ikd baliabideak
material de aprendizaje

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Metodología ABP aplicada a estudio de funciones reales de variables reales

Concepción Varela Lezeta

Cuaderno del estudiante

IKD baliabideak 1 (2011)

GUÍA DE ACTIVIDADES

Eragin Programa:
Metodología ABP aplicada al estudio de funciones reales de variables reales

Concepción Varela Lezeta

Introducción

El estudio de funciones reales de variables reales se va a realizar utilizando metodologías activas de enseñanza-aprendizaje, en concreto Aprendizaje Basado en Problemas. Mediante la realización de una serie de actividades, que se os dan a continuación, deberéis conseguir los siguientes indicadores de aprendizaje:

Comprender el concepto de función de dos variable,(geométricamente es añadir una dimensión más al plano), y conocer las superficies usuales, así como reconocer las curvas de nivel correspondientes.
Identificar el límite direccional como el límite de una función de una variable, relacionarlo con el límite doble y, utilizarlo para definir la continuidad y derivabilidad.
Comprender el concepto de derivadas parciales y derivadas direccionales.
Identificar el gradiente como - Dirección de máxima/mínima variación de la función, o, - Momentos de variación nula (curvas de nivel).
Plantear diferentes ejercicios en los que tengan que utilizar el vector gradiente, derivadas direccionales. Representar en cada caso las curvas de nivel correspondientes.
Reconocer las funciones compuestas e implícitas
Identificar los tipos de extremos a calcular y utilizar en cada caso el desarrollo matemático adecuado.

Tabla 1: Indicadores de aprendizaje

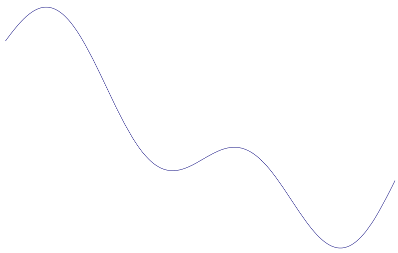
Cada una de las actividades puede ser: presencial (P) o no presencial (NP), individual (I) o grupal (G), y pueden ser puesta en común en clase (PC) o no. Después del enunciado de cada actividad tenéis indicado el tipo de actividad que vais a realizar.

GUÍA DE ACTIVIDADES

1. ¿QUÉ ES EL ESPACIO DE TRES DIMENSIONES? ¿QUÉ ES UNA SUPERFICIE?

A.1. Observad los siguientes dibujos e indicad cuáles son las variables que intervienen en las situaciones que se plantean. (Tipo de actividad: I.N.P.)

i) Movimiento de una cuerda



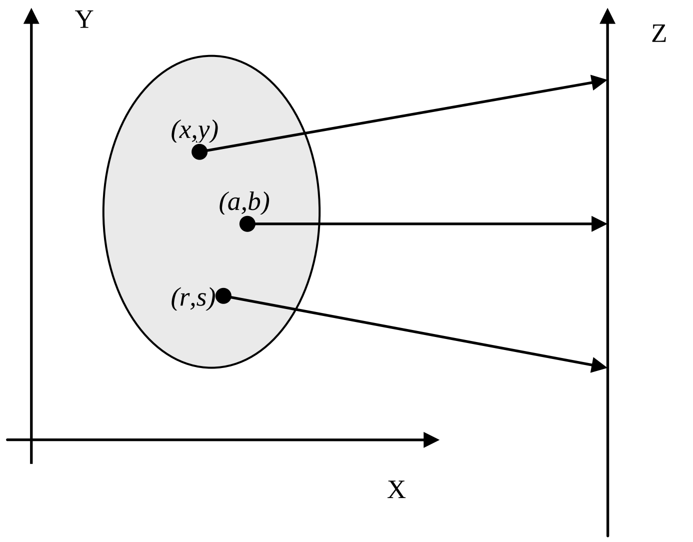
ii) Desplazamiento de un coche por una calle

iii) Cantidad de gasolina que cabe en el depósito del coche

iv) Cantidad de hormigón necesaria para hacer la siguiente pista de skate

A.2. ¿Podemos modelizar todas las situaciones con funciones de una variable? Imaginad que tenéis que diseñar un nuevo hilo conductor, o, que queréis saber cómo se mueve una partícula en el espacio, etc.. ¿Cuántas variables utilizaríais? , ¿Cuáles serían estas?

¿Podrías definir formalmente el concepto de función de dos variables? ¿Cuántos ejes son necesarios? ¿Cómo se colocan dichos ejes? Ayudaros del siguiente gráfico para responder a estas preguntas. (Tipo de actividad: I.N.P.)



A.3. ¿Cómo representaríais una función de dos variables? ¿Podéis relacionar curvas en el plano y superficies? ¿Se pueden identificar las superficies con algo de nuestro entorno? (Apoyaros en las siguientes figuras). (Tipo de actividad: G.P.C.)

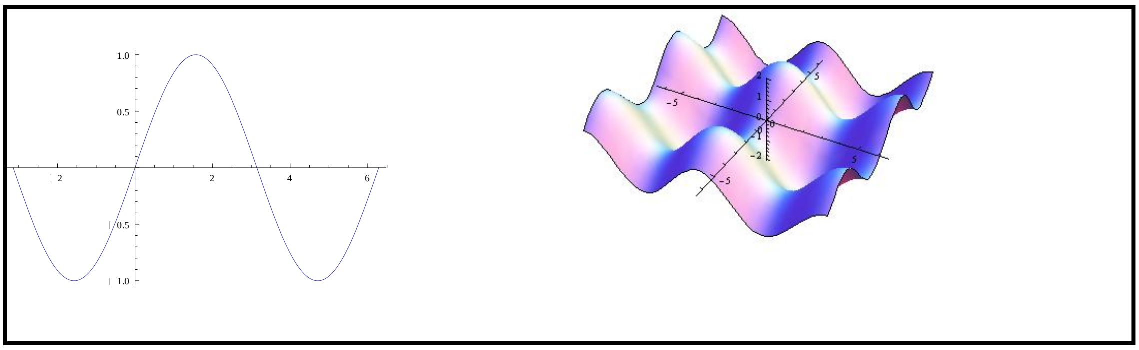


Figura 1.2

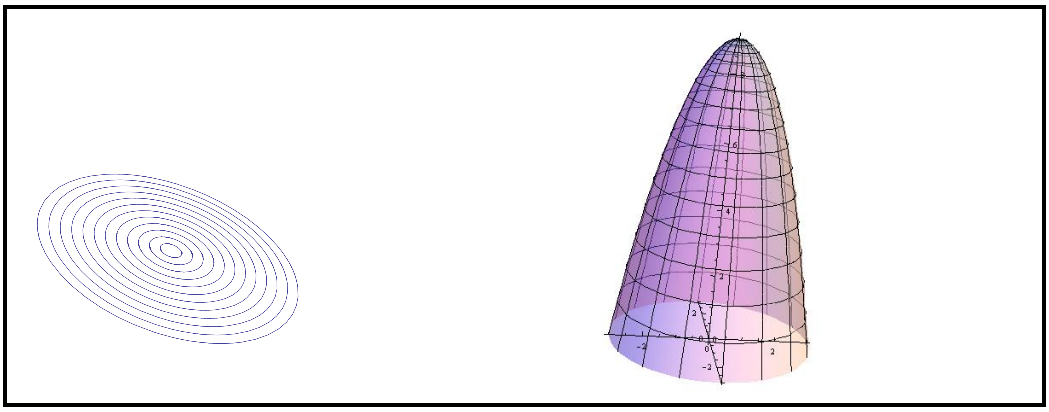


Figura 1.2

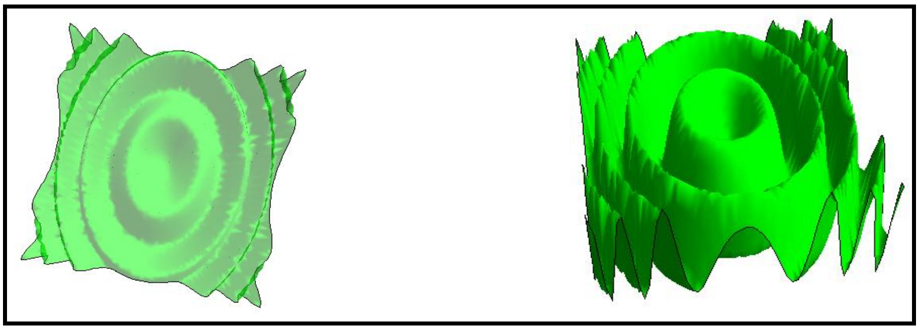


Figura 1.3

A.4. En las siguientes figuras vienen representadas algunas superficies y proyecciones de las mismas. ¿Sabrías relacionarlas con las expresiones analíticas de las siguientes superficies? (Tipo de actividad: I.NP.C.)

$i)\ x^2 + y^2 = z$

$ii)\ x^2 + y^2 = z^2$

$iii)\ x^2 + y^2 = 1 + z^2$

$iv)\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 4$

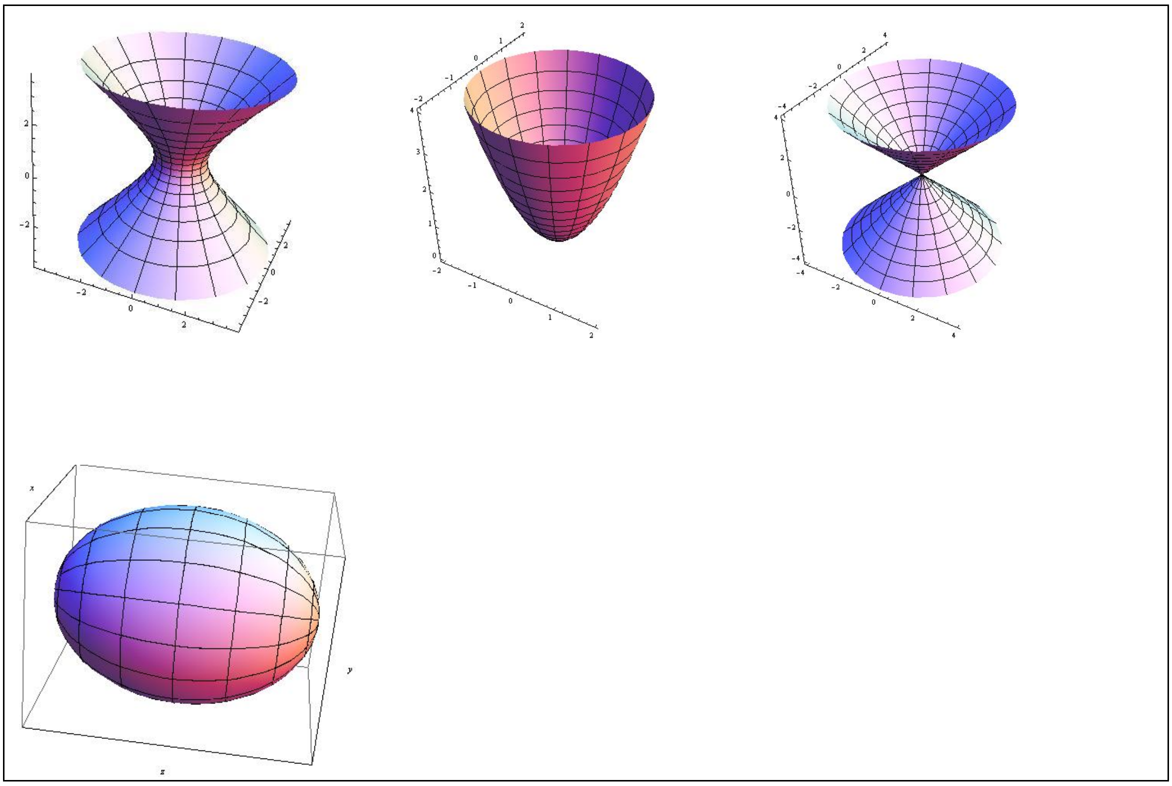


Figura 1.4

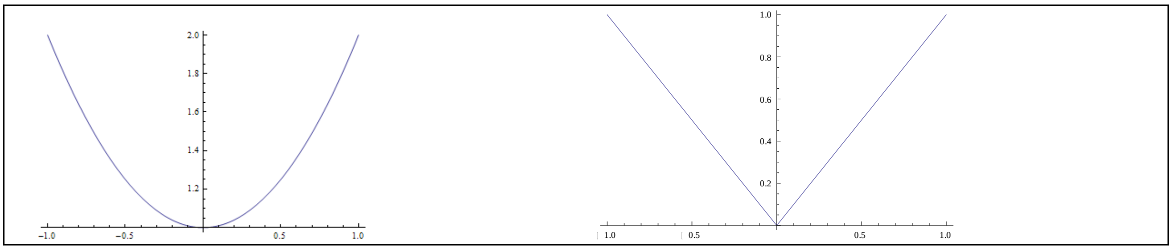


Figura 1.5

A.5. Análogamente a como se ha hecho con función de una variable, una condición muy importante para definir los conceptos que se desarrollarán en este bloque es saber dónde está definida la función. Por ello, calcular gráfica y analíticamente el dominio de definición de las siguientes funciones: (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C.)

i) $f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

ii) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$

iii) $f\left(x,y\right)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

iv) $f(x,y)=\mathrm{L}(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-y})$

v) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2+1}}{\sqrt{2-y}}+\mathrm{L}\left[4(x^2+y^2)-1\right]$

2. SUPERFICIES Y CURVAS DE NIVEL

A.6. ¿Podéis conocer una superficie utilizando ciertas curvas? Identificad las curvas dadas en la figura 2.1 con las superficies de las figuras 1.1, 1.2 y 1.3 respectivamente, y las curvas dadas en la figura 2.2 con las superficies de la actividad A4. (Tipo de actividad: G.P.C.)

Uso de ordenador para las representaciones de las superficies.

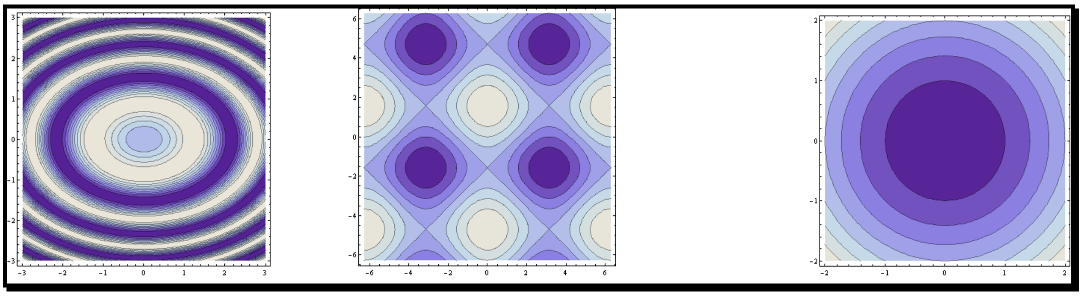


Figura 2.1

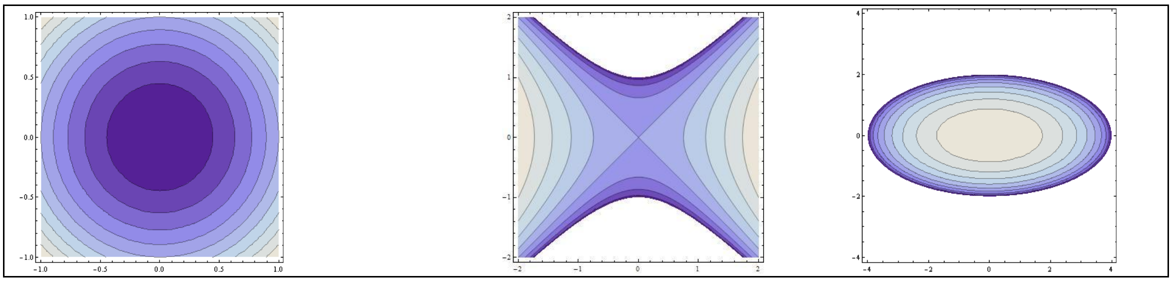


Figura 2.2

A.7. Calcular las curvas de nivel 1 y 3 de las siguientes superficies e identificad las curvas que se obtienen. (Tipo de actividad: I.NP.C.)

i) $x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 12$

ii) $x^2 - y^2 = 1 - z^2$

A.8. Si a través de las curvas de nivel en la actividad A5, habéis podido reconocer las superficies, ¿Estas curvas os pueden dar información sobre el relieve de un monte, o, la presión atmosférica, o, la temperatura en altura? Para contestarlo analizad la siguiente figura:

(Tipo de actividad: G.P.C.)

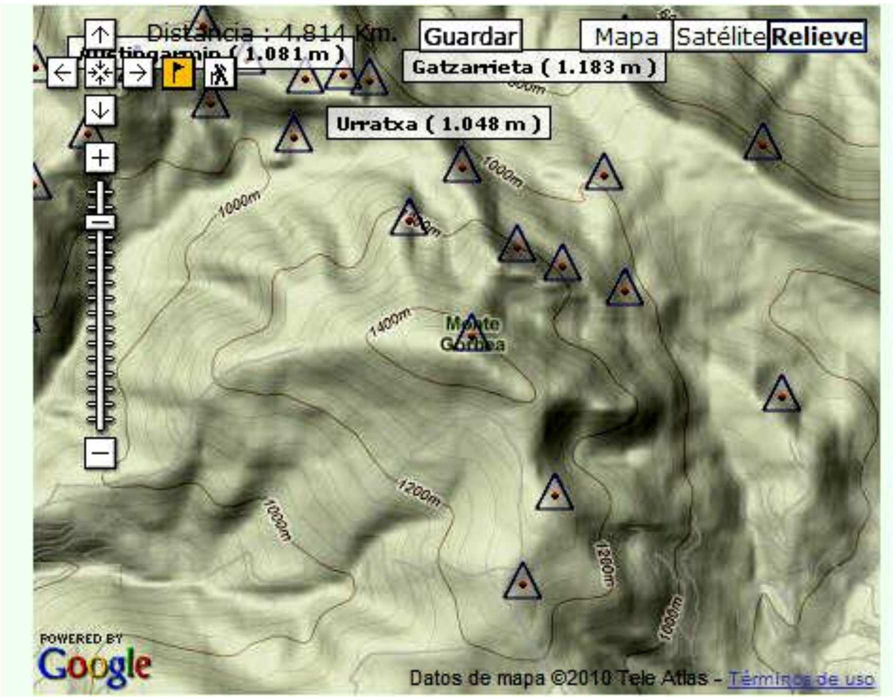
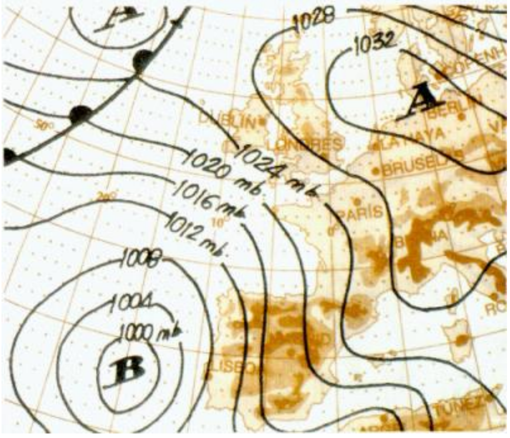


Figura 2.3

A.9. ¿Qué significará, en la figura 2.3, que las curvas estén separadas, o muy juntas? (Tipo de actividad: G.P.C.)

A.10. Analizad las siguientes figuras y explicad qué fenómenos están representando y qué conceptos de los que se han definido hasta el momento han utilizado para obtener dichas representaciones. (Tipo de actividad: I.NP.C.)



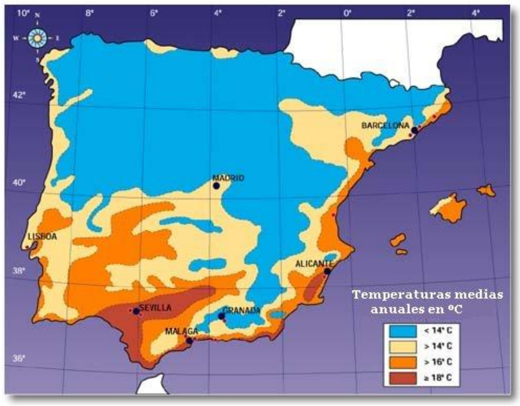


Figura 2.4

3. CONCEPTO DE LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

A.11. Se está investigando en un laboratorio la trayectoria de un nuevo cartucho para cazar. Después de varias simulaciones siempre obtienen la misma trayectoria representada en la siguiente gráfica:

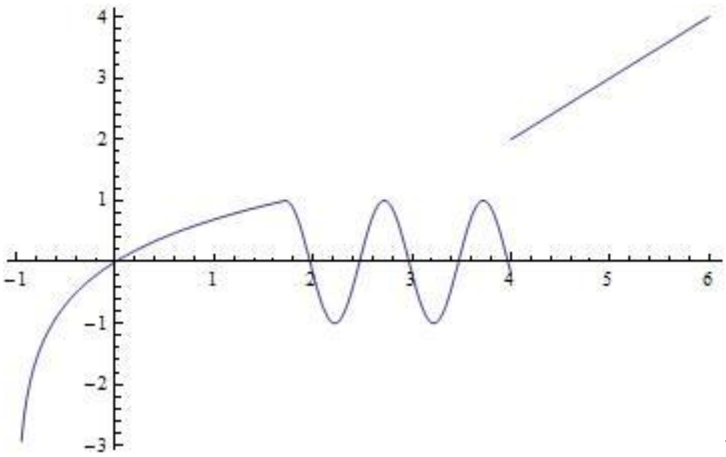


Figura 3.1

¿Podéis identificar las curvas del gráfico anterior? ¿Qué conceptos de los estudiados en función de una variable encontráis plasmados en dicho gráfico? (Tipo de actividad: I.P.C.)

A.12. Imaginaros que nuestro fin es llegar a la cumbre del Gorbea, es decir nuestro punto de aproximación es la cruz. ¿Desde cuantos caminos diferentes podemos salir? (Tipo de actividad: I.P.C.)

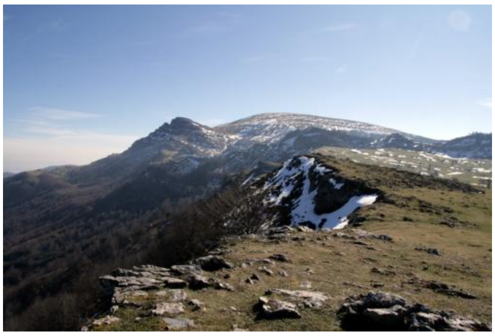


Figura 3.2

A.13. Parece bastante claro, que podéis acercaros por tantas *direcciones* como caminos encontréis, pero ¿os podéis encontrar con precipicios? ¿Todos los caminos os llevarán al mismo sitio? (Tipo de actividad: I.P.C.)

A.14. Aplicando el concepto de continuidad de función de una variable y observando la figura 3.3, contestad a las siguientes preguntas: ¿Creéis que podemos acercarnos al origen? ¿Estamos tomando caminos iguales? ¿Podemos hablar de continuad de la superficie es en ese punto? (Tipo de actividad: I.P.C.)

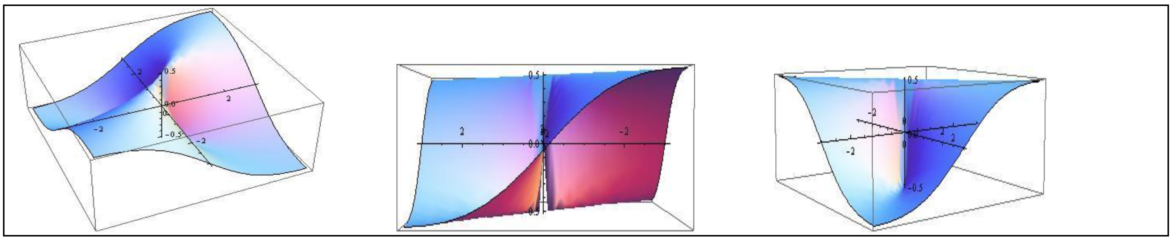


Figura 3.3

A.15. i) Estudiar si la función $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ **tiene límite en el origen.**

Nota: estudiar los límites direccionales a través de las rectas $y=0$ **e** $y=x$.

ii) Utilizando límites direccionales y las curvas $y=x$ e $y=x^3$**, comprobar que la función** $f(x,y)=\dfrac{x^3\cdot y}{x^6+y^2}$ **no tiene límite en origen de coordenadas.**

iii) Estudiar si existe límite en el origen para la función $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

iv) Estudiar la continuidad de la siguiente función en el origen:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(Tipo de actividad: I.NP.C.)

4. DERIVADAS PARCIALES. DERIVADAS DIRECCIONALES.

A.16. Habéis estudiado que la derivada de una función *f*(*x*) es la velocidad de cambio de la función al incrementar la variable independiente. ¿Podéis expresar de una manera similar el concepto de derivabilidad de una función *f*(*x*,*y*)? (Tipo de actividad: G.P.C.)

A.17. Vamos a fijar la variable *y* e incrementamos la *x*, ¿la expresión $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(a+h,b)-F(a,b)}{h}$ os dice algo?, ¿A qué hace referencia? ¿Cuál es la expresión si fijamos la variable y? (Tipo de actividad: G.P.C.)

A.18. Después de haber definido las derivadas parciales vamos a ver cuál es su interpretación geométrica. Analizando la figura 4.1, ¿podéis indicar cuál sería esta? (Tipo de actividad: G.P.C.)

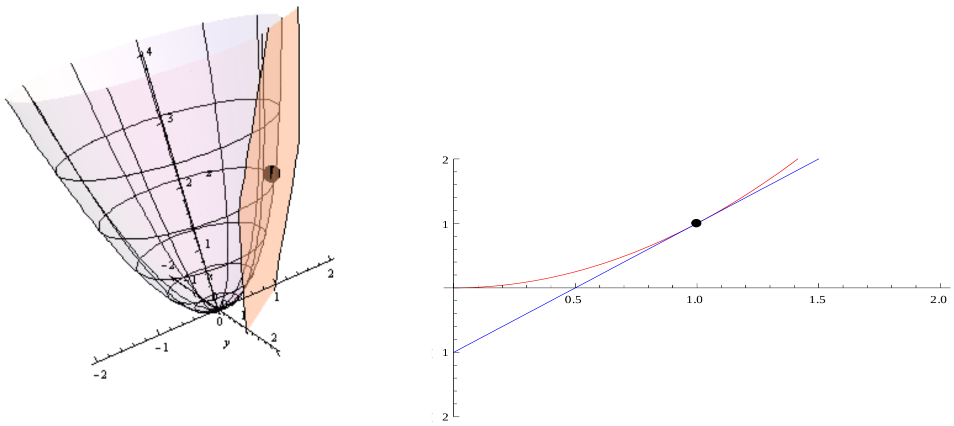


Figura 4.1

A.19. i) Calcular las derivadas parciales en el origen para la siguientes función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

ii) Analizad la existencia de derivadas parciales en el punto P(1,0) para la función

$f(x,y)=x|y|$. **(TIPO DE ACTIVIDAD: I.NP.C.)**

A.20. Hemos estudiado en función de una variable que la condición necesaria de derivabilidad en un punto es la continuidad de la función en dicho punto. ¿Es cierta esta relación en función de dos variables? Analizad la existencia o no de la relación con la siguiente función: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$**.**

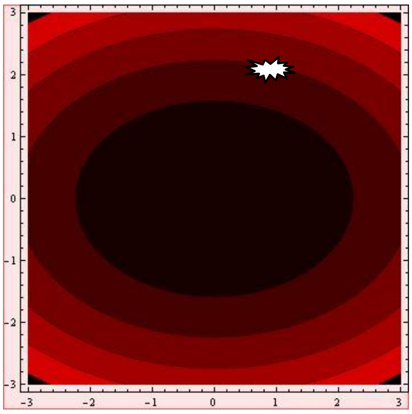
(TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C.)

A.21. Encontrad la ecuación del plano tangente y de la recta normal de la función $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **en el punto (3,-4). (TIPO DE ACTIVIDAD: I.NP.C.)**

A.22. "La temperatura en un punto de una placa de acero viene dada en grados centígrados según la siguiente función de dos variables $T(x,y)=500-x^2-2y^2$**. Desde el punto (*1,2*), ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura?" (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C.)**

(*Para responder ayudaros de los dibujos siguientes).*

En el dibujo siguiente está representada la temperatura de la placa y la mancha blanca es el punto dado. (La vista es desde arriba).



Mirad ahora las siguientes secuencias:

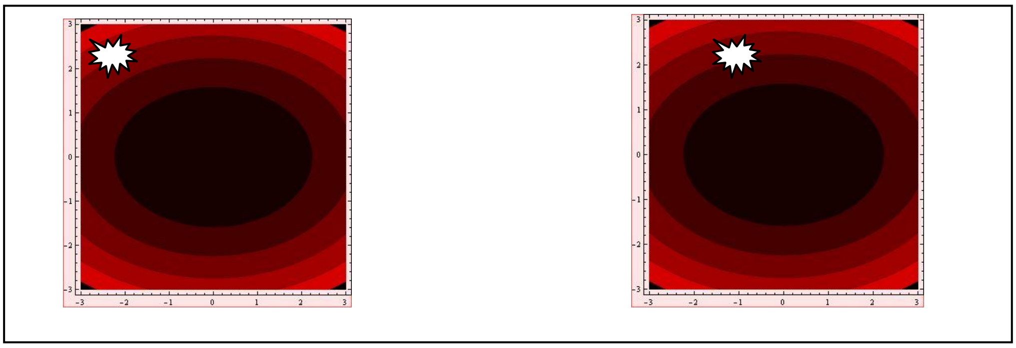


Figura 4.2

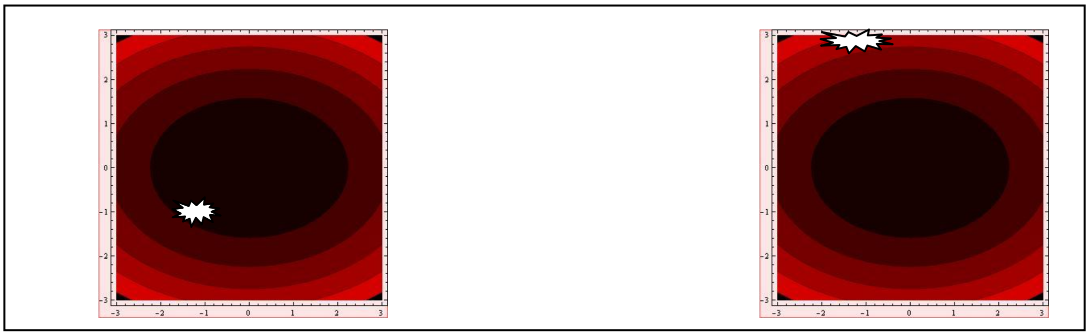


Figura 4.3

Según se desplaza la partícula izquierda-derecha o arriba-abajo, ¿varía la temperatura?

A.23. ¿Podéis decir en qué direcciones se desplaza el punto? Cuando se habla de dirección, ¿cómo la representamos en el plano?,¿Cómo relacionáis las direcciones con las razones de cambio de la temperatura? En el dibujo de abajo se ve la superficie de la placa y algunas direcciones que van hacia el punto. (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C.)

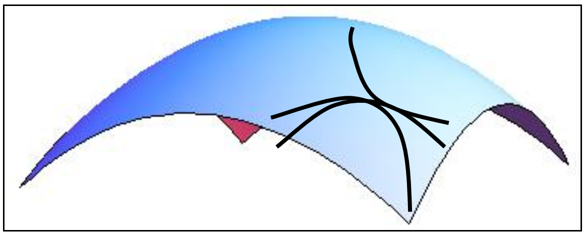


Figura 4.4

A.24. Calcular la derivada direccional de $f(x,y)=3x^2-2y^2$ **en el punto** $P(-1,3)$ **en la dirección que va desde** $P(-1,3)$ a $Q(1,-2)$**.(TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C.)**

5. DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

A.25. Una chimenea de base cuadrada de dos metros de lado y tres metros de altura, se necesita cubrir con una tela asfáltica de 0.1m de grosor para evitar filtraciones. Por las características físicas de la base donde está la chimenea esta sólo puede incrementar el volumen en un 2%. ¿Podréis recubrir la chimenea con dicha tela? (TIPO DE ACTIVIDAD: G.NP.C.)

6. DERIVADAS DIRECCIONALES Y VECTOR GRADIENTE.

A.26. Un esquiador (medianamente avanzado) sube en el telesilla a la altitud máxima de la estación. Como el día era despejado se queda admirando el paisaje y luego se acerca al plano de la pista encontrándose con la situación siguiente:

(TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C.)

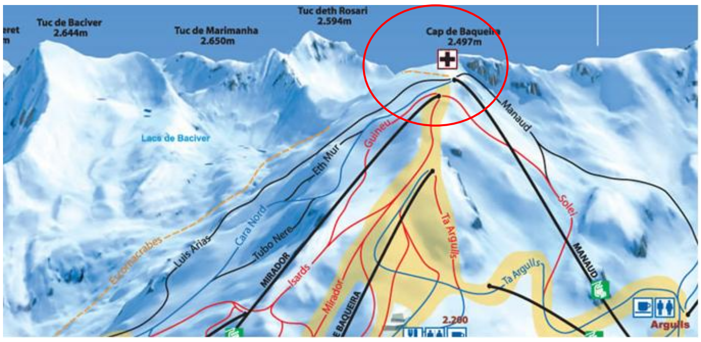


Figura 6.1

Ante lo que ve, y, como es un miedoso se pregunta ¿qué dirección debo tomar para deslizarme por la pista de mínima pendiente?

Si reconocéis el dibujo que se muestra en la figura 6.2, ¿le podríais decir al esquiador por dónde debería bajar?

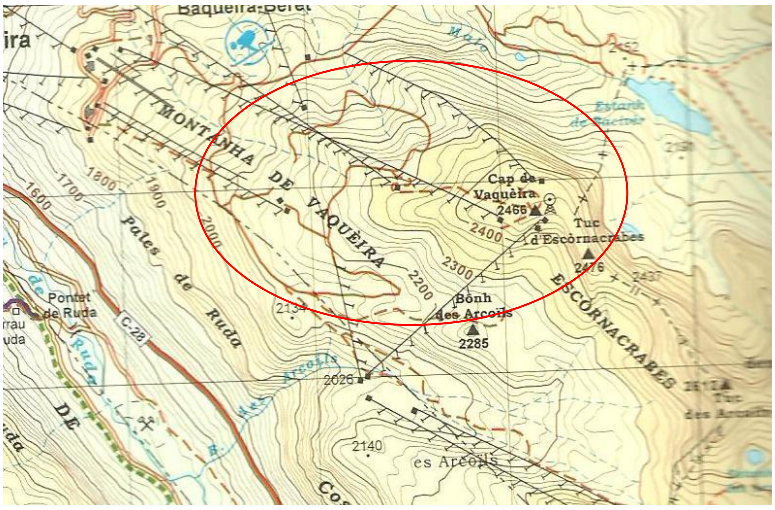


Figura 6.2

A.27. Un alpinista que está ascendiendo al pico señalado abajo oye un estruendo muy fuerte y, con los prismáticos ve a un oso descender en su dirección. ¿Hacia donde tendrá que ir el alpinista si lo que quiere es sacarle un reportaje fotográfico? (TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C.)

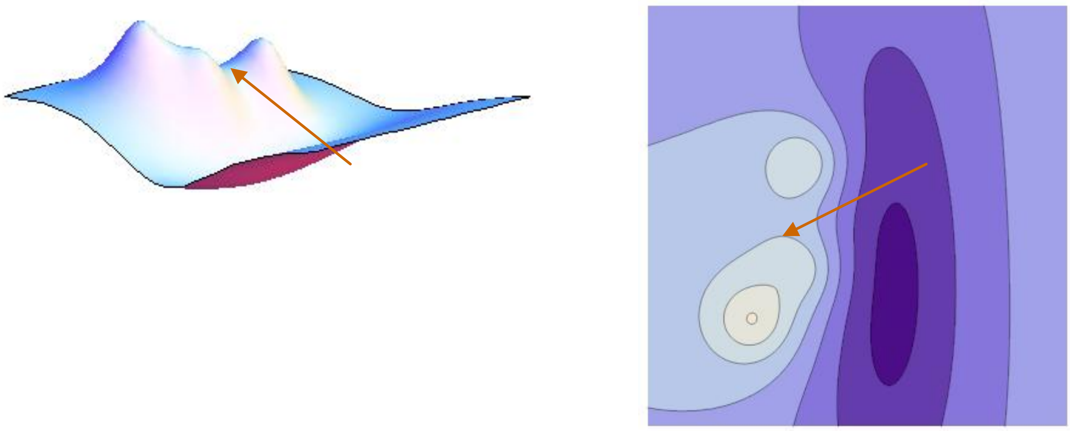


Figura 6.3

A.28. La lava de un volcán se extiende siguiendo la función $f(x,y)=20-4x^2-y^2$, midiendo x e y en centímetros. Desde un observatorio situado en el punto $(2,-3)$ se quiere saber en qué dirección la lava se expande más rápidamente y a qué ritmo se produce la misma. ¿Si el observatorio se situara en otro punto, la dirección de máxima expansión sería la misma? ¿En qué dirección la lava no se mueve? (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C.)

A.29. Plantead y resolver un ejercicio de aplicación del vector gradiente dibujando la superficie y las curvas de nivel correspondientes. (TIPO DE ACTIVIDAD: G.NP.)

7. FUNCIÓN COMPUESTA

A.30. Una operación que hemos visto en el bloque de funciones de una variable es la composición de funciones, ¿os acordáis cómo se deriva (*gof*)(*x*)? ¿Qué nombre recibe esta regla de derivación? (TIPO DE ACTIVIDAD: I.NP.)

A.31. Teniendo en cuenta el esquema siguiente para la función de una variable $y = f(x) = f(g(t))$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "\frac{dy}{dx}"] \arrow[rr, bend right, "\frac{dy}{dt}"'] & x \arrow[r, "\frac{dx}{dt}"] & t \end{tikzcd} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

¿Cómo obtendríais la diferencial de una función de dos variables $z = f(x, y)$ donde $x(t), y(t)$ **(*f* es una función diferenciable), es decir, en donde *z* depende de *t* ¿ Para responder, tener en cuenta es siguiente árbol de dependencia:**

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r] & t \\ z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

(TIPO DE ACTIVIDAD: I.NP.C.)

A.32. Dada la función $z = f(x, y) = x^2 y + \dfrac{y}{x}$ con $x \neq 0$, **donde** $x = \sin t$ e $y = \ln t$, **calculad la diferencial de *z* respecto a *t*. (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C)**

A.33. Vamos a complicar un poco más el árbol. Suponed que tanto la variable *x* como *y* son funciones a su vez de las variables *u* y *v* , es decir , $x(u, v), y(u, v)$ **siendo ambas funciones diferenciables. ¿Cúales serían las derivadas parciales de *z* respecto *u* y *v*? Realizad el árbol de dependencia. (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C)**

A.34. Consideremos el punto $A=(2,4)$ **y los vectores** $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{v}=(-1,1)$**.**

Si la función $f=f(x,y)$ **es diferenciable en *a* y** $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_A=\frac{5}{\sqrt{2}}$, $\left.\frac{df}{d\vec{v}}\right|_A=\frac{7}{\sqrt{2}}$**.**

a) Calcular $\left.\overrightarrow{\nabla f}\right|_A$

b) Sea $g(t)=f(x,y)$ donde $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$**. Calcular** $g'(2)$**. (TIPO DE ACTIVIDAD: I.NP.C)**

A.35. Demostrad que la función $z=y\cdot f\left(x^2-y^2\right)$ **satisface** $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$**. (TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C)**

8. FUNCIÓN IMPLÍCITA

A.36. Dadas las siguientes funciones:

i. $f\left(x,y\right)=xy-1$

ii. $f\left(x,y\right)=-12x^2+y^3$,

despejar *y* en función de *x* de la ecuación $f\left(x,y\right)=0$**. (TIPO DE ACTIVIDAD: I.NP.C).**

A.37. En caso de que no hayáis podido expresar $y=g\left(x\right)$ **en la actividad anterior, ¿querrá decir que no existe esa curva? Para contestar a la pregunta interpretar los gráficos que tenéis a continuación y que se corresponden con el apartado ii) de la actividad 36: (TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C)**

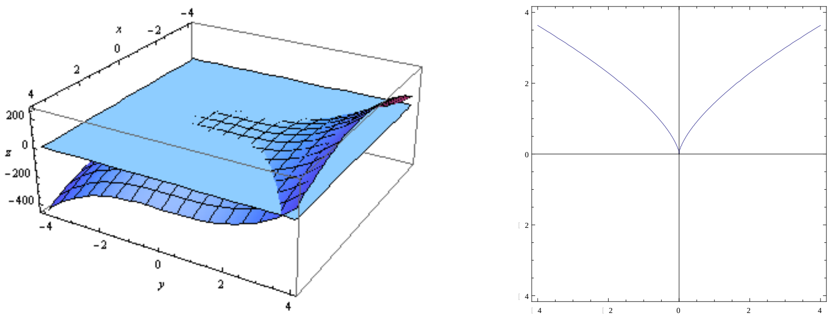


Figura 8.1

A.38. Sabemos que la ecuación $y^3+y^2+5xy+x^2+x+y=0$ **define la siguiente curva** $y=g(x)$**:**

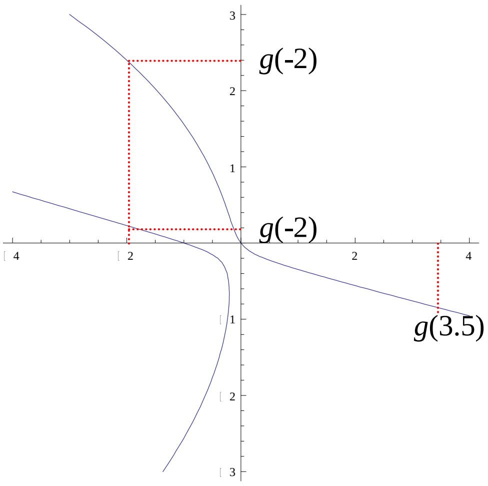


Figura 8.1

Imaginad que queremos calcular la razón de cambio de la curva entorno a los puntos *x*=3.5 y *x*=-2. ¿Podéis hacer el mismo razonamiento para ambos puntos? (TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C)

A.39. Calculad $y'(x)$ **en la ecuación** $x^2+y^2+16=0$**.(TIPO DE ACTIVIDAD: I.P.C)**

A.40. ¿Para qué puntos del plano la función $F(x,y)=x^3+xy-y^3$ **define a *y* como función implícita de x? (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C)**

A.41. Discutid si la ecuación $z^3-xz-y=0$ **define a *z* como función implícita de** x **e *y* en los puntos** $P(1,0,1)$ **y** $Q(3,-2,-1)$**, calculando cuando sea posible la primera y segunda derivada de la función** $z=z(x,y)$**.(TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C)**

A.42. Teniendo en cuenta que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3=0 \\ 3x+2y+4z-9=0 \end{cases}$ **en un entorno de un punto *P* definen las funciones** $y=y(x)$ **y** $z=z(x)$

a) Calcular $y'(x),\ z'(x),\ y''(x),\ z''(x)$

b) Obtener en el punto $P(1,1,1)$ **la recta tangente a la curva que define el sistema anterior. (TIPO DE ACTIVIDAD: I.NP.C)**

9. EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

A.43. ¿A través de qué concepto, visto anteriormente, podemos saber la dirección de máximo crecimiento de una función? En la figura 9.1 se puede observar la superficie $f(x,y)=3x^2+2y^2-2xy+5$ **y sus curvas de nivel junto a las direcciones del vector gradiente. ¿Tenéis información suficiente para saber si tiene extremos relativos la función?. Y, en caso de que exista, ¿para saber dónde hay un extremo relativo? (TIPO DE ACTIVIDAD: G.P.C)**

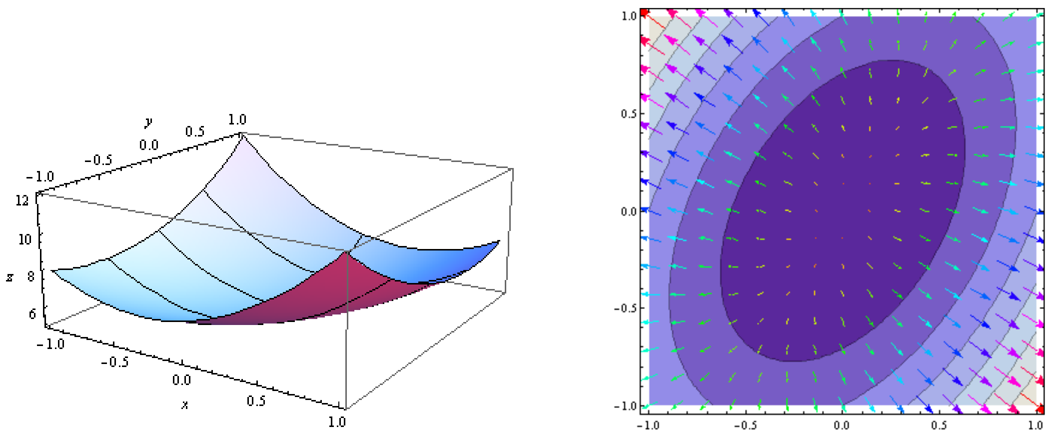


Figura 9.1

A.44. A continuación se os presentan los pasos a seguir para la obtención de extremos relativos en función de una variable:

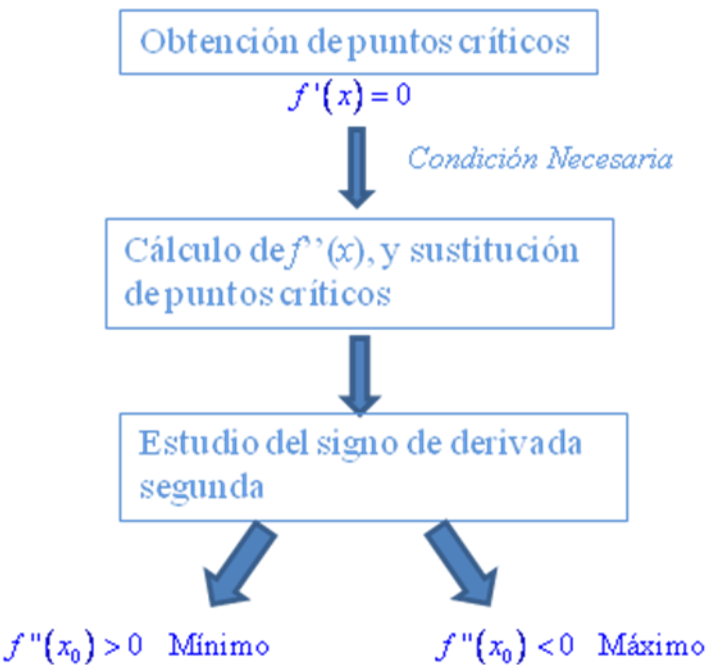


Figura 9.2

Intentad hacer un esquema parecido para una función $f(x,y)$. (TIPO DE ACTIVIDAD:G.P.C.)

A.45. i) En la figura 9.2, se representa el campo de direcciones del vector gradiente para la función $z = f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$

.

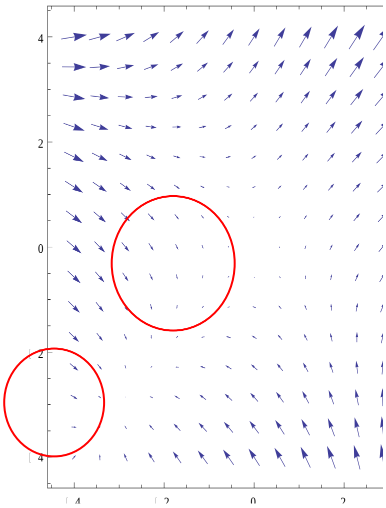


Figura 9.3

¿Podéis saber si existen extremos relativos? En caso afirmativo calcularlos.

ii) Calcular los extremos relativos de la función z definida implícitamente por la ecuación $(x+y)^2 + z^2 - xy + 2z = 0$**. (TIPO DE ACTIVIDAD:I.NP.C.)**

A.46. Ahora, calculad los extremos de $z = f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$**, pero suponiendo que las variables independientes están ligadas entre sí por la relación** $x + y = 0$**. (Figura 9.3). (TIPO DE ACTIVIDAD:G.P.C.)**

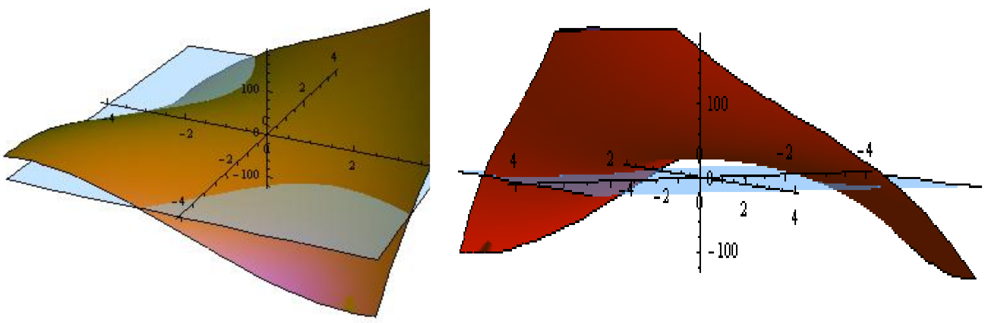


Figura 9.4

A.47. Calculad la suma máxima de dos números positivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 18. (TIPO DE ACTIVIDAD:G.P.C.)

A.48. La temperatura en un punto $\left(x,y,z\right)$ del espacio viene dada por la función $T\left(x,y,x\right)=2x-2y+z^2$. Obtened los puntos del cono $z^2-x^2-y^2=0$ que se encuentran sometidos a una menor temperatura. (TIPO DE ACTIVIDAD:I.NP.C.)

A.49. ¿Se seguirá verificando el teorema de Weierstrass para funciones de dos variables? (TIPO DE ACTIVIDAD:G.NP.C.)

A.50. Encontrad los máximos y mínimos absolutos de la función $g\left(x,y\right)=x+y$, en la región $\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1,\ y\geq 0\right\}$. (TIPO DE ACTIVIDAD:G.P.C.)

A.51. i) Calcular la superficie máxima de un rectángulo inscrito en la elipse $x^2+4y^2=4$, si los lados del rectángulo y los ejes de la elipse son paralelos.

ii) Determinar los extremos absolutos de la función $z=z\left(x,y\right)=x^2+y^2$, en el círculo $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2\leq 8$. (TIPO DE ACTIVIDAD:I.NP.C.)