d(T + V) = 0 \rightarrow T + V = E$$

Que constituye el *teorema de la energía*. E , que se denomina *energía mecánica* del sistema, permanece constante.

9.8.4 Energía cinética de un sólido con eje fijo

Considérese un sólido que posee un eje de rotación permanente. Considérese un punto O del sólido sobre el eje de rotación. Obviamente se trata de un punto fijo, por lo tanto:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [I_O] \vec{\omega}$$

Como ya se sabe, el vector velocidad angular tiene la dirección del eje de rotación. Se elige un sistema de referencia móvil tal que el eje z coincida con el eje de rotación del sólido, y por lo tanto:

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}$$

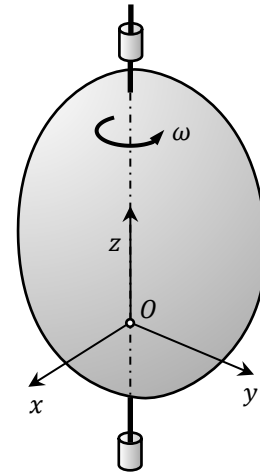


Fig. 9. 9 Sólido con eje fijo

Finalmente resulta:

$$T = \frac{1}{2} [0 \quad 0 \quad \omega] \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [0 \quad 0 \quad \omega] \begin{bmatrix} -C_y \cdot \omega \\ -C_x \cdot \omega \\ I_z \cdot \omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2$$

9.8.5 Energía cinética de un sólido con movimiento plano

Análogamente al caso anterior, si un sólido tiene movimiento exclusivamente en un plano xy , como ya se sabe:

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, de igual modo:

$$T_r = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T [I_G] \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_{z_G} \cdot \omega^2$$

Lo que finalmente conduce a:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot v_G^2 + \frac{1}{2} I_{z_G} \cdot \omega^2$$

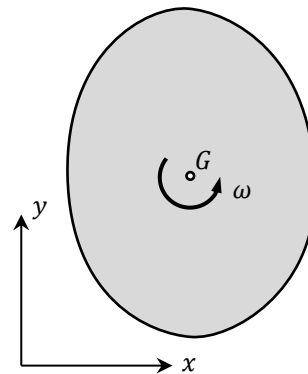
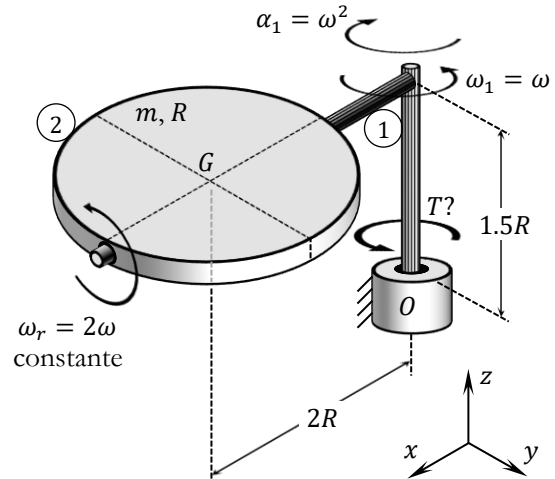


Fig. 9. 10 Sólido con movimiento plano

Problemas de Examen

▪ **Problema 9.1** *mayo 2017* **40 minutos**

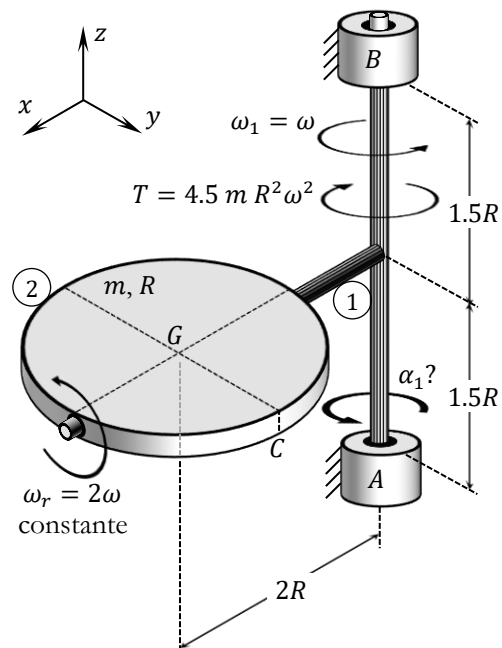
En el instante del movimiento representado y sabiendo que la masa del elemento 1 se puede considerar despreciable, en función de los datos m , R y ω , calcular las reacciones en el cojinete O , así como el par motor T aplicado en el elemento 1. [2.5 puntos]



▪ **Problema 9.2** *junio 2017* **50 minutos**

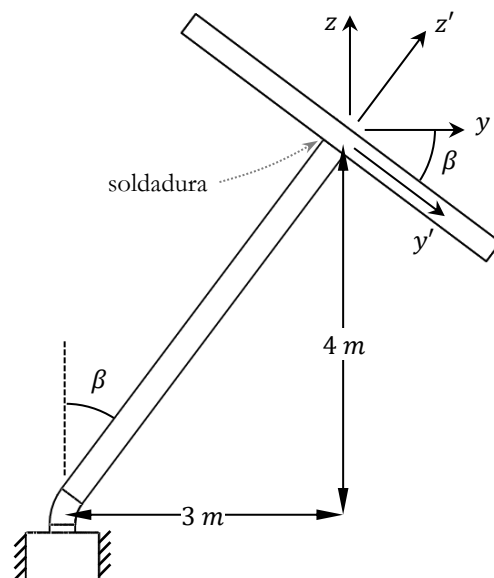
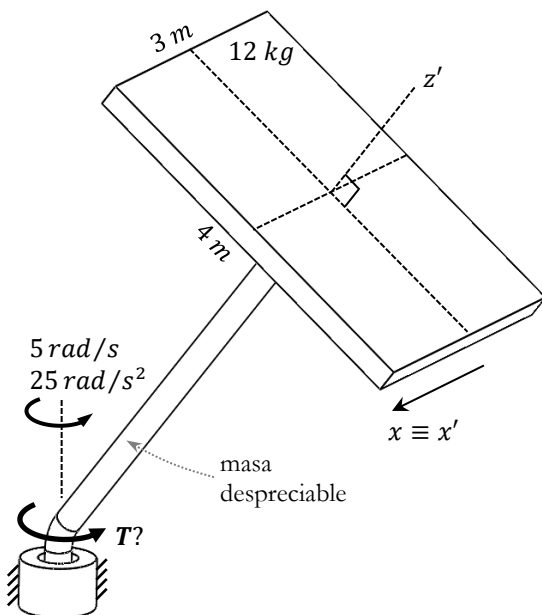
En el instante del movimiento representado y sabiendo que la masa del elemento 1 se puede considerar despreciable, en función de los datos m , R y ω , calcular:

- La aceleración angular del elemento 1, así como las reacciones en los cojinetes A y B . [1.3 puntos]
- La velocidad del punto C y la velocidad angular absoluta del disco 2. [0.6 puntos]
- La aceleración del punto C y la aceleración angular absoluta del disco 2. [0.6 puntos]



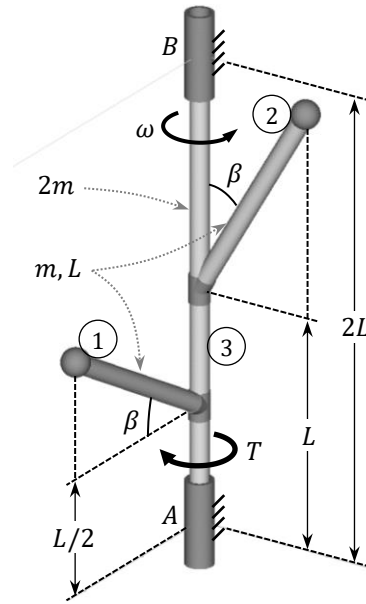
▪ **Problema 9.3** *mayo 2019* **45 minutos**

Calcular el valor del par motor T para que el movimiento del sistema sea el especificado. [1.4 puntos]



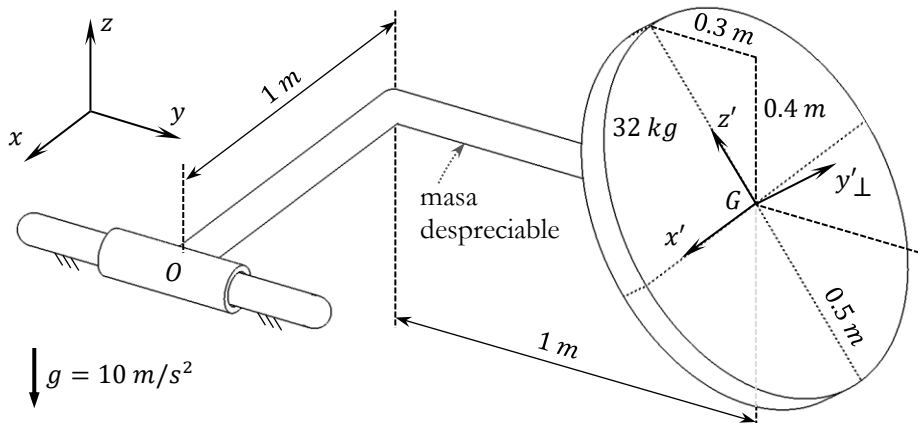
▪ **Problema 9.4** *mayo 2018* **50 minutos**

Calcular, en función de los datos que aparecen en la figura, la aceleración angular del sistema. [2.5 puntos]



▪ **Problema 9.5** *mayo 2022* **40 minutos**

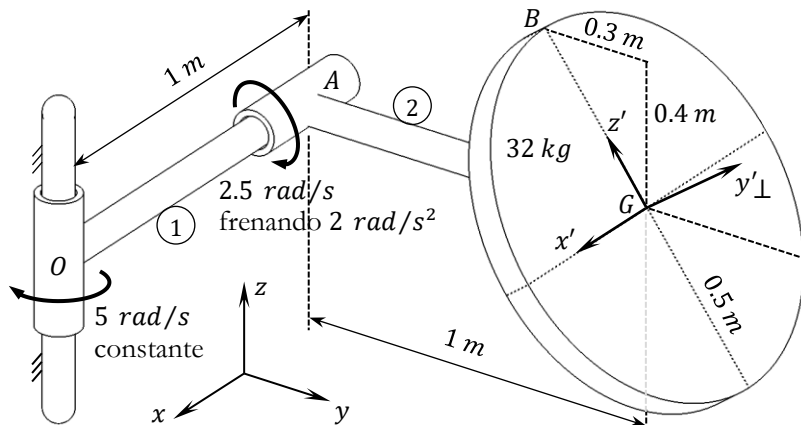
El disco está soldado a la varilla. El sistema se abandona desde el reposo a la acción gravitatoria. Calcular la aceleración angular con la que comienza el movimiento. [2 puntos]



▪ **Problema 9.6** *mayo 2022* **45 minutos**

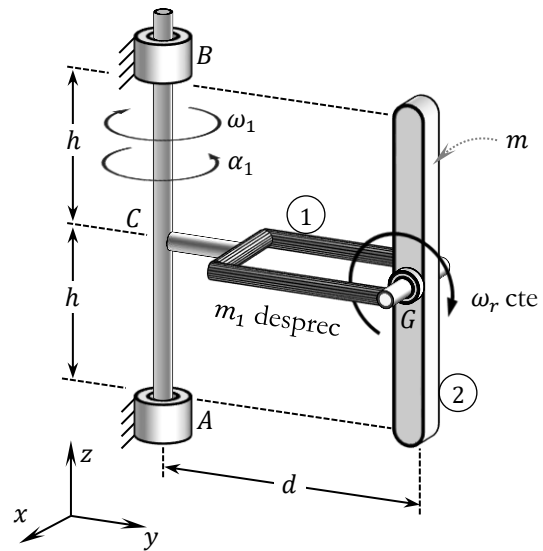
Las barras 1 y 2 se pueden considerar de masa despreciable y el disco está soldado a la barra 2.

- a) Calcular la aceleración del punto B. [1 punto]
- b) Calcular el par giroscópico del disco en los ejes $x'y'z'$ y xyz y su fuerza de inercia. [1 punto]



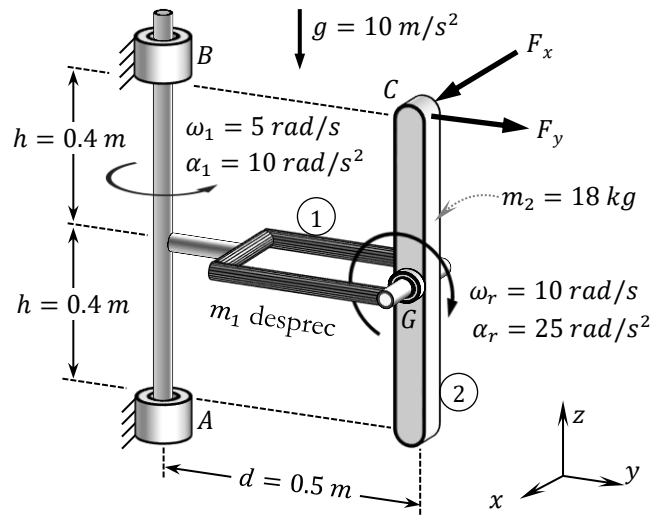
▪ **Problema 9.7** *mayo 2016* **40 minutos**

En el instante del movimiento representado, en función de los datos que aparecen en la figura, calcular las reacciones en los cojinetes A y B, así como el par motor T aplicado en el eje AB. [2 puntos]



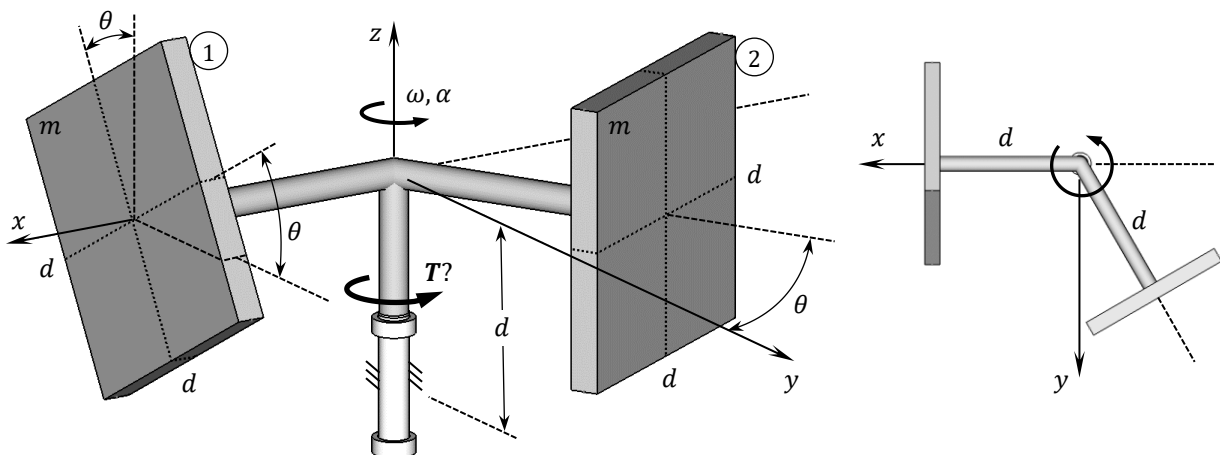
▪ **Problema 9.8** *junio 2022* **45 minutos**

- Calcular la velocidad de C aplicando movimiento absoluto. [0.2 puntos]
- Calcular la velocidad de C aplicando movimiento relativo. [0.2 puntos]
- Calcular la aceleración de C. [0.4 puntos]
- Calcular la fuerza de inercia y el par giroscópico de la barra 2. [0.4 puntos]
- Calcular los valores necesarios de las fuerzas motoras F_x y F_y para que el movimiento sea el indicado (sólo el cojinete A retiene el deslizamiento axial). [0.4 puntos]



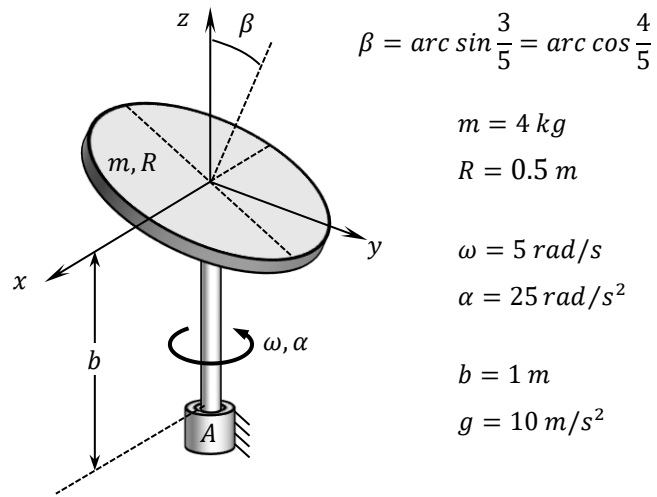
▪ **Problema 9.9** *junio 2021* **40 minutos**

Calcular, en función de los datos de la figura (m , d , ω , α , y θ) el momento necesario T. Las barras son de masa despreciable y las placas cuadradas son perpendiculares a las barras. [1.4 puntos]



▪ **Problema 9.10** *junio 2018* **35 minutos**

Determinar en función de los datos de la figura, el valor del par motor y las reacciones en el cojinete.
[2 puntos]



10. DINÁMICA DEL SÓLIDO CON EJE FIJO

10.1 PARTICULARIZACIÓN DEL TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

Considérese un sólido que posee un eje de rotación permanente. Como ya se sabe, el vector velocidad angular tiene la dirección del eje de rotación. Además, como esta dirección es fija, la aceleración angular también tiene dicha dirección y $\alpha = \dot{\omega}$ (relación entre los módulos de los vectores).

Considérese un punto O del sólido sobre el eje de rotación. Obviamente se trata de un punto fijo, por lo tanto:

$$\vec{H}_O = [I_O] \vec{\omega}$$

$$\vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O$$

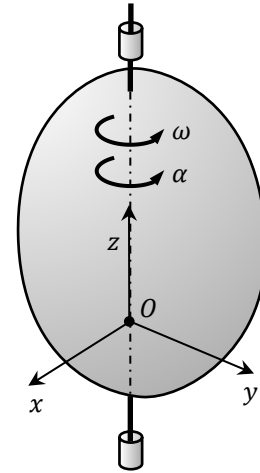


Fig. 10.1 Sólido con eje fijo

Para el análisis del sistema se elige un sistema de referencia móvil tal que:

- El eje z coincide con el eje de rotación del sólido, y por lo tanto $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ y $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

$$\vec{H}_O = \begin{bmatrix} I_x & -C_z & -C_y \\ -C_z & I_y & -C_x \\ -C_y & -C_x & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -C_y \cdot \omega \\ -C_x \cdot \omega \\ I_z \cdot \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_y \\ -C_x \\ I_z \end{pmatrix} \omega$$

- El sistema de referencia gire con el sólido, es decir, que $\vec{\omega}_m = \vec{\omega}$, en cuyo caso es aplicable la expresión:

$$\dot{\vec{H}}_O = [I_O] \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_O = \begin{pmatrix} -C_y \\ -C_x \\ I_z \end{pmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ -C_y \cdot \omega & -C_x \cdot \omega & I_z \cdot \omega \end{vmatrix}$$

Con lo que el teorema del momento angular queda particularizado de la siguiente manera:

$$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} -C_y \\ -C_x \\ I_z \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} C_x \\ -C_y \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} M_{Ox} = -C_y \cdot \alpha + C_x \cdot \omega^2 \\ M_{Oy} = -C_x \cdot \alpha - C_y \cdot \omega^2 \\ M_{Oz} = I_z \cdot \alpha \end{cases}$$

Obsérvese que, adicionalmente, por el hecho de haber tomado el eje z en la dirección del eje de giro, siempre que el eje no deslice axialmente, se tiene que $a_{Gz} = 0$.

10.2 REACCIONES EN LOS APOYOS

Se ilustrará cómo realizar el cálculo de las fuerzas de reacción sobre los cojinetes que dan soporte al eje de rotación con un ejemplo en el que dicho eje es vertical. No obstante, la metodología propuesta, una vez comprendida, es fácilmente extrapolable a otras configuraciones.

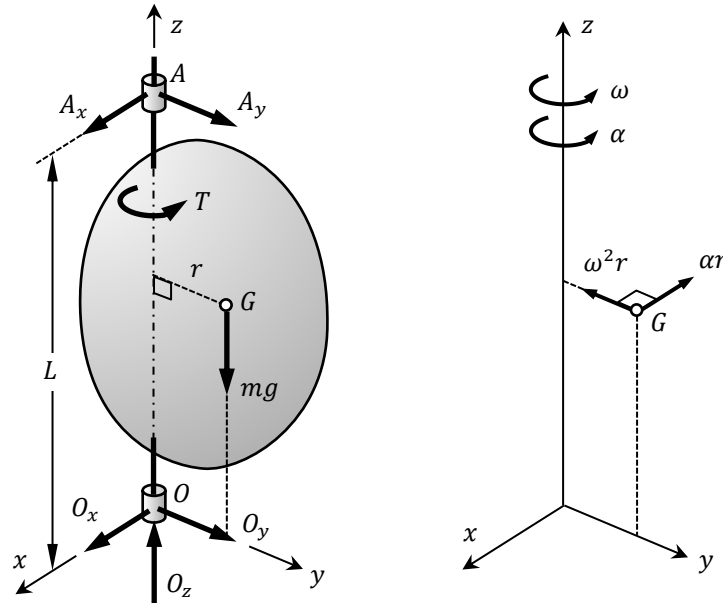


Fig. 10. 2 Reacciones en los apoyos y aceleración del centro de gravedad

En el ejemplo propuesto la única acción aplicada sobre el sólido es un par en el eje, T . Se hace coincidir el origen del sistema de referencia con uno de los apoyos. Los apoyos están separados entre sí una distancia L y sólo uno de ellos, el inferior en este caso, es capaz de absorber carga axial. La distancia del centro de gravedad al eje de giro es r . Se elige la orientación del sistema de referencia de tal manera que el centro de gravedad quede contenido en el plano yz .

- Teorema de la cantidad de movimiento:

$$\sum F_x = O_x + A_x = -m \cdot \alpha r \quad (1)$$

$$\sum F_y = O_y + A_y = -m \cdot \omega^2 r \quad (2)$$

$$\sum F_z = O_z - mg = 0 \quad (3)$$

- Teorema del momento cinético:

$$\sum M_{O_x} = -A_y \cdot L - mg \cdot r = -C_y \cdot \alpha + C_x \cdot \omega^2 \quad (4)$$

$$\sum M_{O_y} = A_x \cdot L = -C_x \cdot \alpha - C_y \cdot \omega^2 \quad (5)$$

$$\sum M_{O_z} = T = I_z \cdot \alpha \quad (6)$$

Conocido el movimiento del sólido en un instante dado (ω, α), este sistema de 6 ecuaciones permitiría determinar las 5 reacciones O_x, O_y, O_z, A_x, A_y y el par T aplicado. Obsérvese que la sexta ecuación vincula la existencia de cargas aplicadas que generen momento en torno al eje de giro, con la existencia de aceleración angular en el movimiento de rotación.

Otra circunstancia sobre la que se debe hacer hincapié es la siguiente. Si en lugar de obtener estas ecuaciones de equilibrio tal y como se ha hecho, es decir, aplicando directamente los teoremas fundamentales de la dinámica, se quisiera plantear la equivalencia estática entre el sistema de fuerzas reales y el sistema de fuerzas de inercia, es necesario tener en cuenta que el par giroscópico se ha obtenido en un punto fijo en lugar de en el centro de gravedad.

Las fuerzas de inercia en la realidad están distribuidas por todo el sólido. Lo que hacen los teoremas de la dinámica es obtener un sistema equivalente reducido, formado por una única fuerza resultante en un determinado punto y un único momento resultante. En este caso, dicho punto, en lugar de G , es O . Sea cual sea el punto elegido, la resultante de fuerza de inercia es la misma, vale $m \cdot \vec{a}_G$. Sin embargo, el momento resultante (el par giroscópico) no es el mismo en ambos, ya que $\vec{H}_G \neq \vec{H}_O$.

El hecho es que, cuando se reduce el sistema al punto G , la fuerza resultante, $m \cdot \vec{a}_G$, se aplica en G , junto con el momento resultante, \vec{H}_G . Sin embargo, cuando se calcula el par giroscópico en el punto fijo O , es porque se va a reducir el sistema de fuerzas de inercia a dicho punto y, por lo tanto, junto con \vec{H}_O , se debe aplicar la fuerza $m \cdot \vec{a}_G$, pero aplicada en O .

De hecho, derivando respecto del tiempo la expresión del campo de momentos cinéticos:

$$\vec{H}_O = \vec{H}_G + \vec{OG} \wedge \vec{P} \rightarrow \dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{H}}_G + \dot{\vec{OG}} \wedge \vec{P} + \vec{OG} \wedge \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{H}}_G + \vec{v}_G \wedge m \cdot \vec{v}_G + \vec{OG} \wedge m \cdot \vec{a}_G$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{H}}_G + \vec{OG} \wedge m \cdot \vec{a}_G$$

En otras palabras, el par giroscópico en O contiene el valor del par giroscópico en G , más el valor del momento que produce respecto de O la fuerza de inercia aplicada en G .

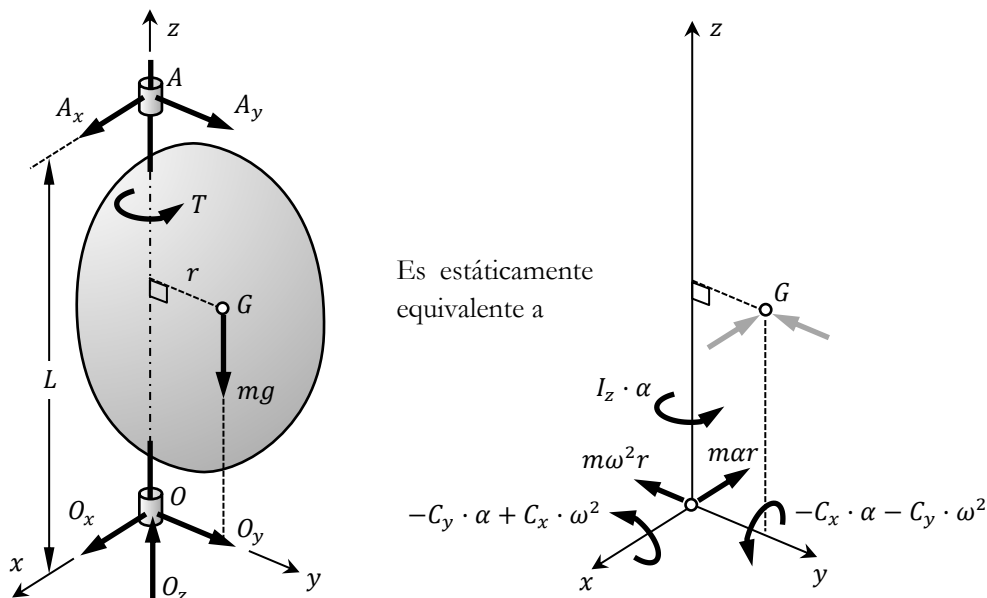


Fig. 10.3 Equivalencia estática con par el giroscópico obtenido en un punto fijo

10.3 EQUILIBRADO DE ROTORES

Obsérvese que las fuerzas de reacción, que se transmiten a través de los cojinetes al soporte del sistema, giran con el sólido. En consecuencia, estas reacciones producirán vibraciones que en muchos casos se consideran un fenómeno indeseado. El equilibrado de rotores tiene como objetivo establecer las condiciones que garantizan la inexistencia de estas fuerzas variables en el tiempo.

En cualquier situación:

(3) $\rightarrow O_z = mg$ Esta reacción es constante en módulo y dirección, por lo que no puede producir vibraciones.

Supóngase inicialmente que el sólido estuviera parado. Las ecuaciones de la dinámica siguen siendo aplicables sin más que particularizarlas con $\omega = 0$ y $\alpha = 0$ (se simplifican así a las ecuaciones del equilibrio estático).

(6) $\rightarrow T = 0$ Obviamente, para que el sólido esté quieto no se puede estar aplicando sobre él un par motor en su eje de libre rotación.

(5) $\rightarrow A_x \cdot L = 0 \rightarrow A_x = 0$ (1) $\rightarrow O_x + A_x = 0 \rightarrow O_x = 0$

Véase cuáles son las condiciones que garantizarían la eliminación del resto de reacciones laterales, O_y y A_y , que girarían con el sólido cuando se pusiera en movimiento.

(4) $\rightarrow -A_y \cdot L - mg \cdot r = 0 \rightarrow A_y = -mg \cdot r/L$ (2) $\rightarrow O_y + A_y = 0 \rightarrow O_y = -A_y = mg \cdot r/L$

Teniendo en cuenta que, por definición, m , g y L son distintos de 0, la única posibilidad para que $O_y = A_y = 0$ es que $r = 0$. Es decir, **el centro de gravedad debe estar en el eje de giro**. La imposición de esta condición se denomina *equilibrado estático* de rotor.

Supóngase ahora que, una vez realizado el equilibrado estático, el sólido estuviera girando a velocidad angular constante, es decir, $\omega \neq 0$ y $\alpha = 0$. En esta situación, las ecuaciones (3) y (6) siguen diciendo que $O_z = mg$ y $T = 0$ (para que un sólido con eje fijo gire a velocidad constante no puede existir resultante de momento en torno al eje de rotación).

Pero en esta situación, las reacciones laterales, que giran con el sólido, reaparecerían:

(5) $\rightarrow A_x \cdot L = -C_y \cdot \omega^2 \rightarrow A_x = -C_y \cdot \omega^2/L$ (1) $\rightarrow O_x + A_x = 0 \rightarrow O_x = C_y \cdot \omega^2/L$

(4) $\rightarrow -A_y \cdot L = C_x \cdot \omega^2 \rightarrow A_y = -C_x \cdot \omega^2/L$ (2) $\rightarrow O_y + A_y = 0 \rightarrow O_y = C_x \cdot \omega^2/L$

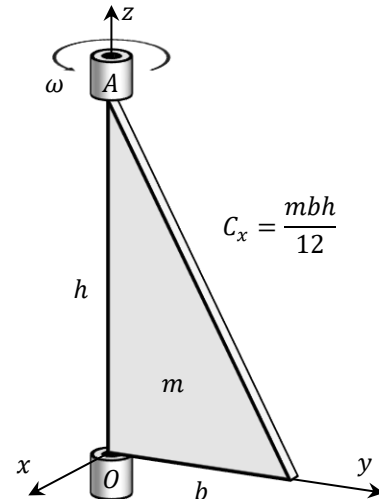
Como ω y L son distintos de 0, la única posibilidad para que $A_x = A_y = O_x = O_y = 0$ es que $C_x = C_y = 0$. Es decir, **el eje de rotación debe ser un eje principal de inercia del sólido**. La imposición de esta condición se denomina *equilibrado dinámico* del rotor.

Supóngase finalmente que, una vez realizado el equilibrado dinámico, se considera la condición de movimiento más general posible, $\omega \neq 0$ y $\alpha \neq 0$. Resulta ahora, que las ecuaciones del equilibrio dinámico han adquirido la misma forma que las del equilibrio estático, por lo que el resultado obtenido en las dos hipótesis anteriores se sigue manteniendo, es decir, todas las reacciones giratorias son nulas, y el sistema en movimiento produce el mismo efecto sobre su soporte que si estuviera parado. Esta forma de funcionamiento de los rotores (sólidos con eje fijo) suele ser considerada la más deseable en la mayoría de sus posibles aplicaciones.

• Ejemplo 10.1

El sólido de la figura gira en torno a un eje fijo. Sólo el cojinete inferior es capaz de soportar carga axial.

- Calcular las reacciones en los cojinetes cuando la velocidad angular es constante.
- Equilibrar el sistema estática y dinámicamente añadiendo al sólido una masa puntual:
 - a) Si se dispone de una masa de valor $m/6$. Calcular dónde debe posicionarse.
 - b) Si se desea que la masa esté a una distancia del eje de valor $b/2$. Calcular el valor de la masa y completar la posición.



En primer lugar, se sabe que por ser ω constante, $\alpha = 0$, y que por ser yz un plano de simetría, $C_y = 0$. Además, respecto de las ecuaciones deducidas en la teoría en este caso se tiene $L \rightarrow h, r \rightarrow b/3$.

$$(5) \rightarrow A_x h = -C_x \alpha - C_y \omega^2 = -C_x \cdot 0 - 0 \cdot \omega^2 \rightarrow A_x = 0$$

$$(1) \rightarrow O_x + A_x = -m\alpha \frac{b}{3} \rightarrow O_x = 0$$

$$(4) \rightarrow -A_y h - mg \frac{b}{3} = -C_y \alpha + C_x \omega^2 = -0 + \frac{mbh}{12} \omega^2 \rightarrow A_y = -\frac{mg b}{3 h} - \frac{mb\omega^2}{12}$$

$$(2) \rightarrow O_y + A_y = -m\omega^2 \frac{b}{3} \rightarrow O_y = \frac{mg b}{3 h} - \frac{mb\omega^2}{4}$$

Para realizar el equilibrado estático se posiciona la masa puntual de manera que el centro de gravedad del sistema conjunto (placa triangular más masa puntual) quede ubicado en el eje de rotación:

$$r = y_G = \frac{m \cdot b/3 + m_e \cdot (-y_e)}{m + m_e} = 0 \rightarrow m \cdot \frac{b}{3} = m_e \cdot y_e$$

Para realizar el equilibrado dinámico se posiciona la masa puntual de manera que el eje de giro sea un eje principal de inercia del conjunto:

$$C_x = \frac{mbh}{12} + m_e \cdot (-y_e) \cdot z_e = 0 \rightarrow \frac{mbh}{12} = m_e \cdot y_e \cdot z_e$$

$$m \cdot \frac{b}{3} = \frac{m}{6} \cdot y_e \rightarrow y_e = 2b$$

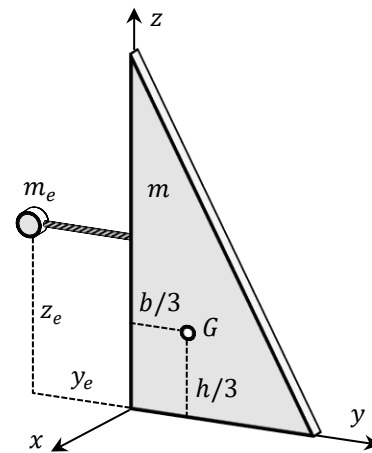
Caso a):

$$\frac{mbh}{12} = \frac{m}{6} \cdot 2b \cdot z_e \rightarrow z_e = \frac{h}{4}$$

Caso b):

$$m \cdot \frac{b}{3} = m_e \cdot \frac{b}{2} \rightarrow m_e = \frac{2}{3} m$$

$$\frac{mbh}{12} = \frac{2}{3} m \cdot \frac{b}{2} \cdot z_e \rightarrow z_e = \frac{h}{4}$$



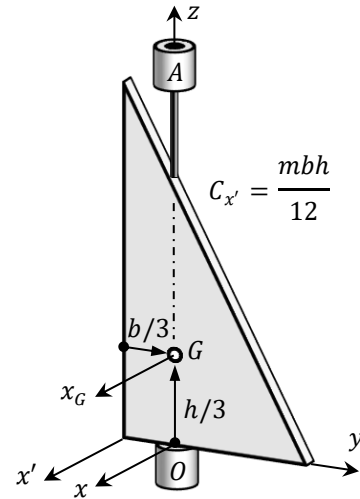
Una vez realizado el equilibrado, como en el sistema conjunto se ha conseguido $r = 0$ y $C_x = 0$, las reacciones en los cojinetes para cualquier ω y α tienen los valores:

$$A_x = A_y = O_x = O_y = 0 \quad O_z = (m + m_e)g$$

• Ejemplo 10.2

El mismo sólido del ejemplo anterior se hace girar en torno a un eje paralelo que pasa por su centro de gravedad.

- Calcular las reacciones en los cojinetes cuando está parado y cuando está girando a velocidad constante.
- Equilibrar el sistema estática y dinámicamente añadiendo al sólido masas puntuales de valor $m/6$ posicionadas a una distancia $b/2$ del eje.



Como el sistema está equilibrado estáticamente, cuando está parado la única reacción es $O_z = mg$. Sin embargo, al ponerse en movimiento se generan reacciones laterales. En primer lugar es necesario determinar C_x . Para ello:

$$C_{x'} = C_{x_G} + m \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \rightarrow C_{x_G} = \frac{mbh}{12} - \frac{mbh}{9} = \frac{mbh}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{mbh}{3} \cdot \frac{3-4}{12} = -\frac{mbh}{36}$$

$$C_x = C_{x_G} + m \cdot 0 \cdot \frac{h}{3} = -\frac{mbh}{36}$$

Por tanto:

$$(5) \rightarrow A_x = 0$$

$$(1) \rightarrow O_x = 0$$

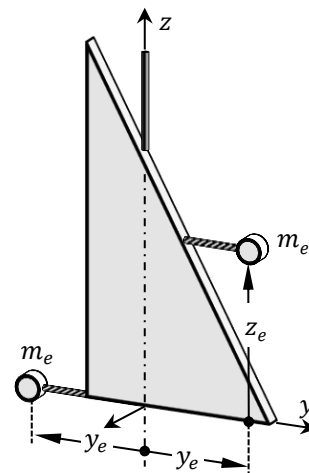
$$(4) \rightarrow -A_y h - mg \cdot 0 = -0 \cdot 0 + C_x \omega^2 \rightarrow A_y = -\frac{1}{h} \left(-\frac{mbh}{36} \right) \omega^2 = \frac{m\omega^2 b}{36}$$

$$(2) \rightarrow O_y + A_y = -m\omega^2 \cdot 0 \rightarrow O_y = -\frac{m\omega^2 b}{36}$$

Para realizar el equilibrado dinámico sin sacar el centro de gravedad del sistema del eje de rotación (sin perturbar el equilibrado estático), en este caso es necesario añadir dos masas puntuales, una a cada lado del eje y, siendo ambas del mismo valor, equidistantes de éste. Obviamente, para que compensen el producto de inercia del sólido, deben estar a diferentes alturas.

$$C_x = -\frac{mbh}{36} + m_e \cdot (-y_e) \cdot 0 + m_e \cdot y_e \cdot z_e = 0$$

$$\frac{mbh}{36} = \frac{m}{6} \cdot \frac{b}{2} \cdot z_e \rightarrow z_e = \frac{h}{3}$$



11. DINÁMICA PLANA

11.1 PARTICULARIZACIÓN DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES

Recuérdese que en un diagrama de sólido libre correspondiente a un sistema de fuerzas plano en xy :

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{M} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix}$$

Por otro lado, si un sólido tiene movimiento exclusivamente en dicho plano, como ya se sabe:

$$\vec{a}_G = \begin{Bmatrix} a_{Gx} \\ a_{Gy} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{Bmatrix}$$

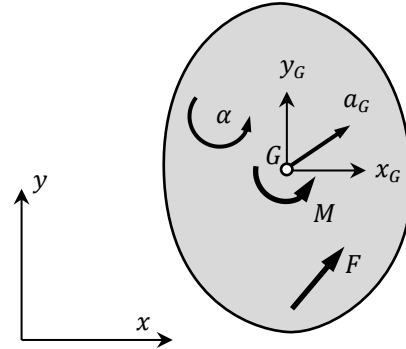


Fig. 11. 1 Sólido con movimiento plano

Es decir, tanto las fuerzas como las aceleraciones lineales de puntos son vectores contenidos en el propio plano, mientras que tanto los momentos (momentos puros, así como momentos de fuerzas respecto de puntos del plano) como las aceleraciones angulares de elementos (y velocidades angulares) son vectores perpendiculares a dicho plano.

El primer teorema fundamental de la dinámica establece que $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$, o lo que es lo mismo:

$$\begin{Bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \cdot a_{Gx} \\ m \cdot a_{Gy} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como puede observarse, de esta ecuación vectorial se pierde una de las componentes, una de las ecuaciones escalares.

El segundo teorema fundamental de la dinámica establece que $\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$. Si el sólido en cuestión es una chapa plana de pequeño espesor, o el plano xy es de simetría, se cumple que $C_{xG} = C_{yG} = 0$, por lo que:

$$\vec{H}_G = [I_G] \vec{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xG} & -C_{zG} & 0 \\ -C_{zG} & I_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zG} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zG} \cdot \omega \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = [I_G] \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_G = \begin{bmatrix} I_{xG} & -C_{zG} & 0 \\ -C_{zG} & I_{yG} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zG} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & I_{zG} \cdot \omega \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zG} \cdot \alpha \end{Bmatrix}$$

Por lo que el segundo teorema fundamental queda:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum M_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zG} \cdot \alpha \end{Bmatrix}$$

Como puede observarse, de esta segunda ecuación vectorial se pierden dos ecuaciones escalares más. Por último, es sabido que el momento de inercia respecto de un punto es la suma de los momentos de inercia respecto del plano y el eje perpendicular al mismo que se cortan en dicho punto, es decir que $I_G = I_{xy} + I_{zG}$. Pero como para un sólido plano, contenido en xy , el momento de inercia respecto de dicho plano $I_{xy} \approx 0$, es habitual considerar $I_{zG} \approx I_G$.

En conclusión, al igual que sucedía al analizar el equilibrio estático, las seis ecuaciones escalares generales para diagramas de sólido libre tridimensionales quedan reducidas a tres para sistemas planos:

$$\begin{cases} \sum F_x = m \cdot a_{Gx} \\ \sum F_y = m \cdot a_{Gy} \\ \sum M_G = I_G \cdot \alpha \end{cases}$$

En lugar de aplicar literalmente estas tres ecuaciones, para cada uno de los diagramas de sólido libre que se establezcan, es posible plantear la equivalencia entre el sistema de fuerzas reales y el sistema de fuerzas de inercia. Este método permite flexibilizar el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico, considerando el balance de momentos respecto de puntos que no sean el centro de gravedad del sólido, o cambiando ecuaciones de equilibrio de fuerzas por ecuaciones de equilibrio de momentos. Evidentemente, la fuerza de inercia $m \cdot \vec{a}_G$, que está aplicada en G , genera un momento respecto de cualquier otro punto que no sea G (a no ser que se trate de otro punto dentro de su línea de acción). Lo que sí es necesario recordar es que, aunque puedan plantearse infinitas ecuaciones, han de elegirse sólo tres, que es el grado de independencia lineal del sistema.

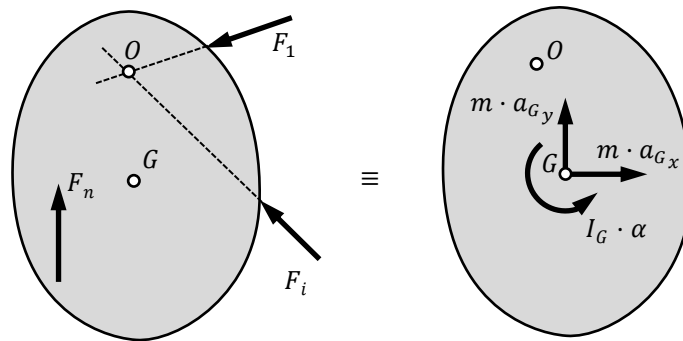


Fig. 11. 2 Equivalencia entre los sistemas de fuerzas reales y de inercia en dinámica plana

Cuando se tiene un mecanismo, que es un sistema compuesto por varios sólidos enlazados, se puede plantear el equilibrio dinámico de cada uno de los elementos. Se dispone, por tanto, de un número total de ecuaciones de equilibrio igual a tres veces el número de sólidos. Al trazar el diagrama de sólido libre de cada elemento se han de poner las reacciones en los enlaces, incógnitas del problema, obviamente cumpliendo el principio de acción-reacción.

La particularización del segundo teorema fundamental se podía haber planteado de una manera alternativa:

$$\vec{H}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_G \cdot \omega \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{H}_G \end{pmatrix}$$

I_G es independiente de la orientación del sólido dentro del plano y por tanto de su movimiento, por lo que:

$$\dot{H}_G = \frac{d(I_G \cdot \omega)}{dt} = I_G \frac{d\omega}{dt} = I_G \cdot \alpha$$

11.1.1 Aspectos adicionales

Del mismo modo, si el sólido posee un punto fijo O , se concluye que $\Sigma M_O = I_O \cdot \alpha$. Debido a la sencillez del caso es muy fácil relacionar ΣM_G y ΣM_O .

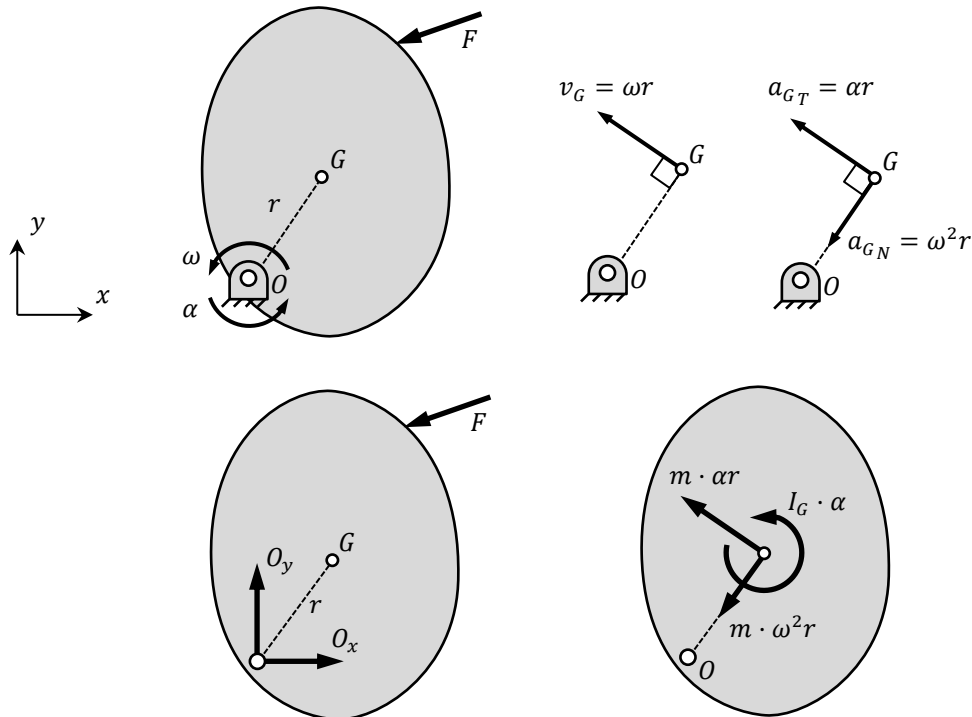


Fig. 11. 3 Sólido plano con punto fijo. Sistemas de fuerzas reales y de inercia

Igualando la resultante de momentos respecto de O en ambos sistemas:

$$\Sigma M_O = I_G \cdot \alpha + m \cdot \alpha r \cdot r = (I_G + m \cdot r^2) \alpha$$

Pero recuérdese que por el teorema de Steiner $I_G + m \cdot r^2 = I_O$. Como se observa, el par giroscópico en el punto fijo incluye el momento de la fuerza de inercia (aplicada en G), respecto de O .

11.2 PROBLEMAS DINÁMICOS

Tradicionalmente, los problemas en los que interviene la dinámica se clasifican en dos tipos diferenciados, denominados problemas de *dinámica directa* y problemas de *dinámica inversa*. La diferencia fundamental entre estas dos familias de problemas reside en qué es lo conocido (dato) y qué es lo que se debe calcular (incógnita). Pero antes de especificar qué es lo que diferencia concretamente ambos tipos de problemas, se van a identificar los aspectos que comparten.

Como se sabe, la dinámica, en general, relaciona las cargas actuantes sobre un sistema mecánico con el movimiento del mismo. Desde el punto de vista de las cargas existentes en un diagrama de sólido libre, éstas se pueden considerar divididas entre dos clases, las cargas externamente aplicadas y los esfuerzos transmitidos en los enlaces. Pues bien, sea cual sea el tipo de problema dinámico, las reacciones en los enlaces son siempre desconocidas, es decir, incógnitas a determinar. Por otro lado, desde el punto de vista del movimiento del sistema, existen también dos clases de parámetros cinemáticos, que son las velocidades y las aceleraciones. Pues bien, sea cual sea el tipo de problema dinámico, las velocidades van a ser siempre conocidas, es decir, dato.

Algunas de las cargas directamente aplicadas, como los pesos, por ejemplo, son también conocidas, sea cual sea el caso. Por otro lado, cuando se dice que las velocidades son siempre conocidas, no quiere decir que las velocidades angulares de todos los elementos de un mecanismo sean directamente datos del problema. Lo que quiere decir es, que se dispone de los datos de velocidad necesarios para resolver por completo el problema de velocidades del mecanismo, como si se tratara de un problema puramente de cinemática.

La dinámica relaciona las cargas aplicadas con el movimiento resultante, concretamente con las aceleraciones. Las aceleraciones aparecen como consecuencia de la aplicación de cargas. Lo que diferencia ambos tipos de problemas dinámicos es lo siguiente:

- Cuando todas las cargas aplicadas son conocidas y el objetivo es calcular las aceleraciones que éstas inducen en el sistema, se trata de un problema de dinámica directa.
- Cuando el dato lo constituyen unas determinadas aceleraciones a cumplir y el objetivo es determinar cuál es el valor de las cargas motoras a aplicar para que así sea, se trata de un problema de dinámica inversa.

En un problema de dinámica inversa, con los datos de aceleración proporcionados, es posible calcular en primer lugar, por procedimientos puramente cinemáticos, la aceleración del centro de gravedad y la aceleración angular de cada uno de los elementos que componen el mecanismo. Por lo tanto, en este tipo de problemas, en los sistemas de fuerzas inerciales ($m \cdot \vec{a}_G, I_G \cdot \alpha$) no hay ninguna incógnita. Todas las incógnitas (cargas motoras y esfuerzos de enlace) están en los sistemas de fuerzas reales.

En un problema de dinámica directa, sin embargo, como las aceleraciones son desconocidas, no se dispone de los valores de las cargas inerciales. En esta situación, por tanto, en cada elemento del mecanismo, existen incógnitas tanto en el sistema de fuerzas reales (los esfuerzos de enlace), como en el sistema de fuerzas inerciales (que son fuerzas y momentos que quedan en función de las aceleraciones a determinar). Esta circunstancia suele conducir a que, para un mismo mecanismo, sea más complicado resolver el problema dinámico directo que el inverso.

Un mecanismo es un sistema mecánico con capacidad de movimiento. El número de grados de libertad de un mecanismo viene dado por el número mínimo de actuadores (motores) que sería necesario colocarle para lograr un movimiento completamente controlado. O de otra manera, también se podría entender que su número de grados de libertad es el número mínimo de frenos que serían necesarios para dejarlo completamente parado, es decir, para anular toda capacidad de movimiento. Para que cualquiera de los problemas dinámicos de un mecanismo pueda resolverse mediante el planteamiento de sus ecuaciones de equilibrio, siempre debe cumplirse que el número total de fuerzas de enlace (en las uniones entre elementos) más el número de grados de libertad sea igual al número total de ecuaciones de equilibrio dinámico (tres por elemento). Como las fuerzas de enlace son siempre incógnitas, la regla anterior implica que el sistema de ecuaciones sólo admite tantas incógnitas adicionales como grados de libertad tenga el mecanismo (para que el número total de incógnitas iguale al de ecuaciones y se forme un sistema resoluble).

De acuerdo con lo anterior, un mecanismo de un grado de libertad es aquel cuya posición puede ser completamente definida accionándolo con un único motor. De igual manera, si dicho único motor se bloquea, todos los elementos del mecanismo se quedan inmóviles. En lo referente al sistema ecuaciones de equilibrio que se ha de plantear para resolver la dinámica, el número total de ecuaciones disponibles siempre superará en uno al número total de fuerzas de enlace incógnita. Por lo tanto, dicho sistema de ecuaciones sólo admite una incógnita más (que además debe existir).

Si todo el mecanismo se puede accionar con un único motor, al plantear las relaciones cinemáticas correspondientes, las velocidades lineales de todos los puntos y las velocidades angulares de todos los elementos se pueden obtener en función de la velocidad del motor. De igual modo, una vez resuelto el problema de velocidades, se pueden obtener, en función de la aceleración (y velocidad) del motor, las aceleraciones lineales de cualquier punto y aceleraciones angulares de cualquier elemento del mecanismo.

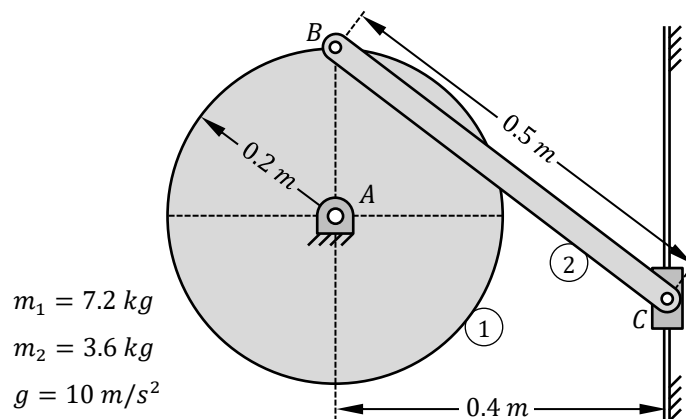
Éste es un proceso que se realiza de manera natural al resolver un problema de dinámica inversa, ya que la velocidad y la aceleración en el actuador del mecanismo son, ambas, conocidas. En este caso, la incógnita adicional del problema no es otra que el valor de la propia carga motora.

Sin embargo, en un problema de dinámica directa, donde la carga motora es conocida, aunque velocidad en el motor es dato, su aceleración es desconocida. No obstante, en este caso, a pesar de que la aceleración del motor sea incógnita, debe plantearse la cinemática completa del mecanismo, para obtener en función de dicha incógnita, las expresiones de las aceleraciones angulares, así como las de las aceleraciones lineales de los centros de gravedad, de cada elemento del mecanismo. De esta manera, aunque todas las cargas inerciales de todos los elementos sean desconocidas, están todas expresadas en función de una única incógnita que, de hecho, constituye esa incógnita extra que admite el sistema de ecuaciones.

Sea cual sea el caso, a la hora de realizar los planteamientos cinemáticos del problema de aceleraciones, necesarios para la determinación de las cargas inerciales ($m \cdot \vec{a}_G$, $I_G \cdot \alpha$), deben obtenerse siempre en primer lugar las aceleraciones angulares de los elementos y en segundo lugar las aceleraciones de los centros de gravedad. En general, no es posible obtener \vec{a}_G hasta que no se tenga α .

• Ejemplo 11.1

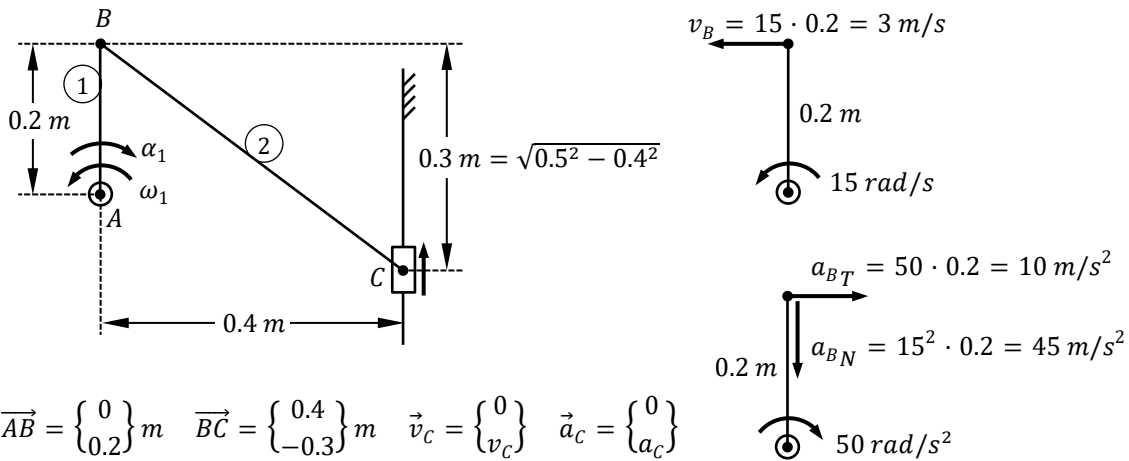
- a) En la posición del mecanismo mostrada en la figura, el disco está girando en sentido antihorario con una velocidad angular de 15 rad/s , frenando con una aceleración angular de 50 rad/s^2 . Sabiendo que dicho movimiento es generado por un par motor en la articulación fija, calcular:
- La aceleración de la deslizadera y la aceleración angular de la barra.
 - Las fuerzas en las articulaciones de la barra y el par motor en el disco.
- b) El mecanismo de la figura se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Calcular, en el instante inicial del movimiento:
- La aceleración angular del disco.
 - Las fuerzas en las articulaciones de la barra.



Apartado a)

Existe dato de aceleración y aparte de las reacciones en los enlaces, existe como incógnita el valor de una carga motora, responsable de generar el movimiento especificado, por lo que se trata de un problema de dinámica inversa. El problema de aceleraciones se puede resolver por completo con un enfoque puramente cinemático, independientemente del equilibrio dinámico. Los sistemas de fuerzas de inercia son por tanto completamente determinables. En este caso, para establecer los sistemas de fuerzas de inercia es necesario determinar, en función de los datos cinemáticos, los valores de α_2 y \vec{a}_{G_2} (α_1 es el dato y $\vec{a}_{G_1} \equiv \vec{a}_A = \vec{0}$ es trivial), teniendo en cuenta que:

- No se deben plantear las aceleraciones lineales de los centros de gravedad hasta que no se tengan obtenidas las aceleraciones angulares de los elementos (relacionando aceleraciones entre articulaciones).
- No se pueden resolver aceleraciones si no se tienen previamente resueltas las velocidades.
- A la hora de plantear el esquema cinemático no es necesario tener en cuenta las formas reales de los elementos.



$$\vec{AB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{Bmatrix} m \quad \vec{BC} = \begin{Bmatrix} 0.4 \\ -0.3 \end{Bmatrix} m \quad \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_C \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_C \end{Bmatrix}$$

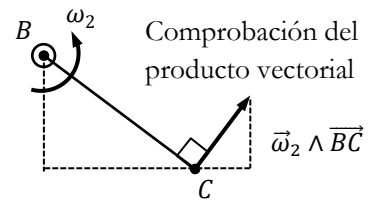
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{AB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \end{Bmatrix} m/s$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{AB} - \omega_1^2 \cdot \vec{AB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{vmatrix} - 15^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 45 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -45 \end{Bmatrix} m/s^2$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{BC} = \vec{v}_B + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0.4 & -0.3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{v}_B + \begin{Bmatrix} 0.3\omega_2 \\ 0.4\omega_2 \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow 0 = -3 + 0.3\omega_2 \rightarrow \omega_2 = 10 \text{ rad/s}$$

$$y \rightarrow v_C = 0 + 0.4\omega_2 = 4 \text{ m/s}$$



$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{BC} - \omega_2^2 \cdot \vec{BC} = \vec{a}_B + \begin{Bmatrix} 0.3\alpha_2 \\ 0.4\alpha_2 \end{Bmatrix} - 10^2 \begin{Bmatrix} 0.4 \\ -0.3 \end{Bmatrix}$$

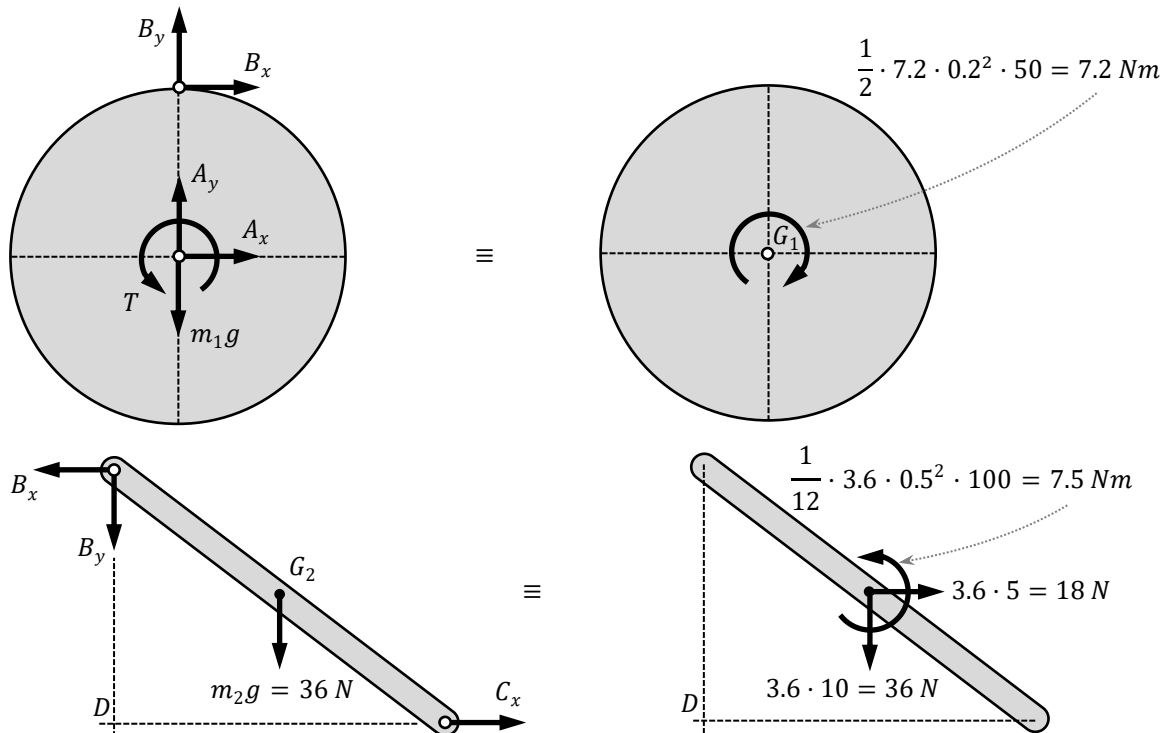
$$x \rightarrow 0 = 10 + 0.3\alpha_2 - 40 \rightarrow \alpha_2 = 100 \text{ rad/s}^2$$

$$y \rightarrow a_C = -45 + 0.4\alpha_2 + 30 = 25 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{BG}_2 = \vec{BC}/2 = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ -0.15 \end{Bmatrix} m$$

$$\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{BG}_2 - \omega_2^2 \cdot \vec{BG}_2 = \vec{a}_B + \begin{Bmatrix} 0.15 \cdot 100 \\ 0.2 \cdot 100 \end{Bmatrix} - 10^2 \begin{Bmatrix} 0.2 \\ -0.15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -10 \end{Bmatrix} m/s^2$$

Obsérvese que van a poder plantearse un total de 6 ecuaciones de equilibrio, 3 para cada uno de los 2 sólidos, y que existen un total de 6 incógnitas, que son 5 fuerzas de enlace (A_x, A_y, B_x, B_y, C_x) y la carga motora T . La totalidad de las incógnitas del problema están en los diagramas de sólido libre de fuerzas reales.



En el elemento 2:

$$M_D \rightarrow B_x \cdot 0.3 - 36 \cdot 0.2 = 7.5 - 36 \cdot 0.2 - 18 \cdot 0.15 \rightarrow B_x = 16 \text{ N}$$

$$F_x \rightarrow C_x - B_x = 18 \rightarrow C_x = 34 \text{ N}$$

$$F_y \rightarrow B_y + 36 = 36 \rightarrow B_y = 0 \text{ N}$$

O también:

$$M_B \rightarrow C_x \cdot 0.3 - 36 \cdot 0.2 = 7.5 - 36 \cdot 0.2 + 18 \cdot 0.15 \rightarrow C_x = 34 \text{ N}$$

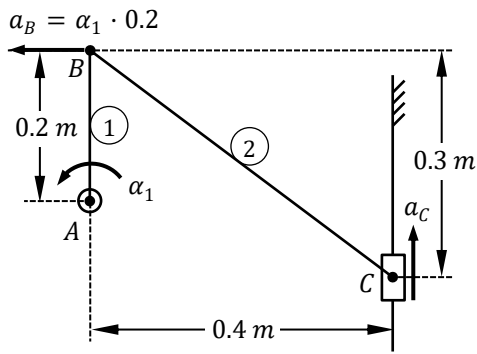
En el elemento 1:

$$M_A \rightarrow T - B_x \cdot 0.2 = -7.2 \rightarrow T = -7.2 + 16 \cdot 0.2 = -4 \text{ Nm}$$

Apartado b)

No existe dato de aceleración y aparte de las reacciones en los enlaces, existe como incógnita el propio movimiento (en aceleraciones), por lo que se trata de un problema de dinámica directa. Todas las cargas externamente aplicadas sobre el sistema son conocidas, mientras que los sistemas de fuerzas de inercia son completamente desconocidos (al no disponerse de las aceleraciones). Van a poder plantearse un total de 6 ecuaciones de equilibrio, 3 para cada uno de los 2 sólidos, y las 5 fuerzas de enlace (A_x, A_y, B_x, B_y, C_x) son incógnitas. Hay cabida, por tanto, para una única incógnita más.

En realidad, la sexta incógnita es, como ya se ha mencionado, el movimiento en sí. Se debe elegir un parámetro cinemático de aceleración como “dominante”, o “representante” de todo el movimiento, y resolver simbólicamente todo el problema de aceleraciones imaginando que dicho parámetro fuera conocido. Lo más conveniente suele ser elegir una de las aceleraciones angulares. En este caso, se tomará como “dato ficticio de aceleración” α_1 . Siempre hay que resolver previamente las velocidades, salvo que, como en este caso, resulte trivial. Al partir del reposo, se sabe que $\omega_1 = \omega_2 = 0$.



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{AB} - \omega_1^2 \cdot \overline{AB} =$$

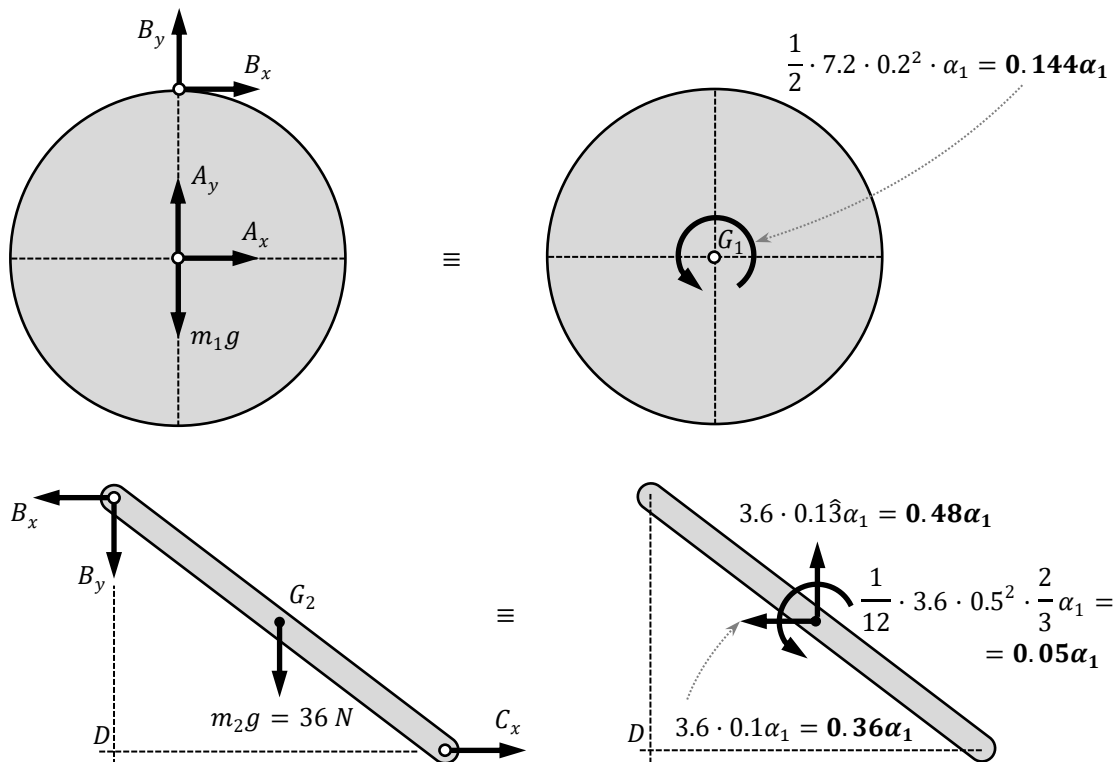
$$= \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{0} = \begin{Bmatrix} -0.2\alpha_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_C \end{Bmatrix} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{BC} - \omega_2^2 \cdot \overline{BC} =$$

$$= \vec{a}_B + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0.4 & -0.3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{0} = \vec{a}_B + \begin{Bmatrix} 0.3\alpha_2 \\ 0.4\alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow 0 = -0.2\alpha_1 + 0.3\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_1$$

$$\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{BG_2} - \omega_2^2 \overline{BG_2} = \begin{Bmatrix} -0.2\alpha_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.15\alpha_2 \\ 0.2\alpha_2 \end{Bmatrix} - \vec{0} = \begin{Bmatrix} -0.2\alpha_1 + 0.15 \cdot 2/3\alpha_1 \\ 0 + 0.2 \cdot 2/3\alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1 \\ 0.1\hat{3} \end{Bmatrix} \alpha_1$$



En el elemento 1:

$$M_A \rightarrow -B_x \cdot 0.2 = 0.144\alpha_1 \rightarrow B_x = -0.72\alpha_1$$

En el elemento 2:

$$M_D \rightarrow B_x \cdot 0.3 - 36 \cdot 0.2 = 0.05\alpha_1 + 0.36\alpha_1 \cdot 0.15 + 0.48\alpha_1 \cdot 0.2$$

$$-0.72\alpha_1 \cdot 0.3 - 7.2 = 0.2\alpha_1 \rightarrow -0.416\alpha_1 = 7.2$$

$$\alpha_1 = -17.31 \text{ rad/s}^2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_1 = -11.54 \text{ rad/s}^2$$

$$B_x = -0.72\alpha_1 = 12.46 \text{ N}$$

$$F_y \rightarrow -B_y - 36 = 0.48\alpha_1 \rightarrow B_y = -27.69 \text{ N}$$

$$F_x \rightarrow C_x - B_x = -0.36\alpha_1 \rightarrow C_x = 18.69 \text{ N}$$

11.3 ELEMENTOS BIARTICULADOS, SIN CARGAS APLICADAS, DE MASA DESPRECIABLE

Cuando se estudia el equilibrio estático de los elementos de una estructura, normalmente se tiende a despreciar los pesos propios de éstos, ya que el orden de magnitud de las cargas aplicadas suele ser muy superior. Sin embargo, cuando se estudia el equilibrio dinámico de los elementos de un mecanismo, lo correcto es tener en cuenta las masas, ya que, aunque las cargas aplicadas fueran mucho mayores que los pesos, al existir movimiento, aparecen las fuerzas de inercia (también proporcionales a la masa de cada elemento), que pueden ser grandes (no despreciables frente a las cargas) si las aceleraciones son elevadas.

Esta circunstancia implica que, aunque un elemento de un mecanismo sea una barra biarticulada sin cargas directamente aplicadas, las fuerzas de enlace en ambas articulaciones han de plantearse como dos incógnitas de fuerza independientes, como si en estática se tratara de un elemento biarticulado con cargas aplicadas. Esto es debido a que, si las cargas inerciales se pasan al diagrama de sólido libre de la barra (cambiándoles el sentido), para estudiar el equilibrio dinámico como si se tratara de un equilibrio estático (aplicando el principio de D'Alembert), ya no se puede considerar que el elemento no tenga cargas aplicadas fuera de las articulaciones. Además, si la masa del elemento no se considera despreciable y el plano del sistema es vertical, existirá el peso como fuerza aplicada.

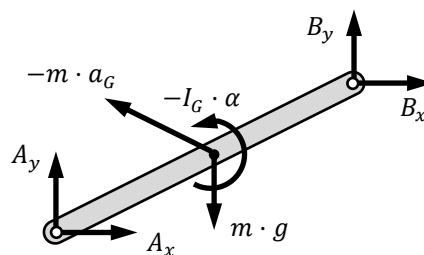
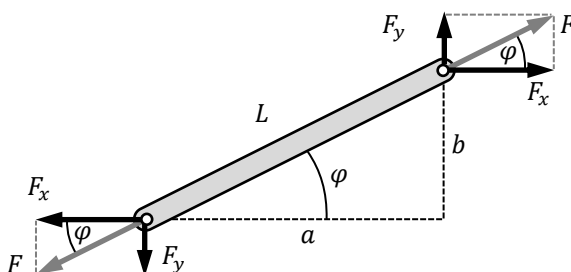


Fig. 11. 4 Fuerzas de enlace en un elemento biarticulado con masa

Sin embargo, si se admite explícitamente que un determinado elemento puede ser considerado de masa despreciable en el cálculo dinámico, se está afirmando que se pueden despreciar, además de su peso, también sus cargas inerciales. En esta situación, las ecuaciones del equilibrio dinámico, que precisamente lo que tienen en cuenta son las fuerzas de inercia debidas a las aceleraciones, degeneran en las propias ecuaciones del equilibrio estático. Como se demostró en su momento, para el caso de un elemento biarticulado, esta situación conduce a que, en lugar de haber cuatro fuerzas de enlace independientes (dos por articulación), exista una única incógnita, ya que las fuerzas en ambas articulaciones son iguales y opuestas y en dirección conocida, la de la línea que une las articulaciones.



$$F_x = F \cdot \cos \varphi = F \cdot a/L$$

$$F_y = F \cdot \sin \varphi = F \cdot b/L$$

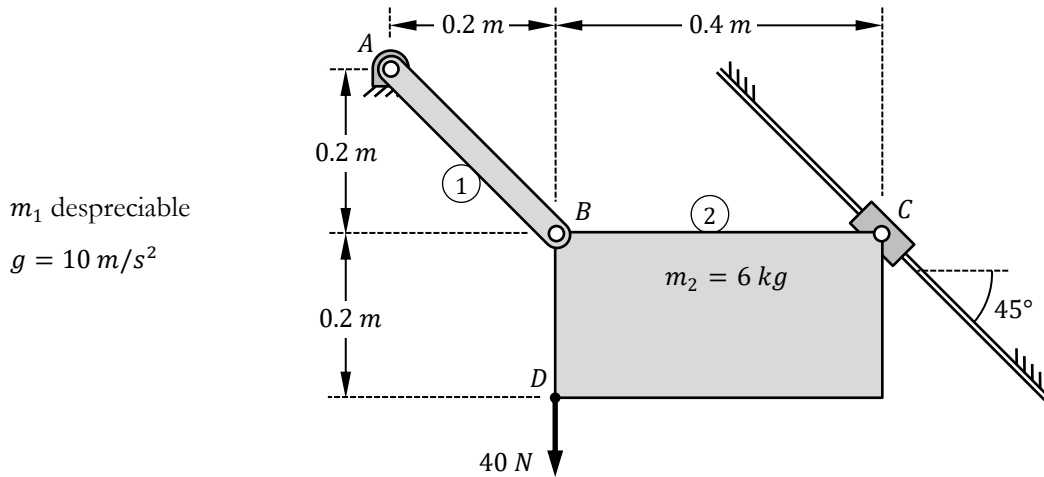
$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{F_y}{F_x}$$

Fig. 11. 5 Fuerzas de enlace en un elemento biarticulado de masa despreciable

Evidentemente, una vez tenida en cuenta esta circunstancia, para del diagrama de sólido libre de dicho elemento ya no es posible plantear ninguna ecuación de equilibrio dinámico.

• Ejemplo 11.2

El mecanismo de la figura, que se encuentra en reposo en la posición mostrada, comienza a moverse al aplicarle una fuerza en el punto D . Sabiendo que el rozamiento en la deslizadera C es despreciable, calcular, en el instante inicial del movimiento, las aceleraciones angulares de los dos elementos y las reacciones en las tres articulaciones.



Puesto que se parte del reposo, se sabe que la posición inicial del movimiento, aunque ya existan aceleraciones, las velocidades todavía son nulas, es decir, $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Además, por ser A una articulación fija, $a_A = 0$. Finalmente, la deslizadera C realiza una trayectoria rectilínea, por lo que la dirección del vector \vec{a}_C es conocida. Tomando $d = 0.1$ m:

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{AB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 2d & -2d & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 2d \\ \alpha_1 2d \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} a_{C_x} \\ -a_{C_x} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{BC} = \vec{a}_B + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 4d & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{a}_B + \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 4d \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow a_{C_x} = \alpha_1 2d + 0$$

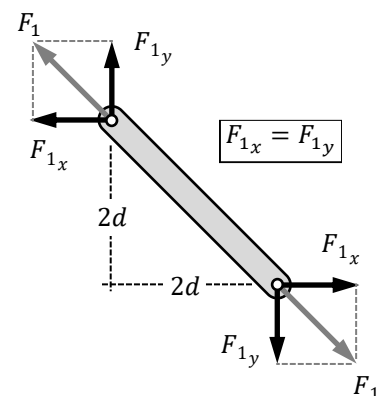
$$y \rightarrow -a_{C_x} = \alpha_1 2d + \alpha_2 4d \rightarrow -\alpha_1 4d = \alpha_2 4d \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

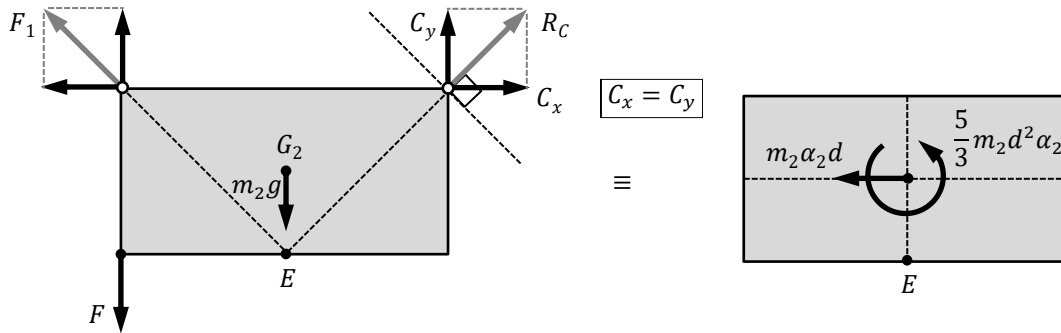
$$\vec{a}_{G_2} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{BG_2} = \vec{a}_B + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 2d & -d & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_2 2d \\ -\alpha_2 2d \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_2 d \\ \alpha_2 2d \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_2 d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$I_{G_2} = \frac{1}{12} m_2 ((4d)^2 + (2d)^2) = \frac{1}{12} m_2 (4^2 d^2 + 2^2 d^2) = \frac{20}{12} m_2 d^2 = \frac{5}{3} m_2 d^2$$

Se dice expresamente que se puede despreciar la masa de la barra 1. Como además, se trata de un elemento biarticulado sin cargas aplicadas, se puede plantear su diagrama de sólido libre simplificado.

Para este diagrama no se puede plantear ya ninguna ecuación de equilibrio. La fuerza en dirección conocida se obtendrá de las ecuaciones de equilibrio del otro elemento, el 2, cuando se lleve a éste por aplicación del principio de acción-reacción (es por ello que, en este caso, se ha elegido α_2 como parámetro cinemático principal).





$$M_E \rightarrow F \cdot 2d = \frac{5}{3}m_2d^2\alpha_2 + m_2\alpha_2d \cdot d \rightarrow \alpha_2 = \frac{3F}{4m_2d} = 50 \text{ rad/s}^2$$

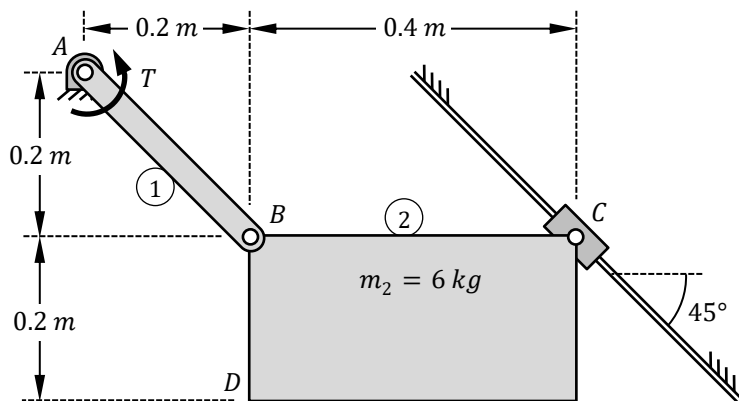
$$M_B \rightarrow C_y \cdot 4d - m_2g \cdot 2d = \frac{5}{3}m_2d^2\alpha_2 - m_2\alpha_2d \cdot d \rightarrow C_y = F/8 + m_2g/2 = 35 \text{ N}$$

$$F_y \rightarrow F_{1y} + C_y - m_2g - F = 0 \rightarrow F_{1y} = 65 \text{ N}$$

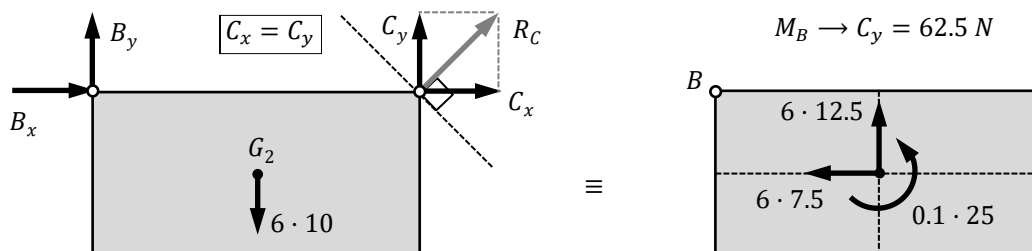
• Ejemplo 11.3

El mecanismo mostrado en la figura se mueve accionado por un motor en A, que proporciona el par T necesario para conseguir el movimiento especificado. Sabiendo que la deslizadera C no tiene rozamiento, calcular en la posición del movimiento representada, la reacción en dicha deslizadera.

- $\omega_1 = 5 \text{ rad/s} \cup \text{ constante}$
- m_1 no definida
- $g = 10 \text{ m/s}^2$



La barra 1 no se puede considerar que esté trabajando axialmente por dos motivos. Su masa no se proporciona, lo cual no implica que se pueda considerar como despreciable. Pero incluso aunque se especificara que su masa es despreciable, tendría aplicado el par motor. El hecho de que su masa no esté definida implica que no se puede determinar su sistema de fuerzas inerciales, con lo que sus tres ecuaciones de equilibrio no están disponibles para calcular. Por tanto, no se podrán determinar la totalidad de incógnitas del problema, aunque sí algunas de ellas. Las incógnitas que no se pueden calcular son las tres que únicamente están en el sólido 1, es decir, A_x , A_y y T .



11.4 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN PARA MECANISMOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

- Paso 1: Identificación de si se trata de un problema de dinámica directa o inversa.

Esto se hace respondiendo a la siguiente pregunta: *¿Hay un dato de aceleración?* Ha de tenerse en cuenta que dicho dato puede darse de manera implícita, como cuando se especifica que el valor de la velocidad es constante, lo cual implica un valor de aceleración nulo. En función de la respuesta a dicha pregunta:

- Sí → Dinámica inversa. Las implicaciones principales van a ser:
 - No hay incógnitas en los sistemas de fuerzas inerciales. Todo el problema de aceleraciones se puede resolver a partir del dato.
 - Hay una carga aplicada (motora) en los sistemas de fuerzas reales que es incógnita, junto con las reacciones en los enlaces. Debe estar especificado de qué tipo es y dónde se encuentra aplicada dicha carga motora.
 - Sólo hay incógnitas en los sistemas de fuerzas reales, las reacciones de enlace y la carga motora. Evidentemente, al margen de dichas incógnitas, en los sistemas de fuerzas reales existirán aplicadas el resto de cargas conocidas, como los pesos.
- No → Dinámica directa. Las implicaciones principales van a ser:
 - Todas las cargas inerciales son desconocidas. Será necesario escoger un único parámetro de aceleración como incógnita dominante y resolver el problema de aceleraciones al completo en función de éste, para que todos los sistemas de fuerzas de inercia queden expresados en función de dicha única incógnita de aceleración.
 - Todas las cargas aplicadas son conocidas. Las únicas incógnitas de los sistemas de fuerzas reales son las reacciones en los enlaces.
 - Hay incógnitas en los sistemas de fuerzas reales (las reacciones de enlace) y en los sistemas de fuerzas de inercia (la aceleración dominante, que además aparece en todos los elementos).
- Paso 2: Identificación de los elementos que trabajan axialmente.

Esto se hace respondiendo a la siguiente pregunta: *¿Hay elementos biarticulados sin cargas aplicadas y de masa despreciable?*

Para cada uno de tales elementos se dibuja en primer lugar su diagrama de sólido libre, identificando su única fuerza incógnita (aplicada en ambos extremos, con sentidos opuestos, en la dirección de la línea que une las articulaciones). En el caso de que se trate una fuerza inclinada, si es posible se establece relación entre las componentes, o si no esto no es sencillo se expresan las componentes en función del módulo incógnita y el ángulo conocido.

Hacer esto supone haber aplicado implícitamente sus 3 ecuaciones de equilibrio (permitiendo reducir en 3 el número total de incógnitas del problema, ya que el elemento ha pasado de tener 4 reacciones de enlace desconocidas, dos en cada articulación, a tener sólo una incógnita en su sistema de fuerzas reales). Esto implica que para estos sólidos ya no se pueden plantear sus ecuaciones de equilibrio.

Cuidado! En dinámica inversa puede suceder que un elemento biarticulado y de masa despreciable tenga aplicada la carga motora incógnita, por lo que ya no es ‘sin cargas aplicadas’ y ya no funciona axialmente. En este caso, su diagrama de fuerzas reales presentaría 5 incógnitas, la carga motora y 2 fuerzas independientes en cada articulación. Sus 3 ecuaciones de equilibrio dinámico están disponibles, aunque, al ser de masa despreciable, su sistema de fuerzas de inercia es nulo (por tanto, la suma de fuerzas reales en cualquier dirección es 0 y la suma de momentos reales respecto de cualquier punto es 0, como en un equilibrio estático).

- Paso 3: Comprobación de que se dispone de tantas ecuaciones como número de incógnitas.

No es imprescindible, pero nunca está de más asegurarse antes de empezar de que el problema se puede resolver.

- El número total de ecuaciones (de equilibrio dinámico) disponibles es 3 veces el número de sólidos que NO trabajan axialmente.
- El número de incógnitas es el número de reacciones de enlace más el número de grados de libertad del mecanismo, 1. Como ya se ha dicho, esa incógnita adicional que no es una reacción es:
 - En el caso de dinámica inversa, una carga motora aplicada.
 - En el caso de dinámica directa, el parámetro de aceleración elegido como dominante.

En realidad, del cómputo de ecuaciones también han de retirarse las que corresponderían a sólidos de los que no se proporcione la información de su masa, no que se considere despreciable, sino que no se proporcione el dato. Para estos sólidos los sistemas de fuerzas de inercia no están determinados, por lo que no se pueden plantear sus ecuaciones.

En estas situaciones el problema sólo se puede resolver si cada uno de dichos sólidos contiene tres cargas incógnita que sólo existan en él y no en el resto de elementos. Esas tres incógnitas son, de hecho, las que no se podrían obtener como consecuencia de las tres ecuaciones perdidas.

- Paso 4: Resolución de las velocidades angulares (y velocidades relativas).

Siempre existe un dato de velocidad. En función de dicho dato, para poder plantear posteriormente las aceleraciones con las que definir los sistemas de fuerzas de inercia, es necesario:

- Calcular las velocidades angulares de todos los elementos. No es necesario resolver las velocidades lineales absolutas de todos los puntos.
- En todos los casos en los que exista deslizadera sobre guía móvil (que implica la obligatoriedad de plantear el movimiento relativo de la deslizadera respecto del elemento guía), calcular dicha velocidad relativa (ya que aparecerá posteriormente en el término de la aceleración de Coriolis).

Evidentemente, una de las velocidades angulares, o bien la velocidad relativa de la deslizadera, puede ser el dato de velocidad del problema, con lo que en tal caso esa ya no habría que obtenerla.

Finalmente, en el caso de que se vaya a analizar una posición en la que el mecanismo se encuentra en reposo (aunque ya exista aceleración, aún no hay velocidad), el problema de velocidades tiene la solución trivial y no hace falta plantearlo, todas las velocidades lineales y angulares son nulas.

- **Paso 5:** Resolución de las aceleraciones angulares (y aceleración absoluta de un punto de cada sólido).

En primer lugar, hay que calcular las aceleraciones angulares de todos los elementos. Es importante remarcar que el planteamiento cinemático de velocidades y aceleraciones ha de realizarse sin tener en cuenta los centros de gravedad. Para resolver sólo habrá que apoyarse en las uniones entre elementos.

La aceleración angular de cada elemento se utilizará posteriormente en un campo de aceleraciones del mismo, por lo que también habrá que disponer de la aceleración de un punto de éste. Por este motivo, para el caso de deslizaderas sobre guía móvil, pueden darse situaciones en las que también sea necesario resolver su aceleración relativa (no siempre).

- Si el problema es de dinámica inversa y el dato de aceleración es una de las aceleraciones angulares, esa ya es conocida y no hay que calcularla.
- Si el problema es de dinámica directa no se dispone de ningún dato de aceleración, pero las aceleraciones angulares de todos los elementos han de obtenerse en función de un único parámetro de aceleración dominante. Lo más sistemático es elegir como parámetro dominante el equivalente en aceleración al dato de velocidad proporcionado (y así aprovechar toda la estrategia de resolución de velocidades angulares planteada en el paso anterior) y resolver en función de dicho parámetro las aceleraciones angulares de todos los sólidos, como si fuera un dato simbólico (e igualmente la aceleración absoluta de un punto de cada elemento).

Cuando en un problema de dinámica directa se parte del reposo, no existe un dato de velocidad específico, todas las velocidades son nulas y, de hecho, ni se plantea el cálculo de las velocidades angulares. En esta situación, por tanto, no es posible seguir la recomendación de elegir sistemáticamente como parámetro de aceleración dominante el equivalente de aceleración al dato de velocidad proporcionado.

En este caso, donde además no se dispone de ninguna estrategia de resolución de velocidades angulares que aprovechar, lo más práctico es elegir como incógnita de aceleración dominante la aceleración angular de uno cualquiera de los elementos y obtener las aceleraciones angulares del resto en función de ella.

Como situación particular dentro de ésta, puede darse la circunstancia de que, en la posición del mecanismo a analizar, alguno de los elementos esté teniendo un movimiento de traslación, es decir, que de manera permanente, o bien instantáneamente, no pueda girar, por lo que su aceleración angular está condicionada a ser nula y no constituye un parámetro independiente en función del cual poder plantear el resto de aceleraciones.

- **Paso 6:** Resolución de las aceleraciones de los centros de gravedad.

Con las aceleraciones angulares resueltas, mediante campos de aceleraciones absolutos de cada elemento, a partir de la aceleración de un punto del mismo que también se habrá calculado, se obtiene directamente la aceleración de su centro de gravedad. Este cálculo ha de realizarse para todos los elementos del mecanismo, exceptuando:

- Si el centro de gravedad de un elemento coincide con una articulación fija del mismo, su aceleración es trivial, nula. O si coincide con un enlace, probablemente ya se tenga obtenida.
- Si un elemento es de masa despreciable, de cualquier tipo, sea biarticulado o no, y tenga cargas aplicadas o no, como su sistema de fuerzas de inercia es nulo, no hace falta calcular la aceleración de su centro de gravedad.

Cuidado! Cuando un elemento es de masa despreciable y por tanto tiene un sistema de fuerzas de inercia nulo, aunque no haga falta calcular la aceleración de su centro de gravedad, sí hace falta calcular (en el paso anterior) su aceleración angular. Aunque dicha aceleración angular no vaya a tenerse en cuenta en el par giroscópico del propio elemento (porque su momento de inercia es despreciable al ser proporcional a su masa), su valor sí va a ser requerido para obtener las aceleraciones de los centros de gravedad del resto de elementos (por ejemplo, para obtener la aceleración absoluta de un punto de otro elemento a partir de la cual plantear el campo de aceleraciones que proporcione la aceleración de su centro de gravedad).

▪ Paso 7: Creación de los sistemas de fuerzas de inercia.

Para cada diagrama de sólido libre de fuerzas reales se hace al lado el dibujo del sistema de fuerzas de inercia. Este proceso se puede secuenciar en dos etapas:

- En primer lugar, para cada elemento, se ha de dibujar la aceleración angular finalmente obtenida y las dos componentes de la aceleración del centro de gravedad, todo en sus sentidos reales. Cualquier resultado que haya salido negativo se dibuja en sentido opuesto respecto de aquel en el que se planteó y se pone en el dibujo su valor sin el signo.
- A continuación, para cada elemento, las dos componentes de la aceleración del centro de gravedad se multiplican por su masa y la aceleración angular se multiplica por su momento de inercia respecto del centro de gravedad.

Recuérdese que:

- En el caso de dinámica inversa se dibujan los resultados finales de aceleración que se han obtenido en función del dato de velocidad y del dato de aceleración real.
- En el caso de dinámica directa se dibujan los resultados finales de aceleración a los que se ha llegado a partir del dato real de velocidad y de un parámetro único de aceleración dominante elegido libremente.

Así mismo, recuérdese que es factible plantear un diagrama de sólido libre compuesto por más de un elemento, en sustitución del diagrama de un sólido libre de un elemento individual. En tal caso:

- En el lado de las fuerzas reales no se manifiestan las reacciones de enlace en las uniones por las que no ha se ha soltado el sistema.
- En el lado de las fuerzas de inercia se representan los sistemas de fuerzas de inercia de todos los sólidos que formen parte del diagrama, en cada elemento el suyo.

- Paso 8: Planteamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico.
 - La suma de fuerzas en cualquier dirección en el diagrama de fuerzas reales es igual a la suma de fuerzas en la misma dirección en el diagrama de fuerzas de inercia.
 - La suma de momentos respecto de cualquier punto en el diagrama de fuerzas reales es igual a la suma de momentos respecto del mismo punto en el diagrama de fuerzas de inercia.

Puesto que para cada diagrama se pueden plantear infinitas ecuaciones (pero siempre sabiendo que deberán elegirse de entre ellas 3 a lo sumo), lo más práctico de cara a la estrategia de resolución de incógnitas es, siempre que sea posible, ‘diseñar’ las ecuaciones para que contengan una única incógnita.

- En el caso de dinámica inversa este proceso resulta relativamente sencillo ya que cada incógnita es una carga que aparece una vez, o como mucho dos veces (en el caso de acción-reacción), en los diagramas de fuerzas reales. Este desacoplamiento físico de las incógnitas se traduce en un desacoplamiento matemático de las mismas en los sistemas de ecuaciones.

Una interesante implicación de esta circunstancia es que, cuando no sea objeto del problema calcular la totalidad de las incógnitas (supóngase por ejemplo que sólo se quiera calcular el valor de la carga motora y no las reacciones), se puede diseñar una estrategia de resolución optimizada que minimice el número de ecuaciones a emplear para llegar al objetivo.

- En dinámica directa, sin embargo, debido a que la incógnita de aceleración dominante aparece en todos y cada uno de los términos inerciales, se provoca un gran acoplamiento matemático del sistema de ecuaciones de equilibrio. Es por ello que, al margen de cuál sea el objetivo real del cálculo (tal vez se desee calcular sólo algunas de las reacciones), la incógnita de aceleración es siempre la primera que se debe resolver. Una vez resuelta la aceleración, el cálculo de las reacciones de enlace pasa a ser similar al caso de la dinámica inversa (porque todas las cargas inerciales serían ya conocidas).

Sin embargo, debido precisamente al hecho de que la incógnita de aceleración aparece en todos los términos inerciales, salvo en casos excepcionalmente simples, es frecuente que al principio del proceso de resolución no exista ninguna ecuación de equilibrio que la contenga sólo a ella (que no contenga ninguna reacción de enlace). En este caso, lo más efectivo es encontrar, si existe, un subsistema de ecuaciones que contengan como incógnitas además de la aceleración, un reducido número de reacciones. [Ver *Aclaración*]

Obviamente, en el caso de que el objetivo del cálculo fuera la determinación de los valores de las aceleraciones angulares de todos los elementos, una vez resuelta la incógnita de aceleración dominante, el resultado del paso 5 lo constituyen precisamente las expresiones que dan todas las aceleraciones angulares en función de la misma. Si las reacciones no fueran el objeto del cálculo, sólo las aceleraciones, el proceso de resolución concluiría en este punto, sin necesidad de plantear el resto de ecuaciones.

En cualquiera de los casos, las incógnitas del problema son las que son, independiente de que se pregunte por ellas o no. Son las que están definidas en el paso 3 y son inherentes a la modelización matemática del comportamiento del sistema mecánico real. Habrá problemas en los que haya que resolver la totalidad de incógnitas y habrá otros en los que se demande calcular sólo alguna(s) de ellas. No obstante, en el segundo caso, no es posible calcular ninguna incógnita específica si no se ha planteado correctamente la existencia de la totalidad.

Aclaración:

En un problema de dinámica directa, donde la primera incógnita que se ha de resolver siempre es la aceleración que se ha elegido como representante de todo el problema de aceleraciones, que se manifiesta en todos los términos de los sistemas de inercia de todos los elementos, y por tanto siempre convive en las ecuaciones de equilibrio con las reacciones de enlace, el grado de complejidad de la estrategia de resolución varía en función de las distintas situaciones que pueden darse:

- Si hay un elemento en el que sólo existan dos fuerzas de enlace, se puede encontrar una ecuación de la que se obtenga directamente la aceleración:
 - Si las dos fuerzas no son paralelas, el equilibrio de momentos respecto del punto donde se cortan sus líneas de acción.
 - Si las dos fuerzas son paralelas, el equilibrio de fuerzas en la dirección perpendicular a las mismas.
- Si hay dos elementos conectados y en cada uno de ellos se puede encontrar una ecuación que contenga únicamente a una misma de las reacciones compartidas:

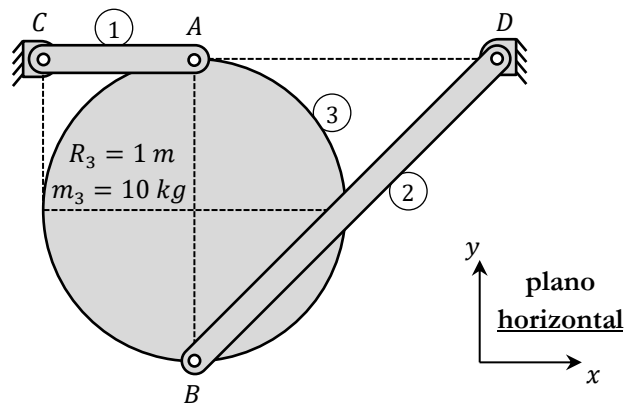
$$\begin{cases} ec_1(R, \alpha) \\ ec_2(R, \alpha) \end{cases} \rightarrow R(\alpha) \rightarrow \alpha$$

- Si dos elementos 1 y 2, no están conectados entre sí, pero ambos están conectados a un mismo elemento 3, y supóngase que en el elemento 1 se consigue encontrar una ecuación ec_1 que involucre a una única reacción R_1 en su enlace con 3, y que en elemento 2 se consigue encontrar una ecuación ec_2 que involucre una única reacción R_2 en su enlace con 3. Si ahora en el elemento 3 se encontrara una ecuación ec_3 que involucre únicamente a R_1 y R_2 :

$$\begin{cases} ec_1(R_1, \alpha) \rightarrow R_1(\alpha) \\ ec_2(R_2, \alpha) \rightarrow R_2(\alpha) \\ ec_3(R_1, R_2, \alpha) \end{cases} \rightarrow ec_3(\alpha) \rightarrow \alpha$$

• Ejemplo 11.4

Resolver, empleando el mínimo número posible de ecuaciones de equilibrio:



- Para $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ \mathcal{U} , siendo m_1 y m_2 despreciables, sabiendo que la única carga aplicada es una fuerza F en dirección x en el centro del disco 3, calcular el valor que ha de tener dicha fuerza para lograr que el mecanismo se mueva de tal manera que, en ese instante, $\alpha_1 = 2 \text{ rad/s}^2$ \mathcal{U} .
- Para $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ \mathcal{U} , siendo m_1 y m_2 despreciables, sabiendo que la única carga aplicada es un momento puro T en la articulación C de la barra 1, calcular el valor que ha de tener dicho par, para lograr que el mecanismo se mueva de tal manera que, en ese instante, $\alpha_1 = 2 \text{ rad/s}^2$ \mathcal{U} .
- Para $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ \mathcal{U} , siendo m_1 despreciable y $m_2 = 3 \text{ kg}$, sabiendo que la única carga aplicada es una fuerza F en dirección x en el centro del disco 3, calcular el valor que ha de tener dicha fuerza para lograr que el mecanismo se mueva de tal manera que en ese instante $\alpha_1 = 2 \text{ rad/s}^2$ \mathcal{U} .
- Para $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ \mathcal{U} , siendo m_1 despreciable y $m_2 = 3 \text{ kg}$, sabiendo que la única carga aplicada es un momento puro T en la articulación C de la barra 1, calcular el valor que ha de tener dicho par, para lograr que el mecanismo se mueva de tal manera que en ese instante $\alpha_1 = 2 \text{ rad/s}^2$ \mathcal{U} .
- Con el mecanismo parado, siendo m_1 y m_2 despreciables, únicamente se aplica una fuerza hacia la derecha de valor 55 N en el centro del disco 3. Calcular α_3 en el instante inicial del movimiento.
- En la posición mostrada, siendo m_1 despreciable y $m_2 = 3 \text{ kg}$, la velocidad del mecanismo es tal que $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ \mathcal{U} y la única carga aplicada es un momento puro en sentido horario \mathcal{U} en la articulación C de la barra 1 de valor $24 \text{ N} \cdot \text{m}$. Calcular, en el instante inicial del movimiento, las aceleraciones angulares de los tres elementos.

En los apartados a), b), c) y d) existe dato de aceleración, por lo tanto, se trata de situaciones de dinámica inversa, donde el problema de aceleraciones se puede resolver por completo, los sistemas de fuerzas de inercia están totalmente determinados a partir de la información disponible y entre las fuerzas aplicadas que producen el movimiento existe una carga motora incógnita.

En los apartados e) y f) no existe dato de aceleración y la totalidad de cargas aplicadas tienen valores conocidos. Se trata por tanto de situaciones de dinámica directa.

En cualquiera de los casos, como el mecanismo se encuentra dispuesto en un plano horizontal, no se han de incluir los pesos de los elementos de masa no despreciable en el conjunto de cargas aplicadas, ya que al ser fuerzas perpendiculares al plano del movimiento no afectan al mismo.

Los pasos relativos a la resolución cinemática son comunes en los cuatro primeros apartados y además se pueden ejecutar independientemente antes de incluso de hacer cualquier otra consideración del cálculo dinámico.

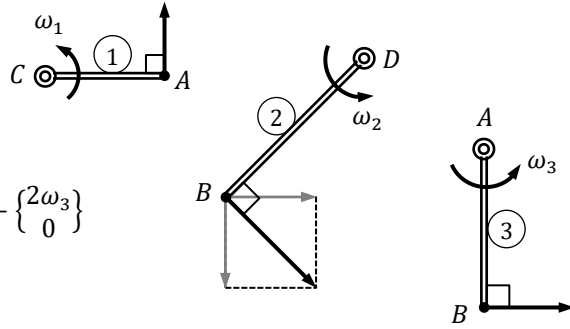
$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{CA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{DB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\omega_2 \\ -2\omega_2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_3 \wedge \vec{AB} = \vec{v}_A + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega_3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\omega_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$y \rightarrow -2\omega_2 = 2 \rightarrow \omega_2 = -1 \text{ rad/s}$$

$$x \rightarrow 2\omega_2 = 2\omega_3 \rightarrow \omega_3 = -1 \text{ rad/s}$$



Este resultado de velocidades también es compatible con el dato del apartado f).

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{CA} - \omega_1^2 \cdot \vec{CA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{DB} - \omega_2^2 \cdot \vec{DB} = \begin{Bmatrix} 2\alpha_2 \\ -2\alpha_2 \end{Bmatrix} - (-1)^2 \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\alpha_2 \\ -2\alpha_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \vec{AB} - \omega_3^2 \cdot \vec{AB} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\alpha_3 \\ 0 \end{Bmatrix} - (-1)^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 + 2\alpha_3 \\ 2 + 2 \end{Bmatrix}$$

$$y \rightarrow -2\alpha_2 + 2 = 4 \rightarrow \alpha_2 = -1 \text{ rad/s}^2$$

$$x \rightarrow 2\alpha_2 + 2 = 2\alpha_3 - 4 \rightarrow \alpha_3 = 2 \text{ rad/s}^2$$

Ahora, para cuando los elementos no sean de masa despreciable, dependiendo del apartado:

$$\vec{a}_{G_2} = \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{DG}_2 - \omega_2^2 \cdot \vec{DG}_2 = \begin{Bmatrix} -1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1^2 \cdot 1 \\ 1^2 \cdot 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

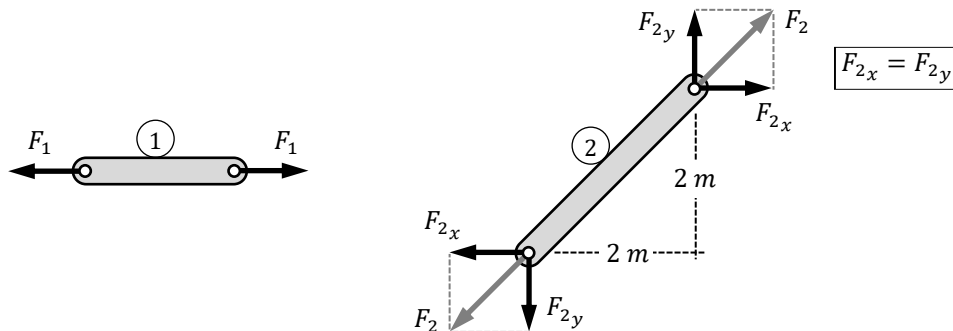
$$\vec{a}_{G_3} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \vec{AG}_3 - \omega_3^2 \cdot \vec{AG}_3 = \begin{Bmatrix} -4 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1^2 \cdot 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 3 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Así mismo:

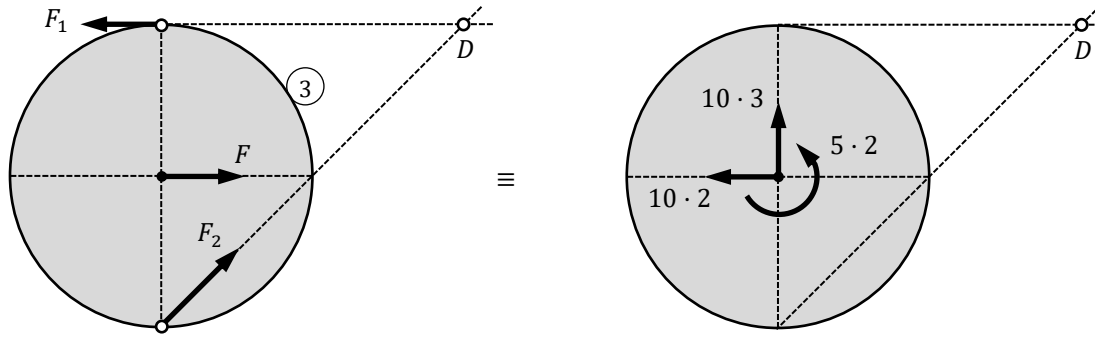
$$I_{G_2} = \frac{1}{12} m_2 L_2^2 = \frac{1}{3 \cdot 4} 3(2\sqrt{2})^2 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{G_3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 1^2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para los apartados en los que haya elementos que trabajen axialmente (dependerá del caso):



a) Los elementos 1 y 2 trabajan axialmente (biarticulados, sin cargas y de masa despreciable).



Las únicas incógnitas del problema son las dos fuerzas de enlace F_1 y F_2 y la fuerza aplicada F . la resolución optimizada para determinar el valor de F será aquella en la que no intervengan las otras dos, es decir, el equilibrio de momentos respecto del punto donde se cortan sus líneas de acción:

$$M_D \text{ [3]} \rightarrow F \cdot 1 = 10 - 20 \cdot 1 - 30 \cdot 2 \rightarrow F = -70 \text{ N}$$

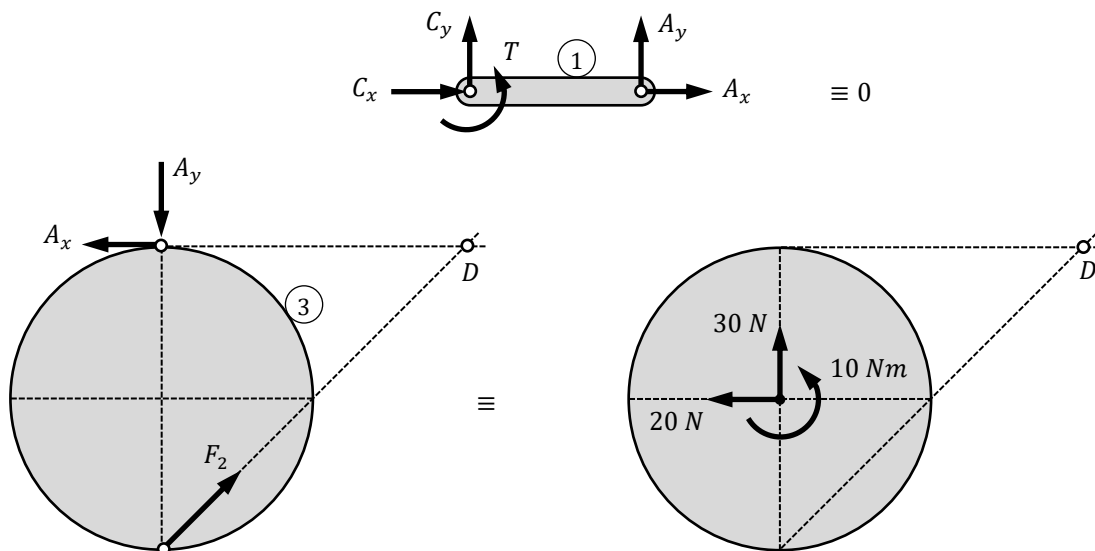
Aunque en este caso no se pida, resolver el resto de incógnitas, es decir, las dos fuerzas de enlace, es viable haciendo uso del resto de ecuaciones de equilibrio dinámico disponibles. En dirección horizontal aún existen dos incógnitas, F_1 y la componente x de F_2 , sin embargo, en la dirección vertical:

$$F_y \text{ [3]} \rightarrow F_{2y} = 30 \text{ N} \rightarrow F_{2x} = F_{2y} = 30 \text{ N}$$

Y finalmente:

$$F_x \text{ [3]} \rightarrow F - F_1 + F_{2x} = -20 \rightarrow F_1 = -70 + 30 + 20 = -20 \text{ N}$$

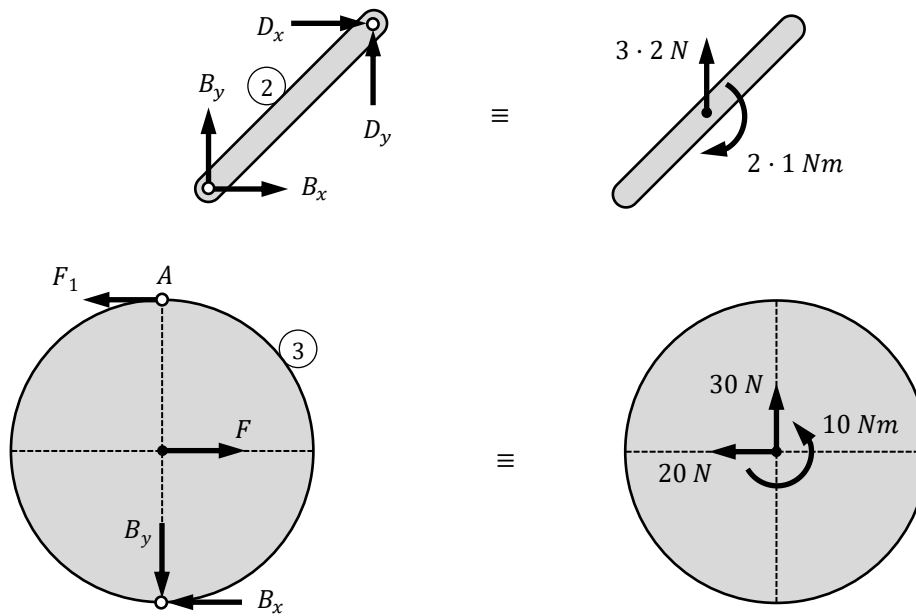
b) El elemento 2 trabaja axialmente, pero el elemento 1 NO puesto que tiene aplicado el par T .



$$M_D \text{ [3]} \rightarrow A_y \cdot 2 = 10 - 20 \cdot 1 - 30 \cdot 2 = -70 \rightarrow A_y = -35 \text{ N}$$

$$M_C \text{ [1]} \rightarrow T + A_y \cdot 1 = 0 \rightarrow T = 35 \text{ Nm}$$

c) El elemento 1 trabaja axialmente, pero el elemento 2 NO puesto que tiene inercia.

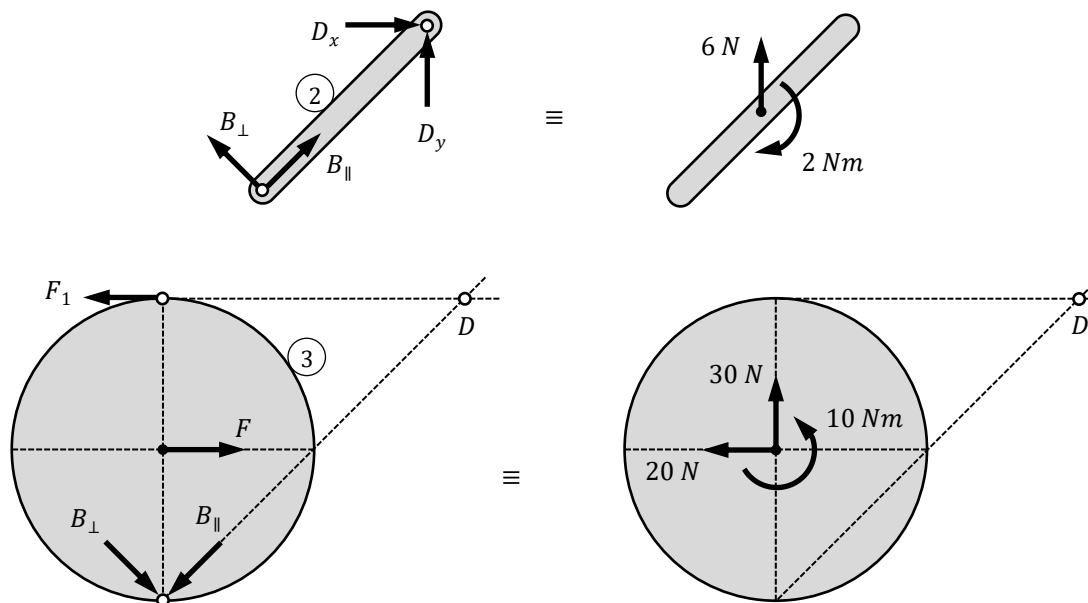


$$F_y [3] \rightarrow B_y = -30 \text{ N}$$

$$M_D [2] \rightarrow B_x \cdot 2 - B_y \cdot 2 = -2 - 6 \cdot 1 \rightarrow B_x = -34 \text{ N}$$

$$M_A [3] \rightarrow F \cdot 1 - B_x \cdot 2 = 10 - 20 \cdot 1 \rightarrow F = -78 \text{ N}$$

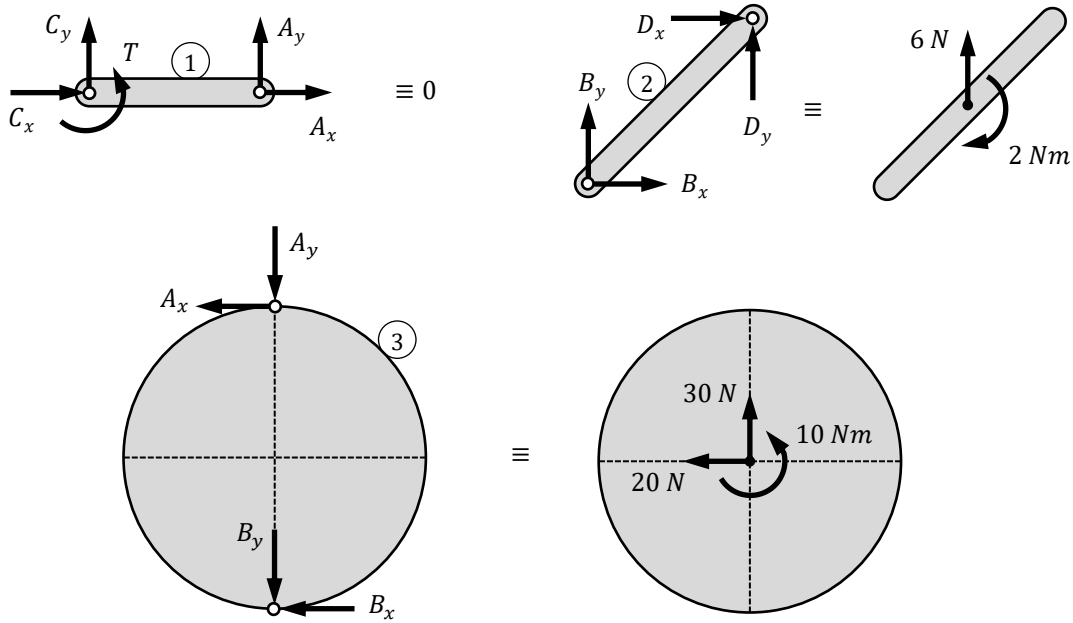
Sin embargo, conviene recordar que cuando en una articulación la fuerza transmitida no tiene una dirección preestablecida, las direcciones de las dos componentes que se establecen como incógnitas independientes pueden elegirse libremente. Tras una breve observación de los diagramas de sólido libre, se podría haber optimizado aún más la secuencia de ecuaciones planteando:



$$M_D [2] \rightarrow -B_{\perp} \cdot 2\sqrt{2} = -2 - 6 \cdot 1 \rightarrow B_{\perp} \cdot 2\sqrt{2} = 8$$

$$M_D [3] \rightarrow F \cdot 1 + B_{\perp} \cdot 2\sqrt{2} = -70 \rightarrow F = -78 \text{ N}$$

d) Ninguno de los elementos trabaja axialmente, 1 tiene un momento puro aplicado (aunque no tenga cargas inerciales) y 2 no es de masa despreciable (aunque no tenga cargas aplicadas).



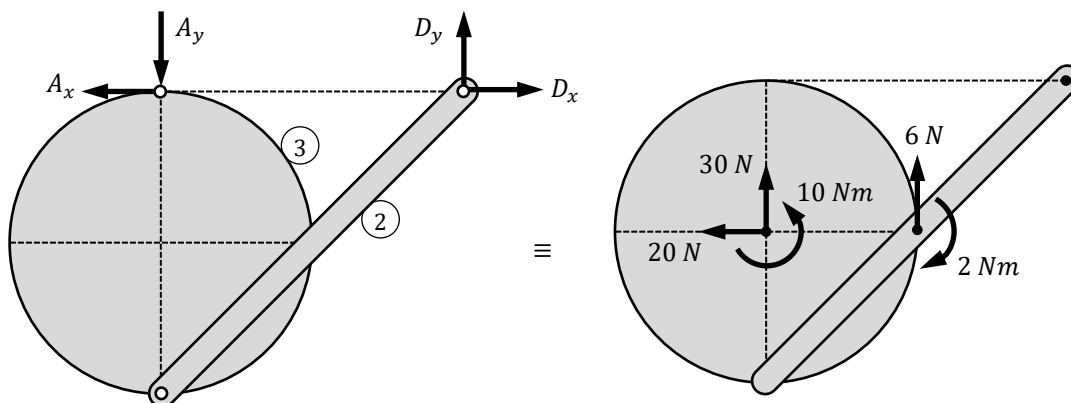
$$M_A \boxed{3} \rightarrow -B_x \cdot 2 = 10 - 20 \cdot 1 \rightarrow B_x = 5 \text{ N}$$

$$M_D \boxed{2} \rightarrow B_x \cdot 2 - B_y \cdot 2 = -2 - 6 \cdot 1 \rightarrow B_y = 9 \text{ N}$$

$$F_y \boxed{3} \rightarrow -A_y - B_y = 30 \rightarrow A_y = -39 \text{ N}$$

$$M_C \boxed{1} \rightarrow T + A_y \cdot 1 = 0 \rightarrow T = 39 \text{ Nm}$$

Se podría reducir en uno el número de ecuaciones necesarias, aplicando misma la estrategia de descomposición de la reacción en B explicada en el apartado anterior. Pero en este caso el proceso se puede optimizar aún más considerando el subconjunto formado por los elementos 2 y 3. Al no desenlazar la unión B dichas reacciones no se manifiestan. El sistema de fuerzas de inercia simplemente contiene las de ambos sólidos.



$$M_D \boxed{2+3} \rightarrow A_y \cdot 2 = (10 - 20 \cdot 1 - 30 \cdot 2) + (-2 - 6 \cdot 1) = -70 - 8 \rightarrow A_y = -39 \text{ N}$$

$$M_C \boxed{1} \rightarrow T + A_y \cdot 1 = 0 \rightarrow T = 39 \text{ Nm}$$

El elemento 1 se ha considerando exactamente igual que en el enfoque original.

e) Los elementos 1 y 2 trabajan axialmente (biarticulados, sin cargas y de masa despreciable).

Como se trata de un problema de dinámica directa, hay que plantear toda la resolución de aceleraciones en función de una única incógnita dominante. Como se parte del reposo, las tres velocidades angulares son nulas, no hay un dato específico de velocidad, por lo que no hay un criterio preferente a la hora de seleccionar la aceleración dominante.

En este caso, puesto que tanto el 1 como el 2 trabajan axialmente, el único sólido para establecer ecuaciones de equilibrio es el 3. Por tanto, se decide elegir como parámetro dominante de aceleración α_3 . Además, éste es precisamente el único valor que se pide calcular.

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha}_1 \wedge \overline{CA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha}_2 \wedge \overline{DB} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\alpha_2 \\ -2\alpha_2 \end{Bmatrix}$$

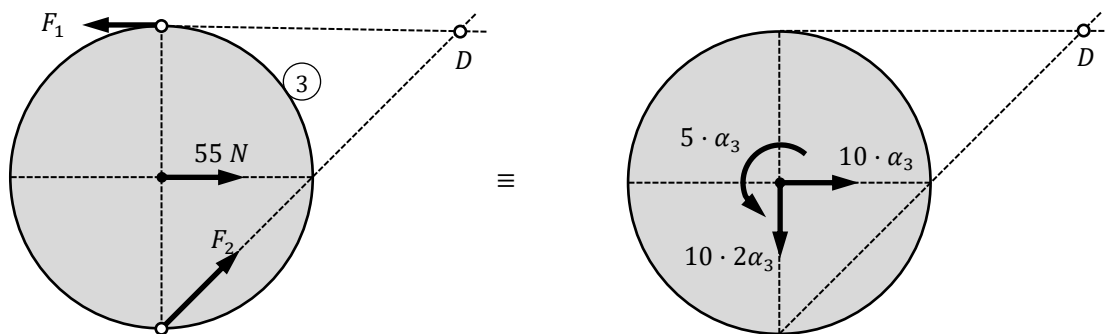
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \overline{AB} = \vec{a}_A + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\alpha_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\alpha_3 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}$$

$$x \rightarrow 2\alpha_2 = 2\alpha_3 \rightarrow \alpha_2 = \alpha_3$$

$$y \rightarrow -2\alpha_2 = \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3$$

Ahora, puesto que el único elemento de masa no despreciable es el 3:

$$\vec{a}_{G_3} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \overline{AG_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2\alpha_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ -2\alpha_3 \end{Bmatrix}$$



Como el problema tiene tres incógnitas, la aceleración dominante y dos fuerzas de enlace no paralelas, y en dinámica directa siempre se debe intentar resolver en primer lugar la incógnita de aceleración (además en este caso es por la que se pregunta), lo más directo es buscar la ecuación en la que no participen las fuerzas de enlace, es decir, el equilibrio de momentos respecto del punto donde se cortan ambas líneas de acción:

$$M_D \rightarrow 55 \cdot 1 = 5\alpha_3 + 10\alpha_3 \cdot 1 + 20\alpha_3 \cdot 2 = 55\alpha_3 \rightarrow \alpha_3 = 1 \text{ rad/s}^2$$

f) Ninguno de los elementos trabaja axialmente, 1 tiene aplicado un par y 2 tiene cargas inerciales.

La resolución de velocidades planteada al inicio es aprovechable. Además, como se han resuelto las velocidades angulares para el dato real de ω_1 , lo más práctico para aprovechar ese planteamiento en aceleraciones es considerar que el dato ficticio de aceleración sea α_1 .

Recuérdese que para $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$, ya se había obtenido que $\omega_2 = -1 \text{ rad/s}$ y $\omega_3 = -1 \text{ rad/s}$.

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{CA} - \omega_1^2 \cdot \vec{CA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{DB} - \omega_2^2 \cdot \vec{DB} = \begin{Bmatrix} 2\alpha_2 \\ -2\alpha_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \vec{AB} - \omega_3^2 \cdot \vec{AB} = \begin{Bmatrix} -4 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2\alpha_3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$y \rightarrow -2\alpha_2 + 2 = \alpha_1 + 2 \rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1/2$$

$$x \rightarrow 2\alpha_2 + 2 = 2\alpha_3 - 4 \rightarrow \alpha_3 = \alpha_2 + 3 = -\alpha_1/2 + 3$$

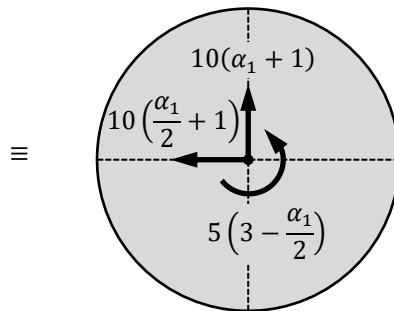
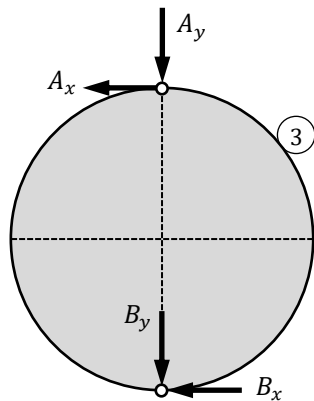
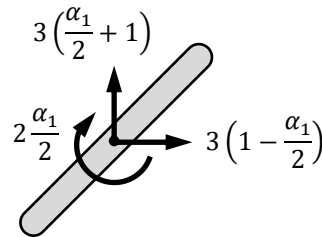
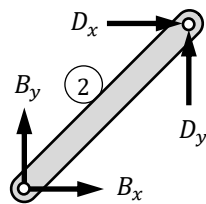
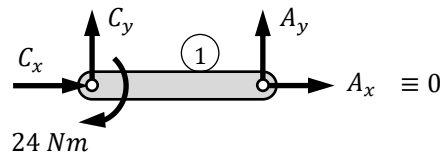
Para los dos elementos con masa, poniéndolo todo en función de α_1 :

$$\vec{a}_{G_2} = \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{DG}_2 - \omega_2^2 \cdot \vec{DG}_2 = \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_1/2 + 1 \\ \alpha_1/2 + 1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_{G_3} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \vec{AG}_3 - \omega_3^2 \cdot \vec{AG}_3 = \begin{Bmatrix} -4 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_1/2 - 1 \\ \alpha_1 + 1 \end{Bmatrix}$$

El elemento 1, aunque por considerarse de masa despreciable tenga un sistema de fuerzas de inercia nulo, no trabaja axialmente puesto que tiene aplicado un momento y por tanto se dispone de sus tres ecuaciones de equilibrio dinámico (que en su situación coinciden con las de la estática).

Las componentes inerciales que tengan todos los términos negativos, como α_2 o $a_{G_{3x}}$, se pueden dibujar en sentido negativo prescindiendo del signo. Sin embargo, aquellas que tengan una combinación de términos positivos y negativos, como α_3 o $a_{G_{2x}}$, lo más razonable es representarlas en el sentido positivo sin cambiar ninguno de los signos de la expresión obtenida.



De las nueve incógnitas que existen en el problema, la que conviene resolver en primer lugar es α_1 . Una secuencia de ecuaciones relativamente ordenada sería la siguiente:

$$M_C \boxed{1} \rightarrow A_y \cdot 1 - 24 = 0 \rightarrow A_y = 24 \text{ N}$$

$$F_y \boxed{3} \rightarrow -A_y - B_y = 10(\alpha_1 + 1) \rightarrow B_y = -24 - 10(\alpha_1 + 1) = -34 - 10\alpha_1$$

$$M_A \boxed{3} \rightarrow -B_x \cdot 2 = 5 \left(3 - \frac{\alpha_1}{2} \right) - 10 \left(\frac{\alpha_1}{2} + 1 \right) \cdot 1 = 15 - 10 - \frac{\alpha_1}{2} (5 + 10) = 5 - 7.5\alpha_1$$

$$M_D \boxed{2} \rightarrow B_x \cdot 2 - B_y \cdot 2 = -\alpha_1 + 3 \left(1 - \frac{\alpha_1}{2} \right) \cdot 1 - 3 \left(\frac{\alpha_1}{2} + 1 \right) \cdot 1 = -\alpha_1 \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) = -4\alpha_1$$

$$-(5 - 7.5\alpha_1) - 2(-34 - 10\alpha_1) = -4\alpha_1$$

$$\alpha_1(7.5 + 20 + 4) = 5 - 68$$

$$\alpha_1 = -2 \text{ rad/s}^2$$

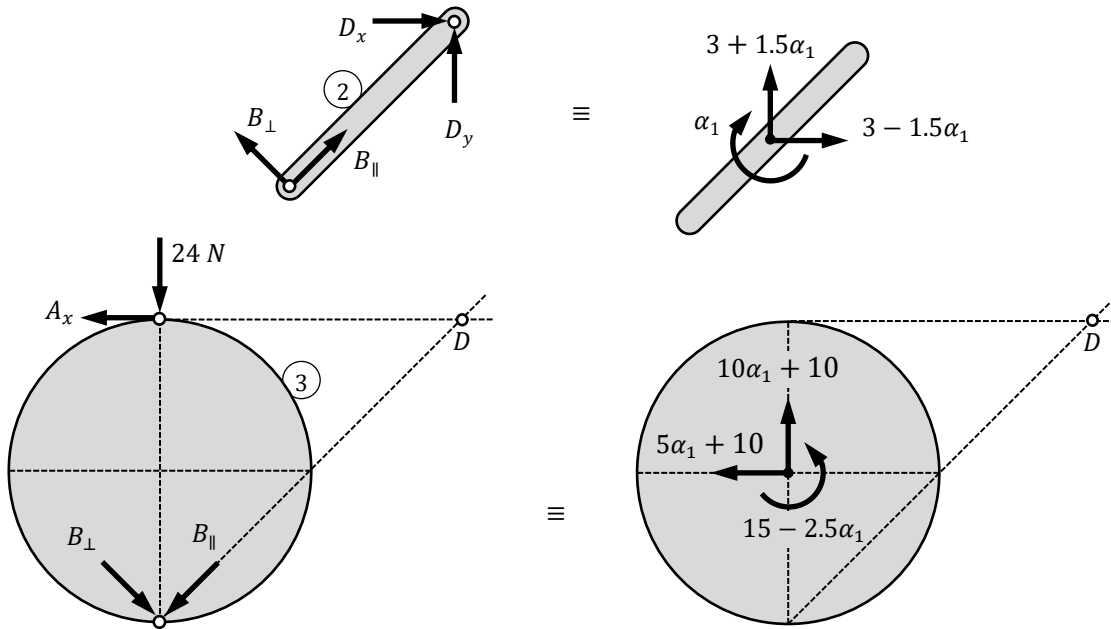
A partir de este resultado ya resulta inmediato:

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{2} = 1 \text{ rad/s}^2$$

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{2} + 3 = 4 \text{ rad/s}^2$$

De hecho, llegados a este punto, todos los sistemas de fuerzas de inercia quedan totalmente determinados, resultando más sencillo el diseño de las ecuaciones de equilibrio que proporcionarían los valores de las reacciones en los enlaces en caso de que fuera necesario calcularlos.

El proceso podría haberse simplificado un poco tomando el resultado de la primera ecuación del proceso anterior, pero luego planteando:

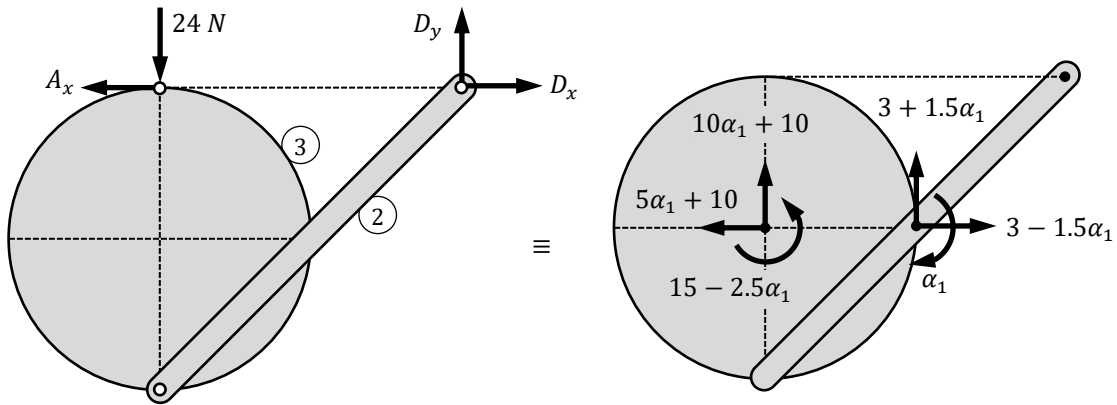


$$M_D \boxed{2} \rightarrow -B_{\perp} \cdot 2\sqrt{2} = -\alpha_1 + (3 - 1.5\alpha_1) \cdot 1 - (3 + 1.5\alpha_1) \cdot 1 = \alpha_1(1 + 1.5 + 1.5) = -4\alpha_1$$

$$M_D \boxed{3} \rightarrow 24 \cdot 2 + B_{\perp} \cdot 2\sqrt{2} = (15 - 2.5\alpha_1) - (5\alpha_1 + 10) \cdot 1 - (10\alpha_1 + 10) \cdot 2 = -15 - 27.5\alpha_1$$

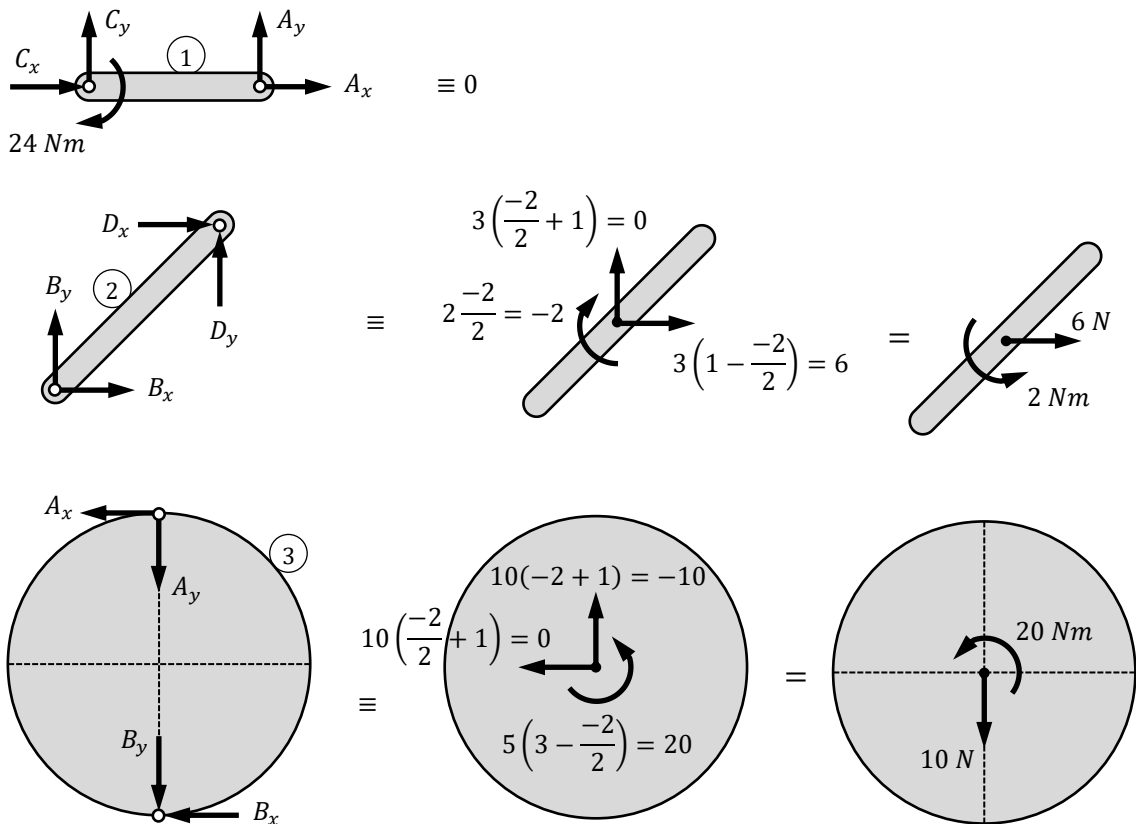
$$48 + 4\alpha_1 = -15 - 27.5\alpha_1 \rightarrow 31.5\alpha_1 = -63 \rightarrow \alpha_1 = -2 \text{ rad/s}^2$$

Pero el grado máximo de simplificación, reduciéndose el número de ecuaciones necesarias para resolver a tan sólo una se lograría considerando:



$$M_D [2+3] \rightarrow 24 \cdot 2 = (-4\alpha_1) + (-15 - 27.5\alpha_1) \rightarrow 48 + 15 = -\alpha_1(4 + 27.5) \rightarrow \alpha_1 = -2 \text{ rad/s}^2$$

Por último, de forma similar a como se hacía en estática, se puede proceder a comprobar la corrección de los resultados, sustituyendo los valores obtenidos y verificando la total equivalencia entre los sistemas de fuerzas reales y de inercia en cualquier diagrama de sólido libre. Para ello, evidentemente, en primer lugar es necesario resolver los valores de las reacciones en los enlaces. Si se trata de un problema de dinámica directa, para que la resolución de las reacciones se pueda plantear con la mayor sencillez posible, en cuanto se ha resuelto la aceleración dominante conviene rehacer los sistemas de fuerzas de inercia, actualizando valores y sentidos.



$$M_C \text{ [1]} \rightarrow A_y \cdot 1 - 24 = 0 \rightarrow A_y = 24 \text{ N}$$

$$F_y \text{ [1]} \rightarrow C_y + A_y = 0 \rightarrow C_y = -24 \text{ N}$$

$$M_A \text{ [3]} \rightarrow -B_x \cdot 2 = 20 \rightarrow B_x = -10 \text{ N}$$

$$F_x \text{ [3]} \rightarrow A_x + B_x = 0 \rightarrow A_x = 10 \text{ N}$$

$$F_y \text{ [3]} \rightarrow A_y + B_y = 10 \rightarrow B_y = -14 \text{ N}$$

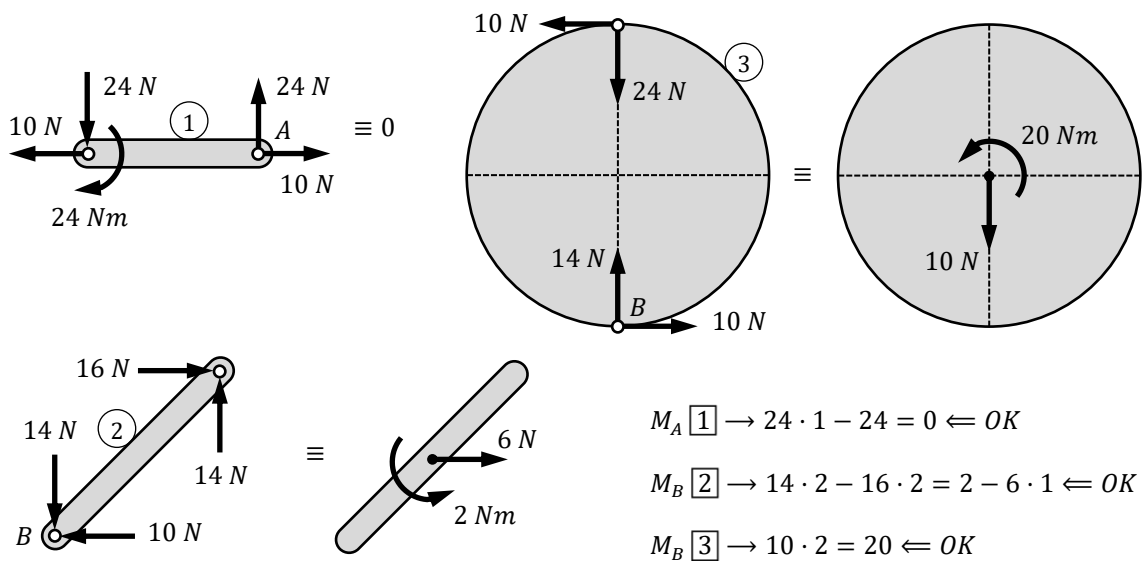
$$F_x \text{ [1]} \rightarrow C_x + A_x = 0 \rightarrow C_x = -10 \text{ N}$$

$$F_y \text{ [2]} \rightarrow B_y + D_y = 0 \rightarrow D_y = 14 \text{ N}$$

$$F_x \text{ [2]} \rightarrow B_x + D_x = 6 \rightarrow D_x = 16 \text{ N}$$

Como ha quedado patente, la aplicación de la estrategia descrita permite una resolución de las reacciones muy sencilla. Ahora han de representarse los diagramas de sólido libre resueltos.

Para los elementos individuales:

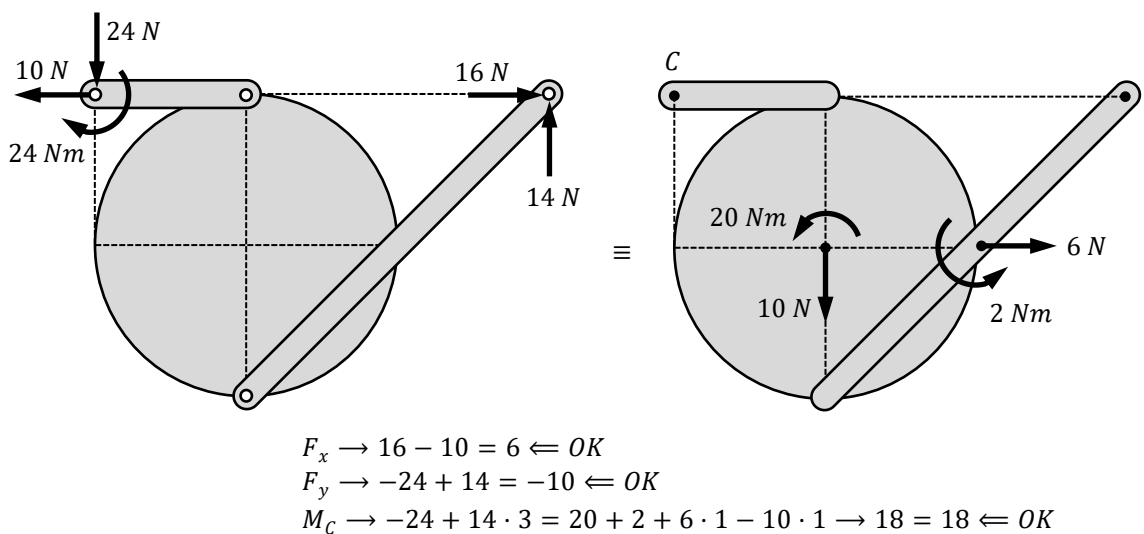


$$M_B \text{ [2]} \rightarrow 14 \cdot 2 - 16 \cdot 2 = 2 - 6 \cdot 1 \Leftarrow OK$$

$$M_B \text{ [3]} \rightarrow 10 \cdot 2 = 20 \Leftarrow OK$$

La equivalencia de los sumatorios de fuerzas en dirección horizontal y vertical entre los sistemas reales e inerciales no se ha escrito por resultar evidente a simple vista.

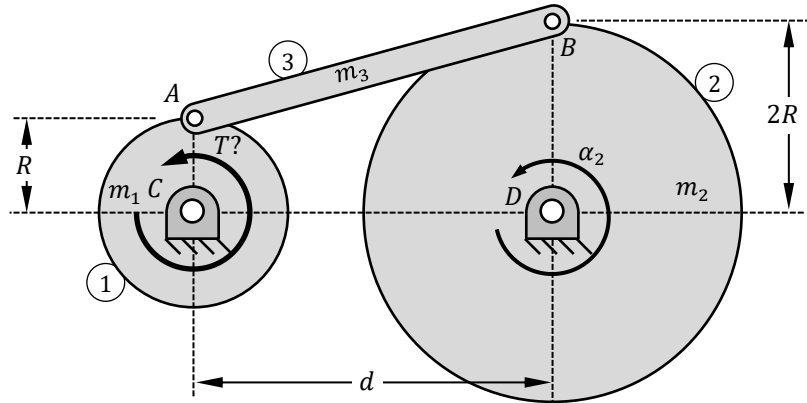
Y de igual modo se puede realizar la verificación del equilibrio dinámico para un conjunto de sólidos enlazados, por ejemplo, el conjunto separado del elemento fijo:



El proceso de comprobación de resultados se ha ilustrado en este apartado final, pero es igualmente aplicable en cualquiera de los anteriores, o en cualquier otro problema de dinámica.

• Ejemplo 11.5

El mecanismo se encuentra en reposo, en la posición indicada. El eje de giro del disco 1 se acciona mediante un motor que aplica un par T . Calcular el valor de dicho momento para conseguir que el disco 2 comience su movimiento con una aceleración angular α_2 dada.



Como en el instante inicial el mecanismo parte del reposo, las velocidades angulares de todos los elementos son nulas.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{CA} - \omega_1^2 \cdot \vec{CA} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} + \vec{0} = \begin{Bmatrix} -\alpha_1 R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_D + \vec{\alpha}_2 \wedge \vec{DB} - \omega_2^2 \cdot \vec{DB} = \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 2R & 0 \end{vmatrix} + \vec{0} = \begin{Bmatrix} -2\alpha_2 R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

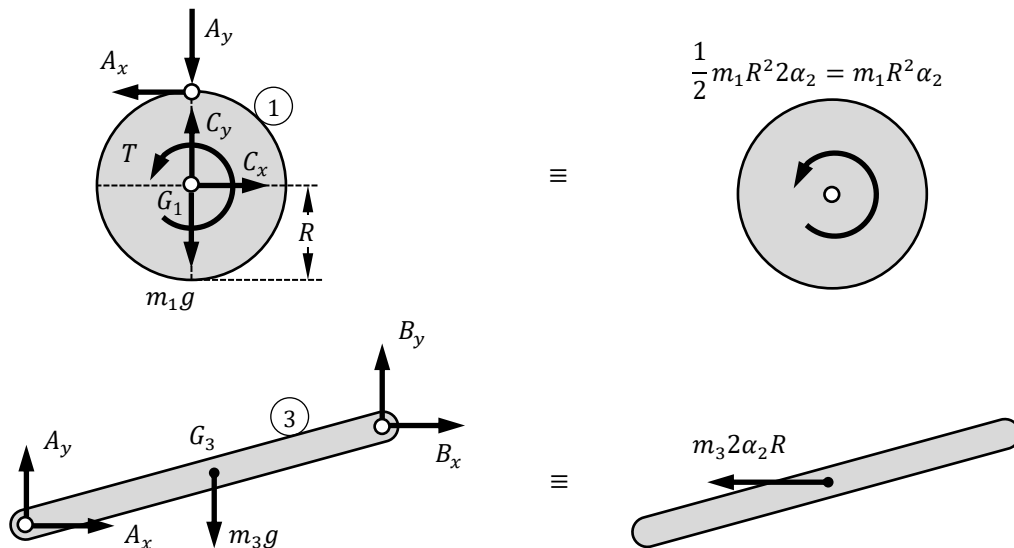
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \vec{AB} - \omega_3^2 \cdot \vec{AB} = \vec{a}_A + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ d & R & 0 \end{vmatrix} + \vec{0} = \vec{a}_A + \begin{Bmatrix} -\alpha_3 R \\ \alpha_3 d \end{Bmatrix}$$

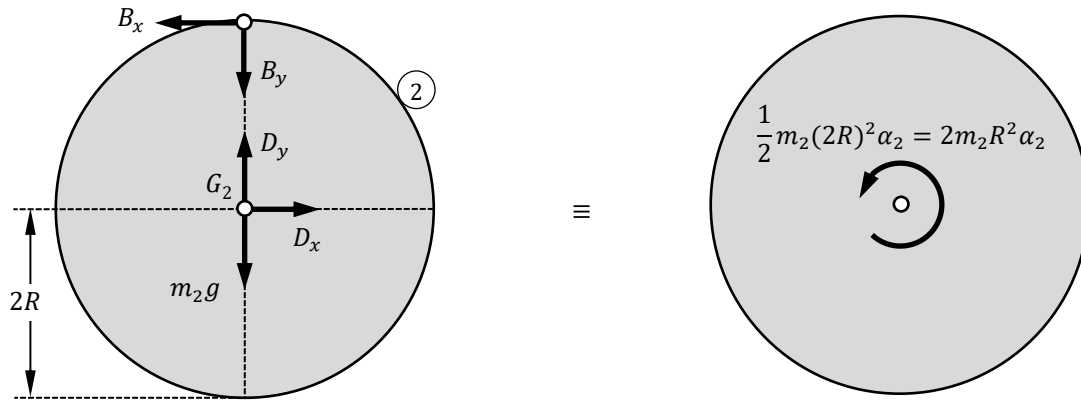
La componente y de esta ecuación vectorial establece: $0 = 0 + \alpha_3 d \rightarrow \alpha_3 = 0$

La componente x: $-2\alpha_2 R = -\alpha_1 R - \alpha_3 R \rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_2$

G_1 es C y G_2 es D , ambos centros de gravedad coinciden con las articulaciones fijas, por lo tanto:

$$\vec{a}_{G_1} = \vec{a}_{G_2} = \vec{0}. \text{ Además: } \vec{a}_{G_3} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \vec{AG}_3 - \omega_3^2 \cdot \vec{AG}_3 = \vec{a}_A + \vec{0} + \vec{0} = \begin{Bmatrix} -2\alpha_2 R \\ 0 \end{Bmatrix}$$





En el disco 2: $M_D \rightarrow B_x \cdot 2R = 2m_2R^2\alpha_2 \rightarrow B_x = m_2\alpha_2R$

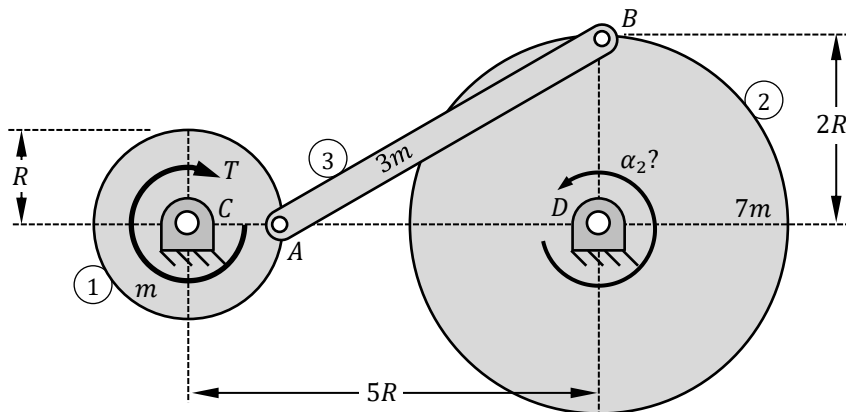
En la barra 3: $F_x \rightarrow A_x + B_x = -m_32\alpha_2R \rightarrow A_x = -m_32\alpha_2R - m_2\alpha_2R$

En el disco 1: $M_C \rightarrow T + A_x \cdot R = m_1R^2\alpha_2 \rightarrow T = m_1R^2\alpha_2 - R(-m_32\alpha_2R - m_2\alpha_2R)$

$$T = R^2\alpha_2(m_1 + m_2 + 2m_3)$$

• Ejemplo 11.6

El mecanismo de la figura se encuentra en reposo, en la posición indicada. El eje de giro del disco 1 se acciona mediante un motor que aplica un par $T = 9mgR$. Calcular el valor de la aceleración angular con la que comienza a girar el disco 2.



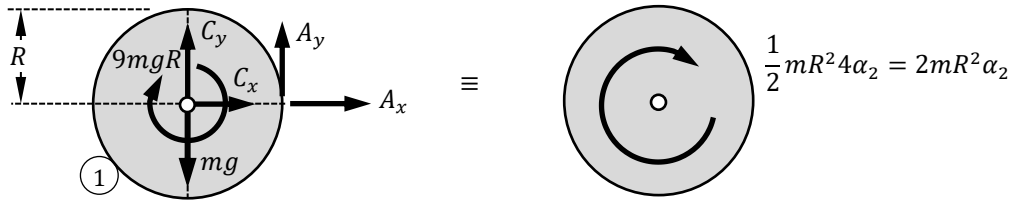
$$\vec{a}_B = \begin{Bmatrix} -\alpha_2 \cdot 2R \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_1 R \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \overline{AB} = \vec{a}_A + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 4R & 2R & 0 \end{vmatrix} = \vec{a}_A + \begin{Bmatrix} -\alpha_3 2R \\ \alpha_3 4R \end{Bmatrix}$$

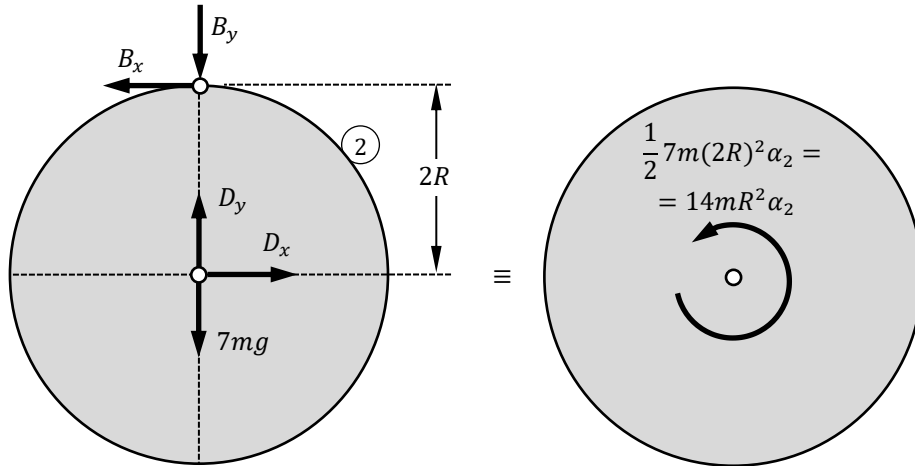
$$-\alpha_2 \cdot 2R = 0 - \alpha_3 2R \rightarrow \alpha_3 = \alpha_2$$

$$0 = \alpha_1 R + \alpha_3 4R \rightarrow \alpha_1 = -4\alpha_2$$

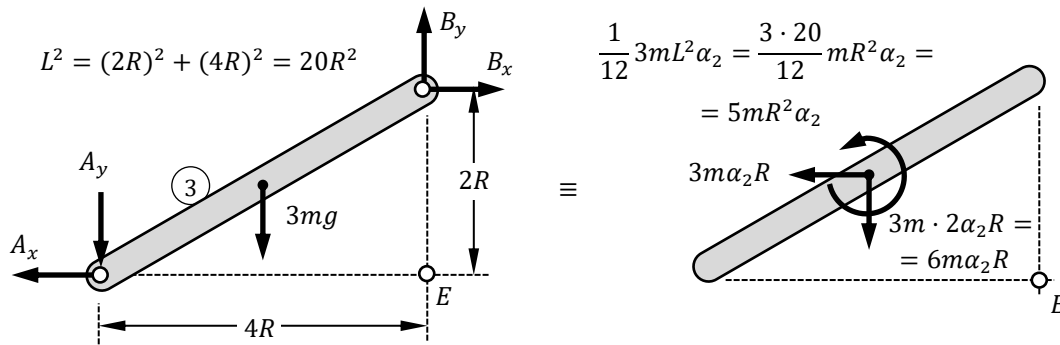
$$\vec{a}_{G_3} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_3 \wedge \overline{AG_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4\alpha_2 R \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 \\ 2R & R & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4\alpha_2 R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\alpha_2 R \\ \alpha_2 2R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha_2 R \\ -2\alpha_2 R \end{Bmatrix}$$



$$M_C \rightarrow A_y \cdot R - 9mgR = -2mR^2\alpha_2 \rightarrow A_y = 9mg - 2m\alpha_2 R$$



$$M_D \rightarrow B_x \cdot 2R = 14mR^2\alpha_2 \rightarrow B_x = 7m\alpha_2 R$$



$$M_E \rightarrow 3mg \cdot 2R + A_y \cdot 4R - B_x \cdot 2R = 5mR^2\alpha_2 + 6m\alpha_2 R \cdot 2R + 3m\alpha_2 R \cdot R$$

$$6mg + 4A_y - 2B_x = mR\alpha_2(5 + 12 + 3) \rightarrow 6mg + 4(9mg - 2m\alpha_2 R) - 2 \cdot 7m\alpha_2 R = 20mR\alpha_2$$

$$3g + 2(9g - 2\alpha_2 R) - 7\alpha_2 R = 10\alpha_2 R \rightarrow g(3 + 18) = \alpha_2 R(10 + 7 + 4)$$

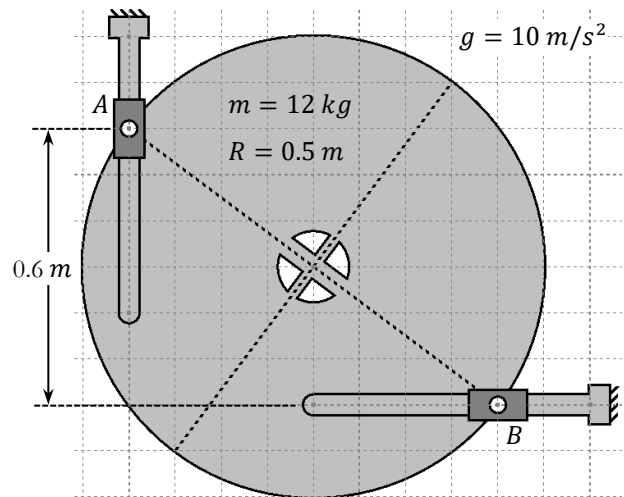
$$\alpha_2 = \frac{g}{R}$$

Problemas de Examen

▪ Problema 11.1.1 *mayo 2017* 50 minutos

En el instante del movimiento representado la deslizadera *A*, asciende con una velocidad de 4 m/s , frenando con una aceleración de 5 m/s^2 . Sabiendo que el rozamiento en ambas deslizaderas es despreciable, calcular:

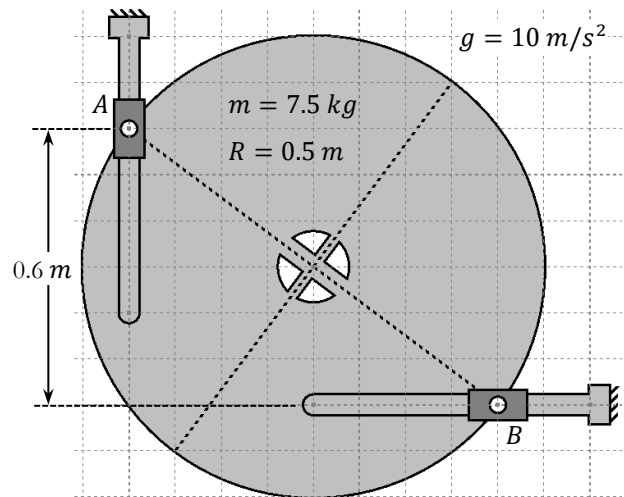
- a) $\vec{v}_B, \vec{a}_B, \omega_{\text{Disco}}$ y α_{Disco} . [1.2 puntos]
- b) Las reacciones en las deslizaderas y el valor de la fuerza horizontal que es necesario aplicar en *B* para conseguir ese movimiento. [1.3 puntos]



▪ Problema 11.1.2 *mayo 2017* 40 minutos

El disco se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Sabiendo que el rozamiento en ambas deslizaderas es despreciable, calcular:

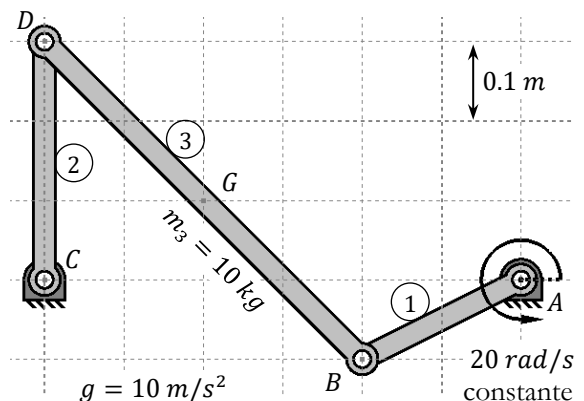
- a) Las componentes de la aceleración del centro de gravedad del disco en función de la aceleración angular del mismo. [1 punto]
- b) Las reacciones en las deslizaderas, así como el valor de la aceleración angular del disco. [1.5 puntos]



▪ Problema 11.2 *junio 2017* 50 minutos

En el instante del movimiento representado la barra 1 gira con la velocidad angular indicada, accionada por un motor en *A*. Sabiendo que las masas de los elementos 1 y 2 se pueden considerar despreciables, calcular:

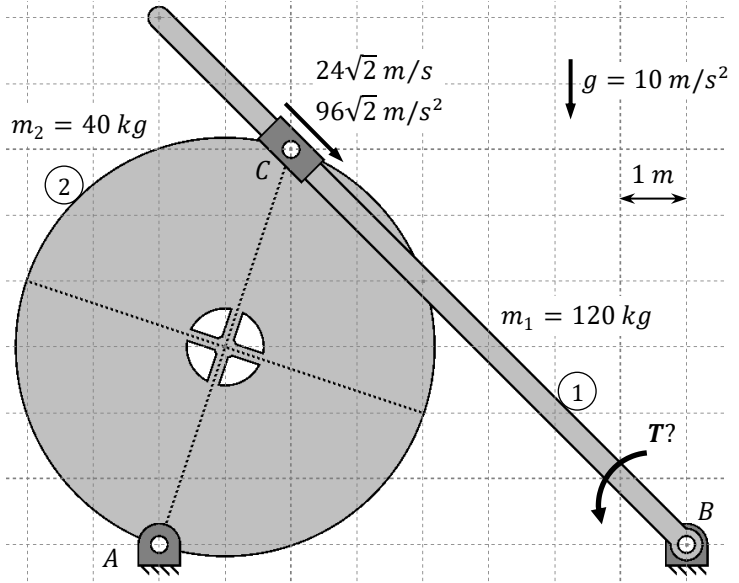
- a) \vec{v}_G y ω_3 . [0.6 puntos]
- b) \vec{a}_G y α_3 . [0.6 puntos]
- c) Las reacciones en las articulaciones fijas y el valor del par motor que es necesario aplicar al elemento 1 para conseguir ese movimiento. [1.3 puntos]



▪ **Problema 11.3.1** *may 2021* 45 min

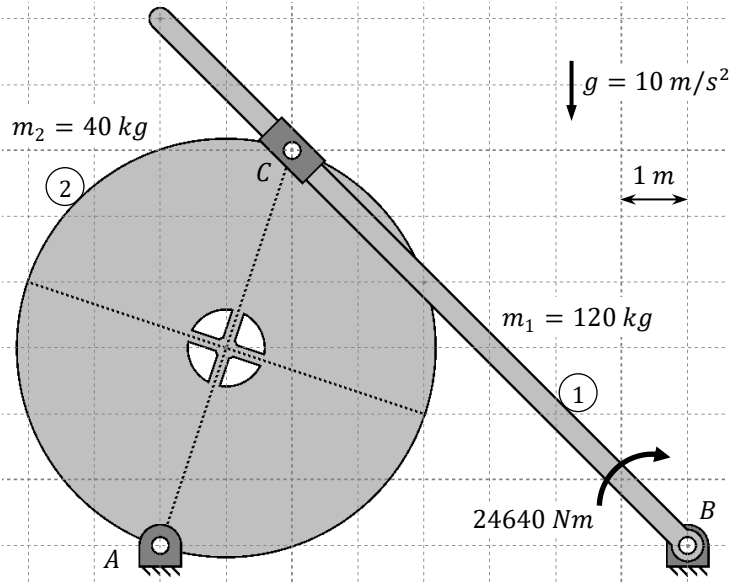
En la posición mostrada la deslizadera C se mueve respecto de la barra 1 con la velocidad y aceleración indicadas. Calcular:

- a) La aceleración angular del disco.
[0.8 puntos]
- b) El valor del momento T que es necesario aplicar para obtener dicho movimiento.
[0.8 puntos]



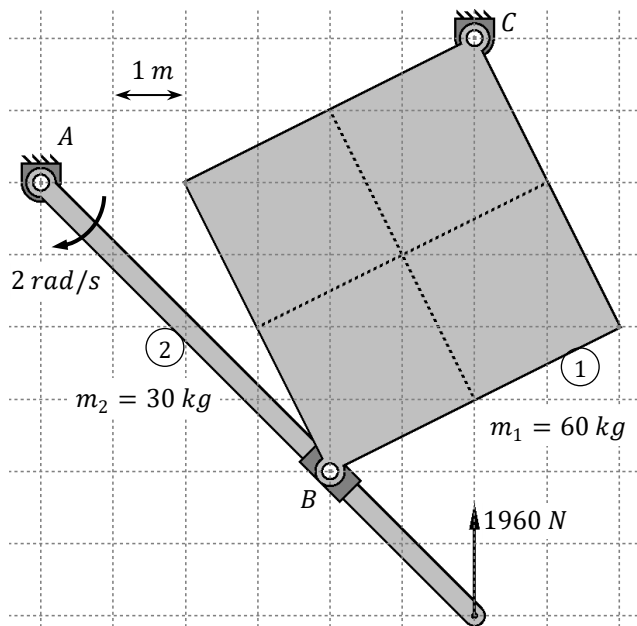
▪ **Problema 11.3.2** *may 2021* 40 min

Estando el sistema en reposo se aplica el momento indicado. Calcular en el instante inicial del movimiento las aceleraciones angulares de la barra y del disco. [1.6 puntos]



▪ **Problema 11.4** *junio 2021* 50 min

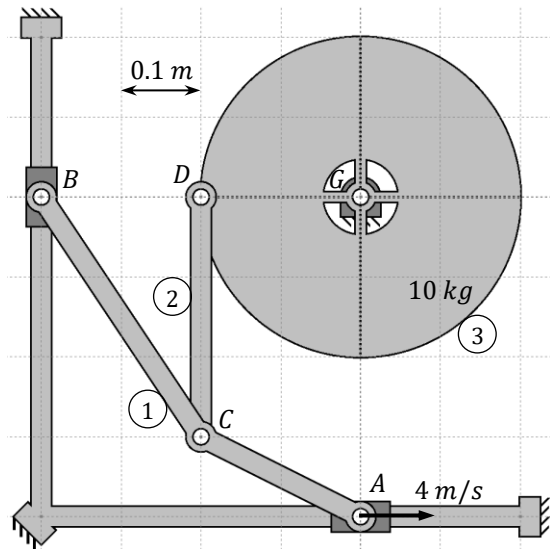
El sistema de la figura se mueve en un plano horizontal, es decir, la gravedad no afecta al movimiento. La única fuerza aplicada es la indicada. En el instante del movimiento representado la velocidad angular de la barra 2 es la indicada. Calcular en dicha posición la aceleración angular de la barra 2. [1.6 puntos]



▪ **Problema 11.5.1 mayo 2022 45 minutos**

Sabiendo que la deslizadera A se mueve hacia la derecha a velocidad constante 4 m/s , que el mecanismo se acciona aplicando una fuerza horizontal en A , que los elementos 1 y 2 se pueden considerar de masa despreciable y que en las deslizaderas no hay rozamiento, calcular:

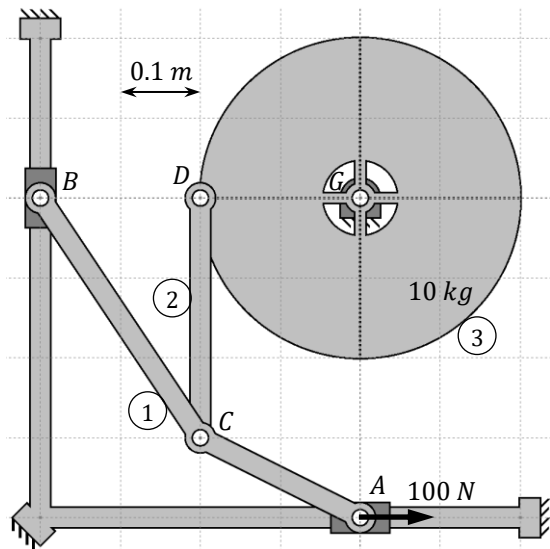
- La aceleración angular de los 3 elementos. [1 punto]
- El valor de la fuerza motora necesaria para que el movimiento sea el indicado. [1 punto]



▪ **Problema 11.5.2 mayo 2022 40 minutos**

Estando el mecanismo en reposo se aplica en la deslizadera A una fuerza hacia la derecha de 100 N . Sabiendo que los elementos 1 y 2 se pueden considerar de masa despreciable y que en las deslizaderas no hay rozamiento:

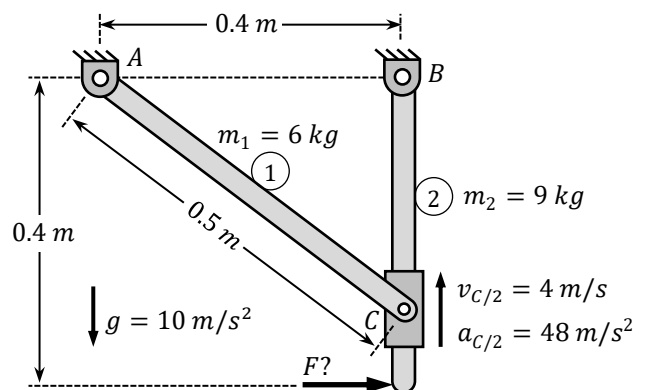
- Calcular la aceleración angular de los 3 elementos. [1.5 puntos]
- Representar los diagramas de sólido libre resueltos de los elementos 1 y 2. [0.5 puntos]



▪ **Problema 11.6 junio 2022 45 minutos**

Se sabe que la deslizadera C avanza por la barra 2 con los valores de velocidad y aceleración indicados y que el mecanismo se acciona aplicando la fuerza F representada. Calcular:

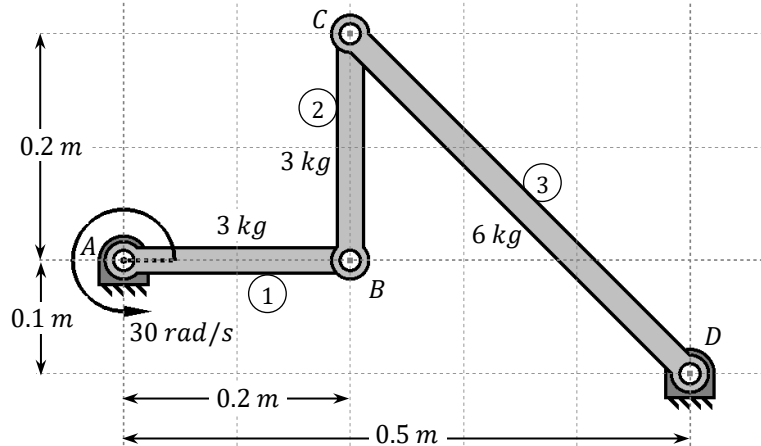
- Las aceleraciones angulares de ambas barras. [0.8 puntos]
- El valor de fuerza requerido para que el movimiento sea el indicado. [0.8 puntos]



▪ **Problema 11.7** junio 2015 45 minutos

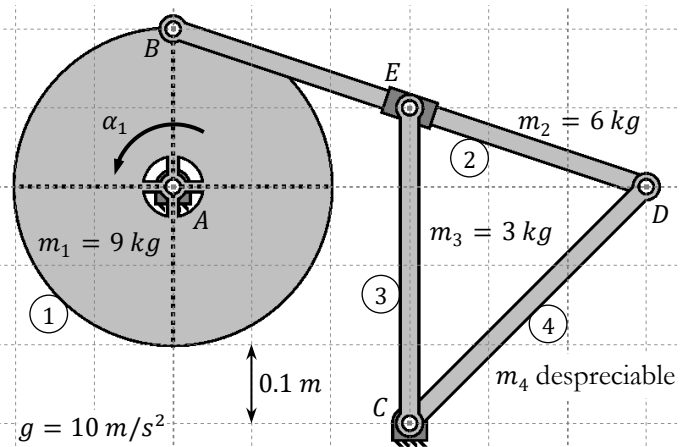
El mecanismo de la figura se acciona mediante un motor en *A* que hace girar el elemento 1 con velocidad angular constante. En el instante del movimiento representado, calcular:

- a) La velocidad angular de los elementos 2 y 3, y la velocidad del punto *C*. [0.6 puntos]
- b) La aceleración angular de los elementos 2 y 3, y la aceleración del punto *C*. [0.6 puntos]
- c) Las fuerzas en todas las articulaciones y el par motor. [1.3 puntos]



▪ **Problema 11.8** may 2018 60 min

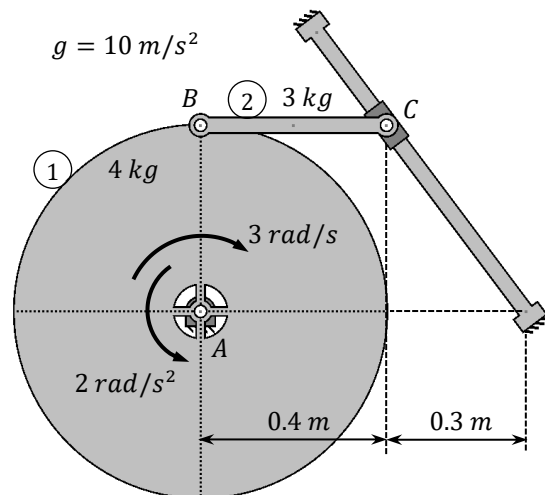
El mecanismo de la figura se encuentra inicialmente en reposo y se acciona mediante un motor en *A*. Calcular el valor del par que debe aplicar dicho motor para conseguir que el movimiento arranque con $\alpha_1 = 40 \text{ rad/s}^2$. [2.5 puntos]



▪ **Problema 11.9** junio 2018 45 minutos

En la posición del mecanismo mostrada en la figura, el movimiento del disco tiene los valores especificados. Sabiendo que dicho movimiento es generado por un par motor en *A*:

- a) Calcular la aceleración de la deslizadera *C* y la aceleración angular de la barra 2. [1 punto]
- b) Calcular el par motor en el disco y representar las fuerzas exteriores resultantes que actúan sobre la barra 2. [1 punto]



12. PROPIEDADES DE INERCIA DE ÁREA

12.1 DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Un área plana es una entidad matemática (superficie completamente contenida en un plano) que tiene una serie de propiedades geométricas. Así por ejemplo, puede determinarse el área total A de la misma, o definiendo un sistema de referencia en su plano, pueden determinarse las coordenadas de su centroide G .

Aquí se presentan las denominadas propiedades de inercia de un área plana, las cuales están directamente relacionadas con las ya conocidas propiedades de inercia de un sólido.

Dado un eje e , se define momento de inercia del área respecto del eje como: $I_e = \int r_e^2 \cdot dA$

También se define el momento estático del área respecto del eje como: $Q_e = \int r_e \cdot dA$

Dado un punto O , el momento de inercia del área respecto del punto es: $I_O = \int r_O^2 \cdot dA$

Dados dos ejes perpendiculares e_1 y e_2 , se define el producto de inercia respecto de la pareja:

$I_{e_1 e_2} = \int r_{e_1} \cdot r_{e_2} \cdot dA$ Donde las distancias a los ejes tienen el signo que corresponda al cuadrante donde queda el área.

Todas las referencias geométricas citadas se encuentran contenidas en el mismo plano del área.

A continuación, se enumeran las principales propiedades de momentos y productos de inercia de área:

- Los momentos de inercia, por definición, son magnitudes estrictamente positivas, mientras que el producto de inercia puede ser positivo, negativo, o nulo.
- A diferencia de las magnitudes de inercia de sólidos, cuyas unidades eran $[masa] \cdot [longitud]^2$, las propiedades de inercia de áreas planas tienen unidades de $[longitud]^4$.
- Dados dos ejes perpendiculares e_1 y e_2 , que se cortan en un punto O : $I_O = I_{e_1} + I_{e_2}$
- Dado un eje e , y uno paralelo a éste que pase por el centroide del área, e_G , siendo la distancia entre ellos D_e :

$$I_e = I_{e_G} + A \cdot D_e^2$$

- Dada una pareja de ejes perpendiculares e_1 y e_2 y otra pareja de ejes paralelos a éstos que pasen por el centroide del área e_{1G} y e_{2G} , siendo las distancias (con signo) entre las dos parejas de ejes paralelos D_{e_1} y D_{e_2} :

$$I_{e_1 e_2} = I_{e_{1G} e_{2G}} + A \cdot D_{e_1} \cdot D_{e_2}$$

- Si uno cualquiera de los dos ejes respecto de los que se define el producto de inercia es de simetría del área, éste es nulo.
- Si un eje pasa por el centroide del área, el momento estático del área respecto del eje es nulo.

Obviamente, en un sistema de referencia cartesiano:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int y^2 \cdot dA & I_y &= \int x^2 \cdot dA & I_{xy} &= \int x \cdot y \cdot dA \\
 I_{x_G} &= I_x - A \cdot G_y^2 & I_{y_G} &= I_y - A \cdot G_x^2 & I_{x_G y_G} &= I_{xy} - A \cdot G_x \cdot G_y \\
 I_O &= I_x + I_y \\
 Q_x &= \int y \cdot dA & Q_y &= \int x \cdot dA & Q_{x_G} &= Q_{y_G} = 0
 \end{aligned}$$

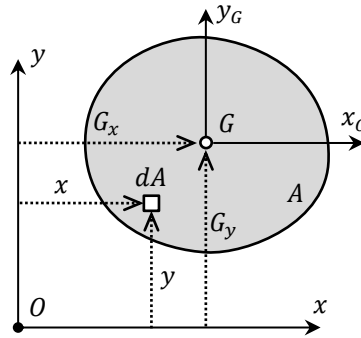


Fig. 12. 1 Área plana

12.1.1 Relación con las propiedades de inercia de un sólido

Existe una relación directa con los momentos de inercia de sólido, para sólidos de masa m con forma de placa plana de área A . Si ρ es la densidad del material y e el espesor de la placa, ambos constantes:

$$\begin{aligned}
 V &= e \cdot A \rightarrow dV = e \cdot dA \\
 m &= \rho \cdot V = \rho \cdot e \cdot A \rightarrow dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot e \cdot dA \\
 \rho \cdot e &= m/A \\
 I_{sólido} &= \int r^2 \cdot dm & I_{área} &= \int r^2 \cdot dA \\
 I_{sólido} &= \int r^2 \cdot \rho \cdot e \cdot dA = \rho \cdot e \cdot \int r^2 \cdot dA = \frac{m}{A} \cdot I_{área}
 \end{aligned}$$

La misma deducción es válida para el producto de inercia: $C_{z_{sólido}} = I_{xy_{área}} \cdot m/A$

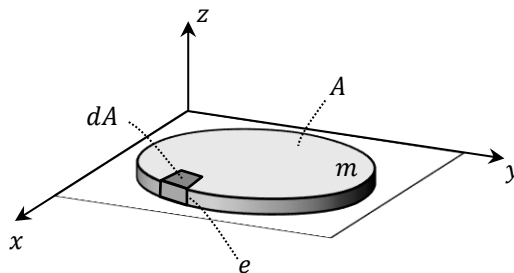


Fig. 12. 2 Sólido plano

12.2 ÁREAS ELEMENTALES

12.2.1 Rectángulo

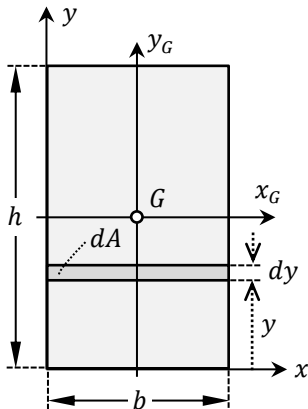


Fig. 12. 3 Rectángulo

$$A = b \cdot h \quad dA = b \cdot dy$$

- Momento de inercia respecto de uno de los lados.

$$I_x = \int y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \int_0^h y^2 \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

- Respecto de un eje paralelo a éste que pase por G :

$$I_{x_G} = I_x - b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

- Producto de inercia respecto de dos lados contiguos.

Como los ejes paralelos que pasan por G son de simetría:

$$I_{x_G y_G} = 0$$

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + (b \cdot h) \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b^2 \cdot h^2}{4}$$

12.2.2 Triángulo general

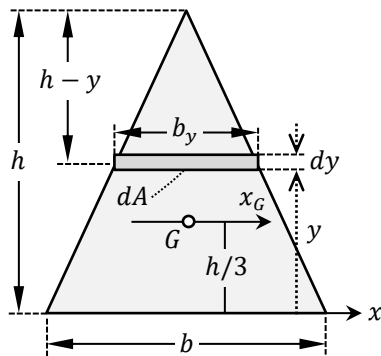


Fig. 12. 4 Triángulo

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad dA = b_y \cdot dy$$

Por proporcionalidad de triángulos:

$$\frac{b}{h} = \frac{b_y}{h-y} \rightarrow dA = \frac{b}{h}(h-y) \cdot dy$$

- Momento de inercia respecto de uno de los lados.

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h}(h-y) \cdot dy = \\ &= \frac{b}{h} \int_0^h (h \cdot y^2 - y^3) \cdot dy = \frac{b}{h} \left(h \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \\ &= b \cdot h^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{b \cdot h^3}{12} \end{aligned}$$

- Respecto de un eje paralelo a éste que pase por G :

$$\begin{aligned} I_{x_G} &= I_x - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{18} = \\ &= \frac{b \cdot h^3}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{b \cdot h^3}{36} \end{aligned}$$

12.2.3 Triángulo rectángulo

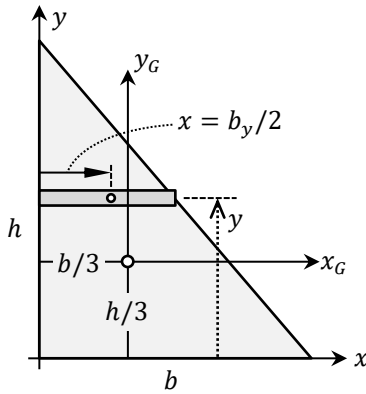


Fig. 12. 5 Triángulo rectángulo

- Producto de inercia respecto de los dos catetos.

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int x \cdot y \cdot dA = \int_0^h \frac{b_y}{2} \cdot y \cdot b_y \cdot dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^h \frac{b^2}{h^2} (h-y)^2 \cdot y \cdot dy = \\
 &= \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h^2 \cdot y + y^3 - 2h \cdot y^2) dy = \\
 &= \frac{b^2}{2h^2} \left(h^2 \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4} - 2h \frac{h^3}{3} \right) = \\
 &= \frac{b^2 \cdot h^2}{2} \cdot \frac{6 + 3 - 2 \cdot 4}{12} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}
 \end{aligned}$$

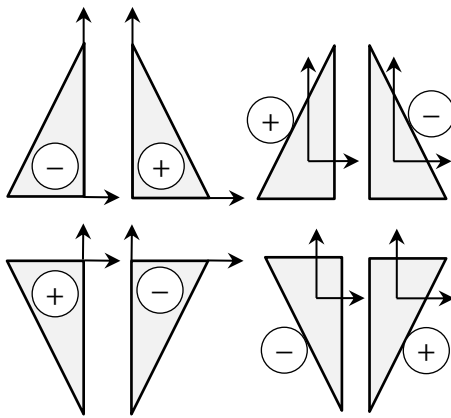


Fig. 12. 6 Ejes y signos

- Respecto de unos ejes paralelos que pasen por G:

$$\begin{aligned}
 I_{x_G y_G} &= I_{xy} - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} - \frac{b^2 \cdot h^2}{18} = \\
 &= \frac{b^2 \cdot h^2}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}
 \end{aligned}$$

En las expresiones obtenidas para productos de inercia siempre ha de tenerse en cuenta el signo correspondiente a la posición de la figura respecto de los ejes.

12.2.4 Círculo

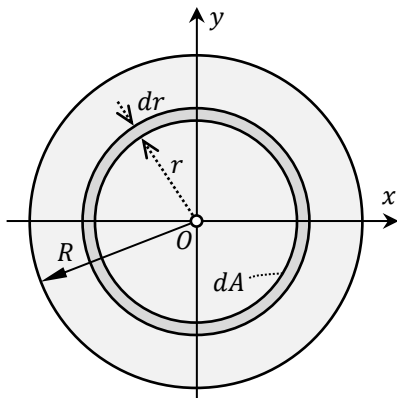


Fig. 12. 7 Círculo

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

- Momento de inercia respecto del centro.

$$\begin{aligned}
 I_O &= \int r_o^2 \cdot dA = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi \int_0^R r^3 \cdot dr = \\
 &= 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}
 \end{aligned}$$

- Momento de inercia respecto de un eje diametral.

$$I_O = I_x + I_y$$

y por simetría $I_x = I_y \rightarrow I_O = 2I_x$ por tanto

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

12.2.5 Semicírculo

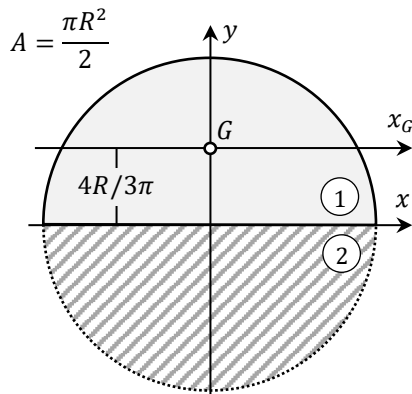


Fig. 12. 8 Semicírculo

El círculo completo es la suma de los dos semicírculos 1 y 2, por tanto $I_{\text{círculo}} = I_1 + I_2$. Además, por simetría $I_{x_1} = I_{x_2}$ e $I_{y_1} = I_{y_2}$.

- Momento de inercia respecto de la base.

$$I_{x_{\text{círculo}}} = \frac{\pi R^4}{4} = I_{x_1} + I_{x_2} = 2I_x \rightarrow I_x = \frac{\pi R^4}{8}$$

- Momento de inercia respecto de un eje paralelo a la base que pase por G.

$$I_{x_G} = I_x - \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{8R^4}{9\pi}$$

- Momento de inercia respecto del eje de simetría.

$$I_{y_{\text{círculo}}} = \frac{\pi R^4}{4} = I_{y_1} + I_{y_2} = 2I_y \rightarrow I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

- Producto de inercia.

Como el eje $y \equiv y_G$ es de simetría, $I_{xy} = I_{x_G y_G} = 0$.

12.2.6 Cuarto de círculo

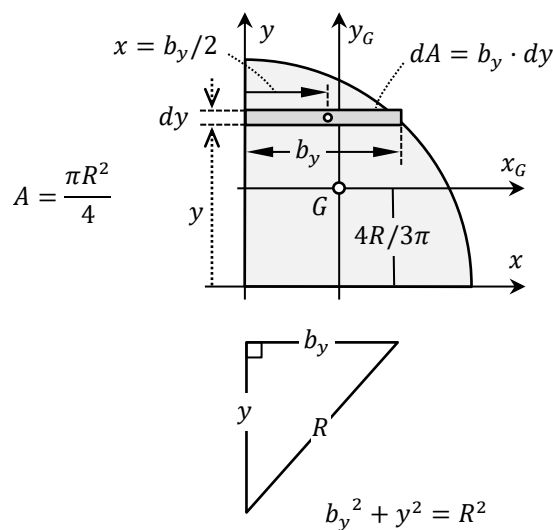


Fig. 12. 9 Cuarto de círculo

Del mismo modo que se ha procedido anteriormente, puesto que un semicírculo es la suma de dos cuartos de círculo igualmente posicionados respecto de los ejes:

- Momento de inercia respecto de una base.

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8} / 2 = \frac{\pi R^4}{16}$$

- Momento de inercia respecto de un eje paralelo a una base que pase por G.

$$I_{x_G} = I_{y_G} = I_x - \frac{\pi R^2}{4} \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi}$$

- Producto de inercia respecto de las dos bases.

$$I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA = \int_0^R \frac{b_y}{2} \cdot y \cdot b_y \cdot dy = \frac{1}{2} \int_0^R y \cdot b_y^2 \cdot dy = \frac{1}{2} \int_0^R y(R^2 - y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^R (R^2 \cdot y - y^3) dy = \frac{1}{2} \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{R^4}{2} \cdot \frac{2-1}{4} = \frac{R^4}{8}$$

- Producto de inercia respecto de dos ejes paralelos a las bases que pasen por G .

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{4R}{3\pi} = \frac{R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi}$$

En los productos de inercia, junto con la aplicación de las expresiones obtenidas, siempre ha de tenerse en cuenta la posición del área respecto de los ejes para incluir el signo que corresponda. Como $1/8$ es menor que $4/(9\pi)$, el resultado anterior es negativo.

12.3 CÍRCULO DE MOHR. MOMENTOS Y DIRECCIONES PRINCIPALES

Supóngase conocidas las propiedades de inercia I_x, I_y e I_{xy} respecto de un sistema de ejes perpendiculares xy con origen en un punto O . El *círculo de Mohr* es una construcción gráfica que permite determinar, a partir de los datos anteriores, las propiedades de inercia respecto de un sistema de ejes $x'y'$, girados respecto de los originales un cierto ángulo φ en torno al punto O , es decir, permite calcular $I_{x'}, I_{y'}$ e $I_{x'y'}$.

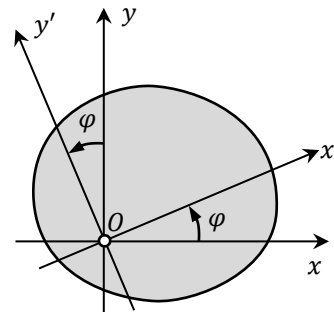


Fig. 12. 10 Ejes girados

Los pasos a seguir para trazar el círculo de Mohr son los siguientes:

- Se dibuja un sistema de referencia cartesiano. El eje horizontal está asociado a los momentos de inercia y el eje vertical a los productos de inercia.
- En dicho sistema se posicionan dos puntos de referencia, el punto (x) , de coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto (y) de coordenadas $(I_y, -I_{xy})$.
- Dichos puntos constituyen los extremos del diámetro del círculo de Mohr. A partir de la construcción realizada se deduce que:
 - La posición del centro C del círculo está sobre el eje horizontal en la coordenada:

$$C = \frac{I_x + I_y}{2}$$

- El radio R del círculo cumple:

$$R^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2$$

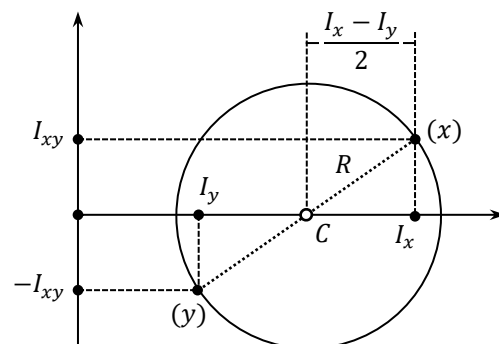


Fig. 12. 11 Círculo de Mohr

La manera de utilizar el círculo de Mohr para obtener las propiedades de inercia en unos ejes girados respecto de los que han sido utilizados para trazarlo es la siguiente:

- Un giro φ del sistema de ejes xy del área se corresponde con un giro 2φ , en el mismo sentido, del diámetro xy del círculo de Mohr. De esta forma se obtiene el diámetro $x'y'$, donde las coordenadas del punto (x') son $(I_{x'}, I_{x'y'})$ y las coordenadas del punto (y') son $(I_{y'}, -I_{x'y'})$.

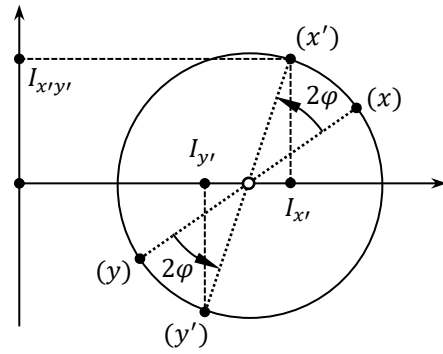


Fig. 12. 12 Diámetro girado

Las *direcciones principales de inercia* en un punto O son los dos ejes x_p, y_p respecto de los cuales el producto de inercia es nulo. Los momentos de inercia respecto de dichos ejes I_{x_p}, I_{y_p} se denominan *momentos principales de inercia*. En el círculo de Mohr esta situación se corresponde con el diámetro horizontal. Obviamente, se comprueba que las direcciones principales se corresponden con los ejes, de los infinitos que pasan por O , respecto de los cuales los momentos de inercia alcanzan sus valores extremos. Los momentos principales son por tanto el máximo y el mínimo de todos los valores posibles. Los ejes principales que pasan por el centroide del área se denominan *ejes centrales*.

De la propia construcción gráfica se deduce:

$$I_{x_p}, I_{y_p} = C \pm R = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\varphi_p = -\frac{I_{xy}}{\frac{I_x - I_y}{2}} \rightarrow \varphi_p = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

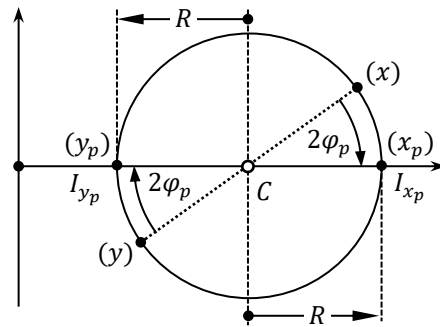
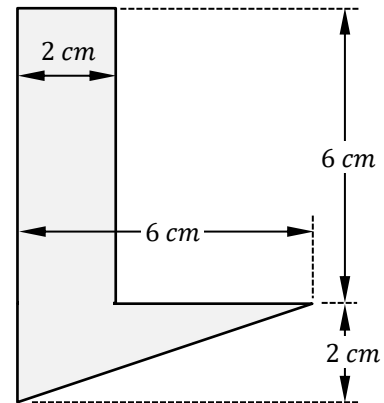


Fig. 12. 13 Ejes y momentos principales

12.4 ÁREAS COMPUESTAS

El objetivo final de cualquier problema de este tema va a ser calcular la orientación de los ejes principales que pasen por el centroide de un área con una forma compleja, o área compuesta, así como los momentos de inercia respecto de dichos ejes, o momentos principales. Para ello, la secuencia de pasos a seguir, en un caso general, es la que se detalla a continuación (más adelante se explicarán las modificaciones a tener en cuenta en el planteamiento en función de las diversas situaciones particulares que puedan darse). Se ilustrará el proceso haciendo uso de varios problemas, comenzando con el siguiente caso sencillo:

• Ejemplo 12.1



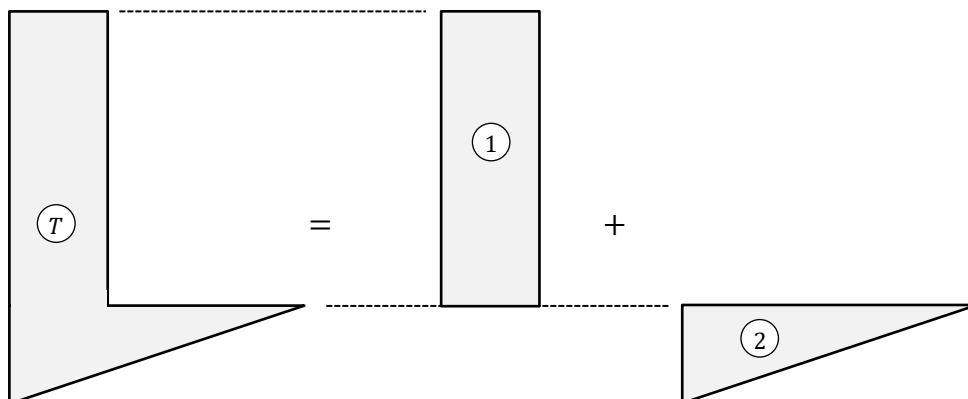
Paso 1: Identificación de las áreas elementales que componen el área total.

El área total siempre va a poder descomponerse en sumas y restas de áreas elementales, de las cuales conocemos las expresiones teóricas de los momentos de inercia respecto de determinadas referencias geométricas, es decir, rectángulos, triángulos-rectángulos (un triángulo que no sea rectángulo siempre habrá de considerarse como la suma de dos triángulos-rectángulos), círculos, semicírculos, o cuartos de círculo. La descomposición de un área compleja como una suma-resta de áreas elementales suele admitir más de una variante y, tomando en cuenta los criterios que se desarrollan en el paso 4, dentro de este primer paso también ha de incluirse la decisión de cuál es la variante más adecuada ya que, aunque todas sean correctas, no todas van a conllevar el mismo esfuerzo.

En el ejemplo propuesto es evidente que la figura se puede plantear como la suma de un rectángulo más un triángulo (en adelante, siempre que use el término triángulo se estará haciendo referencia exclusivamente al caso del que tiene un ángulo recto).

Paso 2: Representación de la descomposición y numeración de las áreas elementales.

Consiste simplemente en expresar gráficamente el hecho de que el área compuesta total (a la izquierda) es igual a la suma de las áreas elementales (a la derecha y separadas unas de otras), poniendo un número a cada una de ellas, la versión gráfica de expresar $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$. Es importante que en este diagrama cada una de las áreas elementales se dibuje en la disposición que realmente ocupa dentro del área total.



Paso 3: Recopilación de las expresiones teóricas que van a requerirse durante la resolución.

Para ello se debe extraer de la siguiente tabla la información asociada a los tipos de áreas elementales que se hayan establecido en el área compuesta.

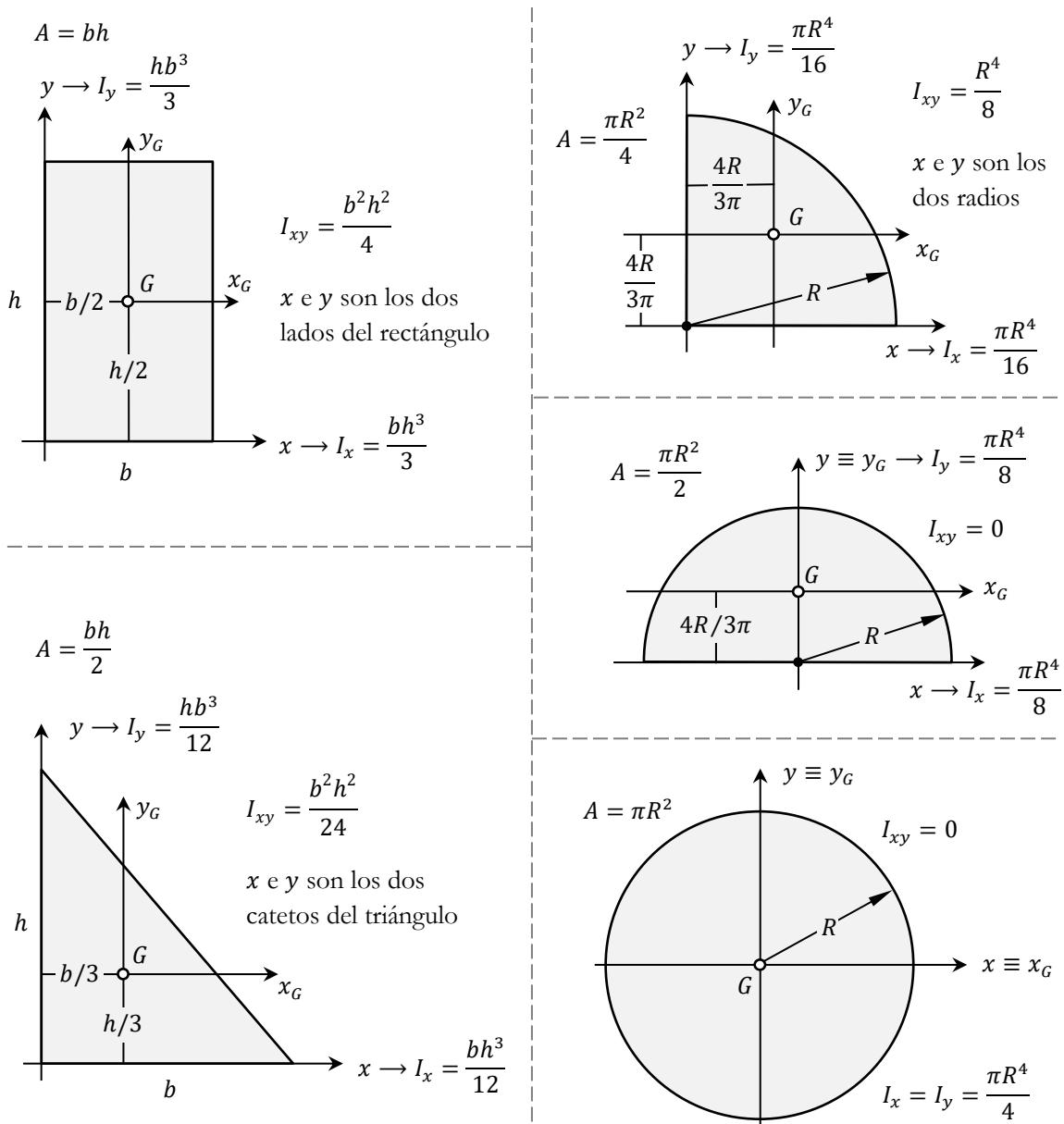


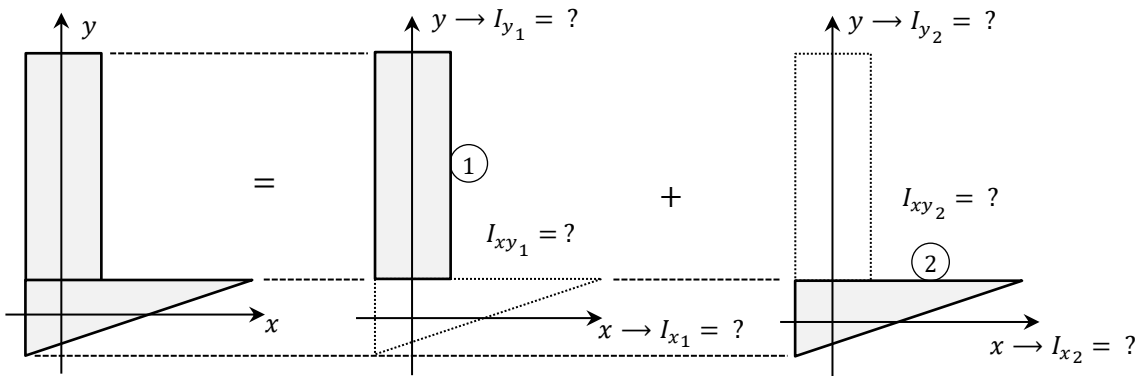
Fig. 12. 14 Resumen de áreas elementales

Adviértase que, en cada una de las áreas elementales, aunque se han representado los ejes que pasan por G , todas las expresiones de inercia recopiladas son respecto de los ejes x y y (no x_G, y_G), ya que son las más sencillas y/o fáciles de recordar. Va a resultar esencial, para los pasos posteriores, tener perfectamente claro que cada área teórica lleva asociados sus propios ejes x, y , también teóricos, respecto de los cuales se han deducido las expresiones específicas de momentos y producto de inercia: I_x, I_y, I_{xy} . Además, respecto de dichos ejes también se tiene claramente posicionado el centroide G .

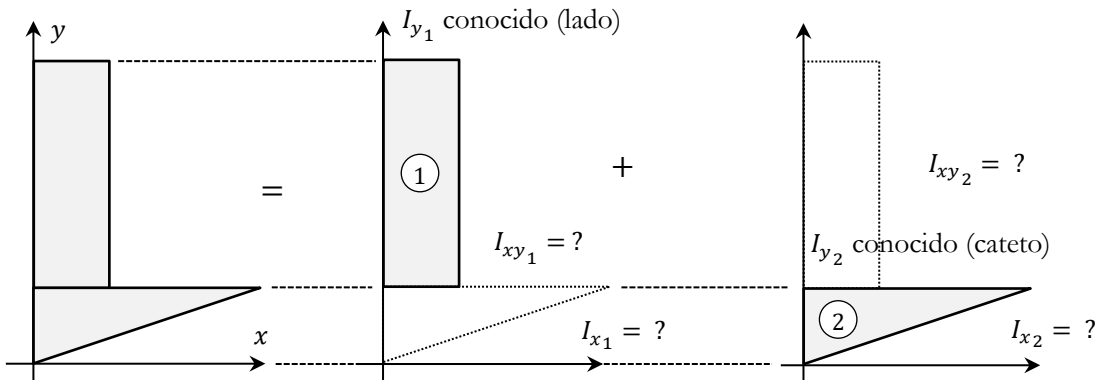
Paso 4: Elección de unos ejes de trabajo únicos que sean los más adecuados.

Va a ser necesario trabajar en unos ejes comunes (únicos) en cada una de las áreas elementales reales en las que ha sido desglosada el área compuesta. Dichos ejes también serán los ejes iniciales de trabajo de la propia área compuesta, respecto de los que se determinarán, por ejemplo, las coordenadas de su centroide. La estrategia para establecerlos es que dichos ejes únicos coincidan con el mayor número posible de ejes teóricos de las áreas elementales. La idea que subyace es que, en cuanto el eje único real coincide con el eje teórico, la propiedad de inercia asociada es conocida por fórmula y no hace falta determinarla, simplificándose el proceso de cálculo.

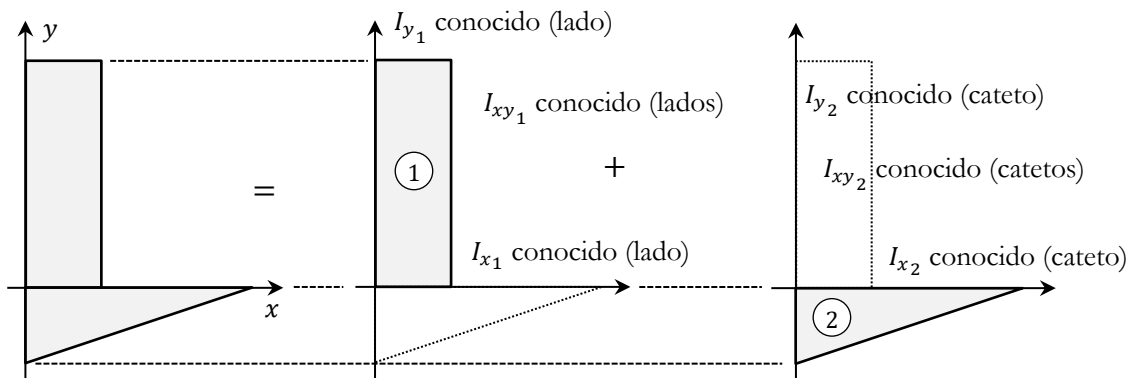
Así por ejemplo, los ejes únicos de la siguiente figura son inadecuados puesto que ninguno coincide con los de ninguna de las áreas elementales:



Siempre pueden encontrarse posiciones de ejes únicos que al menos coinciden con algunos de los ejes teóricos de algunas de las áreas elementales, como por ejemplo:



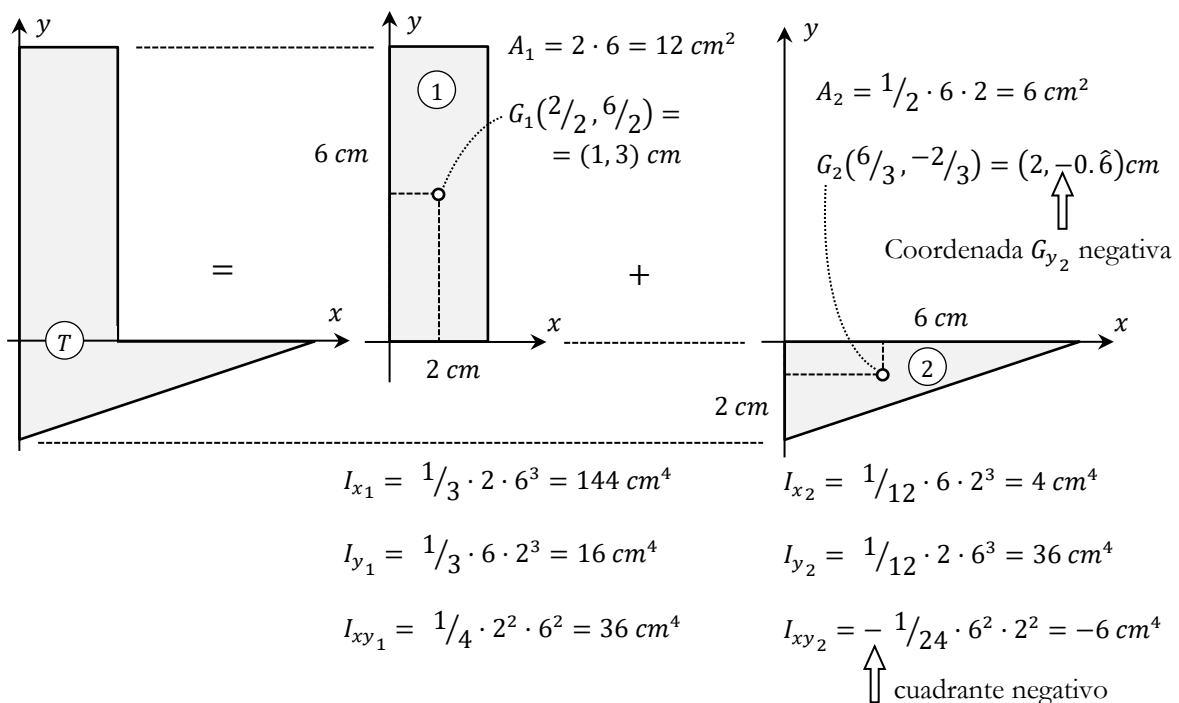
Y aunque no siempre es posible hacerlo, lo ideal es usar, si existe, una posición para los ejes únicos x, y que coincida simultáneamente con las de los dos ejes teóricos de todas las figuras, es decir, “hacer pleno”. En este ejemplo:



Paso 5: Cálculo de las propiedades geométricas de las áreas elementales en los ejes únicos.

Para cada una de las áreas elementales i de la descomposición, considerando sus dimensiones y posiciones reales, se determinan los siguientes valores:

- A_i : Área.
- (G_{x_i}, G_{y_i}) : Coordenadas horizontal y vertical del centroide en el sistema referencia definido por los ejes únicos, con los signos que correspondan en cada una de ellas.
- I_{x_i}, I_{y_i} : Momentos de inercia respecto de cada uno de los dos ejes únicos.
- I_{xy_i} : Producto de inercia respecto de la pareja de ejes únicos. Siempre hay que comprobar que se ha puesto correctamente el signo ya que, aunque los ejes únicos coincidan con los teóricos, la figura elemental real puede estar posicionada en un cuadrante de signo diferente al teórico (que es siempre positivo).



Paso 6: Cálculo de las coordenadas del centroide del área compuesta en los ejes únicos.

En primer lugar, se obtiene el área total (el área de la figura compuesta), a continuación, las coordenadas del centroide del área total:

$$A_T = \sum A_i \qquad G_x = \frac{\sum(A_i \cdot G_{x_i})}{A_T} \qquad G_y = \frac{\sum(A_i \cdot G_{y_i})}{A_T}$$

En todos los sumatorios ha de tenerse en cuenta si el área elemental se está sumando, o restando, para formar el área compuesta. En el caso que se está resolviendo, donde las dos áreas elementales se suman:

$$A_T = A_1 + A_2 = 12 + 6 = 18 \text{ cm}^2$$

$$G_x = \frac{12 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{18} = 1.3 \text{ cm}$$

$$G_y = \frac{12 \cdot 3 + 6 \cdot (-0.6)}{18} = 1.7 \text{ cm}$$

Paso 7: Cálculo de las propiedades de inercia del área compuesta en los ejes únicos.

Para los dos momentos de inercia, así como para el producto, simplemente hay que componer, teniendo siempre en cuenta si área elemental se suma o se resta, haciendo directamente:

$$I_{ref_T} = \sum I_{ref_i} = I_{ref_1} \pm I_{ref_2} \pm I_{ref_3} \pm \dots$$

Para poder sumar el aporte de momento de inercia de las distintas áreas elementales respecto de cierto eje, todos los momentos de inercia elementales deben ser respecto de ese mismo eje (una única referencia concreta) y al hacer la suma, lo que se obtiene es el momento de inercia del área compuesta respecto de dicha referencia específica (no se pueden sumar nunca momentos de inercia respecto de ejes diferentes). La misma idea se aplica literalmente a las parejas de ejes para los productos de inercia. En el caso que se está resolviendo, como las dos áreas elementales se suman:

$$I_{x_T} = I_{x_1} + I_{x_2} = 144 + 4 = 148 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy_T} = I_{xy_1} + I_{xy_2} = 36 + (-6) = 30 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_T} = I_{y_1} + I_{y_2} = 16 + 36 = 52 \text{ cm}^4$$

Paso 8: Cálculo de las propiedades de inercia del área compuesta en los ejes que pasan por G_T .

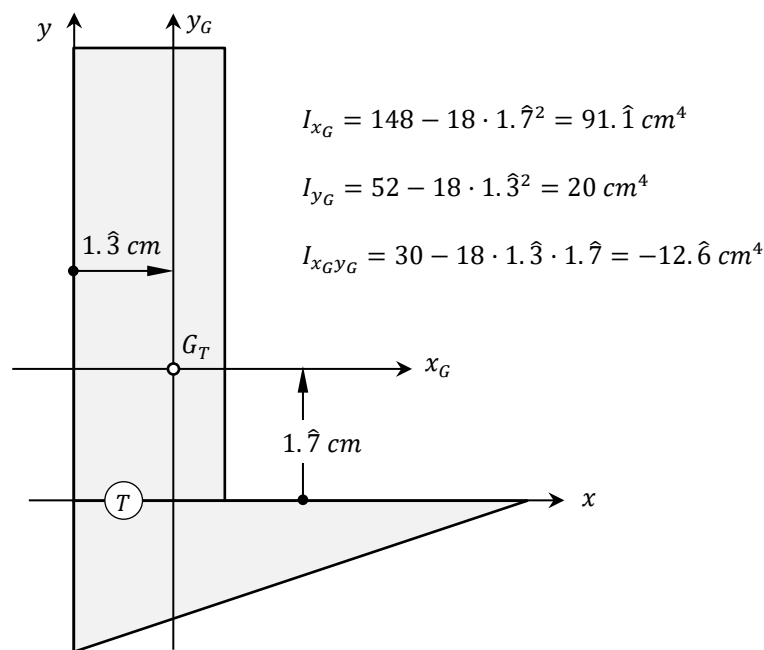
En este punto ya no hace falta trabajar más con las áreas elementales y se pasa a trabajar directamente con el área total. Los resultados de los pasos 6 y 7 se combinan para obtener, por simple aplicación de los teoremas de Steiner:

$$I_{x_G} = I_{x_T} - A_T \cdot G_y^2$$

$$I_{x_G y_G} = I_{xy_T} - A_T \cdot G_x \cdot G_y$$

$$I_{y_G} = I_{y_T} - A_T \cdot G_x^2$$

Adviértase que, en el caso de los dos momentos de inercia, como las correspondientes coordenadas del centroide van al cuadrado, no es necesario considerar su signo, son simplemente las “distancias entre ejes paralelos”. Sin embargo, en el caso del producto de inercia, se están multiplicando ambas coordenadas, con lo que es imprescindible considerar el signo que realmente tenga cada una de ellas. En el ejemplo que se está resolviendo:



Paso 9: Comprobación de resultados.

Las tres propiedades de inercia finalmente obtenidas para el área compuesta deben cumplir las siguientes condiciones:

- Los valores de los dos momentos de inercia que, de hecho, provienen de hacer una resta, deben haber quedado positivos.
- Los ejes que pasan por el centroide dividen al área total entre los cuatro cuadrantes, dos de ellos con aporte de producto de inercia positivo y los otros dos con aporte de producto de inercia negativo. Si es posible identificar visualmente a cuál de los dos signos corresponde mayoritariamente la distribución del área total, el signo del producto de inercia debe haber salido concordante. Es decir, si se aprecia con claridad que, por ejemplo, la mayor parte del área está en los dos cuadrantes negativos, el producto de inercia final no puede haber quedado positivo.

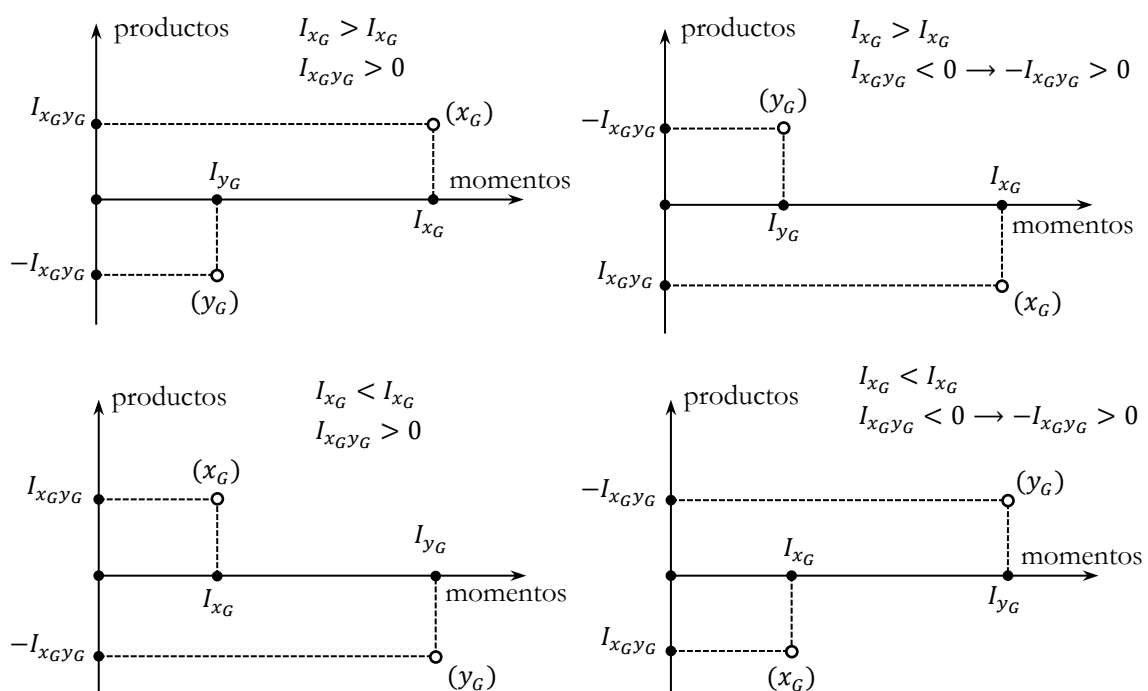
En caso de no cumplirse estas comprobaciones, se está en disposición de afirmar que la resolución contiene algún error, de operaciones o de planteamiento.

Paso 10: Trazado de los dos extremos del diámetro del círculo de Mohr.

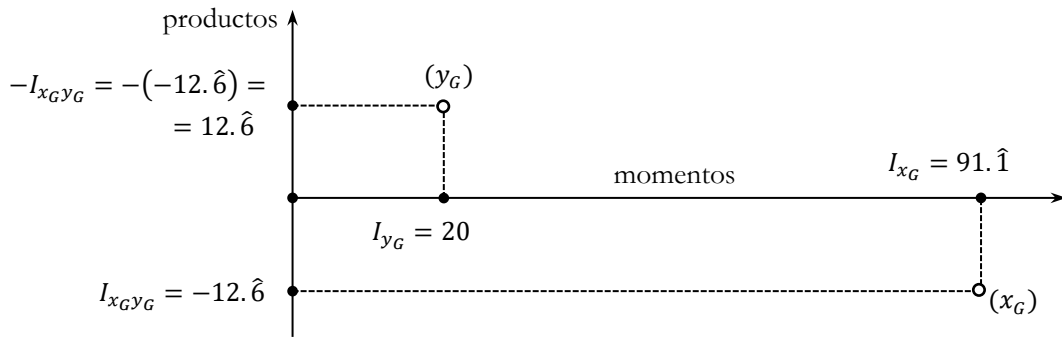
En un nuevo sistema de coordenadas, donde el eje horizontal va asociado a momentos de inercia y el eje vertical a productos de inercia hay que posicionar dos puntos:

- Un punto, asociado al eje x_G del área real, cuyas coordenadas en este nuevo espacio son $(I_{x_G}, I_{x_G y_G})$.
- Un punto, asociado al eje y_G del área real, cuyas coordenadas en este nuevo espacio son $(I_{y_G}, -I_{x_G y_G})$.

El valor de $I_{x_G y_G}$ debe considerarse con el signo que se haya obtenido. Obsérvese que, en función de que I_{x_G} sea mayor o menor que I_{y_G} , y que $I_{x_G y_G}$ sea positivo o negativo, pueden darse cuatro disposiciones, o combinaciones:



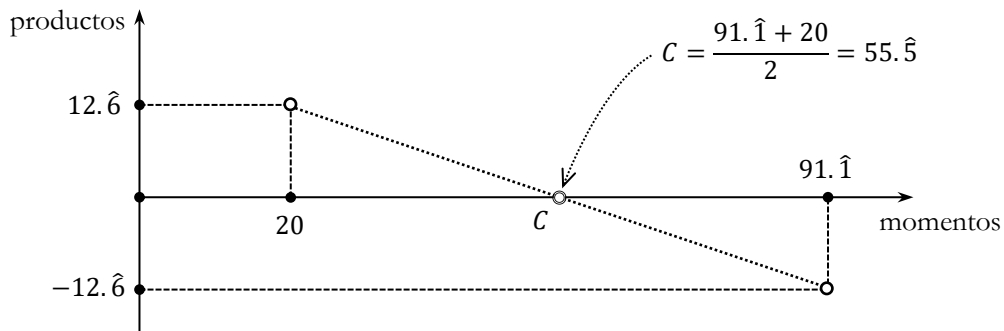
En el ejemplo que se está analizando:



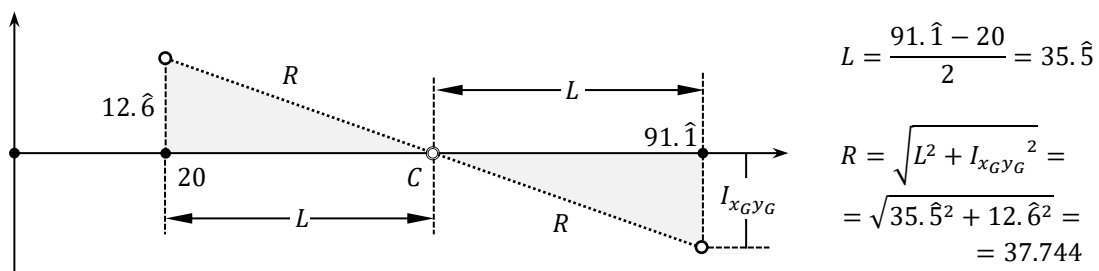
Aunque no es preciso hacer este dibujo perfectamente a escala, es recomendable intentar mantener, aunque sea de forma aproximada, la misma proporción entre los ejes horizontal y vertical.

Paso 11: Cálculo del centro y el radio del círculo de Mohr.

Los dos puntos posicionados constituyen los extremos del diámetro de un círculo. Se dibuja el segmento recto que los une, en cuyo punto medio, C , se encuentra el centro del círculo. Evidentemente, este punto se encuentra, a su vez, sobre el eje horizontal de esta representación y su coordenada sobre dicho eje es el valor medio de los dos momentos de inercia, I_{x_G} e I_{y_G} , es decir, su suma entre 2 (o semi-suma).



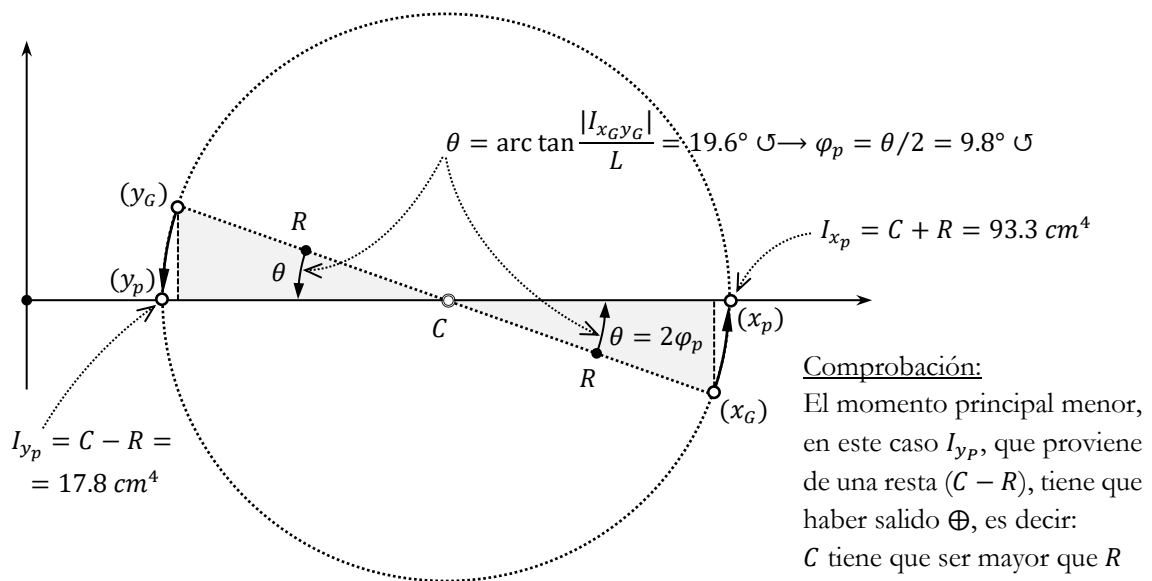
Al hacer la representación del diámetro, en la construcción gráfica se han manifestado dos triángulos de idénticas dimensiones. Su 'altura' es el valor del producto de inercia, altura geométrica, en magnitud absoluta, independientemente del signo de $I_{x_G y_G}$. Calcular la dimensión de su base, L , es muy sencillo ya que es simplemente la mitad de la separación entre ambos momentos de inercia, I_{x_G} e I_{y_G} , es decir, el mayor menos el menor, entre 2 (o semi-resta). Ahora, el radio del círculo, R , puede obtenerse directamente como el valor de la hipotenusa de uno cualquiera de esos triángulos, de los que se conocen las dimensiones de ambos catetos, L e $I_{x_G y_G}$:



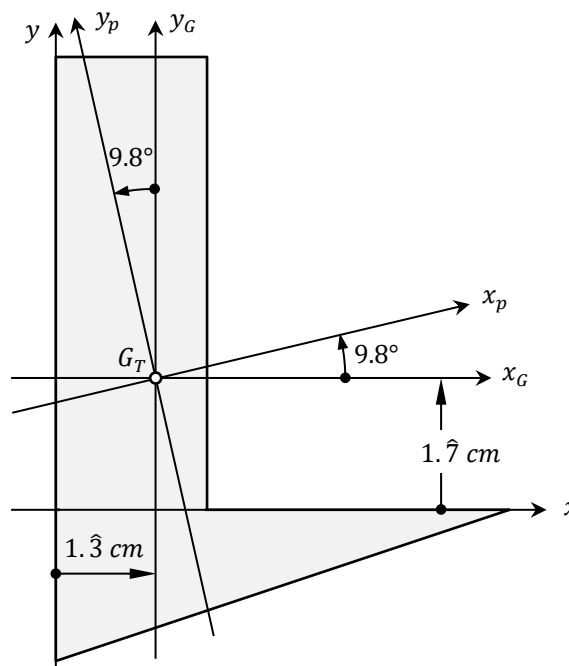
Paso 12: Obtención de los momentos principales y el ángulo de las direcciones principales.

Ahora hay que imaginar que se gira el diámetro dibujado, en torno a su centro, hasta tumbarlo (hasta ponerlo horizontal). En esa nueva posición se pueden determinar muy fácilmente dos cosas:

- El valor del ángulo θ que habría girar (y el sentido del giro), se deduce de la propia geometría del triángulo que se ha usado para calcular el radio. La mitad del valor de ese ángulo y en el mismo sentido, $\varphi_p = \theta/2$, es lo que hay que girar los ejes x_G e y_G de la figura real para llegar las direcciones de los ejes principales de inercia x_p e y_p .
- Las coordenadas sobre el eje horizontal en las que quedarían los dos extremos del diámetro se obtienen de forma inmediata, ya que se dispone del centro y el radio del círculo. Esas coordenadas son precisamente los valores de los momentos principales de inercia. En la figura real, I_{x_p} es el momento respecto del eje principal x_p , e I_{y_p} es el momento respecto del eje principal y_p .

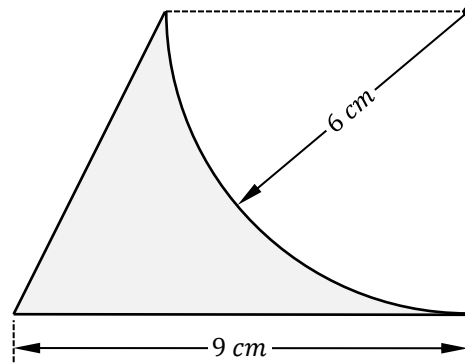


Paso 13: Representación de los ejes principales de inercia del área compuesta.



• Ejemplo 12.2

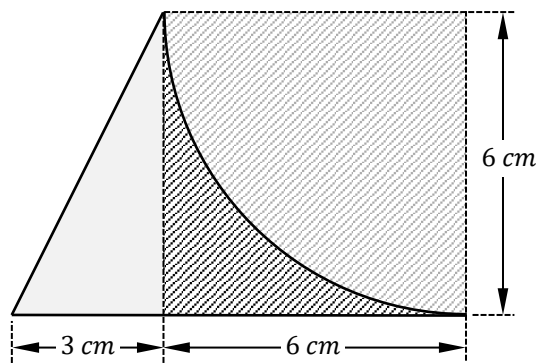
Obtener los momentos de inercia principales y la dirección de los ejes principales de inercia en el centroide del área:



Paso 1: Identificación de las áreas elementales que componen el área total.

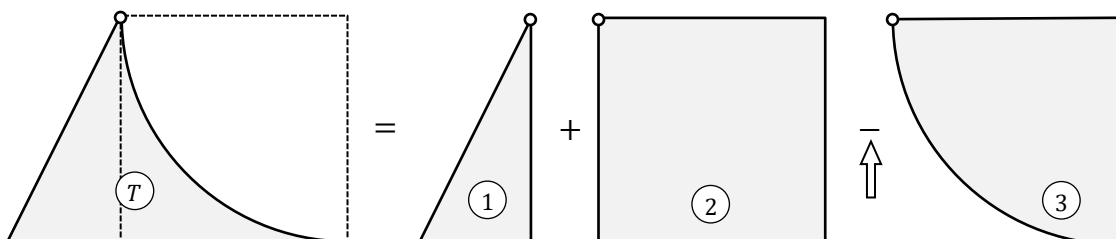
Tras inspeccionar la figura, se observa que, si se traza una línea auxiliar vertical, el área puede descomponerse en tres áreas elementales (áreas sencillas de propiedades conocidas):

Se tiene la suma de un triángulo y un rectángulo (cuadrado), a lo que hay que restar un cuarto de círculo.

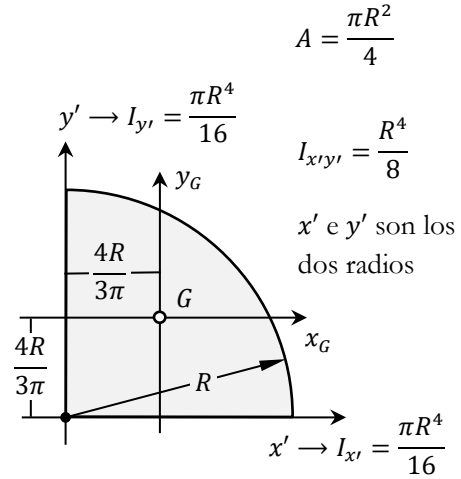
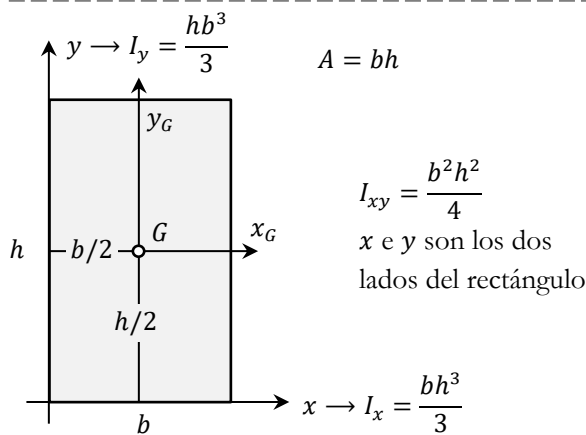
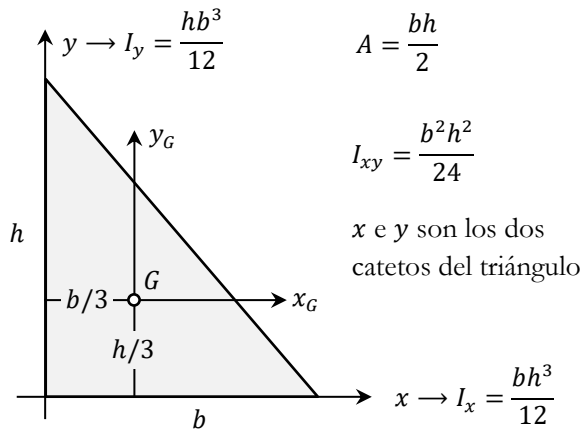


Paso 2: Representación gráfica de la descomposición y numeración de las áreas elementales.

Se ha señalado, tanto en el área total, como en cada una de las elementales, un mismo punto para dejar evidencia de la referencia posicional.



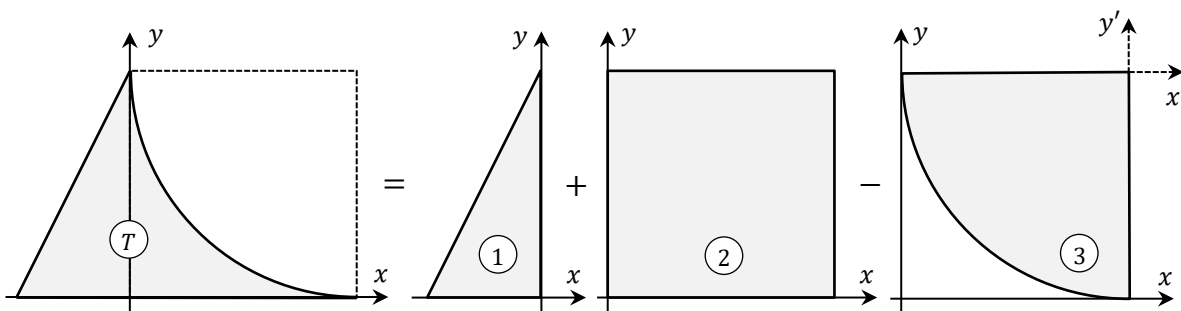
Paso 3: Recopilación de las expresiones teóricas que van a requerirse durante la resolución.



Paso 4: Elección de unos ejes de trabajo únicos que sean los más adecuados.

En este caso NO es posible encontrar unos ejes únicos que simultáneamente coincidan con los ejes teóricos de la totalidad de las áreas elementales, es decir, no es posible “hacer pleno”. En esta situación se han de buscar unos ejes únicos que coincidan con el mayor número posible de áreas elementales, sabiendo que para esas áreas los valores inerciales serán directos, mientras que para aquellas para las que no se haya podido establecer la coincidencia, habrá que realizar la tarea adicional de transformar las inercias respecto de los ejes conocidos, los teóricos, a los ejes reales, los comunes.

Aunque no es la única alternativa existente, se opta por hacer coincidir los ejes únicos con los teóricos de las áreas elementales 1 y 2, sabiendo que habrá que transformar a ellos las propiedades del área 3, cuyos ejes teóricos difieren de los comunes. Por claridad, en las áreas elementales en las que los ejes teóricos no coincidan con los reales x , y , se renombran los teóricos como x' , y' , incluso en la figura de referencia del paso 3. Estos ejes, representados con línea discontinua en el área 3, son los de propiedades inercia conocidas, puesto que, aunque dejen al cuarto de círculo en un cuadrante distintivo del de la figura teórica, son sus dos radios.



Paso 5: *Cálculo de las propiedades geométricas de las áreas elementales en los ejes únicos.*

Las áreas 1 y 2 son directas, las inercias respecto de los ejes reales son directamente las que se pueden ver en las correspondientes figuras del paso 3, tan sólo hay que revisar que se ponen correctamente los signos de las coordenadas del centroide y del producto de inercia, que pueden ser valores negativos en función de la disposición del área elemental real respecto de los ejes de trabajo.

El cuarto de círculo, sin embargo, no es directo, ya que hay que transformar tanto las coordenadas del centroide como los momentos y producto de inercia. Al menos, se tiene la ventaja en este ejemplo de que, debido a la disposición de los ejes teóricos frente a los reales, se observa que $G_{x_3} = G_{y_3}$ y que $I_{x_3} = I_{y_3}$, con lo que, en este caso concreto al menos, se pueden aprovechar los resultados de la transformación de uno de los ejes para el otro, reduciéndose así en parte la carga de trabajo (dibujos y cálculos en la página siguiente).

Obtener las coordenadas del centroide es muy simple, por simple geometría. Para transformar cualquier propiedad de inercia, puesto que los ejes teóricos x' e y' y los ejes reales x e y son paralelos, habrá que utilizar los teoremas de Steiner. Pero a la hora de hacerlo, hay tener en cuenta la circunstancia de que ninguno de los ejes pasa por el centroide de área elemental, G_3 , con lo cual, es necesario disponer otros ejes que pasen por dicho punto y dividir la transformación en dos etapas:

- Primero transformar de los ejes teóricos a los ejes centroidales, aplicar Steiner “restando”.
- Después transformar de los ejes centroidales a los ejes reales, aplicar Steiner “sumando”.

Paso 6: *Cálculo de las coordenadas del centroide del área compuesta en los ejes únicos.*

En todos los sumatorios de los pasos 6 y 7 ha de tenerse en cuenta que el área 3 se está restando para formar el área compuesta.

$$A_T = A_1 + A_2 - A_3 = 9 + 36 - 28.27 = 16.72 \text{ cm}^2$$

$$G_x = \frac{9 \cdot (-1) + 36 \cdot 3 - 28.27 \cdot 3.45}{16.72} = 0.081 \text{ cm} \quad G_y = \frac{9 \cdot 2 + 36 \cdot 3 - 28.27 \cdot 3.45}{16.72} = 1.695 \text{ cm}$$

Paso 7: *Cálculo de las propiedades de inercia del área compuesta en los ejes únicos.*

$$I_{x_T} = I_{x_1} + I_{x_2} - I_{x_3} = 54 + 432 - 408.34 = 77.655 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_T} = I_{y_1} + I_{y_2} - I_{y_3} = 13.5 + 432 - 408.34 = 37.155 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy_T} = I_{xy_1} + I_{xy_2} - I_{xy_3} = +(-13.5) + (+324) - (+315.87) = -5.376 \text{ cm}^4$$

Como único apunte, hay que tener cuidado con el hecho de que un área elemental que esté restándose, puede a su vez tener producto de inercia negativo, con lo cual acabaría aportando al área total producto de inercia positivo (no se da este caso).

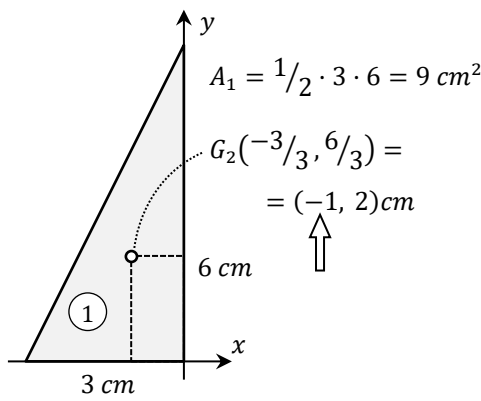
Paso 8: *Cálculo de las propiedades de inercia del área compuesta en los ejes que pasan por G_T .*

Llegados a este punto del proceso, como a partir de ahora ya sólo se trabaja con el área total como entidad única, el coste del cálculo es independiente de cómo de compleja haya sido la descomposición.

$$I_{x_G} = I_{x_T} - A_T \cdot G_y^2 = 29.588 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = I_{y_T} - A_T \cdot G_x^2 = 37.045 \text{ cm}^4$$

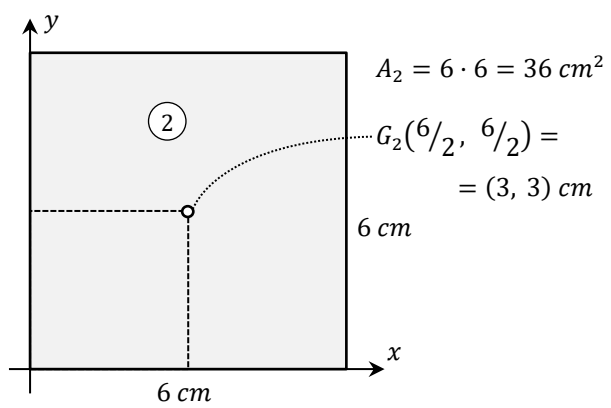
$$I_{x_G y_G} = I_{xy_T} - A_T \cdot G_x \cdot G_y = -7.671 \text{ cm}^4$$



$I_{x_1} = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 6^3 = 54 \text{ cm}^4$

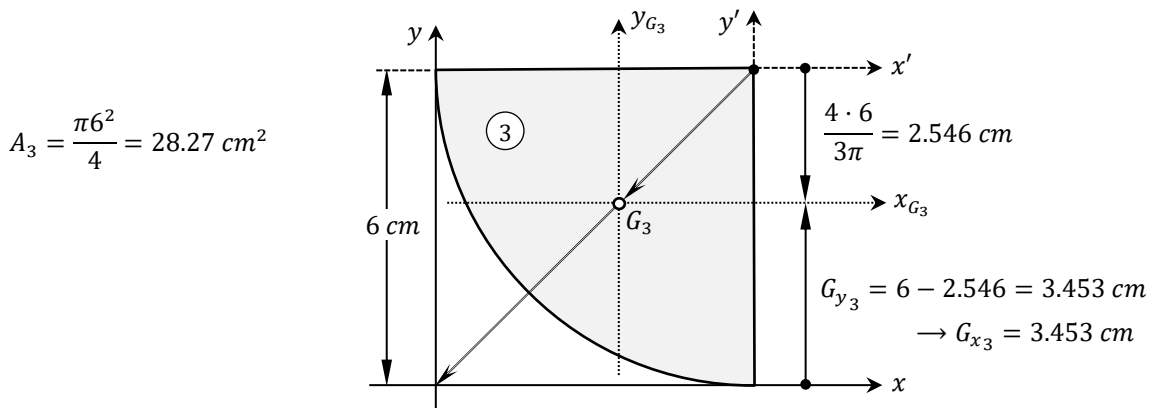
$I_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 3^3 = 13.5 \text{ cm}^4$

$I_{xy_1} = -\frac{1}{24} \cdot 3^2 \cdot 6^2 = -13.5 \text{ cm}^4 \leftarrow \text{cuadrante negativo}$



$I_{x_2} = I_{y_2} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6^3 = 432 \text{ cm}^4$

$I_{xy_2} = \frac{1}{4} \cdot 6^2 \cdot 6^2 = 324 \text{ cm}^4$



$I_{x'} = \frac{\pi 6^4}{16} = 254.47 \rightarrow I_{x_{G_3}} = I_{x'} - A_3 \cdot 2.54^2 = 71.12 \rightarrow I_{x_3} = I_{x_{G_3}} + A_3 \cdot 3.45^2 = 408.34 \text{ cm}^4$

vamos a G

nos vamos de G

$I_{x'y'} = \frac{6^4}{8} = 162 \text{ cm}^4 \leftarrow \text{en los ejes } x', y' \text{ el área está en el cuadrante } \ominus \cdot \ominus = \oplus$

$I_{x_{G_3}y_{G_3}} = I_{x'y'} - A_3 \cdot (-2.54) \cdot (-2.54) = -21.35 \text{ cm}^4 \leftarrow \text{el signo es que ha salido al hacer la operación, indica que dominan los dos cuadrantes } \ominus \text{ de los ejes } G_3$

vamos a G

signos de las componentes del vector que une los orígenes de ambos sistemas (se puede dar la vuelta al vector y poner las dos positivas, el producto no cambia)

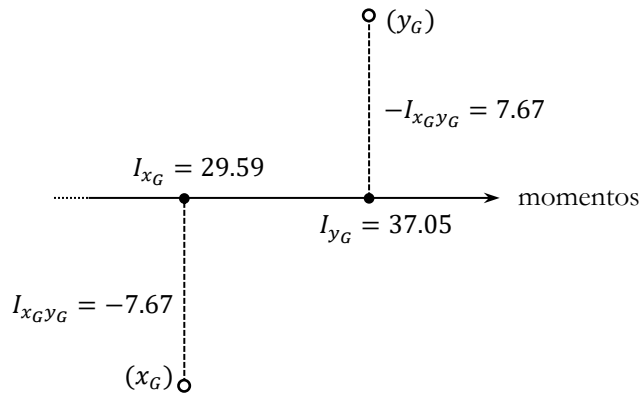
$I_{xy_3} = I_{x_{G_3}x_{G_3}} + A_3 \cdot (-3.45) \cdot (-3.45) = 315.87 \text{ cm}^4 \leftarrow$

nos vamos de G

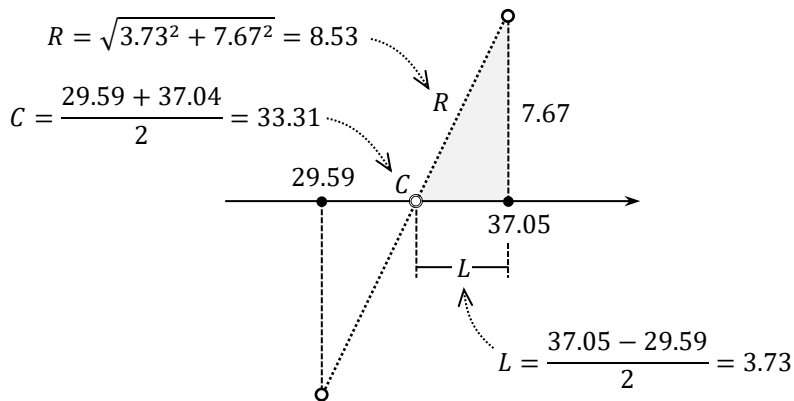
el signo es que ha salido al hacer la operación, pero hay que saber que NO sería correcto un resultado \ominus , puesto que toda el área se encuentra en un cuadrante \oplus de los ejes xy

Paso 10: *Trazado de los dos extremos del diámetro del círculo de Mohr.*

En la práctica no es imprescindible trazar el eje vertical asociado a los productos de inercia, y en lo referente al eje horizontal asociado a los momentos, es suficiente con considerar el tramo que comprende a los valores del caso que se está analizando, es decir, no hace trazarlo desde el valor 0. Esto permite hacer representaciones más adecuadas cuando, como en este caso, la diferencia entre la magnitud de los valores obtenidos para momentos y producto de inercia es grande, ya que, lo que en cualquier caso sí es importante hacer, es una representación en la que se mantenga aproximadamente igual la escala entre los ejes horizontal y vertical.

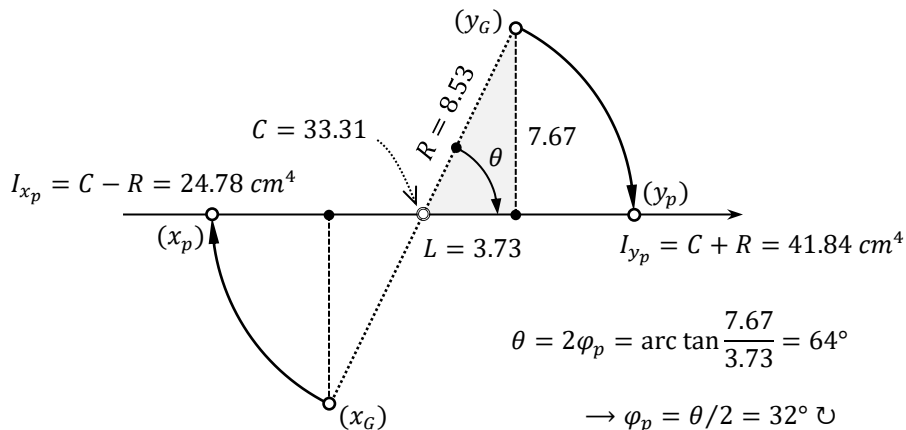


Paso 11: *Cálculo del centro y el radio del círculo de Mohr.*



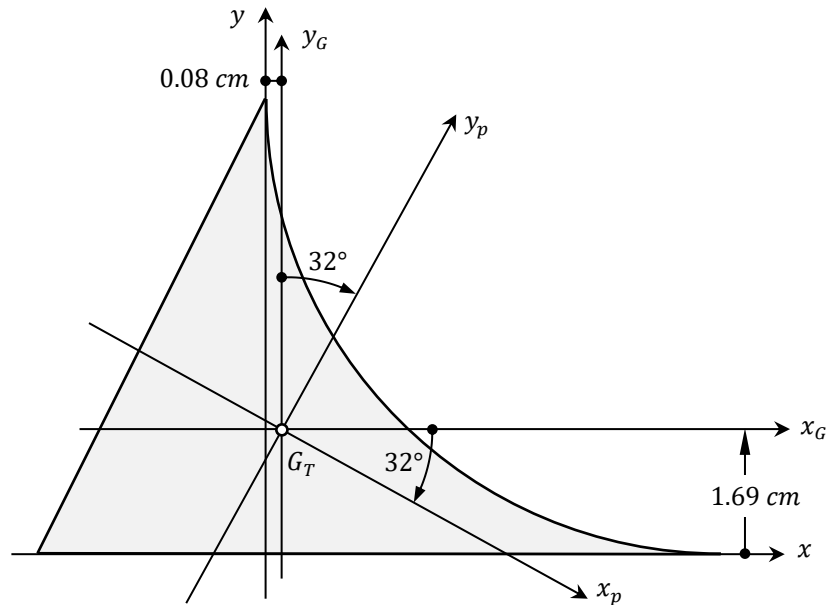
Paso 12: *Obtención de los momentos principales y el ángulo de las direcciones principales.*

En la práctica no es necesario trazar el círculo completo, sólo las porciones del mismo que representan los arcos correspondientes al efecto de tumbar el diámetro para ponerlo horizontal.

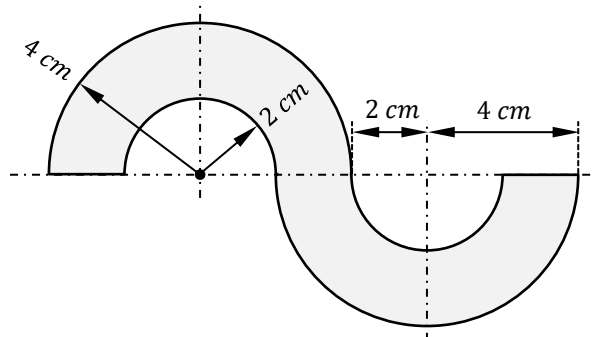


Paso 9: *Comprobación de resultados.*

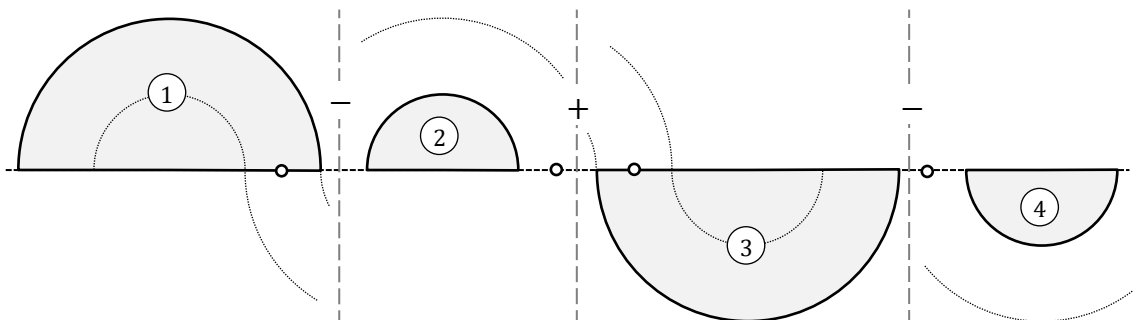
Los momentos de inercia han salido positivos, OK. Se ha puesto aquí este paso, ya que este tipo de comprobación no sólo afecta a los resultados del paso 8, sino que también ha de aplicarse al momento principal de inercia menor que, aunque proviene de una resta, no puede quedar negativo.

Paso 13: *Representación de los ejes principales de inercia del área compuesta.*• *Ejemplo 12.3*

Obtener los momentos de inercia principales y la dirección de los ejes principales de inercia en el centroide del área:

**Pasos 1 y 2:** *Identificación de las áreas elementales y representación de la descomposición.*

Es evidente que en este caso el área total se compone de cuatro semicírculos, dos grandes, 1 y 3, a los que se restan dos más pequeños, 2 y 4. Se marca un punto de referencia único/común.

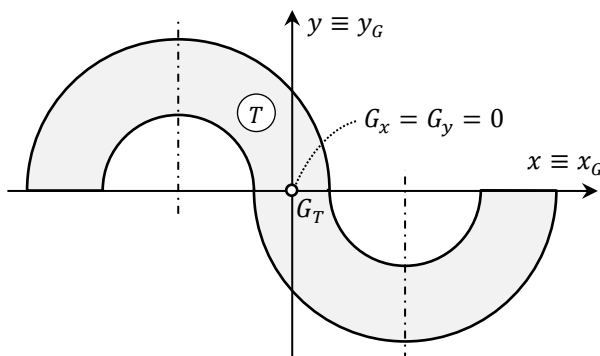


Paso 4: Elección de unos ejes de trabajo únicos que sean los más adecuados.

En este punto es donde este problema concreto aporta una diferencia respecto del enfoque llevado a cabo en los ejemplos anteriores. Obsérvese que el área compuesta a calcular cuenta con unos ejes de antisimetría. **Siempre que la figura cuente con ejes de simetría o antisimetría, esos han de ser los ejes de trabajo**, independientemente de la coincidencia o no con los ejes teóricos de las áreas elementales.

El motivo es que cuando esto sucede, el centroide del área total se encuentra en una posición conocida, la intersección de dichos ejes, con lo que trabajar desde el principio en ellos evita tener que realizar tanto el cálculo de las coordenadas del centroide (Paso 6), que estará en el origen del sistema, como, evidentemente, tener que transformar las propiedades de inercia desde los ejes de trabajo a los ejes centroidales, que ahora son los mismos (Paso 8).

Adicionalmente, en la descomposición en áreas elementales pueden identificarse dos agrupaciones, o subconjuntos que se repiten, es decir, dos subáreas totales que tienen exactamente las mismas propiedades inerciales respecto de los ejes de trabajo, lo cual permite realizar el cálculo de tan sólo uno de dichos subconjuntos, que está formado por la mitad de áreas elementales que el área total, y sencillamente multiplicar los resultados de éste por dos para obtener los totales.



$$I_{x_{1,2}} = I_{x_1} - I_{x_2}$$

$$I_{y_{1,2}} = I_{y_1} - I_{y_2}$$

$$I_{xy_{1,2}} = I_{xy_1} - I_{xy_2}$$

$$I_{x_{1,2}} = I_{x_{3,4}}$$

$$I_{y_{1,2}} = I_{y_{3,4}}$$

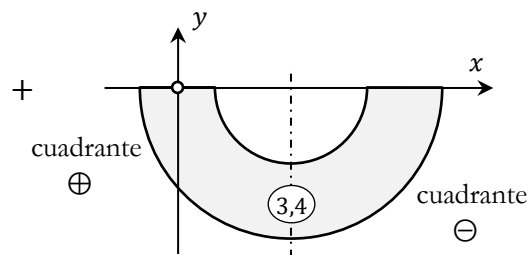
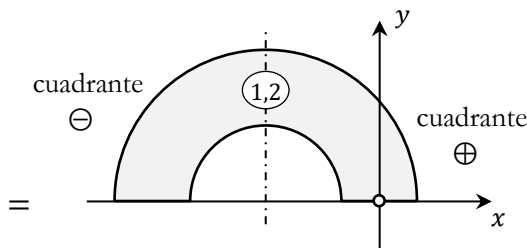
$$I_{xy_{1,2}} = I_{xy_{3,4}}$$

$$I_{x_G} = I_{x_T} = I_{x_{1,2}} + I_{x_{3,4}} = 2 \cdot I_{x_{1,2}}$$

$$I_{y_G} = I_{y_T} = I_{y_{1,2}} + I_{y_{3,4}} = 2 \cdot I_{y_{1,2}}$$

$$I_{xy_G} = I_{xy_T} = I_{xy_{1,2}} + I_{xy_{3,4}} = 2 \cdot I_{xy_{1,2}}$$

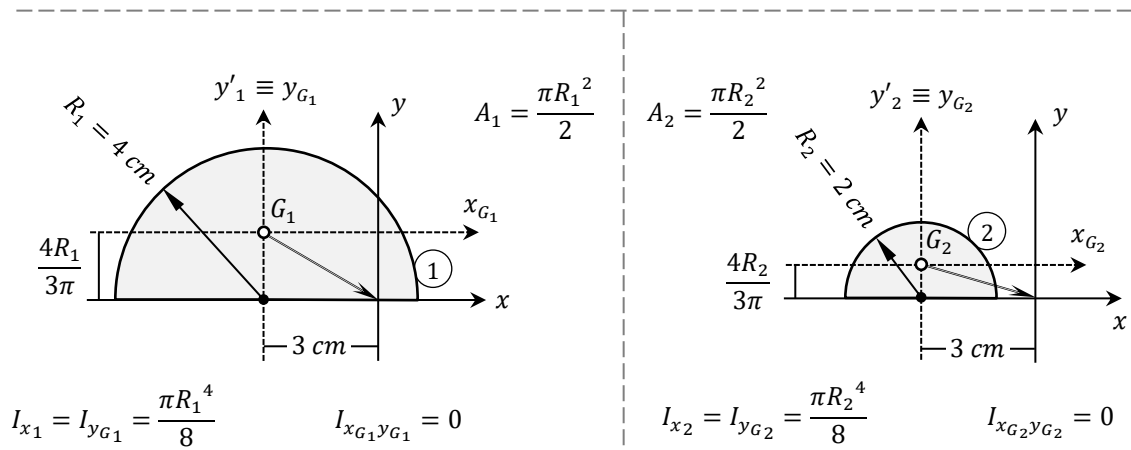
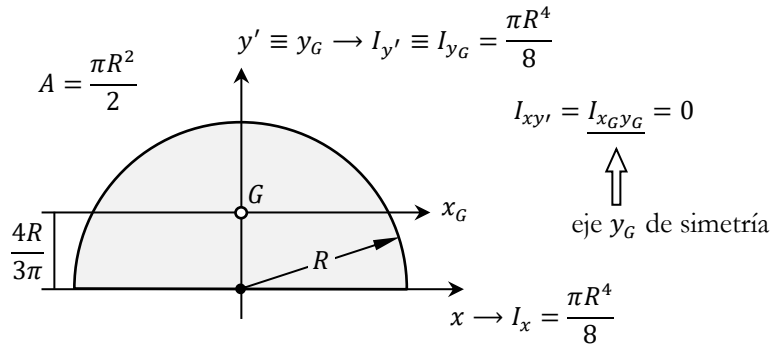
en lugar de hacer: $I_{x_T} = I_{x_1} + I_{x_3} - I_{x_2} - I_{x_4} \dots$



Obsérvese que los productos de inercia $I_{xy_{1,2}}$ e $I_{xy_{3,4}}$ son idénticos no sólo en valor, sino también en signo. Ambos subconjuntos se reparten en dos cuadrantes en porciones con formas similares, pero además, las porciones de forma idéntica caen en cuadrantes que, aunque no sean el mismo, sí son del mismo signo.

Pasos 3 y 5: Cálculo de las propiedades geométricas de las áreas elementales en los ejes únicos.

De acuerdo a lo anteriormente argumentado, tan sólo es necesario analizar las áreas elementales 1 y 2. Además, de los dos ejes de trabajo, como en ambas el eje x real coincide con el teórico, I_{x_1} e I_{x_2} son directos. Sin embargo, el eje real y no coincide con el teórico y' en ninguno de los dos semicírculos (obsérvese que se ha renombrado en la figura teórica del paso 3 para destacar el hecho de que es un eje distinto), lo cual obliga a que las propiedades I_{y_i} e I_{xy_i} tengan que ser calculadas.



En este caso, para obtener las propiedades necesarias en los ejes reales no es necesario aplicar Steiner doblemente (en dos pasos), ya que en la figura teórica elemental se dispone de las inercias respecto de los ejes que pasan por su centroide, con lo cual basta con aplicar Steiner una única vez para obtener I_{y_i} a partir de $I_{y_{G_i}}$, y una única vez para obtener I_{xy_i} a partir de $I_{x_{G_i}y_{G_i}}$ (que además en este caso es nulo al ser al menos uno de los dos ejes de simetría). Tanto para el momento como para el producto se aplica Steiner “sumando” a partir del valor conocido, que es el centroidal (nos vamos del centroide). Evidentemente, este cálculo hay que hacerlo en cada una de las dos áreas, 1 y 2:

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= I_{y_{G_1}} + A_1 \cdot 3^2 & I_{y_2} &= I_{y_{G_2}} + A_2 \cdot 3^2 \\
 I_{xy_1} &= I_{x_{G_1}y_{G_1}} + A_1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{4R_1}{3\pi}\right) & I_{xy_2} &= I_{x_{G_2}y_{G_2}} + A_2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{4R_2}{3\pi}\right)
 \end{aligned}$$

Pasos 6 y 8: Cálculo de las coordenadas del centroide del área compuesta y de las propiedades centroidales.

No hace falta por las propiedades de simetría.

Paso 7 y 9: Cálculo de las propiedades de inercia del área compuesta en los ejes únicos y comprobación.

$$I_{x_G} = I_{x_T} = 2 \cdot (I_{x_1} - I_{x_2}) = 2 \cdot \frac{\pi 4^4}{8} - 2 \cdot \frac{\pi 2^4}{8} = 60\pi \text{ cm}^4 = 188.49 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = I_{y_T} = 2 \cdot (I_{y_1} - I_{y_2}) = 2 \cdot \left(\frac{\pi 4^4}{8} + \frac{\pi 4^2}{2} \cdot 3^2 \right) - 2 \cdot \left(\frac{\pi 2^4}{8} + \frac{\pi 2^2}{2} \cdot 3^2 \right) = 168\pi \text{ cm}^4 = 527.78 \text{ cm}^4$$

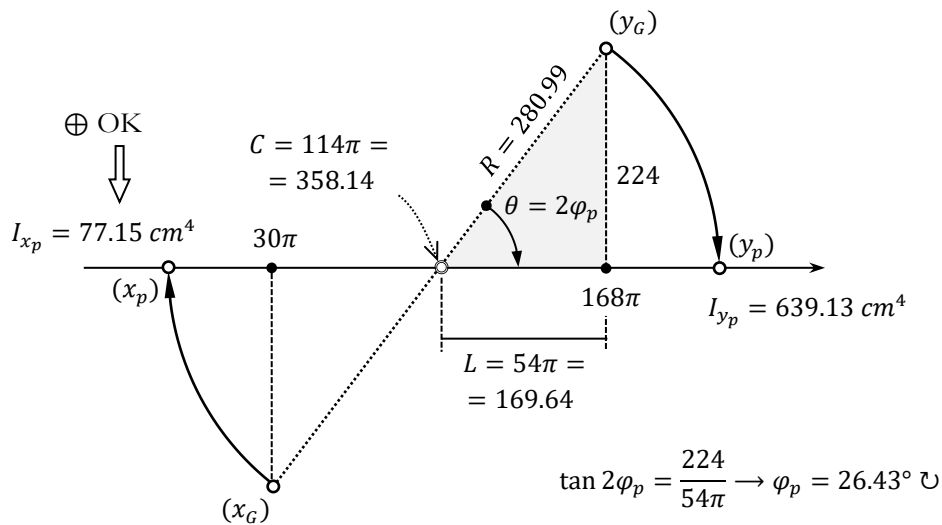
$$I_{I_{x_G y_G}} = I_{x y_T} = 2 \cdot (I_{x y_1} - I_{x y_2}) = 2 \cdot \left(0 + \frac{\pi 4^2}{2} \cdot 3 \cdot \frac{-4 \cdot 4}{3\pi} \right) - 2 \cdot \left(0 + \frac{\pi 2^2}{2} \cdot 3 \cdot \frac{-4 \cdot 2}{3\pi} \right) = -224 \text{ cm}^4$$

Los momentos de inercia han salido positivos, OK.

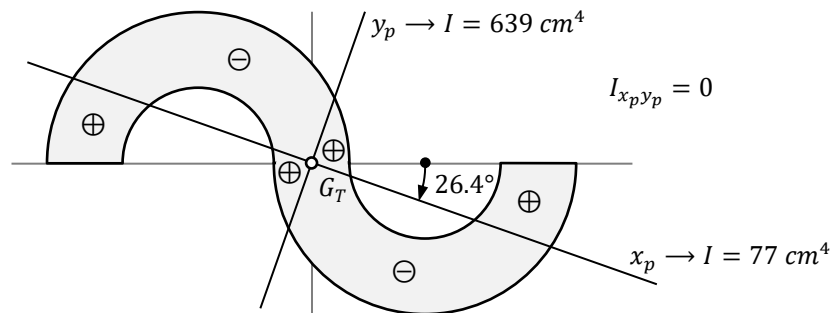
Además, como comprobación adicional, es evidente que, en la distribución de área total (figura del paso 4), ésta queda más alejada del eje y que del eje x , con lo cual, I_{y_T} debe ser mayor que I_{x_T} , como así ha resultado, OK.

Así mismo, a la vista del reparto del área total entre los cuatro cuadrantes definidos por los ejes en los que se ha calculado, es evidente que el producto de inercia está dominado por los cuadrantes negativos, OK.

Pasos 10, 11 y 12: Trazado del diámetro del círculo de Mohr y obtención de momentos y direcciones principales.



Paso 13: Representación de los ejes principales de inercia del área compuesta.

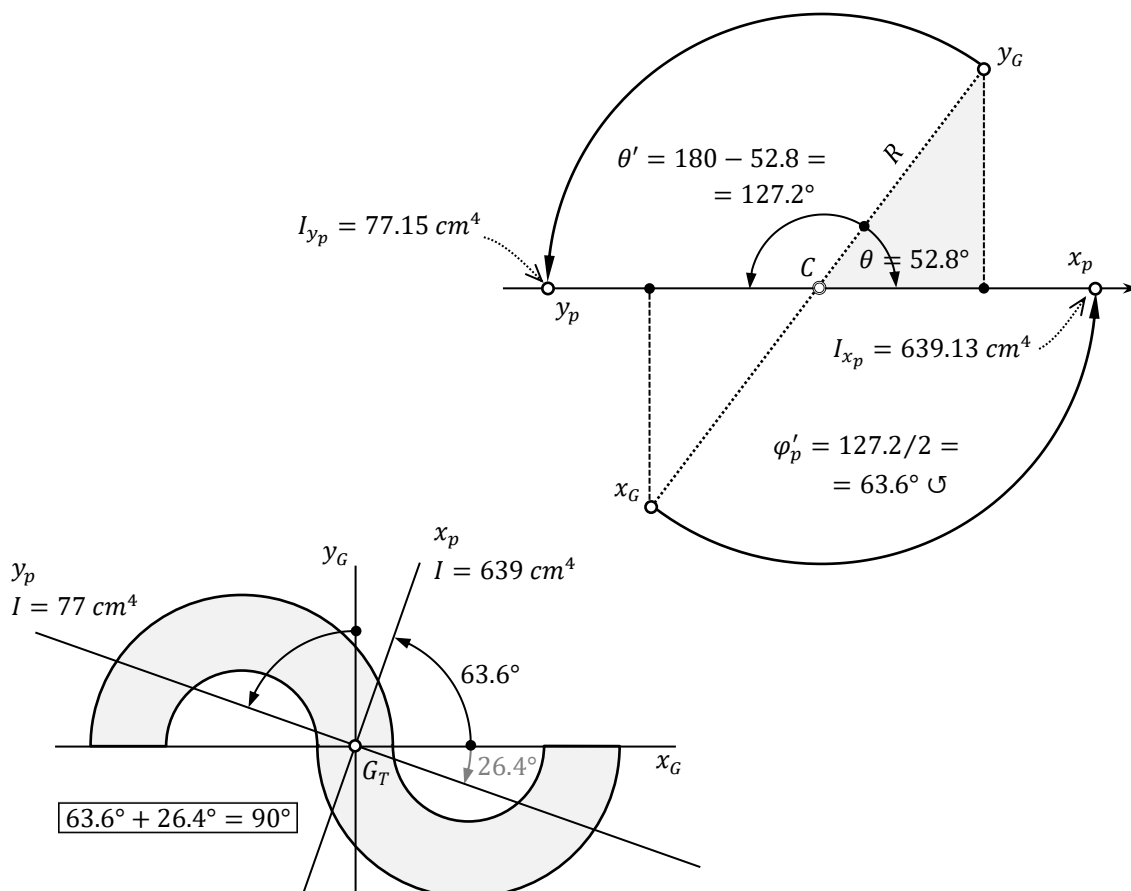


A modo de interpretación de los resultados, dada la forma de la figura, es completamente lógico que el momento principal mayor haya salido respecto del eje y_p , ya que el área está, de forma muy evidente, más alejada de dicho eje que del eje x_p .

Por otro lado, a modo de repaso del concepto, se recuerda que las direcciones principales marcan los dos ejes, de entre los infinitos que pasan por G_T , respecto de los cuales los momentos de inercia son el máximo y el mínimo de entre todos los posibles. Además, esta pareja de ejes, siempre perpendiculares entre sí, que divide el área total entre sus cuatro cuadrantes, tiene precisamente la orientación requerida para que el aporte de producto de inercia de las porciones que quedan en los dos cuadrantes positivos se compense exactamente con el aporte de producto de inercia de las porciones que quedan en los dos cuadrantes negativos, siendo por tanto nulo el producto de inercia total respecto de la pareja de ejes principales (sin necesidad de ser ninguno de ellos eje de simetría).

Es necesario aclarar que, cuando se habla de compensación del producto de inercia, no debe pensarse simplemente en la cantidad de área que hay en cada signo, véase por ejemplo, que en el caso presentado la cantidad de área en los cuadrantes negativos es claramente superior a la de los positivos. Hay que entender que el producto de inercia es proporcional al área, pero también a cuánto de alejada esté ésta de los ejes, decir, que un área pequeña más alejada puede tener un producto (o momento) de inercia mayor que un área grande menos alejada).

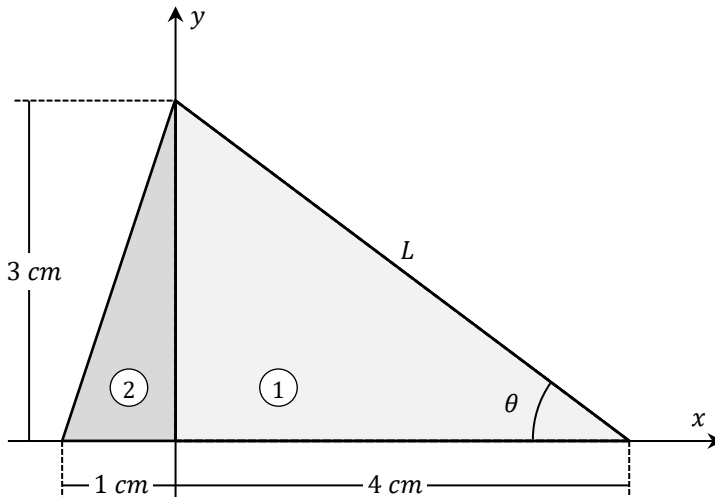
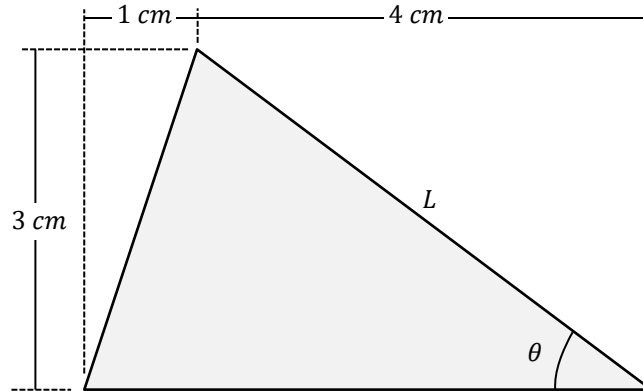
Por último, se va a utilizar este ejemplo para ilustrar el hecho de que resulta indiferente hacia cuál de los dos sentidos girar el diámetro del círculo de Mohr para llevarlo a la disposición horizontal.



Aunque se intercambien los nombres de los ejes principales, $x_p \rightleftharpoons y_p$, ni las direcciones finales, ni los valores de los momentos de inercia respecto de dichas direcciones cambia.

• Ejemplo 12.4

- Calcular los momentos principales y orientación de los ejes principales que pasan por G .
- Interpretar la orientación obtenida, viendo que $L = 5 \text{ cm}$ y que $\tan \theta = 3/4$.



$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{12}{2} \text{ cm}^2$$

$$G_{x_1} = \frac{1}{3} \cdot 4 \text{ cm}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} \text{ cm}^2$$

$$x = -\frac{1}{3} \cdot 1 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$$

$$G_y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ cm}$$

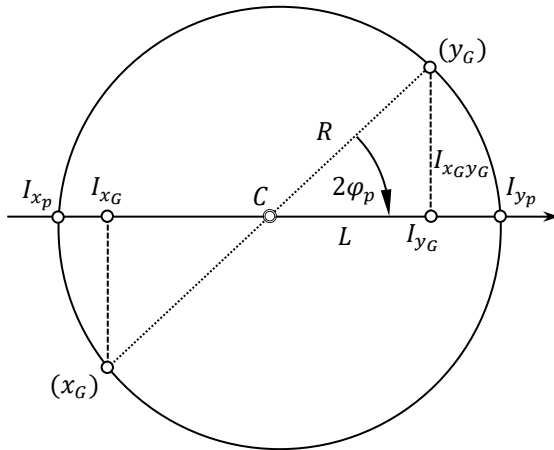
$$G_x = \frac{\frac{12}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{15}{2}} = \frac{\frac{12 \cdot 4}{3} - \frac{3}{3}}{15} = \frac{4 \cdot 4 - 1}{15} = 1 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 3^3 = \frac{5 \cdot 3 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{45}{4} \text{ cm}^4 \quad I_y = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 4^3 + \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot 1^3 = \frac{3}{3 \cdot 4} (64 + 1) = \frac{65}{4} \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{1}{24} \cdot 4^2 \cdot 3^2 + \left(-\frac{1}{24} \cdot 1^2 \cdot 3^2\right) = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 8} \cdot (16 - 1) = \frac{45}{8} \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G} = \frac{45}{4} - \frac{15}{2} \cdot 1^2 = \frac{45 - 2 \cdot 15}{4} = \frac{15}{4} \text{ cm}^4 \quad I_{y_G} = \frac{65}{4} - \frac{15}{2} \cdot 1^2 = \frac{65 - 2 \cdot 15}{4} = \frac{35}{4} \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G y_G} = \frac{45}{8} - \frac{15}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{45 - 4 \cdot 15}{8} = -\frac{15}{8} \text{ cm}^4$$



$$C = \frac{\frac{15}{4} + \frac{35}{4}}{2} = \frac{15 + 35}{2 \cdot 4} = \frac{50}{8} = \frac{25}{4}$$

$$L = \frac{\frac{35}{4} - \frac{15}{4}}{2} = \frac{35 - 15}{2 \cdot 4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{15^2}{8^2} + \frac{20^2}{8^2}} = \frac{1}{8} \sqrt{5^2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 4^2} = \frac{5}{8} \sqrt{9 + 16} = \frac{25}{8}$$

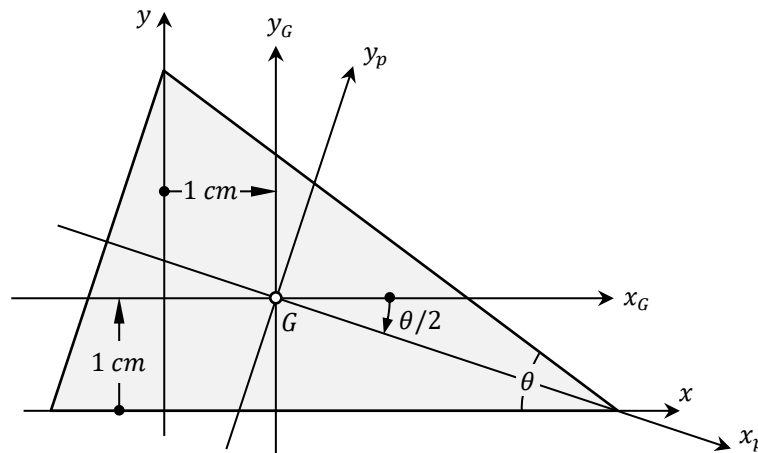
$$I_{x_p} = \frac{50}{8} - \frac{25}{8} = \frac{25}{8} \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\varphi_p = \frac{15/8}{20/8} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$I_{y_p} = \frac{50}{8} + \frac{25}{8} = \frac{75}{8} \text{ cm}^4$$

$$\varphi_p = \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{4} \cup$$

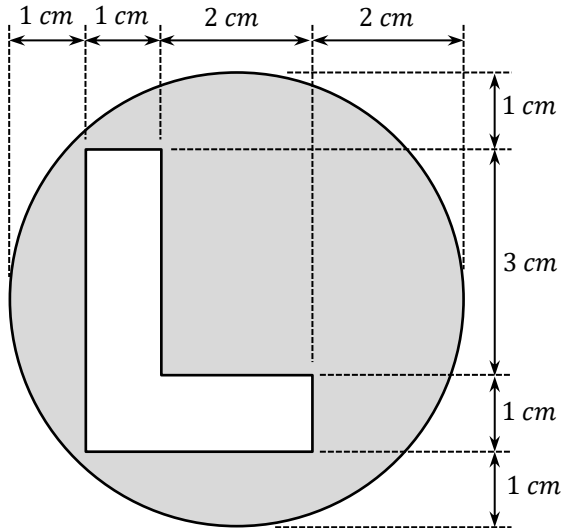
Puesto que se trata de un triángulo isósceles, la bisectriz de θ es un eje de simetría y por lo tanto un eje principal de inercia. Efectivamente, se comprueba matemáticamente que $\varphi = \theta/2$.



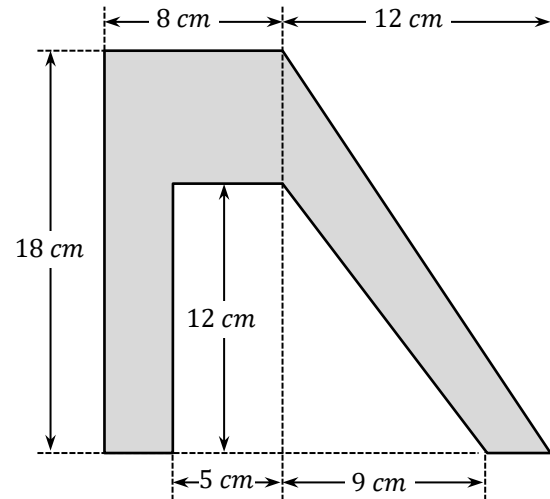
Problemas de Examen

Calcular los momentos principales de inercia respecto de unos ejes que pasen por el centroide y dibujar las correspondientes direcciones principales de inercia.

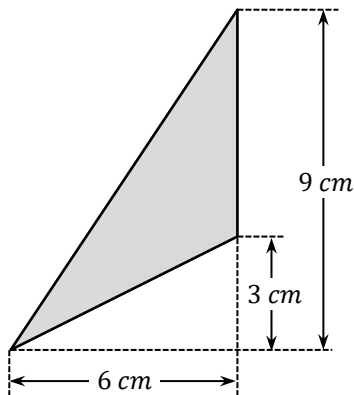
- Problema 12.1 *mayo 2015* 40 minutos



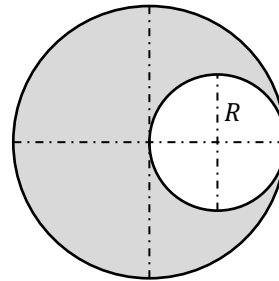
- Problema 12.2 *junio 2021* 30 minutos



- Problema 12.3 *junio 2018* 35 minutos

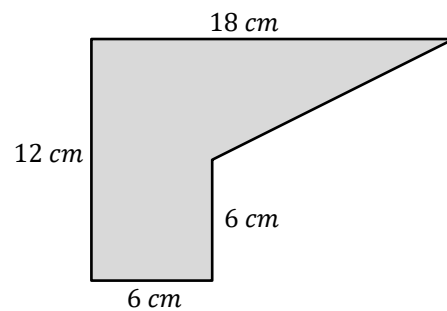


- Problema 12.4 *mayo 2019* 30 minutos



- Problema 12.5 *junio 2019* 30 minutos

- Obtener la posición del centroide. [0.4 puntos]
- Obtener los momentos de inercia y el producto de inercia respecto de unos ejes horizontal y vertical que pasen por el centroide. [0.4 puntos]
- Obtener los momentos principales de inercia respecto de los ejes que pasen por el centroide y dibujar las direcciones principales de inercia. [0.4 puntos]



13. ESFUERZOS INTERNOS

13.1 INTRODUCCIÓN

Supóngase un elemento sólido con forma de cuerpo prismático de eje longitudinal rectilíneo. Este elemento se vincula a otros a través de una serie de uniones, de manera que se impide su movimiento y se garantiza que permanezca en una situación de equilibrio estático para cualquier estado de carga. Como es sabido, al aplicar cargas al sistema, como respuesta a las mismas aparecen unas fuerzas de enlace en las uniones. Los puntos en los que se aplican las cargas son unos y los puntos en los que se manifiestan las reacciones a éstas son otros, por lo tanto, es evidente que las fuerzas de alguna manera están transmitiéndose, o ‘viajando’, por el interior del sólido.

Para poder determinar los valores de estas fuerzas en el interior del elemento es necesario dejarlas a la vista. La forma de hacerlo es cortar virtualmente el sólido de manera que quede dividido en dos partes. Haciendo esto se expone el interior del cuerpo y se manifiestan los denominados *esfuerzos internos*. El término ‘esfuerzos’ engloba tanto fuerzas como momentos.

Los esfuerzos internos en ambas partes de la pieza original satisfacen el principio de acción-reacción. Para determinar sus valores simplemente se aplica el principio de que si un sólido está en equilibrio, cualquier parte del mismo también ha de estarlo. Es decir, las fuerzas internas son las que garantizan el equilibrio en el diagrama de sólido libre de la parte cortada.

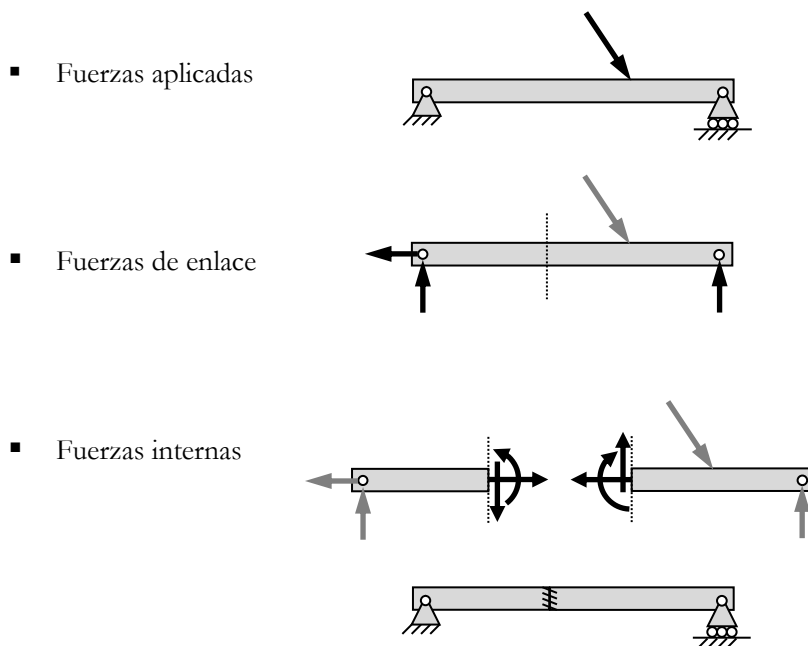


Fig. 13. 1 Esfuerzos internos

La manera de realizar el corte virtual es siempre mediante un plano perpendicular al eje longitudinal de la pieza. El área plana resultante del corte realizado (la superficie interior del sólido que el corte deja expuesta) se denomina *sección transversal* de la pieza.

13.2 AXIAL, CORTANTE Y FLECTOR

Hay una manera muy sencilla de identificar los esfuerzos internos que existen en la sección transversal de una pieza prismática. Supóngase que en lugar de tener una única pieza que se divide en dos por un plano transversal, se tienen dos piezas distintas rígidamente unidas entre sí. Determinar las fuerzas internas en la sección transversal de la pieza original es completamente equivalente a determinar las fuerzas de enlace en la unión entre los dos sólidos mencionados. Puesto que se trata de una unión rígida, si uno de los elementos estuviera fijo, el otro no tendría ninguna capacidad de movimiento. La unión entre ambos es como un empotramiento, que anula todos los grados de libertad. Por lo tanto, las reacciones de enlace entre las dos piezas, y de igual modo los esfuerzos internos en el corte, son:

- En el caso plano: Dos fuerzas en las dos direcciones del plano y un momento en la dirección perpendicular a éste.
- En el caso espacial: Fuerzas y momentos en las tres direcciones.

Se describirá en primer lugar el caso plano. Las dos direcciones para poner las fuerzas van a considerarse siempre la del eje longitudinal de la pieza y su perpendicular. El eje longitudinal es el que pasa por el centroide G de la sección transversal. Haciendo esto, los tres esfuerzos internos se denotan con la siguiente nomenclatura. Suponiendo un sistema mecánico en el plano xy , de tal manera que el eje longitudinal de la pieza se haga coincidir con el eje x del sistema de referencia:

- N : *fuerza axial*, en la dirección del eje longitudinal de la pieza, perpendicular (normal) a la sección transversal (eje x).
- V : *fuerza cortante*, en la dirección perpendicular al eje de la pieza, contenida en la sección transversal (eje y).
- M : *momento flector*, perpendicular al plano en que está definido el sistema mecánico (eje z).

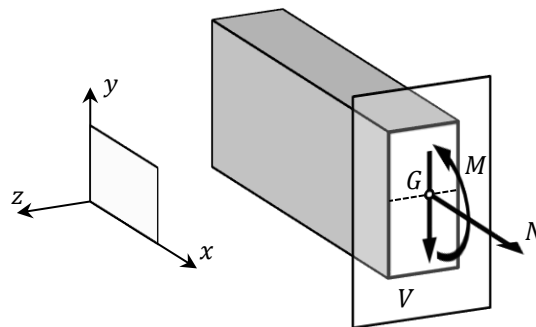


Fig. 13. 2 Esfuerzos internos en sistemas planos

Es necesario establecer un convenio de signos ya que un mismo esfuerzo interno existe simultáneamente sobre las dos mitades de la pieza en sentidos opuestos.

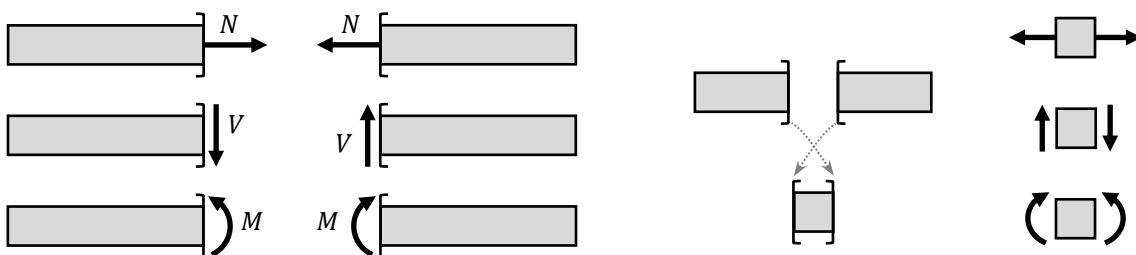


Fig. 13. 3 Esfuerzos internos positivos. Símbolos

13.3 DIAGRAMAS DE ESFUERZOS INTERNOS

Como ya se había adelantado, puesto que cualquier pedazo de un sólido en equilibrio también ha de estarlo, los valores de los esfuerzos internos en una sección de la pieza se determinan mediante las ecuaciones de equilibrio estático. Estas ecuaciones se plantean para el diagrama de sólido libre de una cualquiera de las dos mitades en las que el plano de corte transversal al eje divide a la pieza. Como hay tres esfuerzos internos, éstos son completamente determinables en función de las cargas externas del elemento (aplicadas y de enlace) con las tres ecuaciones independientes del equilibrio plano. Lo más práctico suele ser, llamando C al centro de la sección transversal:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow M$$

Los valores de los esfuerzos internos en general no se mantienen constantes en cualquier sección de la pieza. Puesto que los valores del axial, el cortante y el flector cambian (ya sea a saltos discretos y/o de forma continua), es necesario trazar unos diagramas que muestren la evolución sus valores a lo largo de la posición sobre el eje de la pieza y permitan, por tanto, determinar los valores concretos en cualquier punto de éste. La forma de obtener los valores de los esfuerzos internos en función de la posición es plantear un corte a una distancia genérica x desde una determinada referencia.

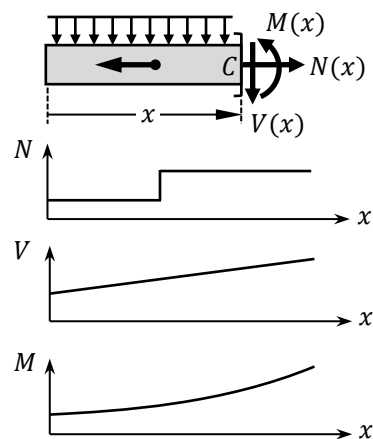


Fig. 13. 4 Diagramas

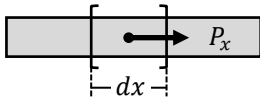
El análisis de las fuerzas internas en una pieza requiere considerar la división de la misma en una serie de tramos, en función de las cargas (fuerzas y momentos) externas (aplicadas y de enlace) que haya actuando sobre ella. Obsérvese que si se va recorriendo la pieza de un extremo a otro, al considerar el diagrama de sólido libre de una de las mitades, éste cambia cada vez que aparece una nueva carga puntual y/o cada vez que aparece (o desaparece, o cambia de forma) una carga distribuida. Cada vez que cambia el diagrama de sólido libre que deja al descubierto los esfuerzos internos, cambian también las ecuaciones de equilibrio que se usan para calcularlos. En consecuencia:

- El análisis de esfuerzos internos de la pieza completa debe realizarse por tramos.
- En cada punto que exista una carga externa puntual comienza un nuevo tramo.
- En cada punto que comience, o termine, o cambie una carga distribuida comienza un nuevo tramo.
- Las expresiones de esfuerzos internos obtenidas en cada tramo sólo son válidas dentro del mismo.

Al inspeccionar el diagrama de sólido libre con la totalidad de cargas exteriores (incluidas las fuerzas de enlace resueltas), puede darse el caso de que no exista ninguna fuerza en la dirección del eje de la pieza. En esta situación, en cualquier corte que se diera, en cualquiera de los tramos, al representar el diagrama de sólido libre de una de las mitades, la única fuerza en la dirección del eje del elemento sería el axial, N . Por lo tanto, la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ siempre proporcionaría el resultado $N = 0$. La conclusión es que, cuando se dé esta situación, no es necesario trazar el diagrama de axiales y, de hecho, en cualquier corte, incluso se puede prescindir de plantear N .

13.4 RELACIONES ENTRE CARGAS Y DIAGRAMAS

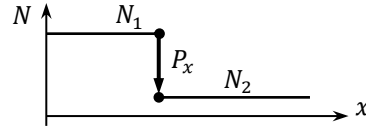
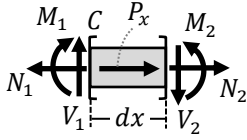
- Fuerza puntual en dirección axial



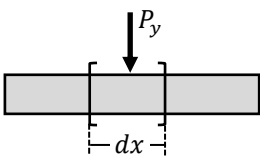
$$\sum F_x = P_x + N_2 - N_1 = 0 \rightarrow \boxed{N_2 = N_1 - P_x}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_2 = V_1$$

$$\sum M_C = M_2 - M_1 - V_2 \cdot dx = 0 \xrightarrow{dx \approx 0} M_2 = M_1$$



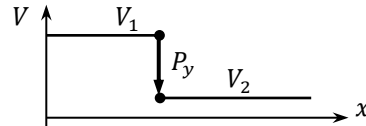
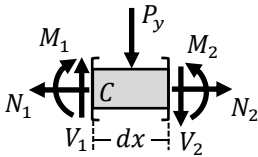
- Fuerza puntual en dirección transversal



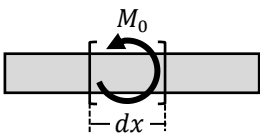
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = N_1$$

$$\sum F_y = V_1 - V_2 - P_y = 0 \rightarrow \boxed{V_2 = V_1 - P_y}$$

$$\sum M_C = M_2 - M_1 - V_2 \cdot dx - P_y \cdot dx/2 = 0 \xrightarrow{dx \approx 0} M_2 = M_1$$



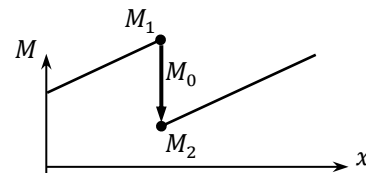
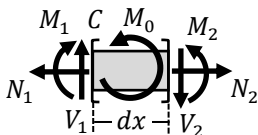
- Momento puntual



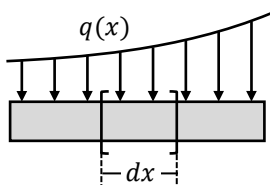
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = N_1$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_2 = V_1$$

$$\sum M_C = M_0 + M_2 - M_1 - V_2 \cdot dx = 0 \xrightarrow{dx \approx 0} \boxed{M_2 = M_1 - M_0}$$



- Carga transversal distribuida



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = N_1$$

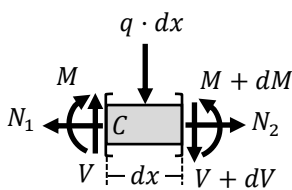
$$\sum F_y = V - (V + dV) - q \cdot dx = 0$$

$$dV = -q \cdot dx \rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx} = -q}$$

$$\sum M_C = (M + dM) - M - (V + dV) \cdot dx - q \cdot dx \cdot dx/2 = 0$$

$$dM - V \cdot dx + q \cdot dx \cdot dx - q \cdot dx \cdot dx/2 = 0$$

$$\frac{dM}{dx} - V + \frac{q}{2} \cdot dx = 0 \xrightarrow{dx \approx 0} \boxed{\frac{dM}{dx} = V}$$



Una carga puntual aplicada en un punto del eje de la pieza implica una discontinuidad (salto) en el diagrama de algún esfuerzo interno en dicho punto:

- Una fuerza puntual en la dirección del eje de la pieza implica una discontinuidad en el diagrama de axiales. La magnitud del salto es precisamente el valor de la fuerza aplicada. Con el convenio de signos empleado, una fuerza hacia la derecha conduce a un salto hacia abajo al avanzar en el sentido positivo sobre el eje x .
- Una fuerza puntual aplicada en la dirección transversal al eje de la pieza implica una discontinuidad en el diagrama de cortantes. La magnitud del salto coincide con el valor de dicha fuerza. Con el convenio de signos empleado, a medida que se avanza en el sentido positivo del eje x , el sentido del salto es el mismo que el de la fuerza.
- Un momento puntual aplicado sobre la pieza en un determinado punto conlleva una discontinuidad en el diagrama de flectores a la altura de dicho punto. El valor del salto es el valor del propio momento aplicado. Con el convenio de signos adoptado, un momento en sentido antihorario se corresponde con un salto hacia abajo al recorrer el eje de izquierda a derecha.

Estas reglas, por supuesto, también admiten la lectura inversa, es decir, en un punto del eje donde no haya aplicada una carga puntual, no puede existir una discontinuidad en el correspondiente diagrama.

Por otro lado se ha obtenido que para una carga transversal distribuida a lo largo del eje, con carácter general, en cualquier punto:

- El valor de la carga distribuida es la derivada del cortante (cambiada de signo).
- El valor del cortante es la derivada del flector.

Estas relaciones se cumplen también cuando no exista carga distribuida, ya que esto no es sino el caso particular $q(x) = 0$. Debe recordarse que la derivada de una función en un punto es la pendiente de su recta tangente en dicho punto. Por tanto:

En un tramo de la pieza en el que no haya aplicada carga distribuida, como la pendiente del cortante es nula, el cortante se mantiene constante (si $q = V' = 0$, entonces V es constante). Así mismo en este caso, al ser la pendiente del flector constante, éste varía según una línea recta. Obviamente, si el cortante es una constante positiva, el flector es una recta ascendente y viceversa.

De manera análoga, en un tramo en que haya aplicada una carga uniformemente distribuida (q constante), el diagrama de cortante será lineal. En el caso habitual de carga hacia abajo, la pendiente de dicha recta será negativa. Una constante es un polinomio de grado 0 y una recta es un polinomio de grado 1. La derivada de un polinomio es siempre otro de un grado menos. Por lo tanto, si la derivada del flector es una recta, en este caso el flector es un polinomio de segundo grado, es decir, una parábola. En el caso citado de cortante descendente, el término cuadrático del flector es negativo, lo cual significa que la parábola tiene las ramas hacia abajo. Además, si el cortante pasa por 0, en dicho punto la parábola tiene un extremo relativo que suele ser de interés determinar. En una parábola con las ramas hacia abajo, obviamente, ese extremo es un máximo relativo de la función.

Finalmente, si la carga distribuida variara linealmente (distribución triangular o trapezoidal), al ser la función $q(x)$ un polinomio de primer grado, el cortante es parabólico y el flector un polinomio de grado 3.

Adicionalmente se cumple la siguiente regla:

- Cuando en un tramo de análisis existe una carga distribuida (uniforme o no), la diferencia entre los valores del cortante en ambos extremos de dicho intervalo es el valor de la fuerza puntual equivalente a la distribuida.

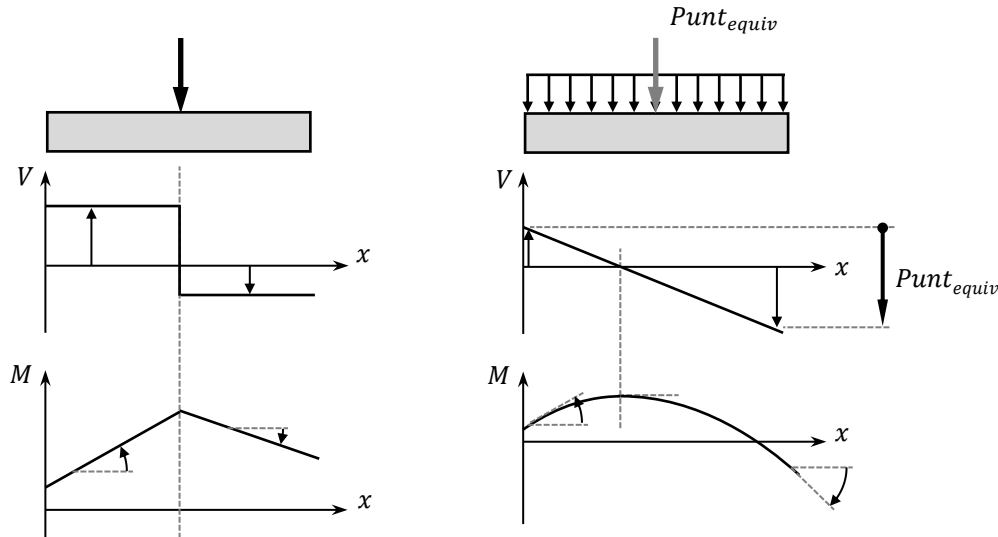


Fig. 13. 5 Relación entre cortante y flector

13.5 MÉTODO DE LOS CORTES

Paso 1.1: Resolución de las reacciones en los enlaces.

El primer paso consiste siempre en calcular las reacciones en los enlaces de la pieza. El punto de partida para comenzar el análisis de esfuerzos internos es, de hecho, aquello que constituía el resultado de cualquiera de los problemas del tema 3, es decir, la representación del diagrama de sólido libre resuelto de la pieza que se quiere analizar. Para ello, se han de realizar todas las consideraciones y aplicar todas las estrategias presentadas en el tema de equilibrio estático:

- Identificación inicial de los elementos biarticulados sin cargas.
- Planteamiento de las incógnitas (reacciones) en función de la naturaleza de cada enlace.
- Aplicación del principio de acción-reacción donde sea necesario.
- Sustitución de cualquier carga distribuida por su fuerza puntual equivalente.
- “Diseño” de las ecuaciones de equilibrio estático a aplicar en cada diagrama de sólido libre.

Paso 1.2: Comprobación del equilibrio estático.

La comprobación de resultados, que es la verificación de que la pieza, una vez resueltos los valores de sus fuerzas de enlace y sustituidos en su diagrama de sólido libre (donde eran inicialmente incógnitas), efectivamente se encuentra en equilibrio de fuerzas y momentos, no debe considerarse como algo opcional, sino que debe realizarse indefectiblemente. Esto es debido a que, en caso de ser resultados incorrectos, se transmitirá el error a todo el cálculo de esfuerzos internos que, normalmente, es más laborioso. En conclusión, no se debe comenzar nunca el cálculo de esfuerzos internos sin tener la certeza (sin haberse cerciorado explícitamente) de que, bajo la acción de la totalidad de las cargas externas (tanto aplicadas como de enlace), la pieza se encuentra, efectivamente, en equilibrio estático.

Paso 2: Identificación de los tramos de análisis.

Para realizar este sencillo paso es necesario representar la pieza con la totalidad de cargas exteriores tal y como son en la realidad y recorrerla de extremo a extremo. Un nuevo tramo da comienzo en cada punto del eje de la pieza en el que exista una carga puntual o en el que comience/finalice un tipo de carga distribuida. En el habitual caso de que el elemento tenga aplicadas cargas distribuidas, es necesario rehacer el diagrama de sólido libre que se ha utilizado para la comprobación, ya que éste contiene las fuerzas puntuales equivalentes (necesarias para plantear las ecuaciones de equilibrio), pero tales cargas no son las reales. Los diagramas de esfuerzos internos no son iguales si se considera la fuerza puntual equivalente (incorrecto), o si se considera la carga distribuida real (correcto).

En esta representación de cargas externas reales y completamente determinadas (todas de valores conocidos), cualquier fuerza puntual que estuviera inclinada respecto del eje longitudinal de la pieza tendrá que descomponerse en las dos direcciones fundamentales de los esfuerzos internos, ya que la proyección sobre el propio eje del elemento afecta directamente al esfuerzo axial y la proyección sobre el eje perpendicular afecta directamente a los esfuerzos cortante y flector. Debajo de esta representación de la pieza se reserva el espacio para trazar los diagramas de los tres esfuerzos internos.

A partir de este momento, los siguientes pasos, que están encaminados a completar el análisis de un tramo, han de realizarse independientemente para cada uno de los tramos identificados. Normalmente se van recorriendo uno a uno, de izquierda a derecha, y para cada uno de ellos hay que realizar los pasos 3 y 4.

Paso 3.1: Corte de la pieza para dejar a la vista los esfuerzos internos del tramo.

- Se efectúa un corte a la pieza completa por un punto de su eje longitudinal, que se encuentre en una posición arbitraria dentro del tramo y se elige una de las dos mitades en las que la pieza completa ha quedado dividida. El análisis de cualquiera de las dos mitades proporciona los mismos resultados, así que, obviamente, se elige aquella mitad que resulte más simple.
- Se representa el diagrama de sólido libre de la mitad elegida y se establece la variable que define la posición genérica del corte respecto del punto inicial del tramo.
 - Si se ha elegido la mitad izquierda de la pieza, el tramo se analiza de izquierda a derecha, el punto inicial del tramo es su extremo izquierdo y la posición del corte se mide hacia la derecha desde el punto inicial, a una distancia genérica x .
 - Si se ha elegido la mitad derecha de la pieza, el tramo se analiza de derecha a izquierda, el punto inicial del tramo es su extremo derecho y la posición del corte se mide hacia la izquierda desde el punto inicial, a una distancia genérica x' .
- Como se trata de un diagrama de sólido libre, es necesario sustituir aquello que se ha retirado por el efecto que realmente tenía, es decir, se sustituye la mitad eliminada por los esfuerzos internos en el corte. La única consideración especial que hay que tener en cuenta es que dichos esfuerzos internos han de plantearse siempre en los sentidos positivos establecidos en el convenio de signos. Estos sentidos, además, son distintos en función de cuál de las dos mitades se vaya a resolver. A modo de regla nemotécnica, en cualquiera de las dos alternativas:
 - El axial siempre se plantea saliente, “traccionando”.
 - El flector siempre se plantea “tirando” de la parte inferior y “empujando” por la parte superior.
 - El cortante en la mitad izquierda “baja” y en la mitad derecha “sube”.

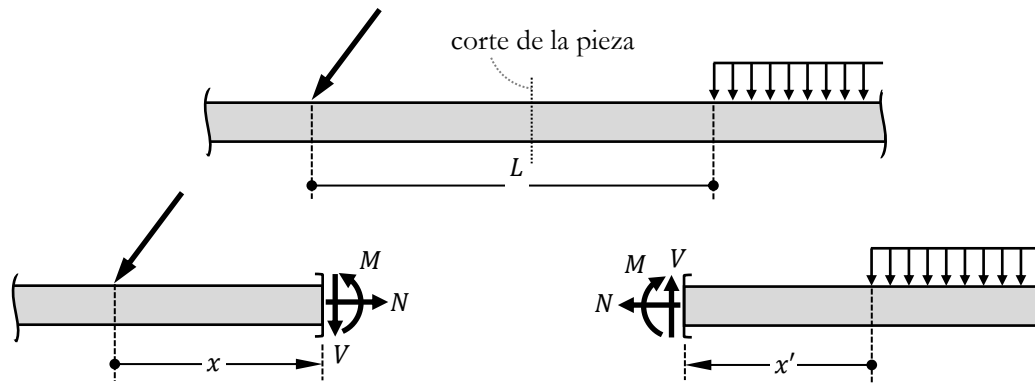


Fig. 13. 6 Relación entre cortante y flector

Obsérvese que, en cualquiera de las dos alternativas, x (o x') igual a 0 define la posición del punto inicial del tramo, y que x (o x') igual a la longitud del tramo, L , define la posición del punto final del mismo. Esta regla se cumple aunque se trate de tramos intermedios, ya que el origen de la variable posicional no se establece en el extremo de la pieza sino en el punto inicial de cada tramo.

Paso 3.2: Cálculo de las funciones de los esfuerzos internos del tramo.

- Como el diagrama de sólido libre de la mitad elegida representa una parte de la pieza que no puede moverse, debe cumplir las ecuaciones de equilibrio estático.
- Como todas las cargas externas están determinadas, las únicas incógnitas de dicho diagrama de sólido libre son los tres esfuerzos internos planteados en el corte, N , V y M .
- Como se dispone de tres ecuaciones de equilibrio estático independientes para un diagrama de sólido libre plano, los valores de los tres esfuerzos internos son determinables.

Como los valores de esas incógnitas se obtendrán de resolver unas ecuaciones de equilibrio planteadas para un diagrama de sólido libre en que figura un parámetro posicional genérico x (que puede variar de 0 a L), algunos de los resultados dependerán de x , es decir, no se obtienen unos valores concretos de los esfuerzos internos (como cuando se resuelven las reacciones de enlace), sino unas funciones de x . Si se desea conocer el valor específico de un esfuerzo interno en una sección concreta del tramo (de la pieza), basta con evaluar la función correspondiente en la posición concreta x de dicha sección.

En lo referente a la verificación del cumplimiento de las relaciones de derivación de las funciones obtenidas, que es algo muy sencillo que debe hacerse siempre, ha de tenerse en cuenta que las relaciones demostradas teóricamente corresponden a la situación en la que la variable de posición x aumenta hacia la derecha, que es lo que sucede literalmente cuando se ha elegido para analizar la mitad izquierda de la pieza. En tal caso, por lo tanto, se debe verificar que lo obtenido cumple:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \qquad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

Sin embargo, si se está analizando la mitad de la derecha y por tanto, las expresiones están en función de una variable posicional que crece hacia la izquierda, x' , los signos de las relaciones de derivación se invierten. Como $x + x' = L \rightarrow x = L - x' \rightarrow dx = -dx'$:

$$\frac{dV(x')}{dx'} = q(x') \qquad \frac{dM(x')}{dx'} = -V(x')$$

Siendo en cualquiera de los dos casos q positivo hacia abajo, lo cual representa la situación más frecuente y siendo válida su relación con V incluso cuando no hay carga distribuida, $q = 0$.

Paso 4: Representación de los diagramas de esfuerzos internos del tramo comprobando los saltos.

La representación gráfica de las funciones obtenidas constituye, de hecho, el propio trazado de los diagramas de esfuerzos internos del tramo (lo cual es en sí el resultado del problema). En realidad, este paso debe hacerse tras haber finalizado el paso anterior de cálculo en cada tramo, es decir, sin esperar a tener los cálculos de las funciones de todos los tramos. En cuanto se tienen las funciones de un tramo (resultados del paso 3) deben representarse. El motivo es que la representación inmediata va a permitir ir realizando una serie de comprobaciones imprescindibles, que sirven para verificar que no han ido cometándose errores durante el proceso (o para detectar la existencia de errores potenciales lo antes posible, antes de continuar avanzando).

Antes de comenzar con la confección de los diagramas del ejemplo, van a darse algunas indicaciones generales y claves a tener en cuenta de cara a facilitar la representación de las funciones. Como norma elemental recuérdese que siempre el valor de la carga distribuida está relacionado con la pendiente (derivada) del cortante y que de igual modo siempre el valor del cortante está relacionado con la pendiente del flector. Estas relaciones se cumplen en cada punto del tramo. La pendiente de una función en un punto se puede interpretar geoméricamente, es proporcional a la elevación (ángulo) de la recta tangente a la propia función en dicho punto.

Las funciones a representar van a ser siempre polinómicas. Dependiendo del grado del polinomio a graficar, las consideraciones a tener en cuenta son las siguientes:

- Polinomio de grado 0 (constante): Cuando el esfuerzo interno sea un valor constante dentro del tramo, la representación del diagrama correspondiente resulta trivial, no es necesario hacer ninguna consideración adicional. Además de en los diagramas de axiales, que se construyen siempre a base de tramos de valor constante, se recuerda que esta situación se produce:
 - Cuando en un tramo no hay carga distribuida, el cortante es constante.
 - Cuando en un tramo el cortante es nulo, el flector es constante.
- Polinomio de grado 1 (recta inclinada): La representación es muy sencilla, basta con evaluar la función en los dos extremos del intervalo y unir los dos puntos obtenidos con una línea recta. Se recuerda que esta situación se produce:
 - Cuando en un tramo hay una carga distribuida uniformemente (valor constante de carga distribuida), el cortante es lineal. Además, el valor de esa pendiente invariable del cortante (avanzando hacia la derecha) es precisamente el valor negativo de la carga distribuida constante (aplicada hacia abajo).
 - Cuando en un tramo no hay carga distribuida y en consecuencia el cortante es constante, el flector es lineal. Además, el valor de esa pendiente invariable del flector (avanzando hacia la derecha) es precisamente el propio valor del cortante constante.
- Polinomio de grado 2 (parábola): Es necesario realizar ciertas consideraciones adicionales para hacer una representación correcta. El primer paso, al igual que en el caso anterior, consiste en evaluar la función en los dos extremos del intervalo, con lo que ya se dispone de dos puntos de la curva. Sin embargo, estos dos puntos ahora no se pueden unir con una recta, ya que la función es una línea curva. Lo más eficaz es acudir siempre a la información del valor de la pendiente (inclinación de la recta tangente) en cada uno de dichos extremos, que además es una información a la que siempre se va a poder acceder directamente. Se recuerda que esta situación se produce:

- Cuando en un tramo hay una carga distribuida linealmente (triangular o trapezoidal), el cortante es parabólico. La pendiente del cortante en el punto inicial del tramo es el valor (cambiado de signo) de la carga distribuida en dicho punto inicial y de igual modo, la pendiente de la parábola en el punto final del tramo es el valor (cambiado de signo) de la distribución de carga en dicho punto final. Los valores de la carga distribuida (las pendientes del cortante) en los dos extremos del intervalo se conocen, ya que se pueden ver simplemente mirando el propio dato de carga.
- Cuando en un tramo hay una carga distribuida uniformemente (valor constante) y en consecuencia el cortante es lineal, el flector es parabólico. La pendiente del flector en el punto inicial del tramo es el precisamente valor del cortante en dicho punto inicial y de igual modo, la pendiente de la parábola en el punto final del tramo es el valor del cortante en dicho punto final. Los valores del cortante en los dos extremos del intervalo se conocen ya que para representar ese esfuerzo se ha evaluado su función precisamente en dichos puntos.

Adicionalmente, cuando los valores de las dos pendientes del flector en ambos extremos del tramo son de signos opuestos, el punto de la parábola con pendiente nula queda dentro del mismo. En esta situación, que implica que el cortante es una recta que corta al eje horizontal (pasa por 0 dentro del tramo), es necesario calcular el vértice de la parábola, ya que constituye un extremo relativo del valor del flector. Este cálculo consiste simplemente en determinar cuál es el valor de x para el que $V(x) = 0$ y posteriormente evaluar $M(x)$ en dicho punto.

$$V(x) = c - q \cdot x = 0 \rightarrow x_v = c/q \rightarrow M(x_v)$$

- Polinomio de grado 3: La representación de un polinomio cúbico podría parecer en principio complicada, puesto que esta curva cuenta potencialmente con dos extremos relativos y un punto de inflexión en su curvatura (que pueden quedar o no dentro del tramo). Sin embargo, observando la evolución de su pendiente a lo largo de todos los puntos del intervalo de representación (longitud del tramo) la tarea no resulta conceptualmente más compleja que la representación de un polinomio de segundo grado. Se recuerda que esta situación se produce:
 - Cuando en un tramo hay una carga distribuida de forma triangular o trapezoidal y en consecuencia el cortante es parabólico, el flector es cúbico. Se evalúa el valor del flector en los extremos y ya se cuenta con dos puntos por los que tiene que pasar la curva. Se tiene evaluado el cortante en los dos extremos con lo que sabe cuáles son las pendientes (tangentes) con las que la curva “sale” del punto inicial y “llega” al punto final. Se tiene dibujada la curva que representa el valor del cortante en todo el tramo, con lo que si dicha parábola pasa por 0 dentro del intervalo habría que calcular la posición, o posiciones (dos a lo sumo) del eje en la(s) que $V(x) = 0$ y evaluar $M(x)$ en ellas, donde además, a la hora de representar, se ha de tener en cuenta que la recta tangente a la curva es horizontal (pendiente nula).

Todas estas situaciones se irán ilustrando sobre casos concretos a medida que vayan apareciendo en los diversos problemas de ejemplo.

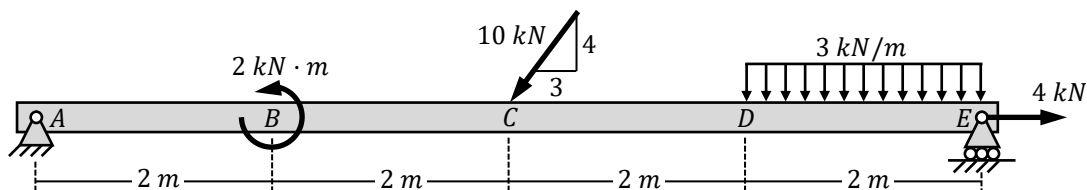
Como se ha mencionado anteriormente, es fundamental ir realizando la representación de los tres diagramas de cada tramo nada más calcularlos, es decir, representar el tramo actual antes de calcular el siguiente, para constatar que se verifican correctamente los saltos (discontinuidades) en las fronteras entre tramos asociados a la existencia de cargas puntuales en el diagrama de sólido libre de la pieza. Recuérdese que dicho diagrama de sólido libre, con la totalidad de cargas exteriores reales, se tiene representado justo encima de los tres diagramas de esfuerzos internos. En este sentido, las comprobaciones a realizar son:

- En una frontera entre tramos originada por la existencia de una fuerza puntual en dirección axial, debe haber un salto en el diagrama N de valor coincidente con la propia carga. Fuerza hacia la derecha implica salto hacia abajo y viceversa.
- En una frontera entre tramos originada por la existencia de una fuerza puntual en dirección transversal, debe haber un salto en el diagrama V de valor coincidente con la propia carga. Fuerza hacia abajo implica salto hacia abajo y viceversa.
- En una frontera entre tramos originada por la existencia de momento puntual, debe haber un salto en el diagrama M de valor coincidente con la propia carga. Momento antihorario implica salto hacia abajo y viceversa.

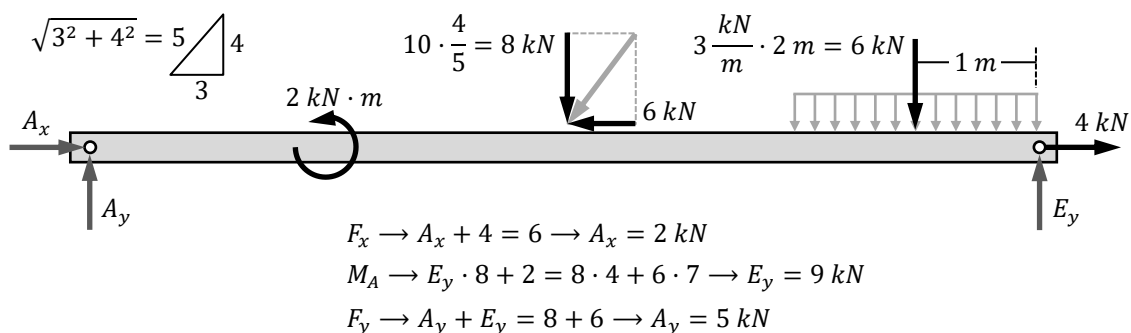
De manera recíproca, en un punto del elemento donde no exista una carga puntual, no puede haber un escalón el diagrama del esfuerzo interno correspondiente. Además, la idea de los escalones se aplica exactamente de la misma manera en los puntos extremos de la pieza completa, es decir, el extremo izquierdo, que es el punto inicial del primer tramo y el extremo derecho, que es el punto final del último tramo.

Para ello, basta con imaginar que existieran unos tramos virtuales a la izquierda y a la derecha de la pieza (como si fueran unas extensiones de la misma por ambos lados) donde los tres esfuerzos internos son triviales, nulos. De esta manera, las cargas puntuales existentes en el extremo izquierdo de la pieza quedan asociadas a los saltos en la frontera entre el tramo virtual nulo de la izquierda y el primer tramo real, y de igual modo, las cargas puntuales del extremo derecho de la pieza se entienden vinculadas a las discontinuidades en la frontera entre el último tramo real y el tramo virtual nulo de la derecha.

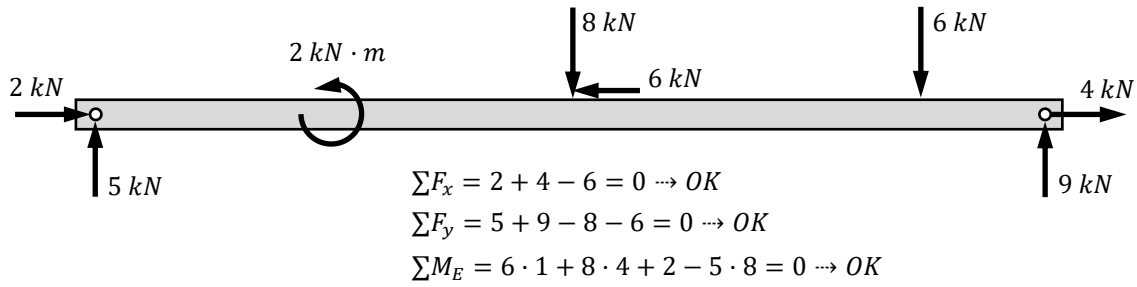
- Ejemplo 13.1 Representar los diagramas de esfuerzos internos del elemento.



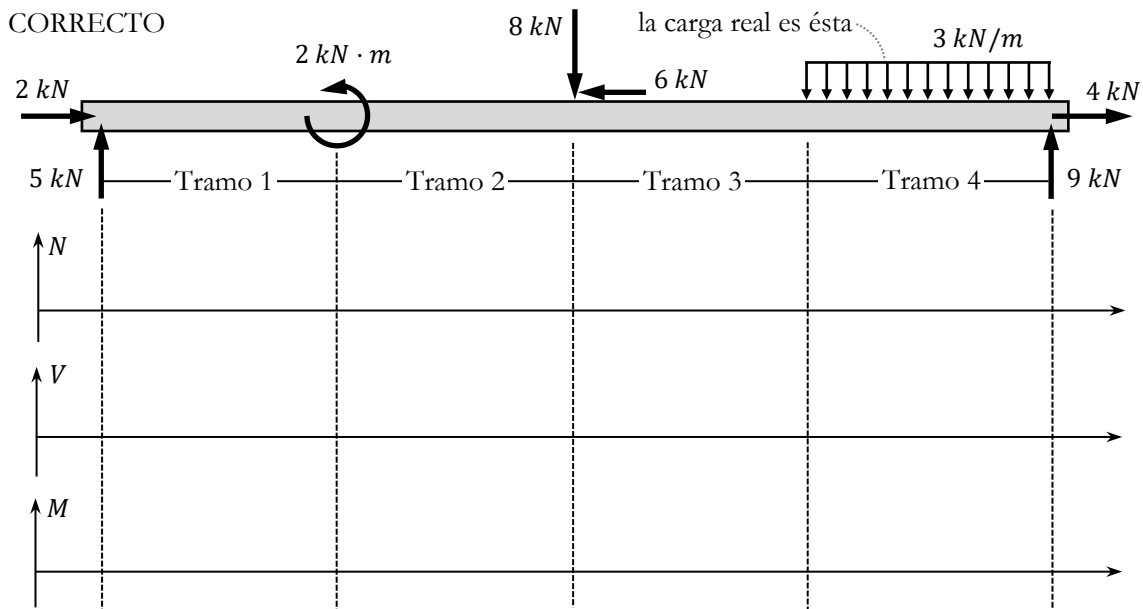
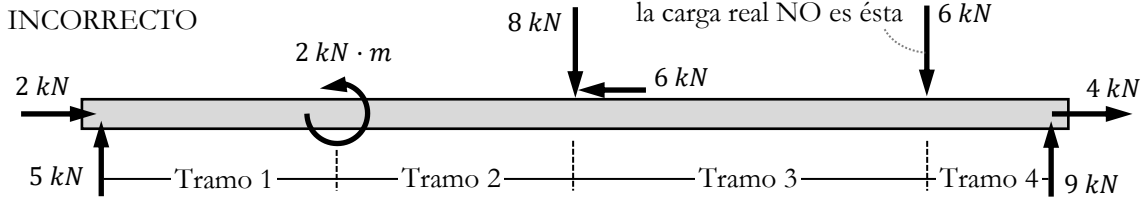
Paso 1: Resolución de las reacciones en los enlaces y comprobación del equilibrio estático.



A la hora de rehacer el diagrama de sólido libre sustituyendo las incógnitas por los valores obtenidos, recuérdese que, como se han de representar todas las cargas en sus sentidos reales, cualquier resultado negativo implica darle la vuelta al sentido de la incógnita en el diagrama y aplicar el valor absoluto.

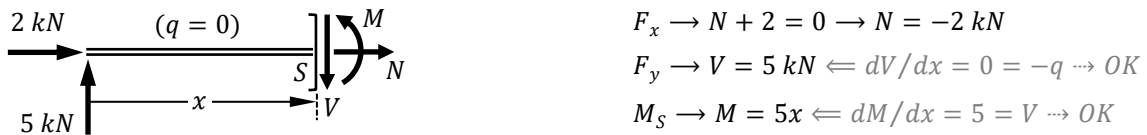


Paso 2: Identificación de los tramos de análisis

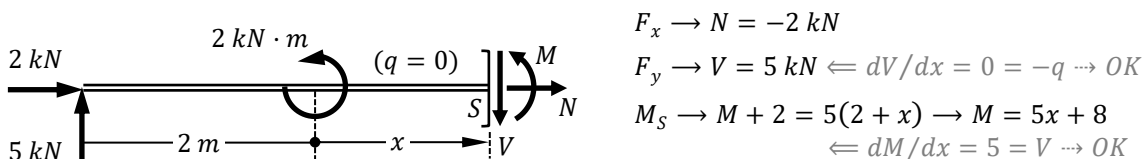


Paso 3: Corte de la pieza para dejar a la vista los esfuerzos internos del tramo y cálculo de las correspondientes funciones.

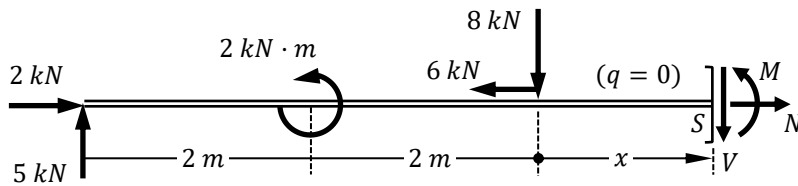
Tramo 1: Como es el primer tramo, la mitad más sencilla es, evidentemente, la de la izquierda.



Tramo 2: La mitad más sencilla sigue siendo la de la izquierda.



Tramo 3: Se van a comparar las resoluciones de ambas mitades.

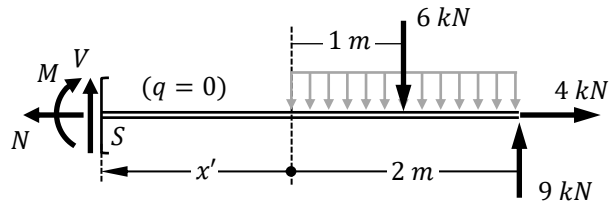


$$F_x \rightarrow N + 2 = 6 \rightarrow N = 4 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow V + 8 = 5 \rightarrow V = -3 \text{ kN} \leftarrow \frac{dV}{dx} = 0 = -q \rightarrow OK$$

$$M_S \rightarrow M + 8x + 2 = 5(4 + x) \rightarrow M = 5x + 20 - 8x - 2 = -3x + 18 \leftarrow \frac{dM}{dx} = -3 = V \rightarrow OK$$

Como hay que aplicar ecuaciones de equilibrio, cuando en el diagrama quede una carga distribuida es necesario considerar su puntual equivalente.



$$F_x \rightarrow N = 4 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow V + 9 = 6 \rightarrow V = -3 \text{ kN} \leftarrow \frac{dV}{dx'} = 0 = q \rightarrow OK$$

$$M_S \rightarrow 9(x' + 2) = M + 6(x' + 1) \rightarrow M = 9x' + 18 - 6x' - 6 = 3x' + 12 \leftarrow \frac{dM}{dx'} = 3 = -V \rightarrow OK$$

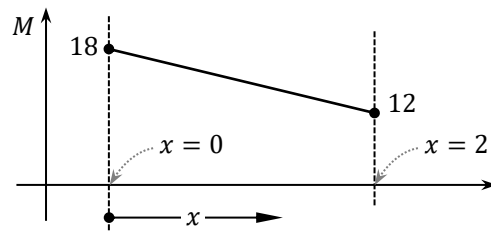
Como en este caso N y V son funciones constantes, es decir, su valor es independiente de x o x' , se han obtenido literalmente los mismos resultados en ambos análisis. Por el contrario, como M depende de la posición, pudiera parecer que las funciones obtenidas para ambos casos no coinciden y que conducen a diagramas diferentes, $M(x) = -3x + 18$ -vs- $M(x') = 3x' + 12$. Esto no es así, ya que en realidad se trata de la misma función, sólo que con un sencillo cambio de variable y su representación gráfica es, de hecho, idéntica.

Como para cualquier posición del corte se cumple que $x + x' = 2 \rightarrow x' = 2 - x$:

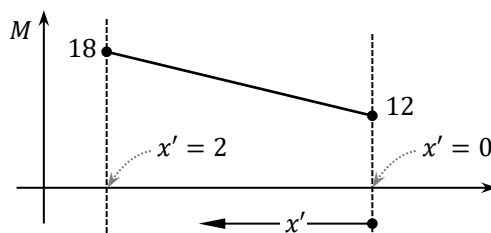
$$M(x') = 3x' + 12 = 3(2 - x) + 12 = 6 - 3x + 12 = -3x + 18 = M(x)$$

En cuanto a la igualdad de representación del diagrama, como en cualquier caso es un polinomio de grado 1 (línea recta), para dibujar la función basta con evaluarla en los dos puntos extremos y unirlos.

$$M(x) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ m} \rightarrow M = -3 \cdot 0 + 18 = 18 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ x = 2 \text{ m} \rightarrow M = -3 \cdot 2 + 18 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{cases}$$

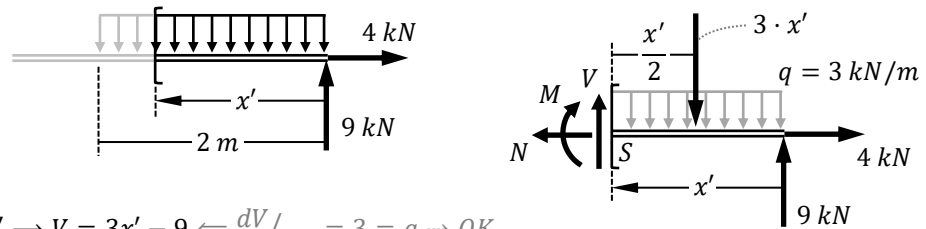


$$M(x') \rightarrow \begin{cases} x' = 0 \text{ m} \rightarrow M = 3 \cdot 0 + 12 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ x' = 2 \text{ m} \rightarrow M = 3 \cdot 2 + 12 = 18 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{cases}$$



Tramo 4: Como es el último tramo, la mitad más sencilla es, evidentemente, la de la derecha.

Cuando, como en este caso, el tramo a analizar tiene aplicada una carga distribuida (no nula), el corte que divide la pieza completa en dos mitades, también divide la propia carga distribuida. En el diagrama de sólido libre de la mitad de la pieza elegida hay que poner la totalidad de las cargas existentes en dicha mitad, tal y como son en su realidad, es decir, hay que plantear tan sólo la parte de la carga distribuida que queda realmente aplicada en la porción conservada del tramo cortado. Ahora, como los esfuerzos internos provienen de plantear las ecuaciones de equilibrio estático a ese diagrama de sólido libre, al igual que en cualquier otra situación, es necesario considerar la fuerza puntual equivalente a la carga distribuida realmente existente. Sólo que esa fuerza puntual (su valor y su punto de aplicación) ya no es la que se usó para calcular, por ejemplo, las reacciones en los enlaces, porque en el diagrama de sólido libre que se está planteando ahora ya no está la carga distribuida al completo, sino una porción de la misma, porción que además es variable en función de la posición genérica del corte. En cualquier caso, el cálculo, tanto del valor como del punto de aplicación de la fuerza puntual equivalente, se efectúa de la manera habitual, sin más que tener en cuenta el hecho de que tanto el área de la distribución (valor de la fuerza puntual), como la posición del centroide de la distribución (punto de aplicación de la fuerza puntual), ahora dependen de la posición del corte (x o x').



$$F_x \rightarrow N = 4 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow V + 9 = 3x' \rightarrow V = 3x' - 9 \leftarrow \frac{dV}{dx'} = 3 = q \rightarrow OK$$

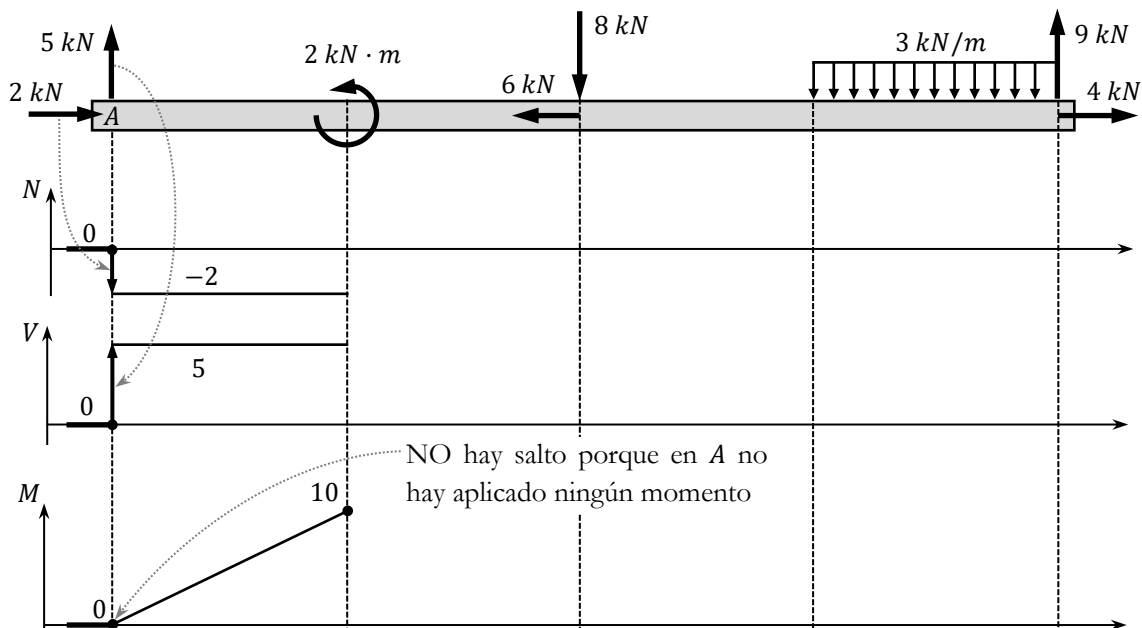
$$M_S \rightarrow 9 \cdot x' = M + 3x' \cdot \frac{x'}{2} \rightarrow M = -1.5x'^2 + 9x' \leftarrow \frac{dM}{dx'} = -3x' + 9 = -V \rightarrow OK$$

Paso 4: Representación de los diagramas de esfuerzos internos del tramo comprobando los saltos.

Tramo 1: $N = -2$
 $V = 5$

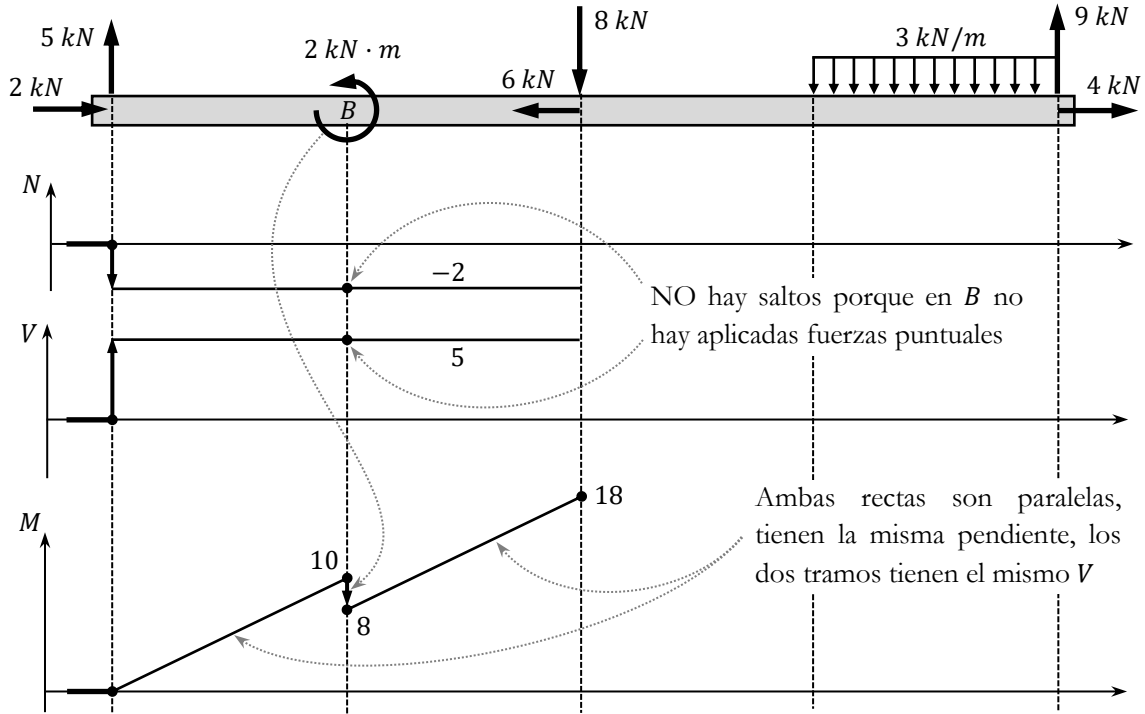
$$M = 5x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow M = 0 \\ x = 2 \rightarrow M = 10 \end{cases}$$

Se comprueban los saltos en la frontera entre el tramo virtual a la izquierda de A y el tramo 1. Obsérvese la correspondencia entre el valor de cada fuerza y el valor de cada salto (y los sentidos)



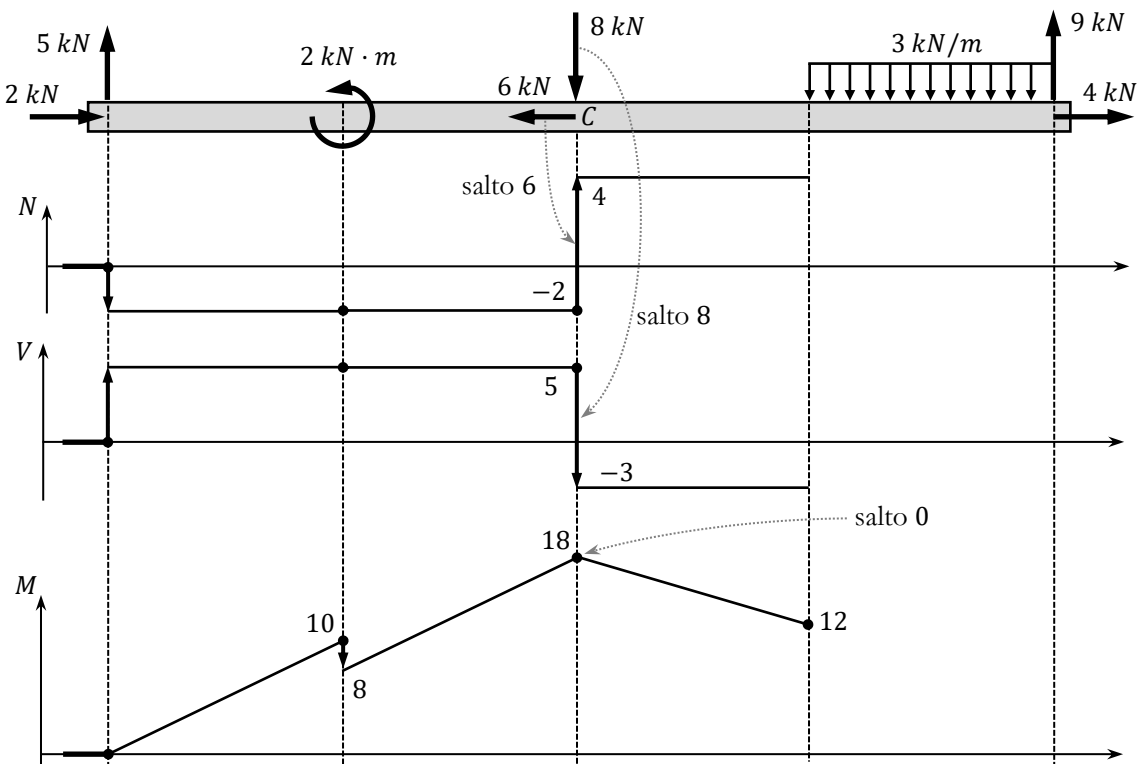
Tramo 2: $N = -2$
 $V = 5$
 $M = 5x + 8 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow M = 8 \\ x = 2 \rightarrow M = 18 \end{cases}$

Se comprueban los saltos en la frontera entre el tramo 1 y el tramo 2, punto *B*.
 Obsérvese la correspondencia entre el valor del momento aplicado y el valor del salto en *M*



Tramo 3: $N = 4$
 $V = -3$
 $M = -3x + 18 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow M = 18 \\ x = 2 \rightarrow M = 12 \end{cases}$

Se comprueban los saltos en la frontera entre los tramos 2 y 3, punto *C*

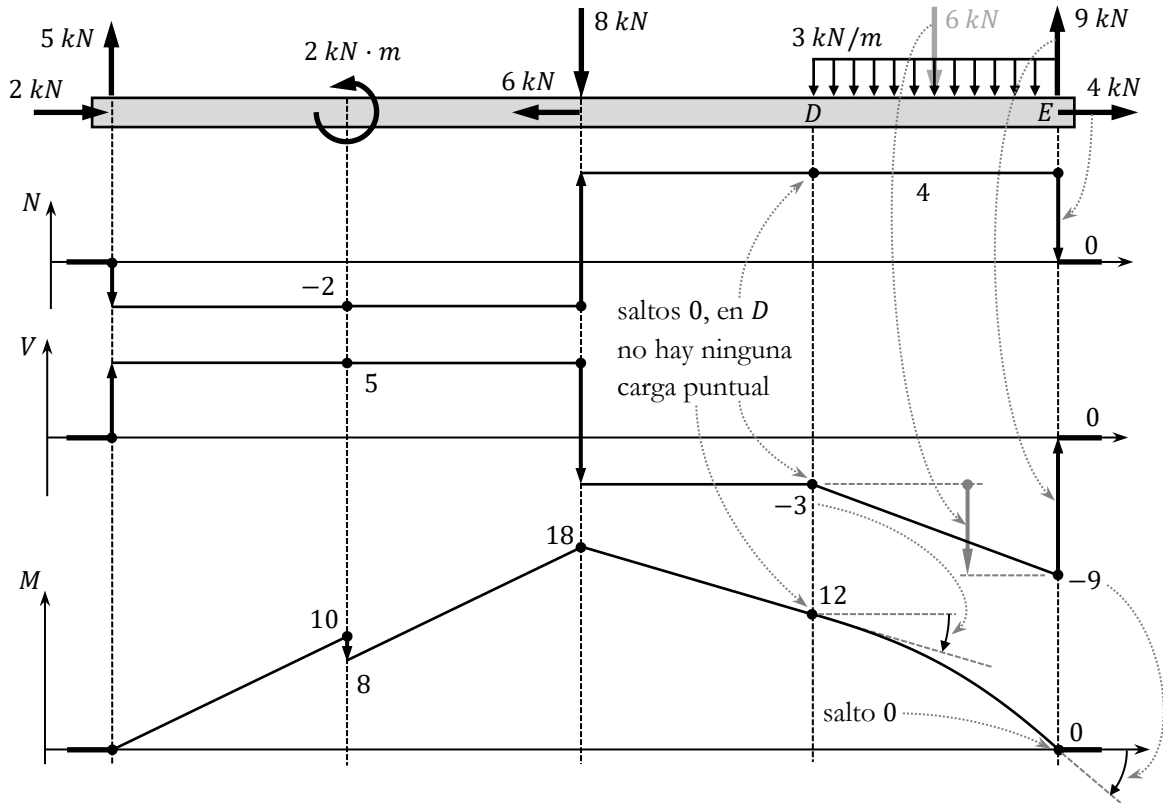


Tramo 4: $N = 4$

$$V = 3x' - 9 \rightarrow \begin{cases} x' = 0 \rightarrow V = -9 \\ x' = 2 \rightarrow V = -3 \end{cases}$$

$$M = -1.5x'^2 + 9x' \rightarrow \begin{cases} x' = 0 \rightarrow M = 0 \\ x' = 2 \rightarrow M = 12 \end{cases}$$

Se comprueban los saltos en la frontera entre los tramos 3 y 4, punto D , y entre el tramo 4 el tramo 4 y el tramo virtual a la derecha de E

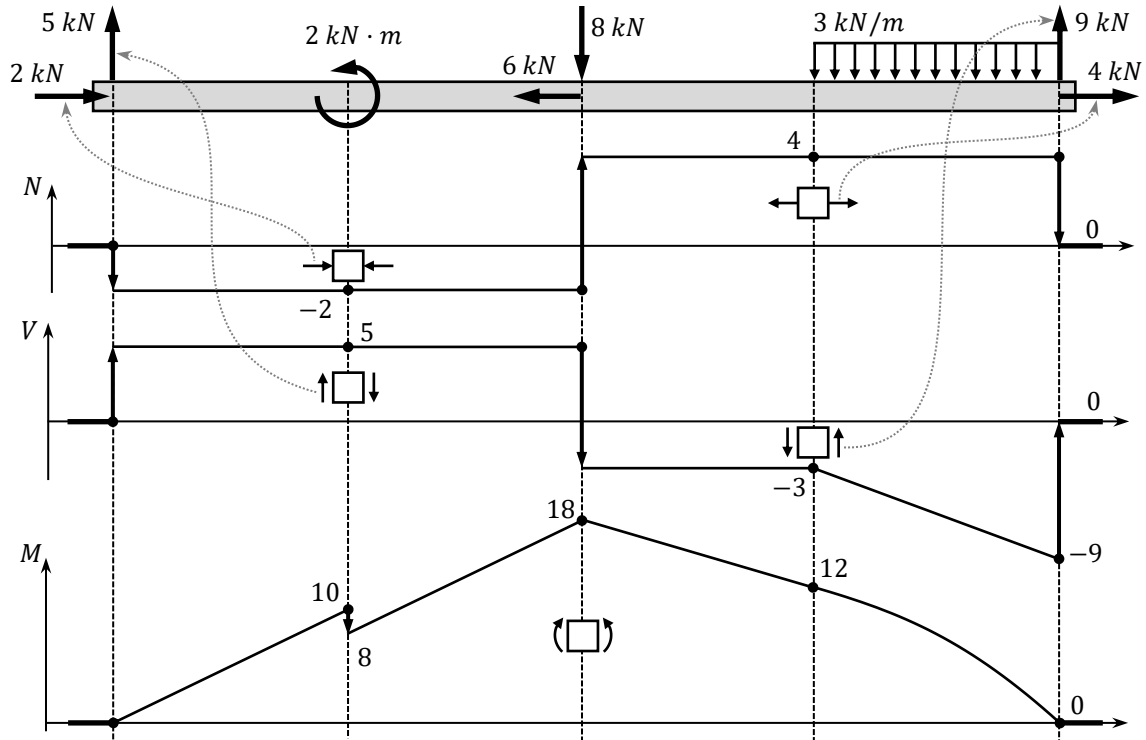


Cabe resaltar el hecho de que, para trazar la parábola, aparte de tomar como apoyo los dos puntos en los extremos que se obtienen de evaluar el flector, se ha observado la evolución de su pendiente mirando los valores del diagrama de cortante de ese tramo. Recorriendo la curva de izquierda a derecha, se observa que arranca del valor inicial $M = 12$, con una pendiente de valor $V = -3$ y a medida que se avanza hacia la derecha, como V se va haciendo cada vez más negativo, la pendiente de M evoluciona de igual manera, hasta llegar al punto final de valor $M = 0$, con una pendiente de valor $V = -9$. Este análisis de la pendiente para representar la curva correctamente se puede hacer de izquierda a derecha, aunque la ecuación de la parábola, como en este caso, se haya obtenido de derecha a izquierda. En el caso analizado, como V no cambia de signo dentro del tramo, el máximo relativo de la parábola (vértice de tangente horizontal) queda fuera del intervalo de análisis y por tanto no requiere ser calculado.

En el último tramo la comprobación de los saltos es doble ya que se no sólo existe la frontera con el tramo calculado anteriormente, sino también con el tramo virtual de esfuerzos nulos a la derecha de la pieza. Además, en este último tramo definido por la existencia de una carga distribuida, obsérvese cómo el cortante varía a lo largo del tramo desde el valor $V = -3$ hasta el valor $V = -9$, es decir, descendiendo en total 6 kN , lo cual coincide con el valor y sentido de la fuerza puntual equivalente.

Como acto final, en los diagramas se incorporan los símbolos que indican el sentido real de cada tipo de esfuerzo. Esta información permite identificar visualmente cómo está trabajando realmente la pieza en cada zona. No hace falta indicar estos símbolos en cada uno de los tramos, tan sólo en las zonas en las que se produzca un cambio de signo en el diagrama, lo cual supone una inversión en el sentido del esfuerzo.

Obsérvese que, al quedar en el símbolo cada esfuerzo representado en su sentido real, se produce una correspondencia total entre la representación de las cargas puntuales en los extremos de la pieza y la representación del esfuerzo en el símbolo del lado del “cuadrado” en el que queda cada uno de los extremos, correspondencia en el sentido y en el valor (en las zonas negativas de los diagramas se toma el valor absoluto, al estar el esfuerzo ya representado en el sentido real).



13.6 MÉTODO DE INTEGRACIÓN

En este nuevo enfoque, que constituye una alternativa al método tradicional de los cortes, en lugar de utilizar las ecuaciones de equilibrio del diagrama de sólido libre de la pieza cortada, se hace uso de las relaciones entre cargas y diagramas (relaciones de derivación y discontinuidades) para obtener directamente las funciones de los esfuerzos internos en cada tramo. Los fundamentos de este planteamiento son:

En primer lugar, la carga distribuida existente en un tramo siempre es conocida, es parte de los datos del problema. Es muy sencillo obtener, dependiendo de la forma que tenga dicha distribución, la expresión matemática que proporciona el valor de carga q en función de la variable de posición x , con origen en el punto inicial del tramo (y de la propia carga distribuida), es decir $q(x)$. Siendo L la longitud del tramo (y de la propia carga distribuida), la distribución de carga puede ser:

- No hay: $q(x) = 0$
- Uniforme: $q(x) = q_0$ (constante)
- Triangular, creciente hacia la derecha, siendo q_L el máximo (altura del triángulo): $q(x) = x \cdot q_L/L$ (función lineal que vale 0 en $x = 0$ y vale q_L en $x = L$).
- Triangular, menguante hacia la derecha, siendo q_0 el máximo: $q(x) = q_0(1 - x/L)$ (función lineal que vale q_0 en $x = 0$ y vale 0 en $x = L$).

Ahora, si tiene que cumplirse que $dV(x)/dx = -q(x)$, entonces, $V(x) = -\int q(x)dx$. Y finalmente, obtenida por integración de la carga distribuida (cambiada de signo) la función del cortante, si también tiene que cumplirse que $dM(x)/dx = V(x)$, entonces, $M(x) = \int V(x)dx$.

Las integrales planteadas son indefinidas, es decir, no tienen límites de integración, no se utilizan para hacer una suma diferencial infinita específica, sino que simplemente establecen una relación entre dos funciones (son una forma alternativa de expresar que, por ejemplo, si el cortante en cualquier punto es la derivada del flector, entonces el flector en cualquier punto es la integral del cortante). Esta circunstancia implica que, al realizar la integración, como en cualquier integral indefinida, ha de añadirse una *constante de integración*. Esto es debido a que si una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x)$, resulta que $f(x) + c$ también tiene como derivada la misma $f'(x)$. Entonces, la integral de la función $f'(x)$ no es sólo $f(x)$, sino también $f(x) + c$, siendo c cualquier valor (constante arbitraria).

Sin embargo, las funciones de los esfuerzos internos no pueden contener una constante arbitraria, tienen que estar definidas por completo, por lo que es necesario determinar los valores de las constantes de integración, tanto de $V(x)$, como de $M(x)$.

Esta tarea también es sencilla, una vez comprendida la manera de proceder. La determinación de las constantes de integración de las funciones de un tramo requiere conocer el valor de tales funciones en el punto inicial del tramo ($x = 0$) y para esto simplemente se necesitan:

- Los diagramas del tramo anterior, en concreto los valores en el punto final del tramo anterior. Como para calcular un nuevo tramo, antes se ha resuelto el previo, esta información siempre está disponible. De hecho, a la hora de abordar el primer tramo, recuérdese que el tramo anterior es el virtual de la izquierda, con valores conocidos (nulos) en los tres diagramas.
- Las cargas puntuales existentes en la pieza en el punto inicial del nuevo tramo (frontera entre el tramo anterior y el actual), que están relacionadas con las amplitudes de los saltos de valor de cada diagrama al pasar del tramo anterior al nuevo. Esta información es también siempre conocida.

Para cualquiera de los tres diagramas de esfuerzos internos la forma de proceder es idéntica:

Por un lado, se conoce el valor del diagrama en punto final del tramo anterior, $f_{L_{ant}}$, y se conoce el valor y el sentido (signo) del salto que hay que dar en la transición para pasar del tramo anterior al nuevo, Δf , con lo cual, se obtiene el valor inicial del diagrama en el nuevo tramo, $f_0 = f_{L_{ant}} + \Delta f$.

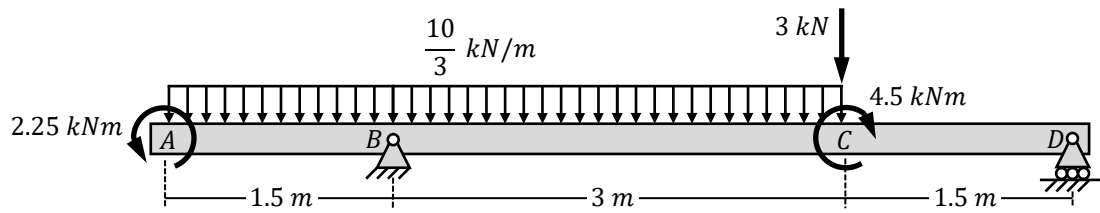
Por otro lado, se dispone de la función del esfuerzo interno $f(x) + c$, obtenida por integración, a falta de determinar el valor de la constante de integración, c . Pero como se conoce cuánto tiene que valer el esfuerzo en el punto inicial, $x = 0$, determinar c es inmediato:

$$f_0 = f(0) + c \rightarrow c = f_0$$

Ya que $f(x)$ siempre es un polinomio del tipo $ax + bx^2 + \dots$, por lo tanto, $f(0) = 0$.

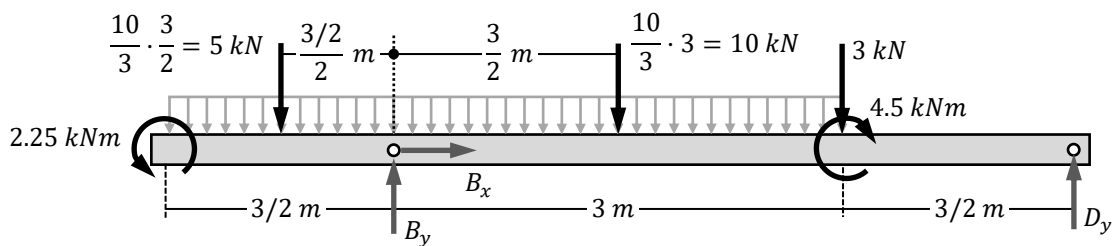
Es decir, que a la función del esfuerzo interno obtenida por integración siempre hay que sumarle el valor calculado aparte de cuánto tiene que valer dicho esfuerzo en el punto inicial del tramo (para que, de hecho, al evaluar la función definitiva en $x = 0$, se obtenga el valor correcto).

- Ejemplo 13.2 Representar los diagramas de esfuerzos internos del elemento.



Pasos 1 y 2: Resolución de las cargas de enlace, comprobación de resultados e identificación de los tramos de análisis

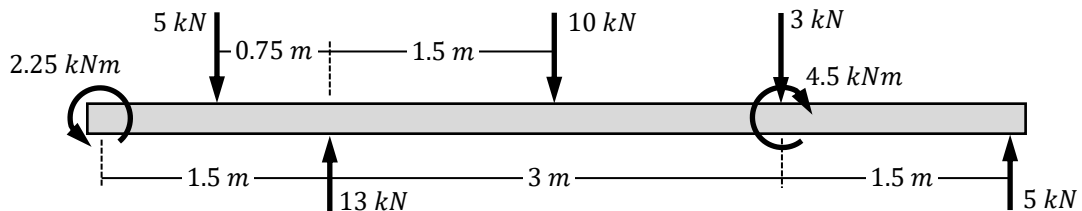
Para plantear las ecuaciones de equilibrio se puede elegir entre considerar una única fuerza puntual equivalente a toda la distribución, o dividir la distribución total en dos a la altura de del punto B y considerar dos fuerzas puntuales equivalentes por separado.



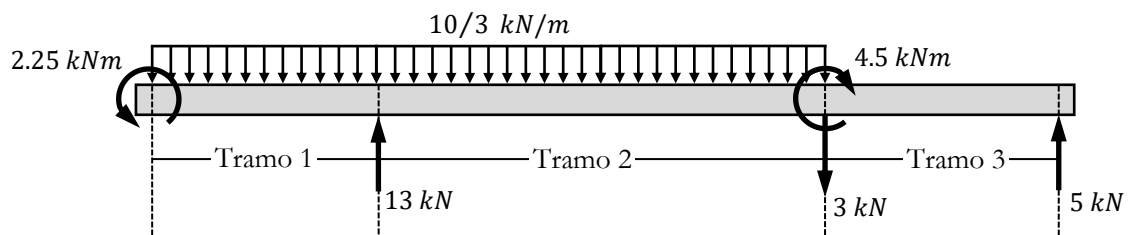
$$F_x \rightarrow B_x = 0 \text{ kN}$$

$$M_B \rightarrow 2.25 + 5 \cdot 0.75 + D_y \cdot (3 + 1.5) = 4.5 + 3 \cdot 3 + 10 \cdot 1.5 \rightarrow D_y = 5 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow B_y + D_y = 5 + 10 + 3 \rightarrow B_y = 13 \text{ kN}$$



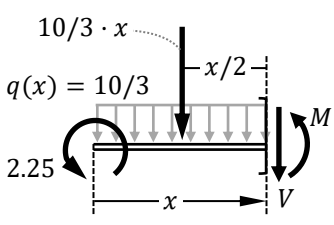
$$\sum M_D = -4.5 + 3 \cdot 1.5 + 10 \cdot (1.5 + 1.5) - 13 \cdot (1.5 + 3) + 5 \cdot (1.5 + 3 + 0.75) + 2.25 = 0 \rightarrow OK$$



En este ejemplo se presentará la resolución de cada tramo por la vía de los cortes clásicos y por la vía de la integración. Para facilitar la lectura se va a prescindir de indicar las unidades de todas las magnitudes. De aquí en adelante, cualquier magnitud que represente una fuerza se entenderá que está en kN , cualquier momento $kN \cdot m$, cualquier fuerza distribuida kN/m y cualquier distancia m .

Pasos 3 y 4: Cálculo y trazado de los diagramas, Tramo 1 ($L = 1.5$)

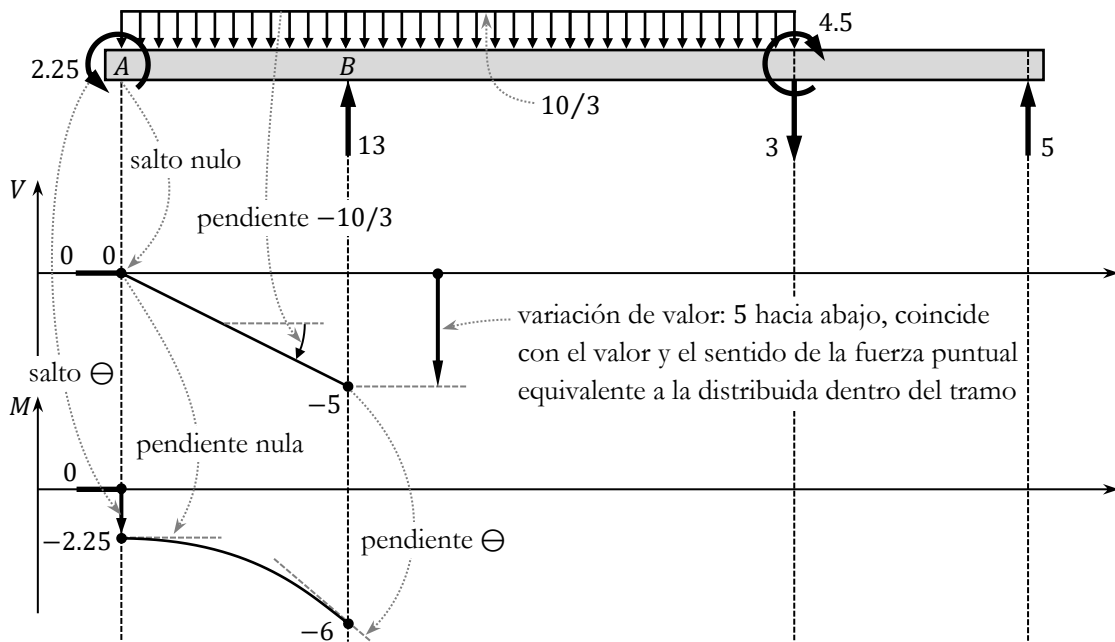
Por el método de los **cortes**: Lo primero de todo, obsérvese cómo, aunque ni se ha planteado, el axial N hubiese quedado nulo.



$$V + \frac{10}{3}x = 0 \rightarrow V(x) = -\frac{10}{3}x \rightarrow \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(3/2) = -5 \end{cases}$$

$$M + 2.25 + \frac{10}{3}x \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M(x) = -\frac{5}{3}x^2 - 2.25 \rightarrow \begin{cases} M(0) = -2.25 \\ M(3/2) = -6 \end{cases}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{10}{3} = -q(x) \text{ OK} \quad \frac{dM(x)}{dx} = -\frac{5}{3} \cdot 2x = \frac{10}{3}x = V(x) \text{ OK}$$



Mediante **integración**: Se parte de los valores de los esfuerzos en el tramo anterior. Como el tramo actual es el primero, el tramo anterior es el tramo virtual donde todos los esfuerzos son nulos.

Cortante: A partir del valor final de V en el tramo anterior, 0, se efectúa el salto correspondiente al valor de la fuerza puntual vertical que exista aplicada en la frontera, punto A, que en este caso también es 0, por lo tanto, el valor inicial de V en el primer tramo es $V_0 = 0 + 0 = 0$. Por otro lado, en el primer tramo, $q(x) = 10/3$, por tanto:

$$V(x) = -\int q(x)dx = -\int \frac{10}{3} dx = -\frac{10}{3}x + c$$

Finalmente, como se sabe que $V_0 = V(0) = 0 \rightarrow c = 0$

Flector: A partir del valor final de M en el tramo anterior, 0, se efectúa el salto correspondiente al valor y el sentido del momento que exista aplicado en la frontera, punto A, que en este caso es 2.25 en sentido antihorario (salto hacia abajo), por lo tanto, el valor inicial de M en el primer tramo es $M_0 = 0 - 2.25 = -2.25$. Por otro lado, como se tiene calculada la función $V(x)$ en el paso anterior:

$$M(x) = \int V(x)dx = \int -\frac{10}{3}x dx = -\frac{10}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

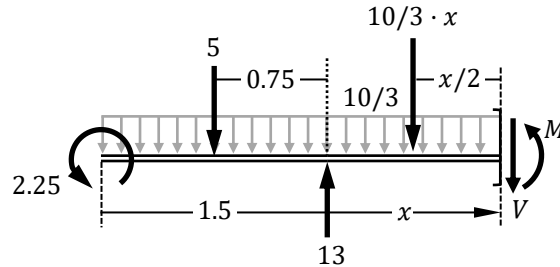
Finalmente, como se sabe que $M_0 = M(0) = c = -2.25$, resulta:

$$M(x) = -\frac{5}{3}x^2 - 2.25$$

Como puede verse, las funciones obtenidas son las mismas que planteando el equilibrio de la mitad cortada. Obtenidas las funciones por esta vía alternativa, todo el proceso de representación, (evaluación de los polinomios en el punto final $x = L$, observación de los valores de las pendientes en los extremos del tramo, etc.), sigue la misma metodología presentada para el método tradicional.

Tramo 2 ($L = 3$)

Mediante **corte**:



$$V + 5 + \frac{10}{3}x = 13 \rightarrow V(x) = 8 - \frac{10}{3}x$$

$$M + \frac{10}{3}x \cdot \frac{x}{2} - 13 \cdot x + 5 \cdot (x + 0.75) + 2.25 = 0 \rightarrow M = -\frac{5}{3}x^2 + (13 - 5)x - (3.75 + 2.25)$$

$$M(x) = -\frac{5}{3}x^2 + 8x - 6$$

Mediante **integración**:

Cortante: A partir del valor final de V en el tramo anterior, -5 , se efectúa el salto correspondiente al valor y sentido de la fuerza puntual vertical que exista aplicada en la frontera entre ambos tramos, punto B , que en este caso es 13 hacia arriba. Por lo tanto, el valor inicial de V en el segundo tramo es $V(0) = -5 + 13 = 8$. La función de carga distribuida en este tramo sigue siendo $q(x) = 10/3$, por tanto, al igual que en tramo anterior:

$$V = -\int q \cdot dx = -\frac{10}{3}x + c$$

Sólo que ahora $V(0) = c = 8$, por tanto, finalmente resulta:

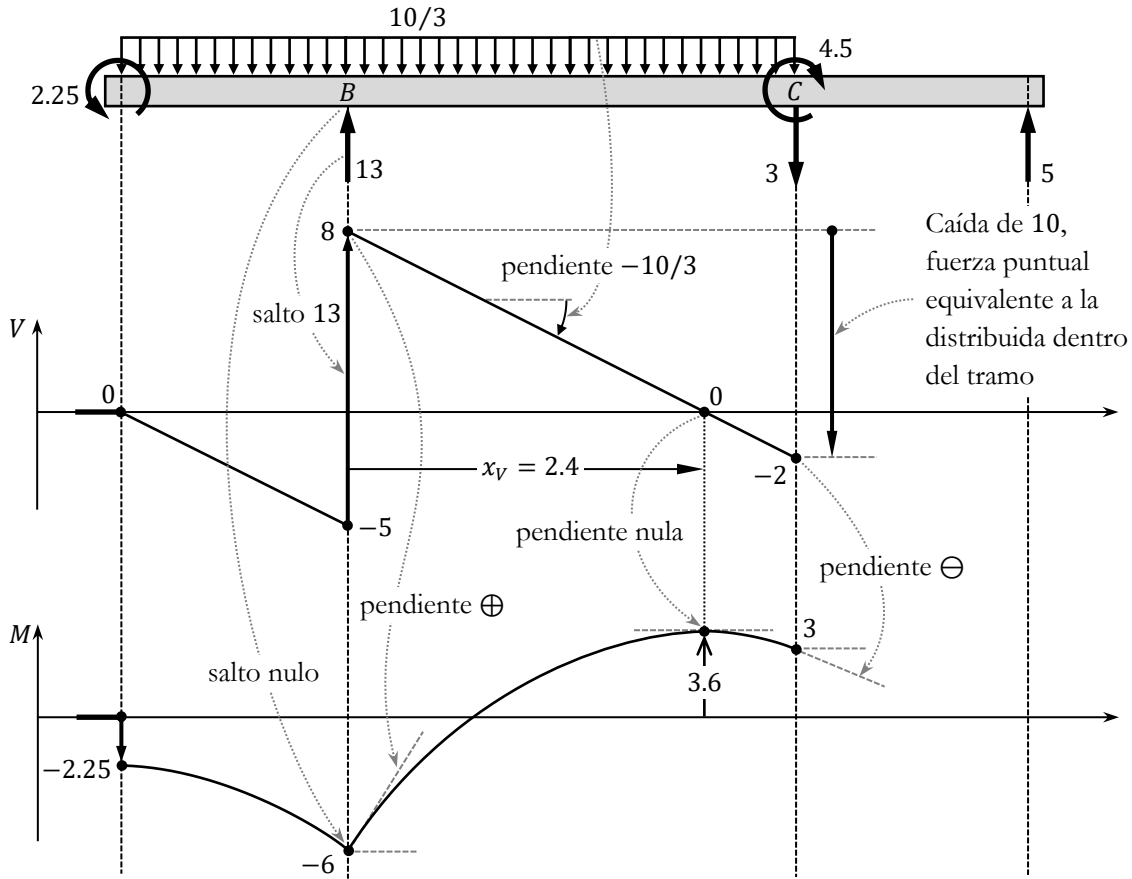
$$V(x) = -\frac{10}{3}x + 8 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow V(0) = 8 \\ x = 3 \rightarrow V(3) = -2 \end{cases}$$

Flector: A partir del valor final de M en el tramo anterior, -6 , se efectúa el salto correspondiente al valor del momento que exista aplicado en la frontera entre tramos, punto B , que en este caso es 0 , por lo tanto, el valor inicial de M en el segundo tramo es $M(0) = -6 + 0 = -6$. Además:

$$M = \int V \cdot dx = -\frac{10}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + 8x + c \leftarrow c = M(0) = -6 \rightarrow M(x) = -\frac{5}{3}x^2 + 8x - 6 \rightarrow \begin{cases} M(0) = -6 \\ M(3) = 3 \end{cases}$$

Para trazar los diagramas de los esfuerzos internos, la representación del cortante lineal es inmediata, sin más que unir ambos extremos con una recta. Sin embargo, para trazar la parábola del flector, véase que, aparte de contar con los valores inicial $M = -6$, y final $M = 3$, se tiene la información de que la pendiente en el punto inicial es $V = 8$ y en el punto final es $V = -2$, es decir, que la pendiente del flector pasa por 0 dentro del tramo, como el propio cortante. Por lo tanto, es necesario calcular un punto adicional, aquel en el que $V = 0$:

$$V(x) = -\frac{10}{3}x + 8 = 0 \rightarrow x_v = \frac{8}{10/3} = \frac{8 \cdot 3}{10} = 2.4 \rightarrow M(2.4) = 3.6$$



Tramo 3 (L = 1.5)

Mediante **integración**:

Cortante: A partir del valor final de V en el tramo anterior, -2 , se efectúa el salto correspondiente al valor y sentido de la fuerza puntual vertical que exista aplicada en la frontera entre ambos tramos, punto C , que en este caso es 3 hacia abajo. Por lo tanto, el valor inicial de V en el segundo tramo es $V(0) = -2 - 3 = -5$. Ahora, como en el tramo 3 no hay carga distribuida ($q = 0$), el cortante se mantiene constante y como se tiene el valor del cortante en el punto inicial, ese ha de ser el valor del cortante en todo el tramo:

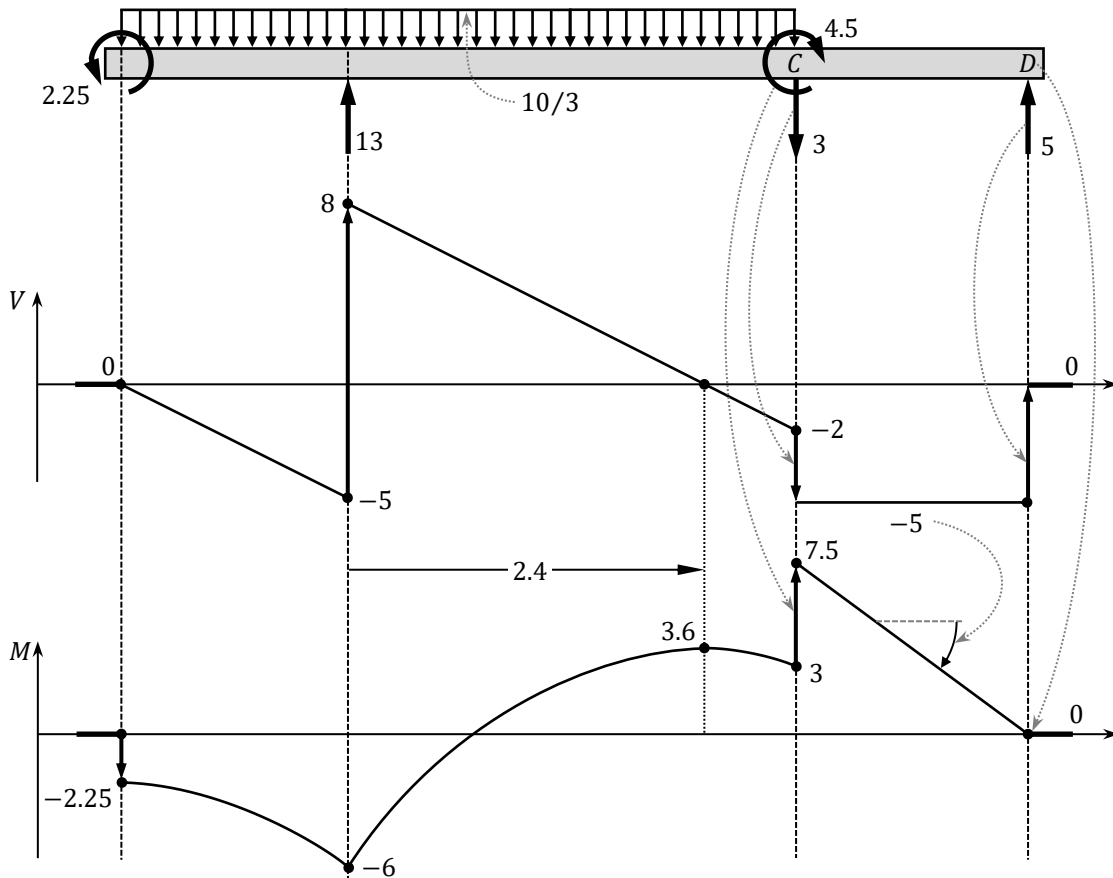
$$V = -\int q \cdot dx = 0 + c \leftarrow c = V(0) \rightarrow V(x) = -5$$

Flector: A partir del valor final de M en el tramo anterior, 3 , se efectúa el salto correspondiente al valor y sentido del momento que exista aplicado en la frontera, punto C , que en este caso es 4.5 en sentido horario (salto hacia arriba), por lo tanto, el valor inicial de M en el tercer y último tramo es $M(0) = 3 + 4.5 = 7.5$. Por otro lado:

$$M = \int V \cdot dx = -5x + c \leftarrow c = M(0) \rightarrow M(x) = -5x + 7.5 \rightarrow \begin{cases} M(0) = 7.5 \\ M(1.5) = 0 \end{cases}$$

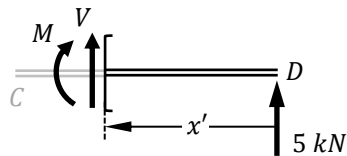
Al haberse obtenido las funciones de último de los tramos, se está en disposición de realizar la comprobación adicional final, lo que suele denominarse “comprobar el cierre de los diagramas”. Esto no es más que efectuar los últimos saltos, los que representan la transición del punto final del último tramo al tramo virtual de la derecha de la pieza, para verificar que, efectivamente todos los esfuerzos acaban en valores nulos (tras ese salto final). El valor final de V en el tercer tramo es -5 y al hacer el salto correspondiente a la fuerza vertical puntual existente en D , 5 hacia arriba, se acaba en 0 .

Igualmente, el valor final de M en el último tramo es 0 y como no hay momento aplicado en D el salto es inexistente, quedándose el valor a la derecha de la pieza física nuevamente en 0.



Mediante **corte**:

Al tratarse del tramo final resulta más sencillo analizar la mitad de la derecha de la pieza cortada.



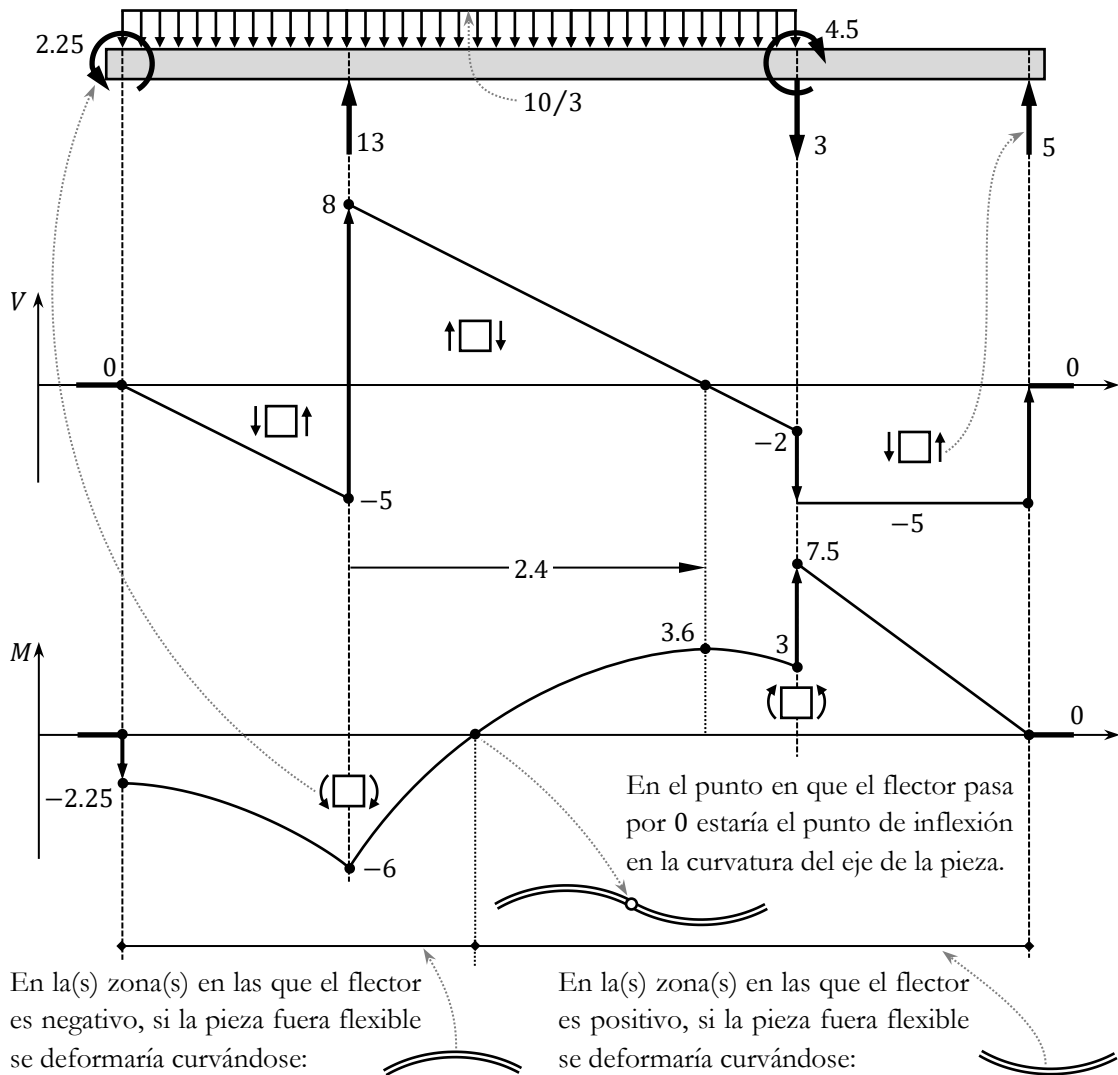
$$V = -5$$

$$M(x') = 5 \cdot x' \rightarrow \begin{cases} x' = 0 \rightarrow M = 0 \\ x' = 1.5 \rightarrow M = 7.5 \end{cases}$$

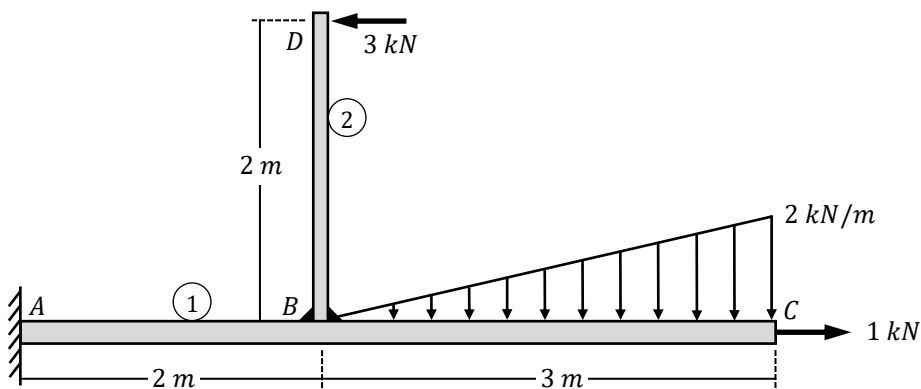
Obsérvese que por integración, que es un proceso que se realiza siempre con las funciones “avanzando hacia la derecha”, se había obtenido $M(x) = -5x + 7.5$. Si bien resulta más que evidente que la representación de la recta $M(x')$ obtenida mediante el corte sería exactamente la misma que ya se ha realizado, al unir los dos puntos obtenidos (teniendo en cuenta que ahora $x' = 0$ es el punto D del elemento y que $x' = 1.5$ es el punto C), se va a comprobar que cambiando la variable se llega, de hecho, a la misma ecuación obtenida por integración:

$$\text{Como } x + x' = 1.5 \rightarrow M(x') = M(1.5 - x) = 5 \cdot (1.5 - x) = 7.5 - 5x = M(x)$$

Por último, se añaden en cada diagrama los símbolos indicativos de cómo está trabajando en realidad la pieza en cada zona, cada vez que haya un cambio de signo y se verifican los sentidos y valores en ambos extremos.



- Ejemplo 13.3 Representar los diagramas de esfuerzos internos del elemento 1.



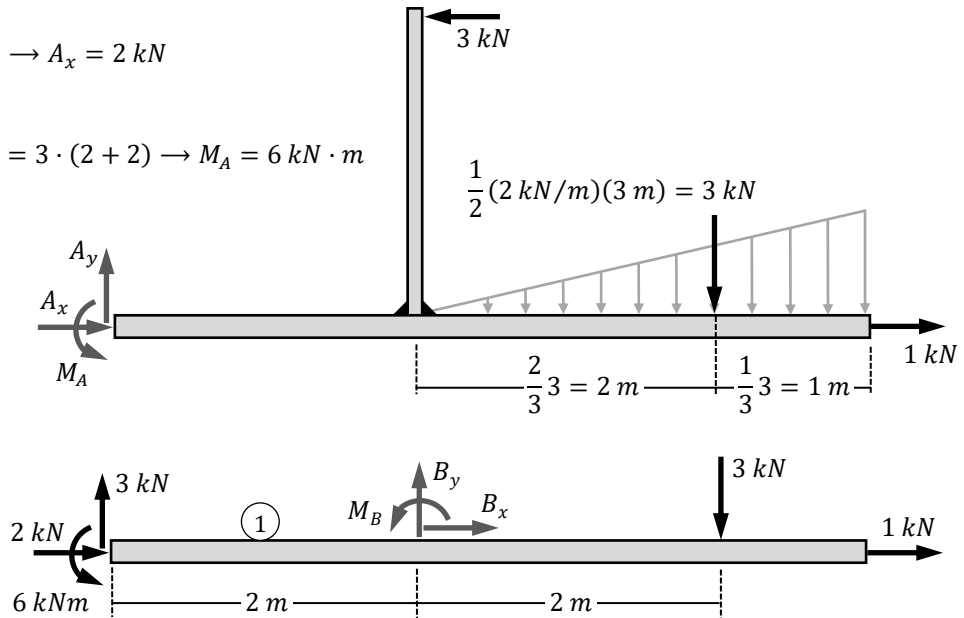
Los enlaces del elemento 1 son las uniones rígidas, de tipo empotramiento en A (con el elemento fijo) y de tipo soldadura en B (con elemento 2). En ambos enlaces, que impiden cualquier tipo de movimiento, existen tres reacciones, dos fuerzas y un momento, con lo cual, el diagrama de sólido libre del elemento 1 tiene de partida en total seis incógnitas.

Sin embargo, si se considera inicialmente el conjunto, al separar éste al completo del elemento fijo, sólo se manifiestan las tres reacciones en A, por lo que son directamente resolubles. A partir de ese resultado, al diagrama de sólido libre del elemento 1 ya sólo le quedarían las tres incógnitas de B, resolubles con sus tres ecuaciones independientes del equilibrio plano.

$$F_x \rightarrow A_x + 1 = 3 \rightarrow A_x = 2 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow A_y = 3 \text{ kN}$$

$$M_A \rightarrow M_A + 3 \cdot 2 = 3 \cdot (2 + 2) \rightarrow M_A = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



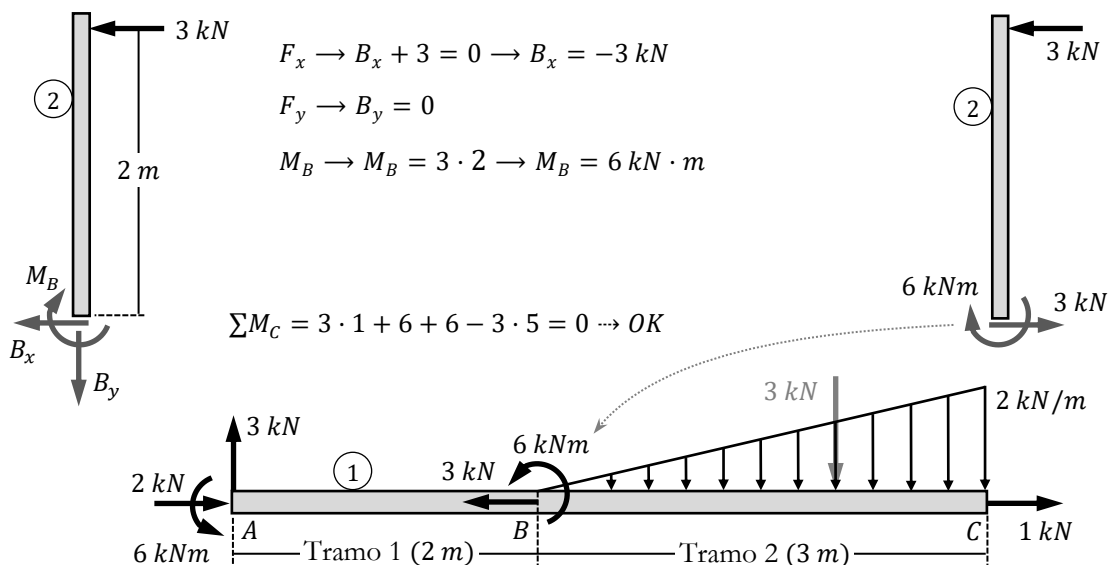
$$F_x \rightarrow 2 + B_x + 1 = 0 \rightarrow B_x = -3 \text{ kN}$$

$$F_y \rightarrow 3 + B_y = 3 \rightarrow B_y = 0$$

$$M_B \rightarrow 6 + M_B = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \rightarrow M_B = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Obsérvese que en cuanto se ha resuelto el primer grupo de incógnitas, la siguiente vez que ha sido necesario considerar las reacciones en A, ya no se han empleado los nombres de las mismas, sino sus valores. Esta manera de proceder siempre facilita el proceso de resolución.

Como vía alternativa, también se podría haber planteado el diagrama de sólido libre del elemento 2, cuyas únicas incógnitas son las tres reacciones en B y después llevar ese resultado por acción-reacción a la unión B del elemento 1.



$$F_x \rightarrow B_x + 3 = 0 \rightarrow B_x = -3 \text{ kN}$$

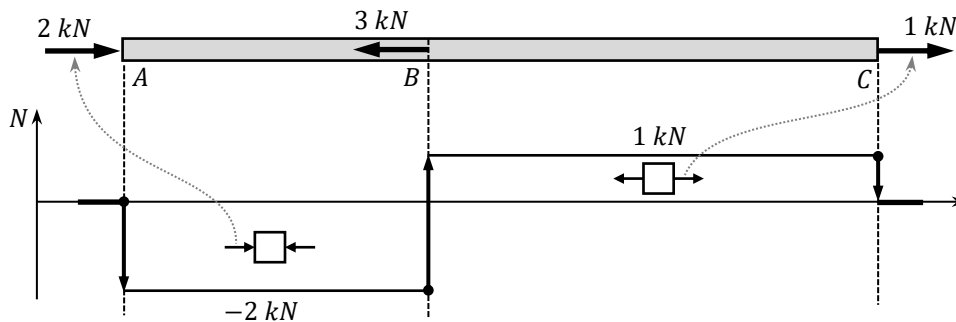
$$F_y \rightarrow B_y = 0$$

$$M_B \rightarrow M_B = 3 \cdot 2 \rightarrow M_B = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum M_C = 3 \cdot 1 + 6 + 6 - 3 \cdot 5 = 0 \rightarrow \text{OK}$$

Como en el diagrama de cargas exteriores hay fuerzas en la dirección del eje de la pieza, hay que trazar el diagrama de axiales. Al haber tantas comprobaciones que se pueden ir haciendo para verificar todos los diagramas (**es imposible equivocarse sin percatarse de que existe un error**), en lugar de dejarlas para después de haber hecho un cálculo, muchas de ellas se pueden utilizar antes de calcular, para prever los resultados. El diagrama de axiales al completo, que se compone a base de tramos de valor constante y depende sólo de las fuerzas exteriores en la dirección del eje longitudinal de la pieza, resulta, de hecho, inmediato:

En el punto inicial A debe comenzarse con un salto desde 0, de valor 2 hacia abajo, por lo tanto N en el primer tramo vale -2 . En B tiene que haber un salto desde -2 , de valor 3 hacia arriba, por lo tanto N en el segundo tramo vale 1. Por último, en el punto final C tiene que haber un salto desde 1, de valor 1 hacia abajo, es decir, acabando en 0 y cerrándose como debe el diagrama.



Como ya se ha mencionado, al representar en el propio diagrama los símbolos correspondientes al sentido real del esfuerzo, se está proporcionando una interesante información acerca de cómo está funcionando la pieza en cada zona de la misma. En este caso, por ejemplo, al mirar los símbolos del diagrama de axiales, se observa que para la combinación de cargas aplicadas dada y con la pieza sujeta en la forma mostrada en el enunciado, entre los puntos A y B el elemento está comprimido (aplastándose longitudinalmente, acortándose), compresión de valor 2 kN mientras que entre los puntos B y C el elemento está traccionado (estirándose, alargándose), tracción de valor 1 kN .

De igual manera, para los diagramas de V y M , aunque no resulten tan simples, son numerosas las previsiones que pueden realizarse con tan sólo fijarse en el diagrama de cargas exteriores.

Por ejemplo, mirando las cargas que existen en el punto A se sabe que el diagrama de cortantes tiene que comenzar en el valor $V_0 = 3\text{ kN}$ y el diagrama de flectores en el valor $M_0 = -6\text{ kNm}$.

Aunque se ha explicado de una manera muy analítica el método de integración, lo cierto es que, para el caso de las funciones más simples, constantes o lineales, esa integración puede efectuarse de una forma implícita (sin necesidad de pensar explícitamente en que se está integrando). Por ejemplo:

En el primer tramo, como no hay carga distribuida, V es constante y como ya se tiene el valor en el punto inicial, en todo el tramo se mantiene $V(x) = V_{cte} = V_0 = 3\text{ kN}$.

Hecho esto, como en este tramo el flector es lineal, es decir, una recta de ecuación $M(x) = c + m \cdot x$, siendo c la ordenada en el origen (que es el valor para $x = 0$) y m la pendiente, se sabe que el valor de partida es $M_0 = -6$ y que el valor de la pendiente es $V_{cte} = 3$, por lo tanto, $M(x) = -6 + 3x$. El valor en el punto final del primer tramo ($x = L = 2\text{ m}$), por tanto, será $M_L = M(2) = -6 + 3 \cdot 2 = 0$.

A partir de estos resultados, mirando ahora las cargas que existen en el punto B :

En la transición entre el tramo 1 y el tramo 2, V no presenta ninguna discontinuidad de valor, por lo tanto, en el punto inicial del tramo 2 ya se sabe que $V_0 = 3 \text{ kN}$. Sin embargo, en M debe existir un escalón ΔM de amplitud 6 hacia abajo, por tanto $M_0 = M_{L_{ant}} + \Delta M = 0 - 6 = -6 \text{ kNm}$.

Como en el tramo 2 existe carga distribuida y además es una distribución lineal (polinomio de primer grado), las funciones $V(x)$ y $M(x)$ no son tan inmediatas, pero al menos antes de calcularlas se sabe que ya se obtengan dichas funciones por cortes o por integración, $V(x)$ tiene que resultar polinomio de segundo grado y $M(x)$ tiene que resultar un polinomio de tercer grado.

Además, cuando se evalúen dichos polinomios en $x = 0$, tienen que resultar los valores iniciales previstos para este tramo, $V_0 = 3$ y $M_0 = -6$. De igual modo, cuando se evalúen dichos polinomios en $x = L = 3 \text{ m}$, también se puede prever el resultado que debería arrojar un cálculo correcto, ya que, al tratarse del punto final de la pieza, los escalones asociados a las cargas externas puntuales existentes en C deben cerrar los diagramas. Como en el punto C del elemento no hay fuerza puntual transversal (aunque en dicho punto se produzca el valor más elevado de la carga distribuida triangular, lo que hay que mirar es la fuerza vertical puntual), el salto para cerrar el diagrama de V es nulo, por lo tanto, la parábola que se obtenga, si está bien, tendrá que cumplir $V(3) = 0$. De la misma manera, como en C no hay aplicado ningún momento, no puede haber escalón en el punto final de M , por tanto, el polinomio cúbico, tendrá que cumplir $M(3) = 0$.

Ahora, para el caso de carga distribuida triangular, si la obtención de los diagramas se plantea por integración, se requiere definir la función $q(x)$ en el tramo. Se trata de una línea recta que pasa por 0 para $x = 0$ y vale 2 kN/m para $x = 3 \text{ m}$ (ordenada en el origen 0 y pendiente $2/3$), por tanto:

$$q(x) = \frac{2}{3}x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow q = 0 \\ x = 3 \rightarrow q = 2 \end{cases}$$

$$V(x) = -\int q(x)dx = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + V_0 = -\frac{x^2}{3} + 3 \rightarrow \begin{cases} V(0) = 3 \text{ kN} \\ V(3) = 0 \Leftarrow OK \end{cases}$$

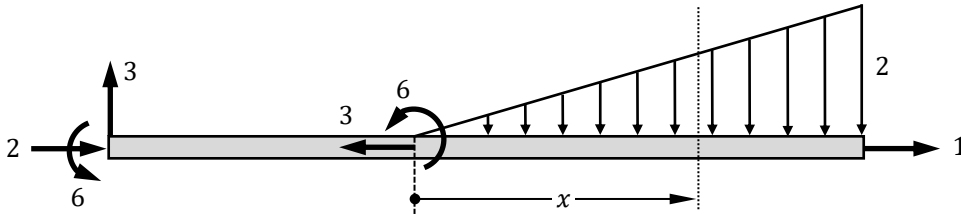
$$M(x) = \int V(x)dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot x + M_0 = -\frac{x^3}{9} + 3x - 6 \rightarrow \begin{cases} M(0) = -6 \text{ kNm} \\ M(3) = 0 \Leftarrow OK \end{cases}$$

Se comprueba cómo, además, la caída en el valor de V coincide con el valor de la fuerza equivalente.

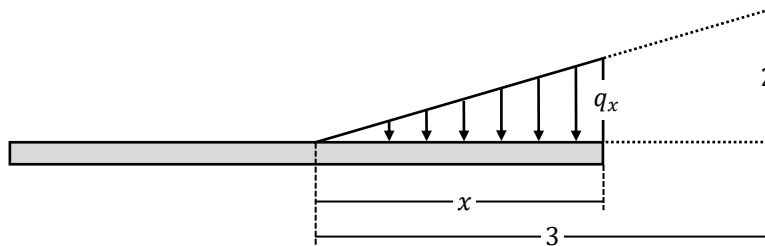
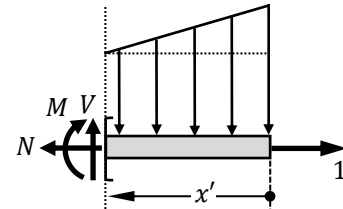
Si la obtención de las funciones se plantea mediante un corte, es conveniente hacer una consideración especial. Al seccionar el tramo en el que está aplicada la distribución triangular, como también se divide la propia carga, en una de las mitades quedará una porción de ésta con forma triangular, pero en la otra quedará la otra porción con forma trapezoidal. Independiente de cuál de las dos mitades de la pieza contenga más cargas exteriores, lo más sencillo para aplicar las ecuaciones de equilibrio es elegir siempre aquella mitad en la que ha quedado la porción de carga con forma triangular, ya que así se evita la transformación (más compleja) de la carga trapezoidal a puntual equivalente.

De todas maneras, aun trabajando con la mitad más sencilla, resulta necesario plantear una proporcionalidad entre el triángulo que representa la carga total y el triángulo que representa la porción que ha quedado hasta la posición genérica del corte, para obtener la altura del triángulo, q_x , en función de x , necesaria para determinar su área (valor de la fuerza puntual equivalente). Véase cómo este enfoque, más geométrico, produce un resultado similar a la función $q(x)$ definida anteriormente para la integración, de hecho, $q(x) \equiv q_x$.

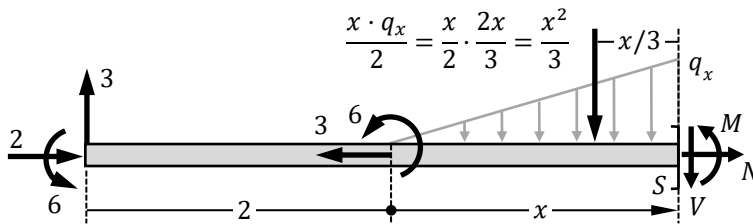
En las representaciones a partir de este punto, para ganar en claridad, se va a presidir de las unidades de las magnitudes numéricas, que resultan obvias por el contexto.



Aunque ésta pudiera parecer la mitad más sencilla, no lo es por el hecho de contener una carga distribuida con forma trapezoidal. Podría utilizarse, calculando el área y la posición horizontal del centroide del trapecio, o dividiéndola en suma de un rectángulo y un triángulo y poniendo dos fuerzas puntuales.



$$\frac{q_x}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow q_x = \frac{2}{3}x$$



Al quedar la fuerza puntual equivalente en x^2 , al hacer $\sum F_y, V(x)$ sale parabólico, y al hacer $\sum M_S$, como esa fuerza va multiplicada por su brazo, $x/3, M(x)$ sale cúbico.

$$F_x \rightarrow N + 2 = 3 \rightarrow N = 1$$

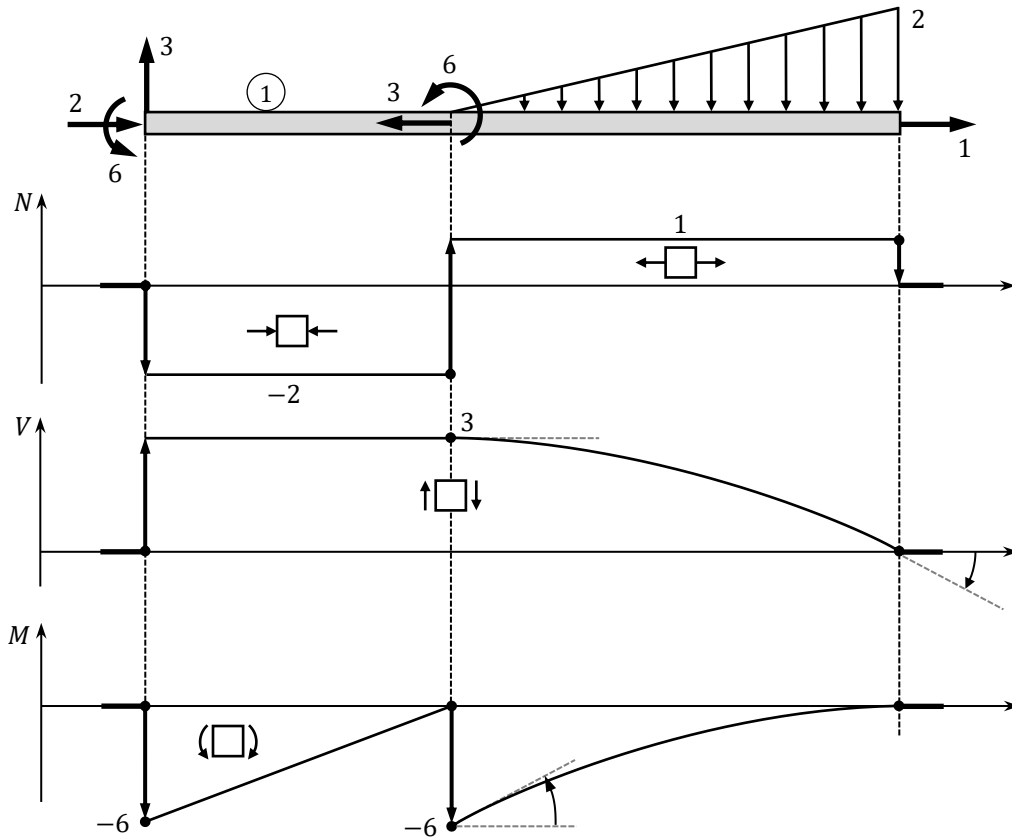
$$F_y \rightarrow V + \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow V = -\frac{x^2}{3} + 3 \leftarrow \frac{dV}{dx} = -\frac{2x}{3} = -q_x \rightarrow OK$$

$$M_S \rightarrow M + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{x}{3} + 6 + 6 = 3(x + 2) \rightarrow M = -\frac{x^3}{9} + 3x - 6 \leftarrow \frac{dM}{dx} = -\frac{3x^2}{9} + 3 = V \rightarrow OK$$

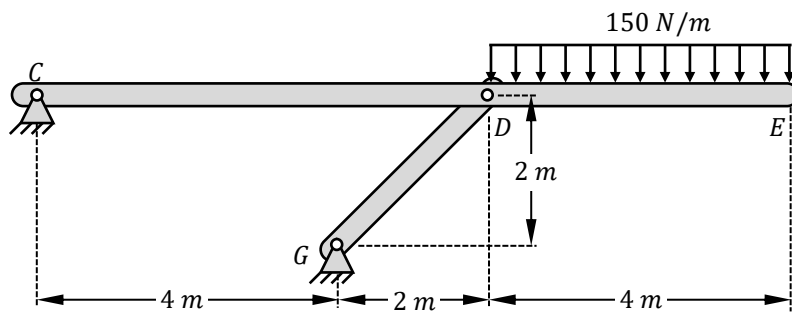
Para trazar los diagramas V y M correctamente, es necesario hacer un sencillo análisis de pendientes en secuencia (o cascada). Tras dibujar los puntos inicial y final de cada diagrama, en primer lugar, atendiendo a la evolución del valor de q a lo largo del tramo, se extrae la información de la evolución de la pendiente de V , se traza V , y después, atendiendo a la evolución del valor del V recién trazado, se extrae la información de la evolución de la pendiente de M para poder trazarlo. En este caso:

El valor de q en el punto inicial es 0, con lo cual, la curva de V arranca con tangente horizontal. A medida que se avanza por el tramo, el valor de q va aumentando progresivamente, con lo que, en consonancia, la tangente de V irá haciéndose cada vez más inclinada hacia abajo, hasta su valor final. Con esta información se traza V .

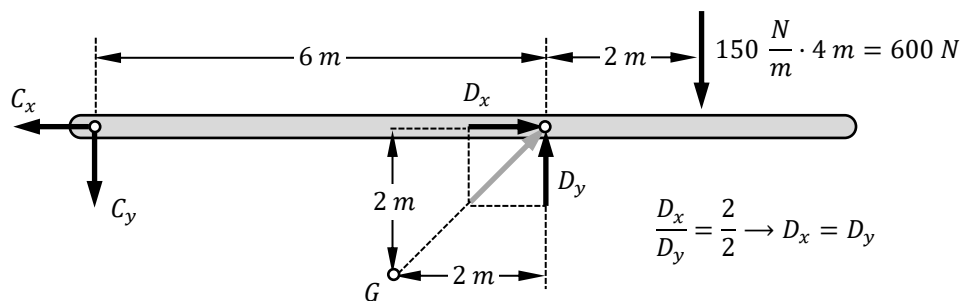
Ahora, V en el punto inicial tiene un valor positivo, con lo cual, la curva de M arranca con tangente ascendente. A medida que se avanza, el valor de V va disminuyendo, aunque siempre se mantiene positivo, hasta su valor final donde se hace 0. En consecuencia, la tangente de M irá “tumbándose” hasta hacerse horizontal en el punto final.



- Ejemplo 13.4 Representar los diagramas de esfuerzos internos.



Fuerzas del enlace:

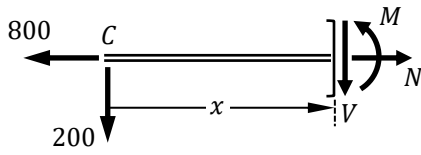


$$\sum M_D = 0 \rightarrow C_y \cdot 6 = 600 \cdot 2 \rightarrow C_y = 100 \cdot 2 = 200 N$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow D_y = C_y + 600 = 200 + 600 = 800 N \rightarrow D_x = 800 N$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = D_x = 800 N$$

Tramo CD:

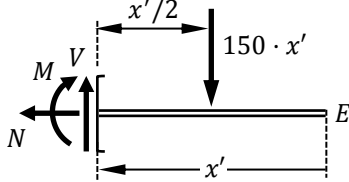


$$N = 800 \text{ N}$$

$$V = -200 \text{ N}$$

$$M = -200 \cdot x \rightarrow \begin{cases} M_C = 0 \\ M_D = -200 \cdot 6 = -1200 \text{ N} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Tramo DE:

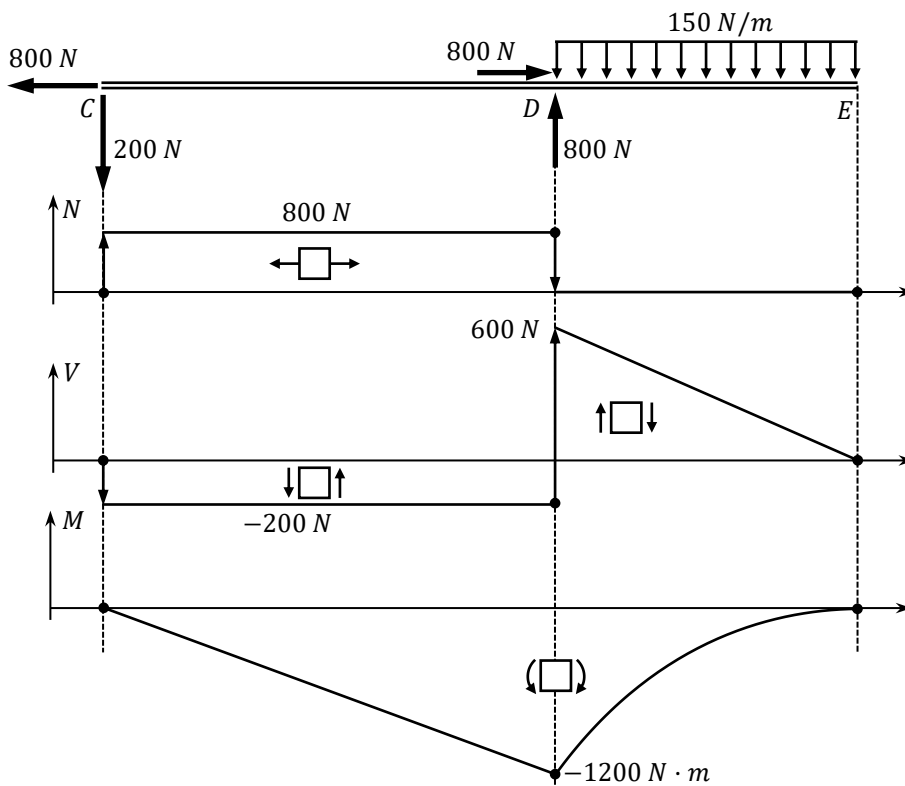


$$N = 0$$

$$V = 150 \cdot x' \rightarrow \begin{cases} V_E = 0 \\ V_D = 150 \cdot 4 = 600 \text{ N} \end{cases}$$

$$M + 150 \cdot x' \cdot \frac{x'}{2} = 0 \rightarrow M = -75 \cdot x'^2$$

$$\begin{cases} M_E = 0 \\ M_D = -75 \cdot 4^2 = -1200 \text{ N} \cdot \text{m} \end{cases}$$



Los saltos en el diagrama de fuerzas axiales en los puntos *C* y *D* se corresponden con las fuerzas puntuales horizontales aplicadas en dichos puntos.

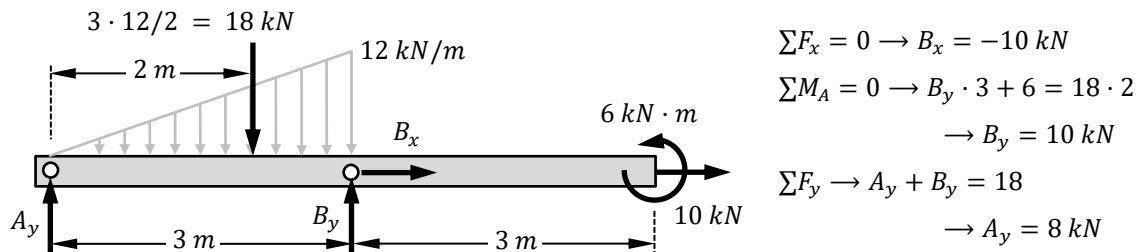
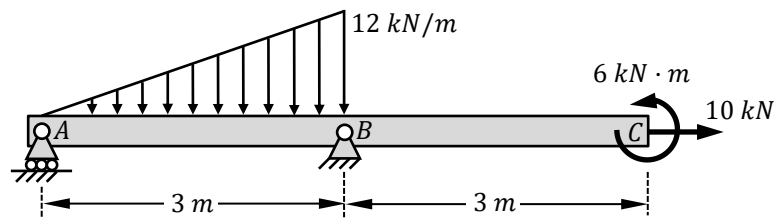
Los saltos en el diagrama de fuerzas cortantes en los puntos *C* y *D* se corresponden con las fuerzas puntuales verticales aplicadas en dichos puntos.

El diagrama de momentos flectores no presenta ninguna discontinuidad porque en el elemento no hay aplicado ningún momento puntual.

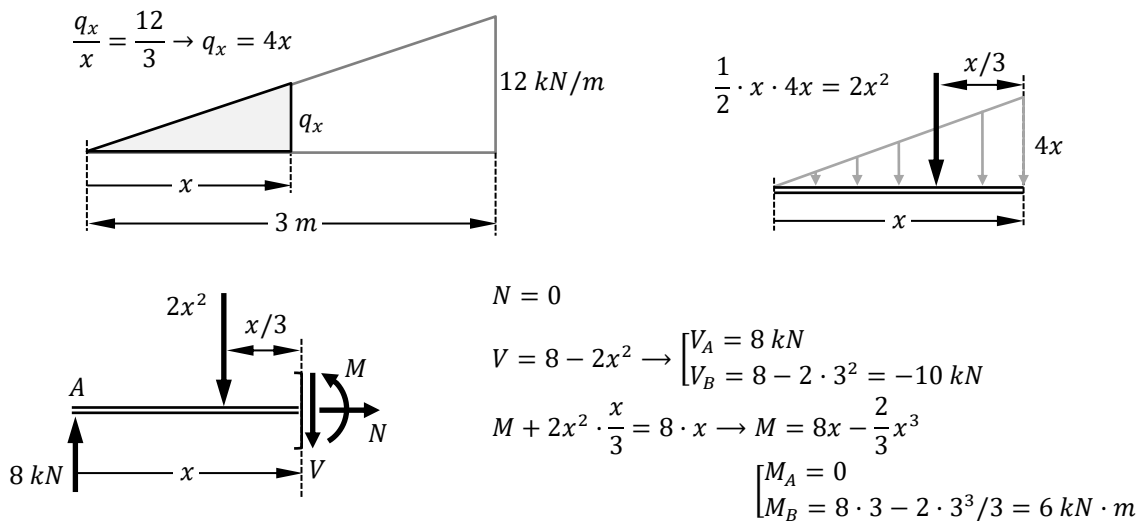
En el tramo *CD* $q = 0$, por lo que V es constante, $V' = -q$. Al ser V negativo, M es una recta de pendiente negativa $M' = V$.

En el tramo *DE*, como q es constante, V es una recta de pendiente negativa y M es una parábola con las ramas hacia abajo. Al ser el cortante en *E* nulo, el diagrama de momentos en *E* tiene tangente horizontal.

- Ejemplo 13.5 Representar los diagramas de esfuerzos internos.



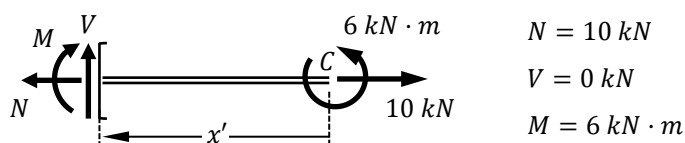
Tramo AB:

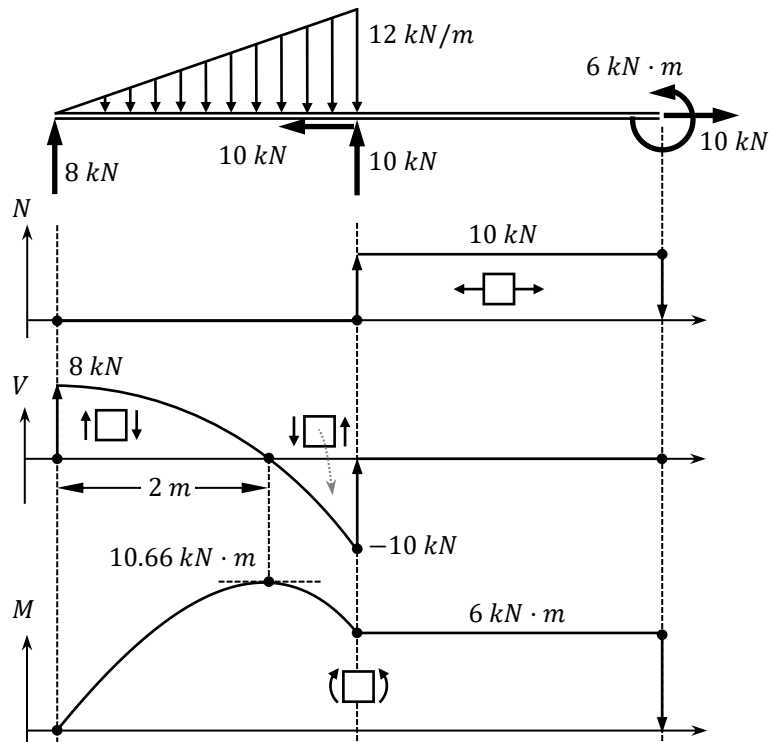


El cortante es una parábola que parte de A con pendiente nula y se va haciendo cada vez más negativa. Tiene signos opuestos en los extremos del tramo, por lo tanto en un punto intermedio pasará por 0. Dicha coordenada corresponderá con un máximo del flector, ya que la pendiente pasa de positiva a negativa:

$$V = 8 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \text{ m} \rightarrow M(2) = 8 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3/3 = 10.66 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Tramo BC:





13.7 CASO ESPACIAL

En un sistema tridimensional se tienen como esfuerzos internos generales en una sección tres fuerzas y tres momentos:

- La fuerza en la dirección del eje de la pieza, normal a la sección transversal es el axial: N .
- Como hay dos ejes activos contenidos en la sección hay dos fuerzas cortantes: V_y y V_z .
- Por la misma razón, existen dos momentos flectores perpendiculares entre sí: M_y y M_z .
- El momento en la dirección del eje de la pieza se denomina *momento torsor*: T .

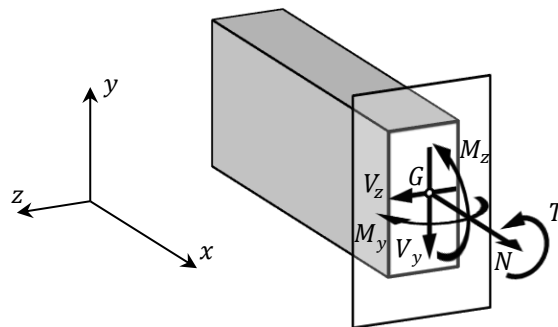
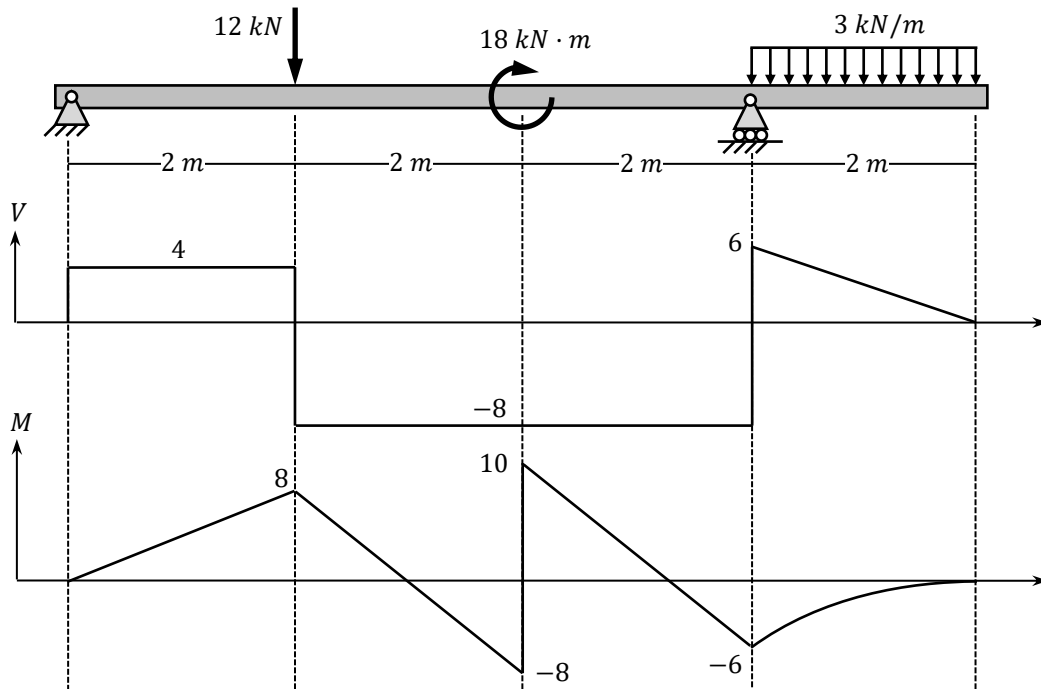


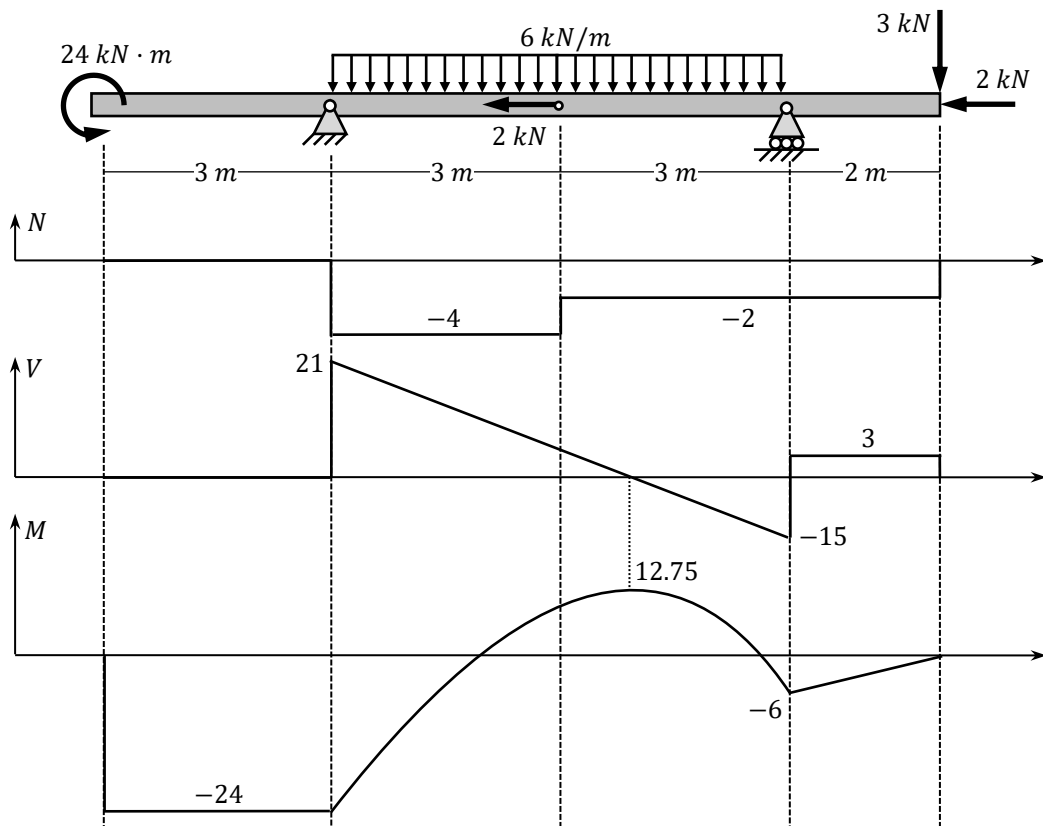
Fig. 13. 7 Esfuerzos internos en el caso espacial

Problemas

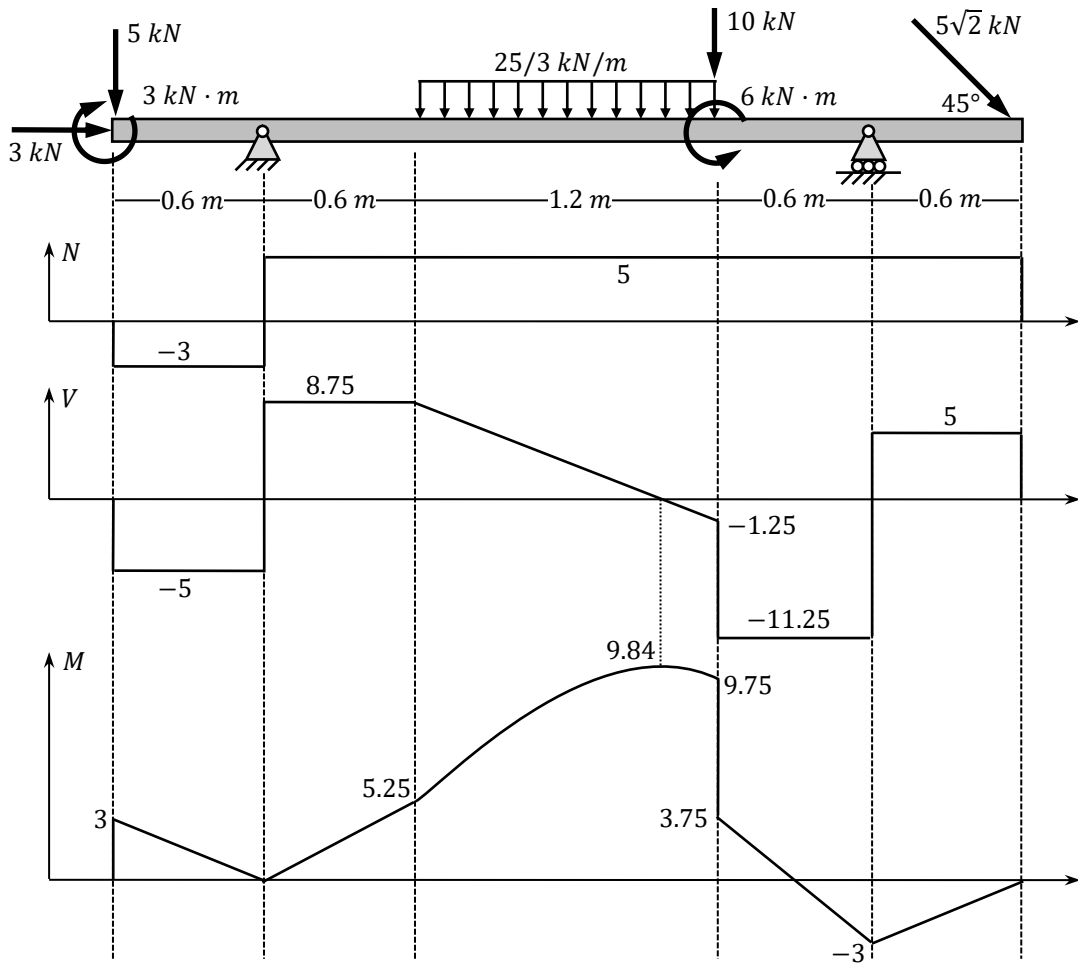
1.



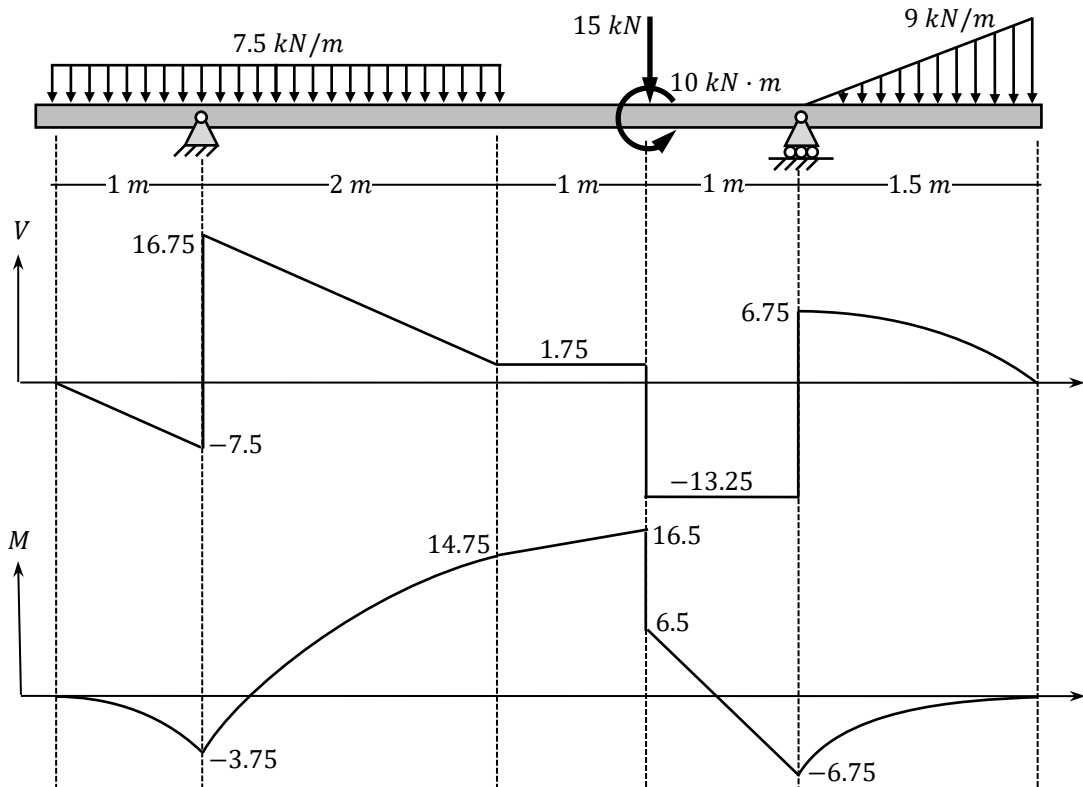
2.



3.



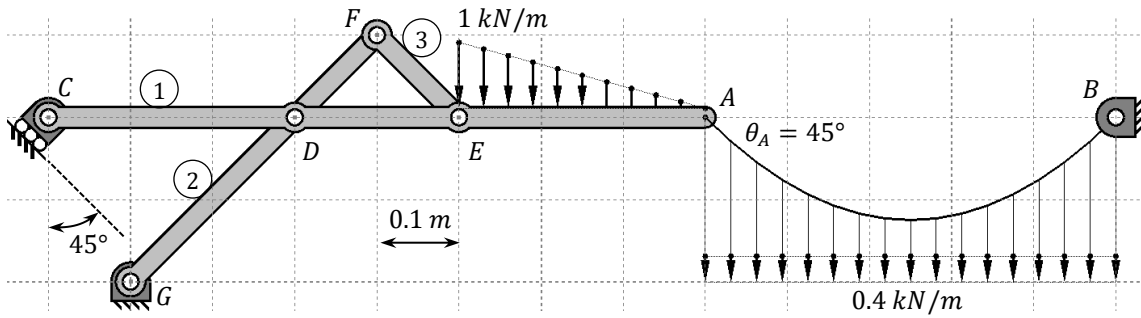
4.



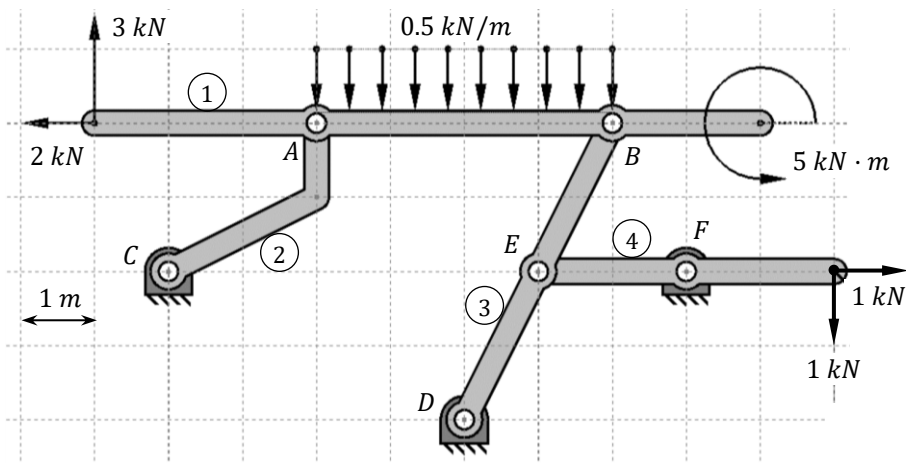
Problemas de Examen

Representar los diagramas de esfuerzos internos del elemento 1 y comprobar que los resultados son correctos.

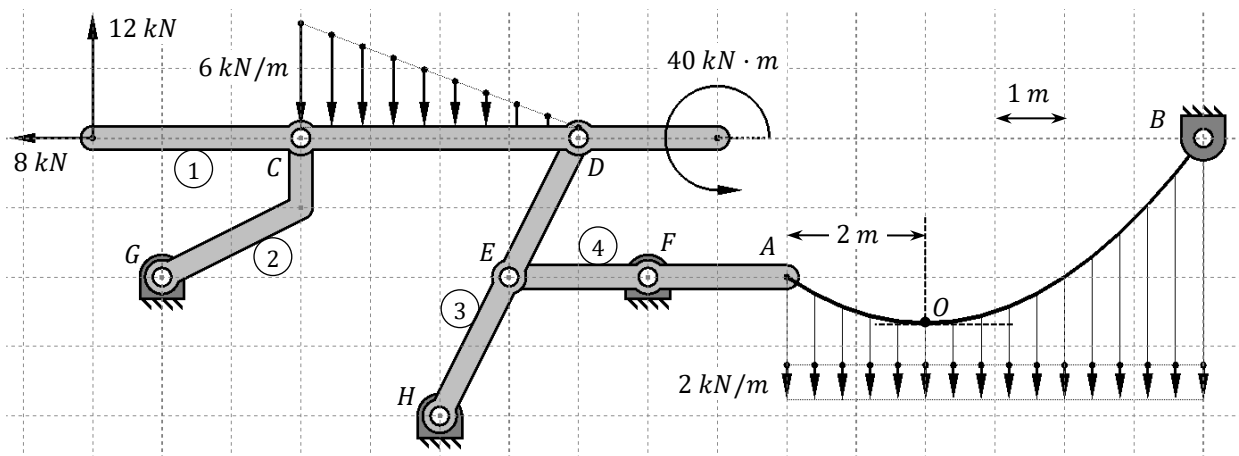
▪ Problema 13.1 junio 2018



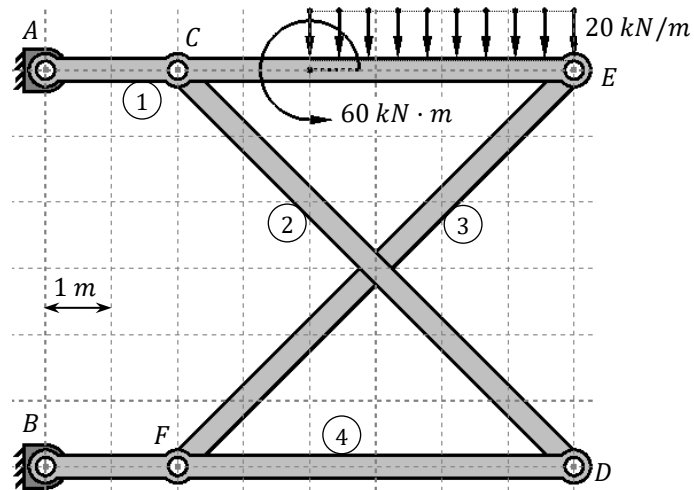
▪ Problema 13.2 mayo 2019



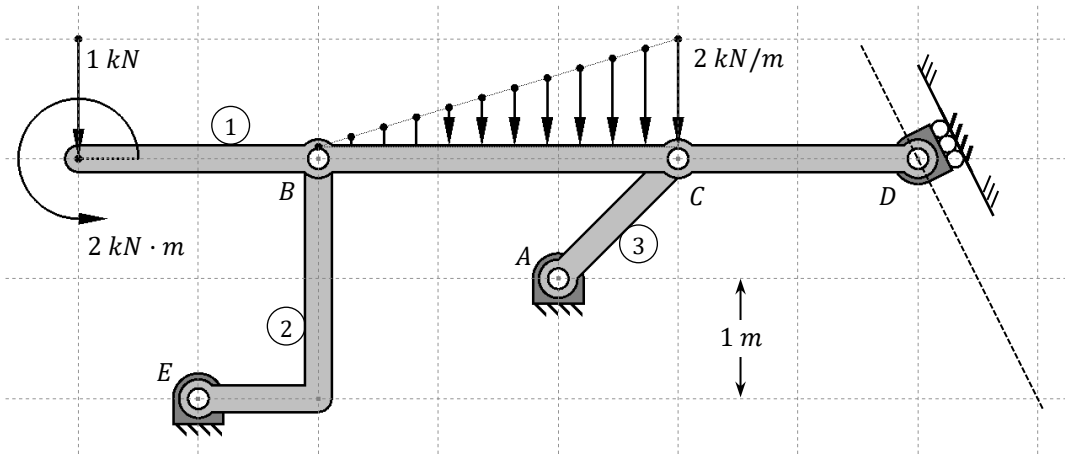
▪ Problema 13.3 junio 2019



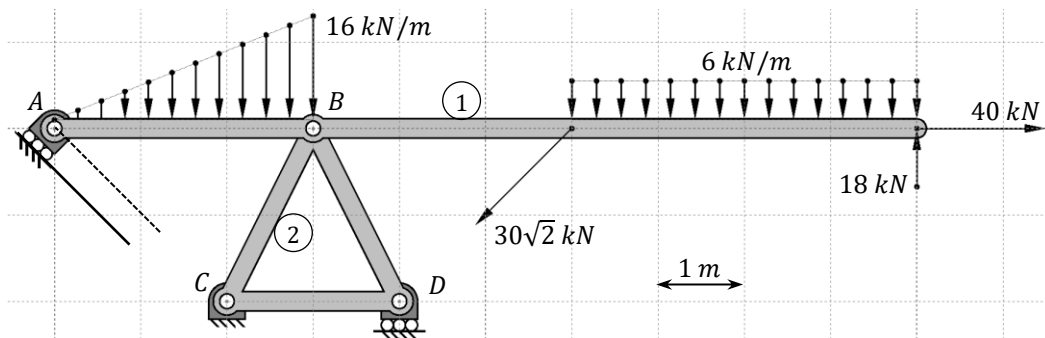
▪ Problema 13.4 junio 2017



▪ Problema 13.5 mayo 2021



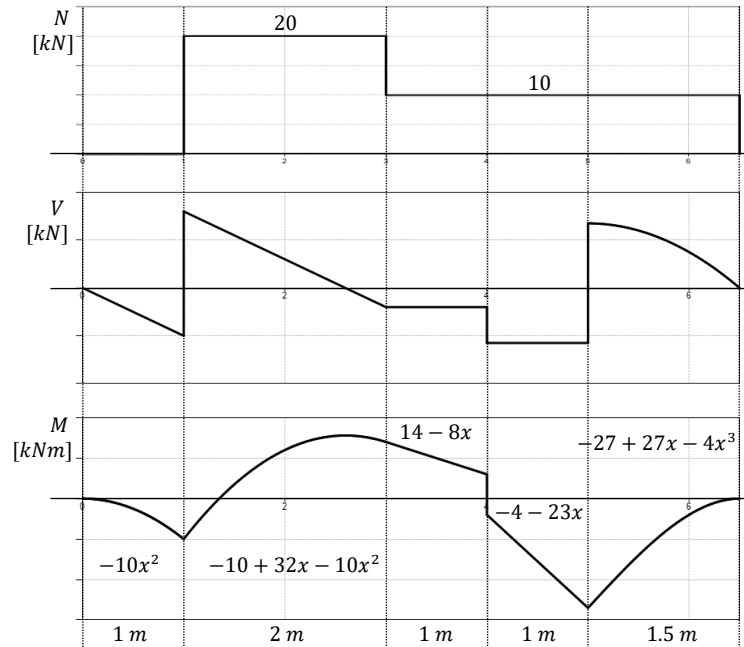
▪ Problema 13.6 mayo 2022



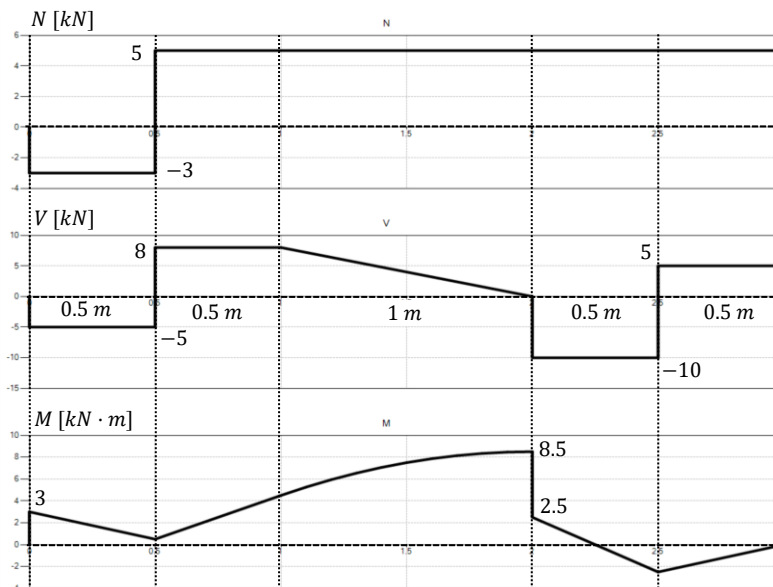
Teoría aplicada de Examen

Dibujar el diagrama de sólido libre con las cargas resueltas de la pieza que tiene los siguientes diagramas de esfuerzos internos.

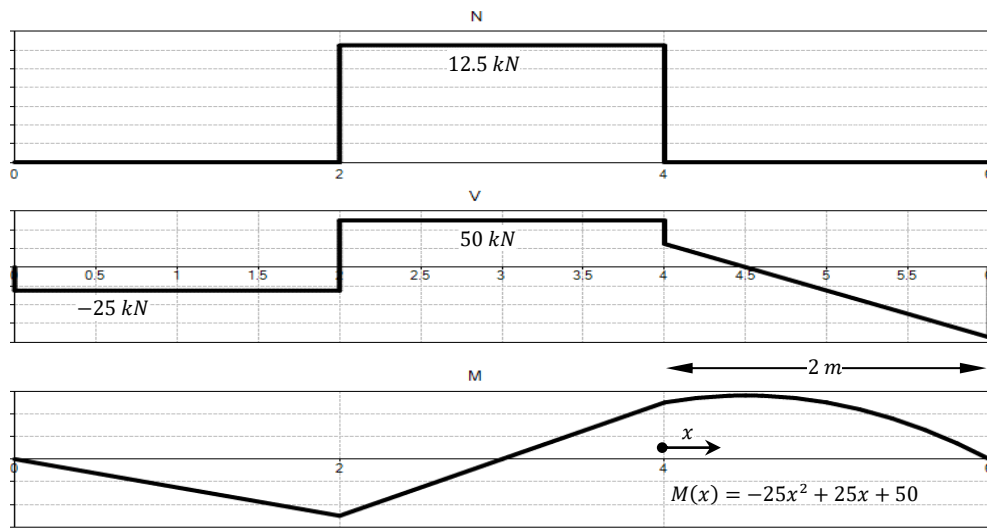
▪ Teoría 13.1 *mayo 2022*



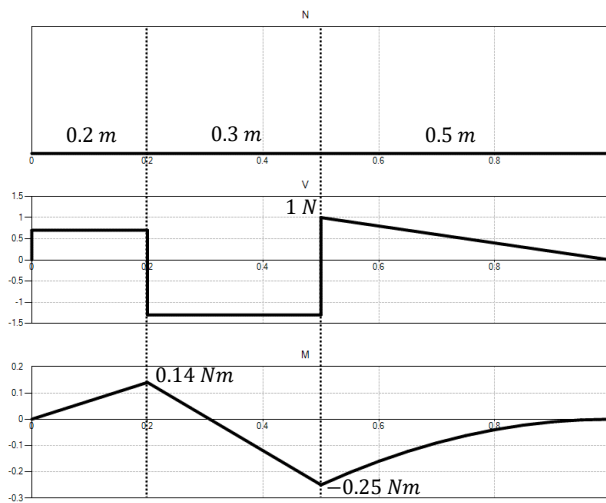
▪ Teoría 13.2 *mayo 2021*



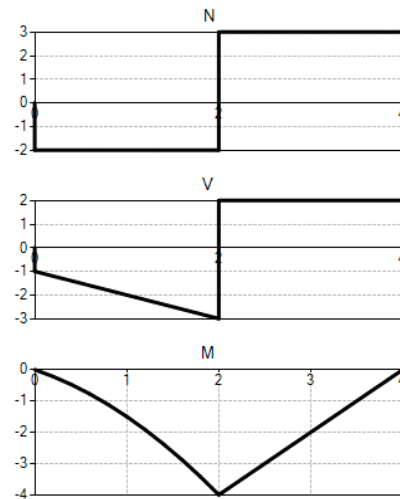
Teoría 13.3 mayo 2018



Teoría 13.4 mayo 2017



Teoría 13.5 junio 2015



14. TENSIONES NORMALES

14.1 TENSIÓN NORMAL Y DEFORMACIÓN UNITARIA

Hasta este punto se ha trabajado siempre bajo la hipótesis de sólido rígido, lo cual supone que los elementos son de un material perfecto capaz de soportar cargas de cualquier valor sin deformarse y sin romperse. Sin embargo, cualquier sólido real al ser sometido a carga experimenta una deformación, aunque a simple vista pueda resultar imperceptible, y si la carga alcanza un cierto valor, el material ya no será capaz de soportarla y la pieza se romperá. Es decir, un material real se caracteriza por unos determinados niveles de *elasticidad* (o *rigidez*) y *resistencia*. Dos piezas de igual geometría, pero distintos materiales, ante un mismo nivel de carga experimentarán distintos niveles de deformación, y el valor de carga que pueden soportar sin fallar será diferente en una que en la otra.

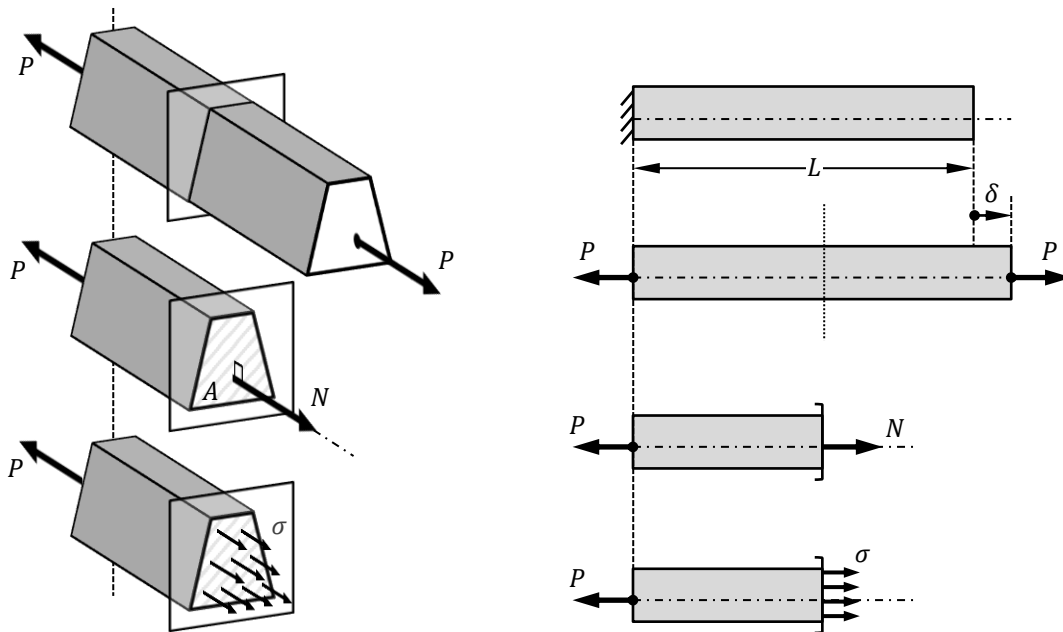


Fig. 14. 1 Tensión y deformación

Supóngase una pieza prismática cargada axialmente. Para analizar qué está pasando en el interior del material debe darse un corte y dejar a la vista una sección transversal. La condición de equilibrio estático establece que debe existir una fuerza interna axial, N . Pero evidentemente, la fuerza que se está transmitiendo por el interior de la pieza no está concentrada en un único punto, sino que en realidad está distribuida por toda la superficie de la sección, A . Suponiendo que el reparto es uniforme, la fuerza distribuida vale:

$$\sigma = N/A$$

Pues bien, eso es una *tensión*, una fuerza por unidad de área. Representa cómo de ‘concentrada’ está la fuerza en el material, cuánto está ‘sufriendo’ éste. Ante un mismo valor de carga, cuanto más pequeña sea el área de la sección transversal de la pieza, mayor es la tensión que está soportando el material. La tensión es lo que rompe el material, es decir, la resistencia de un material viene dada por el valor máximo de σ que es capaz de soportar. Evidentemente, el esfuerzo axial es simplemente la fuerza puntual equivalente a esa fuerza distribuida que realmente existe, $N = \sigma \cdot A$.

En el *S.I.*, la unidad de tensión es el *Pascal* ($Pa = N/m^2$). Sin embargo, debido al orden de magnitud de los valores normalmente existentes en los casos reales, resulta más práctico el empleo de un múltiplo, el *MegaPascal*, ($MPa = 10^6 Pa = N/mm^2$).

En el caso planteado, la tensión en la sección, como el propio esfuerzo axial, es perpendicular al plano de corte, por eso se denomina tensión normal. Cuando la tensión es ‘saliente’ (está tirando del material), se dice que es tensión de *tracción*, y cuando es ‘entrante’ (está aplastando el material) se denomina tensión de *compresión*. La tracción provoca el alargamiento del material, mientras que la deformación por compresión es un acortamiento.

14.1.1 Posición de la fuerza axial

Se ha afirmado que una fuerza axial produce una distribución de tensiones uniforme (σ constante) en todos los puntos de la sección. Se va a deducir cuál debe ser el punto concreto de la sección transversal donde debe estar aplicada la fuerza interna N para que esto sea así. Para ello, se considera un sistema de ejes y, z en el plano de la sección transversal, con origen en el punto de aplicación de N .

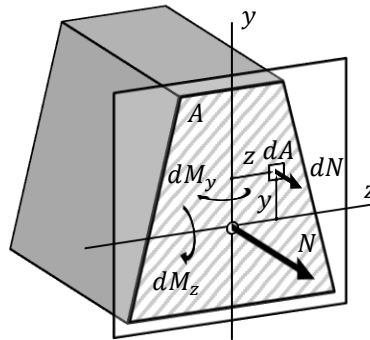


Fig. 14. 2 Fuerza axial en la sección transversal

Siempre debe verificarse la equivalencia estática entre los esfuerzos internos de sección y las tensiones existentes en el material de la misma. Esto es porque los esfuerzos internos no son otra cosa que las componentes de un sistema equivalente a las fuerzas reales existentes, distribuidas por todo el material, es decir, a las tensiones. Para estudiar esta equivalencia deben transformarse las tensiones en fuerzas puntuales. Para ello se considera un diferencial de área genérico, dA . Como en toda esa área existe una tensión σ , la fuerza puntual equivalente vale $dN = \sigma \cdot dA$ (infinitamente pequeña porque representa el efecto de una tensión finita actuando sobre un área infinitamente pequeña). Obviamente, al sumar la contribución de todos los diferenciales de área, teniendo en cuenta que en toda la sección σ es constante:

$$\int dN = \int \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int dA = \sigma \cdot A = N$$

Pero como se observa, la fuerza dN produce momentos (diferenciales) respecto de los ejes y y z :

$$dM_z = dN \cdot y \qquad dM_y = dN \cdot z$$

Sin embargo, los momentos totales deben ser nulos, puesto que en la sección sólo hay como sistema de fuerzas internas una fuerza axial. Por tanto:

$$\int dM_z = \int \sigma \cdot dA \cdot y = \sigma \cdot \int y \cdot dA = 0 \qquad \int dM_y = \int \sigma \cdot dA \cdot z = \sigma \cdot \int z \cdot dA = 0$$

Como la tensión no es nula, $\int y \cdot dA = \int z \cdot dA = 0$, que son los momentos estáticos del área respecto de los dos ejes considerados. Recuérdese que el momento estático de un área respecto de un eje es nulo sólo cuando el eje pasa por el centroide del área. Por lo tanto, para que la tensión esté uniformemente distribuida, la fuerza axial sólo puede estar aplicada en el centroide de la sección.

14.1.2 Elasticidad lineal

Al someter a la pieza a una carga de tracción, obviamente ésta se alarga, su longitud L se incrementa en un valor δ . Eso es debido a que el material se está ‘estirando’ por efecto de la tensión de tracción existente. Para un mismo valor de tensión (de N y de A), cuanto mayor sea la longitud original de la pieza mayor es el alargamiento que experimenta. Por tanto, para caracterizar cómo de rígido (o elástico) es el material se define la deformación (longitudinal) unitaria:

$$\varepsilon = \delta/L$$

Un material es *elástico lineal* cuando existe una proporcionalidad directa entre el nivel de tensión que está soportando y el nivel de deformación unitaria que está experimentando (al duplicar σ se duplica ε , o llevado a una pieza de dicho material, al duplicar N se duplica δ).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Esta relación se conoce como *Ley de Hooke*. La constante de proporcionalidad, E , denominada *módulo de elasticidad*, se determina experimentalmente mediante un ensayo de tracción de una probeta del material en cuestión. Evidentemente tiene unidades de tensión, aunque debido a su magnitud suele proporcionarse en *GigaPascales* ($GPa = 10^9 Pa = kN/mm^2$). En este ensayo, además de la rigidez del material, también se determina su resistencia, caracterizada por un valor máximo de *tensión admisible*.

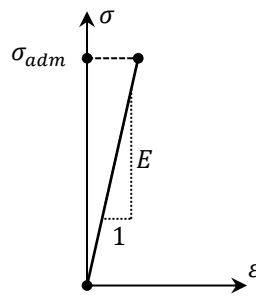


Fig. 14. 3 Material elástico lineal

14.2 TENSIONES EN FLEXIÓN

14.2.1 Flexión simple

Siempre que existe como esfuerzo interno un momento flector, la pieza se deforma curvándose (flectando). Supóngase una pieza prismática de eje longitudinal rectilíneo. En un estado de carga de flexión dicho eje adquiere una curvatura. Para analizar las tensiones que existen en esta situación, se toma un sistema de referencia en el que el eje x tiene la dirección del eje longitudinal de la pieza y el plano xy es el plano en el cual la pieza flexa.

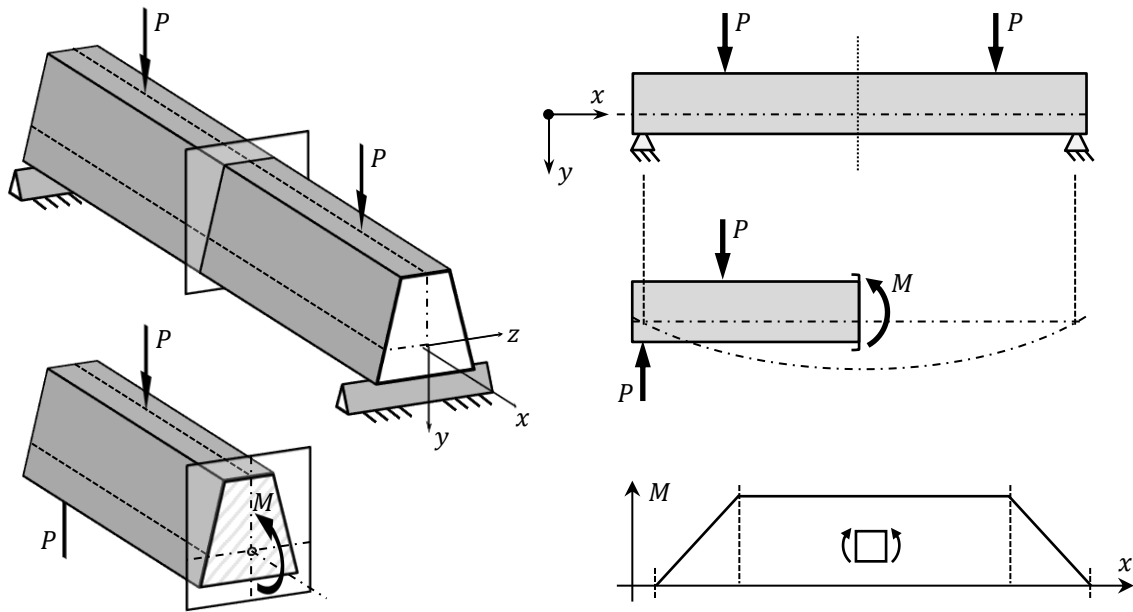


Fig. 14. 4 Pieza en flexión

En la representación plana xy , cualquier plano espacial xz se visualiza proyectante, como una línea, que se denomina *fibra*. Cuando las deformaciones son pequeñas, las secciones transversales planas sobre la pieza sin deformar se mantienen planas cuando la pieza se ha deformado (*hipótesis de Navier*). Esto implica que, si la pieza se deforma curvándose, sus fibras longitudinales deben adquirir diferentes longitudes.

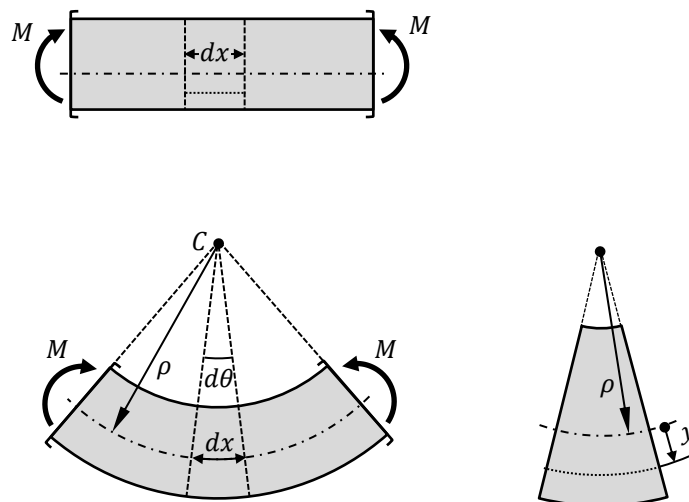


Fig. 14. 5 Curvatura y fibra neutra

Para la situación representada, la fibra inferior se ha alargado, mientras que la fibra superior se ha acortado respecto de sus longitudes originales. Existe una fibra intermedia, denominada *fibra neutra*, que es la que, a pesar de haberse curvado, presenta la misma longitud que tenía en la pieza recta.

En un caso con el momento flector en el sentido representado, todas las fibras por encima de la neutra se han acortado (comprimido), mientras que todas las fibras por debajo de ésta se han alargado (traccionado). Además, el nivel de deformación longitudinal de una fibra cualquiera, en ambos sentidos será tanto mayor cuanto más alejada se encuentre de la fibra neutra, de manera que las fibras más deformadas son siempre las caras externas de la pieza, superior e inferior.

Supóngase una 'rodaja' transversal en la pieza no deformada de espesor diferencial, dx . Una vez deformada la pieza, dado el radio de curvatura, ρ , de la fibra neutra en el punto del eje donde se ha tomado la rodaja, se verifica la relación $dx = \rho \cdot d\theta$.

Una fibra genérica situada a una distancia y de la fibra neutra, en la configuración no deformada de la rodaja, también medía dx . Sin embargo, en la configuración deformada tiene una longitud de valor $(\rho + y) \cdot d\theta$. La deformación longitudinal unitaria que ha sufrido es lo que se ha alargado entre lo que medía inicialmente:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{1}{\rho} \cdot y$$

En esta expresión se comprueba cómo, efectivamente, la deformación de cualquier fibra es directamente proporcional a su distancia a la fibra neutra. Pero recuérdese que en un material elástico lineal la tensión que el material sufre siempre es directamente proporcional a la deformación unitaria que experimenta, y por tanto, la tensión también es directamente proporcional a la distancia a la fibra neutra:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot y = k \cdot y$$

Debe tenerse en cuenta que la fibra neutra representa la frontera entre las fibras de la sección que están alargándose y las que están acortándose, por lo que, de igual modo, desde un punto de vista tensional, separa las zonas de la sección que están sometidas a tracción y a compresión. Recuérdese que una fibra en x en la representación bidimensional representa un plano xz en la pieza real. Por lo tanto, cuando en la representación plana se visualiza un punto de la sección transversal con un cierto nivel de tensión nula, en realidad corresponde a una línea en z que comprende toda la sección. La línea de la sección transversal con tensión nula se denomina *línea neutra*. El plano definido por la fibra neutra (x) y la línea neutra (z) representa el conjunto total de puntos de la pieza sin tensión normal.

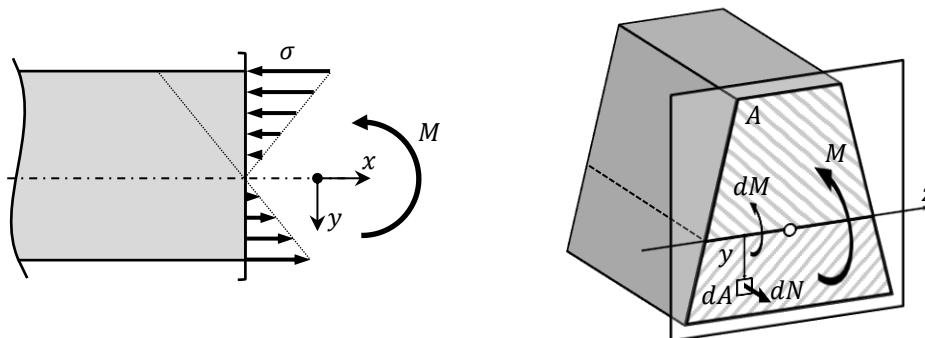


Fig. 14. 6 Distribución de tensiones en una sección transversal con momento flector

Obsérvese que, tal como se ha representado, las tracciones se dan en la zona de la sección de la que el flector ‘tira’ y las compresiones están en la zona por la que ‘empuja’. Hasta el momento se ha deducido que la existencia de un momento flector produce una distribución de tensiones normales en la sección transversal de la pieza. Esta distribución es tal que el valor de la tensión aumenta linealmente con la distancia a la línea neutra. El siguiente objetivo es determinar la posición concreta de la línea neutra dentro de la sección, así como la expresión que proporciona el valor de la tensión en función del momento flector existente.

Para ello, nuevamente se estudia la equivalencia estática entre la distribución de tensiones y el esfuerzo interno que las genera. Las tensiones son como un sistema de fuerzas repartidas por toda la sección, de manera que su resultante y momento resultante son los esfuerzos internos en la sección. Por tanto:

- Como en la sección no hay fuerza axial, la resultante de todas las tensiones debe ser nula. Esto quiere decir que las tracciones de un lado se compensan con las compresiones del otro.
- El momento resultante de las tensiones en todos los puntos de la sección respecto del eje z debe ser el momento flector M .

Para plantear esta equivalencia, la tensión, como fuerza distribuida que es, debe previamente transformarse a fuerza puntual equivalente. Para ello, se discretiza la sección en diferenciales de área, de manera que pueda suponerse que en toda la superficie del dA la tensión σ (que varía con y) es constante. Aunque la tensión (fuerza por unidad de área) sea un valor finito, al estar actuando sobre una superficie infinitamente pequeña, la fuerza equivalente también será diferencial. De hecho:

$$dN = \sigma \cdot dA$$

Esta fuerza produce un momento respecto del eje z . El brazo, de valor y , es finito, pero como la fuerza es infinitamente pequeña, su momento también es diferencial. De hecho:

$$dM = dN \cdot y = \sigma \cdot y \cdot dA$$

Las resultantes en fuerza y momento son las sumas para todas las infinitas áreas en las que se ha subdividido la sección, es decir:

$$N = 0 = \int dN \qquad M = \int dM$$

Recordando que $\sigma = k \cdot y$ (siendo k una constante de proporcionalidad):

$$0 = \int k \cdot y \cdot dA = k \int y \cdot dA \rightarrow \int y \cdot dA = 0$$

$$M = \int k \cdot y \cdot y \cdot dA = k \int y^2 \cdot dA = k \cdot I_z$$

$\int y \cdot dA$ es el momento estático del área A (de la sección transversal) respecto del eje z . Que sea nulo implica que el eje z , o la línea neutra, está a la altura del centroide de la sección.

$\int y^2 \cdot dA$ es el momento de inercia del área A respecto de la línea neutra, o I_z . Como $k = \sigma/y$:

$$M = \frac{\sigma}{y} \cdot I_z$$

De donde finalmente se obtiene el valor de la tensión en cualquier punto de la sección:

$$\boxed{\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}}$$

Obsérvese que dN también produce un momento respecto del eje y :

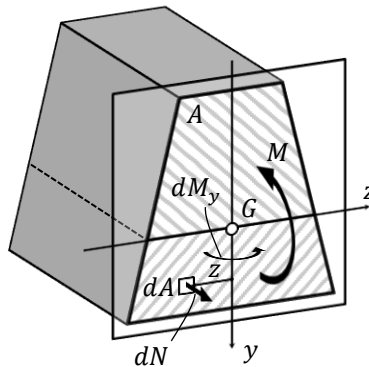


Fig. 14. 7 Momento flector en la sección transversal

Pero el momento flector existente en la sección tiene la dirección z , por lo que debe verificarse:

$$M_y = \int dM_y = 0 \rightarrow \int dN \cdot z = \int \sigma \cdot dA \cdot z = \int k \cdot y \cdot dA \cdot z = k \int y \cdot z \cdot dA = 0$$

$$\int y \cdot z \cdot dA = 0$$

Este resultado implica que todo el estudio realizado es válido sólo si el producto de inercia de la sección trasversal respecto de la pareja de ejes y, z es nulo, es decir, sólo si dichos ejes son principales de inercia de la sección.

14.2.2 Flexión compuesta

Se denomina flexión compuesta a la situación en la que existen simultáneamente en la sección fuerza axial y momento flector. Ambos esfuerzos internos producen tensiones normales en un punto cualquiera. Aplicando el principio de superposición, el efecto conjunto es simplemente la suma de los efectos independientes, de manera que:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot y}{I_z}$$

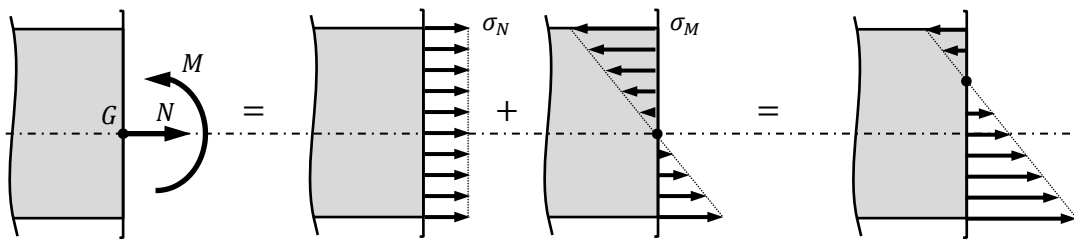
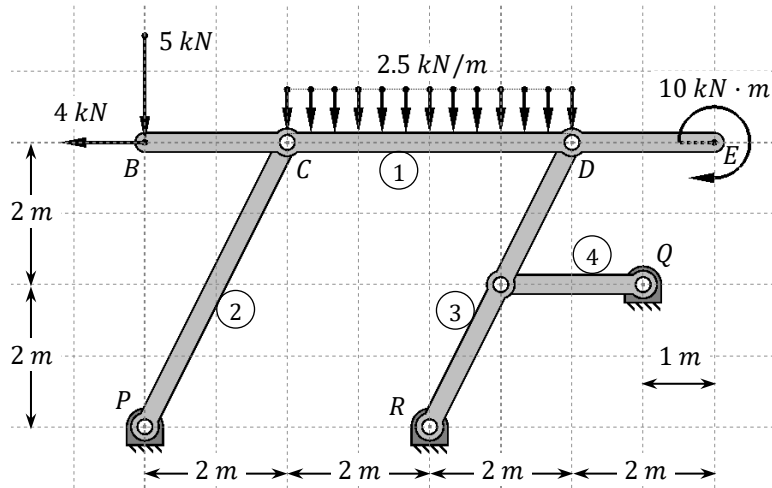


Fig. 14. 8 Distribución de tensiones en flexión compuesta

Problemas de Examen

▪ **Problema 14.1** *mayo 2015* **45 minutos**

- a) Obtener los diagramas de esfuerzos internos del elemento 1 y comprobar que los resultados son correctos. [2 puntos]
- b) Si la sección transversal de dicho elemento es rectangular de base 2 cm y altura 10 cm, identificar el punto de la pieza donde se produce la máxima tensión normal y calcular su valor. [0.5 puntos]



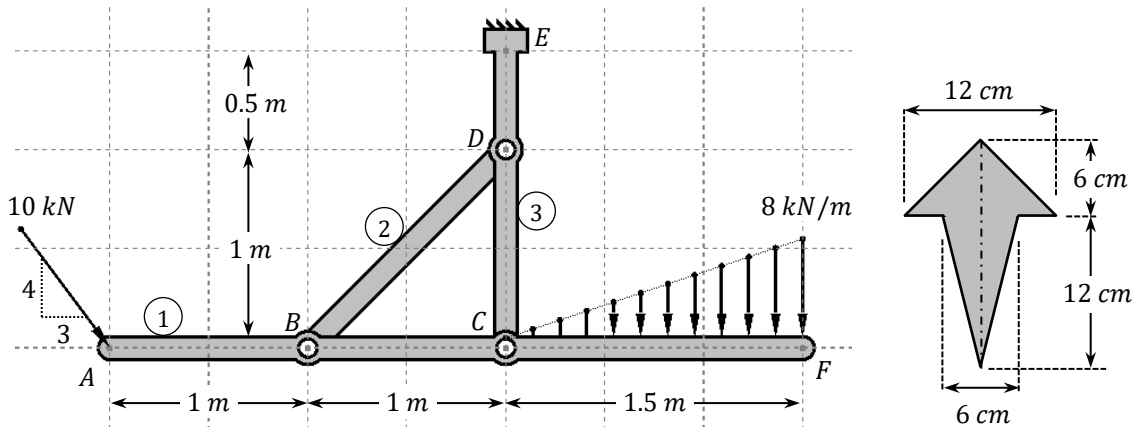
▪ **Problema 14.2** *junio 2015* **65 minutos**

Para la estructura de la figura, dibujar:

- a) Los diagramas de sólido libre resueltos de todos los elementos. [1 punto]
- b) Los diagramas de esfuerzos internos del elemento de eje horizontal. [1.2 puntos]

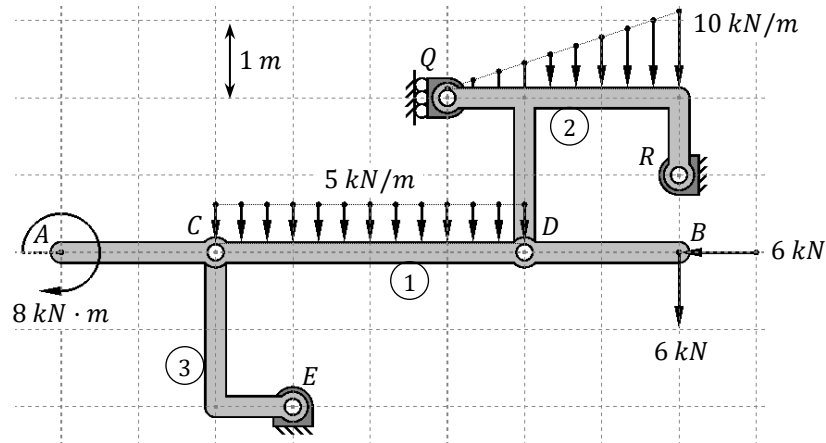
Siendo la sección transversal de dicho elemento la indicada, calcular:

- c) La posición del centroide del área. [0.3 puntos]
- d) El momento de inercia respecto de un eje horizontal a la altura del centroide. [0.3 puntos]
- e) La tensión normal máxima en el elemento, identificando en qué punto se produce. [0.2 puntos]



▪ Problema 14.3 *mayo 2016* **45 minutos**

- a) Obtener los diagramas de esfuerzos internos del elemento 1 y comprobar que los resultados son correctos. [2 puntos]
- b) Si la sección transversal de dicho elemento es rectangular de base 2 cm y altura 10 cm, identificar el punto de la pieza donde se produce la máxima tensión normal y calcular su valor. [0.5 puntos]

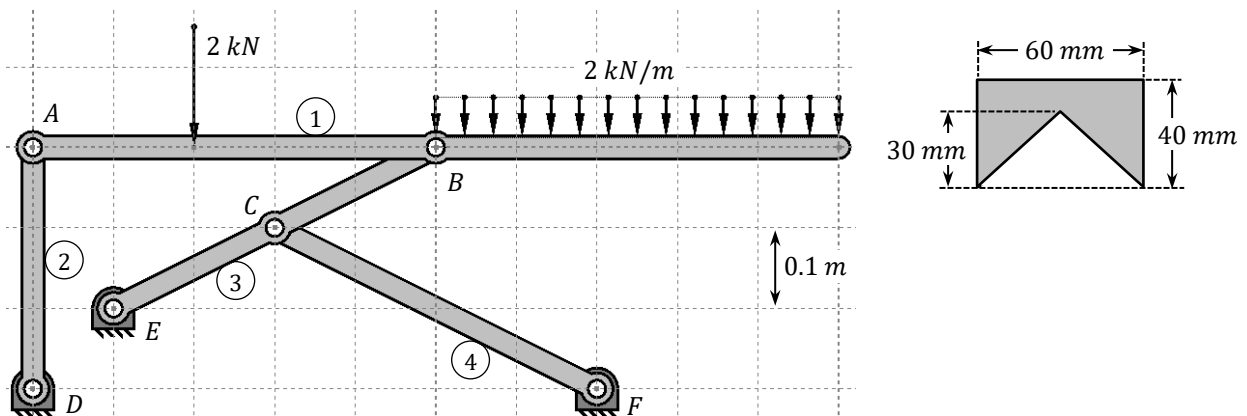


▪ Problema 14.4 *mayo 2017* **50 minutos**

- a) Representar los diagramas de esfuerzos internos del elemento 1 y comprobar que los resultados son correctos. [1.6 puntos]

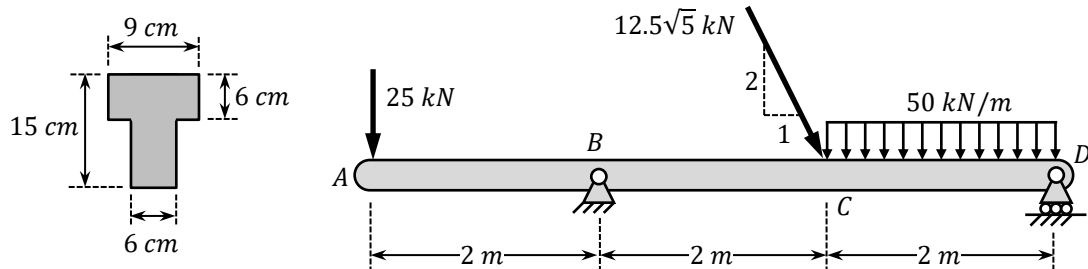
Siendo la sección transversal de dicho elemento la indicada en la figura, calcular:

- b) La posición del centroide del área. [0.3 puntos]
- c) El momento de inercia respecto de un eje horizontal a la altura del centroide. [0.3 puntos]
- d) Las tensiones normales máximas de tracción y compresión en el elemento 1, identificando en qué puntos se producen. [0.3 puntos]



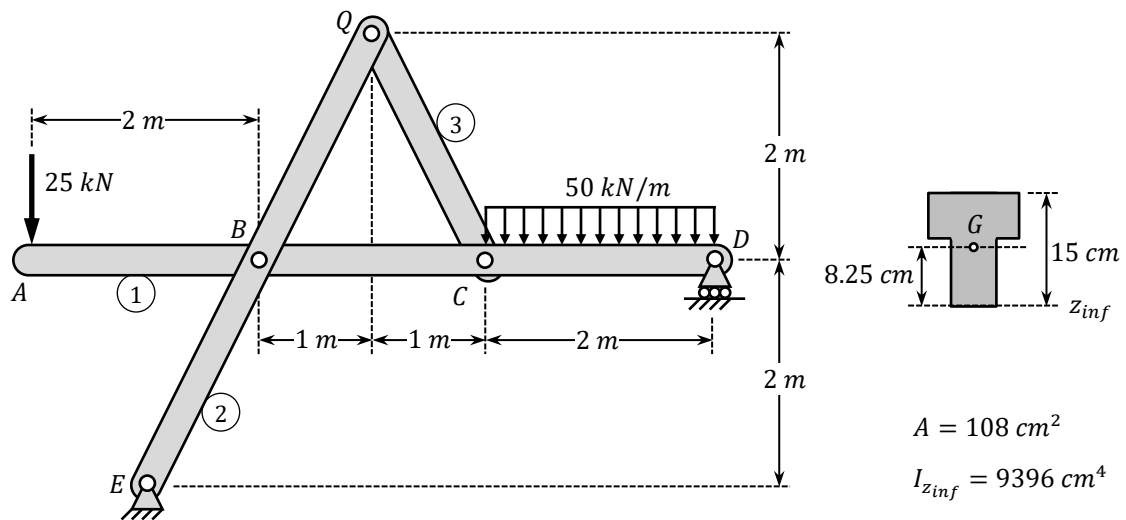
▪ Problema 14.5.1 **mayo 2018** **50 minutos**

- Siendo la sección transversal de la pieza la indicada, calcular la posición del centroide del área y el momento de inercia respecto de un eje horizontal a la altura del mismo. [1 punto]
- Representar los diagramas de esfuerzos internos de la pieza, comprobando que los resultados son correctos. [1 punto]
- Calcular las máximas tensiones de tracción y compresión, indicando en qué puntos de la pieza se producen. [0.5 puntos]



▪ Problema 14.5.2 **mayo 2018** **50 minutos**

- Representar los diagramas de sólido libre resueltos de cada elemento de la estructura y comprobar que los resultados son correctos. [1 punto]
- Representar los diagramas de esfuerzos internos de la pieza 1, comprobando que los resultados son correctos. [1 punto]
- Sabiendo que la sección transversal de dicha pieza es la indicada, calcular las máximas tensiones de tracción y compresión, indicando en qué puntos de la misma se producen. [0.5 puntos]



Unibertsitateko eskuliburuak Manuales universitarios

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua
argitaletxea@ehu.eus

Servicio Editorial de la UPV/EHU
editorial@ehu.eus

Tel.: 94 601 2227
www.ehu.eus/argitalpenak

oman ta zabal zaztu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ISBN: 978-84-1319-548-3