

Los Modelos Implícitos de Valoración de Opciones

GERARDO ARREGUI AYASTUY

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Recibido en julio de 2004; aceptado en noviembre de 2004

Resumen:

Los modelos implícitos constituyen uno de los enfoques de valoración de opciones alternativos al modelo de Black-Scholes que ha conocido un mayor desarrollo en los últimos años. Dentro de este planteamiento existen diferentes alternativas: los árboles implícitos, los modelos con función de volatilidad determinista y los modelos con función de volatilidad implícita. Todos ellos se construyen a partir de una estimación de la distribución de probabilidades riesgo-neutral del precio futuro del activo subyacente, congruente con los precios de mercado de las opciones negociadas. En consecuencia, los modelos implícitos proporcionan buenos resultados en la valoración de opciones dentro de la muestra. Sin embargo, su comportamiento como instrumento de predicción para opciones fuera de muestra no resulta satisfactorio. En este artículo se analiza la medida en la que este enfoque contribuye a la mejora de la valoración de opciones, tanto desde un punto de vista teórico como práctico.

Palabras clave:

Valoración de opciones, Árboles implícitos, Función de volatilidad determinista, Función de volatilidad implícita.

Abstract:

Of the alternative approaches to the Black-Scholes options valuation model, the implied models have had the largest development in last years. In this approach there are different alternatives: implied trees, deterministic volatility function models and implied volatility function models. All of them are based on the estimation of the risk-neutral probability distribution of underlying asset future prices, that is congruent with the options market prices. Accordingly, implied models are found to provide an exact fit of reported structure of options prices. However, the pricing performance of implied models valuing out-of-sample options is not adequate, and its usefulness as predictive tool is not satisfactory. In this article we analyze to which extent the implied approach improve the option valuation theory, from both theoretical and practical point of view.

Key words:

Options valuation, Implied trees, Deterministic volatility function, Implied volatility function.

1. INTRODUCCIÓN

El hito central de la Teoría de Valoración de Opciones es el modelo de Black-Scholes (1973)¹. Frente a las tentativas de valoración previas, Black y Scholes (1973) demuestran que, sin realizar supuestos sobre las preferencias de los inversores, se puede obtener una expresión del valor de las opciones, que no depende directamente del rendimiento esperado de la acción subyacente, ni de la opción. Esto se consigue mediante el recurso al argumento de la cobertura dinámica perfecta en un mercado libre de arbitraje. Las hipótesis sobre las que se sustenta el modelo de Black-Scholes configuran un escenario ideal, en el que es posible la negociación continua, en unos mercados perfectos, en los que el tipo de interés sin riesgo es constante y el precio del activo subyacente se comporta como una variable aleatoria que sigue un determinado proceso estocástico, conocido como proceso browniano geométrico.

A lo largo de los más de treinta años transcurridos desde la propuesta del modelo de Black-Scholes han surgido numerosos modelos de valoración de opciones². Algunos de ellos plantean extensiones del modelo original, con el propósito de adecuarlo a la valoración opciones distintas a las contempladas inicialmente. Pero en su mayoría se trata de alternativas de valoración construidas sobre supuestos más cercanos a la realidad. Entre todos los supuestos del modelo, el relativo al comportamiento de los precios del activo subyacente es el que ha concitado una mayor controversia. Este supuesto se puede expresar de una doble manera:

1. Haciendo referencia al proceso estocástico que sigue dicho precio.
2. Especificando la distribución de probabilidades que describe el comportamiento del precio futuro de la acción subyacente.

En el modelo de Black-Scholes se asume que el precio de la acción subyacente (S) sigue un movimiento browniano geométrico, cuya dinámica para un intervalo infinitesimal de tiempo (dt) recoge la siguiente expresión:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ$$

donde:

- μ es el rendimiento esperado instantáneo de la acción opcional.
- σ^2 es la varianza instantánea del rendimiento de la acción opcional, que se supone constante.
- dZ sigue un proceso de Wiener.

La segunda manera de describir este supuesto es especificando que el precio futuro³ de la acción subyacente sigue una distribución de probabilidades lognormal:

$$\ln S_T \sim \phi \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{T - t} \right]$$

¹ Además de la contribución de Merton en la génesis del modelo de Black y Scholes, recogida por Black (1989), la labor realizada por este autor para generalizar y extender el citado modelo ha llevado a que numerosos autores lo denominen modelo de Black-Scholes-Merton. Sin embargo, en este trabajo hemos optado por nombrarlo mediante la referencia de los dos autores iniciales.

² En Arregui (2003) se puede encontrar una exhaustiva revisión de los modelos de valoración de opciones.

³ Se considera un instante futuro T, que en las opciones europeas coincide con el vencimiento de la opción, posterior al momento actual t.

en la que, tanto el valor esperado del tipo de rendimiento del precio de la acción, μ , como su desviación típica, σ , se suponen constantes.

En consonancia con la posibilidad de expresar el supuesto de dos formas, también la crítica del mismo se puede plantear desde esa misma doble perspectiva: poner en tela de juicio que del precio de la acción siga un movimiento browniano geométrico; o poner en duda que la distribución de probabilidades del precio futuro de la acción subyacente sea lognormal con volatilidad constante. Al criticar la continuidad de la trayectoria que sigue el proceso browniano geométrico surgen los modelos que consideran la posibilidad de que los precios presenten saltos en su movimiento⁴. Sin embargo, es alrededor de la modelización de la volatilidad donde surge el mayor número de modelos alternativos, si bien es verdad que la negación de la constancia de la volatilidad es una característica común a todos los modelos que buscan representaciones más realistas del comportamiento de los precios del activo subyacente. Los más sencillos plantean la hipótesis de que la volatilidad depende funcionalmente del nivel que presente el precio de la acción, modelos de volatilidad dependiente del precio⁵. Y los más sofisticados incorporan al modelo la volatilidad como una variable aleatoria que sigue alguna clase de proceso estocástico, modelos de volatilidad estocástica⁶, y otros combinan una volatilidad estocástica con un proceso de saltos, modelos de volatilidad estocástica con saltos⁷. Sin olvidar los modelos que se sustentan en una modelización de la volatilidad siguiendo un proceso autorregresivo con heterocedasticidad condicional (ARCH), los modelos OGARCH⁸.

El planteamiento alternativo consiste en construir modelos a partir de la estimación de la distribución de probabilidades del precio futuro del activo subyacente. Dentro de este enfoque, aunque existen algunas alternativas en las que la distribución se estima a partir las series de precios del activo subyacente, la mayor parte de los modelos planteados obtienen la función de densidad neutral al riesgo ajustada a los precios de mercado de las opciones con datos de sección cruzada. Estos últimos son los que hemos dado en llamar modelos implícitos de valoración de opciones, y son el objeto de estudio de este artículo. El objetivo del presente trabajo es analizar la medida en la que este enfoque de valoración implícito supone un avance en la valoración de opciones, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Para ello, en el segundo apartado se analiza el fundamento de los modelos implícitos. A continuación se presentan las principales alternativas existentes dentro de este enfoque de valoración de opciones: árboles implícitos, modelos DVF y modelos IVF. Y finalmente se estudia la aportación que este enfoque de valoración ha representado para la valoración y gestión de las carteras con opciones. El trabajo termina con las conclusiones más relevantes que se desprenden del mismo y la bibliografía utilizada.

⁴ Entre otros, Cox y Ross (1975), Merton (1976), Naik y Lee (1990), Ahn (1992) y Amin (1993).

⁵ Entre otros, Geske (1979), Cox y Ross (1976), Lauterbach y Schultz (1990) y Hauser y Lauterbach (1996).

⁶ Entre otros, Hull y White (1987), Wiggins (1987), Chesney y Scott (1989), Stein y Stein (1991), Duan (1991), Heston (1993), Naik (1993), Bollen (1998), Bollen *et al.* (2000) y Sabanis (2003).

⁷ Entre otros, Bates (1996), Bakshi *et al.* (1997), Bates (2000) y Tompkins (2003).

⁸ Entre otros, Duan (1995), Duan y Wei (1999), Ritcken y Trevor (1999), Heston y Nandi (2000) y Lehenert (2003).

2. EL FUNDAMENTO DEL ENFOQUE IMPLÍCITO

El planteamiento de las distribuciones empíricas implícitas consiste en utilizar la información contenida en los precios de las opciones para inferir la distribución riesgo-neutral del precio del activo subyacente al vencimiento. La consideración de distribuciones riesgo-neutrales sólo tiene sentido dentro de un enfoque riesgo-neutral de valoración opciones, el cual se puede aplicar cuando sea posible la réplica exacta de opciones o las estrategias de cobertura perfectas mediante la combinación de opciones y activo subyacente.

Desde el enfoque de valoración riesgo-neutral un activo contingente, que dependa del precio final de su activo subyacente y que no pueda ser ejercido anticipadamente, se puede considerar como un conjunto de activos contingentes de estado. De manera que su valor se puede obtener multiplicando el flujo de caja correspondiente a cada estado por el precio de estado de Arrow-Debreu (A-D) correspondiente, y sumando el resultado de este producto para todos los estados de la naturaleza. Así, dados los N estados de la naturaleza, el momento t en el que se quiere valorar el activo contingente y el momento de su vencimiento T , su valor se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$C(t) = \sum_{s=1}^N V(s)p(s)$$

donde, $V(s)$ representa el flujo de caja para el estado de la naturaleza s y $p(s)$ su precio A-D. El precio A-D es el precio de un activo contingente que paga una unidad monetaria si se produce un determinado estado de la naturaleza y nada en otro caso. Los estado de la naturaleza se corresponden con los diferentes posibles valores del subyacente al vencimiento de la opción.

Supuesto que el tipo de interés sin riesgo, r , sea constante, y dado que el poseedor de un conjunto completo de activos contingentes tiene garantizada una unidad monetaria al vencimiento, la suma de los precios-estado tiene que ser igual al valor actual de una unidad monetaria descontada al tipo de interés sin riesgo, $e^{-r(T-t)}$; con lo que la ecuación anterior se puede reescribir:

$$C(t) = \sum_{s=1}^N e^{-r(T-t)}V(s) \frac{p(s)}{e^{-r(T-t)}} \equiv \sum_{s=1}^N e^{-r(T-t)}V(s)\pi(s)$$

siendo,

$$\sum_{s=1}^N \pi(s) = 1$$

donde, $\pi(s)$ se puede interpretar como una probabilidad, puesto que son valores no-negativos y suman la unidad.

Si los inversores fuesen neutrales ante el riesgo, $\pi(s)$ sería la probabilidad de que se produjese el estado de la naturaleza s -ésimo. Es decir, que el conjunto de precios-estado contingentes dividido por el factor de descuento recogería la función de probabilidad del activo subyacente. Esta es la razón por la que a $\pi(s)$ se le suele denominar probabilidad riesgo-neutral, y la distribución correspondiente se conoce como distribución riesgo-neutral.

Cuando el espacio considerado es continuo el precio del activo contingente se obtiene como el valor actualizado de la esperanza de remuneración asociada a la tenencia del activo subyacente, esperanza que se obtiene mediante integración de los flujos de caja generados por el activo subyacente distribuidos según la función de densidad correspondiente —la densidad riesgo-neutral—:

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} V(s)f(s)ds$$

donde, $f(s)$ es la densidad riesgo-neutral, y $V(S) = \text{Máx.}(0, S-K)$ o $V(S) = \text{Máx.}(0, K-S)$ para una *call* o una *put*, respectivamente, y K es el precio de ejercicio.

En cuanto a los procedimientos para deducir la distribución de probabilidades riesgo-neutral de los precios de las opciones se pueden distinguir tres planteamientos. Una primera vía consiste en elegir *a priori* una distribución riesgo-neutral a partir de la cual se obtiene una fórmula de valoración de opciones, ajustándose la distribución para que las desviaciones entre los precios teóricos de las opciones y los precios de mercado sean mínimas. Otra alternativa consiste en especificar una fórmula de valoración de opciones que se ajuste a los precios observados de las opciones para diferentes precios de ejercicio, para luego obtener la distribución riesgo-neutral utilizando el resultado demostrado por Breeden y Litzenberger (1978)⁹. Un tercer procedimiento consiste en especificar una función de volatilidad implícita que se ajusta a las volatilidades implícitas de los precios observados de las opciones, deducir la fórmula de valoración correspondiente a dicha función de volatilidad, para finalmente obtener la distribución de probabilidades riesgo-neutral.

Los tres planteamientos para la obtención de la distribución riesgo-neutral implícita tienen sus inconvenientes, y los tres pueden ser llegar a ser útiles en la modelización del valor de las opciones. Pero el procedimiento más utilizado en la teoría de valoración de opciones es la alternativa que parte del ajuste de la función de volatilidad implícita a los datos observados en el mercado. Esto puede ser debido a que la estimación de la función de volatilidad implícita está directamente relacionada con el análisis de los sesgos de volatilidad, «sonrisa» de volatilidad y estructura temporal de la volatilidad, campo que ha concitado la atención de numerosos autores los últimos años; además de que las técnicas numéricas necesarias para obtener el valor de las opciones son generalmente más simples y eficientes. La otra metodología de valoración de opciones relacionada con las distribuciones implícitas que ha alcanzado una mayor repercusión en la valoración de activos derivados es la de los árboles implícitos, sobre todo por la simplicidad de su planteamiento y su flexibilidad.

3. ÁRBOLES IMPLÍCITOS

La valoración de opciones mediante integración directa de la densidad riesgo-neutral al vencimiento presenta el inconveniente de la necesidad de integrar una función desconocida. Esta función puede resultar difícil, cuando no imposible, de ser integrada me-

⁹ La segunda derivada del precio de una opción europea respecto del precio de ejercicio es el precio A-D de un activo contingente con un precio al vencimiento por encima del precio de ejercicio.

diante procedimientos analíticos, por lo que en muchos casos se hace necesario utilizar técnicas numéricas de integración. Además, este planteamiento no puede ser aplicado más que para la valoración de opciones de tipo europeo¹⁰. En consecuencia, una vez obtenida la distribución de probabilidades del activo subyacente implícita en los precios observados de las opciones, puede resultar necesario reconstruir el proceso estocástico que conduce a dicha distribución final. Para este fin son útiles los árboles implícitos, sencillos en su planteamiento y fáciles de implementar.

Los árboles implícitos se pueden interpretar como la versión discreta de los procesos estocásticos de difusión unidimensional, en los que se supone que la volatilidad es una función del tiempo y del precio del subyacente. Este planteamiento conoció un gran empuje en el año 1994, con la aparición de tres trabajos en los que tanto la obtención de la distribución riesgo-neutral como la valoración de las opciones se realiza utilizando árboles denominados implícitos. Los modelos propuestos por Rubinstein (1994) y Derman y Kani (1994), utilizando árboles binomiales implícitos, y el de Dupire (1994), con árboles trinomiales implícitos, permiten obtener el valor de las opciones a partir de una distribución riesgo-neutral consistente con la «sonrisa» de volatilidad, con la ventaja que ofrecen los árboles de probabilidad en cuanto a simplicidad y flexibilidad.

3.1. El árbol binomial implícito de Rubinstein

Se trata de un planteamiento relativamente simple, en el que se pueden distinguir tres pasos. En primer lugar, se debe obtener la distribución de probabilidad del activo subyacente implícita en el precio de las opciones con un vencimiento dado. Es decir, se trata de calcular la distribución de probabilidad que utilizan en promedio los agentes del mercado para valorar las opciones con un vencimiento común sobre un mismo activo subyacente. Para ello, Rubinstein (1994) sugiere tomar la distribución más cercana, en el sentido de mínimos cuadrados ordinarios, a una distribución lognormal fijada *a priori*.

En segundo lugar, se deduce el proceso estocástico seguido por el activo subyacente, suponiendo que sigue un proceso binomial multiplicativo y que la volatilidad en cada nodo depende del precio del subyacente. Se parte de los nodos del momento final y se calculan, respecto de cada nodo del momento inmediatamente anterior, el rendimiento asociado y su correspondiente probabilidad. Al sistema de ecuaciones a resolver para cada nodo se le imponen tres condiciones: la probabilidad en cada nodo interior sea igual a la suma de las probabilidades que emanan de la misma; se asigna la probabilidad total de los dos movimientos; y por último, se asume la condición de neutralidad ante el riesgo. Aplicando el procedimiento para todos los nodos correspondientes a un periodo se obtiene la distribución de probabilidades riesgo-neutral en ese periodo, y repitiendo el proceso sucesivamente para todos y cada uno de los periodos anteriores se obtiene el árbol binomial implícito.

¹⁰ Una excepción es el modelo propuesto por Melick y Thomas (1997), quienes utilizan límites de los precios de las opciones expresados en función de los flujos que puedan generar al vencimiento, a partir de los cuales se estiman las funciones de densidad riesgo-neutral utilizando una mezcla de distribuciones lognormales. Siguiendo este mismo planteamiento y considerando el mismo tipo de opciones, opciones americanas sobre futuros sobre petróleo, Flamouris y Giamouridis (2002) estiman la distribución riesgo-neutral mediante expansiones en series de Edgeworth. Giamouridis y Tamvakis (2002) hacen lo propio para valorar opciones americanas sobre futuros de tipos de interés.

En el tercer y último paso, los precios de las opciones se calculan de igual manera que en los árboles binomiales clásicos, esto es, como el valor actualizado al tipo de interés sin riesgo de la esperanza riesgo-neutral de la remuneración al vencimiento. Esta modelización también permite calcular de forma sencilla los parámetros de cobertura de las opciones para cualquier plazo hasta el vencimiento.

Una de las ventajas del modelo de Rubinstein es que permite modelizar el comportamiento de una volatilidad local variable, dependiente del precio del subyacente y el tiempo, sin necesidad especificar *a priori* una relación funcional. Esta volatilidad local refleja el comportamiento del subyacente en momentos concretos del tiempo, a diferencia de la volatilidad global, que es una medida de la variabilidad del subyacente a lo largo de todo el intervalo de tiempo hasta el vencimiento de la opción¹¹.

Los principales inconvenientes que presenta la propuesta de Rubinstein (1994) son, por un lado, que en la construcción del árbol no se tienen en cuenta más que los precios de las opciones con un vencimiento igual al plazo considerado, pero no las opciones con vencimientos más cortos; y por otro lado, el supuesto de que todas las trayectorias que conducen al mismo valor final poseen la misma probabilidad de riesgo neutral. Estas limitaciones se pueden superar mediante la generalización del planteamiento de Rubinstein (1994) propuesta por Jackwerth (1997), quien introduce una función de pesos que gobierna el proceso recursivo. La propuesta de Jackwerth (1997) se puede utilizar para valorar opciones europeas con un vencimiento anterior al momento correspondiente al último nodo del árbol, e incluso se puede ajustar para valorar opciones de tipo americano

3.2. El árbol binomial implícito de Derman y Kani

Derman y Kani (1994) realizan una propuesta alternativa, en la que el árbol implícito se construye considerando en cada paso un conjunto de opciones con precios de ejercicio iguales a los precios del subyacente de la fase anterior y con vencimiento en el momento inmediatamente posterior. De esta manera, el árbol implícito se construye teniendo en cuenta opciones con diferentes vencimientos, aunque para ello sea necesaria la interpolación y extrapolación de los precios observados de las opciones.

El denominador común de las propuestas de Rubinstein y Derman y Kani es que se parte del precio de las opciones para deducir la distribución riesgo-neutral del precio futuro del subyacente. Y su principal diferencia radica en que Derman y Kani (1994) construyen un árbol binomial a partir de los precios de las opciones, en el que está implícita la distribución riesgo-neutral, mientras que Rubinstein (1994) construye una distribución de probabilidades a partir de los precios de las opciones, y el árbol binomial consiguiente se levanta sobre la distribución obtenida. Así, al diferenciar dos fases distintas el modelo de Rubinstein (1994) es más flexible, ya que permite la posibilidad de ajustar la distribución de probabilidades obtenida. Además, el modelo de Derman y Kani (1994) presenta el inconveniente de que se pueden dar probabilidades negativas que habrá que corregir, y que se hace más inestable numéricamente a medida que el número de pasos considerados se hace más grande.

¹¹ La volatilidad global es una estimación de la volatilidad implícita en el precio de la opción.

Barle y Cakici (1998) logran mejorar la estabilidad del modelo de Derman y Kani (1994). Esta mejora se consigue realineando los nodulos centrales del árbol en función de los precios a plazo en lugar de los precios al contado del subyacente, y considerando en cada etapa las opciones con un precio de ejercicio igual al precio a plazo del subyacente en lugar de su precio al contado. Por otra parte, la limitación del modelo de Derman y Kani (1994) que supone el no poder valorar con el mismo más que opciones de tipo europeo se puede afrontar empleando el planteamiento de Chriss (1996), quien introduce la posibilidad de valorar opciones de tipo americano.

3.3. El árbol trinomial implícito de Dupire

Dupire (1994) sugiere la utilización de un planteamiento similar al de Derman y Kani (1994) pero con árboles trinomiales. Es decir, en cada etapa se tienen en cuenta los precios de las opciones con vencimiento al final de la siguiente etapa, pero con tres posible trayectorias. El objetivo que se persigue con la incorporación de una nueva trayectoria en cada nodo es el de dotar al procedimiento de una mayor flexibilidad. En los árboles binomiales implícitos el número de parámetros es el mínimo necesario para ajustar la «sonrisa» observada, de manera que el ajuste a los precios de las opciones de un mercado es único. Esta unicidad del árbol implícito puede llegar a ser un inconveniente ante ciertas imperfecciones, como inconsistencias en los precios y/o violación de las restricciones de no-arbitraje, e incluso cuando una vez construido el árbol se comprueba que a pesar de estar bien ajustado a los precios observados el resultado es manifiestamente inadecuado. En estos casos puede resultar más conveniente tener la flexibilidad suficiente como para obviar algunos de los datos iniciales, en aras de obtener una función de distribución o una función de volatilidad local más razonable. En cualquier caso, la diferencia entre los árboles binomiales y trinomiales desaparece en el límite cuando el número de periodos se hace infinito y el modelo pasa de ser discreto a ser continuo, en cuyo caso el número de parámetros considerados pasa a ser irrelevante.

3.4. Evaluación crítica del enfoque de árboles implícitos

Los artículos en los que se han propuesto los modelos de valoración de opciones con árboles implícitos ponen de manifiesto su consistencia, tanto la de las distribuciones riesgo-neutrales, como la de las propiedades dinámicas de los precios inferidos en los árboles, con los resultados obtenidos en muchos trabajos empíricos. Sin embargo, estas comprobaciones empíricas no analizan su comportamiento fuera de muestra. Jackwerth (1996) contrasta el comportamiento empírico de los árboles binomiales, el modelo de Black-Scholes y el modelo de elasticidad constante de la varianza, encontrando evidencia favorable a los árboles binomiales implícitos en el periodo posterior a la crisis bursátil de 1987, utilizando para ello el procedimiento consistente en valorar opciones a corto plazo con parámetros obtenidos ajustando datos de opciones a largo plazo. Por su parte, Dumas *et al.* (1998) analizan la estabilidad de la función de volatilidad, con datos de opciones sobre el S&P 500 negociadas en CBOE entre junio

de 1988 y diciembre de 1993. Estos autores concluyen que la función de volatilidad no es estable en el tiempo, y que el comportamiento fuera de muestra de los árboles implícitos es peor que el de un modelo de Black-Scholes ajustado *ad hoc* con volatili- dades implícitas variables. También Jackwerth y Rubinstein (1998) contrastan el comportamiento de los árboles binomiales implícitos comparándolos con modelos pa- ramétricos, incluido un modelo de volatilidad estocástica, y reglas de valoración *ad hoc* basadas en la consideración de una volatilidad implícita dependiente del precio de ejercicio o del grado en dinero de las opciones, encontrando que todos estos métodos tienen un comportamiento parecido, sin que ninguno ofrezca buenos resultados. Por otra parte, como apunta Stutzer (1996, pág. 1635), este planteamiento presenta el in- conveniente de que utiliza un gran volumen de información relativa a precios de merca- do de una determinada opción, pudiéndose valorar únicamente activos derivados sobre el mismo subyacente que el de las opciones tomadas como referencia, es decir, que no permite obtener una teoría predictiva general de valoración. Sin embargo, a pesar de que su capacidad predictiva se encuentre en entredicho, los árboles implíci- tos proporcionan una metodología caracterizada por su flexibilidad y por la relativa simplicidad en su implementación. Ello facilita el cálculo de los parámetros de cober- tura y la valoración de opciones más complejas, como opciones americanas y opcio- nes exóticas¹², siempre que estén referidas al mismo subyacente que las opciones eu- ropeas a partir de las cuales se construyen los árboles.

4. MODELOS CON FUNCIÓN DE VOLATILIDAD DETERMINISTA (DVF)

En su propósito de encontrar un procedimiento para contrastar fuera de muestra los modelos de árboles implícitos, superando la dificultad que conlleva comprobar la consistencia de un árbol implícito construido en un momento dado con la serie tem- poral de precios observados en el mercado, Dumas *et al.* (1998) caracterizan el enfo- que de los árboles implícitos como un proceso de difusión continuo cuya volatilidad es una función determinista de S y t . Estos autores denominan esta caracterización como hipótesis de la «función de volatilidad determinista» (*deterministic volatility function* (DVF)), y a partir de la misma desarrollan un nuevo modelo de valoración de opciones.

La propuesta de Dumas *et al.* (1998) consiste en estimar la función de volatilidad de- terminista que se ajuste de manera exacta a los datos de sección cruzada de las opciones negociadas, en lugar de hacerlo para las distribuciones de probabilidad riesgo-neutral. Una vez concretada la función a utilizar, que será una aproximación en series de Taylor en S y t , se estiman los parámetros pertinentes en orden a conseguir el mejor ajuste posi- ble a los precios observados de las opciones. La congruencia con los precios observados de las opciones es posible porque el valor de la opción correspondiente a cada estimación de la volatilidad se puede obtener resolviendo la ecuación en derivadas parciales del mo-

¹² Desde el enfoque de los árboles implícitos también se han planteado otras alternativas con el objetivo de incorporar un comportamiento estocástico de la volatilidad, como la propuesta por Derman y Kani (1998), y Britten-Jones y Neuberger (2000). Sin embargo, ninguno de estos dos modelos cuenta con suficiente respaldo empírico, debido a la a la complejidad y laboriosidad de su implementación.

delo de Black-Scholes¹³. En concreto, Dumas *et al.* (1998) resuelven la ecuación en derivadas parciales mediante el método de Crank-Nicholson de diferencias finitas.

Por lo tanto, el modelo DVF se construye sobre la estimación de una función de volatilidad determinista mediante un ajuste perfecto a la superficie de volatilidad implícita, a partir de la cual se pueden obtener los valores de las opciones fuera de muestra, o la distribución de probabilidades riesgo-neutral del activo subyacente. La característica diferencial más relevante de esta metodología de valoración es que requiere de la estimación de una función de volatilidad, cuya forma hay que especificar *a priori*. Este mismo objetivo es el que persiguen los modelos de volatilidad estocástica, como el de Hull y White (1987), o el modelo de Heston (1993), o los modelos con saltos, como el modelo de Bates (1996). Sin embargo, los modelos DVF presentan la ventaja de ser más simples, en la medida que preservan el argumento de arbitraje de Black-Scholes. En cambio, en los modelos de volatilidad estocástica o de saltos es necesaria la estimación de los parámetros adicionales que gobiernan el proceso que sigue la volatilidad, o la asunción de supuestos adicionales acerca de las preferencias de los inversores ante el riesgo, o bien hay que considerar activos adicionales que puedan ser utilizados para la cobertura de la volatilidad. Con respecto a los modelos de volatilidad dependiente del precio, como el modelo CEV, la diferencia fundamental está en que éstos se parte de una relación funcional concreta cuyos parámetros se estiman a partir de datos históricos, mientras que en los modelos DVF se parte de las variables de las que depende la volatilidad, pero la forma funcional concreta se obtiene mediante regresión, buscando el mejor ajuste posible a la superficie de volatilidad implícita.

El planteamiento de Dumas *et al.* (1998) ha sido utilizado en diversos trabajos, entre los cuales uno de los más recientes es el de Serna (2002). Este autor analiza el comportamiento en el mercado español del modelo de valoración de opciones con función de volatilidad determinista de Dumas *et al.* (1998). Los resultados, obtenidos con datos de opciones sobre futuros del Ibex 35 desde enero de 1994 hasta octubre de 1998, muestran que los modelos de valoración de opciones que incorporan el efecto «sonrisa» de volatilidad mediante una función de volatilidad que depende de forma determinista del precio de ejercicio, en forma lineal o cuadrática, no son capaces de mejorar el comportamiento fuera de muestra del modelo de Black-Scholes, ni de un modelo Black-Scholes *ad hoc*. También Peña *et al.* (2001) utilizan la metodología propuesta por Dumas *et al.* (1998) para tratar de incorporar a la valoración de opciones los costes de liquidez como una variable relevante. Estos autores estiman una función de volatilidad determinista que depende del precio de ejercicio, del plazo hasta el vencimiento y de horquilla de precios relativa, esta última como variable aproximada de los costes de liquidez. Los resultados obtenidos, con datos de opciones sobre el Ibex 35 entre enero de 1994 y abril de 1996, indican que los costes de liquidez no parecen ser un factor explicativo del

¹³ En realidad Dumas *et al.* (1998) utilizan la denominada ecuación «backward» de valoración de opciones expresada en términos de los precios a plazo, en lugar de tener en cuenta precios al contado, para evitar la consideración de tipos de interés estocásticos,

$$-\frac{1}{2}\sigma^2(F,t)F^2\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

donde, F es el precio a plazo del activo subyacente y f es el precio a plazo de la opción, ambos para un plazo igual al vencimiento de la opción, $s = f(F,t)$ es la función de volatilidad local y t el momento actual.

comportamiento del precio de las opciones. En ambos casos, el pobre comportamiento del modelo de valoración de opciones con volatilidad determinista parece que puede deberse a una doble causa: la considerable variación en los coeficientes estimados, indicativa de la falta de estabilidad de la función de volatilidad; y la incapacidad de los modelos paramétricos planteados para capturar la verdadera forma de la función de volatilidad.

La percepción que se deriva del análisis de los resultados obtenidos por los trabajos que utilizan la metodología DVF es que este planteamiento no parece aportar avances significativos en la valoración de opciones. En concreto, las variantes de los modelos DVF que incluyen la variable tiempo en el ajuste de la función de volatilidad son las que tienen peor comportamiento en la valoración de opciones fuera de la muestra, indicando que la inclusión de esta variable es una fuente importante de sobreestimación.

Al igual que en el planteamiento de los árboles implícitos, los métodos DVF tratan de ajustarse a la superficie de la volatilidad implícita partiendo de una discretización de la superficie de volatilidad como una difusión unidimensional generalizada. Lo que diferencia ambas alternativas es que mediante los árboles implícitos se dota a esta discretización de una cierta estructura, la inherente a suponer que en cada paso el subyacente sólo puede moverse en dos o tres sentidos, imponiendo además unas determinadas condiciones acerca del redireccionamiento de las trayectorias; mientras que el planteamiento DVF el proceso estocástico seguido por el subyacente se discretiza en una malla rectangular definida mediante una función no especificada *a priori*, la cual se obtiene mediante regresión. Pero en ambos casos se puede utilizar el argumento básico de valoración del modelo Black-Scholes, porque en última instancia se considera que la volatilidad es una función determinista del subyacente y del tiempo. Precisamente ésta puede ser la causa de la falta de capacidad predictiva de los modelos DVF: considerar la volatilidad como una función determinista cuando en realidad tiene un comportamiento estocástico. Para superar esta limitación, pero manteniendo la idea de construir un modelo de valoración de opciones ajustado a las volatilidades implícitas observadas en el mercado, se han ido planteando diferentes propuestas que cabría agrupar, siguiendo a Rosenberg (2000), bajo la denominación de modelos con función de volatilidad implícita (*implied volatility function* (IVF)).

5. MODELOS CON FUNCIÓN DE VOLATILIDAD IMPLÍCITA (IVF)

Los modelos IVF se caracterizan porque buscan obtener la función de volatilidad implícita ajustada a los precios de las opciones, pero sin imponer la restricción de que la volatilidad dependa del precio del subyacente y el tiempo. Así, al negar un comportamiento determinista de la volatilidad, en los modelos IVF no se puede presuponer la ausencia de posibilidades de arbitraje. A su vez, la denominación de modelos IVF engloba una gran variedad de planteamientos. Las principales diferencias se encuentran en las hipótesis adoptadas sobre las variables explicativas de los sesgos de volatilidad, en los procedimientos de ajuste de la función de volatilidad, y también en la manera de obtener el valor de las opciones una vez estimada la función de volatilidad implícita.

El enfoque de los modelos IVF viene a ser algo muy parecido al de los modelos DVF, en la medida en que se trata de conseguir un ajuste perfecto a los precios observa-

dos de las opciones expresados en términos de volatilidades implícitas¹⁴. Las volatilidades implícitas forman una superficie cuyos puntos se obtienen haciendo variar el precio de ejercicio, K , y el plazo hasta el vencimiento, $T-t$, de manera que las variables de las que depende la superficie de volatilidad son las mismas que en los modelos DVF. La diferencia está en que, al estimar la función que mejor se ajusta a las volatilidades implícitas observadas, los modelos IVF no imponen la restricción de que dicha función dependa de estas dos variables. Es decir, que mientras en los modelos DVF se parte del supuesto de que existe una relación funcional entre volatilidad y precio del subyacente y tiempo, $\sigma = f(S,t)$, que luego se ajusta a los precios observados teniendo en cuenta la relación entre volatilidad y precio de ejercicio y tiempo, $\sigma = f(K,t)$, en los modelos IVF no se parte del supuesto de relación determinista, sino que directamente se trata de ajustar una función de volatilidad a partir de los datos del mercado, incorporando en algunos casos ciertas variables que pueden explicar los sesgos de volatilidad, como por ejemplo los costes de liquidez.

Una característica común de los modelos IVF es la utilización de procedimientos no paramétricos para la estimación de las funciones de volatilidad implícita. La utilización de estimadores no paramétricos es una alternativa que resulta adecuada para estimar funciones de regresión desconocidas, puesto que permiten modelizar con una gran flexibilidad la influencia que presumiblemente tienen ciertas variables sobre la función a estimar, pero cuya relación funcional se desconoce. Ello permite obtener una función, la función de volatilidad implícita, sin necesidad de asumir hipótesis acerca de su estructura¹⁵. Esta función se ajusta a los datos disponibles, que en nuestro caso son las volatilidades implícitas en los precios de mercado de las opciones negociadas para diferentes plazos hasta el vencimiento y distintos grados en dinero. Y finalmente, la función de volatilidad implícita estimada se integra en el método de valoración de opciones que se considere adecuado.

Uno de los trabajos de referencia en la utilización de técnicas no paramétricas para la estimación de la función de volatilidad implícita es el de Aït-Sahalia y Lo (1998). Estos autores utilizan un estimador kernel multivariante con parámetros de suavizado global para obtener la función de densidad riesgo neutral, la cual depende de cinco variables: precio de subyacente, precio de ejercicio, plazo hasta el vencimiento, tipo de interés y rendimiento por dividendos. Ferreira *et al.* (2003) y Gago (2001) utilizan el mismo planteamiento básico, aunque la función de volatilidad no paramétrica depende del grado en dinero, del tiempo hasta el vencimiento y los costes de liquidez, para cuya representación utilizan, tanto la horquilla relativa entre el precio de oferta y el precio de demanda, como el volumen relativo. Una vez estimada la función de volatilidad implícita mediante la metodología no paramétrica de los Vecinos Simétricos más Próximos (SNN) con datos de opciones de compra y venta sobre el futuro del Ibex 35 entre enero de 1996 y noviembre de 1998, dicha función se lleva a la fórmula de valoración de Black-Scholes para calcular los precios. Y finalmente, diferenciando dos veces esta estimación del precio de

¹⁴ En ambos casos, en la práctica totalidad de los modelos propuestos, las volatilidades implícitas se calculan mediante el modelo de Black-Scholes, aunque en principio se podría emplear cualquier otro modelo para «traducir» las primas de las opciones a volatilidades.

¹⁵ Esto representa una cualidad apreciable en la medida en que ninguna modelización paramétrica de la volatilidad incorporada a un modelo de valoración de opciones ha proporcionado resultados incontestables.

la opción con respecto al precio de ejercicio, se obtiene la función de densidad neutral al riesgo, dado el tipo de interés apropiado.

En cuanto al comportamiento de este tipo de modelos, los resultados obtenidos fuera de la muestra no terminan de resultar satisfactorios. La razón de este pobre comportamiento puede estar relacionada, en algunos casos, con la no inclusión en el modelo de variables relevantes que influyen en la función de la volatilidad implícita. En otros casos, se apunta la dificultad para representar adecuadamente las variables que se consideran explicativas del comportamiento de la volatilidad implícita; por ejemplo, los costes de la liquidez en Ferreira *et al.* (2003) y Gago (2001). Además, hay que tener en cuenta problemas técnicos como la elección de los parámetros de suavizado, cuya solución también condiciona el resultado.

Ante la falta de estabilidad en el tiempo observada en la mayor parte de los modelos IVF, la cual es una evidencia más de que la volatilidad es distinta según se utilicen datos actuales o datos históricos para estimar la función de volatilidad implícita, Rosenberg (2000) propone un modelo dinámico para estimar la función de volatilidad implícita¹⁶. Frente a los modelos DVF en los que se supone que la volatilidad es una función del nivel de precios del subyacente, el autor propone un modelo de función dinámica de volatilidad implícita (DIVF), el cual pretende recoger el comportamiento estocástico de la volatilidad. En este modelo se propone separar la componente de la función de volatilidad implícita que permanece invariable en el tiempo, de las variables estado estocásticas que gobiernan los cambios de las volatilidades implícitas individuales. Rosenberg (2000), con datos de opciones sobre el futuro del S&P 500 desde 1988 hasta 1997, compara su modelo con otros modelos IVF en los que la función de volatilidad es una función del precio de ejercicio, del grado en dinero y tiempo hasta el vencimiento. Este autor encuentra que su modelo explica el comportamiento del precio de las opciones de una manera parsimoniosa e internamente consistente, mejorando sustancialmente su comportamiento como herramienta de valoración respecto de los modelos IVF estáticos. Sin embargo, el propio autor afirma que el modelo DIVF no es capaz de explicar de forma totalmente satisfactoria el comportamiento dinámico del precio de las opciones.

6. UTILIZACIÓN DE LOS MODELOS IMPLÍCITOS

Los modelos implícitos de valoración de opciones se caracterizan fundamentalmente por ajustar con una exactitud prácticamente total las primas de las opciones negociadas en el intervalo de tiempo considerado. En consecuencia, mediante los modelos implícitos se pueden valorar opciones no líquidas, como las negociadas en mercados OTC u opciones exóticas, emitidas sobre el activo subyacente al que están referidas las opciones de las que se extrae la distribución o función de volatilidad implícita. Asimismo, muchos de estos modelos¹⁷ permiten calcular los parámetros de cobertura, de forma que podemos conocer la manera adecuada de gestionar carteras en las que se utilicen o se repliquen opciones. No obstante, su utilidad como modelos de predicción de las primas de las opcio-

¹⁶ Una posible solución de orden práctico es utilizar sólo datos actuales en la estimación de la función de volatilidad.

¹⁷ En concreto, la práctica totalidad de las variantes de los árboles implícitos.

nes es cuestionable. Por un lado, parece razonable poner en cuestión la capacidad que puede tener un modelo para adelantarse al mercado utilizando sólo la información proporcionada por el propio mercado. Por otra parte, estudios empíricos como el de Gemmil y Saflekos (2000) ponen de manifiesto que la idea de que la distribución implícita refleja expectativas racionales o bien informadas hay que tomarla con reservas.

En la práctica, los agentes del mercado utilizan estos modelos calibrándolos con una gran frecuencia, diaria e incluso varias veces al día. Esta recalibración denominada continua consiste en calcular los parámetros del modelo a partir de una muestra de precios de opciones corta en el tiempo, examinar el comportamiento fuera de muestra y sus errores de cobertura, y repetir el proceso para los siguientes periodos. Bates (2000, págs. 184-185) crítica la recalibración continua, haciendo referencia explícita al trabajo de Dumas *et al.* (1998), y también al de Bakshi *et al.* (1997). Los critica porque esta práctica de recalibrar el modelo continuamente implica que el modelo no toma en consideración seriamente ningún proceso de generación de datos. Los modelos recalibrados continuamente pueden dar buenos resultados cuando se testan fuera de muestra para plazos muy cortos, pero suelen fallar para plazos más largos por la inestabilidad de los parámetros. En consecuencia, para que los modelos implícitos consigan un buen ajuste a los datos de volatilidad de los rendimientos y a los precios de las opciones han de recalibrarse continuamente.

Hull y Suo (2002, pág. 298) vienen a confirmar que efectivamente los agentes del mercado utilizan modelos implícitos recalibrados continuamente: «Considérense, por ejemplo, las opciones europeas sobre el S&P 500. La mayoría de los bancos utiliza para la valoración una aproximación mediante valores relativos. Cada día se obtienen de los agentes, mercados y otras fuentes, las volatilidades implícitas de Black-Scholes de las opciones *vanilla* más activamente negociadas para calcular las volatilidades implícitas del modelo de Black-Scholes. Entonces se aplican técnicas de interpolación para calcular una función completa (conocida como superficie de volatilidad implícita), relacionando la volatilidad implícita de Black-Scholes de cada opción europea con su precio de ejercicio y su plazo hasta el vencimiento. Esta superficie de volatilidad permite el cálculo del valor de cualquier opción europea». Esta forma de proceder tiene la ventaja de que la mala especificación del modelo tiene un impacto sobre la efectividad de la cobertura mucho menor, que si los inversores confiaran solamente en la cobertura delta, alcanzando una mayor protección contra cambios en la superficie de volatilidad, además de contra las variaciones del subyacente. Y aunque actuando de esta manera resulte difícil anticiparse al mercado, como dicen Hull y Suo (2002, pág. 302, nota n.º 5), al menos se intenta evitar que puedan hacer arbitraje en su contra.

7. CONCLUSIONES

Entre los modelos con distribuciones implícitas se pueden distinguir aquellos modelos que suponen una volatilidad dependiente del tiempo y del precio del subyacente, árboles implícitos y modelos con función de volatilidad determinista (DVF), de los otros que no asumen esta restricción, modelos con función de volatilidad implícita (IVF). En el primer grupo de modelos se mantiene la argumentación básica del modelo de Black-Scholes, puesto que en dichas condiciones es posible utilizar el argumento de la cartera,

mientras que en los modelos con función de volatilidad no se puede asegurar la ausencia de posibilidades de arbitraje.

Una de las principales ventajas de los árboles implícitos frente al resto de modelos implícitos, es que los árboles son modelos en tiempo discreto caracterizados por una gran flexibilidad para incorporar una gran cantidad de eventualidades, lo cual permite, por ejemplo, incorporar dividendos o valorar opciones americanas. Estos modelos permiten, por un lado, calcular los parámetros de cobertura, de forma que podemos conocer la manera adecuada de gestionar carteras en las que se utilicen o se repliquen opciones, y por otro lado, se pueden valorar opciones no líquidas sobre el mismo subyacente, como las negociadas en mercados OTC u opciones exóticas. El mismo carácter discreto de los árboles implícitos dificulta su utilización como instrumentos de predicción, en el sentido de que al no coincidir el precio del árbol en una etapa posterior con el precio real de mercado en ese momento resultan difíciles de contrastar.

Con respecto a la capacidad de los modelos DVF e IVF para adelantarse al mercado, es evidente que los creadores de dichos modelos los proponen para que se puedan utilizar como modelos con capacidad predictiva. Y aunque los modelos IVF presenten la ventaja de que no están sujetos a la restricción de que la volatilidad dependa del precio del subyacente y el tiempo, ninguno de los dos planteamientos parecen obtener resultados satisfactorios como instrumentos de predicción de las primas de las opciones. En consecuencia, los agentes del mercado prefieren utilizar modelos implícitos más simples, pero con una recalibración continua de los datos.

BIBLIOGRAFÍA

- AHN, C. (1992): «Option pricing when jump risk is systematic», *Mathematical Finance*, vol. 2, n.º 4, págs. 299-308.
- AÏT-SAHALIA, Y. y LO, A. (1998): «Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices», *Journal of Finance*, vol. 53, n.º 2, págs. 499-547.
- AMIN, K (1993): «Jump diffusion option valuation in discrete time», *Journal of Finance*, vol. 48, n.º 5, págs. 1833-1863.
- ARREGUI, G. (2004): *El modelo de Black-Scholes de valoración de opciones: análisis crítico de los supuestos que lo fundamentan*, Tesis Doctoral, Departamento de Economía Financiera II, Universidad del País Vasco, Bilbao.
- BAKSHI, G.; CAO, C. y CHEN, Z. (1997): «Empirical performance of alternative option pricing models», *Journal of Finance*, vol. 52, n.º 5, págs. 2003-2049.
- BARLE, S. y CAKICI, N. (1998): «How to grow a smiling tree», *Journal of Financial Engineering*, vol. 7, n.º 2, págs. 127-146.
- BATES, D. (2000): « Post-'87 crash fears in S&P 500 futures option market», *Journal of Econometrics*, vol. 94, págs. 181-238.
- BATES, D. (1996): «Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options», *Review of Financial Studies*, vol. 9, n.º 1, págs. 69-107.
- BLACK, F. (1989): «How we came up with the option formula», *Journal of Portfolio Management*, vol. 15, n.º 2, págs. 4-8. Traducido en *Análisis Financiero*, n.º 53, 1.º Trimestre, 1991, págs. 12-17.
- BLACK, F. y SCHOLES, M. (1972): «The valuation of options contracts and a test of market efficiency», *Journal of Finance*, vol. 27, mayo, págs. 399-418.
- BOLLEN, N. (1998): «Valuing options in regime-switching models», *Journal of Derivatives*, vol. 6, n.º 1, págs. 38-49.

- BOLLEN, N.; GRAY, S. y WHALEY, R. (2000): «Regime-Switching in foreign exchanges rates: evidence from currency option prices», *Journal of Econometrics*, vol. 94, págs. 239-276.
- BREEDEN, D. y LITZENBERGER, R. (1978): «Prices of state-contingent claims implicit in options prices», *Journal of Business*, vol. 51, n.º 4, págs. 621-651.
- BRITTEN-JONES, M. y NEUBERGER, A. (2000): «Option prices, implied price processes and stochastic volatility», *Journal of Finance*, vol. 55, n.º 2, págs. 839-1866.
- CHESNEY, M. y SCOTT, L. (1989): «Pricing european currency options: a comparison of the modified Black-Scholes model and a random variance model», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 24, págs. 267-284.
- CHRISS, N. (1996): «Transatlantic trees», *Risk*, vol. 9, págs. 45-48.
- COX, J. y ROSS, S. (1976): «The valuation of options for alternative stochastic processes», *Journal of Financial Economics*, vol. 3, n.º 1-2, págs. 145-166.
- COX, J. y ROSS, S. (1975): «The pricing of options for jumps processes», *Rodney L. White Center Working Paper*, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- DERMAN, E. y KANI, I. (1998): «Stochastic implied trees: arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility», *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, vol. 1, págs. 61-110.
- DERMAN, E. y KANI, I. (1994) «Riding on the smile», *Risk*, vol. 7, págs. 32-39.
- DUAN, J. (1995): «The GARCH option pricing model», *Mathematical Finance*, vol. 5, págs. 13-32.
- DUAN, J. y WEI, J. (1999): «Pricing foreign currency and cross-currency options under GARCH», *Journal of Derivatives*, vol. 7, n.º 1, págs. 51-63.
- DUMAS, B.; FLEMING, J. y WHALEY, R. (1998): «Implied volatility functions: empirical tests», *Journal of Finance*, vol. 53, n.º 6, págs. 2059-2106.
- DUPIRE, B. I. (1994): «Pricing with a smile», *Risk*, vol. 7, págs. 18-20.
- FERREIRA, E.; GAGO, M. y RUBIO, G. (2003): «A semiparametric estimation of liquidity effects on option pricing», *Spanish Economic Review*, vol. 5, n.º 1, págs. 1-24.
- FLAMOURIS, D. y GIAMOURIDIS, D. (2002): «Estimating implied PDFs from American options on futures: a new semiparametric approach», *Journal of Future Markets*, vol. 22, n.º 1, págs. 1-30.
- GAGO GARCÍA, M. (2001): *Un modelo semiparamétrico de valoración de opciones: el efecto de la liquidez*, Tesis Doctoral, Departamento de Economía Aplicada III y Departamento de Fundamentos del Análisis Económico, Universidad del País Vasco, Bilbao.
- GEMMILL, G. y SAFLEKOS, A. (2000) «How useful are implied distributions? Evidence from stock index options», *Journal of Derivatives*, vol. 7, n.º 3, págs. 83-98.
- GESKE, R. (1979): «The valuation of compound options», *Journal of Financial Economics*, vol. 7, n.º 1, págs. 63-81.
- GIAMOURIDIS, D. y TAMVAKIS, M. (2002): «Asymptotic distribution expansions in option pricing», *Journal of Derivatives*, vol. 9, n.º 4, págs. 33-44.
- HAUSER, S. y LAUTERBACH, B. (1996): «Tests of warrant pricing models: the trading profits perspective», *Journal of Derivatives*, vol. 4, n.º 2, págs. 71-79.
- HESTON, S. (1993): «A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options», *Review of Financial Studies*, vol. 6, n.º 2, págs. 327-343.
- HESTON, S. y NANDI, S. (2000): «A closed-form GARCH option valuation model», *Review of Financial Studies*, vol. 3, págs. 585-625.
- HULL, J. Y SUO, W. (2002): «A methodology for assessing model risk and its application to the implied volatility function model», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 37, n.º 2, págs. 297-318.
- HULL, J. y WHITE, A. (1987): «The pricing of options on assets with stochastic volatilities», *Journal of Finance*, vol. 42, n.º 2, págs. 281-300.

- JACKWERTH, J. (1997): «Generalized binomial trees», *Journal of Derivatives*, vol. 5, n.º 2, págs. 7-17.
- JACKWERTH, J. (1996): «Implied binomial trees: generalizations and empirical tests», *Working Paper*, University of California, Berkeley.
- JACKWERTH, J. y RUBINSTEIN, M. (1998): «Recovering stochastic processes from option prices», *Working Paper*, University of Wisconsin, Madison.
- LAUTERBACH, B. y SCHULTZ, P. (1990): « Pricing warrants: an empirical study of the Black-Scholes model and its alternatives», *Journal of Finance*, vol. 45, n.º 4, págs. 1181-1209.
- LEHNERT, T. (2003): «Explaining smiles: GARCH option pricing with conditional leptokurtosis and skewness», *Journal of Derivatives*, vol. 10, n.º 3, págs. 27-39.
- MELICK, W. y THOMAS, C. (1997): «Recovering an asset's implied PDF from option prices: an application to crude oil during the Gulf Crisis», *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 32, págs. 91-115.
- MERTON, R. (1976): «Option pricing when underlying stock return are discontinuous», *Journal of Financial Economics*, vol. 3, enero-marzo, págs. 125-144.
- NAIK, V. (1993): «Option valuation and hedging strategies with jumps in the volatility of asset returns», *Journal of Finance*, vol. 48, n.º 5, págs. 1969-1984.
- NAIK, V. y LEE, M. H. (1990): «General equilibrium pricing of options on the market portfolio with discontinuous returns», *Review of Financial Studies*, vol. 3, págs. 493-522.
- PEÑA, I.; RUBIO, G. y SERNA, G. (2001): «Smiles, bid-ask spreads and option pricing», *European Financial Management*, vol. 7, n.º 3, págs. 351-374.
- RITCHKEN, P. y TREVOR, R. (1999): « Pricing options under generalized GARCH and stochastic volatility processes», *Journal of Finance*, vol. 54, n.º 1, págs. 377-402.
- ROSENBERG, J. (2000): «Implied volatility functions: a reprise», *Journal of Derivatives*, vol. 7, n.º 3, págs. 51-64.
- ROSS, S. (1976): «Options and efficiency», *Quarterly Journal of Economics*, vol. 90, págs. 75-89.
- RUBINSTEIN, M. (1994): «Implied binomial trees», *Journal of Finance*, vol. 49, n.º 3, págs. 771-818.
- SABANIS, S. (2003): «Stochastic volatility and the mean reverting process», *Journal of Futures Markets*, vol. 23, n.º 1, págs. 33-47.
- SERNA, G. (2002): «Valoración de opciones con «sonrisas» de volatilidad: aplicación al mercado español de opciones sobre el futuro del índice Ibex 35», *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, vol. 31, n.º 114, págs. 1203-1227.
- STEIN, E. y STEIN, C. (1991): «Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach», *Review of Financial Studies*, vol. 4, págs. 727-752.
- STUTZER, M. (1996): «A simple nonparametric approach to derivative security valuation», *Journal of Finance*, vol. 51, n.º 5, págs. 1633-1652.
- TOMPkins, R. (2003): «Options on bond futures: isolating the risk premium», *Journal of Futures Markets*, vol. 23, n.º 2, págs. 169-215.
- WIGGINS, J. (1987): «Option values under stochastic volatility: theory and empirical estimates», *Journal of Financial Economics*, vol. 19, págs. 351-372.