



ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA

50 URTE
AÑOS
1968 - 2018

Biba Zientzia!
Ciencia Viva

Ilara baten Informazioaren Antzinekotasunaren Analisi Matematikoa

Gradu Amaierako Lana
Matematikako Gradua

Beñat Gandarias Guerenabarrena

Josu Doncel Vicente
Irakasleak zuzendutako lana

Leioa, 2023ko otsailaren 13a

Gaien Aurkibidea

Sarrera	v
1 Probabilitate eta ilaren teoriako oinarrizko kontzeptuak	1
1.1 Probabilitate banaketak	1
1.2 Zenbaki handien legeak	3
1.3 Prozesu estokastikoak	3
1.4 Poisson prozesua	3
1.5 Markov kateak	4
1.5.1 Denbora diskretuko Markov kateak	4
1.5.2 Denbora jarraituko Markov kateak	5
1.6 Ilaren teoria	6
1.6.1 FIFO	6
1.6.2 Processor Sharing	6
1.6.3 Kendall-en notazioa	6
2 Informazioaren Antzinekotasunera eta SHS-ra sarrera	9
2.1 Informazioaren Antzinekotasuna	9
2.2 Informazioaren Antzinekotasunaren itzaropen matematikoa- ren kalkulua	11
2.3 Stochastic Hybrid System	12
3 FIFO diziplinaren analisisa	15
3.1 $B=2$ kasua	15
3.2 B finitua den kasua	18
3.3 $B \rightarrow \infty$ kasua	22
4 Processor Sharing diziplinaren analisisa	25
4.1 $B=2$ kasua	25
4.2 B finitua den kasua	27
5 Bi diziplinen alderaketa	29
5.1 $B = 2$ kasua	29
5.2 B finitua den kasua	31

6	Ondorioak eta etorkizuneko lana	33
A	Lanean zehar erabilitako matlabeko kodigoak	35
A.1	FIFOrako edozein B, λ eta μ -rako Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatzeko funztioa	35
A.2	Processor Sharing-erako edozein B, λ eta μ -rako Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatzeko funztioa . .	37
A.3	Aurreko bi funtzioak exekutatzeko funtzio laguntzailea	39
B	FIFO eta Processor Sharing B=2 kasuko sistemen ebazpenak	41
B.1	FIFO	41
B.2	Processor Sharing	42
	Bibliografia	45

Sarrera

Informazioa prozesatzea ezinbestekoa da, adibidez, ordenagailu batek erabaki egokiak har ditzan guk benetan nahi duguna egiteko. Gainera, informazio hori ahalik eta era azkarrenean edota eraginkorrean prozesatzen badugu hobeto izango da. Lan honetan informazio ilarak kudeatzeko bi diziplina desberdin alderatzen dira, *FIFO* (First in first out) eta *Processor Sharing* diziplinak, hain zuzen. Beraien eraginkortasuna neurtzeko Informazioaren Antzinekotasuna deritzon kontzeptuaz baliatuko gara, eta Informazioaren Antzinekotasun horren itxaropen matematikoa kalkulatzeko Stochastic Hybrid System (SHS) metodoa erabiliko dugu. Informazioaren Antzinekotasunak informazio horrek duen 'bizi' denbora neurtzen du, horrela helburua bietatik Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematiko txikiagoa duena bilatzea izango da, informazio eguneratuagoa eduki ahal izango baitugu diziplina horrekin.

Lanaren lehen kapituluaren probabilitate eta ilaren teoriako zenbait oinarri azaltzen dira, lanean geroago agertuko zaizkigun kontzeptuak ulertu ahal izateko behar izango ditugunak.

Bigarren kapituluaren Informazioaren Antzinekotasuna sakonago aztertuko da, bere itxaropen matematikoaren kalkulua ikusiko dugu eta baita lan honetan SHS metodoaren erabileraren zergatia itxaropen matematiko hori kalkulatzeko.

Hirugarren eta laugarren kapituluetan *FIFO* eta *Processor Sharing* diziplinen Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatzeko saiaturako gara, hurrenez hurren. Lehenik *buffer* tamaina (B) 2 deneko kasurako kalkulatu dugu, hau bi diziplinekin egitea lortuko dugu. Ondoren gure helburua edozein B -rako kalkulatzeko da, [1] artikuluan oinarrituz *FIFO*-ren kasuan egitea lortuko dugu, baina *Processor Sharing*-en kasuan ez dugu lortuko. Azkenik, *FIFO*-ren kasuan soilik, B infiniturantz doaneko Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropenaren adierazpena lortuko dugu.

Azkenik, bosgarren eta seigarren kapituluetan bi diziplinen arteko alderaketa egingo dugu eta bietatik eraginkorragoa zein den ondorioztatuko dugu, beste ondorio batzuen artean. Gainera, lana zabalik utziko dugu frogatu nahi genuena etorkizunean frogatua izateko.

1. Kapituluia

Probabilitate eta ilaren teoriako oinarrizko kontzeptuak

Kapitulu honen helburua izango da lanean zehar erabiltzen diren probabilitate teoriako eta ilaren teoriako oinarrizko kontzeptu batzuk aurkeztea.

1.1 Probabilitate banaketak

1.1.1. definizioa. Izan bedi X zorizko aldagai diskretu bat eta $\lambda > 0$. Orduan, X -k λ parametroko Poisson banaketa bat jarraitzen duela diogu

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

bada, eta $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ denotatuko dugu. Poisson banaketak gertaera bat denbora tarte batean zenbat aldiz gertatzen den modelizatzen du.

1.1.2. definizioa. Izan bedi X zorizko aldagai jarraitu bat eta $\mu > 0$. Orduan, X -k μ parametroko banaketa exponentzial bat jarraitzen duela diogu, $X \sim \text{Exp}(\mu)$ denotatuko duguna, bere dentsitate funtzioa hurrengo bada

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

edo, era berean, bere banaketa funtzioa hurrengo bada

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

.

1.1.1. proposizioa. Izan bedi $X \sim \text{Exp}(\mu)$. Orduan,

(i) X zorizko aldagaiaren itxaropen matematikoa hurrengoa da,

$$E(X) = \frac{1}{\mu}$$

(ii) X zorizko aldagaiaren bariantza hurrengoa da,

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\mu^2}$$

(iii) X-k *memoryless*, edo memoria galtze, propietatea betetzen du, hau da,

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s) \quad s, t \geq 0.$$

Froga. (i) Zatika integratuz,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \mu e^{-\mu x} dx = (-x e^{-\mu x}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\mu x} dx \\ &= 0 - \frac{1}{\mu} e^{-\mu x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

(ii) Zorizko aldagai baten bariantza horrela kalkulatzen da, $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \mu e^{-\mu x} dx = (-x^2 e^{-\mu x}) \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\mu x} dx \\ &= 0 + \frac{2}{\mu} \frac{1}{\mu} = \frac{2}{\mu^2}. \end{aligned}$$

Eta $E(X)^2 = \frac{1}{\mu^2}$ denez, orduan

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

(iii) Probabilitate baldintzatuaren definizioa jarraituz,

$$\begin{aligned} P(X > s + t | X > t) &= \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-\mu(s+t)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu s} = P(X > s). \end{aligned}$$

□

1.2 Zenbaki handien legeak

Probabilitate teorian, zenbaki handien legeek deskribitzen dute zorizko aldagaien segida baten batez bestekoaren portaera, zorizko aldagai horren kantitatea handitzen den heinean. Adibidez, lege hauek ematen digute tamainu handiko poblazio baten zoriz harturiko lagin baten batez bestekoak, poblazio osoaren batez bestekotik hurbil egotera joko duenaren zergatia. Zenbaki handien legeetan bi lege garrantzitsu bereiz ditzakegu, lege ahula eta lege indartsua. Aipatzekoa da lege indartsuak lege ahula inplikatzeko duela.

1.2.1. proposizioa. Izan bedi X_1, X_2, X_3, \dots independenteak diren eta berdinki banatutako zorizko aldagaien segida infinitu bat. Zorizko aldagai bakoitzaren batez bestekoa μ izanik eta bariantza σ^2 . Orduan zenbaki handien lege ahulak dioena zera da

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \epsilon \right) = 1.$$

1.2.2. proposizioa. Izan bedi X_1, X_2, X_3, \dots independenteak diren eta berdinki banatutako zorizko aldagaien segida infinitu bat. $E[X_i] = \mu < \infty$ izanik. Orduan, zenbaki handien lege indartsuak dioena zera da

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \right) = 1.$$

1.3 Prozesu estokastikoak

Lan honekin aurrera jarraitzeko, ezinbestekoa izango da ondo ezagutzea zer den prozesu estokastiko bat, aurrerago hainbat alditan agertuko baitira.

1.3.1. definizioa. Izan bitez $\{X_t, t \in T\}$ non X_t bakoitza zorizko aldagaia den eta T multzo diskretua edo jarraitua izan daitekeen. Orduan, $\{X_t, t \in T\}$ prozesu estokastiko bat dela esango dugu. Hau da, prozesu estokastiko bat zorizko aldagaien bilduma bat izango da non $t \in T$ bakoitzerako zorizko aldagai desberdin bat izango dugun.

1.4 Poisson prozesua

Poisson prozesua, denbora tarte batean gertaera bat zenbat aldiz gertatzen den zenbatzen duen prozesu estokastiko bat da. Poisson prozesua oso erabilgarria da hainbat motatako egoera desberdinak modelizatzeke, adibidez, software baten agertzen diren erroreak, futbol partidu batean sartutako golak, autopista batetik igarotzen den kotxe kantitatea edota lan honetan

aurrerago landuko dugun bezala, telekomunikazio sare batera iristen diren informazio pakete kantitatea modelizatu dezake.

1.4.1. definizioa. Izan bitez, X_1, X_2, X_3, \dots independenteak diren eta λ parametroko banaketa exponentziala jarraituz berdinki banatutako zorizko aldagaiak, $\tau_0 = 0$ eta $\tau_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Orduan, λ parametroko Poisson prozesua horrela definitzen dugu

$$N(s) = \max\{n : \tau_n \leq s\}, \quad s \geq 0.$$

X_n aldagaiak alboz alboko bi gertaeren bitarteko denbora tarteak erreprezentatzen dituzte, horregatik $\tau_n = X_1 + \dots + X_n$ n-garren gertaera gertatzen den unea izango da eta $N(s)$ s uneraino igarotako gertaera kopurua izango da.

1.5 Markov kateak

Markov kateak denbora diskretuko edo denbora jarraituko prozesu estokastikoak dira. Kate hauen ezaugarria da, etorkizuneko egoera soilik oraineko egoeraren menpe dagoela eta ez iraganeko egoeraren menpe. Hau da, gertaera bat gertatzeko probabilitatea bakarrik justu aurreko gertaeraren araberakoa da [5].

1.5.1 Denbora diskretuko Markov kateak

1.5.1. definizioa. Denbora diskretuko Markov kate bat, $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$, prozesu estokastiko bat da, S egoera espazioarekin non edozein $n \geq 0$ eta $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in S$ izanik Markov-en propietatea betetzen den, hau da,

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

Bi motatako Markov-en kateak bereizi ditzakegu, homogeneoak eta ez-homogeneoak.

1.5.2. definizioa. Markov kate bat homogenea dela diogu $i, j \in S$ izanik, i egoeratik j egoerara pausu batean joateko probabilitatea ez badago katea aurkitzen den denboraren menpe. Hau da, edozein $n \geq 0$ eta edozein $i, j \in S$ -rako

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

betetzen bada. Existitzen bada i, j -ren bat S -n edo n -ren bat baldintza hau betetzen ez duena, orduan, Markov-en kate hori ez-homogeneoa dela esango

dugu. Horrez gain, edozein kasutan $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ denotatuko dugu i egoeratik j egoerara joateko trantsizio probabilitate bezala.

1.5.3. definizioa. $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ egoera espazioa izanik eta p_{ij} trantsizio probabilitateak izanik, horrela definitzen dugu trantsizio probabilitateen matrizea

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

P matrize estokastiko bat dela diogu hurrengo baldintzak betetzen baititu

- $P_{ij} \geq 0$
- $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$.

1.5.4. definizioa. Existitzen bada, P matrizearen berredura positiboren bat non matrizearen elementu guztiak hertsiki positiboak diren, orduan, Markov-en kate hori ergodikoa dela diogu.

1.5.2 Denbora jarraituko Markov kateak

Gure lanean justu mota honetako kateak kontsideratuko ditugu.

1.5.5. definizioa. Denbora jarraituko Markov kate bat, $\{X_t, t \geq 0\}$, prozesu estokastiko bat da non egoera bakoitzerako, prozesuak egoera aldatuko duen banaketa exponentziala jarraituz eta S egoera espazioa duen non edozein $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ eta $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$ izanik hurrengo betetzen den

$$P(X_t = j | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_s = i) = P(X_t = j | X_s = i).$$

Egoera batetik beste egoera batera igarotzen den uneak, q parametroko banaketa exponentzial bat jarraituko du, hau da, $\forall i, j \in S$ $q(i, j)$ deituko diogu i egoeratik j egoerara igarotzeko banaketa exponentzialaren parametroari.

1.5.6. definizioa.

Trantsizio matrizea horrela definitzen dugu

$$Q(i, j) = \begin{cases} q(i, j) & i \neq j \\ -\sum_{i \neq j} q(i, j) & i = j \end{cases}$$

1.5.7. definizioa. Denbora jarraituko Markov kate bat homogeneoa dela diogu edozein $s \leq t$ -rako eta $i, j \in S$ -rako ondorengo betetzen bada

$$P(X_t = j | X_s = i) = P(X_{t-s} = j | X_0 = i).$$

1.5.8. definizioa. Izan bedi $\{X_t, t \geq 0\}$ denbora jarraituko Markov kate bat, Q bere trantsizio matrizea izanik. Izan bedi π bektore bat non $\pi_i \geq 0$ den $\forall i \in S$ eta $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$. Orduan, esaten dugu π bektorea banaketa egonkor bat dela hurrengo betetzen bada,

$$\pi Q = 0.$$

1.6 Ilaren teoria

Ilaren teoria, sistema baten barruan sortzen diren ilarak aztertzen dituen matematiketako atala da. Teoria honek aztertzen ditu, adibidez, ilara batean bataz besteko itxaron beharreko denbora edota sistema baten lan karga nolakoa izan daitekeen sistemaren kolapso bat eragin gabe. Guzti honek aplikazio garrantzitsuak ditu, adibidez, negozioetan, merkataritzan, industrian, garraiobideetan, logistikan edota telekomunikazioetan. Gure sistemara bezeroak iristen diren heinean ilara sortzen joango da, eta ondoren ilara hori kudeatzeko diziplina desberdinak erabili ditzakegu. Gure lanean bi diziplina desberdin alderatuko ditugu, *FIFO* eta *Processor Sharing* diziplinak, hain zuzen.

1.6.1 FIFO

First In, First Out diziplina ulertzea oso sinplea da. Gure sistemara bezeroak iristen joango dira eta iritsi diren ordena berean zerbitzatuko dira, horrela ilara bat sortuz. Hau da, lehenengo iritsi den bezeroa lehena izango da zerbitzua jasotzen, bigarren iritsi dena bigarrena eta horrela iritsiko diren guztietarako.

1.6.2 Processor Sharing

Diziplina honetan n bezero daudenean sisteman, guztiak aldi berean jasotzen dute zerbitzua, baina bakoitzak jasotzen duen zerbitzua n aldiz motelagoa da, hau da, zerbitzariak μ abiadura batekin zerbitzatzun baditu bezeroak, kasu honetan bakoitza $\frac{\mu}{n}$ abiadurarekin zerbitzatuko da. Beraz, ohartzen bagara, modu honetan ez da inolako ilararik sortzen.

1.6.3 Kendall-en notazioa

Ilarak eta beraien ezaugarriak deskribitzeko Kendall-en notazioa erabiltzen da. Hau hiru prametrodun notazio bat da **A/B/C**. Parametro bakoitzak orain ikusiko dugun esangura bat dauka.

- (i) **A**: Iritsieren arteko banaketa deskribatzen du. Honen barruan hiru kodigo existitzen dira.

- M: Markoviarra. Banaketa exponentzial baten arabekoak izango dira.
 - D: Determinista. Ez dute prozesu probabilitistiko bat jarraitzen determinatzeko orduan.
 - G: Banaketa orokorra. Ez dago zehaztuta ze probabilitate banaketa erabiliko den.
- (ii) **B**: Sistemak klienteak zerbitzatzeko jarraitzen duen probabilitate banaketa.
- (iii) **C**: Zerbitzari kopurua.

Gure lanean M/M/1 motako ilarekin egingo dugu lan, hau da, bezeroak λ parametroko Poisson prozesu bat jarraituz iritsiko dira, bezeroak zerbitzatzeko μ parametroko banaketa exponentzial bat erabiliko da eta soilik zerbitzari bat izango dugu.

2. Kapituluia

Informazioaren Antzinekotasunera eta SHS-ra sarrera

2.1 Informazioaren Antzinekotasuna

Azken urteotan garrantzi handia irabazten ari dira sistema ziberfisikoen aplikazioak. Sistema ziberfisiko bat zer den ondo ulertzeko jakin behar dugu izaera ezberdina duten hainbat sistemen batura bat dela, non beraien helburua prozesu fisiko bat kontrolatzea eta jasotako *feedback*-a kontutan izanik, autonomoki ingurune berrira adaptatzea den denbora errealean. Sistema hauen adibide dira, hala nola, ibilgailu autonomoak edota urruneko kirurgiatan momentuoro tresnen posizioa zehazteko sistemak (ikusi [2] beste aplikazio interesgarri batzuk ezagutzeko). Ulergarria den bezala, ezinbestekoa da *feedback* hori ahalik eta eguneratuena izatea. Kasu batzuetan milisegunduetako atzerapena gehiegizkoa izan daiteke.



2.1. Irudia. Paketeak jarraitzen duen prozesua

Sistema hauen sensoreek informazioa jasotzen dutenean pakete bat sortzen da. Pakete horretan bi objektu egongo dira, hain zuzen, ingurunearen informazioa eta informazio hori jaso den unea. Ondoren pakete hori telekomunikazio sare baten bidez bidaltzen da, eta azkenik, monitore batek jasoko

2.2 Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoaren kalkulua

Lan guztian zehar suposatuko dugu paketeen jaiotza unea eta sistemara iristen direneko unea berdina dela, baita paketea zerbitzatzen den unea eta monitorera iristen den unea berdina dela. Has gaitetzen definitzen sistemara iristen diren paketeen arteko denbora eta pakete batek sisteman igarotzen duen denbora.

2.2.1. definizioa. Izan bedi sistema ziberfisiko bat. Orduan, sistema horretara iristen diren paketeen arteko denbora horrela denotatzen dugu

$$Y_i = t_i - t_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

eta, pakete batek sisteman igarotzen duen denbora beste era honetan

$$T_i = t'_i - t_i \quad i = 1, 2, \dots$$

2.2.2. definizioa. Izan bedi sistema ziberfisiko bat. Orduan, $(0, T)$ tarte baterako sistemaren eguneraketa baten batzbestekoa hurrengo da

$$\Delta_T = \frac{1}{T} \int_0^T \Delta(t) dt$$

Integral hori $\Delta(t)$ azpiko azalera bezala kalkulatu daiteke. Orduan, eguneraketa baten batzbestekoa 2.2. irudian ikusi ditzakegun poligonoaren Q_1 azaleraren, trapezoide disjuntuen $Q_i \quad i = 2, 3, \dots, N(t)$ azaleren eta azkenengo triangeluaren \bar{Q} azaleraren batura bezala berridatzi dezakegu

$$\Delta_T = \frac{1}{T} (Q_1 + \bar{Q} + \sum_{i=2}^{N(t)} Q_i)$$

Defini dezagun $\Delta = \lim_{T \rightarrow \infty} \Delta_T$. Zenbaki handien lege indartsuagatik bada-kigu Δ Informazioaren Antzinekotasuna itxaropen matematikoaren berdina dela, hau da,

$$\Delta = E[\Delta(t)].$$

2.2.1. proposizioa. Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoa horrela kalkula daiteke

$$E[\Delta(t)] = \frac{E[YT] + \frac{E[Y^2]}{2}}{E[Y]}$$

Froga. Alde batetik, Δ_T horrela idatz dezakegu

$$\Delta_T = \frac{Q_1 + \bar{Q}}{T} + \frac{N(T) - 1}{T} \frac{1}{N(T) - 1} \sum_{i=2}^{N(t)} Q_i$$

Eta, badakigu [3]-tik $T \rightarrow \infty$ denean Δ_T -k Δ -ra jotzen duela. Hau da,

$$\begin{aligned} \Delta &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(Q_1 + \bar{Q} + \sum_{i=2}^{N(T)} Q_i \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Q_1 + \bar{Q}}{T} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(T) - 1}{T} \frac{1}{N(T) - 1} \sum_{i=2}^{N(T)} Q_i = 0 + \frac{E[Q]}{E[Y]} \end{aligned}$$

T hazten den heinean $\frac{Q_1 + \bar{Q}}{T}$ terminoak 0-rantz jotzen du. Gainera trapezoideen azalerak adieraz ditzakegu Y_i eta T_i -ren arabera era honeta

$$Q_i = \frac{1}{2}(T_i + Y_i)^2 - \frac{1}{2}T_i^2$$

Hori garatuz lortzen dugu

$$Q_i = Y_i T_i + \frac{Y_i^2}{2}.$$

Orduan, kontuan hartuz itxaropen matematikoak linealitatea mantentzen duela, Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena hurrengoa da

$$\Delta = \frac{E[Q]}{E[Y]} = \frac{E[YT] + \frac{E[Y^2]}{2}}{E[Y]}.$$

□

Lortutako emaitzak ahalbidetzen digu Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoa kalkulatzeko, baina horretarako $E[YT]$ kalkulatu behar genuke, eta hori egitea ez da batere erraza, Y eta T ez baitira zorizko aldagai askeak. Horregatik, pausu hori ekiditeko helburuarekin lan honetan itxaropen matematiko hori kalkulatzeko beste bide bat erabiliko dugu, hain zuzen ere *Stochastic Hybrid System* metodoa aztertuko dugu.

2.3 Stochastic Hybrid System

Stochastic hybrid system (SHS) bat edo euskaraz, sistema hibrido estokastiko bat, elementu diskretuak eta jarraituak konbinatzen dituen sistema bat da, beti ziurgabetasun bati lotuta. Beti izango dugu gutxienez aldagai diskretu bat denborarekiko diskretuki aldatzen doana eta baita izango dugu aldagai jarraitu bat denborarekiko jarraituki aldatzen doana.

Sistema bat SHS bezala modelizatzeko [1]-n jarraitzen den prozedura berbera jarraituko dugu. $(q(t), x(t))$ bikotea izango dugu, non $q(t)$ diskretua eta izango dugun Markov katearen egoera den eta $x(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ jarraitua den eta $n + 1$ prozesuen eboluzioa jarraitzen duen. Q Markov katearen egoeren multzoa da, $q \in Q$ bakoitza nodo bat eta l trantsizio bakoitza (q_l, q'_l)

nodoen arteko ertz bat izango da $\lambda^{(l)}$ tasarekin. l trantsizio bakoitzerako $A_l \in \{0, 1\}^{(n+1) \times (n+1)}$ matrize bat izango dugu, non $x(t)$ bektorea eguneratzeko erabili dezakegun hurrengo modu honetan

$$x' = xA_l.$$

Are gehiago, $q(t) = q$ egoera bakoitzerako x bektoreak hurrengo ekuazio diferentzial bezala eboluzionatzen du

$$\dot{x}(t) = b_q.$$

b_q horiek 0 eta 1-ekin osatutako $n + 1$ tamainako bektoreak izango dira, non 1 izango duten prozesuan garrantzitsuak izango diren eta unitate bateko abiadurarekin haziko diren $x(t)$ bektoreko osagaiak eta 0 izango duten q egoeran garrantzitsuak izango ez diren osagaiak, beraz ez ditugunak zertan kontrolatu behar.

Izan bedi \mathcal{L} trantsizio guztien multzoa. Definitzen ditugu $\mathcal{L}'_q = \{l \in \mathcal{L} : q'_l = q\}$ eta $\mathcal{L}_q = \{l \in \mathcal{L} : q_l = q\}$ nodoetara iristen diren eta nodoetatik irtetzen diren trantsizio bezala, hurrenez hurren.

Suposatu behar dugu Q Markov kate hau ergodikoa dela, orduan bana-keta egonkorren ondorengo bektore hau izango dugu, $\pi = [\pi_0, \dots, \pi_B]$ non $q \in Q$ bakoitzerako ondorengoa betetzen den

$$\pi_q \sum_{l \in \mathcal{L}_q} \lambda^{(l)} = \sum_{l \in \mathcal{L}'_q} \lambda^{(l)} \pi_{q_l}, \quad q \in Q \quad (2.1)$$

$$\sum_{q \in Q} \pi_q = 1. \quad (2.2)$$

2.3.1. teorema. Izan bedi Q Markov-en kate diskretua ergodikoa, π bana-keta egonkorrekin eta aurki daiteke soluzio ez-negatibo bat $v = [v_0, \dots, v_B]$ non $q \in Q$ guztietarako $v_q = [v_{q0}, \dots, v_{qB}]$ den eta hurrengoa betetzen den

$$v_q \sum_{l \in \mathcal{L}_q} \lambda^{(l)} = b_q \pi_q + \sum_{l \in \mathcal{L}'_q} \lambda^{(l)} v_{q_l} A_l, \quad q \in Q \quad (2.3)$$

orduan SHS bidez kalkulaturiko Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena ondorengoa izango da

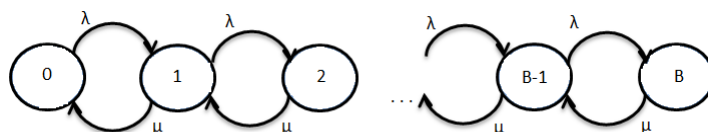
$$\Delta = \sum_{q \in Q} v_{q0}. \quad (2.4)$$

3. Kapituluia

FIFO diziplinaren analisia

Aurretik esanda dagoen bezala, lan honen helburua ilara bat kudeatzeko bi diziplina desberdin alderatzea da. Kapitulu honetan bi diziplina horietatik bat aurkeztuko dugu, hain zuzen *FIFO* diziplina (honen funtzionamendua gogoratzeko ikusi 1. kapituluko 1.6.1 atala) eta bere Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatu dugu SHS bidez. Horretarako 3.1. irudian ikusi dezakegun $Q = \{0, 1, 2, \dots, B\}$ Markov katea kontsideratu dugu. Lehenik $B = 2$ denean kalkulatu dugu, hau da, *Buffer* tamaina 2 denean, ondoren *Buffer* tamaina finitua denean, hau da, $Q = \{0, 1, 2, \dots, B\}$ kasu orokorra dugunean eta azkenik *Buffer* tamaina infinitua deneko kasuan.

Gogora dezagun gure sisteman M/M/1 motako ilara izango dugula, honen esan nahi du informazio paketeak Poisson prozesu bat jarraituz iritsiko direla, gure kasuan $\lambda > 0$ parametro bat jarraituz. Pakete horiei zerbitzua emateko denborak banaketa exponentziala jarraituko duela, gure kasuan $\mu > 0$ parametroduna eta zerbitzari bakar bat izango dugula. Beste hitz batzuekin esanda, 3.1. irudian ikusten den bezala, λ -rekin Q Markov katearen hurrengo nodora joko dugu, eta μ -rekin, aldiz, atzerantz.

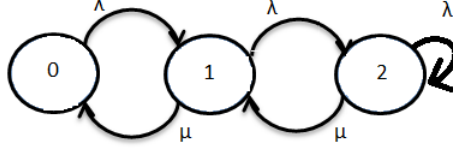


3.1. Irudia. SHS Markov katea egoera diskretuen trantsizioekin

3.1 B=2 kasua

Kasu honetan, $B=2$ dugunean, 3.2. irudian ikusten dugun $Q = \{0, 1, 2\}$ Markov katea kontsideratzen dugu. Kasu partikular honetan azken nodoan beste trantsizio bat gehitu dugu, trantsizio honen esangura zera da, sisteman

jadanik bi pakete daudenean, bat zerbitzarian eta bestea *buffer*-ean itxaroten, orduan sistemara pakete berri bat iristen bada, nahiz eta informazio eguneratuagoa eduki deskartatu egingo dugu.



3.2. Irudia. Buffer tamaina 2 deneko Markov katea

Aipatzekoa da $B = 2$ kasu honen Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena aurretik ezaguna dela, [4]-n kalkulatzeko baitute, baina ez SHS bidez. Eta guk hain zuzen, emaitza berbera lortuko dugu SHS erabiliz.

3.1.1. lema. $B=2$ kasuan banaketa egonkorak hurrengoak dira

$$\pi_0 = \frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}.$$

Froga. Banaketa egonkorak kalkulatzeko (2.1) eta (2.2) ekuazioak erabiliko ditugu. (2.1) ekuazioan $q = 0$ nodoarentzako hurrengoak dugu

$$\pi_0\lambda = \pi_1\mu \iff \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

eta, $q = 1$ nodoarentzat berdina eginez

$$\pi_1(\lambda + \mu) = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \iff \lambda\pi_1 = \mu\pi_2 \iff \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\pi_0$$

Orain, (2.2) ekuazioa erabiliz π_0 lortu dezakegu horrela

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \iff \pi_0\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) = 1 \iff \pi_0 = \frac{\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

$$\text{Beraz, } \pi_1 = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} \text{ eta } \pi_2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}. \quad \square$$

3.1.2. proposizioa. $B=2$ kasuan informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena hurrengoak da

$$\Delta_{FIFO,2} = \frac{3\lambda^4 + 5\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^3 + \mu^4}{\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}.$$

Froga. SHS aplikatzeko lehenengo trantsizioen taula osatuko dugu

l	$\lambda^{(l)}$	$q_l \longrightarrow q'_l$	$x \longrightarrow x'$	$v_{q_l} A_l$
0	λ	$0 \longrightarrow 1$	$[x_0, 0, 0] \longrightarrow [x_0, 0, 0]$	$[v_{00}, 0, 0]$
1	μ	$1 \longrightarrow 0$	$[x_0, x_1, 0] \longrightarrow [x_1, 0, 0]$	$[v_{11}, 0, 0]$
2	λ	$1 \longrightarrow 2$	$[x_0, x_1, 0] \longrightarrow [x_0, x_1, 0]$	$[v_{10}, v_{11}, 0]$
3	μ	$2 \longrightarrow 1$	$[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow [x_1, x_2, 0]$	$[v_{21}, v_{22}, 0]$
4	λ	$2 \longrightarrow 2$	$[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow [x_0, x_1, x_2]$	$[v_{20}, v_{21}, v_{22}]$

Taula azaltzeko,

- l: trantsizioak adierazten ditu
- $\lambda^{(l)}$: trantsizio horiei dagokien parametroa
- $q_l \longrightarrow q'_l$: zein nodotik zein nodotara doan trantsizioa
- $x \longrightarrow x'$: x bektoreak jasaten duen eraldaketa
- $v_{q_l} A_l$: v_{q_l} bektoreari $x' = x A_l$ betetzen duen A_l matrizea aplikatzea

Gogora dezagun x bektoreak prozesuen jarraipena egiten duela. x_0 -k adierazten du monitoreak jaso duen azken paketearen Informazioaren Antzinekotatasuna eta x_i -k adierazten du i paketearen Informazioaren Antzinekotatasuna, $i = 1, 2$. Beraz, x -ren eraldaketak azalduko ditugu

- **l=0**: Kasu honetan $x = [x_0, 0, 0]$ daukagu, hau da, oraindik ez da inolako paketerik iritsi sistemara beraz, monitoreko defektuzko x_0 daukagu eta $x_1 = x_2 = 0$. Gero, lehenengo paketea sartzen da sistemara eta aurretik suposatu dugun bezala instantaneoki sartzen da zerbitzarira, baina oraindik ez da zerbitzaritik irten. Beraz, $x'_0 = x_0$ izango da monitoreak ez duelako detektatu oraindik pakete berria eta $x'_1 = 0$ izango da sortu den unea eta zerbitzarira sartu den unea unera delako, hau da, ez du "bizirik" izan. Orduan, $x' = [x_0, 0, 0]$.
- **l=1**: Orain, $x = [x_0, x_1, 0]$ daukagu, hau da, zerbitzariak ez du bukatu oraindik 1 paketeari zerbitzua ematen, horregatik x_1 agertuko zaigu. Behin zerbitzariak 1 paketeari zerbitzua ematen bukatzen duenean pakete hori monitoreak detektatuko du eta sisteman jada ez dugu beste paketerik izango, beraz, $x'_0 = x_1$ izango da eta $x' = [x_1, 0, 0]$.
- **l=2**: Kasu honetan $x = [x_0, x_1, 0]$ dugu, hau da, 1 paketea dago zerbitzarian oraindik. Gero 1 paketeari zerbitzua ematen bukatu baino lehenago 2 paketea iritsiko da sistemara, baina lehen bezala oraindik ez du "bizirik" izan, beraz $x'_2 = 0$ orduan, $x' = [x_0, x_1, 0]$.
- **l=3**: Orain $x = [x_0, x_1, x_2]$ daukagu, hau da, bi paketeak daude sisteman, baina ondoren zerbitzariak 1 paketeari zerbitzua ematen bukatzen dio eta 2 paketea sartzen da zerbitzarian, horregatik $x' = [x_1, x_2, 0]$.

- **l=4:** Kasu honetan, sisteman jadanik bi paketeak dauzkagu, bat zerbitzarian eta bestea *buffer*-ean itxaroten, baina zerbitzarian dagoenari zerbitzua ematen bukatu baino lehenago beste pakete bat iristen da informazio eguneratuagoarekin, orduan iritsi berri den pakete hori deskartatua izango da.

Orduan, (2.3)-taz eta 3.1.1. leman kalkulatuako banaketa egonkorretaz baliatuz ondorengo ekuazio sistema planteatu dezakegu

$$\begin{aligned} [v_{00}, v_{01}, v_{02}]\lambda &= b_0\pi_0 + \mu[v_{11}, 0, 0] \\ [v_{10}, v_{11}, v_{12}](\lambda + \mu) &= b_1\pi_1 + \lambda[v_{00}, 0, 0] + \mu[v_{21}, v_{22}, 0] \\ [v_{20}, v_{21}, v_{22}](\lambda + \mu) &= b_2\pi_2 + \lambda[v_{10}, v_{11}, 0] + \lambda[v_{20}, v_{21}, v_{22}] \end{aligned}$$

Hasiera batean bederatzi ezezagun eta bederatzi ekuazioko sistema bat izango dugu, baina ohartzen bagara v_{01}, v_{02} eta v_{12} zuzenean 0 izango dira. Orduan, sei ezezagun eta sei ekuazioko sistema bat ebatzi behar dugu. Gainontzeko sistema guztia B.1 eranskinean dago ebatzita.

Hori egin ostean hurrengo lortzen dugu

$$\begin{aligned} v_{00} &= \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)} \\ v_{10} &= \frac{2\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)} \\ v_{20} &= \frac{3\lambda^3 + 3\lambda^2\mu + \lambda\mu^2}{\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)} \end{aligned}$$

Azkenik, (2.4) ekuaziotik badakigu nola kalkulatu informazioaren antzinekotatasunaren itxaropena

$$\Delta_{FIFO,2} = v_{00} + v_{10} + v_{20} = \frac{3\lambda^4 + 5\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^3 + \mu^4}{\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

□

3.2 B finitua den kasua

Momentuz *FIFO* diziplinaren $B = 2$ kasuko Informazioaren Antzinekotatasunaren itxaropen matematikoaren adierazpen zehatza kalkulatu dugu SHS bidez. Baina, benetan interesgarria izango dena da edozein B-rako adierazpena kalkulatzeko. Horretarako $Q = \{0, 1, 2, \dots, B\}$ Markov katea kontsideratuko dugu.

3.2.1. teorema. Iturri batek λ parametroko Poisson prozesu bati jarraituz eguneraketak bidaltzen dizkio zerbitzari bati eta hortik μ tasako banaketa exponentzial bati jarraituz zerbitzatzaren dira monitore batera *First in, First out* diziplina jarraituz. Izan bitez B *buffer* tamaina eta $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Orduan, Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoa ondorengoa da

$$\Delta_{FIFO,B} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{B-1} \frac{\lambda(\lambda+\mu)^{j-1}}{\mu^j}} \left[\frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda+\mu)^j}{\mu^{j+1}} \pi_k \right] + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^B (k+1) \pi_k$$

$$\text{non } \pi_k = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{B+1}} \right) \rho^k.$$

Teorema hau [1] artikuluan agertzen den *Theorem 2*-ren kasu partikular bat da. Bertan azaltzen da hainbat iturri desberdinetarako $\Delta_{FIFO,B}^i$ -ren kalkulua $i = 1, \dots, I$, I iturri kopurua izanik. Guk, aldiz, iturri bakarrerako frogatuko dugu.

Froga. Kalkulatu behar duguna $\Delta_{FIFO,B} = \sum_{q=0}^B v_{q0}$ da. Lehenik eta behin $\sum_{k=1}^B v_{k0}$ idatziko dugu $\pi_k, 0 \leq k \leq B$ banaketa egonkorren arabera. Horrek uzten gaitu v_{00} kalkulatzeko lanarekin, baina beranduago egingo dugu. [1] artikulutik ateratako 2.3.1 teorematik, $\lambda_{-i} = 0$ hartuta, badakigu hurrengo ekuazioak betetzen direla

$$(\lambda + \mu)v_{k,j} = \pi_k + \lambda v_{k-1,j} + \mu v_{k+1,j+1}, \quad 0 \leq j \leq k-1, 0 < k < B \quad (3.1)$$

$$\lambda v_{0,0} = \pi_0 + \mu v_{1,1}, \quad k = 0 \quad (3.2)$$

$$\mu v_{B,j} = \pi_B + \lambda v_{B-1,j}, \quad 0 \leq j \leq k-1, k = B \quad (3.3)$$

$$(\lambda + \mu)v_{k,k} = \pi_k + \mu v_{k+1,k+1}, \quad 1 \leq k < B \quad (3.4)$$

$$\mu v_{B,B} = \pi_B \quad (3.5)$$

Orduan, (3.1), (3.2) eta (3.3) ekuazioetatuz baliatuz eta $0 \leq k \leq B$ eta $j = 0$ -rako hurrengo ekuazioak idatzi ditzakegu

$$\lambda v_{0,0} = \pi_0 + \mu v_{1,1}$$

$$(\lambda + \mu)v_{1,0} = \pi_1 + \lambda v_{0,0} + \mu v_{2,1}$$

$$\vdots$$

$$(\lambda + \mu)v_{B-1,0} = \pi_{B-1} + \lambda v_{B-2,0} + \mu v_{B,1}$$

$$\mu v_{B,0} = \pi_B + \lambda v_{B-1,0}$$

Ekuazio horiek batzen baditugu hurrengo adierazpena dugu

$$\mu \sum_{k=1}^B v_{k,0} = \sum_{k=0}^B \pi_k + \mu \sum_{k=1}^B v_{k,1}$$

Eta hortik, μ bi aldeetan zatituz

$$\sum_{k=1}^B v_{k,0} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^B \pi_k + \sum_{k=1}^B v_{k,1}$$

Antzerako era batean idatzi ditzakegu $v_{k,1}$ -ri dagozkion ekuazioak, $1 \leq k \leq B$. Oraingoan, (3.4) ekuazioaz ere baliatuz.

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)v_{1,1} &= \pi_1 + \mu v_{2,2} \\ (\lambda + \mu)v_{2,1} &= \pi_2 + \lambda v_{1,1} + \mu v_{3,2} \\ &\vdots \\ \mu v_{B,1} &= \pi_B + \lambda v_{B-1,1} \end{aligned}$$

Berriz, ekuazio horiek guztiak batuz hurrengoa dugu

$$\sum_{k=1}^B v_{k,1} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^B \pi_k + \sum_{k=2}^B v_{k,2}$$

Prozesu hau errepikatuz lortuko ditugu $\sum_{k=2}^B v_{k,2}, \sum_{k=3}^B v_{k,3}, \dots, \sum_{k=B-1}^B v_{k,B-1}$. Azken hau, $\sum_{k=B-1}^B v_{k,B-1} = \frac{1}{\mu}(\pi_{B-1} + \pi_B) + v_{B,B}$ izango da eta (3.5)-etik badakigunez $v_{B,B} = \frac{\pi_B}{\mu}$ dela, orduan lortu dugu $\sum_{k=1}^B v_{k,0}$ -en adierazpena probabilitate banaketan menpe. Honako hau da,

$$\sum_{k=1}^B v_{k,0} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^B (k+1)\pi_k \quad (3.6)$$

Orain (3.2), (3.4) eta (3.5) ekuazioak kontuan hartuz, lehengo gauza berbera egingo dugu

$$\begin{aligned} \lambda v_{0,0} &= \pi_0 + \mu v_{1,1} \\ (\lambda + \mu)v_{1,1} &= \pi_1 + \mu v_{2,2} \\ (\lambda + \mu)v_{2,2} &= \pi_2 + \mu v_{3,3} \\ (\lambda + \mu)v_{3,3} &= \pi_3 + \mu v_{4,4} \\ &\vdots \\ (\lambda + \mu)v_{B-1,B-1} &= \pi_{B-1} + \mu v_{B,B} \\ \mu v_{B,B} &= \pi_B \end{aligned}$$

Guztiak batuz hurrengoa lortzen dugu

$$\lambda(v_{0,0} + v_{1,1} + v_{2,2} + \dots + v_{B-1,B-1}) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_B$$

Eta (2.2)-tik badakigu $\sum_{k=0}^B \pi_k = 1$ dela, orduan hurrengoak daukagu

$$\sum_{k=0}^{B-1} v_{k,k} = \frac{1}{\lambda} \quad (3.7)$$

$v_{0,0}$ kalkulatzeko, lehenik $v_{k,k}$ adieraziko dugu $v_{0,0}$ -ren menpe. Ondoren (3.7) berdintzan aplikatzeko eta horrela $v_{0,0}$ lortzeko.

(3.4) ekuaziotik badakigu $v_{k,k}$ horrela adierazi dezakegula

$$v_{k,k} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} v_{k-1,k-1} - \frac{\pi_{k-1}}{\mu}$$

Garatzen jarraituz,

$$\begin{aligned} v_{k,k} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} v_{k-1,k-1} - \frac{\pi_{k-1}}{\mu} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} v_{k-2,k-2} - \frac{\pi_{k-2}}{\mu} \right) - \frac{\pi_{k-1}}{\mu} = \dots \\ &\dots = \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right)^{k-1} v_{1,1} - \frac{(\lambda + \mu)^{k-2}}{\mu^{k-1}} \pi_1 - \frac{(\lambda + \mu)^{k-3}}{\mu^{k-3}} \pi_2 - \dots - \frac{\pi_{k-1}}{\mu} \end{aligned}$$

Horretaz gain, badakigu (3.2)-tik $v_{1,1} = \frac{\lambda}{\mu} v_{0,0} - \frac{\pi_0}{\mu}$. Orduan,

$$v_{k,k} = \frac{\lambda(\lambda + \mu)^{k-1}}{\mu^k} v_{0,0} - \sum_{j=1}^k \frac{(\lambda + \mu)^{j-1}}{\mu^j} \pi_{k-j}, \quad k = 1, \dots, B-1.$$

Berriz (3.7) ekuazioara bueltatuz ondorengoak dugu

$$v_{0,0} + v_{1,1} + \dots + v_{B-1,B-1} = \frac{1}{\lambda}$$

$v_{k,k}$ -ren adierazpena ordezkatzuz

$$v_{0,0} + \sum_{k=1}^{B-1} \left[\frac{\lambda(\lambda + \mu)^{k-1}}{\mu^k} v_{0,0} - \sum_{j=1}^k \frac{(\lambda + \mu)^{j-1}}{\mu^j} \pi_{k-j} \right] = \frac{1}{\lambda}$$

Batukari barruko terminoak garatuko ditugu $v_{0,0}$ askatzeko

$$\begin{aligned} k = 1 & \quad \frac{\lambda}{\mu} v_{0,0} - \frac{\pi_0}{\mu} \\ k = 2 & \quad \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{\mu^2} v_{0,0} - \frac{\pi_1}{\mu} - \frac{\lambda + \mu}{\mu^2} \pi_0 \\ k = 3 & \quad \frac{\lambda(\lambda + \mu)^2}{\mu^3} v_{0,0} - \frac{\pi_2}{\mu} - \frac{\lambda + \mu}{\mu^2} \pi_1 - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu^3} \pi_0 \\ & \quad \vdots \\ k = B-1 & \quad \frac{\lambda(\lambda + \mu)^{B-2}}{\mu^{B-1}} v_{0,0} - \frac{\pi_{B-2}}{\mu} - \dots - \frac{(\lambda + \mu)^{B-2}}{\mu^{B-1}} \pi_0 \end{aligned}$$

Beraz,

$$v_{0,0} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{\mu^2} + \dots + \frac{\lambda(\lambda + \mu)^{B-2}}{\mu^{B-1}} \right) - \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda + \mu)^j}{\mu^{j+1}} \pi_k = \frac{1}{\lambda}$$

Hortik $v_{0,0}$ askatu dezakegu eta ondorengo izango da

$$v_{0,0} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{B-1} \frac{\lambda(\lambda + \mu)^{j-1}}{\mu^j}} \left[\frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda + \mu)^j}{\mu^{j+1}} \pi_k \right]$$

Beraz, jadanik guztia daukagu $\Delta_{FIFO,B}$ kalkulatzeko

$$\begin{aligned} \Delta_{FIFO,B} = v_{0,0} + \sum_{k=1}^B v_{k,0} &= \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{B-1} \frac{\lambda(\lambda + \mu)^{j-1}}{\mu^j}} \left[\frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda + \mu)^j}{\mu^{j+1}} \pi_k \right] \\ &+ \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^B (k+1) \pi_k \end{aligned}$$

□

3.3 $B \rightarrow \infty$ kasua

Jadanik kalkulatu dugu edozein *buffer* tamainarako Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoa. Orain, $B \rightarrow \infty$ deneko adierazpena lortuko dugu. Horretarako B finitua den kasuetan ez ezik, orain $\lambda < \mu$ zehaztu beharko dugu, egonkortasun arazorik ez izateko.

3.3.1. teorema. Iturri batek λ tasako Poisson prozesu bati jarraituz eguneraketak bidaltzen dizkio zerbitzari bati eta hortik μ tasako banaketa exponentzial bati jarraituz zerbitzatzaren dira monitore batera *First in, First out* diziplina jarraituz. Izan bitez B *buffer* tamaina, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ eta

$$\Delta_{FIFO,B} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{B-1} \frac{\lambda(\lambda + \mu)^{j-1}}{\mu^j}} \left[\frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda + \mu)^j}{\mu^{j+1}} \pi_k \right] + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^B (k+1) \pi_k$$

bere Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoa non

$$\pi_k = \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho^{B+1}} \right) \rho^k$$

den. Orduan, horretaz gain, zehazten badugu $\lambda < \mu$ ($\rho < 1$) hurrengo adierazpena daukagu

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \Delta_{FIFO,B} = \frac{1 - \rho^2}{\mu \rho} + \frac{1 - \rho}{\mu(\rho - 1)^2}.$$

Froga. Bi zatitan banatuko dugu, lehenik $v_{0,0}$ -ren limitea kalkulatu dugu eta ondoren $\sum_{k=1}^B v_{k,0}$ -rena.

$$v_{0,0} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{B-1} \frac{\lambda(\lambda+\mu)^{j-1}}{\mu^j}} \left[\frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda+\mu)^j}{\mu^{j+1}} \pi_k \right]$$

$v_{0,0}$ -ren limitea kalkulatu aurretik, bertan agertzen diren batukariak kalkulatu ditugu. Alde batetik,

$$1 + \sum_{j=1}^{B-1} \frac{\lambda(\lambda+\mu)^{j-1}}{\mu^j} = 1 + \sum_{j=1}^{B-1} \rho(\rho+1)^{j-1} = 1 + \left(-\frac{-(\rho+1)^B + (\rho+1)}{\rho+1} \right) = (\rho+1)^{B-1}$$

Bestetik,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda+\mu)^j}{\mu^{j+1}} \pi_k &= \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(\lambda+\mu)^j}{\mu^{j+1}} \frac{(1-\rho)\rho^k}{(1-\rho^{B+1})} \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{B-2} \sum_{j=0}^{B-2-k} \frac{(1+\rho)^j (1-\rho)\rho^k}{(1-\rho^{B+1})} = \frac{(1-\rho)}{\mu(1-\rho^{B+1})} \sum_{k=0}^{B-2} \rho^k \sum_{j=0}^{B-2-k} (1+\rho)^j = \\ &= \frac{(1-\rho)}{\mu(1-\rho^{B+1})} \sum_{k=0}^{B-2} \frac{(\rho+1)^{B-k-1} - 1}{\rho} = \frac{(1-\rho)}{\mu(1-\rho^{B+1})\rho} \left(\sum_{k=0}^{B-2} \rho^k (\rho+1)^{B-k-1} - \sum_{k=0}^{B-2} \rho^k \right) \\ &= \frac{(1-\rho)}{\mu(1-\rho^{B+1})\rho} \left(-\rho^{B-1}(1+\rho) + (\rho+1)^B - \frac{\rho-\rho^B}{\rho-\rho^2} \right) \end{aligned}$$

Orduan, daukagu

$$v_{0,0} = \frac{1}{(\rho+1)^{B-1}} \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{(1-\rho)}{\mu(1-\rho^{B+1})\rho} \left(-\rho^{B-1}(1+\rho) + (\rho+1)^B - \frac{\rho-\rho^B}{\rho-\rho^2} \right) \right]$$

Beraz,

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow \infty} v_{0,0} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{(\rho+1)^{B-1}\lambda} - \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{\rho^{B-1}(1-\rho^2)}{\mu\rho(\rho+1)^{B-1}(1-\rho^{B+1})} \\ &+ \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{(1-\rho)(1+\rho)}{\mu\rho(1-\rho^{B+1})} - \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1-\rho^{B-1}}{\mu\rho(\rho+1)^{B-1}(1-\rho^{B+1})} = \\ &0 - 0 + \frac{1-\rho^2}{\mu\rho} - 0 = \frac{1-\rho^2}{\mu\rho}. \end{aligned}$$

Orain $\sum_{k=1}^B v_{k,0}$ -ren limitea kalkulatu dugu

$$\sum_{k=1}^B v_{k,0} = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^B (k+1)\pi_k$$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^B (k+1)\pi_k = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\pi_k = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k + \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \right)$$

Gogoratu $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$ eta $\pi_k = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{B+1}}$ direla. Orduan, $B \rightarrow \infty$ egiten dugunean $\pi_k = (1-\rho)\rho^k$

$$\frac{1}{\mu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k + 1 \right) = \frac{1}{\mu} \left((1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k + 1 \right) = \frac{1}{\mu} \left((1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k + 1 \right)$$

$0 < \lambda < \mu$ denez, $|\rho| < 1$ da. Orduan batukari hori konbergentea da. Beraz,

$$= \frac{1}{\mu} \left((1-\rho) \frac{\rho}{(\rho-1)^2} + 1 \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\rho(1-\rho) + \rho^2 - 2\rho + 1}{(\rho-1)^2} = \frac{1-\rho}{\mu(\rho-1)^2}.$$

Azkenik,

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \Delta_{FIFO,B} = \lim_{B \rightarrow \infty} v_{0,0} + \lim_{B \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^B v_{k,0}$$

denez hurrengoa dugu

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \Delta_{FIFO,B} = \frac{1-\rho^2}{\mu\rho} + \frac{1-\rho}{\mu(\rho-1)^2}.$$

□

4. Kapituluia

Processor Sharing diziplinaren analisia

Kapitulu honetan, aurreko testuinguru berbera izango dugu, hau da, M/M/1 motako ilara bat izango dugu, baina oraingo honetan beste diziplina bat aztertuko dugu ilara hori kudeatzeko. *Processor Sharing* diziplina aztertuko dugu. Honen funtzionamendua gogoratzeko ikusi 1. kapituluko 1.6.2 atala. Berriz, 3. kapituluan ikusitako egoera berberetan Informazioaren Antzinekotasunaren itzaropena kalkulatzeko saiatuko gara, hau da, $B = 2$ denean, B orokor bat dugunean eta $B \rightarrow \infty$ denean.

4.1 B=2 kasua

Kasu honetan *Buffer* tamaina 2 izango da, beraz, $Q = \{0, 1, 2\}$ Markov katea izango dugu.

4.1.1. lema. *Processor Sharing* diziplinaren kasuan B=2 denean lortzen den Informazioaren Antzinekotasunaren itzaropen matematikoa hurrengoa da

$$\Delta_{PS,2} = \frac{5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4}{2\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}.$$

Froga. Kasu honetan, 3.2. irudian agertzen den Markov kate bebera izango dugu, eta banaketa egonkorak 3.1.1. leman kalkulatuak izango dira. Benetan aldatuko den gauza bakarra SHS taulan x bektorearen eboluzioa izango da eta horren ondorioz $v_q A_l$ bektoreak ere bai.

1	$\lambda^{(l)}$	$q \longrightarrow q'$	$x \longrightarrow x'$	$v_{ql}A_l$
0	λ	$0 \longrightarrow 1$	$[x_0, 0, 0] \longrightarrow [x_0, 0, 0]$	$[v_{00}, 0, 0]$
1	μ	$1 \longrightarrow 0$	$[x_0, x_1, 0] \longrightarrow [x_1, 0, 0]$	$[v_{11}, 0, 0]$
2	λ	$1 \longrightarrow 2$	$[x_0, x_1, 0] \longrightarrow [x_0, x_1, 0]$	$[v_{10}, v_{11}, 0]$
3	$\frac{\mu}{2}$	$2 \longrightarrow 1$	$[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow [x_1, x_2, 0]$	$[v_{21}, v_{22}, 0]$
3'	$\frac{\mu}{2}$	$2 \longrightarrow 1$	$[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow [x_2, x_2, 0]$	$[v_{22}, v_{22}, 0]$
4	λ	$2 \longrightarrow 2$	$[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow [x_0, x_1, x_2]$	$[v_{20}, v_{21}, v_{22}]$

Taula hau azaltzeko, nahikoa dugu $\mathbf{l=3}$ eta $\mathbf{l=3'}$ trantsizioak azaltzea, gaintzekoek 3. kapituluaz azaldutako esanahi berbera baitute.

Gogora dezagun, *Processor Sharing* diziplinarekin, sisteman bi pakete daudenean, biek aldi berean jasotzen dutela zerbitzua, hau da, ez dago ilarririk. Baina, jasotzen duten zerbitzua bi aldiz motelagoa da. Horregatik, trantsizioa horien parametroa $\frac{\mu}{2}$ dugu.

x bektorearen eraldaketa azaltzeko, demagun 1 eta 2 paketeak ditugula zerbitzarian, esan bezala, biek aldi berean jasoko dute zerbitzua, baina 1 paketeak 2-k baino informazio zaharragoa dauka eta ez dakigu bietako zeinek bukatuko duen lehenago. Orduan, $\mathbf{l=3}$ trantsizioak kontuan hartzen du 1 paketeak lehenago bukatzen bada, ondoren 2 paketea zerbitzatu behar dela, baina aldiz, $\mathbf{l=3'}$ -k kontuan hartzen du, 2 paketea 1 baino lehenago zerbitzatu bada, ondoren ez dela beharrezkoa 1 paketea zerbitzatzea, ez baitu zentzurik, 2 paketeak informazio eguneratuagoa badauka. Beraz, x' -n x_2 elementu "imaginari" bat sartzen dugu hori adierazteko.

Frogapenarekin jarraituz, ekuazio sistema 3. kapituluaz bezala planteatuz, ondorengo izango dugu

$$\begin{aligned}
[v_{00}, v_{01}, v_{02}]\lambda &= b_0\pi_0 + \mu[v_{11}, 0, 0] \\
[v_{10}, v_{11}, v_{12}](\lambda + \mu) &= b_1\pi_1 + \lambda[v_{00}, 0, 0] + \frac{\mu}{2}[v_{21}, v_{22}, 0] + \frac{\mu}{2}[v_{22}, v_{22}, 0] \\
[v_{20}, v_{21}, v_{22}](\lambda + \mu) &= b_2\pi_2 + \lambda[v_{10}, v_{11}, 0] + \lambda[v_{20}, v_{21}, v_{22}]
\end{aligned}$$

Lehen bezala bederatzi ezezagun eta bederatzi ekuazioko sistema bat izango dugu, baina berriz v_{01}, v_{02} eta v_{12} 0 izango dira. Beraz, nahikoa da sei ekuazioko sistema ebatzea. Sistema B.2 eranskinean dago ebatzita. Orduan ondoko ekuazioak lortzen ditugu

$$\begin{aligned}
v_{00} &= \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)} \\
v_{10} &= \frac{3\lambda^2 + 2\mu^2 + 4\lambda\mu}{2(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)} \\
v_{20} &= \frac{5\lambda^3 + 6\lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2}{2\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}
\end{aligned}$$

Informazioaren Antzinekotasunaren itzaropen matematikoa kalkulatu

$$\Delta_{PS,2} = v_{00} + v_{10} + v_{20} = \frac{5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4}{2\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

□

4.2 B finitua den kasua

Lan honen benetako helburua lortzeko beharrezko da B finitua denean *Processor Sharing* diziplinaren Informazioaren Antzinekotasunaren itzaropen matematikoa kalkulatzeko analitikoki, hau da, $\Delta_{PS,B}$ kalkulatzeko. Baina, nahiz eta lan honen jardunean hori egiten saiatu garen, adierazpen hori lortzea ez da batere erraza eta azkenean ezin izan dugu lortu. Hala ere, kapitulu honetako atal honetan B finitu baterako izango dugun SHS taula aurkeztuko dugu eta hortik lortzen ditugun *Processor Sharing* diziplinaren ekuazio orokorrak.

Kontsidera dezagun $Q = \{0, 1, 2, \dots, B\}$ Markov katea. Orduan, hurrengo SHS taula izango dugu

1	$\lambda^{(l)}$	$q \rightarrow q'$	x'	$v_{ql}A_l$
0	λ	$0 \rightarrow 1$	$[x_0, 0, \dots, 0]$	$[v_{00}, 0, \dots, 0]$
1	μ	$1 \rightarrow 0$	$[x_1, 0, \dots, 0]$	$[v_{11}, 0, \dots, 0]$
2	λ	$1 \rightarrow 2$	$[x_0, x_1, 0, \dots, 0]$	$[v_{10}, v_{11}, 0, \dots, 0]$
3	$\frac{\mu}{2}$	$2 \rightarrow 1$	$[x_1, x_2, 0, \dots, 0]$	$[v_{21}, v_{22}, 0, \dots, 0]$
3'	$\frac{\mu}{2}$	$2 \rightarrow 1$	$[x_2, x_2, 0, \dots, 0]$	$[v_{22}, v_{22}, 0, \dots, 0]$
4	λ	$2 \rightarrow 2$	$[x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0]$	$[v_{20}, v_{21}, v_{22}, 0, \dots, 0]$
5	$\frac{\mu}{3}$	$3 \rightarrow 2$	$[x_1, x_2, x_3, 0, \dots, 0]$	$[v_{31}, v_{32}, v_{33}, 0, \dots, 0]$
5'	$\frac{\mu}{3}$	$3 \rightarrow 2$	$[x_2, x_2, x_3, 0, \dots, 0]$	$[v_{32}, v_{32}, v_{33}, 0, \dots, 0]$
5''	$\frac{\mu}{3}$	$3 \rightarrow 2$	$[x_3, x_3, x_3, 0, \dots, 0]$	$[v_{33}, v_{33}, v_{33}, 0, \dots, 0]$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2B-1	$\frac{\mu}{B}$	$B \rightarrow B-1$	$[x_1, x_2, \dots, x_B, 0]$	$[v_{B1}, v_{B2}, v_{B3}, \dots, v_{BB}, 0]$
(2B-1)'	$\frac{\mu}{B}$	$B \rightarrow B-1$	$[x_2, x_2, x_3, \dots, x_B, 0]$	$[v_{B2}, v_{B2}, v_{B3}, \dots, v_{BB}, 0]$
(2B-1)''	$\frac{\mu}{B}$	$B \rightarrow B-1$	$[x_3, x_3, x_3, x_4, \dots, x_B, 0]$	$[v_{B3}, v_{B3}, v_{B3}, v_{B4}, \dots, v_{BB}, 0]$
\vdots				
(2B-1)'''	$\frac{\mu}{B}$	$B \rightarrow B-1$	$[x_B, x_B, x_B, \dots, x_B, 0]$	$[v_{BB}, v_{BB}, v_{BB}, \dots, v_{BB}, 0]$
2B	λ	$B \rightarrow B$	$[x_0, x_1, x_2, \dots, x_B]$	$[v_{B0}, v_{B1}, v_{B2}, \dots, v_{BB}]$

Taula honetatik lortzen ditugu hurrengo ekuazioak

$$\begin{aligned}\lambda v_{00} &= \pi_0 + \mu v_{11} \\ (\lambda + \mu)v_{k,0} &= \pi_k + \lambda v_{k-1,0} + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\mu}{k+1} v_{k+1,i}, \quad 1 \leq k < B \\ (\lambda + \mu)v_{k,k} &= \pi_k + \mu v_{k+1,k+1}, \quad 1 \leq k < B \\ (\lambda + \mu)v_{k,j} &= \pi_k + \lambda v_{k-1,j} + \frac{(j+1)\mu}{k+1} v_{k+1,j+1} + \sum_{i=j+2}^{k+1} \frac{\mu}{k+1} v_{k+1,i}, \quad 1 < k < B, 1 \leq j < k \\ \mu v_{B,j} &= \pi_B + \lambda v_{B-1,j} \\ \mu v_{B,B} &= \pi_B\end{aligned}$$

Ekuazio horiek manipulaturaz $\Delta_{PS,B} = \sum_{k=0}^B v_{k,0}$ kalkulatu beharko genuke. $v_{0,0}$ kalkulatzeko ez da zaila, 3.2.1. teoremako frogapeneko pausu berberak jarrai ditzakegu eta v_{00} -ren adierazpen berdina lortuko genuke. Baina, $\sum_{k=1}^B v_{k,0}$ -ren kalkulua zailagoa da eta ez dugu lortu.

Edozein B finiturako ez dugunez Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatu, logikoki ezin izan dugu $B \rightarrow \infty$ kasua aztertu.

Hala ere, ez dugu lana hemen utzi. Matlab erabiliz, edozein B , λ eta μ -rako *Processor Sharing* diziplina erabiliz, Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena numerikoki kalkulatzeko funtzio bat idatzi dugu. Kodigoa A.2 eranskinean dago ikusgai. Honek ahalbidetuko digu, $B > 2$ denean *FI-FO* eta *Processor Sharing* alderatzea. Horrela, behintzat B batzuetarako lanean planteatzen genuen galdera erantzun ahal izango dugu eta esan bietako zein den hobea, hau da, bietako zeinek duen Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematiko txikiagoa. Hurrengo kapituluan alderatuko ditugu *buffer* tamaina desberdinetarako bi diziplinak.

5. Kapituluia

Bi diziplinen alderaketa

Kapitulu honetan bi diziplinak alderatuko ditugu eta lanaren hasieran planteaturiko galderei erantzuna emango diegu konklusioak ateraz. Lehenik $B = 2$ kasuan eta ondoren B konkretu batzuetarako.

5.1 $B = 2$ kasua

Kasu honetan bai $\Delta_{FIFO,2}$ bai $\Delta_{PS,2}$ analitikoki kalkulatzeko gai izan gara. Beraz, ez dugu arazorik izango alderatzeko.

5.1.1. korolarioa. $B=2$ denean *Processor Sharing* teknikaren Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoa *FIFO*-rena baino txikiagoa da.

Froga. Absurdura eramanez, demagun $\Delta_{FIFO,2} < \Delta_{PS,2}$ dela. Orduan,

$$\frac{3\lambda^4 + 5\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^3 + \mu^4}{\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)} < \frac{5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4}{2\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Hortik, izendatzaileak sinplifikatuz ondorengo adierazpena lortzen dugu

$$6\lambda^4 + 10\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4 < 5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4$$

Eta hau oraindik gehiago sinplifikatuz

$$\lambda^4 + \lambda^3\mu < 0$$

Baina, gogoratu behar dugu λ eta μ positiboak direla. Beraz, hori absurdu bat da eta $\Delta_{PS,2} < \Delta_{FIFO,2}$ da. □

Orain arte ikusi dugu *Processor Sharing FIFO* baino hobea dela *buffer* tamaina 2 denean, baina gustatuko litzaiguke ikustea zenbat hobeagoa den, hau da, beraien arteko ratioa kalkulatzeko eta horretaz gain, ikustea ea ratio hori gorakorra den ala ez paketeen iriste parametroarekiko, hau da, λ -rekiko.

5.1.2. korolaria. $\frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}}$ zatiketarako beti 1.2-ra joko du $\lambda \rightarrow \infty$ denean.

Froga.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}} = 2 \frac{3\lambda^4 + 5\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^3 + \mu^4}{5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4} = \frac{6}{5} = 1.2$$

□

Horretaz gain, azter dezagun duen jarrera gorakorra.

5.1.3. korolaria. $\frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}}$ ratioa gorakorra da beti λ tasaren arabera.

Froga.

$$\frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}} = 2 \frac{3\lambda^4 + 5\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^3 + \mu^4}{5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4}$$

Hori deribatu dezakegu λ -rekiko eta ikusi ea deribatua positiboa den frogatzeko gorakorra dela. Deribatzerakoan 2 biderkatzen dagoen konstantea ahaztu dezakegu, ez baitu inolako eraginik izango deribatuaren zeinuan.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}}\right)' &= \frac{12\lambda^3 + 15\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 3\mu^3}{5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4} \\ &\quad - \frac{(20\lambda^3 + 27\lambda^2\mu + 16\lambda\mu^2 + 6\mu^3)(3\lambda^4 + 5\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^3 + \mu^4)}{(5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4)^2} \end{aligned}$$

Absurdura eramanez, demagun deribatua negatiboa dela. Orduan, hurrengoak daukagu

$$\begin{aligned} &(12\lambda^3 + 15\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 3\mu^3)(5\lambda^4 + 9\lambda^3\mu + 8\lambda^2\mu^2 + 6\lambda\mu^3 + 2\mu^4) \\ &< (20\lambda^3 + 27\lambda^2\mu + 16\lambda\mu^2 + 6\mu^3)(3\lambda^4 + 5\lambda^3\mu + 4\lambda^2\mu^2 + 3\lambda\mu^3 + \mu^4) \end{aligned}$$

Hori garatuz eta sinplifikatuz hurrengoak dugu

$$2\lambda^6\mu + 8\lambda^5\mu^2 + 12\lambda^4\mu^3 + 10\lambda^3\mu^4 + 3\lambda^2\mu^5 < 0$$

Baina, λ eta μ positiboak direnez hori ezinezkoa da. Beraz,

$$\left(\frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}}\right)' > 0.$$

□

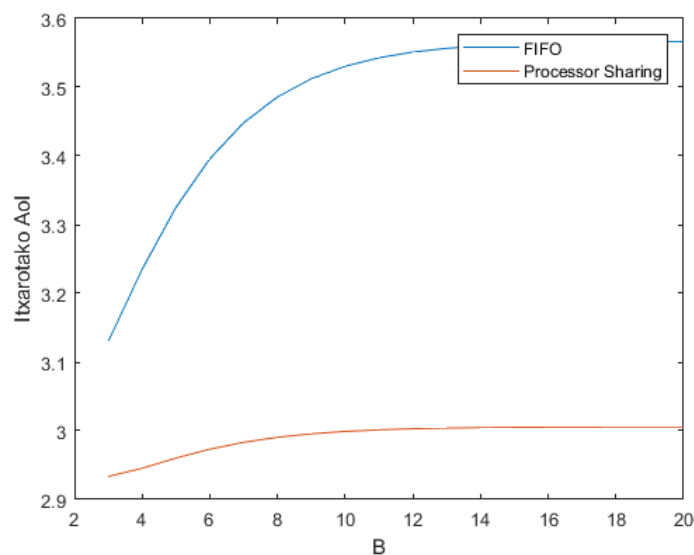
5.1.1, 5.1.2 eta 5.1.3 korolarioetatik beste ondorio bat atera dezakegu oraindik.

5.1.4. korolarioa. Jakinda $\frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}}$ gorakorra dela beti λ -ren arabera, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}} = 1.2$ dela eta $\Delta_{PS,2} < \Delta_{FIFO,2}$ dela, ondorioztatu dezakegu $1 < \frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}} \leq 1.2$ izango dela.

Beraz, B=2-rako frogatu dugu *Processor Sharing* diziplina eraginkorra goa dela M/M/1 motako ilarak kudeatzeko eta baita ikusi dugu zenbat ho-beagoa den.

5.2 B finitua den kasua

Aurreko kapituluaren esan bezala, ezin izan dugu *Processor Sharing* diziplinaren Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatu analitikoki. Beraz, ezin izango ditugu 5.1 atalean B=2-rekin egin ditugun konparaketa berdinak egin. Horren ordean, A.1 eta A.2 eranskinetan erakusten diren kodi-goetaz baliatuko gara, kodigo horiek numerikoki kalkulatu dezakete $\Delta_{FIFO,B}$ eta $\Delta_{PS,B}$, hurrenez hurren.



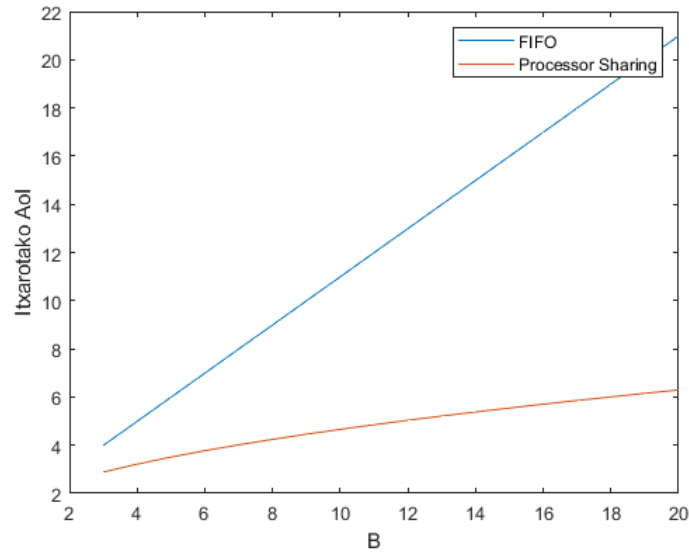
5.1. Irudia. B=20-rarte Informazioaren itxaropenaren alderaketa, $\lambda = 0,6$ eta $\mu = 1$ izanik

Konparaketa egiteko $B = \{3, \dots, 20\}$ hartzen dugu eta $\lambda = 0,6$ eta $\mu = 1$. Goiko 5.1. irudian ikusi dezakegu B guztietarako $\Delta_{PS,B} < \Delta_{FIFO,B}$

betetzen dela. Beraz, frogatu dugu behintzat $B=20$ -rarte *Processor Sharing* diziplina eraginkorragoa dela.

Aipatzekoa da A.1 eta A.2 eranskinetako kodigoen konplexutasuna nahiko handia dela eta ordenagailu potenteago batekin 20 baino B handiagoetarako egin ahal izango zela alderaketa.

Orain, ikusi dezagun λ gero eta handiagoa izanik ea bi diziplinen Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropenaren arteko aldea handiagoa den.



5.2. Irudia. $B=20$ -rarte Informazioaren itxaropenaren alderaketa, $\lambda = 100$ eta $\mu = 1$ izanik

5.2. irudia begiratzuz desberdintasun handia ikusten dugu.

$\lambda = 0,6$ den kasuan, $\Delta_{PS,20} = 3,006$ eta $\Delta_{FIFO,20} = 3,57$ ditugu. Aldiz, $\lambda = 100$ den kasuan $\Delta_{PS,20} = 6,29$ eta $\Delta_{FIFO,20} = 20,99$ ditugu.

Beraz, ondoriozta dezakegu λ geroz eta handiagoa den heinean alde handiagoa egongo dela $\Delta_{PS,B}$ eta $\Delta_{FIFO,B}$ -ren artean.

Baita, 5.1. eta 5.2. irudietaz baliatuz ondoriozta dezakegu, B gero eta handiagoa den heinean alde handiagoa egongo dela $\Delta_{PS,B}$ eta $\Delta_{FIFO,B}$ -ren artean.

6. Kapitulu

Ondorioak eta etorkizuneko lana

Kapitulu hau lana laburbiltzeko eta ateratako ondorioak leku bakar batean biltzeko erabiliko dugu.

Hasieratik gure helburua lanean zehar landutako bi diziplinak alderatzea izan da, ikusteko bietatik zein den eraginkorragoa. Horretarako beraien Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropen matematikoaz baliatu gara eta hori kalkulatzeko SHS metodoa erabiltzea erabaki dugu.

Lehenik $B=2$ kasua aztertzea erabaki dugu, hau da, kasu simpleena. Horrela SHS metodoko ekuazioak eskuz ebatzi ahal izan ditugu eta bi diziplinen Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropenaren adierazpen zehatza lortu dugu. Hau egin ostean ikusi dugu, edozein λ eta μ -rako, *Processor Sharing* diziplina eraginkorragoa dela, baina ez hori bakarrik, baita ikusi dugu beraien arteko ratioa, hau da, $\frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}}$ zatiketa beti gorakorra dela λ -ren arabera eta $\lambda \rightarrow \infty$ denean 1.2-ra jotzen duela. Beraz, ondorioztatu dezakegu $1 < \frac{\Delta_{FIFO,2}}{\Delta_{PS,2}} \leq 1.2$.

Ondoren, gure itxaropena edozein B -rako Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropenaren adierazpena kalkulatzeko zen bi diziplinentzat, eta gero $B = 2$ kasuan egin ditugun alderaketa berdina egitea. Baina, nahiz eta *FIFO*-rako bai lortu dugun hori kalkulatzeko *Processor Sharing*-erako ez dugu lortu. Beraz, alderaketa egiteko matlab-en idatzitako kodigoetatik baliatu gara, horrela $B > 2$ batzuetarako eta λ eta μ batzuetarako alderatu ahal izan ditugu behintzat. Hori eginez, ikusi dugu $B = \{3, \dots, 20\}$ denean, $\lambda = 0.6, 100$ direnean eta $\mu = 1$ denean *Processor Sharing* eraginkorragoa dela. Baita apreziatu dezakegu gero eta B eta λ handiagoak hartu orduan eta ratio handiagoa izango dutela.

Azkenik, $B \rightarrow \infty$ denean, *FIFO*-ren kasuan, adierazpen zehatza kalkulatu dugu, baina *Processor Sharing*-erako edozein B -rako ezin izan dugunez adierazpena kalkulatu, ezin izan dugu $B \rightarrow \infty$ aztertu. Beraz, kasu honetan ezin izan dugu ondorioz atera.

Horrela, laburpen honekin eta ondorio hauekin lana bukatutzat ematen dugu eta zabalik uzten dugu etorkizunean gure susmoa frogatua izateko, hau da, edozein B-rako *Processor Sharing* diziplinaren Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena txikiagoa dela *FIFO*-rena baino eta baita $B \rightarrow \infty$ deneko kasuan ere.

A. Eranskina

Lanean zehar erabilitako matlabeko kodigoak

A.1 FIFOraiko edozein B , λ eta μ -rako Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatzeko funtzioa

```
1
2 function [Itxaropena_AoI]=MarcovChain(B,a,m)
3 C=sym(zeros(2*B+1,B+1));
4 V=sym('v',[B+1,B+1]);
5
6 %C matrizea sortzen
7 C(1,1)=V(1,1); C(2,1)=V(2,2);
8 %Errenkada bikoitiak sortzen
9 batura=1;
10 for i=4:2:2*B
11     C(i,1:i/2)=V(batura+2,2:batura+2);
12     batura=batura+1;
13 end
14 %Errenkada bakoitiak sortzen
15 suma=2;
16 for i=3:2:2*B+1
17     C(i,1:suma)=V(suma,1:suma);
18     suma=suma+1;
19 end
20
21 %Ekuazio sistemako eskuineko aldeko matrizea sortzen
22 K=sym(zeros(B+1,B+1));
23 K(1,1:B+1)=m*C(2,1:B+1);
```

```

24 batura2=1;
25 for i=1:B-1
26     K(i+1,1:B+1)=a*C(batura2,1:B+1)+m*C(batura2+3,1:B+1);
27     batura2=batura2+2;
28 end
29 K(B+1,1:B+1)=a*C(2*B-1,1:B+1)+a*C(2*B+1,1:B+1);
30
31 [Pi]=Banaketak(B,a,m);
32 Pisuak=zeros(B+1,B+1);
33 for i=1:B+1
34     for j=1:i
35         Pisuak(i,j)=1;
36     end
37 end
38 EskuinekoMat=Pisuak.*Pi+K;
39 %Ekuazio sistemako ezkerreko aldeko matrizea sortzen
40 t=zeros(B+1,1);
41 t(1)=a;
42 for i=2:B+1
43     t(i)=a+m;
44 end
45 EzkerrekoMat=V.*t;
46
47 %Ekuazio sistema ebazten
48 kontatzaile=1;
49 for i=1:B+1
50     for j=1:B+1
51         eqns(kontatzaile)=[EzkerrekoMat(i,j)==EskuinekoMat(i,j)];
52         kontatzaile=kontatzaile+1;
53     end
54 end
55 Aldagaiak=solve(eqns,V);
56
57 %Age of Informationaren itxaropen matematikoa kalkulatzeko
58 fns=fieldnames(Aldagaiak);
59 Itxaropena_AoI=0;
60 for i=1:B+1
61     Itxaropena_AoI=Itxaropena_AoI+Aldagaiak.(fns{i});
62 end
63 Itxaropena_AoI=vpa(Itxaropena_AoI);
64
65 end

```

A.2 Processor Sharing-erako edozein B , λ eta μ -rako Informazioaren Antzinekotasunaren itxaropena kalkulatzeko funtzioa

```

1 function [Itxaropena_AoI]=ProcessorSharing(B,a,m)
2 n=0;
3 if B==1
4     n=0;
5 end
6 if B>=2
7     for i=0:B-2
8         n=n+3+i;
9     end
10 end
11 C=sym(zeros(3+n,B+1));
12 V=sym('v',[B+1,B+1]);
13
14 %C matrizea sortzen
15 C(1,1)=V(1,1); C(2,1)=V(2,2);C(3,1:2)=V(2,1:2);
16 %Lambda tasa duten errenkadak sortzen
17 errenkada=0;
18 if B>=2
19     for i=0:B-2
20         errenkada=errenkada+3+i;
21         C(3+errenkada,1:i+3)=V(i+3,1:i+3);
22     end
23 end
24 %Probabilitate banatua(m/n modukoa) duten errenkadak sortzen
25 if B>=2
26     errenk=4;
27     d=0;
28     for i=0:B-2
29         errenk=errenk+d;
30         d=3+i;
31         for j=0:i+1
32             C(errenk+j,1:i+2)=V(i+3,2:i+3);
33         end
34     end
35 %Gure aldagai imajinarioak sartzen
36 errenka=5;
37 de=0;
38 for i=0:B-2
39     errenka=errenka+de;

```

```

40         de=3+i;
41         for j=0:i
42             C(errenka+j,1:j+1)=C(errenka+j,j+2);
43         end
44     end
45 end
46
47
48 %Ekuazio sistemako eskuineko aldeko matrizea sortzen
49 K=sym(zeros(B+1,B+1));
50 K(1,1:B+1)=m*C(2,1:B+1);
51 K(B+1,1:B+1)=a*C(3+n-(B+1),1:B+1)+a*C(3+n,1:B+1);
52 erren=4;
53 s=0;
54 batura2=0;
55 sum=2;
56 for i=0:B-2
57     erren=erren+s;
58     s=3+i;
59     batura=sym(zeros(1,B+1));
60     for j=0:i+1
61         batura=batura+(m/(i+2))*C(erren+j,1:B+1);
62     end
63
64
65     batura2=-1+batura2+sum;
66
67     K(i+2,1:B+1)=a*C(batura2,1:B+1)+batura;
68     sum=sum+1;
69 end
70
71
72 [Pi]=Banaketak(B,a,m);
73 Pisuak=zeros(B+1,B+1);
74 for i=1:B+1
75     for j=1:i
76         Pisuak(i,j)=1;
77     end
78 end
79 EskuinekoMat=Pisuak.*Pi+K;
80 %Ekuazio sistemako ezkerreko aldeko matrizea sortzen
81 t=zeros(B+1,1);
82 t(1)=a;
83 for i=2:B+1

```

```

84     t(i)=a+m;
85 end
86 EzkerrekoMat=V.*t;
87
88 %Ekuazio sistema ebazten
89 kontatzaile=1;
90 for i=1:B+1
91     for j=1:B+1
92         eqns(kontatzaile)=[EzkerrekoMat(i,j)==EskuinekoMat(i,j)];
93         kontatzaile=kontatzaile+1;
94     end
95 end
96 Aldagaiak=solve(eqns,V);
97
98 %Age of Informationaren itxaropen matematikoa kalkulatzen
99 fns=fieldnames(Aldagaiak);
100 Itxaropena_AoI=0;
101 for i=1:B+1
102     Itxaropena_AoI=Itxaropena_AoI+Aldagaiak.(fns{i});
103 end
104 Itxaropena_AoI=vpa(Itxaropena_AoI);
105
106 end

```

A.3 Aurreko bi funtzioak exekutatzeko funtzio laguntzailea

```

1 function [Pi]=Banaketak(B,a,m)
2 G=zeros(B+1);
3 G(1,1)=-a; G(B+1,B+1)=-m; G(1,2)=m; G(B+1,B)=a;
4 for i=2:B
5     G(i,i-1)=a;
6     G(i,i+1)=m;
7     G(i,i)=-(a+m);
8 end
9
10 G(B+2,1:B+1)=1;
11 S=zeros(B+1,1);
12 S(B+2,1)=1;
13 Pi=linsolve(G,S);
14 end

```


B. Eranskina

FIFO eta Processor Sharing B=2 kasuko sistemen ebazpenak

B.1 FIFO

Ebatzi behar dugun ekuazio sistema ondokoa da

$$[v_{00}, v_{01}, v_{02}]\lambda = b_0\pi_0 + \mu[v_{11}, 0, 0]$$

$$[v_{10}, v_{11}, v_{12}](\lambda + \mu) = b_1\pi_1 + \lambda[v_{00}, 0, 0] + \mu[v_{21}, v_{22}, 0]$$

$$[v_{20}, v_{21}, v_{22}](\lambda + \mu) = b_2\pi_2 + \lambda[v_{10}, v_{11}, 0] + \lambda[v_{20}, v_{21}, v_{22}]$$

Ohartzen bagara, v_{01} , v_{02} eta v_{12} zuzenean 0 dira. Ekuazio horietatik jadanik v_{22} aska dezakegu

$$v_{22} = \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Orduan, orain v_{11} aska dezakegu

$$v_{11} = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

Hortik jarraituz,

$$v_{00}\lambda = \frac{\mu^2 + \mu\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

$$v_{00} = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Ondoren, v_{21} lortu dezakegu

$$\mu v_{21} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

$$v_{21} = \frac{2\lambda^2}{\mu(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Amaitzeko, orain bai kalkulatu ditzakegu v_{10} eta v_{20}

$$v_{10}(\lambda + \mu) = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

$$v_{10} = \frac{2\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu}{(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

$$v_{20}\mu = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{2\lambda^3 + \mu^2\lambda + 2\lambda^2\mu}{(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

$$v_{20} = \frac{3\lambda^3 + 3\lambda^2\mu + \mu^2\lambda}{\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

B.2 Processor Sharing

Kasu honetan ondoko ekuazio sistema izango dugu

$$[v_{00}, v_{01}, v_{02}]\lambda = b_0\pi_0 + \mu[v_{11}, 0, 0]$$

$$[v_{10}, v_{11}, v_{12}](\lambda + \mu) = b_1\pi_1 + \lambda[v_{00}, 0, 0] + \frac{\mu}{2}[v_{21}, v_{22}, 0] + \frac{\mu}{2}[v_{22}, v_{22}, 0]$$

$$[v_{20}, v_{21}, v_{22}](\lambda + \mu) = b_2\pi_2 + \lambda[v_{10}, v_{11}, 0] + \lambda[v_{20}, v_{21}, v_{22}]$$

*FIFO*n bezala v_{01}, v_{02} eta V_{12} zuzenean 0 dira. Ekuazio horietatik jadanik v_{22} aska dezakegu

$$v_{22} = \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Orduan, orain v_{11} aska dezakegu

$$v_{11} = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

Hortik jarraituz,

$$v_{00}\lambda = \frac{\mu^2 + \mu\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

$$v_{00} = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Ondoren, v_{21} lortu dezakegu

$$\mu v_{21} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu}$$

$$v_{21} = \frac{2\lambda^2}{\mu(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Amaitzeko, orain bai kalkulatu ditzakegu v_{10} eta v_{20}

$$v_{10}(\lambda + \mu) = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

$$v_{10} = \frac{3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2}{2(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

$$v_{20}\mu = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu} + \frac{\lambda(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 2\mu^2)}{2(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

$$v_{20} = \frac{5\lambda^3 + 6\lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2}{2\mu(\lambda + \mu)(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu)}$$

Bibliografia

- [1] Kaul, S. K., Yates, R. D. (2020, March). Timely updates by multiple sources: The M/M/1 queue revisited. In 2020 54th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS) (pp. 1-6). IEEE.
- [2] Yates, R. D., Sun, Y., Brown, D. R., Kaul, S. K., Modiano, E., Ulukus, S. (2021). Age of information: An introduction and survey. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 39(5), 1183-1210.
- [3] Kosta, A., Pappas, N., Angelakis, V. (2017). Age of information: A new concept, metric, and tool. *Foundations and Trends® in Networking*, 12(3), 162-259.
- [4] Costa, M., Codreanu, M., Ephremides, A. (2016). On the age of information in status update systems with packet management. *IEEE Transactions on Information Theory*, 62(4), 1897-1910.
- [5] Boxma, O. J. (2009). *Stochastic performance modelling*. Technische Universiteit Eindhoven.

