Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea
EKONOMIA ETA ENPRESA FAKULTATEA
FACULTAD DE ECONOMÍA Y EMPRESA

GRADO EN ECONOMÍA

CURSO 2022/2023

Valoración de Opciones Europeas: Método de Black-Scholes

AUTOR: UNAI GOMEZ SAN JUAN

DIRECTORA: AGUEDA MADOZ MENDIOROZ

DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS

13 de julio de 2023

Resumen

El modelo de Black-Scholes es un método matemático para evaluar las opciones financieras europeas. El modelo se basa en varios factores que afectan a los precios de las opciones, como el precio del activo subyacente, la volatilidad, la tasa de interés libre de riesgo y el tiempo restante hasta el vencimiento de la opción.

La fórmula de Black-Scholes utiliza estos factores para calcular el precio teórico de una opción europea en cualquier momento hasta el vencimiento. El modelo se considera una valiosa herramienta de fijación de precios de opciones, ya que ha demostrado ser un enfoque preciso y útil en los mercados financieros mundiales.

Vale la pena señalar que el modelo de Black-Scholes se basa en una serie de supuestos, incluida la eficiencia del mercado y la ausencia de costos de transacción, lo que significa que su uso en el mundo real puede tener limitaciones.

En general, el modelo Black-Scholes es una herramienta útil para inversores y profesionales financieros que desean evaluar oportunidades financieras y administrar el riesgo de la cartera. Sin embargo, es importante comprender sus supuestos y limitaciones antes de usarlo en la práctica.

Abstract

The Black-Scholes model is a mathematical method for evaluating European financial options. The model is based on several factors that affect option prices, such as the price of the underlying asset, volatility, the risk-free interest rate and the time remaining until option expiration.

The Black-Scholes formula uses these factors to calculate the theoretical price of a European option at any point in time until expiration. The model is considered a valuable option pricing tool as it has proven to be an accurate and useful approach in global financial markets.

It is worth to point that the Black-Scholes model is based on a number of assumptions, including market efficiency and the absence of transaction costs, which means that its use in the real world may have limitations.

Overall, the Black-Scholes model is a useful tool for investors and financial professionals who want to evaluate financial opportunities and manage portfolio risk. However, it is important to understand its assumptions and limitations before using it in practice.

Objetivos del trabajo

En cuanto a los objetivos, este trabajo sobre el método Black-Scholes para la valoración de opciones europeas tiene varios, entre ellos:

1. Introducción a las opciones financieras: Se empezará con una introducción a las opciones financieras. Se hablará en detalle de sus características y tipos.

2. Desarrollo del modelo de Black-Scholes: Este trabajo nos proporcionará una descripción detallada del modelo con su desarrollo matemático, cómo funciona y cómo se utiliza para valorar opciones financieras.

3. Evaluar la precisión del modelo: También analizaremos la precisión del modelo de Black-Scholes y examinaremos los supuestos y limitaciones en los que se basa. Se hará una comparación entre los precios teóricos calculados con el modelo, usando los precios de mercado reales para ver qué tan precisas son las valoraciones.

4. Para la realización de este trabajo se ha usado *Rmarkdown*, que nos permite usar codigo *Latex* en *Rstudio*. En este trabajo se profundizará en los codigos de *R* para los gráficos, figuras y cálculos.

Palabras clave: Opción financiera, activo subyacente, volatilidad implícita, fórmula Black-Scholes, call, put, movimiento Browniano.

Índice

Índice de gráficos

Índice de tablas

Introducción

Las opciones financieras son un tipo de contrato que da el derecho pero no la obligación de comprar un activo a un precio previamente acordado en un periodo de tiempo determinado. Esto nos permite comprar activos antes de que tengan valor en el mercado. Por ejemplo, si nos interesa una acción, pero no estamos seguros de que su valor aumente en el futuro, podemos comprarlo mediante una opción: pagaremos una pequeña cantidad llamada prima, y luego si el valor de mercado de la acción aumenta compraremos las acciones en el precio acordado previamente.

Los modelos matemáticos de las opciones financieras, aunque aún no definidos de esa forma, empezaron mucho antes que la publicación del modelo de Black-Scholes en 1973. Hace más de dos mil años un matemático griego, Tales de Mileto, compró los derechos de uso de unas almazaras[1], especulando que este año la cosecha de olivas sería mayor a la que se esperaba. En el momento de la cosecha, dado que la cosecha fue más abundante de lo esperado, tal y como había sospechado Tales, este matemático ejerció su derecho de uso de las almazaras, generando más beneficio que otros. Esto es un ejemplo de un contrato de opciones: alguien compra derecho de uso para ejercerlo después si resulta beneficioso.

Como hemos dicho, las opciones permiten comprar un bien tiempo antes de que este tenga un valor significativo en el mercado. Otro caso histórico fue la tulipomanía (BBC Mundo, 2018) en Holanda, que gracias a las opciones se podían comprar antes de que floreciesen. Siendo esto así, alrededor del año 1600, se especuló tanto con los tulipanes que llegaron a tener el valor de una casa en el canal de Amsterdam. En 1637 un solo bulbo de tulipán era suficiente para mantener a una familia holandesa durante media vida. A esta fiebre de los tulipanes se le llamó *tulipomanía.* De todas formas esto duro poco, ya que el precio cayó en picado a mediados de 1673. En ese año se compró gran cantidad de opciones sobre tulipanes meses antes de la temporada de plantación. Cuando llegó la temporada de los tulipanes, a pesar de las expectativas generadas, no había suficientes compradores para todos los tulipanes con opción de compra, por lo que el precio del tulipán cayó en picado, provocando una crisis que se conoce como la primera gran burbuja especulativa de la historia.

El primer mercado de opciones organizado se estableció en Londres en el siglo XVII, comerciando tanto con opciones *put*, que daban el derecho a vender los activos mediante opciones, y *call*, que daban el derecho a comprar los activos mediante opciones. En Estados Unidos los comienzos del comercio de opciones empezaron en el siglo XIX.

[1]Una almazara es un molino diseñado para triturar semillas ricas en óleo, como las olivas.

La primera aplicación matemática conocida fue hecha por el matemático francés Louis Bachelier. Su tesis usó un concepto conocido como **movimiento Browniano** o **proceso Wiener** para modelar los precios de las opciones. Estas ideas fueron decisivas en los modelos posteriores.

El modelo de Black-Scholes empezó con las investigaciones iniciales de Fisher Black y Robert Merton (Black & Scholes, 1973). Más tarde, en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, empezaron a trabajar en el modelo original que conocemos como Black-Scholes.

En 1973 se publicó por primera vez el modelo en el artículo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (Black & Scholes, 1973) de Black y Scholes, pero aún le quedaba mucho para ser un proceso realmente fluido.

Tras la publicación del modelo, Robert Merton, que también trabajaba en el M.I.T., hizo sus propias contribuciones en el artículo *Theory of Rational Option Pricing* (Merton, 1973). Merton sugirió varias ampliaciones del modelo, incluyendo una versión de la fórmula de Black-Scholes que aceptaba supuestos más débiles y, por lo tanto, era más ampliamente utilizable.

Capítulo 1

Opciones

1.1 Definición

Las opciones son instrumentos financieros usados en diferentes transacciones. Son contratos que dan al comprador el derecho a comprar un activo dentro de un tiempo determinado y a un precio fijado, y al vendedor la obligación de vender dicho activo si el comprador desea ejercer su derecho.

1.2 Características y notación

Las opciones están definidas por diferentes parámetros, tales como el precio de ejercicio o *strike price*, o la fecha de vencimiento o *maturity date*. Para entender lo que son las opciones tenemos que entender primero sus características, que veremos a continuación.

Pero antes, para simplificar el análisis de los precios de las opciones, tenemos que saber que lo haremos bajo los siguientes supuestos, siguiendo el libro de Hull (Hull, 2012):

- No hay costes de transacción.
- Todos los beneficios están sujetos al mismo tipo de impuesto.
- Los préstamos y empréstitos son posibles siempre y cuando estén sujetos al tipo de interés sin riesgo.

A continuación explicaremos las características de las opciones y también la notación que utilizaremos durante el trabajo.

- **Precio de la acción (activo subyacente)**

Es el precio que la acción tiene en el mercado, definido por la oferta y la demanda. El precio actual de la acción lo definiremos como S_0 y el precio de la acción en la fecha de vencimiento lo llamaremos S_T. En cualquier instante de tiempo t donde $t \in [0, T]$ será S_t.

- **Precio de ejercicio o precio strike**

El precio de ejercicio es el precio al que se compra o vende la opción, y que generalmente está definido en el contrato desde un principio. Es el precio al que acordamos comprar o vender el activo al finalizar el contrato. Lo llamaremos K

- **Precio de la opción o prima**

La prima o el precio de la opción es una cantidad de dinero menor al precio de ejercicio que el comprador de una opción debe pagar al vendedor para adquirir la opción en el momento de la firma del contrato. Es la cantidad de dinero que el vendedor se asegura, independientemente de si la opción se ejerce o no. También se conoce como el precio de mercado de la opción. Lo denominaremos como c para opciones call y p para opciones put.

- **Break even**

El *break even* es el punto en el que, teniendo en cuenta la prima, obtienes un beneficio mayor o igual a 0 ejerciendo la opción. Por ejemplo, si obtienes una opción *call* con un precio de ejercicio de 100€ y una prima de 5€, el beneficio empieza cuando el precio de la acción en el mercado es mayor a 105€.

- **Fecha de vencimiento**

La fecha de vencimiento es la fecha en la que termina el derecho de compra de la opción. Si el comprador no ejerce su derecho antes de esta fecha, perderá su derecho a compra y la prima pagada por la opción. A la fecha de vencimiento la denominaremos T.

- **Tasa de interés sin riesgo**

Esta tasa se refiere a la rentabilidad que se consigue invirtiendo en un activo que se considera libre de riesgo o que tiene un riesgo muy bajo. Principalmente, se calcula usando los bonos del Tesoro, ya que tienen un riesgo casi nulo. A esta tasa la llamaremos r.

- **Volatilidad**

La volatilidad de una opción es la medida de la incertidumbre que tenemos sobre los futuros movimientos del precio del activo. La denotamos como σ.

1.3 Tipos de opciones

Las opciones son contratos que dependiendo del punto de vista pueden ser de un tipo o de otro: *call* o *put*; Europeas o Americanas, etc. Veamos a continuación una serie de clasificaciones según distintas características de las opciones:

- **Según la intención: call y put**

Dependiendo del derecho que te otorgan, una opción puede ser *call* o *put.*

Con las opciones *call*, también llamadas opciones de compra, el comprador adquiere el derecho a comprar un activo subyacente a un precio determinado dentro de un periodo de tiempo previamente acordado. El comprador puede ejercer su derecho cuando quiera dentro de ese periodo de tiempo, aunque no está obligado a hacerlo si no lo desea. El vendedor, que posee el activo, de una opción *call* asume la obligación de vender el activo subyacente si la opción se termina ejerciendo.

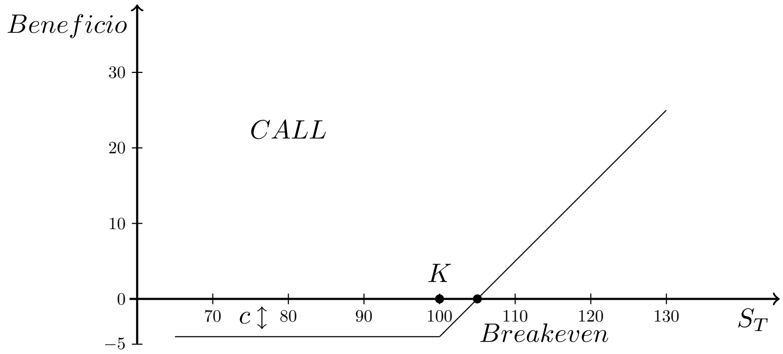

Figura 1.1: Beneficios de una opción call con c=5 y K=100. Elaboración propia

En el gráfico 1.1 podemos ver la evolución del beneficio de la compra de una opción call. Como vemos, si el precio de mercado S_T es menor a 100€, la opción no se ejerce y el comprador de la call perdería la prima $c = 5$€. Cuando el activo en el mercado está valorado en 105€ el beneficio es nulo, esto es, $S_T = K + c$. A partir de este momento el beneficio es positivo, y hará que el comprador ejerza su derecho a compra.

Las opciones *put*, u opciones de venta, dan al comprador, que es el que posee el activo, el derecho pero no la obligación de vender un activo subyacente a un precio determinado dentro de un periodo de tiempo. El vendedor de la opción *put* asume la obligación de comprar el activo si se termina ejerciendo la opción.

En este caso, como el comprador de la opción put es el que posee las acciones, a este le interesa que el precio de la acción del mercado disminuya. Si el precio del activo en el mercado es mayor a 100 el comprador no va a querer ejercer la opción, por lo que tendrá una perdida igual a la prima $p = 5$. Si el precio del activo disminuye y llega a 95 el beneficio será 0, esto es $S_T = K - p$ y si baja de esta cantidad el comprador tendrá beneficios, por lo que le interesará ejercer la opción.

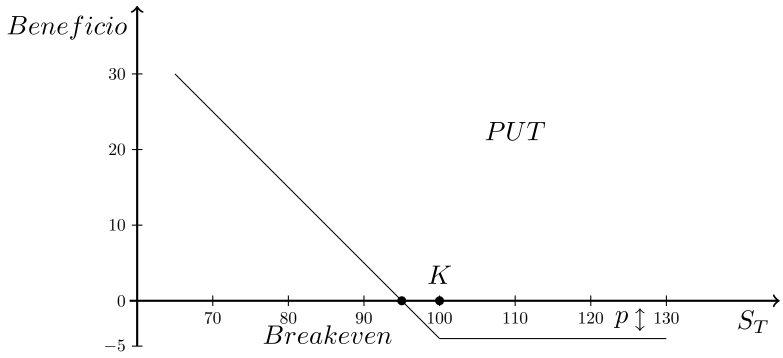

Figura 1.2: Beneficios de una opción put con p=5 y K=100. Elaboración propia

- **Según la posición: comprador y vendedor**

Las opciones, como todos los bienes comercializables, tienen un comprador y un vendedor. El vendedor es el poseedor de las acciones y el que escribe el contrato de la opción. El comprador es el que está interesado en comprar la opción y con ello, el activo subyacente

El comprador de la opción es el que toma la posición larga y el vendedor toma la posición corta. De aquí podemos deducir cuatro tipos de opciones dependiendo de la posición:

1. Posición larga en una opción *call*, comprador de un derecho de compra call.
2. Posición corta en una opción *call*, vendedor de un derecho de compra call.
3. Posición larga en una opción *put*, comprador de un derecho de venta put.
4. Posición corta en una opción *put*, vendedor de un derecho de venta put.

- **Según cuando se ejercen: Europeas y Americanas**

Hay muchos tipos de opciones dependiendo del momento temporal en que se pueden ejercer, pero las más conocidas son las Europeas, en las que nos centraremos en este trabajo, y las Americanas.

Las Europeas pueden ejercerse únicamente en la fecha de vencimiento, es decir, en el momento T. En cambio, las Americanas se pueden ejercer desde la fecha en la que se formaliza el contrato $t = 0$, hasta la fecha de vencimiento $t = T$, en cualquier momento t.

- **Según el nivel de precio: In the Money, At the Money y Out of the Money**

Las opciones pueden clasificarse por la diferencia entre el precio de ejercicio, K, y el precio de la acción en el mercado, S_T. De esta forma podemos definir las opciones de tres maneras:

Cuando una opción *call* está **In the money**, significa que el precio de la acción es mayor al precio de ejercicio, así que obtendremos beneficio si la ejercemos, que será $S_T - K > 0$. Lo contrario sucede para una opción *put*, estará *In the money* si el precio de ejercicio es mayor al precio de la acción, en cuyo caso el beneficio sería $K - S_T > 0$.

Si la opción call está **At the money** quiere decir que para ambos tipos de opciones *call* y *put*, el precio de ejercicio es igual al precio de la acción. En este caso, es indiferente para el comprador ejercer la opción o no.

Por ultimo, las opciones *call* están **Out of the money** cuando el precio de ejercicio es mayor al precio de la acción. Para las opciones *put*, cuando el precio de ejercicio es menor al precio de la acción. Si ejercemos la opción cuando esta *Out of the money*, tendremos perdidas. En el caso de las opciones *call*, $S_T - K < 0$; y en el caso de las opciones *put* $K - S_T < 0$.

Resumiendo todo esto en una tabla:

Tabla 1.1: Clasificación de las opciones según el nivel de precio. Fuente: Elaboración propia

	Call	**Put**
In the money	$K < S_T$	$K > S_T$
At the money	$K = S_T$	$K = S_T$
Out of the money	$K > S_T$	$K < S_T$

- **Según el activo subyacente: stock, divisas, índices y futuros**

Las opciones pueden definirse también por el tipo de activo subyacente que se comercia con ellas.

1. **Opciones de stock**: Estas son las opciones más comunes con las que se comercia en las Bolsas, el activo subyacente se compone de un paquete de acciones del mismo tipo. Normalmente, una opción de stock te da el derecho de comprar o vender 100 acciones.

2. **Opciones de divisas**: Son un tipo de opciones con las que se pueden comerciar diferentes divisas, que son monedas extranjeras. Un contrato te permite comprar o vender 10.000 unidades de la divisa, en las que el activo subyacente es una divisa extranjera o diferente a la que se comercializa la opción.

3. **Opciones de índices**: En este tipo de opciones el activo principal es un índice, que puede ser diferente dependiendo del interés del comprador y del vendedor. En estas opciones se suelen comprar o vender 100 veces el índice.

4. **Opciones de futuros**: Los futuros son otro tipo de contratos, similares a las opciones pero con la diferencia de la obligación de ejercer el contrato a la fecha de vencimiento.

Otros tipos de opciones:

1. **Opciones basket**: Son opciones cuyo activo subyacente se compone de diferentes activos agrupados en una cesta.
2. **Opciones Asiáticas**: La principal característica de estas opciones es que su precio depende del promedio de los precios del activo subyacente.

1.4 Efectos de las variables en el precio de las opciones

En la siguiente tabla se presenta un resumen del efecto que tiene en una opción una pequeña variación en uno de sus parámetros, dejando el resto constante (Fernandez, 1997):

Tabla 1.2: Efectos de diferentes variables en precio de diferentes tipos de opciones. Fuente: Elaboración propia.

Variable	***Call* Europea**	***Put* Europea**	***Call* Americana**	***Put* Americana**
S	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
K	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
T	?	?	$\uparrow$	$\uparrow$
r	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
σ	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

- $\uparrow$ significa que cuando esta variable aumenta, el precio de la opción aumenta
- $\downarrow$ significa que cuando esta variable aumenta, el precio de la opción disminuye
- ? significa que la relación de esta variable con el precio de la opción es desconocido

Por ejemplo, en una opción call Europea si el precio del activo en el mercado sube, el precio de la opción también. Al contrario, con el precio de ejercicio el precio de la opción baja.

Capítulo 2

Valoración de opciones. Parte I

2.1 Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un concepto matemático usado para representar un conjunto de variables aleatorias que dependen de otros parámetros o variables, normalmente el tiempo. Son procesos que no se pueden predecir y que se mueven al azar. Por ejemplo, los fenómenos naturales como los terremotos y el clima siguen este tipo de procesos. Aunque estos temas se alejan del objetivo del trabajo, es importante para este trabajo saber que los precios de las acciones se pueden modelar de forma similar usando un proceso estocástico.

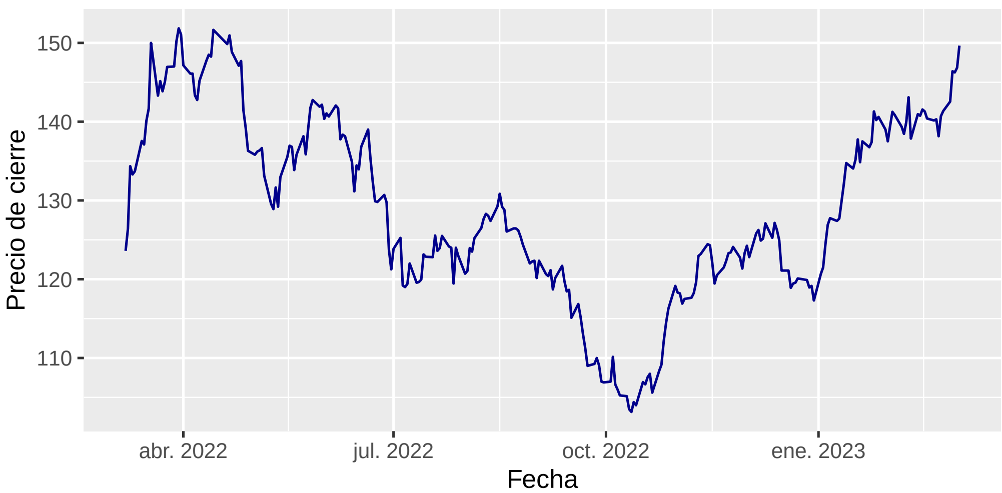

Figura 2.1: Precio de cierre de las acciones de AENA. Elaboración propia

En la figura 2.1 se muestra la evolución de precios de las acciones de AENA desde marzo de 2022 hasta marzo de 2023, dichos precios se han obtenido de la página (AENA, 2023). Estos precios se pueden considerar procesos estocásticos, lo que significa que es casi imposible predecir qué precio tendrán las acciones en el futuro, Más concretamente, un proceso estocástico no estacionario, donde el precio varía de forma no constante.

2.2 Rentabilidad de los precios

Para nosotros es importante saber que cuando un inversor invierte su dinero en cualquier activo, como pueden ser las acciones de una empresa, su mayor preocupación es obtener una rentabilidad positiva del activo. Esta rentabilidad se entiende como un aumento de valor del activo en un intervalo de tiempo.

Expresado matemáticamente, la rentabilidad del activo en el instante $t+1$ es:

$$R_t = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}$$

Por lo tanto, si calculamos las rentabilidades de los precios de las acciones de AENA y creamos un gráfico (gráfico 2.2).

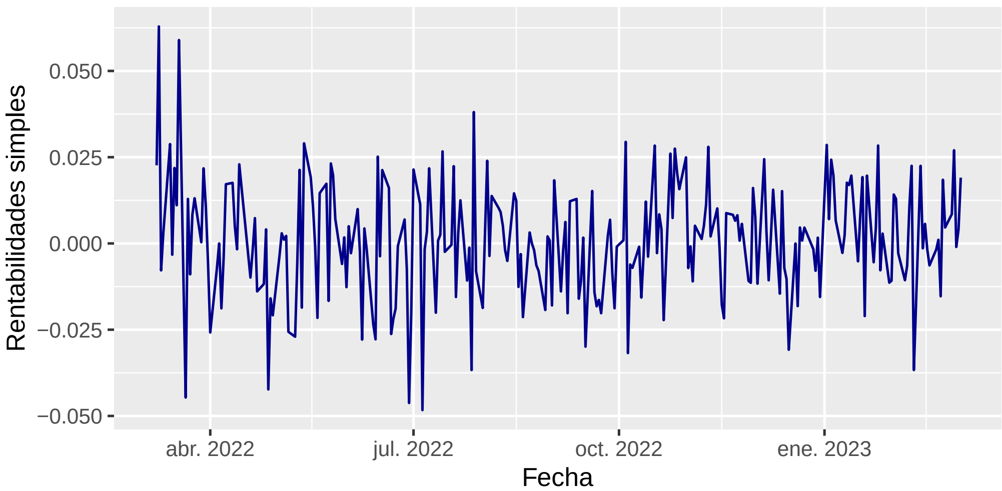

Figura 2.2: Rentabilidades (simples) de los precios de AENA. Elaboración propia.

En la figura 2.2 las rentabilidades diarias del activo se parecen mucho a un proceso aleatorio.

La rentabilidad media del activo se puede expresar de la siguiente manera:

$$\bar{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} R_i$$

y la desviación típica de la misma:

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M} (R_i - \bar{R})^2}$$

donde M es el numero de rentabilidades de la muestra.

En general, la distribución de las rentabilidades diarias se asemeja a una variable aleatoria norma. Podemos observar esto en el gráfico 2.3.

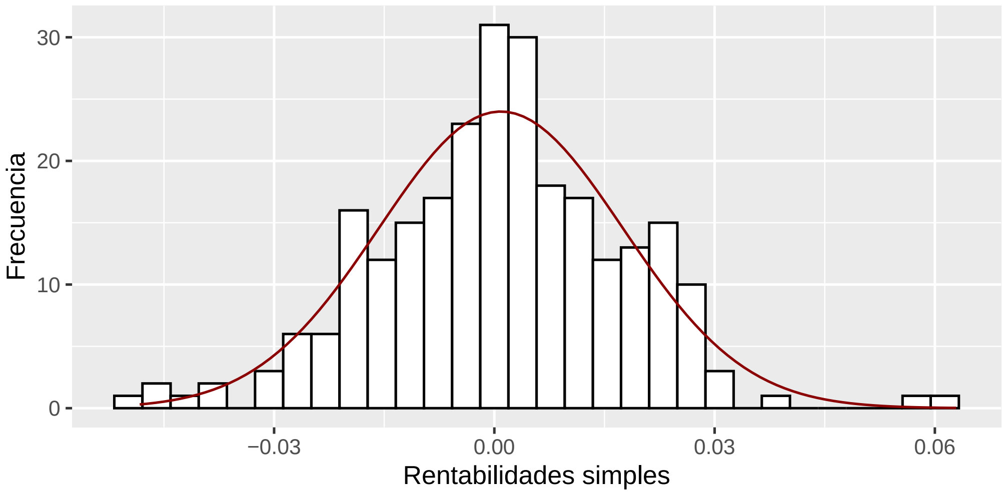

Figura 2.3: Distribución de las rentabilidades (simples) de AENA. Elaboración propia.

Por otro lado, las **rentabilidades compuestas en tiempo continuo** suelen resultar más útiles que las rentabilidades simples para el cálculo de estos por sus propiedades. Por lo tanto, es más conveniente usar las rentabilidades logarítmicas (compuestas) para obtener las rentabilidades totales.

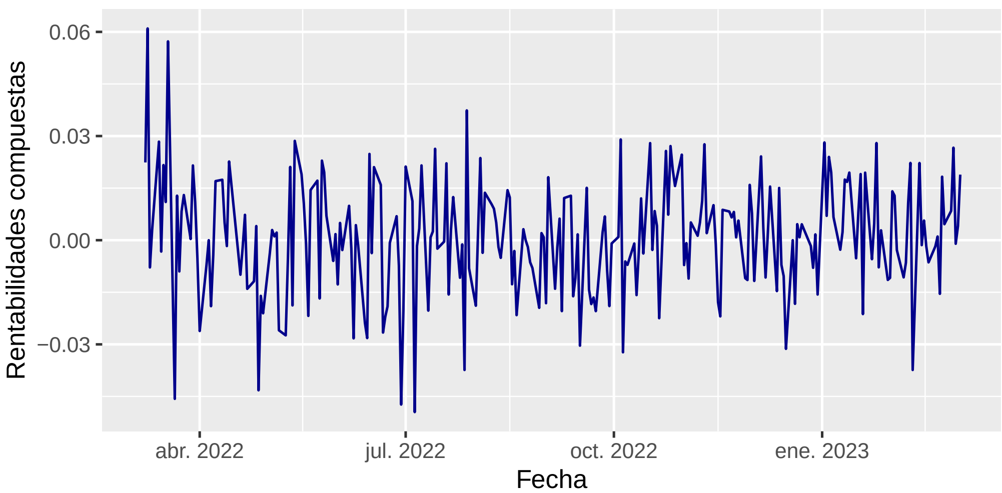

Figura 2.4: Rentabilidades (compuestas) de los precios de AENA. Elaboración propia.

En la figura 2.4 podemos ver las rentabilidades compuestas en función del tiempo. Estas rentabilidades también se distribuyen de forma parecida a una distribución normal, como vemos en la figura 2.5.

Una vez visto el comportamiento de las rentabilidades diarias podemos concluir que, dado el paso del tiempo entre mediciones de rentabilidades, que a partir de ahora llamaremos δt, cuanto mayor sea este intervalo, mayor será la variación del activo.

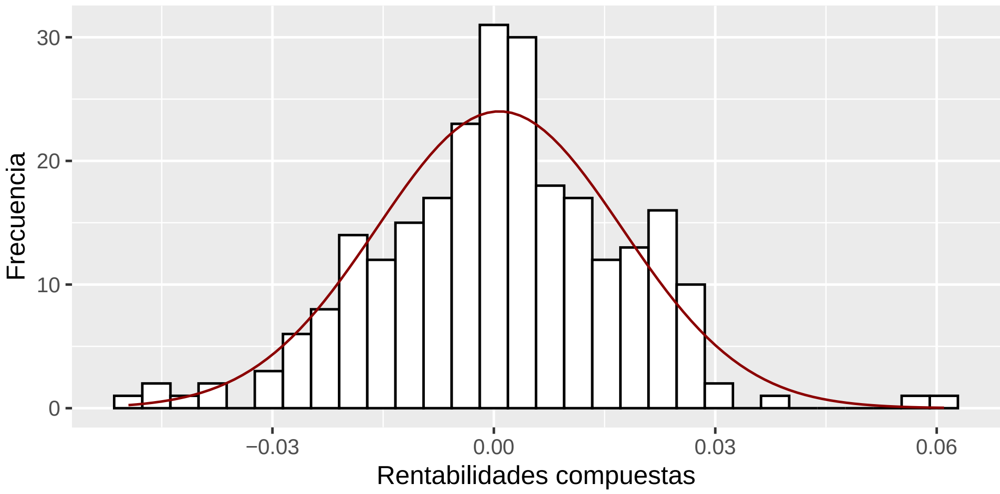

Figura 2.5: Distribucion de las rentabilidades (compuestas) de AENA. Elaboracion propia.

En promedio tendremos que la media de los rendimientos será $\mu\delta t$ donde μ es la rentabilidad media anualizada, que consideraremos constante. Es decir:

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = \mu\delta t \quad \longrightarrow \quad S_{t+1} = S_t(1 + \mu\delta t)$$

Por lo tanto, para cada instante del tiempo se tiene[1]:

$$\begin{aligned} t = 0 &\quad S_1 = S_0(1 + \mu\delta t) \\ t = 1 &\quad S_2 = S_1(1 + \mu\delta t) = S_0(1 + \mu\delta t)^2 \\ &\vdots \\ t = M &\quad S_M = S_0(1 + \mu\delta t)^M \approx S_0 e^{\mu T} \end{aligned}$$

Esta aproximación es importante por dos motivos:

- En ausencia de aleatoriedad, el precio del activo aumenta de manera exponencial, del mismo modo que el activo libre de riesgo.
- El resultado tiene sentido en el límite, cuando el intervalo de tiempo entre mediciones tiende a cero.

Veamos a continuación qué sucede con la desviación típica de la serie de rentabilidades cuando el intervalo de tiempo entre mediciones tiende a cero. Recordar que la desviación típica se calcula mediante la fórmula:

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(R_i - \bar{R})^2}$$

[1]Donde $M\delta t = T$

Para calcular la desviación típica debemos calcular la raíz de una suma de $M = \frac{T}{\delta t}$ términos. Para que esta suma sea finita cuando $\delta t \to 0$ necesitaremos que cada término sea del mismo orden que δt. Siendo esto así, la desviación estándar de los rendimientos del activo sería del orden $\sqrt{\delta t}$. Así podemos considerar que la rentabilidad anualizada tiene una desviación estándar igual a $\sigma\sqrt{\delta t}$ con σ constante.

Finalmente se tiene[2]:

$$R_t = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = \mu\delta t + \sigma\phi\sqrt{\delta t}$$

Este modelo se conoce como paseo aleatorio del precio del activo y sirve para calcular la variación del precio del activo entre dos instantes de tiempo. Al parámetro μ se le conoce como deriva del activo y al parámetro σ como volatilidad del activo.

Si la escala temporal es diferente, los efectos de la volatilidad y de la deriva en la evolución del activo son diferentes: en plazos cortos la volatilidad influye más que la deriva en el precio del activo, mientras que en plazos largos ocurre al revés.

También es importante tener en cuenta que la volatilidad del activo no es en realidad constante, sobre todo en el largo plazo donde se ve afectada por cambios en el ciclo económico, estacionalidad, ..., aunque en este trabajo no se van a abordar estas consideraciones.

2.3 Paseo aleatorio

Hemos visto que una primera aproximación para modelar un activo puede ser el paseo aleatorio, donde

$$S_{t+1} - S_t = \mu S_t \delta t + \sigma\phi S_t \sqrt{\delta t}$$

con μ y σ parámetros constantes que representan la deriva y volatilidad del activo respectivamente. Además, ϕ representa el valor aleatorio obtenido de una variable aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$.

Ahora, siguiendo (Kwok, 2008), vamos a considerar que el intervalo tiende a cero, es decir, trasladar la movilización de tiempo discreto a tiempo continuo. De este modo, en tiempo continuo, consideramos el incremento temporal dt como el límite cuando el incremento tiende a cero.

Para definir dt a partir de δt al considerar que ϕ es una variable aleatoria normal $\mathcal{N}(0,1)$ se tiene que $\phi\sqrt{\delta t} \sim \mathcal{N}(0, dt)$ será normal.

De manera que escribiremos $\phi\sqrt{dt}$ en tiempo continuo[3] como dZ donde dZ denota una variable aleatoria normal con

[2] ϕ corresponde a un valor de una v.a. normal que recoge la aleatoriedad de la desviación.
[3] Proceso de Wiener

$$E(dZ) = 0 \quad E(dZ^2) = dt$$

Finalmente, podemos definir el modelo de precios de los activos en el límite de tiempo continuo usando la notación del proceso de Wiener.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \tag{2.1}$$

2.4 Propiedades

Cálculo estocástico

Ya hemos visto que los precios de los activos se componen de una parte determinista (deriva) y de una parte aleatoria (volatilidad) provocada por el paso del tiempo. El cálculo estocástico nos permite crear un modelo de estos procesos aleatorios. Pero antes de empezar con esto debemos definir las propiedades de los modelos financieros.

- Propiedad de Markov: El valor esperado de una variable aleatoria depende únicamente del valor previo de la variable aleatoria. Es decir, el precio del activo hoy solo depende del precio del activo ayer, no de los anteriores.
- Propiedad de Martingala: Considerando una secuencia de variables aleatoria, la esperanza condicional en un tiempo dado es igual al valor presente de la secuencia. En términos financieros, la expectativa condicionada de ganar en el futuro una cantidad de dinero es igual a la cantidad que se tiene hoy.
- Variación cuadrática del paseo aleatorio: Definimos la variación cuadrática de un paseo aleatorio como la suma del incremento del activo al cuadrado. Es decir:

$$\sum_{j=1}^{i} (S_j - S_{j-1})^2$$

Movimiento Browniano

Definimos como $S(t)$ el valor de un activo en un tiempo t. El proceso límite de este paseo aleatorio a medida que la variación del tiempo tiende a cero se denomina movimiento browniano, que denotaremos como $Z(t)$.

Un movimiento browniano cumple las siguientes propiedades:

- Finitud: Cualquier otra escala del tamaño de los incrementos del valor con el paso de tiempo habría dado lugar a un paseo aleatorio que iría al infinito en un tiempo finito, o a un límite en el que no habría movimiento en absoluto. Es importante que el incremento aumente con la raíz cuadrada del paso de tiempo.
- Continuidad: Las trayectorias son continuas, no hay discontinuidades. El movimiento browniano es el limite en tiempo continuo de nuestro paseo aleatorio en tiempo discreto.
- Propiedad de Markov: La distribución condicional de $Z(t)$ dada información hasta $\tau < t$ depende solo de $Z(\tau)$.
- Propiedad de Martingala: Dada la información hasta $\tau < t$ la expectativa condicional de $Z(t)$ es $Z(\tau)$.
- Variación cuadrática: Si dividimos el tiempo 0 a t en una partición con $n+1$ puntos de partición con $t_i = it/n$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n}(Z(t_j) - Z(t_{j-1}))^2 \xrightarrow{c.s} t$$

- Normalidad: En incrementos de tiempo finitos de t_{i-1} a t_i, $Z(t_i) - Z(t_{i-1})$ se distribuye normalmente con media cero y varianza $t_i - t_{i-1}$.

2.5 Integral estocástica

Se define la integral estocástica como:

$$W(t) = \int_0^t f(\tau)dZ(\tau) = \lim_{n\to\infty} f(t_{j-1})(Z(t_j) - Z(t_{j-1}))$$

donde $t_j = \frac{jt}{n}$

Que escrita abreviadamente es:

$$dW = f(t)dZ$$

donde dZ representa el incremento de Z, es decir, una variable aleatoria normal de media cero y desviación estándar $\sqrt{dt}$

Del mismo modo, se puede reescribir una integral de la siguiente forma:

$$W(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)dZ(\tau)$$

como

$$dW = g(t)dt + f(t)dZ$$

Este tipo de ecuaciones se conocen como ecuaciones diferenciales estocásticas.

2.6 Lema de Itô a partir de Taylor

Veamos la regla más importante del cálculo estocástico: el Lema de Itô. Esta demostración es más bien una aproximación a la idea subyacente que a una demostración rigurosa, pero sirve para entender qué efecto tiene el cálculo estocástico en nuestro modelo financiero.

Tenemos una función $F(Z)$ que depende del movimiento browniano Z.

Si calculamos la expansión de serie de Taylor hasta el segundo orden de F, sin tener en cuenta la aleatoriedad de Z, y tratando dZ como un pequeño incremento determinista en Z, obtendríamos:

$$F(Z + dZ) \approx F(Z) + \frac{dF}{dZ}dZ + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dZ^2}dZ^2$$

y, si consideramos $F(Z + dZ) - F(Z)$ el incremento en F, se tiene que:

$$dF = \frac{dF}{dZ}dZ + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dZ^2}dZ^2$$

Por último se puede ver que a partir de la variación cuadrática y mediante la definición del limite cuadrático medio que:

$$\int_0^t (dZ)^2 = t$$

Capítulo 3

Valoración de opciones. Parte II

3.1 El desarrollo para la valoración de las opciones

Empezamos definiendo el precio de las opciones como $c(S,t)$. Esto quiere decir que el valor de la opción, que por ahora llamaremos c, depende del precio de la acción S y del tiempo t. Como hemos dicho en el capítulo anterior, el precio de las acciones sigue un proceso estocástico, y añadiendo más aún, también siguen un proceso de Markov, que implica que lo único importante para la estimación de su precio futuro, es el precio actual. Esto es relevante considerando que el precio de las acciones sigue estos procesos, también lo hará el precio de las opciones. El modelo de Black-Scholes supone que el precio del activo sigue un proceso estocástico browniano geométrico.

Recordemos la variación del precio del activo se puede definir como el cambio del precio de la acción entre su valor original, esto es dS/S(Wilmott et al., 1996). Esto podemos descomponerlo en dos partes.

- Una parte determinista, que será la parte que mide la evolución del activo y tendrá la forma μdt, donde μ es la deriva del activo y dt es una variación mínima de la variable t, el tiempo.
- La segunda parte mide la aleatoriedad en el cambio del precio, tiene la forma de σdZ donde σ mide la desviación típica y Z es un proceso Wiener.

Retomando la ecuación 2.1 la evolución del precio del activo, es decir, dS se modela mediante una ecuación que tiene en cuenta estos dos puntos:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ \tag{3.1}$$

o también:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ$$

Ahora, tomamos la función $f = f(S)$ y veremos su desarrollo en serie de Taylor, que como bien sabemos nos aproxima el valor de la función $f(x)$ como la suma de sus derivadas. Esto es:

$$f(x) \approx \frac{f'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x - x_0)^2 ...$$

Por lo tanto, para $f = f(S)$, una serie de Taylor usando solo dos derivadas, tiene esta forma:

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dS^2}dS^2 \tag{3.2}$$

Volviendo a la ecuación 3.1 y calculando dS y $(dS)^2$ podemos conseguir la serie de Taylor para esta ecuación. Por lo tanto:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \tag{3.3}$$

$$(dS)^2 = \mu^2 S^2 dt^2 + \sigma^2 S^2 dZ^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dZ \tag{3.4}$$

3.2 El lema de Itô

Estas dos expresiones las podemos sustituir en la ecuación 3.2 sabiendo que dt es una variable con variaciones muy pequeñas, por lo tanto, $dt \to 0$, entonces dt^2 y $dtdZ$ también tienden a cero. También vemos que $dZ^2 \to dt$ por ser dZ un proceso de Wiener, por lo tanto, $dZ^2 \to 0$, entonces nos queda:

$$df(S) = \left(\mu S \frac{df(S)}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f(S)}{dS^2}\right) dt + \sigma S \frac{df(S)}{dS} dZ \tag{3.5}$$

Ahora usando el valor de las opciones $c = c(S, t)$ en vez de $f(S)$ tenemos que:

$$dc(S,t) = \left(\mu S \frac{dc}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 c}{dS^2} + \frac{dc}{dt}\right) dt + \sigma S \frac{dc}{dS} dZ \tag{3.6}$$

Este resultado es una versión del Lema de Itô, donde dt embarca la parte determinista del valor de la opción, es decir, la que podemos calcular y dZ que recoge la aleatoriedad.

3.3 Distribución lognormal

Ahora, para entender esto mejor y demostrar que S sigue una distribución logarítmica-normal, miraremos el caso en el que $f(S) = ln(S)$. Siguiendo el mismo proceso obtenemos que:

$$\frac{df(S)}{dS} = \frac{1}{S}$$
$$\frac{d^2f(S)}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Y sustituyendo en la ecuación 3.5 tenemos que:

$$df = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dZ \tag{3.7}$$

donde por ser dZ un proceso de Wiener que sigue una distribución normal, $ln(S)$ seguirá distribución logarítmica-normal:

$$ln(S) \rightarrow N\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt, \sigma^2 dt\right)$$

Capítulo 4

Modelo Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes (Black & Scholes, 1973), del que ya hemos hablado antes, es un modelo desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes con posteriores ampliaciones de Robert Merton (Merton, 1973), que usa unas fórmulas que dependen de diferentes variables para aproximarse tanto como sea posible al precio justo de las opciones tanto call como put.

En este apartado, hablaremos un poco del desarrollo matemático y de las fórmulas.

4.1 El modelo y su desarrollo

Para poder simplificar el desarrollo matemático, tenemos que establecer ciertas condiciones (Hull, 2012) para que el modelo tenga sentido:

1. No hay oportunidades de arbitraje.
2. No hay costes de transacciones.
3. El precio del activo sigue un movimiento browniano.
4. La opción es **Europea**
5. μ y σ son siempre constantes.
6. No hay dividendos.
7. Se pueden vender activos en corto[1] y en cualquier cantidad.

En el capítulo anterior vimos cómo obtener la ecuación de la diferencia del valor de una opción call europea (ecuación 3.6):

$$dc = \left(\mu S \frac{dc}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2c}{dS^2} + \frac{dc}{dt}\right) dt + \sigma S \frac{dc}{dS} dZ \tag{4.1}$$

Veamos la demostración clásica de la fórmula de Black-Scholes. Recordemos que el precio del activo sigue el siguiente proceso:

[1]Vender activos en corto significa vender activos que no se posean.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ$$

donde el riesgo del activo viene recogido en la componente estocástica dZ. Nuestro objetivo será eliminar dicha componente estocástica y obtener el precio determinista de la opción call. Para ello, construimos la siguiente cartera, compuesta por la compra de una acción (activo subyacente) y la venta de una cantidad Δ (desconocida) de opciones:

$$\Pi = c(S,t) - \Delta S_t$$

El incremento de esta cartera vendrá dado por la ecuación

$$d\Pi = dc(S,t) - \Delta dS$$

Si en esta ecuación sustituimos las expresiones 4.1 y 3.1 obtendremos:

$$d\Pi = \left(\mu S \frac{dc}{dS} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{d^2c}{dS^2} + \frac{dc}{dt} - \Delta \mu S\right) dt + \left(\sigma S \frac{dc}{dS} - \Delta S \sigma\right) dZ \tag{4.2}$$

Donde dt vuelve a embarcar la parte determinista del valor de la cartera y dZ el valor aleatorio que sigue una distribución normal.

Para nuestro análisis la parte aleatoria dZ implica riesgo, por lo que necesitaremos anularla consiguiendo riesgo nulo. Para esto basta elegir una cantidad Δ que anule esta expresión, que en este caso sería $\Delta = \frac{dc}{dS}$. Con esto, la diferencia del valor de la cartera nos quedaría:

$$d\Pi = \left(\frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{d^2c}{dS^2}\right) dt \tag{4.3}$$

Haciendo esto conseguimos eliminar la parte aleatoria de la ecuación y quedarnos solamente con la parte determinista.

Ahora, si no hay arbitraje en este mercado[2], invertir en esta cartera sin riesgo debe tener el mismo valor que invertir en el activo libre de riesgo, es decir:

$$d\Pi = \Pi r dt$$

Igualando esto con la ecuación 4.3 conseguimos:

$$r\Pi dt = \left(\frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{d^2c}{dS^2}\right) dt$$

Como sabemos $\Pi = c - \Delta S$ o también $\Pi = c - \frac{dc}{dS}S$ y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos la ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2c}{dS^2} + rS\frac{dc}{dS} - rc = 0 \tag{4.4}$$

[2]Supuesto necesario para el modelo.(Hull, 2012)

4.2 La ecuacion de Black-Scholes

Condiciones de contorno

En el punto anterior hemos obtenido la ecuación de Black-Scholes (ecuación 4.4).

$$\frac{dc}{dt} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{d^2c}{dS^2} + rS\frac{dc}{dS} - rc = 0$$

Para poder resolver esta ecuación nos falta considerar definimos las condiciones de contorno que definen el valor de una opción call europea en función del precio de la acción en el punto máximo y el mínimo, es decir:

$$c(S,T) = max(S_T - K, 0)$$

Esta condición nos dice que en la fecha de vencimiento, en T, el precio de la opción será el que maximice el beneficio de la compra de la opción.

$$c(0,t) = 0 \quad \forall t \in \ [0,T]$$

Por otro lado, esta condición nos dice que si el precio de la acción en cualquier momento t es 0, el precio de la opción también será 0.

Con esto, tenemos ecuaciones suficientes para resolver el problema. La forma de resolver este problema es mediante una serie de cambios de variables que nos permitirán transformar la ecuación de Black Scholes en la ecuación del calor, con un doble objetivo. Por un lado, reducir el número de variables de la ecuación y por otro, obtener una solución directa, ya que la solución de la ecuación del calor es conocida desde 1768.

Empezaremos definiendo los siguientes cambios de variable siguiendo a (Kwok, 2008; Wilmott et al., 1996):

$$S = Ke^x \quad \rightarrow \quad x = ln(\frac{S}{K})$$

$$t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$c = Kv(x,\tau) \quad \rightarrow \quad v(x,\tau) = \frac{c}{K}$$

Ahora, con estos cambios de variable resolvemos el problema y llegamos a:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{d^2v}{dx^2} + (\kappa - 1)\frac{dv}{dx} - \kappa v \tag{4.5}$$

Donde $\kappa = \frac{r}{\sigma^2/2}$. Con esto hemos conseguido reducir el número de parámetros a uno.

Ahora escogemos otro cambio de variable, en este caso $v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$ para desarrollar la expresión anterior y llegar a la ecuación del calor, que tiene solución conocida.

Ecuacion del calor

Una vez desarrollado el proceso del punto anterior llegamos a la ecuación del calor.

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

Cuya solución es:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u(S,0)e^{\frac{-(x-S)^2}{4\tau}} dt \tag{4.6}$$

Para buscar la solución hacemos el siguiente cambio: $x' = \frac{S-x}{\sqrt{2\tau}}$. Y con esto conseguimos dos soluciones:

$$\mathcal{N}(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d1} e^{\frac{-S^2}{2}} dS$$

donde $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\kappa+1}{2}\sqrt{2\tau}$, y

$$\mathcal{N}(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d2} e^{\frac{-S^2}{2}} dS$$

donde $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\kappa-1}{2}\sqrt{2\tau}$

Ahora solo quedaría deshacer todos los cambios de variable para hallar $c(S,t)$ para opciones call europeas. Haciendo esto conseguimos:

$$c(S,t) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \tag{4.7}$$

Y para las opciones put seguimos el mismo proceso, pero cambiamos una de las condiciones de contorno por[3][4]:

$$p(S,T) = max(K - S_T, 0)$$

Y con esto conseguimos la ecuación $p(S,t)$ para opciones put europeas[5]:

donde en ambos casos d_1 y d_2 son:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T)}{\sigma\sqrt{T}}$$

[3] La paridad put-call establece una relación entre el precio de ambos tipos de opciones. Expresado matemáticamente: $c - p = S - Ke^{-rT}$. Esto indica que ambas opciones son complementarias.

[4] Sujeto a las condiciones iniciales del modelo.

[5]

$$p(S,t) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S\mathcal{N}(-d_1) \tag{4.8}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Ejemplo de aplicación

Para ver cómo funciona la fórmula de Black-Scholes supongamos que tenemos una opción call europea con las siguientes características:

$$S_0 = 110€ \quad K = 100€ \quad r = 0.1 \quad \sigma = 0.2 \quad T = 0.5$$

Con estos datos, primero calculamos tanto d_1 como d_2:

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{110}{100}\right) + (0.1 + \frac{0.2^2}{2})(0.5)}{0.2\sqrt{0.5}} = 1.0982$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{110}{100}\right) + (0.1 - \frac{0.2^2}{2})(0.5)}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.9567$$

Teniendo estos valores ahora podemos calcular los valores acumulados de la distribución normal:

$$\mathcal{N}(d_1) = \mathcal{N}(1.0982) = \ 0.86394$$
$$\mathcal{N}(d_2) = \mathcal{N}(0.9567) = \ 0.83064$$

Por lo tanto, ahora podemos calcular el valor de la opción call con la fórmula 4.7:

$$c(S,t) = 110 \times 0.86394 - 100 \times e^{-0.1 \times 0.5} \times 0.83064 = 16.0204€$$

Si seguimos el mismo proceso para las opciones put usando los mismos parámetros:

$$\mathcal{N}(-d_1) = \mathcal{N}(-1.0982) = \ 0.13605$$

$$\mathcal{N}(-d_2) = \mathcal{N}(-0.9567) = \ 0.16935$$

Y como antes sustituimos en la ecuación 4.8:

$$p(S,t) = 100 \times e^{-0.1 \times 0.5} \times 0.16935 - 110 \times 0.13605 = \ 1.143€$$

Entonces, el precio de las acciones tiene que subir 2.618€ para alcanzar el *break even* y que con la compra de la opción **call** se obtenga beneficio. Para la opción **put**, el precio de la acción tiene que bajar 11.143€ para alcanzar ese punto.[6]

[6]Las funciones utilizadas en este apartado se encuentran en el Anexo

Capítulo 5

Black-Scholes en la realidad

Hasta ahora hemos visto la teoría de las opciones, el desarrollo matemático del modelo de Black-Scholes y un ejemplo con datos ficticios. En este apartado aplicaremos las fórmulas en un entorno en el que nos acercaremos tanto como podamos a la realidad. Usaremos datos del MEFF[1] y del Tesoro Público para conseguir datos reales de los precios de mercado, tasas de interés, etc. Para ello utilizaremos el paquete estadístico antes comentado, R, a partir del editor Rstudio.

Pero antes de hacer todo esto, hablaremos primero de nuestro activo y de sus características.

5.1 Características del activo subyacente

Para este capítulo utilizaremos los futuros de mini IBEX35, ya que en la bolsa española solamente hay call europeas sobre futuros y cuyo activo subyacente es el índice IBEX35. A su vez, el IBEX35 es un índice ponderado por capitalización, que se compone de las 35 compañías más líquidas que cotizan en las cuatro Bolsas Españolas.

Los futuros son contratos parecidos a las opciones que hemos visto hasta ahora pero con un ligero cambio: la obligación de ejercer el contrato de futuro en su fecha de vencimiento.

A continuación, tenemos una tabla que resume todas las características importantes de este tipo de activo.

[1]MEFF, es el Mercado de referencia de opciones sobre acciones sobre subyacentes españoles, tiene una larga tradición de cultura financiera y buenas prácticas, invirtiendo constantemente en innovación y desarrollo. MEFF es el Mercado Español de productos derivados desde 1989.

Tabla 5.1: Resumen de características sobre opciones de IBEX35. Fuente: MEFF

	Futuro mini sobre el IBEX35
Tipos de opción	Call y Put
Vencimiento	Tercer viernes de cada mes
Fecha de ejercicio	Fecha de vencimiento
Ejercicio	Automático si aporta beneficio
Ultimo día de negociación	Fecha de vencimiento
Precios de ejercicio	En puntos enteros del futuro mini sobre el IBEX35

5.2 Estimación de parametros

- **Precio del activo**

El precio del activo es un dato que viene dado por el mercado y que nosotros hemos obtenido de la página oficial del MEFF de los precios de los futuros Mini IBEX35. Los usaremos varias veces durante este capítulo por lo que los cargaremos en R y los guardaremos en la base de datos.

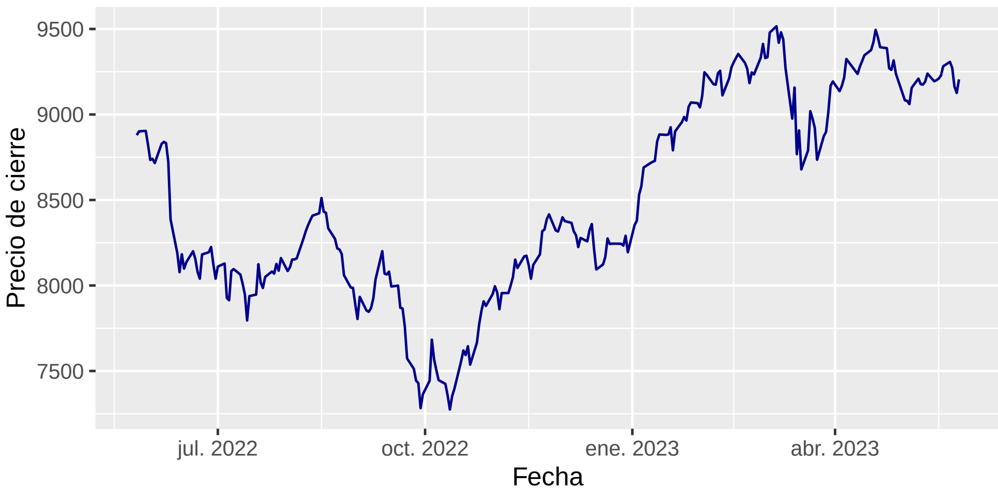

Figura 5.1: Grafico de los precios de cierre de Mini IBEX35. Elaboración propia.

En la figura 5.1 podemos ver la evolución de los precios de este activo.

- **Fecha de vencimiento**

Como fecha de vencimiento vamos a usar el día 26 de junio de 2023 y supondremos que el tiempo desde el inicio del contrato hasta esta fecha es de 11 días, por lo que el inicio del contrato será el día 15 de junio de 2023.

Fecha de inicio	Fecha de vencimiento
15/06/2023	23/06/2023

- **Tasa de interés**

Para estimar la tasa de interés tenemos dos opciones: la primera es usar la calculadora que podemos encontrar en la página oficial del MEFF, que estima la tasa de interés con los datos que nosotros introduzcamos.

La segunda no es tanto una estimación, usualmente se utiliza como tasa de interés libre de riesgo el tipo de interés medio que tienen las letras del tesoro en España. Esta última será la que emplearemos Si buscamos en la Página Oficial del Tesoro vemos que el tipo de interés medio está definido por rangos de tiempo acumulados de 3 meses:

Tabla 5.3: Tabla de tipos de interés del Tesoro. Fuente: elaboración propia

	3 meses	**6 meses**	**9 meses**	**12 meses**
Tipo de interés medio	2,940	3,143	3,199	3,234

La que nos interesa a nosotros y la que utilizaremos es la anual: 3,234%

- **Precio strike**

El precio strike es el precio que se acuerda en el contrato una vez formalizado y el que se paga si se desea ejercer la opción. Este dato lo conseguiremos desde la página oficial del MEFF para el día 26 de junio de 2023. En este caso, los precios de ejercicio a los que se han formalizado contratos van desde 7700€ a 9800€ en saltos de 100€.

- **Volatilidad**

Como ya sabemos, la volatilidad es la medida de incertidumbre de la evolución del precio de las acciones, es decir, es la magnitud que las fluctuaciones del precio del activo en un periodo determinado. Activos con una volatilidad alta tienen un mayor riesgo, ya que la variación del precio puede ser mayor a través del tiempo. En cambio, un activo con baja volatilidad es más seguro, puesto que su precio tiende a cambios más pequeños. Es una medida muy importante a tener en cuenta a la hora de invertir en activos financieros, como son las opciones.

En este apartado vamos a tratar dos diferentes formas de la volatilidad: la volatilidad histórica y la volatilidad implícita, y veremos cómo calcular ambas (Natenberg, 2018).

- **Volatilidad histórica**

La volatilidad histórica es un parámetro que se estima con los datos históricos del precio. Es decir, se calcula la desviación típica de los precios que el activo ha tenido a lo largo del tiempo.

Para el cálculo de la volatilidad histórica, vamos a usar los datos de la página oficial del MEFF de los precios de los futuros Mini IBEX 35 que hemos cargado en nuestra base de datos con anterioridad y a los que hemos llamado **miniibex**

Con estos datos nuestra intención es calcular la rentabilidad del precio para posteriormente calcular una estimación de la volatilidad histórica. Para esto creamos una función en lenguaje de R:

```r
funcion_rentabilidad <- function(archivo, columna){
  datos <- read_excel(archivo, col_names = TRUE)
  divisiones <- datos %>%
    select({{columna}}) %>%
    mutate(division = {{columna}}/lag({{columna}})-1)
  return(divisiones)
}
```

Una vez definida la función, podemos calcular los retornos de nuestro conjunto de datos y construimos un gráfico (5.2) para visualizarlo.

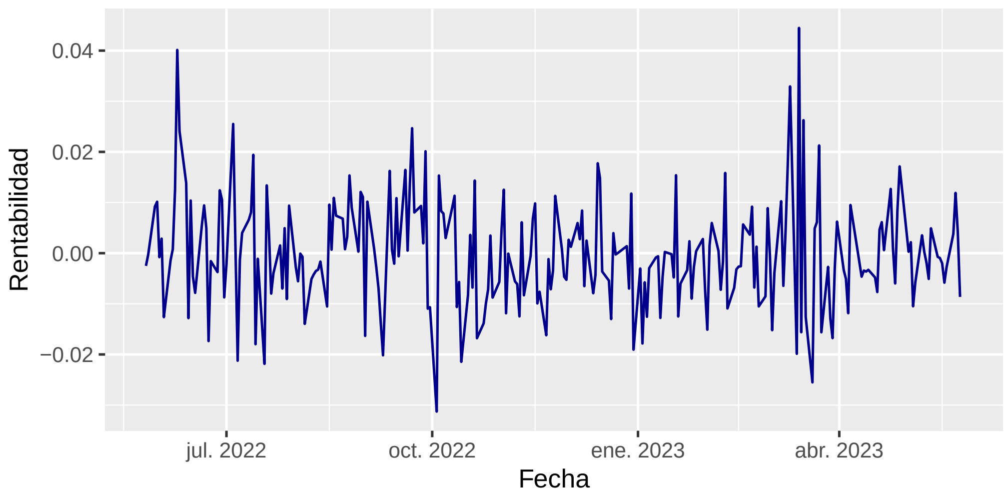

Figura 5.2: Grafico de las rentabilidades de los precios de Mini IBEX 35. Elaboración propia.

Una vez conseguidos las rentabilidades podemos calcular la desviación típica y, por lo tanto, la volatilidad histórica. Pero primero, si nos fijamos en los datos que tenemos en retornos, el primer valor es nulo, por lo que no podemos tenerlo en cuenta para calcular la desviación típica.

Por último, calculamos la volatilidad histórica con la función $sd(x)$. También multiplicamos esta desviación típica con la raíz de 252, que es la cantidad de días que está abierto el mercado de opciones cada año, para anualizar la volatilidad. La volatilidad historica es 16.9352879%.

- **Volatilidad implícita**

Para el cálculo de la volatilidad implícita se sigue un proceso más complejo que con la volatilidad histórica. Para su cálculo es necesario crear una función f en que dependa de la variable σ que representa la volatilidad, siendo todos los demás parámetros conocidos. Esta función se define como:

$$f(\sigma) = c_{Black-Scholes}(\sigma) - c_{Valor\ de\ mercado}$$

Nuestro objetivo es conseguir un valor de σ que consiga que esta función sea igual a 0, es decir, $f(\sigma) = 0$. Para hacer esto existen diferentes métodos como el método de Brent o el de Redes Neuronales (Liu et al., 2019), nosotros utilizaremos el método de Bisección, que es más sencillo.

Este método matemático está basado en el Teorema de los Valores Intermedios (Casas et al., 2011). Si suponemos que una función f es continua en un intervalo cerrado $[\,a, b\,]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo, es decir, $f(a) \times f(b) < 0$, entonces existe al menos un valor c dentro del mismo intervalo tal que $f(c) = 0$.

Visto esto, ahora construiremos un código de R para que calcule en bucle una volatilidad óptima hasta llegar a una tolerancia tan pequeña como queramos para las opciones:

```r
funcionbiseccioncall <- function(S, K, r, t, c, tol = 0.0001,
                                 intmax = 1000) {
  a <- 0.0001
  b <- 1
  i <- 1
  while (i <= intmax) {
    valormedio <- (a + b) / 2
    preciomedio <- bs_call(S, K, r, t, valormedio)
    if (preciomedio - c > tol) {
      b <- valormedio
    } else if (c - preciomedio > tol) {
      a <- valormedio
    } else {
      break
    }
    i <- i + 1
  }
  return(valormedio)
}
```

donde:

- S: precio de la acción
- K: precio strike

- r: tasa de interés
- t: tiempo hasta la fecha de vencimiento
- c: valor de mercado de la opción call.
- tol: la tolerancia, es decir el error máximo que estamos dispuestos a permitir
- $intmax$: las interacciones máximas que hará el bucle hasta encontrar un valor que sea menor que la tolerancia.

Tanto tol como $intmax$ tienen un valor predefinido en la función: $tol = 0.0001$ y $intmax = 1000$.

Para las opciones put tendríamos que construir otro código que incorpore la función de Black-Scholes para este tipo de opciones:

```
funcionbiseccionput <- function(S, K, r, t, p, tol = 0.0001,
                                intmax = 1000) {
  a <- 0.0001
  b <- 1
  i <- 1
  while (i <= intmax) {
    valormedio <- (a + b) / 2
    preciomedio <- bs_put(S, K, r, t, valormedio)
    if (preciomedio - p > tol) {
      b <- valormedio
    } else if (p - preciomedio > tol) {
      a <- valormedio
    } else {
      break
    }
    i <- i + 1
  }
  return(valormedio)
}
```

Esta función tiene las mismas variables que la anterior, cambiando el valor de la opción call c por el de una opción put p.

El diagrama 5.3 nos enseña el funcionamiento del código de una forma más simple. El primer paso de la función es definir las variables, que introducimos nosotros. Por un lado, se definen las variables de la función de Black-Scholes, que servirán luego para calcular el precio medio, por otro lado, se definen dos variables: $intmax$ y tol, que nos indican el número máximo de veces que se repetirá la función y la tolerancia máxima de fallo que aceptaremos respectivamente. Después de definir las variables, define los valores iniciales que vamos a trabajar: el valor mínimo de la volatilidad[2] $a = 0$ y el máximo $b = 1$. Por otro lado también definimos la primera interacción del bucle $i = 1$.

[2]La volatilidad se calcula como un número entre 0 y 1, no como un porcentaje sobre 100.

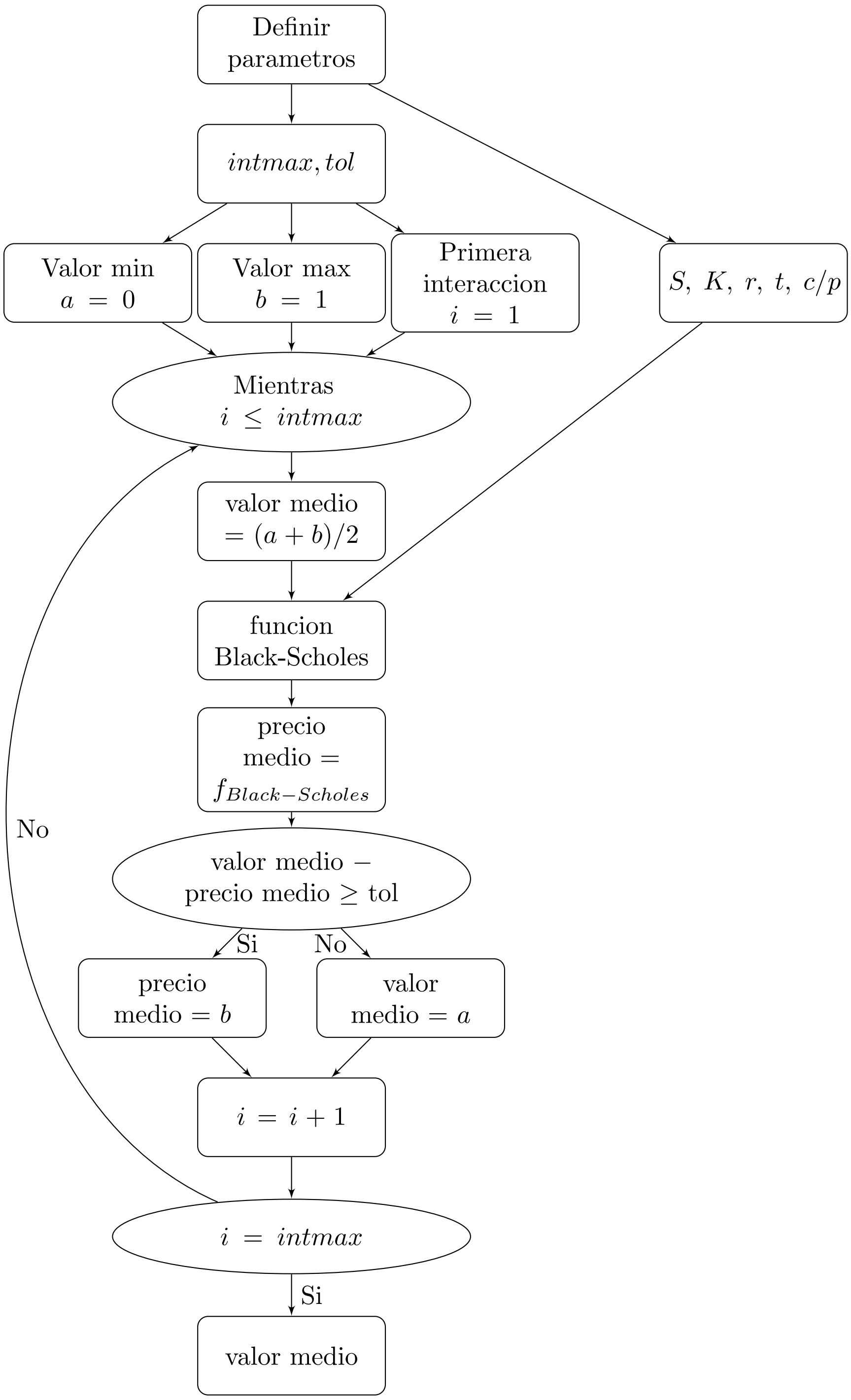

Figura 5.3: Diagrama explicativo de la función de Bisección. Elaboración propia.

Teniendo todo definido primero vemos si la interacción en la que estamos es menor a la interacción máxima ($i \leq intmax$) para empezar a trabajar. Si esto se cumple se calculan dos valores:

- El valor medio entre a y b: $\frac{a+b}{2}$.
- Usando la función de Black-Scholes con el valor medio que acabamos de calcular calculamos el precio medio.

Teniendo estos dos valores los comparamos con la tolerancia: $\mid valor\ medio - precio\ medio \mid > tol$. Esto nos indica si la diferencia entre el valor medio y el precio medio en valor absoluto es mayor que la tolerancia. Si esto es así, se define b como el precio medio recién calculado y si no, se define a como el valor medio ahora calculado. Con este paso lo que hacemos es centrarnos en la mitad del intervalo que nos interesa según el Teorema de la Bisección.

Hecho esto, sumamos una iteración ($i = i + 1$) y comprobamos si es la máxima iteracción. Si aun no hemos llegado al máximo de interacciones ($i < intmax$) volvemos atrás para calcular de nuevo el valor medio y el precio medio. Si es el máximo ($i = intmax$) terminamos el bucle y la función nos devuelve el valor medio como volatilidad.

Para ver como funciona, cogemos el ejemplo que hemos estado usando durante todo el trabajo para las opciones call, donde:

$$S_0 = 110€ \quad K = 100€ \quad r = 0.1 \quad \sigma = 0.2 \quad T = 0.5$$

En este ejemplo hemos usado una volatilidad supuesta de $\sigma = 0.2$ y hemos calculado que el valor de la opción call es $c = 16.0204€$, que en la función quedara definido como c. Ahora, tomando este ejemplo haremos justo lo contrario: para comprobar nuestro código, utilizaremos como valor de opción $c = 16.0204€$ para obtener el valor de σ cercano al 0.2.

Si introducimos estos datos en la función, nos queda que la volatilidad implicita es 20.0099834%. Y lo mismo para las opciones put con el valor de la opción $p = 1.143€$, nos queda que la volatilidad implicita es 20.012272%. Vemos que para la opcion put es algo mayor.

Como vemos, la volatilidad implícita da como resultado aproximadamente un 20% en ambos casos, que es lo que hemos usado en nuestro ejemplo principal. Con esto podemos verificar que las funciones de Black-Scholes nos dan el precio justo de las opciones.

5.3 Resultados

Tomamos otra vez las tablas del MEFF para usar estas funciones y calcular la volatilidad y comprobar si es la correcta. Usaremos:

- $T = \frac{11}{252}$

Que son los días hábiles entre el 9 de junio de 2023 y el 26 de junio de 2023 (fecha de donde hemos sacado los precios de la call en MEFF), divididos por el número de días al año en el que la Bolsa Española está abierto.

- $S_0 = 9299.10€$

Valor del futuro Mini IBEX el 9 de junio (cuando hemos mirado los precios call).

- $K = [\ 7700€, 9800€\ ]$

Precios de ejercicio a los que se negocia la call. En intervalos de 100$

- $r = 0.03234$

El tipo de interés anual.

- c =[1619, 1519, 1420, 1320, 1220, 1121, 1021, 922, 823, 727, 628, 531, 434, 344, 254, 175, 104, 55, 23, 10, 4, 1]

Los precios de la call para cada precio strike.

Empezamos introduciendo estos datos y calculando la volatilidad en función del precio strike, K. Este precio strike se define como una secuencia entre los precios 7700€ y 9800€ en incrementos de 100€, es decir: 7700€, 7800€... hasta llegar a 9800€, por lo que tenemos un total de 22 precios strike.

Por otro lado, también creamos un vector de valores con los precios call que hemos conseguido, también tenemos 22 precios call. También definimos el valor de S_0.

El objetivo de esta función es usar el Teorema de Biseccion para calcular la volatilidad, realmente una volatilidad diferente para cada valor i de los precios strike y call. Se utilizan también los valores constantes de S_0, r y T.

```
S0<-9299.10
df<-NULL
df$K<-seq(7700,9800,by=100) #seq(min, max, incremento)
df$call<-c(1619,1519,1420,1320,1220,1121,1021,
922,823,727,628,531,434,344,254,175,104,55,23,10,4,1)
volat<-0
for(i in 1:22){
  volat[i]<-funcionbiseccioncall(S0, df$K[i], 0.03234, 11/252, df$call[i])
}
df$volat<-volat
df<-as.data.frame(df)
```

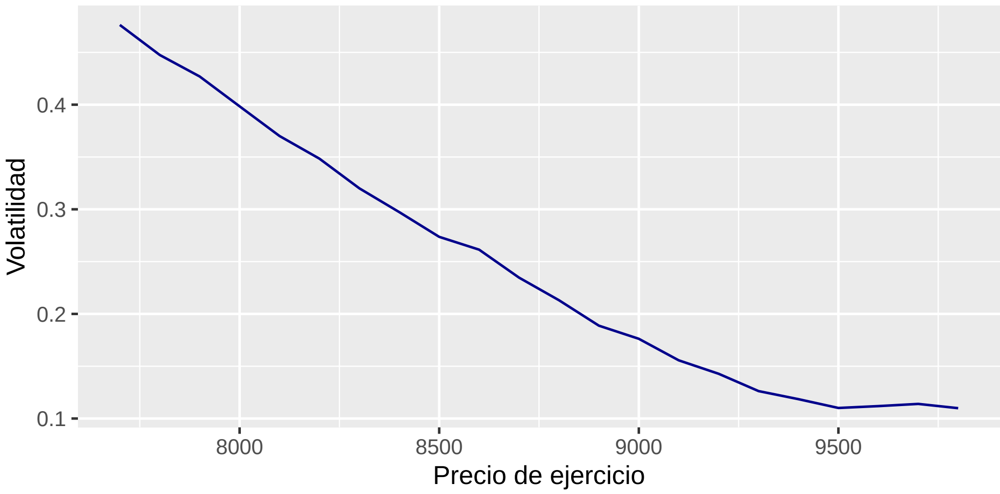

Figura 5.4: Gráfico de las volatilidades para cada precio de ejercicio (strike). Elaboración propia.

En el gráfico 5.4 podemos ver la volatilidad en función de los precios de ejercicio. Podemos observar como si el precio de ejercicio de la opción aumenta, su volatilidad disminuye. Esto no siempre es necesariamente de esta forma, puede variar según las condiciones y el comportamiento del mercado. En situaciones específicas y bajo ciertas condiciones, el aumento de la volatilidad puede hacer que el precio de ejercicio disminuya. Por ejemplo, con un aumento significativo de la volatilidad, puede haber más demanda en las opciones debido a las mayores oportunidades de ganancias potenciales. Este aumento de la demanda puede hacer que el precio de ejercicio aumente, ya que los participantes del mercado están dispuestos a pagar más por las opciones. A esto se le conoce como "sonrisa" o "mueca" de volatilidad.

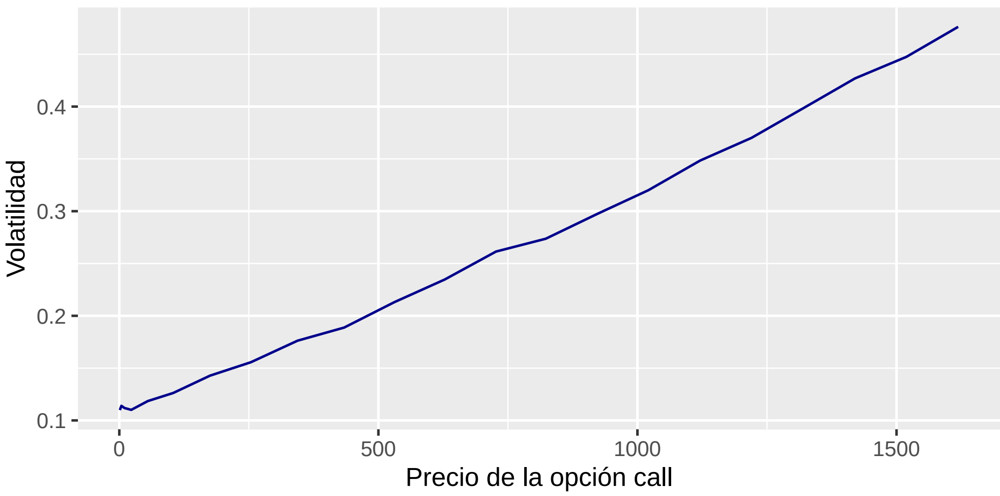

Figura 5.5: Gráfico de las volatilidades para cada precio de las opciones. Elaboración propia.

La figura 5.5 muestra cómo aumenta el precio de la opción a medida que aumenta la volatilidad. Esta relación entre la volatilidad y los precios de las opciones es más intuitiva que con los precios de ejercicio. Cuando la volatilidad es alta, indica un mayor nivel de incertidumbre en el precio del activo subyacente y en sus movimientos. Por lo tanto, en algún momento durante la vida de la opción, es más probable que el precio del activo subyacente supere el precio de ejercicio, es decir, $S > K$, generando así mayor ganancia. En consecuencia, si el precio del activo es mayor, el precio de la opción de compra también será mayor.

En resumen, la relación entre la volatilidad y los precios de las opciones de compra es bastante clara: a medida que aumenta la volatilidad, se espera que los precios de las opciones de compra aumenten debido a la oportunidad de obtener ganancias.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo nos hemos introducido en el mundo de las opciones financieras, ahora sabemos lo que son, qué tipos de opciones hay y qué modelos podemos usar para su valoración. Para la redacción del trabajo hemos utilizado *Rmarkdow*, que permite trabajar tanto con comandos de *LaTeX* como con otros formatos, texto plano, HTML, etc. a partir del editor *Rstudio*, lo que nos ha permitido incluir gráficas y código de *R* directamente así como gráficas y diagramas realizados en *LaTeX* con ayuda del paquete *Tikz*.

Este trabajo principalmente se ha basado en el modelo Black-Scholes, que es uno de los modelos principales de valoración de opciones Europeas junto con el método de Árboles Binomiales. Nuestro método utiliza los procesos estocásticos, que como hemos visto son principalmente procesos aleatorios, para conseguir dos ecuaciones que valoran los dos principales tipos de opciones: call y put. Hemos visto todo el proceso de valoración de opciones, los supuestos que se siguen y el desarrollo matemático de las ecuaciones hasta conseguir las fórmulas de Black-Scholes y el marco teórico en el cual se pueden aplicar.

Este marco teórico es también la principal debilidad del modelo, está basado en unos supuestos muy simplificados. Estos supuestos no siempre reflejan la realidad del mercado, por ejemplo el supuesto de no arbitraje, el de costes de transacción nulos o el de no dividendos.

Como la mayoría de modelos económicos, también supone que los mercados son eficientes, sin embargo, en la práctica los mercados pueden no ser perfectamente eficientes debido a informaciones asimétricas o ineficiencias en el reparto de recursos.

También podemos mencionar otras debilidades del modelo, como que la volatilidad implícita es considerada como constante, cuando no lo es, o también que los rendimientos siguen una distribución normal cuando puede no hacerlo. Tampoco tiene en cuenta los eventos extremos que pueden afectar al precio del activo subyacente, como una crisis.

El tiempo también juega en contra del modelo. Este modelo está diseñado para funcionar con periodos de tiempo cortos, es decir, cuando los intervalos de tiempo tienden a cero. Si se toman intervalos de tiempo más amplios, los resultados del modelo pueden ser imprecisos.

De todas formas, existen ampliaciones del modelo de Black-Scholes que tiene en cuenta supuestos como el pago de dividendos o para las opciones de tipo Americanas.

Por último, en el trabajo también hemos visto una aplicación real del modelo, donde hemos conseguido precios de futuros reales y también precios strike. Hemos usado la tasa de interés sin riesgo de las Letras del Tesoro y hemos calculado la volatilidad histórica e implícita. Con esto luego hemos aplicado nuestro modelo para después comparar el precio de la opción en el mercado con el que hemos conseguido empleando las ecuaciones de Black-Scholes.

Anexo A (Códigos)

- Código utilizado para la realización de la gráfica 2.1

```
library(readxl)
aena<-read_excel("aenadatosxlsx.xlsx")
library(ggplot2)
 ggplot(aena) + aes( x = FECHA, y = CIERRE)+
   geom_line(color="darkblue")+  xlab("Fecha") +
   ylab("Precio de cierre")
```

- Código utilizado para la realización de la gráfica 2.2:

```
library(PerformanceAnalytics)
rentabilidadesAENA_simples<-Return.calculate(aena)
aena$rentabilidadessimples<-rentabilidadesAENA_simples$CIERRE
 ggplot(aena) + aes( x = FECHA, y = rentabilidadessimples) +
   geom_line(color="darkblue") +  xlab("Fecha") +
   ylab("Rentabilidades simples")
rentabilidadesAENA_simples_SPF<-rentabilidadesAENA_simples[-1, "CIERRE"]
```

- Código utilizado para la realización de la gráfica 2.3:

```
rentabilidadesAENA_simples_SPF<-rentabilidadesAENA_simples[-1, "CIERRE"]
renta_simples<-aena[2:257,]
renta_simples$SPF<-rentabilidadesAENA_simples_SPF
ggplot(renta_simples, aes(x=SPF)) + geom_histogram(
                   colour = "black",
                   fill = "white") +
stat_function(fun = dnorm,color="darkred",
              args = list(mean = mean(renta_simples$SPF),
                          sd =sd(renta_simples$SPF))) +
  xlab("Rentabilidades simples")+ylab("Frecuencia")
```

- Código utilizado para la realización de la gráfica 2.4:

```
rentabilidadesAENA_compuestas<-Return.calculate(aena, method="log")
aena$rentabilidades<-rentabilidadesAENA_compuestas$CIERRE
 ggplot(aena) + aes( x = FECHA, y = rentabilidades) +
   geom_line(color="darkblue")+  xlab("Fecha") +
   ylab("Rentabilidades compuestas")

rentabilidadesAENA_compuestas_SPF<-rentabilidadesAENA_compuestas[-1, "CIERRE"]
```

- Código utilizado para la realización de la gráfica 2.5:

```
rentabilidadesAENA_compuestas_SPF<-rentabilidadesAENA_compuestas[-1, "CIERRE"]
renta_comp<-aena[2:257,]
renta_comp$SPF<-rentabilidadesAENA_compuestas_SPF
ggplot(renta_comp, aes(x=SPF)) + geom_histogram(
                   colour = "black",
                   fill = "white") +
stat_function(fun = dnorm,color="darkred",
              args = list(mean = mean(renta_comp$SPF),
                          sd =sd(renta_comp$SPF))) +
  xlab("Rentabilidades compuestas")+ylab("Frecuencia")
```

- Para calcular los valores obtenidos en la sección 4.2, así como el precio de cualquier opción europea se han creado las siguientes funciones de Black-Scholes, siguiendo el artículo (Arango et al., 2015), en el programa R para las funciones call y put que hemos visto hasta ahora, y que usaremos en el siguiente capítulo.

```
bs_call <- function(S, K, r, t, sigma) {
  d1 <- (log(S/K) + (r + sigma^2/2)*t) / (sigma * sqrt(t))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(t)
  S * pnorm(d1) - K * exp(-r*t) * pnorm(d2)
}
```

```
bs_put <- function(S, K, r, t, sigma) {
  d1 <- (log(S/K) + (r + sigma^2/2)*t) / (sigma * sqrt(t))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(t)
  K * exp(-r*t) * pnorm(-d2) - S * pnorm(-d1)
}
```

Siendo los parámetros de ambas funciones los siguientes:

- S: precio de la acción (activo subyacente).
- K: precio de ejercicio.

- r: tasa de interés.
- t: tiempo, en años.
- σ: volatilidad, en valor entre 0 y 1.
- Códigos utilizados para la realización de la gráfica 5.1:

```
library(readxl)
library(quantmod)
library(dplyr)
library(PerformanceAnalytics)
miniibex<-read_excel("Futuros.xlsx")
```

```
ggplot(miniibex) + aes( x = Fecha, y = Ultimo) +
  geom_line(color="darkblue")+  xlab("Fecha")
+ ylab("Precio de cierre")
```

- Códigos utilizados para la realización de la gráfica (5.2):

```
rentabilidadFUTUROS<-funcion_rentabilidad("Futuros.xlsx", Ultimo)
rentabilidadFUTUROS$Fecha <-miniibex$Fecha
ggplot(rentabilidadFUTUROS) + aes( x = Fecha, y = division) +
  geom_line(color="darkblue") +  xlab("Fecha") +
  ylab("Rentabilidad") +
  stat_smooth(method="lm", se=FALSE, color="darkgreen")
```

Bibliografia

AENA. (2023). *AENA Accionistas e Inversores.* https://www.aena.es/es/accionistas-e-inversores.html

Arango, M. V., Medina, R. A. R., & Peralta, D. T. (2015). Valoración de Opciones por el método de Black Scholes en R-project. *Lúmina*, *16*, 214-225.

BBC Mundo, R. (2018). *Cómo fue la "crisis de los tulipanes", la primera gran burbuja financiera de la historia mundial.* https://www.bbc.com/mundo/noticias-44162659

Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 19. http://www.jstor.org/stable/1831029

Casas, Q., Cheney, W., & Kincaid, D. (2011). *Métodos numéricos y computación.* Cengage Learning.

Fernandez, P. (1997). Utilizacion de la formula de Black Scholes para valorar Opciones. *IESE, Universidad de Navarra*, 31.

Hull, J. C. (2012). *Options Futures and Other Derivatives.* Prentice-Hall International Edition.

Kwok, Y.-K. (2008). *Mathematial Models of Financial Derivatives.* Springer.

Liu, S., Oosterlee, Cornelis W., & Bohte, S. M. (2019). *Pricing options and computing implied volatilities using neural networks.* 21.

Lopez, J. F. (2020). *Modelo Black-Scholes.* https://economipedia.com/definiciones/modelo-black-scholes.html

MEFF. Boletin diario. (2023). https://www.meff.es/docs/Ficheros/boletin/esp/boletinptue.htm

Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 45. https://www.jstor.org/stable/3003143

Natenberg, S. (2018). *Option Volatility & Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques.* McGraw-Hill.

Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1996). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction.* Press Syndicate of the University of Cambridge.