eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIA ETA ENPRESA FAKULTATEA
FACULTAD DE ECONOMÍA Y EMPRESA

# Teoría de la Decisión bajo Incertidumbre e Inversión en Activos Financieros

Grado en Economía

Curso académico: 2023/2024

Autor: Yeray Varela Corredor

Director: Iñaki Aguirre Pérez

Bilbao, a 27 de septiembre de 2024

**RESUMEN**

El siguiente documento trata de una revisión e investigación bibliográfica en el ámbito de la teoría de la decisión bajo incertidumbre. Comienza sentando las bases principales de esta teoría. A continuación, se tratan la función de utilidad esperada y las actitudes de los individuos ante el riesgo. Finalmente, se hace una introducción en el área de los mercados de activos financieros y la valoración de estos mediante el modelo CAPM.

Palabras clave: incertidumbre, utilidad esperada, riesgo, aversión al riesgo, activos arriesgados.

**ABSTRACT**

The following paper deals with a literature review and research in the field of the decision theory under uncertainty. It begins by laying the main foundations of this theory. Next, the expected utility function and individuals' attitudes towards risk are discussed. Finally, an introduction is given to the area of financial asset markets and the valuation of financial assets using the CAPM model.

Keywords: uncertainty, expected utility, risk, risk aversion, risky assets.

# Índice

# 1. Introducción

Este trabajo de fin de grado ha sido motivado por el interés que me suscita el estudio de los mercados financieros. Así pues, entendí que este proyecto podría ser una buena oportunidad para dar los primeros pasos en el ámbito teórico sobre este tema. Posteriormente, recibí la noticia de haber sido admitido en el Máster Interuniversitario sobre *"Banca y Finanzas Cuantitativas"* que esta misma universidad imparte en colaboración con otras tres universidades más.

Además, considero que este trabajo puede ser un gran complemento a la formación recibida durante los últimos cuatro años en el área de microeconomía, la cual ha sido mi preferida durante el grado y en la cual me gustaría centrarme durante los primeros años de mi trayectoria laboral.

Durante las siguientes páginas vamos a introducir la teoría de la decisión bajo incertidumbre, sentando sus bases para poder explicar la función de la utilidad esperada von Neumann-Morgenstern. Posteriormente, daremos paso a definir las actitudes ante el riesgo de los individuos. También veremos las medidas de aversión al riesgo de Arrow-Pratt y la aplicaremos a la inversión en un activo arriesgado. De esta forma, nos introduciremos en el estudio de los mercados de activos financieros donde veremos dos modelos que guardan relación con lo visto anteriormente.

Por último, quiero destacar que todas las definiciones que se expresan durante este proyecto están sacadas de los cinco principales libros o manuscritos[1] que he usado para la elaboración de este. Estas definiciones han sido escogidas de entre los diferentes libros de texto utilizando la que me parecía más adecuada en cada momento y, en algunos casos, variando la terminología para seguir con la acorde a la del proyecto.

# 2. Teoría de la decisión bajo incertidumbre

En gran parte de la teoría microeconómica básica se presupone la existencia de la denominada información perfecta en los mercados de bienes y servicios. Esto quiere decir que todos los agentes conocen toda la información relevante del mercado así como los precios y las características básicas de los bienes comerciados.

[1] Véanse las seis primeras citas de las referencias bibliográficas.

Sin embargo, en el mundo real esto no siempre es cierto ya que los agentes no disponen de toda la información necesaria a la hora de decidir. Es entonces donde entran en juego los conceptos de incertidumbre y aleatoriedad de sucesos. Durante las decisiones bajo incertidumbre los agentes únicamente conocen las probabilidades con las que pueden darse los diferentes resultados. De esta manera, el resultado final de su elección no se puede conocer hasta que se resuelva la incertidumbre.[2]

Así pues, en microeconomía se distingue entre la teoría de la elección del consumidor y la teoría de la decisión bajo incertidumbre. En la teoría de la elección del consumidor, este es capaz de elegir entre diferentes lotes de consumo con certeza. Además, las preferencias del consumidor cumplen varios requisitos que serán la antesala a la teoría de la decisión bajo incertidumbre como lo son la completitud, la transitividad, la monotonía y la continuidad.

Aunque queda fuera del objeto de este proyecto se puede demostrar que bajo estos requisitos existe una función de utilidad que representa las preferencias del consumidor bajo situaciones de certeza absoluta. Por último, hay que añadir que dicha función de utilidad es únicamente ordinal, lo cual quiere decir que los números de utilidad no tienen ningún significado intrínseco, o lo que es lo mismo, que solo sirven para ordenar las cestas de bienes de mejor a peor valoradas. Esta es una de las principales diferencias con la teoría de la decisión bajo incertidumbre, donde veremos que la función estudiada es algo más que ordinal.

En base a la teoría del consumidor trataremos de entender la teoría de la decisión bajo incertidumbre y de representarla mediante la función de utilidad Von Neumann Morgenstern (VNM). Para ello, debemos conocer primero tanto los objetos de elección bajo incertidumbre como los axiomas de decisión bajo incertidumbre que subyacen a la función.

[2] Aguirre Pérez, I. (2024). Capítulo 4: Incertidumbre y Utilidad Esperada, *Notas sobre Incertidumbre y Contratos*. Autoedición.

## 2.1. Objetos de elección bajo incertidumbre

Como hemos referido anteriormente el consumidor no conoce con exactitud el resultado de la decisión que acabará tomando. Por ello, al consumidor le interesa conocer la distribución de probabilidad de obtener cada cesta de consumo diferente. Una distribución de probabilidad consiste en una lista de diferentes resultados y la probabilidad correspondiente a cada uno de ellos.[3]

Durante el proyecto examinaremos cestas de consumo expresadas en términos monetarios y en situaciones muy simples en las que solo tendremos dos resultados posibles para que resulte más comprensible.

Los posibles resultados de un acontecimiento aleatorio se denominan estados de la naturaleza.[4] Por ejemplo, cuando contratamos cualquier tipo de seguro, nos enfrentamos a dos estados de la naturaleza diferentes: que ocurra la pérdida o que no ocurra. En base a los estados de la naturaleza, se define un plan de consumo contingente como una especificación de lo que se consumirá en cada uno de los estados de la naturaleza. Dicho de otra forma, mediante la teoría de la elección bajo incertidumbre examinaremos las decisiones que reflejan las preferencias de los individuos por el consumo en cada circunstancia.

A continuación, vamos a definir y formalizar las cestas de consumo en términos monetarios a las que denominaremos loterías, y distinguiremos entre loterías simples y compuestas.

Una *lotería simple* asigna una probabilidad a cada uno de los resultados o premios posibles de un juego. Por su parte, una *lotería compuesta* es aquella cuyos premios son otras loterías que llevarán asociados en algún momento unos resultados o premios posibles. Una lotería compuesta puede ser tan prolongada como se quiera, caso extremo es el de la lotería estatal de EE. UU., que reparte como premios boletos para jugar la próxima lotería y así sucesivamente. En lo referente a nuestro proyecto una lotería compuesta siempre deberá llevar a algún premio o resultado que se dé a su vez en la lotería simple.

---

[3] Varian, Hal R. (1998). La incertidumbre, *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Actual* (p. 217). Antoni Bosch Editor.

[4] Véase Anexo I para una definición de estados de la naturaleza.

Para expresar los términos de lotería simple y compuesta de manera matemática vamos a denotar por $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ al conjunto finito de resultados o premios, los cuales no conllevan incertidumbre en sí mismos.

**Definición lotería simple.** Siendo $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ el conjunto de resultados, entonces el conjunto de loterías simples sobre $A$, $G_s$, viene dado por:

$$G_s = \{(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}.$$

Cuando una o más de las probabilidades $p_i$ es igual a cero, simplemente omitiremos esos términos dentro de la expresión de nuestra lotería. Entonces, una lotería simple vendrá dada por $L = \left(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n\right)$ y el valor esperado de esta lotería simple se define del siguiente modo:

$$E(L) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots p_n a_n = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i.$$

Para hacer más sencillo nuestro estudio teórico utilizaremos siempre loterías de mejor-peor resultado, esto es, loterías que solo tienen dos posibles resultados o premios, el mejor de ellos y el peor de ellos.

**Definición lotería compuesta.** Una lotería compuesta tendrá como posibles premios otras loterías $L_c = \left(p_1 \circ L_1, \dots, p_m \circ L_m\right)$, las cuales se definirán como $L_j = \left(p_{j1} \circ a_1, \dots, p_{jn} \circ a_n\right)$. De esta forma, cabe esperar que el valor esperado de una lotería compuesta se defina como la esperanza de las esperanzas:

$$E(L_c) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} p_j p_{ji} \right) a_i,$$

donde $\sum_{j=1}^{m} p_j p_{ji}$ es la probabilidad final o efectiva de obtener el premio $a_i$.

**Definición lotería degenerada.** Al hablar de lotería degenerada nos referimos a una lotería, ya sea simple o compuesta, en la cual el resultado es totalmente cierto, esto es, dicho resultado de la lotería sucede con probabilidad 1.

Además, gracias a los axiomas que introduciremos a continuación, el agente decisor tendrá una relación de preferencia débil $\succcurlyeq$, de preferencia estricta $\succ$ ,o de indiferencia $\sim$ sobre el conjunto de loterías que se le presente.

## 2.2. Axiomas de decisión bajo incertidumbre[5]

Los cuatro primeros axiomas de completitud, transitividad, continuidad y monotonía son comunes con la teoría de elección del consumidor bajo certidumbre. Posteriormente, añadiremos otros dos axiomas más que formarán las bases para la existencia de una función de utilidad dentro de la teoría de la decisión bajo incertidumbre.

**Axioma 1. Completitud.**

Dadas dos loterías cualesquiera pertenecientes a $G_s$, $g$ y $g'$, tenemos que $g$ preferido o indiferente a $g'$, o que $g'$ preferido o indiferente a $g$, o ambas.

El axioma de completitud formaliza la idea de que el agente decisor tiene la capacidad de discriminar y el conocimiento necesario para evaluar las diferentes alternativas.

**Axioma 2. Transitividad.**

Dadas tres loterías cualesquiera pertenecientes a $G_s$, $g$, $g'$ y $g''$, tenemos que si $g$ preferido a $g'$ y $g'$ preferido a $g''$, entonces $g$ preferido a $g''$.

Este axioma proporciona un supuesto de racionalidad o consistencia en las elecciones.

Los axiomas de completitud y transitividad juntos implican que los elementos de $A$ se pueden ordenar en términos de indiferencia o preferencia estricta. Por tanto, podemos asumir que los elementos de $A$ pueden ser ordenados tal que $a_1 \succcurlyeq a_2 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_n$. De

[5] Esta sección del capítulo se basa íntegramente en el libro *"Advanced Microeconomic Theory"* de los autores Geoffrey A. Jehle y Philip J. Reny.

esta forma, ninguna lotería puede ser mejor que ofrecer el resultado $a_1$ con certeza y ninguna lotería puede ser peor que ofrecer el resultado $a_n$ con certeza.

**Axioma 3. Continuidad.**

Dada una lotería $g$ en $G_s$, existe una probabilidad $\alpha$ entre 0 y 1 tal que:

$$g \sim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n).$$

Este axioma propone que si la indiferencia no se muestra en ningún extremo de la lotería en cuestión, entonces tendrá que mantenerse para algún valor de $\alpha$, es decir, para alguna combinación convexa de los dos resultados extremos de la lotería.

**Axioma 4. Monotonía.**

Para toda probabilidad $\alpha, \beta$ entre 0 y 1, tenemos que $(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$ es preferido o indiferente a $(\beta \circ a_1, (1-\beta) \circ a_n)$ si y solo si $\alpha \geq \beta$.

La monotonía expresa la idea de que dadas dos loterías simples que potencialmente solo pueden producir el mejor y el peor resultado, entonces la que produzca el mejor resultado con la mayor probabilidad será la lotería preferida. Este axioma implica $a_1 \succ a_n$, por lo que elimina la relación de indiferencia entre todos los resultados de $A$ que sí habíamos supuesto con los dos primeros axiomas.

**Axioma 5. Sustitución.**

Si $g = (p_1 \circ g^1, \dots, p_k \circ g^k)$, y $h = (p_1 \circ h^1, \dots, p_k \circ h^k)$ están en $G_s$, y si $h^i \sim g^i \; \forall \, i$ entonces $h \sim g$.

El axioma de sustitución implica que el agente decisor está indiferente entre dos loterías siempre y cuando este indiferente entre sus posibles resultados y estos se den con la misma probabilidad.

**Axioma 6. Reducción a loterías simples.**

Dada una lotería $g$ en $G_s$, si $(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$ es la lotería simple inducida por $g$, entonces $(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n) \sim g$.

Este axioma establece que el agente solo se preocupa acerca de las probabilidades efectivas que la lotería en cuestión asigne a cada resultado de $A$. Por ejemplo, supongamos que $A = \{a_1, a_2\}$. Consideremos la lotería compuesta que lleva al resultado $a_1$ con probabilidad $\alpha$ y a una lotería simple con probabilidad $1 - \alpha$; esta lotería simple da el resultado $a_1$ con probabilidad $\beta$ y el resultado $a_2$ con probabilidad $1 - \beta$. Esto quiere decir que el agente está indiferente entre la lotería compuesta y la lotería simple $(\alpha + (1 - \alpha)\beta \circ a_1, (1 - \alpha)(1 - \beta) \circ a_2)$ inducida por la lotería compuesta.

Decimos que para cualquier lotería $g$ en $G_s$, si $p_i$ $(i = 1, .., n)$ denota la~~s~~ probabilidad~~es~~ efectiva~~s~~ asignada~~s~~ a cada $a_i$ por $g$, entonces decimos que $g$ induce la lotería simple $(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$ perteneciente a $G_s$.

El axioma de reducción a loterías simples, junto con el axioma de transitividad, implica que las preferencias de un individuo sobre todas las loterías son determinadas únicamente por sus preferencias sobre loterías simples.

## 2.3. Función de utilidad von Neumann-Morgenstern (VNM)

Dados los axiomas de decisión bajo incertidumbre, entonces es posible representar estas preferencias con una función continua de valores reales. Además, se puede obtener una función que sea lineal con las probabilidades efectivas de los resultados o premios. En particular, para todo $i$, la función $u(a_i)$ asignará un valor real para la lotería degenerada $(1 \circ a_i)$. Pues bien, podemos referirnos a $u(a_i)$ como la utilidad del premio $a_i$ para el individuo. Una vez dicho esto, podemos extender esta propiedad de linealidad a cualquier lotería simple, la cual se denomina como propiedad de la utilidad esperada. Mediante dicha propiedad, estaremos en condiciones de decir que la función de utilidad esperada asigna a cada lotería el valor esperado de las utilidades de cada posible resultado, donde a cada utilidad se le asigna la probabilidad efectiva $p_i$ de que dicho resultado suceda.

**Propiedad de la utilidad esperada**. La función de utilidad $u: G \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad de la utilidad esperada si para todo $g$ perteneciente a $G$:

$$u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i),$$

donde $(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$ es la lotería simple inducida por $g$.

La función $u$ está completamente determinada para todo $G$ por los valores que adopta en el conjunto finito de resultados, $A$. Esto se debe a que si $u$ tiene la propiedad de la función de utilidad esperada y $g_s = (p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$ es una lotería simple, entonces tenemos que,

$$u(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i).$$

Suponemos que los individuos buscan maximizar la utilidad esperada, esto es, elegirán una lotería frente a otra si y solo si la utilidad esperada de una es mayor que la utilidad esperada de la otra.

Gracias a la propiedad de la utilidad esperada se puede expresar cualquier lotería como una suma lineal de la utilidad de cada resultado multiplicada por su probabilidad efectiva asociada. Esto último da pie a poder enunciar el teorema principal de la teoría de la decisión bajo incertidumbre. Así pues, a todas las funciones de utilidad que tengan la propiedad de la utilidad esperada se les llama funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern. Este tipo de funciones reciben este nombre en honor al matemático John von Neumann y al economista Oskar Morgenstern ya que en 1944 publicaron la obra *"Theory of Games and Economic Behavior"*, la cual está considerada como el principal fundamento de la teoría de la utilidad esperada.

**Teorema de existencia de la función de utilidad von Neumann-Morgenstern en *G*.** Si las preferencias (relación de preferencia débil) $\succcurlyeq$ sobre loterías en *G*, del agente decisor satisfacen los axiomas de elección bajo incertidumbre (completitud, transitividad, monotonía, continuidad, sustitución y reducción a loterías simples), entonces existe un función de utilidad $u\colon G \to \mathbb{R}$ que representa dichas preferencias en *G*, y que tiene la propiedad de la utilidad esperada.

Este teorema da a entender que si las preferencias del individuo satisfacen todos los axiomas necesarios, entonces existen valores de utilidad reales asignables a los resultados de $A$ de tal forma que el individuo prefiere una lotería sobre otra si y solo si tiene un valor esperado mayor de la utilidad. En otras palabras, esto nos indica que la función de utilidad esperada representa las preferencias del consumidor asignando números de utilidad a cada alternativa; siendo finalmente la utilidad de una lotería $g$ el valor esperado o esperanza de las utilidades de sus posibles resultados.

Por otro lado, sabemos que la función de utilidad esperada von Neumann-Morgenstern permite fijar de manera arbitraria niveles de utilidad para dos alternativas. Sin embargo, una vez se fijan estos niveles, todos los demás niveles de utilidad quedan entrelazados y no permiten cualquier transformación arbitraria que preserve el orden. Por lo tanto, se dice que la función de utilidad esperada es más que ordinal aunque no llega a ser completamente cardinal.

En la práctica, para determinar la utilidad de los resultados contenidos en $A$, únicamente tenemos que preguntar al individuo por la probabilidad del mejor resultado que le dejaría indiferente entre la lotería mayor-peor de la forma $(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$ y el resultado $a_i$ con certeza.

## 2.4. Transformaciones afines de la función VNM

En la teoría del consumidor, esto es, en las decisiones bajo certidumbre, teníamos que toda transformación monótona[6] de una representación de utilidad llevaba a otra función de utilidad que representaba las mismas preferencias, debido a que eran funciones únicamente ordinales.

En cambio, bajo la función de utilidad VNM el número de probabilidad $\alpha$ está determinado por las preferencias del agente decisor; por lo que tiene un significado en sí mismo y no se puede alterar sin también alterar las preferencias con las que está asociado.

Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$, donde $a_1 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_i \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_n$ y que se satisfacen los axiomas de decisión bajo incertidumbre. Sabemos por el axioma de continuidad que existe un $\alpha$ tal que $a_i \sim (\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ a_n)$.

[6] Sea $u$ una función de utilidad, entonces la función $v = f(u)$ es una transformación monótona de $u$ si siempre que $u(g) > u(g')$, tenemos que $v(g) > v(g')$. Esto implica que toda transformación creciente de $u$ representa las mismas preferencias que $u$.

Además, sea $u$ una representación de una función de utilidad VNM, tenemos que la relación anterior de indiferencia implica que:

$$u(a_i) = u(\alpha \circ a_1, (1-\alpha) \circ an) = \alpha u(a_1) + (1-\alpha)u(a_n).$$

Sumando y restando $\alpha u(a_i)$ a la izquierda de la ecuación y reordenando tenemos lo siguiente:

$$u(a_i) + \alpha u(a_i) - \alpha u(a_i) = \alpha u(a_1) + (1-\alpha)u(a_n)$$

$$\alpha u(a_i) + (1-\alpha)u(a_i) = \alpha u(a_1) + (1-\alpha)u(a_n)$$

$$(1-\alpha)u(a_i) - (1-\alpha)u(a_n) = \alpha u(a_1) - \alpha u(a_i)$$

$$(1-\alpha)(u(a_i) - u(a_n)) = \alpha(u(a_1) - u(a_i))$$

$$\frac{u(a_1) - u(a_i)}{u(a_i) - u(a_n)} = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Esta reorganización nos da a entender que los ratios de las diferencias entre los números de utilidad vienen dados por las preferencias del agente decisor ya que están determinados únicamente por el número de probabilidad $\alpha$.

Por tanto, para mantener las preferencias del agente decisor el ratio de las diferencias entre las utilidades debe tomar el mismo valor para toda representación de utilidad VNM. Como vamos a ver a continuación, las funciones de utilidad VNM son únicas salvo transformaciones afines positivas.

**Teorema de unicidad de la función de utilidad VNM.** Sea $u$ una función de utilidad VNM que representa las preferencias del agente decisor, entonces la función de utilidad VNM $v$ representa las mismas preferencias si y solo si es una transformación afín positiva de $u$:

$$v(g) = \alpha + \beta u(g), con\, \beta > 0 \ \forall \text{ lotería } g.$$

Veremos a continuación, la demostración de suficiencia y necesidad de este teorema.

**Demostración de suficiencia.** Sea $u$ una función de utilidad VNM que representa las preferencias del agente decisor. Si $v(g) = \alpha + \beta u(g)\ \forall g$, entonces $v$ representa las mismas preferencias que $u$ al ser una transformación monótona de la misma.

Comprobamos ahora que $v$ mantiene la propiedad de la utilidad esperada.

Sea $g \equiv (p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$, $u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i)$, y $v(g) = \alpha + \beta u(g)$. Tenemos que,

$$v(g) = \alpha + \beta u(g) = \alpha + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i),$$

$$v(g) = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i),$$

$$v(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i[\alpha + \beta u(a_i)] = \sum_{i=1}^{n} p_i v(a_i).$$

**Demostración de necesidad.** Vamos a suponer que $g$ es una lotería simple. Entonces lo que queremos demostrar es que si $u$ y $v$ son funciones VNM que están linealmente relacionadas para toda lotería simple, entonces también lo estarán para todas las loterías.

Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, y $g \equiv (p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$, donde $a_1 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_n$ y $a_1 \succ a_n$. Como $u$ representa $\succcurlyeq$, tenemos que $u(a_1) \geq \cdots \geq u(a_i) \geq \cdots \geq u(a_n)$ y $u(a_1) > u(a_n)$. Para cada $i = 1, \dots, n$ existe un único $\alpha_i \in [0,1]$ (por continuidad este número existe y por monotonía es único) tal que:

$$a_i \sim (\alpha_i \circ a_i, (1 - \alpha_i) \circ a_n).$$

Como $u$ representa las preferencias del agente decisor:

$$u(a_i) = u(\alpha_i \circ a_1, (1 - \alpha_i) \circ a_n).$$

Dado que $u$ tiene la propiedad de la utilidad esperada tenemos que:

$$u(a_i) = \alpha_i u(a_1) + (1 - \alpha_i) u(a_n). \quad (P1)$$

Análogamente, como $v$ representa también las preferencias del agente decisor y además tiene la propiedad de la utilidad esperada tenemos que:

$$v(a_i) = v(\alpha_i \circ a_1, (1 - \alpha_i) \circ a_n),$$

$$v(a_i) = \alpha_i v(a_1) + (1 - \alpha_i) v(a_n). \quad (P2)$$

Despejando de P1 y P2 el ratio $(1 - \alpha_i)/\alpha_i$ y reordenando llegamos a la siguiente igualdad:

$$\frac{u(a_1)-u(a_i)}{u(a_i)-u(a_n)}=\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}=\frac{v(a_1)-v(a_i)}{v(a_i)-v(a_n)},$$

$$\big(u(a_1)-u(a_i)\big)\big(v(a_i)-v(a_n)\big)=\big(v(a_1)-v(a_i)\big)\big(u(a_i)-u(a_n)\big). \quad (P3)$$

Ahora, podemos expresar (P3) en función de una constante $\alpha$ y una constante $\beta > 0$:[7]

$$v(a_i)=\alpha+\beta u(a_i), \forall i=1,\dots,n,$$

$$\text{con } \alpha=\frac{u(a_1)v(a_n)-v(a_1)u(a_n)}{u(a_1)-u(a_n)} \text{ y } \beta=\frac{v(a_1)-v(a_n)}{u(a_1)-u(a_n)}.$$

Entonces, para cualquier lotería $g$, si $(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$ es la lotería simple inducida por $g$, tenemos como resultado lo siguiente:

$$v(g)=\sum_{i=1}^{n}p_i v(a_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i[\alpha+\beta u(a_i)]=\alpha+\beta\sum_{i=1}^{n}p_i u(a_i),$$

$$v(g)=\alpha+\beta u(g). \quad (c.q.d.)$$

Este teorema nos indica que las funciones de utilidad VNM no son completamente únicas, ni completamente cardinales, aunque sí tienen algún sentido más allá de la ordinalidad. Mediante estas transformaciones, podemos encontrar infinitas funciones de utilidad que representan las mismas preferencias y que mantienen la propiedad de la utilidad esperada. Sin embargo, mediante estas funciones no podemos hacer comparaciones interpersonales de bienestar, ni medir la intensidad con la que una lotería es preferida a otra. Para ello, tendremos que estudiar las actitudes ante el riesgo de los individuos, las cuales se pueden interpretar mediante las funciones de utilidad VNM y el número de probabilidad $\alpha$ determinado por las preferencias del agente decisor.

# 3. Actitudes ante el riesgo

Para definir las actitudes ante el riesgo que un individuo puede tomar, vamos a centrar nuestra atención en loterías cuyos premios sean diferentes cantidades de riqueza no negativas. En particular, las loterías que tendremos en cuenta a partir de ahora tomarán la forma $(p_1 \circ a_1, \dots, p_n \circ a_n)$ $, w_i > 0, p_i \geq 0 \; y \; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Suponemos también que

[7] Véase Anexo II para una demostración de cómo se obtienen las constantes $\alpha$ y $\beta$.

la función de utilidad von Neumann-Morgenstern es diferenciable con $u'(w) > 0\ \forall w$.

Nos centramos en la relación existente entre la función de utilidad esperada von Neumann-Morgenstern y la actitud ante el riesgo del agente decisor. Sabemos por definición que el valor esperado de una lotería simple $g$ que ofrece $w_i$ con probabilidad $p_i$ viene dada por la expresión $E(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, w_i$.

Supongamos que al individuo se le ofrece la oportunidad de aceptar la lotería $g$ o de recibir con certeza el valor esperado de la lotería $g$. El individuo tendrá que decidir entre las siguientes alternativas de utilidad:

*Utilidad esperada de la lotería $g$:* $u(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i)$.

*Utilidad esperada del valor esperado de la lotería $g$:* $u(E(g)) = u(\sum_{i=1}^{n} p_i\, w_i)$.

Si las preferencias del individuo satisfacen los axiomas de decisión bajo incertidumbre, sabemos que el individuo preferirá la alternativa que le ofrezca una mayor utilidad esperada. Además, como una función VNM está completamente determinada por todos los valores que supone el conjuntos de resultados $A$, basta con centrarse en el comportamiento de la función $u$ en $G_s$ para conocer las actitudes individuales ante el riesgo. Estas actitudes ante el riesgo del sujeto pueden ser de aversión, de indiferencia y de amor.

**Definición de las diferentes actitudes ante el riesgo.** Sea $u$ una función de utilidad von Neumann-Morgenstern de un individuo para valores no negativos de riqueza, entonces para la lotería simple $g \equiv (p_1 w_1, \dots, p_n w_n)$, se dice que el individuo es

- averso al riesgo en $g$ si $u\big(E(g)\big) > u(g)$,
- neutral al riesgo en $g$ si $u(E(g)) = u(g)$,
- amante del riesgo en $g$ si $u(E(g)) < u(g)$.

Además, sea cual sea la actitud ante el riesgo del individuo existirá una cantidad de riqueza ofrecida con total probabilidad la cual le hará estar indiferente entre aceptar esa cantidad de riqueza con certeza y jugar la lotería $g$. Esta cantidad de riqueza es a lo que llamaremos *equivalente cierto* de la lotería $g$ para el individuo.

**Definición de equivalente cierto.** El equivalente cierto $EC$ de cualquier lotería simple $g$, $EC(g)$, sobre niveles positivos de riqueza es aquella cantidad de riqueza ofrecida con certeza tal que $u(g) \equiv u(EC(g))$.

**Definición prima de riesgo.** La prima de riesgo o compensación al riesgo es la cantidad de riqueza $P$ tal que $u(g) \equiv u(E(g) - P)$. Por lo que, $u(EC(g)) \equiv u(E(g) - P) \implies EC(g) \equiv E(g) - P \implies P \equiv E(g) - EC(g)$.

Introduciremos también aquí la noción de juego justo para posteriormente evaluar cómo se comportará cada individuo ante un juego de este tipo según su actitud ante el riesgo.

**Definición juego justo.** Un juego justo es aquel en el que con la misma probabilidad se puede ganar o perder una cantidad de dinero $h$. Consideremos un individuo con un nivel de riqueza inicial $w_0$. Si decide participar en el juego justo se enfrentará a la siguiente lotería

$$g \equiv (\tfrac{1}{2}(w_0 + h), \tfrac{1}{2}(w_0 - h)),$$

cuyo valor esperado es $E(g) = \frac{1}{2}(w_0 + h) + \frac{1}{2}(w_0 - h) = w_0$.

## 3.1. Aversión al riesgo

Un individuo averso al riesgo preferirá el valor esperado de la lotería con certeza a participar en ella. Esto quiere decir que para este tipo de individuos la utilidad del valor esperado de la lotería será mayor que la utilidad de la lotería.

Además, según la actitud al riesgo del individuo la función de utilidad esperada en cuestión toma una determinada forma. Si el individuo es averso al riesgo su función de utilidad será estrictamente cóncava[8], esto es, la segunda derivada de la función será negativa para todo nivel de riqueza, $u''(w) < 0 \; \forall w$.

Por otra parte, podemos observar la actitud ante el riesgo del sujeto fijándonos en el equivalente cierto. Para un individuo averso al riesgo tenemos lo siguiente:

---

[8] Una función real $f$ es estrictamente cóncava si $\forall x, y \in C, y \; \forall t \in (0,1)$ se cumple que $f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$. A su vez, para una función estrictamente convexa esta condición se cumplirá en sentido contrario, $<$. Por su parte, para una función lineal esta condición se cumplirá con igualdad.

$$u\big(EC(g)\big) = u(g)\ , \qquad u(E(g)) > u(g), \qquad u'(w) > 0.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$u\big(EC(g)\big) < u\big(E(g)\big) \Rightarrow EC(g) < E(g).$$

En consecuencia, el equivalente cierto de una lotería será menor que el valor esperado de la misma lotería si el individuo es averso al riesgo. Y por ello, por definición, para este tipo de individuos la prima de riesgo será positiva, $P > 0$. Una persona aversa al riesgo pagaría alguna cantidad de riqueza para evitar el riesgo inherente a una lotería. Este deseo de pagar para evitar el riesgo está medido por el premio al riesgo.

En cuanto a la participación en un juego justo como el definido en el apartado anterior, el individuo averso al riesgo nunca aceptará participar en él.

Para ilustrar[9] la forma de la función de utilidad vamos a suponer una lotería simple $L = ((w_1, w_2)(p, 1-p))$. Al individuo se le ofrece la posibilidad de elegir entre la riqueza del valor esperado de la lotería con certeza y jugar la lotería. Por tanto, el individuo se debate entre las siguientes dos alternativas:

$$u\big(E(L)\big) = u(pw_1 + (1-p)w_2),$$

o

$$u(L) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2).$$

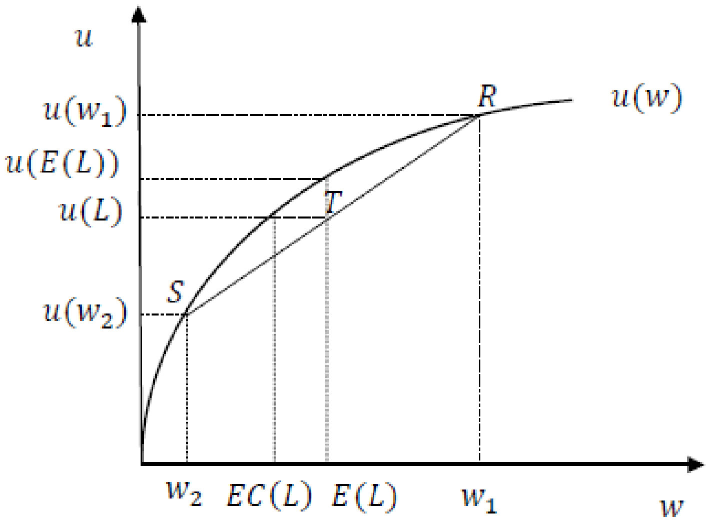
Ahora trazamos una cuerda entre los puntos $R = (w_1, u(w_1))$ y $S = (w_2, u(w_2))$ y localizamos la combinación convexa $T = pR + (1-p)S$; cuya abscisa es $E(L)$ y su ordenada es $u(L)$.

Ahora podemos localizar la utilidad del valor esperado de la lotería $u(E(L)$ en el gráfico de la función de utilidad esperada $u(w)$.[10] Como se aprecia en el gráfico el individuo averso al riesgo tiene una función de utilidad esperada estrictamente cóncava y prefiere el valor esperado de la lotería $E(L)$ con certeza a la opción de participar en ella.

[9] El siguiente razonamiento está basado en: Aguirre Pérez, I. (2024). Capítulo 4: Incertidumbre y Utilidad Esperada, *Notas sobre Incertidumbre y Contratos* (pp. 21-22) Autoedición.

[10] Todo el procedimiento descrito aquí es completamente igual para los individuos neutrales y amantes del riesgo. Por tanto, en los siguientes apartados únicamente se incluirá el gráfico correspondiente.

*Ilustración 1. Aversión al riesgo y concavidad estricta de la función de utilidad esperada.*




*Fuente: Aguirre Pérez, I. (2024). Capítulo 4: Incertidumbre y Utilidad Esperada,* Notas sobre Incertidumbre y Contratos *(p. 22). Autoedición.*

Cabe destacar que la aversión al riesgo es la actitud más común en cuanto al mundo real se refiere. Debido a esto, en algunos de los apartados siguientes se dará la hipótesis de aversión al riesgo de los individuos.

A continuación y de una forma totalmente análoga vamos a estudiar tanto la neutralidad al riesgo como el amor al riesgo de los individuos.

## 3.2. Neutralidad ante el riesgo

Un individuo neutral al riesgo estará indiferente entre el valor esperado de una lotería con certeza y participar en la lotería. Por tanto, su utilidad del valor esperado de la lotería será igual que su utilidad de la lotería.

En el caso del individuo neutral al riesgo, su función de utilidad VNM será lineal para todo nivel de riqueza ya que su segunda derivada es igual a cero, $u''(w) = 0 \; \forall w$.

En términos de equivalente cierto tendríamos lo siguiente para un individuo neutral al riesgo:

$$u\big(EC(g)\big) = u(g), \qquad u\big(E(g)\big) = u(g), \qquad u'(w) > 0.$$

Por lo tanto, tenemos que:

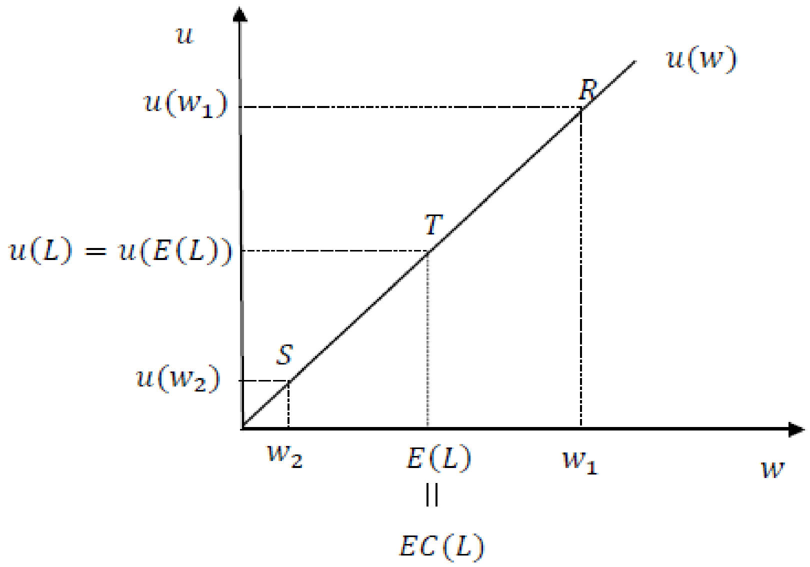
$$u(EC(g)) = u(E(g)) \Rightarrow EC(g) = E(g).$$

En consecuencia, para un individuo con una actitud de neutralidad ante el riesgo el equivalente cierto de una lotería será igual que el valor esperado de la misma lotería. A su vez, esto nos indica que su prima de riesgo será nula, $P = 0$.

Por otra parte, el individuo neutral al riesgo se encontrará también indiferente entre aceptar un juego justo o no aceptarlo.

Por último, para este tipo de individuos al localizar la utilidad del valor esperado de una lotería $L$, $u(E(L)$, en el gráfico de la función de utilidad VNM $u(w)$ nos encontramos con que el individuo neutral al riesgo está indiferente entre el valor esperado de la lotería $E(L)$ con certeza y la opción de participar en ella.

*Ilustración 2. Neutralidad ante el riesgo y linealidad de la función de utilidad esperada..*




*Fuente: Aguirre Pérez, I. (2024). Capítulo 4: Incertidumbre y Utilidad Esperada,* Notas sobre Incertidumbre y Contratos *(p. 22). Autoedición.*

## 3.3. Amor al riesgo

Un individuo amante del riesgo preferirá siempre jugar la lotería a obtener con certeza el valor esperado de la misma. Esto nos indica que para un individuo averso al riesgo la utilidad de la lotería es mayor que la utilidad del valor esperado de la lotería.

Para el individuo amante del riesgo, nos encontraremos con que la segunda derivada de su función de utilidad esperada es positiva, $u''(w) > 0\ \forall w$. Por ello, en este caso, la función de utilidad esperada será estrictamente convexa para todo nivel de riqueza.

Al analizar el equivalente cierto para un individuo amante del riesgo tenemos lo siguiente:

$$u\big(EC(g)\big) = u(g)\,, \qquad u\big(E(g)\big) < u(g), \qquad u'(w) > 0.$$

Por lo tanto, tenemos que:

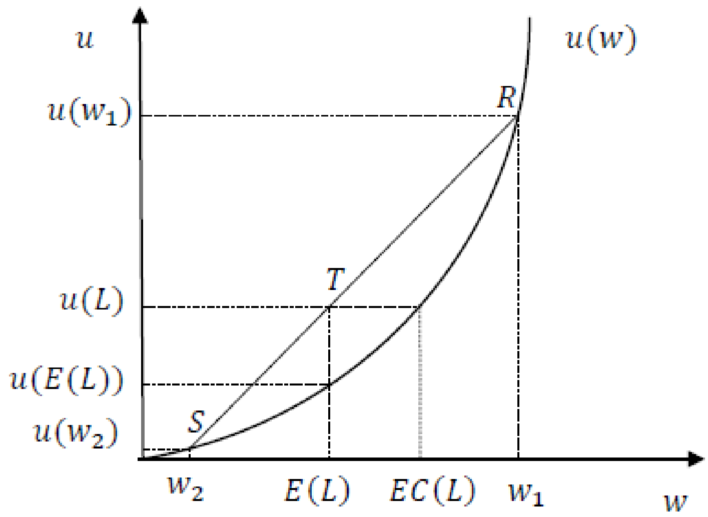
$$u\big(EC(g)\big) > u\big(E(g)\big) \Rightarrow EC(g) > E(g).$$

Podemos concluir entonces que si el individuo es amante del riesgo, el equivalente cierto de una lotería será mayor que el valor esperado de la misma lotería. Por tanto, el amante del riesgo estará incluso dispuesto a pagar por jugar la lotería ya que su prima al riesgo es negativa, $P < 0$.

En relación al juego justo, el individuo amante del riesgo siempre estará dispuesto a aceptarlo.

En este último caso, al localizar la utilidad del valor esperado de una lotería $L$, $u(E(L)$, en el gráfico de la función de utilidad VNM $u(w)$ nos encontramos con que el individuo amante del riesgo, al tener una función de utilidad estrictamente convexa, preferirá jugar la lotería a obtener el valor esperado de la lotería $E(L)$ con certeza.

*Ilustración 3. Amor al riesgo y convexidad estricta de la función de utilidad esperada.*




*Fuente: Aguirre Pérez, I. (2024). Capítulo 4: Incertidumbre y Utilidad Esperada,* Notas sobre Incertidumbre y Contratos *(p. 22). Autoedición.*

## 3.4. Medidas de aversión al riesgo de Arrow-Pratt: Aversión Absoluta al Riesgo y Aversión Relativa al Riesgo

En primera instancia podríamos suponer que una buena forma para medir cuán averso al riesgo es un individuo sea medir la curvatura de la segunda derivada de su función de utilidad esperada $u$. Supondríamos que a mayor valor absoluto de esta derivada, mayor grado de aversión al riesgo presentaría el individuo.

Sin embargo, esta medida de la segunda derivada es totalmente arbitraria ya que podríamos conseguir el valor que deseáramos multiplicando la función de utilidad esperada por una constante positiva. Por ello, la segunda derivada solo sirve para definir la aptitud ante el riesgo del individuo a base de observar su signo.

Es entonces cuando entra en juego la medida de aversión al riesgo de Arrow-Pratt en la que propusieron medir cuán averso al riesgo es un individuo en base al cociente entre la segunda derivada de su función de utilidad VNM y la primera derivada de esta. Esta medida permite hacer comparaciones entre funciones de utilidad esperada de diferentes individuos hacia juegos o loterías arriesgadas cuyos resultados son pérdidas o ganancias en base a la riqueza inicial $w$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que dos funciones de utilidad de la riqueza pueden ser perfectamente no comparables entre sí ya que podría darse que:

$$R_a^i(w) > R_a^j(w), \text{para algún } w; \text{ y } R_a^i(w') < R_a^j(w'), \text{para algún } w'.$$

Dicho de otro modo, tenemos que esta relación de *"al menos tan averso al riesgo como"* es una relación transitiva de las funciones de utilidad, pero está lejos de ser una relación completa.

**Definición de Medida de Arrow-Pratt de Aversión Absoluta al Riesgo.** La medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt $R_a$ viene dada por:

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

La medida de Arrow-Pratt cumple con la propiedad de aceptar cualquier transformación afín positiva ya que se mantiene invariable ante ellas. Una transformación afín positiva hará variar tanto el numerador como el denominador en la misma proporción, por lo tanto el ratio entre ambos se mantendrá inalterado.

Además, otra propiedad de esta medida es que nos advierte de la actitud ante el riesgo del individuo mediante su signo. De esta forma, podemos encontrarnos con los siguientes casos:

- averso al riesgo si $R_a(w) > 0$,
- neutral al riesgo si $R_a(w) = 0$,
- amante del riesgo si $R_a(w) < 0$.

Por otro lado, cuanto mayor es $R_a(w)$ mayor aversión al riesgo presenta el individuo en términos de comportamiento, aunque desconozcamos la actitud hacia el riesgo del individuo ya que desconocemos el signo de $R_a(w)$. Esto significa que tendrá un equivalente cierto más bajo para sus loterías, estando dispuesto a aceptar menor cantidad de ellas.

Sin embargo, $R_a(w)$ es una medida local de medición de aversión al riesgo, por lo cual no tiene por qué ser la misma para todo nivel de riqueza. Es más, lo normal es que la aversión ante el riesgo varie según el nivel de riqueza. Así pues, una función de utilidad VNM representa una aversión absoluta al riesgo decreciente, constante o creciente en un tramo de riqueza si el valor de su $R_a(w)$ decrece, permanece constante o crece en dicho intervalo de riqueza:

- aversión absoluta al riesgo decreciente si $R'_a(w) < 0$,
- aversión absoluta al riesgo constante si $R'_a(w) = 0$,
- aversión absoluta al riesgo creciente si $R'_a(w) > 0$.

Lo más sensato es que la aversión absoluta al riesgo de los individuos sea decreciente cuando aumenta la riqueza, esto es lo que se conoce como *"Decresing Absolute Risk Aversion (DARA)"*. El concepto de DARA impone que el individuo es menos averso a tomar riesgos pequeños cuanto mayor es su nivel de riqueza.

**Definición de DARA.** Una función de utilidad esperada von Neumann-Morgenstern presenta aversión absoluta al riesgo decreciente si $R_a(w)$ es una función decreciente de la riqueza $w$.

Para entender mejor estos conceptos, vamos a calcular la medida de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo para diferentes funciones de utilidad de la riqueza. Después calcularemos su primera derivada para ver si cumplen el criterio de DARA.

*Ejemplo 1. Función de utilidad de la riqueza de la forma* $u(w) = \sqrt{w}, donde\ w > 0.$

$$u'(w) = \frac{1}{2} w^{-1/2}.$$

$$u''(w) = -\frac{1}{4} w^{-3/2}.$$

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\frac{\left(-\frac{1}{4} w^{-3/2}\right)}{\frac{1}{2} w^{-1/2}} = \frac{1}{2} w^{-1} = \frac{1}{2w} \quad \Longrightarrow \quad R_a(w) > 0.$$

$$R_a'(w) = -\frac{1}{2w^2} \quad \Longrightarrow \quad R_a'(w) < 0.$$

Tenemos que para esta función de utilidad, las preferencias son de aversión al riesgo. Además, presentan aversión absoluta al riesgo decreciente, esto es, sí cumplen el concepto de DARA.

*Ejemplo 2. Función de utilidad de la riqueza* $u(w) = 1 - e^{-aw}, donde\ w > 0\ y\ a > 0.$

$$u'(w) = ae^{-aw}.$$

$$u''(w) = -a^2 e^{-aw}.$$

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\frac{(-a^2 e^{-aw})}{ae^{-aw}} = a \quad \Longrightarrow \quad R_a(w) > 0.$$

$$R_a'(w) = 0.$$

Para este tipo de preferencias nos encontramos con que presentan aversión al riesgo. Sin embargo, en este caso, las preferencias no cumplen el criterio de DARA ya que presentan aversión absoluta al riesgo constante.

*Ejemplo 3. Función de utilidad de la riqueza* $u(w) = aw^2, donde\ w > 0\ y\ a > 0.$

$$u'(w) = 2aw.$$

$$u''(w) = 2a.$$

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\frac{2a}{2aw} = -\frac{1}{w} \quad \Longrightarrow \quad R_a(w) < 0.$$

$$R_a'(w) = \frac{1}{w^2} \quad \Longrightarrow \quad R_a' > 0.$$

En este caso, tenemos unas preferencias de amor al riesgo para las condiciones impuestas. Por otro lado, nos encontramos con un ejemplo de aversión absoluta al riesgo creciente.

*Ejemplo 4. Función de utilidad de la riqueza* $u(w) = a + \frac{w}{b}, donde\ w > 0\ y\ b > 0$..

$$u'(w) = \frac{1}{b}.$$

$$u''(w) = 0.$$

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\frac{0}{1/_b} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_a(w) = 0.$$

$$R_a'(w) = 0.$$

Este último ejemplo más sencillo se ha puesto para ilustrar una función de utilidad esperada que presente unas preferencias neutrales al riesgo. A su vez, también presenta una aversión al riesgo constante.

Uno de los problemas de esta medida de aversión absoluta al riesgo es que depende del nivel de riqueza $w$ del individuo. Para paliar este inconveniente se utiliza la medida de aversión relativa al riesgo de Arrow-Pratt $RR_a(w)$. Esta mide la variación del grado de aversión al riesgo en relación con variaciones proporcionales en la riqueza $w$. En otras palabras, permite hacer comparaciones entre funciones de utilidad esperada de diferentes individuos hacia juegos arriesgados cuyas soluciones serán porcentajes de ganancias o pérdidas sobre la riqueza inicial $w$.

**Definición de medida de Arrow-Pratt de Aversión Relativa al Riesgo.** La medida de Arrow-Pratt de aversión relativa al riesgo $RR_a$ viene dada por:

$$RR_a(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Prestando atención a esta definición, tenemos que la medida de Arrow-Pratt de aversión relativa al riesgo se puede interpretar como la elasticidad de $u'(w)$. De esta forma, es más intuitivo ver que $RR_a$ mide la variación relativa que experimenta la primera derivada de la función de utilidad, $u'(w)$, como consecuencia de una variación porcentual de la riqueza $w$:

$$RR_a(w) = -\frac{d\big(u'(w)\big)}{dw} \cdot \frac{w}{u'(w)}.$$

Las aplicaciones más directas de las medidas de Arrow-Pratt en cuanto a la aversión al riesgo las podemos encontrar a la hora de determinar la formación de carteras de inversión con un activo arriesgado y un activo libre de riesgo. Según la teoría nos encontramos con que "si la aversión absoluta al riesgo $R_a(w)$ es decreciente, constante o creciente, entonces la cantidad de riqueza invertida en el activo arriesgado, $\beta$, dentro de la cartera crecerá, permanecerá constante o decrecerá con la riqueza, respectivamente".

A continuación, vamos a demostrar esta teoría para el caso de un individuo averso al riesgo cuando la aversión absoluta al riesgo es decreciente, lo cuál es el caso habitual.

## 3.5. Inversión en un activo arriesgado

Consideramos un inversor averso al riesgo que tiene que decidir cuánto de su riqueza inicial $w$ va a invertir en un activo arriesgado. El activo arriesgado puede tener tanto rentabilidades positivas como negativas $r_i$ con probabilidad $p_i$, siendo $i = 1, \dots, n$. Siendo $\beta$ la cantidad de riqueza invertida en el activo y la riqueza final $w_f$, la lotería $g$ a la que se enfrenta el inversor y el valor esperado de dicha lotería vendrán determinados por las siguientes expresiones:

$$w_f = (w - \beta) + (1 + r_i)\beta = w + \beta r_i,$$

$$g \equiv \big(p_1(w + \beta r_i), \dots, p_n(w + \beta r_i)\big),$$

$$E(g) = w + \beta \sum_{i=1}^{n} p_i r_i\,.$$

Por tanto, el problema del inversor es elegir la cantidad de riqueza invertida $\beta$ que maximice su utilidad esperada de la riqueza,

$$\max_{\beta} \sum_{i=1}^{n} p_i u(w + \beta r_i) \quad sujeto\ a\ 0 \leq \beta \leq w.$$

Lo primero que vamos a determinar es en qué circunstancias un individuo averso al riesgo tomará la decisión de no invertir nada en el activo arriesgado. Evaluamos la primera derivada en $\beta = 0$:

$$\frac{du(\beta = 0)}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} p_i u'(w + \beta r_i) r_i = u'(w) \sum_{i=1}^{n} p_i r_i,$$

donde $\sum_{i=1}^{n} p_i r_i$ es el rendimiento esperado del activo arriesgado.

Como $u'(w) > 0$, si el rendimiento esperado del activo fuera negativo o cero entonces $\frac{du(\beta=0)}{d\beta} \leq 0$. Como la función de utilidad esperada es estrictamente cóncava $\frac{du(\beta)}{d\beta} < 0\ \forall\beta > 0$ y, por tanto, $\beta^* = 0$. Por ello, el individuo averso al riesgo no invertirá en el activo arriesgado siempre que el valor del rendimiento esperado sea negativo o cero.

Supongamos ahora que el activo arriesgado tiene un rendimiento esperado positivo y por tanto al individuo le interesa invertir el primer euro (infinitesimal) en el activo arriesgado. Tenemos entonces que la restricción al problema de maximización será $0 < \beta^* < w$ y las condiciones de primer y segundo orden que deberá resolver el individuo las siguientes:

$$\frac{du(\bullet)}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} p_i u'(w + \beta^* r_i) r_i = 0,$$

$$\frac{d^2u(\bullet)}{d\beta^2} = \sum_{i=1}^{n} p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i^2 < 0.$$

Hay que destacar que como el agente decisor es averso al riesgo está garantizado el cumplimiento de las condiciones de segundo orden. Por último, vamos a comprobar que ocurrirá con la cantidad de riqueza invertida en el activo arriesgado cuando la riqueza inicial aumenta. La evidencia empírica asume que cuando la riqueza aumenta, una mayor cantidad absoluta de riqueza es invertida en el activo arriesgado. Esto nos da a entender que los activos arriesgados se comportan como bienes normales. Vamos a comprobar que esto es cierto bajo el supuesto de aversión absoluta al riesgo decreciente (DARA). Para ello, vamos a diferenciar la condición de primer orden anterior completamente respecto de $\beta^*$ y $w$:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i^2\right] d\beta + \left[\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w + \beta^* r_i) r_i\right] dw = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dw} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i^2}.$$

Que el individuo sea averso al riesgo nos asegura que el denominador es negativo, por lo que el activo arriesgado se comportará como un bien normal si y solo si el numerador es también negativo. El concepto de DARA es suficiente para asegurar que el numerador será negativo. Para este caso, por definición de aversión absoluta al riesgo tenemos lo siguiente:

$$R_a(w+\beta^* r_i) = -\frac{u''(w+\beta^* r_i)}{u'(w+\beta^* r_i)}.$$

Reordenando y multiplicando ambos lados de la igualdad por $r_i$ obtenemos:

$$-u''(w+\beta^* r_i) r_i = R_a(w+\beta^* r_i) r_i u'(w+\beta^* r_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Además, bajo DARA sabemos que $R_a(w) > R_a(w+\beta^* r_i)$ si $r_i > 0$, y que $R_a(w) < R_a(w+\beta^* r_i)$ si $r_i < 0$. Si multiplicamos ambas desigualdades por $r_i$ obtenemos en los dos casos que $R_a(w) r_i > R_a(w+\beta^* r_i) r_i$, siendo $i = 1, \dots, n$.

Sustituyendo en la ecuación obtenida de la definición de aversión absoluta al riesgo,

$$-u''(w+\beta^* r_i) r_i < R_a(w) r_i u'(w+\beta^* r_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Por último, calculando el valor esperado de ambas expresiones obtenemos, como queríamos demostrar, que el numerador de la expresión de $\frac{d\beta}{dw}$ es negativo también. Por tanto, llegamos a la conclusión de que el activo arriesgado actúa como un bien normal, esto es, a mayor riqueza mayor será la riqueza depositada en el activo arriesgado:

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i u''(w+\beta^* r_i) r_i < R_a(w) \sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i u'(w+\beta^* r_i) = 0. \quad (c.q.d.)$$

En cuanto a la aversión relativa al riesgo a la hora de invertir en un activo arriesgado tenemos que "si la aversión relativa al riesgo $RR_a(w)$ es decreciente, constante o creciente, entonces la proporción de la riqueza invertida en el activo arriesgado, $\gamma = \frac{\beta}{w}$, crecerá, permanecerá constante o decrecerá con la riqueza, respectivamente".[11]

[11] Los casos de aversión relativa al riesgo decreciente, constante o creciente se pueden demostrar de manera análoga a la demostración que acabamos de hacer anteriormente bajo el supuesto de DARA.

# 4. Los mercados de activos financieros

Los mercados de activos financieros permiten a las personas o a las instituciones modificar sus formas de consumo a lo largo del tiempo, es decir, facilitan la asignación eficiente del capital. Para ello, tratan de poner en contacto a agentes que necesitan financiación para sus proyectos con otros agentes que desean obtener un rendimiento por su capital. En una economía moderna como la actual existen diferentes instituciones financieras para realizar estas operaciones como los bancos o las bolsas de valores.

Las bolsas de valores son mercados organizados, sujetos a regulación oficial y supervisados por una comitiva estatal que permiten la canalización de capital a medio y largo plazo de los inversores a agentes tanto públicos como privados que necesitan recursos en el presente. Tienen la exclusiva para la negociación de acciones y valores convertibles o que otorguen un derecho de suscripción. Mediante estas también es posible la contratación de renta fija, de warrants, de certificados y de fondos cotizados. Pero además, tienen un papel similar al de un seguro ya que, en cierto modo, permiten difundir el riesgo a otros agentes reduciendo el riesgo individual en el que incurre el inversor. Las bolsas de valores permiten al inversor depositar su riqueza en activos financieros[12] diferentes, evitando así posiciones muy arriesgadas en las que juegas todo tu capital a una única carta. De la misma forma, los propietarios de las empresas también tienen incentivos para emitir acciones de su sociedad para repartir el riesgo entre todos los accionistas de esta.

Otra manera de reducir el riesgo de las inversiones es mediante la diversificación. De esta manera, se pueden obtener unos rendimientos de las inversiones más seguros y, por lo tanto, más atractivos para los individuos aversos al riesgo. El problema de la diversificación es que es muy sencilla si se encuentran activos con una correlación negativa perfecta, esto es, cuando uno incrementa su valor el otro lo disminuye y viceversa; pero estos pares de activos son muy difíciles de encontrar en la vida real. Aun así, en la medida en que las oscilaciones de los precios de los activos no estén perfectamente correlacionadas, la diversificación reportará algunas ventajas en cuanto a

[12] Un activo financiero es un título que acredita a su poseedor el derecho a recibir un ingreso futuro por parte del vendedor. Los activos financieros no suelen tener un valor físico y suelen ser emitidos por entidades económicas tanto públicas como privadas. Es recomendable recordar que el efectivo se considera también un activo financiero.

la reducción del riesgo.[13]

Sin embargo, a diferencia del caso de los seguros en los que puedes reducir por completo el riesgo, en las bolsas de valores subsiste un riesgo global. Como hemos visto anteriormente la mayoría de las personas son aversas al riesgo (esto no significa que no estén dispuestas a correr riegos), pero siempre hay personas dispuestas a correr riesgos si se les compensa lo suficiente por ello. De esta forma, las bolsas de valores permiten transferir inversiones arriesgadas de los agentes que no quieren correr riesgos a los que sí están dispuestos a correrlos.

A continuación vamos a centrarnos en cómo las bolsas de valores distribuyen el riesgo mediante un modelo simplificado de conducta bajo decisiones de incertidumbre. Analizaremos la decisión bajo condiciones de incertidumbre describiendo las distribuciones de probabilidad mediante algunos parámetros definitorios de la función de utilidad.

## 4.1. El modelo media-varianza

En el modelo media-varianza vamos a suponer que las preferencias de los agentes pueden describirse considerando algunos estadísticos que resumen la distribución de probabilidades de su riqueza.

Supongamos que una variable aleatoria $w$ adopta los valores $w_i,\ i = 1, \dots, n$ con probabilidad $p_i$ La media ponderada de los valores correspondientes a cada resultado $w_i$ vendrá dada por:

$$\mu_w = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i.$$

Por definición la varianza de una distribución de probabilidades es el valor medio de la variable aleatoria menos su media, todo ello elevado al cuadrado. Por tanto, para nuestra variable aleatoria $w$ tenemos que:

$$\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (w_i - \mu_w)^2.$$

[13] Varian, Hal R. (1998). La incertidumbre, *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Actual* (p. 229). Antoni Bosch Editor.

La desviación típica es otro indicador que podríamos tener en cuenta el cual podría sustituir a la varianza al estar directamente relacionados. La desviación típica viene dada por la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_w^2}.$$

Entonces, tenemos que la media de la distribución de probabilidades mide el valor en torno al cual está centrada la distribución y la varianza o la desviación típica miden la dispersión en torno a la media. Así pues, tanto la varianza como la desviación típica son medidas razonables del grado de riesgo implícito.

El modelo media-varianza supone que la utilidad de una distribución de probabilidades que da al inversor una riqueza $w_i$ con una probabilidad $p_i$ puede expresarse en función de la media de la distribución junto con la varianza o la desviación típica de esta.

$$En\ función\ de\ la\ varianza: u(\mu_w, \sigma_w^2).$$

$$En\ función\ de\ la\ desviación\ típica: u(\mu_w, \sigma_w).$$

De esta manera, una función basada en la media y la varianza es capaz de ordenar las elecciones de la misma forma que lo haría una función de utilidad esperada. Por lo tanto, este modelo es una aproximación simplificada razonable del modelo de la utilidad esperada von Neumann-Morgenstern.

A continuación, vamos a utilizar el modelo media-varianza para analizar un problema en el que podemos invertir nuestra riqueza inicial $w$ en dos activos diferentes para nuestra cartera: un activo arriesgado y un activo libre de riesgo. Vamos a centrarnos en el caso en el que el individuo en cuestión sea averso al riesgo, lo que en términos de media y varianza quiere decir que un rendimiento esperado mayor es bueno y que una varianza mayor es mala por ser sinónimo de un mayor riesgo.

Por una parte, el activo libre de riesgo tiene una tasa de rendimiento fija $r_f$. Por otra parte, tenemos el activo arriesgado el cual tiene un rendimiento $m_i$ con probabilidad $p_i$ donde $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; un rendimiento esperado $r_m$ y una desviación típica de su rendimiento $\sigma_m$.

Si invertimos una parte de nuestra riqueza $x$ en el activo arriesgado y la parte restante en el activo libre de riesgo, el rendimiento medio esperado de nuestra cartera de inversión será una media ponderada de los dos rendimientos esperados:

$$r_x = \sum_{i=1}^{n} \left(xm_i + (1-x)r_f\right)p_i = x\sum_{i=1}^{n}(m_i p_i) + (1-x)r_f \sum_{i=1}^{n} p_i,$$

$$r_x = xr_m + (1-x)r_f.$$

Y la varianza del rendimiento de la cartera de inversión será la siguiente:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(xm_i + (1-x)r_f - r_x)^2 p_i,$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(xm_i + (1-x)r_f - (xr_m + (1-x)r_f)^2 p_i,$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(xm_i - xr_m)^2 p_i,$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x^2(m_i - r_m)^2 p_i = x^2\sigma_m^2.$$

Así pues, la desviación típica del rendimiento de la cartera vendrá determinada por la raíz cuadrada de la varianza:

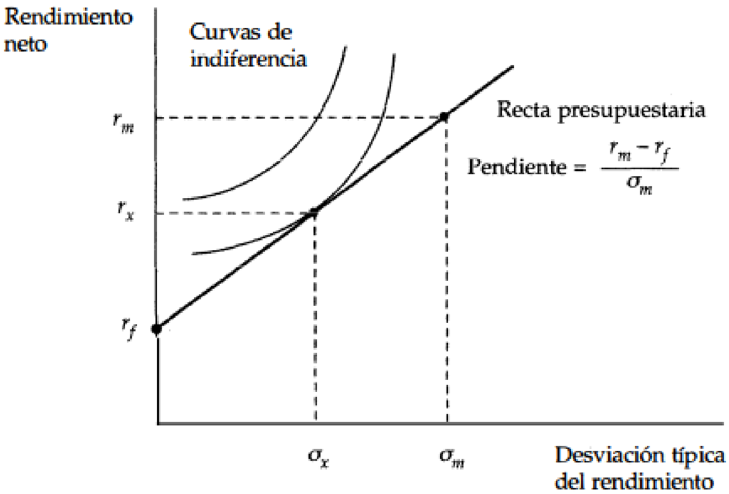
$$\sigma_x = x\sigma_m.$$

Asumimos que $r_m > r_f$ ya que de lo contrario un inversor averso al riesgo no tendría parte de su riqueza en el activo arriesgado. Lo que se deduce entonces es que si el inversor decide tener una mayor parte de la riqueza en el activo arriesgado, obtendrá un rendimiento esperado mayor a cambio de un riesgo también mayor.

Concretamente, si invierte toda su riqueza en el activo arriesgado $(x = 1)$ tendrá un rendimiento esperado y una desviación típica de $(r_m, \sigma_m)$. Por el contrario, si invierte toda su riqueza en el activo libre de riesgo $(x = 0)$ tendrá un rendimiento esperado y una desviación típica de $(r_f, 0)$. Y, en el caso de que el inversor invierta en los dos activos $(0 < x < 1)$ estará haciendo un balance entre el riesgo de la inversión y su rendimiento esperado.

Podemos representar esta situación mediante un gráfico en el que se incluyan las curvas de indiferencia que muestren las preferencias del inversor en cuanto al riesgo y el rendimiento; y una recta presupuestaria que mida el coste de lograr un mayor rendimiento esperado en función de una mayor desviación típica. Como estamos tratando con un inversor averso al riesgo, una mayor desviación típica empeorará el bienestar del inversor; por lo tanto, las curvas de indiferencia tendrán pendiente positiva.

*Ilustración 4. Preferencias del inversor en cuanto al riesgo y al rendimiento.*




*Fuente: Varian, Hal R. (1998). Los activos inciertos,* Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Actual *(p. 240). Antoni Bosch Editor.*

En la elección óptima entre riesgo y rendimiento, la pendiente de la curva de indiferencia tendrá que ser igual a la pendiente de la recta presupuestaria. A esta pendiente la llamaremos precio del riesgo ya que nos indica la cantidad de riesgo y de rendimiento que pueden intercambiarse cuando se elige una cartera de valores:

$$precio\ del\ riesgo = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}.$$

Por tanto, la elección óptima de la cartera del inversor es aquella en la que la relación marginal de sustitución *RMS* entre el riesgo y el rendimiento es igual al precio del riesgo:

$$RMS = -\frac{dU/_{d\sigma}}{dU/_{d\mu}} = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}.$$

Finalmente se deduce, que en condiciones de equilibrio el riesgo se comporta como un bien normal.

## 4.2. Medición del riesgo de un activo arriesgado

Cuando nos encontramos únicamente con un activo arriesgado es cierto que la varianza o la desviación típica miden la cantidad de riesgo del activo en cuestión. Sin embargo, cuando el inversor puede elegir entre más de un activo arriesgado esta ya no es una medida adecuada ya que la utilidad del inversor depende de la media y la varianza de la riqueza total y no solo de la de uno de los activos que posee.

En el caso de tener más de un activo arriesgado lo que realmente importará es la influencia marginal del activo en la utilidad total del inversor. Dicho de otra forma, lo importante es saber qué relación hay entre los rendimientos de los diferentes activos arriesgados que el inversor tiene en cartera.

Así pues, el valor de un activo arriesgado depende de cómo esté correlacionado con los otros y no tanto de su propia variación. De esta manera, los activos que se correlacionan negativamente, esto es, cuando uno incrementa su valor el otro lo disminuye y viceversa, son muy valiosos ya que reducen el riesgo global de la inversión.

Podemos decir entonces que la cantidad de riesgo de un activo depende también de su correlación con el resto de los activos arriesgados. Para simplificar y tener una medida apropiada del riesgo del activo en cuestión, $\beta_i$, es útil medirlo en relación con el riesgo de la bolsa de valores en su conjunto. Esto puede hacerse dividiendo la covarianza[14] de la rentabilidad del activo y de la rentabilidad del mercado por la varianza de la rentabilidad del mercado:

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{var\ (r_m)} = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2}.$$

Esta relación nos indica que si el activo tiene una $\beta_i = 0$ el riesgo del activo y el de la bolsa no están correlacionados. Por otro lado, si tiene una $0 < \beta_i < 1$, el riesgo del activo será menor que el del mercado y en promedio sus variaciones tanto al alza como a la baja serán menos pronunciadas. Si tuviera una $\beta_i = 1$, entonces tendrá el mismo riesgo que el mercado y en promedio variará a la par del mercado. Sin embargo, si tiene una $\beta_i > 1$, el riesgo del activo será mayor que el de la bolsa en conjunto y en promedio variará en mayor cuantía tanto al alza como a la baja.

---

[14] La covarianza entre dos variables nos indica el grado de variación conjunta entre ambas. Por ejemplo, una covarianza positiva significa que las dos variables se mueven en la misma dirección. Matemáticamente la covarianza se expresa como $Cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}$.

En términos de volatilidad se puede expresar el riesgo medido mediante $\beta_i$ de la siguiente manera:

- $\beta_i = 0$: la volatilidad del activo arriesgado y la del mercado no están correlacionadas.
- $0 < \beta_i < 1$: el activo arriesgado es menos volátil que la bolsa en su conjunto.
- $\beta_i = 1$: el activo arriesgado es igual de volátil que el conjunto de la bolsa.
- $\beta_i > 1$: el activo arriesgado es más volátil que el mercado en su conjunto.

Por último, cabe destacar que si $\beta_i$ es negativo, $\beta_i < 0$, tendríamos los mismos resultados que acabamos de expresar con la particularidad de que la relación entre el riesgo del activo arriesgado y el conjunto de la bolsa seria inversa. Así pues, por ejemplo, si $\beta_i < -1$ tendremos que si la bolsa varia al alza, en promedio el activo arriesgado lo hará a la baja y de manera más pronunciada al tener mayor volatilidad.

## 4.3. Equilibrio del mercado de activos arriesgados

Si el mercado se encuentra en equilibrio, necesariamente todos los activos tendrán que tener la misma tasa de rendimiento, una vez ajustada teniendo en cuenta el riesgo.

Vamos a especificar cómo lograr ese ajuste en relación al riesgo en base a la explicación de elección óptima que hemos dado anteriormente para un inversor que elige entre un activo arriesgado y un activo libre de riesgo. Supongamos ahora que todos los activos de la cartera del inversor son activos arriesgados.

Sabemos que el precio del riesgo es $p = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$ donde $r_m$ podemos entenderlo como el rendimiento esperado de la cartera; $\sigma_m$ como la desviación típica del riesgo del mercado; y $r_f$ como el rendimiento de cualquier activo libre de riesgo.

Además, mediante $\beta_i$ obtenemos el riesgo de un activo cualquiera en comparación con el riesgo del mercado. Por tanto, para medir el riesgo total del activo tenemos que multiplicar esta cantidad por el riesgo del mercado:

$$riesgo\ total\ del\ activo\ i = \beta_i \sigma_m.$$

Y ahora para medir el coste del riesgo total del activo y poder hallar un ajuste del riesgo únicamente tenemos que multiplicar la expresión anterior por el precio del riesgo:

$$ajuste\ del\ riesgo = \beta_i \sigma_m p = \beta_i \sigma_m \frac{r_m - r_f}{\sigma_m},$$

$$ajuste\ del\ riesgo = \beta_i (r_m - r_f).$$

En condiciones de equilibrio las tasas de rendimiento ajustadas teniendo en cuenta el riesgo deben ser iguales. Por tanto, para dos activos cualesquiera $i$ y $j$, tenemos que en equilibrio de mercado se debe satisfacer la condición:

$$r_i - \beta_i (r_m - r_f) = r_j - \beta_j (r_m - r_f).$$

## 4.4. Modelo de valoración de activos financieros (CAPM)

Partiendo de la condición de equilibrio del mercado de activos inciertos podemos determinar el rendimiento que exigen los individuos para aceptar un riesgo.

Sabemos que un activo libre de riesgo no puede llevar adherido ningún riesgo por lo que su beta ha de ser igual a cero $\beta_f = 0$. Tomando este valor en la condición de equilibrio y reordenando, obtenemos lo siguiente:

$$r_i - \beta_i (r_m - r_f) = r_f - \beta_f (r_m - r_f),$$

$$r_i = r_f + \beta_i (r_m - r_f).$$

Esta es la ecuación que da origen al modelo de valoración de activos financieros. El *"Capital Asset Pricing Model"*, o CAPM, fue elaborado por William Sharpe (1964) y John Lintner (1965), los cuales se basaron en el manuscrito *"Portfolio Selection"* del economista Harry Markowitz. Este modelo obtiene una rentabilidad teórica para un activo arriesgado en función del riesgo que posee, esto es, calcula una rentabilidad esperada ajustada por su riesgo sistemático. Para ello, entre otras hipótesis teóricas[15], el modelo asume que los inversores son totalmente racionales y aversos al riesgo.

El CAPM toma como coste de oportunidad del inversor la rentabilidad libre de riesgo $r_f$. Por su parte, el riesgo del activo incierto se divide en riesgo intrínseco y riesgo sistemático. El riesgo intrínseco o diversificable se elimina de la ecuación al suponer que el inversor diversifica su capital entre diferentes activos. Así pues, es el riesgo sistemático el que se mide en el modelo CAPM, el cual indica el riesgo común

[15] Véase Anexo III para más información sobre las hipótesis teóricas del modelo.

que comparten todos los activos de un mercado y no puede ser eliminado.

Basándonos en la ecuación anterior, tenemos que el modelo CAPM se puede expresar de la siguiente forma:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i\big(E(r_m) - r_f\big),$$

siendo, $E(r_i)$ el rendimiento esperado del activo arriesgado "$i$",

$r_f$ el rendimiento del activo libre de riesgo,

$r_m$ el rendimiento esperado del mercado,

$\beta_i$ el medidor del riesgo sistemático del activo arriesgado.

Debemos añadir que el rendimiento esperado del activo arriesgado se mide en porcentajes ya que hace referencia a una tasa de variación entre dos periodos considerados. Por su parte, la prima de riesgo del mercado, $(E(r_m) - r_f)$, mide el exceso de rendimiento del mercado en conjunto sobre la rentabilidad libre de riesgo. Además, el rendimiento de un activo libre de riesgo, $r_f$, mide el valor inter temporal del dinero y se utiliza como una rentabilidad mínima exigida para cualquier activo solo por el hecho de mantenerlo en el tiempo.

De esta forma, tenemos que el rendimiento esperado del activo dependerá de la rentabilidad ofrecida por el activo como consecuencia de mantenerlo en el tiempo, y de la rentabilidad ofrecida por el activo como recompensa de su exposición al riesgo, el cual viene ponderado por un factor $\beta_i$ que mide su sensibilidad frente al mercado.

### 4.4.1. El alfa de Jensen

Una vez calculado el rendimiento esperado del activo ajustado en función de su riesgo se puede introducir el concepto del alfa de Jensen $\alpha_{j,i}$. El alfa de Jensen mide el rendimiento extraordinario del activo arriesgado en cuestión sobre su rendimiento teórico. Esta medida recibe este nombre ya que fue utilizada por primera vez por Michael Jensen para evaluar el rendimiento de los gestores de fondos de inversión.

De esta forma, si la rentabilidad real de un activo arriesgado supera a la rentabilidad teórica se dice que se ha obtenido una rentabilidad extraordinaria y por tanto, su alfa de Jensen será positiva. El alfa de Jensen para el activo "$i$", $\alpha_{j,i}$, en relación con el modelo

CAPM se calcula de la siguiente manera:

$$\alpha_{j,i} = \left(r_i - r_f\right) - \beta_i(r_m - r_i).$$

De esta ecuación se deducen los siguientes escenarios posibles:

- $\alpha_{j,i} < 0$: el activo tendrá una rentabilidad inferior a la rentabilidad teórica esperada, lo cual indica que existen otros activos mejores para dicho nivel de riesgo.
- $\alpha_{j,i} = 0$: el activo tendrá la misma rentabilidad que la rentabilidad teórica esperada según el modelo.
- $\alpha_{j,i} > 0$: el activo tendrá una rentabilidad superior a la rentabilidad teórica esperada, lo que quiere decir que se está obteniendo una rentabilidad extraordinaria para su nivel de riesgo.

Así pues, calcular el alfa de Jensen puede ser una buena medida para encontrar los mejores activos dado un nivel de riesgo, buscando siempre los activos arriesgados que tengan un mayor valor de esta variable.

# 5. Conclusiones

Partiendo desde lo más básico de la teoría de la decisión bajo incertidumbre, hemos desarrollado las pautas necesarias para poder examinar una parte tanto del riesgo como de las rentabilidades esperadas de los activos financieros.

Hemos conseguido darle un sentido a los primeros pasos que se realizaron en el campo de la elección de carteras de inversión en los años 50, demostrando que detrás de todo se encuentran los principales fundamentos microeconómicos que se ven durante el Grado en Economía.

Es cierto que estos primeros pasos no son ni muchos menos perfectos. El modelo CAPM ha quedado totalmente obsoleto, siendo la evidencia empírica en contra de este totalmente aceptada por el mundo académico financiero.

Sin embargo, estos comienzos sí que sentaron unas bases orientativas para el posterior estudio de las finanzas. A raíz de estos primeros modelos se han ido creando modelos más complejos que se aproximan cada vez más a la realidad, muchos de los cuales se encuentran dentro del área de las finanzas cuantitativas. Estos nuevos modelos son capaces de estimar de manera más o menos correcta el precio de los activos, de dar con formas de controlar riesgos y de predecir tendencias futuras dentro de los mercados financieros.

Por todo ello, no me arrepiento de haber estudiado los inicios de la economía financiera durante este proyecto; y es ahora, una vez acabada mi etapa en el Grado en Economía cuando me toca sumergirme por completo en el siguiente paso. Y es que como anunciaba al inicio del proyecto, mi tiempo en la UPV/EHU no acaba aquí, y de la mano de la Facultad de Economía y Empresa de Sarriko durante los dos siguientes años estudiaré a fondo la disciplina de las finanzas cuantitativas.

# 6. Anexos

## Anexo I. Estados de la naturaleza.

"En la teoría de la decisión, los estados de la naturaleza son las diferentes situaciones, escenarios o conjunto de circunstancias que se le pueden presentar al decisor una vez tomada una decisión, no controlables por este, y que afectan a la magnitud del resultado o utilidad obtenida. Cuando se pueden determinar con mayor o menor precisión las probabilidades de ocurrencia de cada estado de la naturaleza, se dice que la decisión se desarrolla en ambiente de riesgo; en cambio, si no se pueden estimar dichas probabilidades, nos encontramos en una situación de incertidumbre." (Sarasola, Josemari, 2024).

## Anexo II. Obtención matemática de las constantes $\alpha$ y $\beta > 0$.

$$\big(u(a_1) - u(a_i)\big)\big(v(a_i) - v(a_\mathrm{n})\big) = \big(v(a_1) - v(a_i)\big)\big(u(a_i) - u(a_\mathrm{n})\big),$$

$$u(a_1)v(a_i) - u(a_1)v(a_n) - u(a_i)v(a_i) + u(a_i)v(a_n) =$$
$$= v(a_1)u(a_i) - v(a_1)u(a_n) - v(a_i)u(a_i) + v(a_i)u(a_n),$$

$$u(a_1)v(a_i) - u(a_1)v(a_n) + u(a_i)v(a_n) = v(a_1)u(a_i) - v(a_1)u(a_n) + v(a_i)u(a_n),$$

$$u(a_1)v(a_i) - v(a_i)u(a_n) = v(a_1)u(a_i) - v(a_1)u(a_n) + u(a_1)v(a_n) - u(a_i)v(a_n),$$

$$v(a_i)[u(a_1) - u(a_n)] = u(a_1)v(a_n) - v(a_1)u(a_n) + u(a_i)[v(a_1) - v(a_n)],$$

$$v(a_i) = \frac{u(a_1)v(a_n) - v(a_1)u(a_n)}{u(a_1) - u(a_n)} + \frac{v(a_1) - v(a_n)}{u(a_1) - u(a_n)}u(a_i),$$

$$v(a_i) = \alpha + \beta u(a_i),$$

$$\text{con } \alpha = \frac{u(a_1)v(a_n) - v(a_1)u(a_n)}{u(a_1) - u(a_n)} \text{ y } \beta = \frac{v(a_1) - v(a_n)}{u(a_1) - u(a_n)}.$$

## Anexo III. Hipótesis teóricas del modelo de valoración de activos financieros CAPM.[16]

1. *"Los inversores son todos racionales y aversos al riesgo.*
2. *Los inversores tienen todos idénticas expectativas sobre rentabilidad prevista, volatilidades medias, y coeficientes de correlación entre los activos.*
3. *Todos los inversores poseen el mismo horizonte temporal de inversión de un período.*
4. *Todos los inversores tratan de maximizar sus utilidades económicas.*
5. *Todos los inversores pueden obtener dinero prestado, o prestarlo en una cantidad ilimitada al tipo de interés libre de riesgo.*
6. *No existen costes de transacción ni impuestos.*
7. *No existen impuestos sobre la renta de las personas físicas, lo que implica que los inversores son indiferentes entre las ganancias de capital y los dividendos.*
8. *Existen numerosos inversores, y ninguno de ellos individualmente tiene capacidad para afectar el precio de un activo. Esto implica que los inversores son tomadores de precio.*
9. *Los mercados de capitales se encuentran siempre en equilibrio."*

[16] Díaz Duvivier, V. (2022). *Prueba empírica sobre el Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM) estándar para el índice EURO STOXX 50. Una validación cruzada.* Universidad de Málaga, Málaga.

# 7. Referencias bibliográficas

Aguirre Pérez, I. (2004). *Apuntes de Teoría de la Decisión bajo Incertidumbre*. Autoedición.

Aguirre Pérez, I. (2024). Capítulo 4: Incertidumbre y Utilidad Esperada, *Notas sobre Incertidumbre y Contratos*. Autoedición.

Díaz Duvivier, V. (2022). *Prueba empírica sobre el Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM) estándar para el índice EURO STOXX 50. Una validación cruzada*. Universidad de Málaga, Málaga.

Jehle, G. A. y Reny, P. J. (2011). Chapter 2: Topics In Consumer Theory, *Advanced Microeconomic Theory*. Pearson.

Serrano, R. y Feldman, A. M. (2018). *A short Course in Intermediate Microeconomics with Calculus*. Cambridge University Press.

Varian, Hal R. (1998). *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Actual*. Antoni Bosch Editor.

Banco Santander (s.f.). *¿Qué son los mercados financieros?* Banco Santander. Recuperado el 10 de septiembre de 2024 de https://www.bancosantander.es/glosario/mercados-financieros

Comisión Nacional del Mercado de Valores (s.f.). *El mercado de valores y los productos de inversión. Manual para universitarios.* CNMV. https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Guias/ManualUniversitarios.pdf

Comisión Nacional del Mercado de Valores (s.f.). *Glosario Financiero*. Ministerio de Economía, Comercio y Empresa. Recuperado el 10 de septiembre de 2024 de https://www.cnmv.es/Portal/Inversor/Glosario.aspx?id=0&letra=B&idlng=1

Sarasola, Josemari (2024). *Estados de la naturaleza*. Ikusmira.org. Recuperado el 30 de agosto de 2024 de https://ikusmira.org/p/estados-de-la-naturaleza