

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

TRABAJO FIN DE GRADO

VALIDACIÓN DE MODELO ANALÍTICO PARA PREDECIR EL AFLOJAMIENTO EN UNIONES ATORNILLADAS BAJO VIBRACIONES LATERALES



Estudiante: Echevarria Arrieta, Andoni

Director/Directora: Abasolo Bilbao, Mikel

Curso: 2023-2024

Fecha: Bilbao, 21, junio, 2024

RESUMEN

Los tornillos se usan como medio de sujeción y están presentes en muchos sectores como en la construcción, en la ingeniería, y en la industria. Su gran utilización se debe a su diseño simple, pero efectivo. Sin embargo, cuando una unión atornillada se encuentra en una zona donde hay vibraciones pueden llegar a suceder problemas como fatiga, desgaste de materiales y autoaflojamiento.

Es el autoaflojamiento, precisamente, un fenómeno común y preocupante en una variedad de aplicaciones industriales y mecánicas, especialmente en entornos como maquinaria en funcionamiento, vehículos en movimiento o estructuras sometidas a cargas dinámicas, en los que puede producirse un proceso gradual de aflojamiento.

Por ello, se quiere validar un método analítico que podría ser usado para saber si las vibraciones laterales a las que está expuesto un tornillo son suficientes o no para producir el aflojamiento de éste. Se trata de un método analítico que, a través de varias ecuaciones, establece una forma de cálculo para determinar en qué condiciones se produce el deslizamiento y con ello el aflojamiento del tornillo.

Este trabajo trata de validar un método analítico a través de la aplicación de ese método y del método de los elementos finitos a la cabeza del tornillo, verificando que los resultados obtenidos por los dos métodos son equivalentes.

LABURPENA

Torlojuak bi elementu edo gehiago lotzeko erabiltzen dira, eta sektore askotan daude, hala nola eraikuntzan, ingeniartzan eta industrian. Oso erabilgarriak dira bere diseinu sinplea, baina eraginkorra delako. Hala ere, torloju bidezko lotura bibrazioak dauden eremu batean dagoenean, nekea, materialen higadura eta auto-lasaitzea bezalako arazoak gerta daitezke.

Autolasaitzea, hain zuzen ere, fenomeno arrunta eta kezagarria da askotariko aplikazio industrial eta mekanikoetan, batez ere funtzionamenduan dauden makinerian, mugimenduan dauden ibilgailuetan edo karga dinamikoen eraginpean dauden egituretan, horietan pixkanaka lasaitzeko prozesua gerta daitekelako.

Horregatik, metodo analitiko bat balidatu nahi da, torloju baten alboko bibrazioak torlojua lasaitzeko nahikoak diren ala ez jakiteko erabil daitekeena. Metodo analitiko honek, hainbat ekuazioen bidez, kalkulu modu bat ezartzen du, irristadura zein baldintzatan gertatzen den zehazteko eta eta beraz, torlojuaren lasaitzea.

Lan honen helburua metodo analitiko bat baliozkotzea da, metodo hori eta elementu finituen metodoa torlojuaren buruan aplikatuz, bi metodoen bidez lortutako emaitzak baliokideak direla egiaztatuz.

SUMMARY

Screws are used as a means of fastening and are present in many sectors such as construction, engineering and industry. Their wide use is due to their simple but effective design. However, when a bolted joint is in an area where there is vibration, problems such as fatigue, material wear and self-loosening can occur.

Self-loosening is precisely a common and worrying phenomenon in a variety of industrial and mechanical applications, especially in environments such as operating machinery, moving vehicles or structures subjected to dynamic loads, where a gradual loosening process can occur.

Therefore, we want to validate an analytical method that could be used to know if the lateral vibrations to which a bolt is exposed are enough or not to produce the loosening of the bolt. It is an analytical method that, through several equations, establishes a form of calculation to determine under what conditions the slippage occurs and thus the loosening of the screw.

This work tries to validate an analytical method through the application of this method and the finite element method to the screw head, verifying that the results obtained by the two methods are equivalent.

PALABRAS CLAVE

Tornillo, Aflojamiento, Vibración y Elementos Finitos

INDICE

1	Introducción	4
2	Contexto	8
3	Objetivos y alcance del trabajo	10
3.1	Objetivos.....	10
3.2	Alcance	11
3.3	Beneficios que aporta el trabajo	11
3.4	Conexión con los Objetivos de Desarrollo Sostenible y los principios y valores democráticos	11
3.5	Análisis de alternativas	12
3.5.1	Método experimental.....	12
3.5.2	Método de Elementos finitos (EF)	14
3.5.3	Método escogido para validar el método analítico	19
3.6	Selección/Descripción de la solución propuesta. Diseño (básico o de alto nivel).....	19
3.7	Diagrama de Gantt/cronograma	20
3.8	Aspectos económicos	21
4	Fundamento de los métodos empleados.....	21
4.1	Modelo analítico.....	21
4.1.1	Estudio del contacto de la cabeza del tornillo. Fórmulas teóricas.....	22
4.1.2	Programación de Matlab con las ecuaciones del método analítico	24
4.2	Método de los Elementos Finitos (EF). Utilización de Ansys.....	29
5	RESULTADOS	37
5.1	Método analítico	37
5.2	Método Elementos Finitos (EF)	41
5.3	Comparación entre los dos métodos	54
6	CONCLUSIONES	55
7	BIBLIOGRAFÍA.....	56
8	ANEXOS	58
8.1	ANEXO I: Programación en Matlab.....	58
8.2	ANEXO II: Tabla de valores de Matlab.....	62

1 Introducción

Los tornillos se utilizan ampliamente en una variedad de aplicaciones, desde la construcción y la ingeniería hasta la fabricación y el bricolaje. Son componentes mecánicos utilizados para unir, fijar o sujetar dos o más objetos entre sí de manera segura y reversible. Su diseño simple pero efectivo los convierte en una de las herramientas de sujeción más utilizadas.

La estructura de un tornillo consta de varias partes distintivas, tal y como queda reflejado en la Figura 1:

- **Cabeza del tornillo:** Esta es la parte superior, donde se aplica la fuerza para girarlo e introducirlo en el material. Las cabezas pueden tener diferentes diseños y formas (plana, avellanada, redonda, hexagonal, entre otras) para adaptarse a herramientas de manejo variadas, como destornilladores, llaves o máquinas automáticas.
- **Vástago del tornillo:** Es la parte alargada y cilíndrica que sostiene la rosca y proporciona la estructura principal del tornillo. El vástago puede variar en longitud y diámetro dependiendo del tipo de tornillo y su aplicación específica.
- **Rosca:** La rosca consiste en una serie de crestas y valles en espiral talladas en la superficie del vástago del tornillo. Está diseñada para encajar con precisión en un agujero roscado correspondiente en el material que se está uniendo. Al girar el tornillo en sentido horario, la rosca se introduce en el material, creando una unión segura y resistente. La forma y el paso de la rosca pueden variar según el tipo de tornillo y la aplicación específica.



Figura 1. Partes del tornillo

Como ya se ha dicho, los tornillos se utilizan en una amplia gama de industrias y campos, desde la construcción de edificios y estructuras hasta la fabricación de productos electrónicos y maquinaria. Proporcionan una forma fiable y efectiva de unir objetos, permitiendo la construcción de estructuras sólidas y duraderas en una variedad de entornos y condiciones, por lo que de modo indiscutible se consideran como componentes esenciales en la fabricación, la construcción y el mantenimiento de una inmensa variedad de productos y estructuras.

Los tornillos se fabrican siguiendo normas técnicas en las que se definen las especificaciones a cumplir. La norma DIN es la más utilizada y estandarizada en nuestra tornillería. La certificación DIN es otorgada por el Instituto Alemán de Normalización (Deutsches Institut für Normung) y se

refiere a las normas técnicas y de calidad aplicables en Alemania, y otros países europeos, en relación con piezas de fabricación industrial, como la norma DIN de tornillería. En este sentido la norma DIN en tornillos certifica que los tornillos cumplen con los estándares de calidad y rendimiento establecidos por esta institución, lo que garantiza la fiabilidad y la seguridad de los productos.

Si bien su diseño simple, pero a la vez eficaz, los convierte en una herramienta versátil y ampliamente utilizada, no por ello su utilización está exenta de posible problemática y por tanto, de necesidad de análisis. Cuando se encuentran en un entorno donde las vibraciones son constantes, su efectividad de unión entre materiales puede verse afectada por motivos diversos:

- Aflojamiento: Las vibraciones repetidas pueden aflojar los tornillos con el tiempo. Esto puede deberse al movimiento constante del material alrededor del mismo, lo que disminuye la fricción entre las roscas del tornillo y el material que lo rodea. Como resultado, los tornillos pueden aflojarse y perder su capacidad de sujeción, lo que podría comprometer la integridad de la unión.
- Fatiga del tornillo: Las vibraciones constantes pueden causar fatiga en los tornillos y en el material que están sujetando. Esto puede resultar en la deformación o fractura del tornillo, especialmente si está expuesto a vibraciones intensas o frecuentes durante un período prolongado. La fatiga puede debilitar significativamente la resistencia estructural de los tornillos y hacer que fallen prematuramente.
- Daño en el material: Las vibraciones también pueden causar daños en el material que rodea los tornillos, como grietas, fracturas o deformaciones, que reducen su capacidad para soportar la carga o mantener una unión segura con el tornillo.

Para mitigar alguno/s de estos problemas, se pueden utilizar diversas técnicas y dispositivos, entre los que se pueden mencionar los siguientes:

- Adhesivos: Se pueden aplicar adhesivos especiales en la parte sobresaliente de la rosca de los tornillos (los hilos) para ayudar a mantenerlos en su lugar y prevenir el aflojamiento debido a las vibraciones, pero esto provocaría que ya no fuera una unión reversible.
- Dispositivos de bloqueo de rosca: Estos dispositivos, como las arandelas de seguridad o los elementos de bloqueo de rosca, se colocan en los tornillos para evitar que se aflojen debido a las vibraciones, como se aprecia en la Figura 2.
- Diseño estructural: Un diseño adecuado de la estructura y la selección de materiales pueden ayudar a reducir los efectos de las vibraciones en los tornillos y en las uniones en general.
- Amortiguadores de vibraciones: En algunas aplicaciones críticas, se pueden utilizar dispositivos de amortiguación de vibraciones para reducir las vibraciones transmitidas a los tornillos y al material circundante.

Los posibles problemas hasta aquí mencionados evidencian la importancia de tomar medidas adecuadas para prevenir el aflojamiento, la fatiga y el daño del material cuando se trabaja en entornos donde las vibraciones son un factor importante. El objetivo de este trabajo es precisamente ahondar en una de los problemas antes mencionados que es el aflojamiento en uniones sometidas a vibraciones.

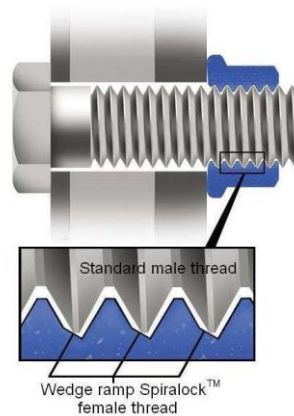


Figura 2. Ejemplo de elemento de fijación que incorpora una rampa en cuña de 30º en la raíz de la rosca interna.

Para realizar el trabajo se ha usado como referencia el tornillo correspondiente a la especificación DIN 6912 M20 sin ningún tipo de dispositivo de bloqueo de rosca (por ejemplo, tuerca). Se trata de tornillos cilíndricos de cabeza baja con hexágono interior y un diámetro nominal de 20 mm. Estos tornillos se usan en una gran variedad de aplicaciones industriales y de ingeniería donde se requiere un tornillo con una cabeza de poco volumen y una alta capacidad de carga. Así, son tornillos utilizados en maquinaria pesada como excavadoras y grúas, aeronáutica, automoción, robótica industrial, energía eólica, infraestructura ferroviaria y equipos de minería ya que en todas estas aplicaciones es preciso disponer de tornillos robustos, capaces de soportar las cargas estáticas y dinámicas y a la vez, deben ser tornillos de cabeza poco voluminosa para no interferir el movimiento de otras piezas o partes móviles, para disminuir la corrosión y el daño mecánico y para cumplir con las restricciones de diseño y funcionalidad.

A continuación, se van a presentar los términos y parámetros básicos relativos al tornillo y a su utilización: precarga, fricción y torque.

La precarga o carga de apriete de un tornillo es la fuerza de tensión inicial aplicada al tornillo cuando se aprieta en una unión. Esta tensión inicial genera una fuerza de compresión en las piezas que se están uniendo, manteniéndolas firmemente en su lugar. La precarga es esencial para asegurar que la unión permanezca intacta y resistente a diversas fuerzas externas que puedan intentar aflojar el tornillo. La unidad de medida más utilizada, aunque hay otras, es el newton por metro (Nm), y la única forma de medirlo correctamente es con llaves dinamométricas.

Algunas ventajas de aplicar la precarga adecuada implican:

- Mayor resistencia a las vibraciones: Una precarga correcta asegura que el tornillo permanezca en su lugar, incluso en entornos con vibraciones.
- Mayor resistencia a los cambios de temperatura: las expansiones y contracciones debido a fluctuaciones de temperatura pueden causar que los tornillos se aflojen. La precarga ayuda a mitigar este efecto.
- Distribución uniforme de las cargas de trabajo a través de la unión, reduciendo la posibilidad de puntos de concentración de estrés que podrían causar fallos y reduciendo la fatiga del material en los tornillos y en las piezas unidas, prolongando su vida útil.
- Estabilidad mecánica asegurando que las piezas permanezcan en la posición correcta, manteniendo la integridad estructural de la unión. Esto implica una seguridad operativa en las aplicaciones más críticas como en la industria aeroespacial o automotriz.

El valor de precarga necesario en cada caso depende de varios factores:

- Material del Tornillo y de las Piezas Unidas: La elasticidad y resistencia de los materiales afectan la cantidad de precarga que se puede aplicar sin dañar las piezas.
- Tamaño y Tipo de Tornillo: Tornillos de diferentes tamaños y tipos tienen capacidades de precarga distintas. Es importante seguir las especificaciones del fabricante.
- Condiciones de Operación: Factores como temperatura, exposición a corrosión, y vibraciones deben considerarse al determinar la precarga adecuada.

Para aplicar la precarga correcta se utilizan herramientas como las llaves dinamométricas, asegurando que el tornillo esté apretado a un valor de torque específico recomendado por el fabricante o diseñado para la aplicación en cuestión.

El cálculo de la precarga adecuada puede involucrar fórmulas específicas que consideran el diámetro del tornillo, el tipo de material, y las condiciones de la unión. Una fórmula común para calcular el torque (T) necesario para una precarga específica (F) en un tornillo es:

$$T = \mu \cdot F \cdot d \quad (1)$$

donde:

- T es el torque, que es la fuerza de giro aplicada, que se traduce en la tensión axial o precarga en el tornillo.
- μ es el coeficiente de fricción.
- F es la fuerza de precarga.
- d es el diámetro nominal del tornillo.

La fricción se origina entre dos puntos de contacto: bajo la cabeza del tornillo o tuerca que gira, y en la rosca.

- Si apretamos demasiado, podemos dañar las propias piezas, llegando incluso a romperlas, sobre todo con materiales que sean muy rígidos y resistentes a las fuerzas de torsión, pero más vulnerables a una presión excesiva que otros materiales
- Si dejamos las roscas con una tensión insuficiente, provocaremos holguras y rozamientos que, igualmente, dañarán los materiales, y también correremos el riesgo de que se aflojen con la vibración.

El coeficiente de fricción o de rozamiento es la resistencia que el tornillo presenta al ser roscado en su alojamiento (tuerca o agujero roscado). Conocer el valor de este coeficiente permite al operario ser más preciso en el apriete aplicado. Este coeficiente depende de los materiales en contacto, del acabado superficial, del engrase de las superficies en contacto, etc. Normalmente, en los tornillos de fijación se considera un coeficiente de rozamiento, tanto para la cabeza como para la rosca, entre 0,12 y 0,2 para los de acero. Estos valores como ya se ha dicho, dependen del grado de acabado, lubricación y precisión de la rosca. Para otros materiales estos valores son algo distintos, y pueden usarse como referencia los valores recomendados para tornillos de potencia. En el caso de estos últimos, aunque los valores del coeficiente de rozamiento dependen de los mismos factores que se han indicado, tanto la calidad superficial como las condiciones de servicio están mucho más controladas. Existen tablas que indican valores aproximados del coeficiente en función de las condiciones de servicio, estado superficial y superficies en contacto.

Supongamos que tenemos un tornillo de acero con un diámetro de 10 mm que necesita una precarga de 15,000 N. Si el coeficiente de fricción μ es 0,2, el torque necesario sería:

$$T = 0.2 \cdot 15,000 \cdot 0.01 = 30\text{Nm}$$

Por lo tanto, sería necesario aplicar 30 Nm de torque para lograr la precarga deseada.

La precarga en un tornillo es un aspecto crítico en la ingeniería de uniones atornilladas. Asegura la estabilidad, seguridad y durabilidad de la unión bajo diversas condiciones de operación. Aplicar la precarga correcta requiere comprender los materiales, el diseño de la unión, y utilizar herramientas precisas para medir y aplicar el torque adecuado.

2 Contexto

Entre los problemas que experimentan los tornillos a causa de las vibraciones que se han explicado, el que se da con mayor frecuencia es el aflojamiento, que es un fenómeno común y preocupante en una variedad de aplicaciones industriales y mecánicas. Cuando los tornillos están expuestos a vibraciones constantes, especialmente en entornos como maquinaria en funcionamiento, vehículos en movimiento o estructuras sometidas a cargas dinámicas, pueden experimentar un proceso gradual de aflojamiento.

En este proceso influyen varios factores, pudiendo destacar entre ellos el movimiento relativo entre las superficies roscadas del tornillo y el material al que está unido. Las vibraciones constantes causan movimientos microscópicos entre estas superficies, lo que reduce la fricción y la fuerza de sujeción entre ellas con el tiempo. Además, las fuerzas inerciales generadas por las vibraciones pueden

inducir cargas cíclicas en los tornillos, lo que aumenta las tensiones y el desgaste en las roscas y las superficies de contacto.

A medida que se produce el aflojamiento, se debilita la integridad de la unión, lo que puede tener consecuencias graves. Por ejemplo, en maquinaria y equipos, el aflojamiento de los tornillos puede provocar fallas operativas, daños en los componentes circundantes e incluso riesgos para la seguridad del personal. En estructuras y construcciones, el aflojamiento de los tornillos puede comprometer la estabilidad y la resistencia estructural, aumentando el riesgo de colapso o fallo estructural.

De todo ello se deduce que el aflojamiento de los tornillos debido a las vibraciones es un problema común que puede tener consecuencias graves en una variedad de aplicaciones industriales y mecánicas. La comprensión de los mecanismos subyacentes y la implementación de medidas preventivas adecuadas son fundamentales para garantizar la integridad y la seguridad de las uniones roscadas en entornos vibrantes. Este trabajo pretende, precisamente, ahondar en el conocimiento de esos mecanismos.

Lo que se quiere hacer en este trabajo es llegar a desarrollar una herramienta que permita:

- conocer la fuerza cortante que produciría el aflojamiento de una unión atornillada en unas determinadas condiciones, y a partir de ello,
- diseñar y optimizar las condiciones de esa unión atornillada para conseguir que no se afloje, permitiendo ir variando los diferentes parámetros como el coeficiente de rozamiento, el número de tornillos, la métrica de los tornillos, la precarga... de una manera sencilla y rápida y consiguiendo de esta forma, encontrar las condiciones idóneas para conseguir prevenir el aflojamiento.

Cuando se quiere analizar una pieza, como sería en este caso una unión atornillada, es preciso decidir el procedimiento de análisis que se va a emplear. Cada procedimiento tiene sus características, y es habitual combinar varios de ellos (no son excluyentes). Los principales procedimientos de análisis son los métodos tradicionales, los métodos numéricos y los ensayos experimentales. A continuación, se describe brevemente cada uno de ellos:

- Los métodos tradicionales de análisis mecánico son aquellos derivados de la Teoría de elasticidad, Resistencia de Materiales, Teoría de Estructuras, Teoría de Vibraciones... Estos procedimientos suelen estar basados en hipótesis simplificadoras, de manera que el análisis puede realizarse de forma sencilla. En contraposición, la precisión que aportan no es generalmente muy elevada y tienen un rango de aplicación relativamente limitado.
- Los métodos numéricos se implementan generalmente en un ordenador (Computer Aided Engineering, CAE) y permiten realizar análisis que los métodos tradicionales no pueden abordar. Es decir, se utilizan para analizar elementos con geometrías, estados de carga, materiales, u otras características que no cumplan las hipótesis simplificadoras en las que se basan

los métodos tradicionales. El método numérico de análisis mecánico más utilizado actualmente es el Método de Elementos Finitos (MEF).

- Por último, los ensayos experimentales proporcionan los resultados más precisos, pero a la vez más costosos de obtener (en tiempo y dinero), por eso sólo deben utilizarse cuando realmente sean necesarios en el proceso de diseño de la pieza.

Ahora bien, ¿cuándo se debe utilizar un procedimiento u otro? En aquellos casos en los que los métodos tradicionales ofrezcan unos resultados precisos son la mejor opción porque suponen un coste de análisis muy reducido. Además, las fórmulas de los métodos tradicionales permiten comprobar cómo cambia el comportamiento del elemento estudiado (en este caso el aflojamiento del tornillo) al modificar los factores que afectan a dicho comportamiento (como pueden ser el coeficiente de rozamiento, la precarga, la métrica, ...). Sin embargo, para poder proponer el uso de este tipo de métodos, hay que asegurar que los resultados sean suficientemente precisos. Esta es la finalidad de este trabajo, se quiere comprobar que un método analítico para el cálculo de la fuerza cortante que produce el autoaflojamiento de una unión atornillada sometida a vibraciones laterales, ofrece resultados con suficiente precisión, a través de la comparación de los resultados obtenidos mediante este método con los obtenidos por el método numérico de Elementos Finitos.

3 Objetivos y alcance del trabajo

Este trabajo tiene como base las ecuaciones y el modelo analítico desarrollados por Nassar y Yang que se explican en apartado 4.1.1 para realizar una serie de cálculos que determinen si se va a ir soltando el tornillo o no, en función de las fuerzas motivadas por las vibraciones laterales y confirmar que los resultados obtenidos por este método analítico son equivalentes a los obtenidos por el método de elementos finitos (MEF) que se describe en el apartado 4.2.

3.1 Objetivos

El objetivo de este trabajo es confirmar la idoneidad de la utilización del método analítico para la determinación de los límites en las fuerzas motivadas por las vibraciones laterales que no deben ser nunca sobrepasados para evitar el aflojamiento de los tornillos.

Cuando falla una máquina, las repercusiones negativas para una empresa, tanto a nivel de servicio como a nivel económico y de seguridad, pueden ser enormes. Se dispone de equipos que permiten medir la vibración en tiempo real de los sistemas en funcionamiento. Así, en cada caso concreto, conociendo la fuerza real de las vibraciones a las que es sometida una unión atornillada, si se dispone de un método sencillo para el cálculo, se podrá saber si la unión atornillada va a ser segura o si va a sufrir aflojamientos.

El método analítico descrito, como se va a explicar en este trabajo, es una herramienta de cálculo sencilla de manejar, una vez programada, en la que se pueden cambiar los valores de referencia en cualquier momento por lo que permitirá diseñar y optimizar las condiciones de cualquier unión

atornillada para evitar que se afloje. Por ello, se considera importante documentar la validez de este método a través de la comparación con el método de elementos finitos.

3.2 Alcance

Se han hecho los cálculos con ambos métodos y la comparativa entre ambos con respecto a la interacción entre la cabeza del tornillo y la superficie con la que está en contacto.

Esto no permite demostrar la validez del modelo analítico totalmente para una unión roscada. Sería necesaria una continuación de este trabajo, realizando los mismos cálculos para la rosca del tornillo, pero la dimensión de este segundo análisis requeriría duplicar el número de horas de este trabajo y se saldría del alcance del mismo, dada la naturaleza del trabajo (trabajo de fin de grado).

Sin embargo, si los resultados obtenidos para la cabeza del tornillo demuestran una clara equivalencia entre los dos métodos es de esperar que lo mismo suceda con el cálculo que correspondería a la zona de la rosca.

3.3 Beneficios que aporta el trabajo

Como se ha indicado, llegar a confirmar que los métodos de cálculo son equivalentes, permite la utilización del método analítico una vez programado, que es mucho más sencillo para hacer los cálculos que se deseen para poder saber si con el tornillo que se está usando se va a ir aflojando o no y para determinar qué parámetros se pueden cambiar para garantizar la estabilidad de la unión.

Esto supondría las siguientes ventajas:

- Menor costo computacional
- Mayor facilidad para introducir diferentes datos

Por consiguiente, supone una mayor aplicabilidad en cualquier situación y equipo que evitará los problemas asociados al aflojamiento de tornillos.

3.4 Conexión con los Objetivos de Desarrollo Sostenible y los principios y valores democráticos

Este trabajo conecta con los objetivos de desarrollo sostenible mostrados en la Figura 3.



Figura 3. Los ODS que guardan conexión con el trabajo.

Por los siguientes motivos:

- Si conseguimos saber más de las uniones con tornillos y conseguimos evitar aflojamientos innecesarios podremos evitar:
 - Que se produzcan roturas y desperfectos en equipos, aumentando su vida útil y reduciendo los residuos
 - Que se produzcan derrames de productos y sustancias evitando la contaminación del medio natural
- Mejoraremos la seguridad de las instalaciones promoviendo una industria y unas infraestructuras más seguras, lo cual redundará en un mayor bienestar de los trabajadores y de la población en general.

3.5 Análisis de alternativas

Se han publicado diversos artículos en los que se estudian las uniones atornilladas. El modelo analítico propuesto por Nassar y Yang que se basa en el deslizamiento relativo entre las superficies de fricción, desarrolla y analiza numéricamente ecuaciones integrales y explica el mecanismo de autoaflojamiento.

El método analítico que se propone en este trabajo, se basa en las ecuaciones de Nassar y Yang y llegando a las ecuaciones (2) y (3) que permiten el cálculo de aquellos valores de la fuerza cortante (F_{eb}) y par torsor (T_b) que, si se alcanzan o se pasan de una manera cíclica, tendrían como consecuencia el aflojamiento del tornillo. El desarrollo matemático de esas fórmulas se desarrolla en el apartado 4.1.1.

$$F_{eb} = \mu p \int \frac{r_{cb} + r \sin \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb}r \sin \theta}} r dr d\theta \quad (2)$$

$$T_b = \mu p \int \frac{r + r_{cb} \sin \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb}r \sin \theta}} r^2 dr d\theta \quad (3)$$

Este trabajo tiene como objetivo validar los resultados obtenidos con este modelo analítico para demostrar que puede ser utilizado como herramienta adecuada para el cálculo de las condiciones de aflojamiento de uniones atornilladas sujetas a vibraciones laterales y para el diseño y optimización de las condiciones óptimas para conseguir que estas uniones no sufran aflojamientos.

La validación del método se puede llevar a cabo utilizando diferentes métodos:

- mediante un método experimental, que consistiría en realizar ensayos con prototipos, o
- a través de un método numérico basado en los análisis mediante Elementos Finitos (EF).

3.5.1 Método experimental

Los ensayos experimentales con prototipos proporcionan resultados muy precisos, pero resultan muy caros y no se dispone de los equipos necesarios para llevarlo a cabo. Además, en este caso, en

los ensayos habría que medir las presiones en la superficie de contacto y el deslizamiento que se produciría mediante la vibración y esto resulta muy complicado.

Entre las pruebas experimentales se encuentra el test de Junker, que se diseñó para evaluar la resistencia de las uniones atornilladas a las vibraciones transversales. Esta prueba es esencial para determinar cómo se comportan los tornillos y las uniones bajo condiciones de vibración que podrían causar el aflojamiento del tornillo.

El test de Junker, también conocido como la prueba de vibración transversal, se lleva a cabo utilizando una máquina de pruebas específica, en la que se monta la unión atornillada con los elementos que se quiera ensayar aplicando una precarga específica al tornillo utilizando una llave dinamométrica u otro dispositivo de control de torque. A continuación, la máquina genera vibraciones transversales que aplican una carga alternante perpendicular al eje del tornillo. Estas vibraciones simulan las condiciones que la unión podría experimentar en la práctica. Durante la prueba, se mide continuamente la fuerza de sujeción del tornillo para observar cualquier reducción. Esto se realiza mediante sensores de fuerza que registran los cambios en la tensión del tornillo. Se evalúa cómo cambia la fuerza de sujeción con el tiempo. Una disminución significativa indica que la unión es susceptible al aflojamiento bajo vibraciones, mientras que una fuerza de sujeción constante sugiere que la unión es resistente.

El test permite identificar si una unión atornillada es segura bajo condiciones de vibración y facilita la comparación de diferentes diseños de tornillos, arandelas y otros elementos de fijación para determinar cuáles ofrecen la mejor resistencia al aflojamiento.

Así, con la utilización de este test se obtienen gráficas como la que se visualiza en la Figura 4.

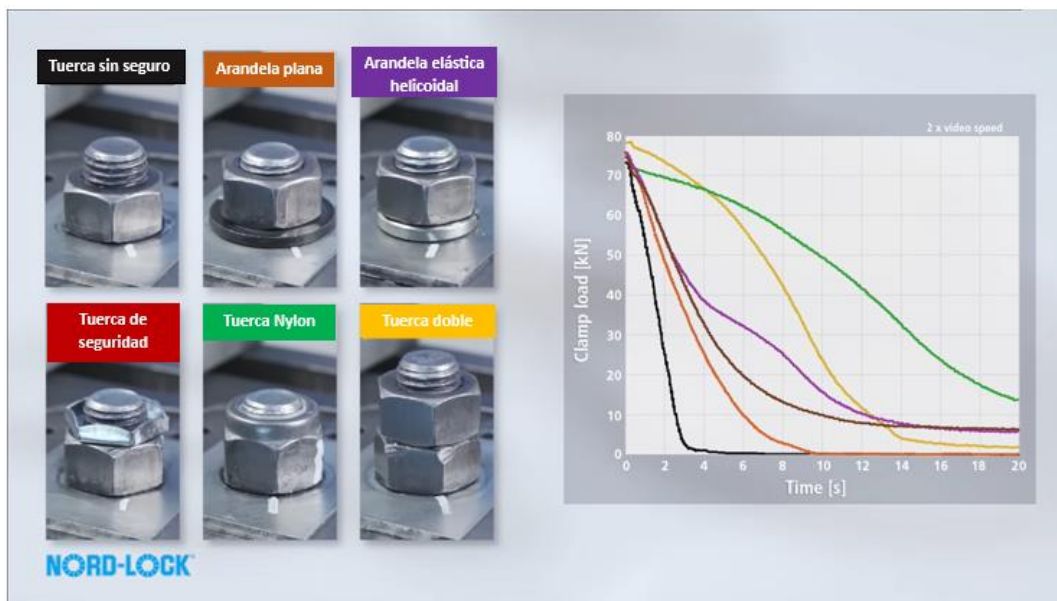


Figura 4. Resultados del Junker Test.

En esta figura 4 se compara el comportamiento de diferentes configuraciones de atornillado, desde el uso de un tornillo con una tuerca simple hasta el uso de elementos adicionales y pueden verse

las diferencias en el tiempo de aflojamiento de las diferentes configuraciones ensayadas, donde en el eje X se muestra el tiempo transcurrido en segundos y en el eje Y se muestra la precarga del tornillo en kN. Se puede ver que la opción que más tarda en aflojarse sería la que usa tuerca de seguridad con inserto de nailon o tuerca Nylon, eso se debe a que es una tuerca que se bloquea en su lugar creando presión sobre el material de nailon interno en la parte superior de la rosca contra el tornillo, para que no vibre ni se afloje. Sin embargo, como se puede ver, tarde o temprano también acaba aflojándose.

3.5.2 Método de Elementos finitos (EF)

La mayor parte de los fenómenos físicos pueden ser descritos o modelados mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno. En la mayoría de los problemas de ingeniería no es posible obtener una solución exacta al sistema de ecuaciones. Por tanto, es necesario el uso de métodos que permitan obtener soluciones numéricas aproximadas a la real.

El método de los elementos finitos es uno de los métodos más usados en ingeniería y física para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales. Aunque puede usarse por medio de cálculos a mano, la utilización de ordenadores permite la resolución de problemas sobre geometrías complicadas. La variedad de problemas a los que puede aplicarse es enorme, se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. En ingeniería permite cálculos tan diversos como tensiones, fluidodinámica, transferencia de calor... Aunque el método de los elementos finitos como formulación matemática es relativamente nuevo, su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo. En los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances en computación. La generalización del uso de ordenadores y el fenomenal incremento en la potencia de cálculo, ha permitido que el Método de los Elementos Finitos (MEF) haya desarrollado una increíble precisión. A su vez, han ido apareciendo una gran cantidad de software, cada vez más especializados por materias, que permiten realizar cálculos con elementos finitos de una manera sencilla. Sin embargo, el manejo correcto de este tipo de software exige un profundo conocimiento no solo del programa con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en ese caso estaremos en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad.

La geometría de la pieza, sometida a cargas y restricciones, se subdivide en partes más pequeñas, conocidas como “elementos”, que representan el dominio continuo del problema. La división de la geometría en pequeños elementos resuelve un problema complejo, al subdividirlo en problemas más simples, lo que permite al ordenador hacer las tareas con eficiencia.

El método propone que un número infinito de variables desconocidas, sean sustituidas por un número limitado de elementos de comportamiento bien definido. Esas divisiones pueden tener diferentes formas, tales como triangular, cuadrangular, entre otros, dependiendo del tipo y tamaño

del problema. Como el número de elementos es limitado, son llamados de “elementos finitos” palabra que da nombre al método.

Los elementos finitos están conectados entre sí por puntos, que se llaman nodos o puntos nodales. Al conjunto de todos estos ítems – elementos y nodos – se le denomina malla, como se muestra en la Figura 5. Debido a las subdivisiones de la geometría, las ecuaciones matemáticas que rigen el comportamiento físico no se resolverán de una manera exacta, sino aproximada por este método numérico.

El comportamiento de cada elemento viene dado por los desplazamientos de los nodos del elemento los cuales se obtienen mediante las funciones de forma, a partir de los desplazamientos en los nodos.

La precisión de los Métodos de los Elementos Finitos depende de la cantidad de nodos y elementos, del tamaño y de los tipos de elementos de la malla. Por lo tanto, cuanto menor sea el tamaño y mayor el número de elementos en una malla, más precisos serán los resultados de los análisis, pero mayor coste computacional tendrá. Se deberá evitar un exceso de coste computacional cuando no sea necesaria tanta precisión

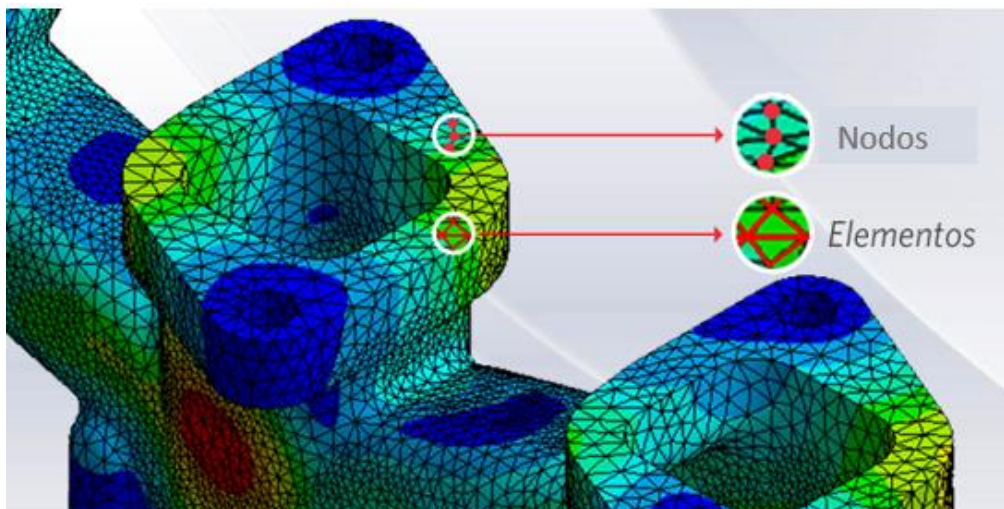


Figura 5. Nodos y elementos de una malla

Los softwares de simulación computacional están evolucionando y mejorando los análisis con base en el método, promoviendo la mejora de selección de tipos y generación de malla de elementos, las técnicas de modelado, criterios de aceptación, los errores y la presentación de los resultados, permitiendo la utilización más fácil de las herramientas. Por lo tanto, el conocimiento de los fundamentos del método es necesario para que juntamente con el dominio del software se desarrollen las mejores prácticas para la aplicación de este poderoso recurso en el desarrollo y evaluación de productos y proyectos.

El método puede ser aplicado en la resolución y diagnóstico de problemas de análisis estructural para la obtención de desplazamientos, deformaciones y tensiones, también permite representar diferentes escenarios y evaluar el rendimiento de productos con aplicación de criterios de resistencia, rigidez o fatiga. También las variaciones del método de los elementos finitos permiten hacer análisis térmico, acústico, dinámico, electromagnético y de flujos de los casos más simples de comportamiento lineal al no lineal, como cuando se tienen grandes desplazamientos o contacto entre las partes de un conjunto.

En la mayor parte de los problemas continuos, las incógnitas son los campos de desplazamientos, de deformaciones y de tensiones. Es posible definir el problema considerando como incógnitas algunas de ellas y calculando las restantes con las ecuaciones de la teoría de la elasticidad.

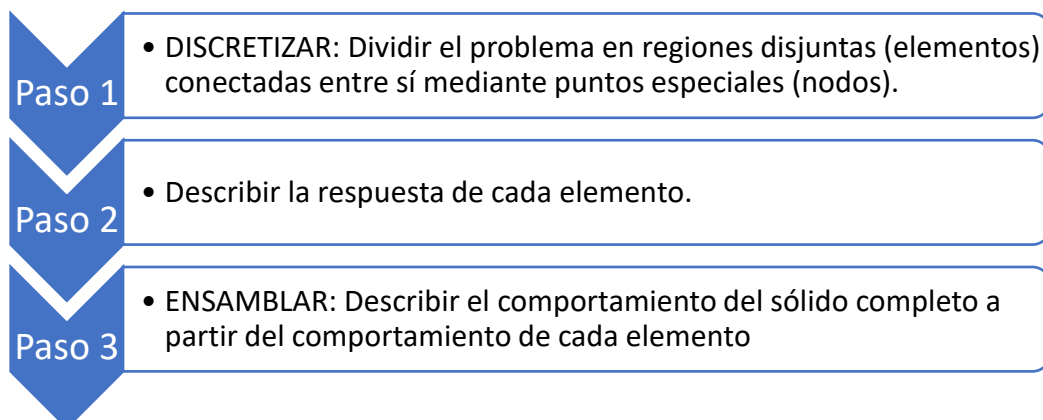
Se dispone en total de 15 ecuaciones, que se reparten en seis relaciones entre tensión y deformación (ecuaciones constitutivas), seis relaciones entre desplazamientos y deformaciones (ecuaciones de compatibilidad) y tres ecuaciones de equilibrio interno. A su vez, se tienen otras 15 incógnitas; seis tensiones, seis deformaciones y tres desplazamientos.

Combinando las ecuaciones anteriores, se pueden obtener las tensiones en función de los desplazamientos y sustituyendo éstas en las ecuaciones de equilibrio, se obtiene las tres ecuaciones de equilibrio en función de las tres componentes de desplazamiento. Este enfoque conducirá a un método de elementos finitos denominado en desplazamientos. La mayor parte de los programas de elementos finitos están planteados con este método.

No hay que olvidar cumplir otros requisitos adicionales como las condiciones de contorno a las que se ve sometido nuestro problema, y más, cuando se busca la solución en desplazamientos.

Cuando se utiliza este planteamiento en desplazamientos, se debe considerar el principio de mínima energía potencial. Dicho teorema dice que los desplazamientos (u , v , w) que satisfacen las ecuaciones diferenciales de equilibrio, así como las condiciones de contorno, dan un mínimo para la energía potencial total en comparación con cualquier otro campo de desplazamientos que satisfaga las mismas condiciones de contorno.

La operativa del método se puede dividir en tres pasos globales:



A su vez, estos pasos se subdividen en otras actividades que se detallarán a continuación.

Lo primero que se ha de hacer es discretizar el modelo. Para ello, se descompone el dominio en una unión de subdominios topológicamente regulares (elementos finitos), como se aprecia en la Figura 6. Los elementos pueden adquirir formas irregulares adaptándose a las particularidades geométricas del dominio original.

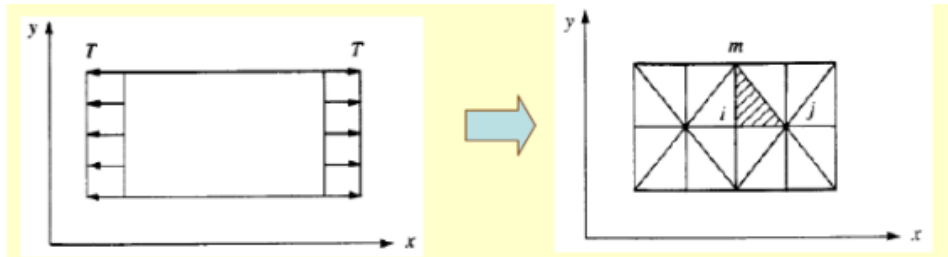


Figura 6. Discretización del modelo.

Posteriormente se han de definir las funciones de aproximación local. Esto consiste en asignar a cada elemento funciones de interpolación (funciones de forma), que permitan calcular las componentes del vector de desplazamiento en el interior del elemento a partir de los desplazamientos de sus nodos (ecuación 4).

$$\{u\} = [N] \cdot \{q\} \quad (4)$$

donde:

$\{u\} \rightarrow$ es el vector de los desplazamientos en el centro del elemento.

$[N] \rightarrow$ es la matriz que contiene las funciones de interpolación del elemento.

$\{q\} \rightarrow$ es el vector que contiene los desplazamientos de los nodos del elemento.

Las funciones de interpolación han de ser elegidas adecuadamente. Normalmente se eligen como funciones combinaciones de polinomios de grado uno o de grado dos.

A continuación, es necesario calcular la matriz de rigidez $[K]$ de cada elemento ya que la ecuación que se debe satisfacer es la siguiente:

$$\{F\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (5)$$

donde:

$\{F\} \rightarrow$ es el vector de fuerzas nodales.

$[K] \rightarrow$ es la matriz de rigidez global.

$\{\delta\} \rightarrow$ es el vector de desplazamiento nodal.

Para calcular la matriz de rigidez $[K]$ de cada elemento se utiliza la siguiente expresión:

$$[K] = \int [B]^T [C][B]dV \quad (6)$$

donde:

[C] → es una matriz dependiente de las propiedades del material y diferente según se esté en el caso de tensión plana o deformación plana.

[B] → es la matriz la matriz derivada de las funciones de forma y se calcula como:

$$[B] = [L] \cdot [N] \quad (7)$$

siendo [L] la matriz de derivadas:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Para un caso sencillo de un nodo, la matriz [B] quedaría de la siguiente forma:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} & \frac{\delta N_1}{\delta x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Una vez se hayan calculado las diferentes matrices de rigidez de los distintos elementos se han de ensamblar unas con otras de forma coherente para obtener la matriz de rigidez global que incluya todos los elementos del dominio.

Volviendo a la ecuación 5, se han de introducir las condiciones de contorno de nuestro problema (fuerzas en los nodos más fuerzas exteriores aplicadas en los nodos y desplazamientos). Quedará un sistema de ecuaciones en las cuales habrá como incógnitas las fuerzas en los nodos y algunos desplazamientos.

Para hallar todas estas incógnitas se ha de invertir la matriz de rigidez (ecuación 10) para poder obtener, en una primera instancia, todos los desplazamientos que fuesen aún desconocidos.

$$\{\delta\} = \{F\} \cdot [k]^{-1} \quad (10)$$

Una vez obtenidos todos los desplazamientos, a partir de estos y mediante las funciones de interpolación o funciones de forma, se obtienen los movimientos del sólido, el campo de deformaciones mediante las ecuaciones de compatibilidad y el campo tensional utilizando las correspondientes ecuaciones constitutivas del material.

El sistema de ecuaciones resultante puede ser de tipo lineal o no, dependiendo de aspectos tales como la consideración en el problema de grandes deformaciones, la posible no linealidad del comportamiento constitutivo de los materiales, la posible no linealidad del contacto, etc.

3.5.3 Método escogido para validar el método analítico

Para este trabajo se ha optado por la utilización del método de elementos finitos ya que es más económico que el experimental y únicamente requiere de un ordenador y de la utilización de un programa adecuado.

Para el problema concreto que queremos estudiar con la herramienta del método de elementos finitos, se ha escogido una geometría de una superficie plana y una corona circular con un pequeño espesor a la que se le somete a un par torsor, y una fuerza lateral que se va incrementando progresivamente hasta el momento del deslizamiento, que se detecta porque el programa deja de converger e interrumpe el cálculo. El modelo que se ha utilizado para ello es el que se muestra en la figura 7.

En el apartado 4.2 se explica en detalle ese modelo, cómo se ha diseñado la geometría, la malla, las condiciones de contorno, etc.

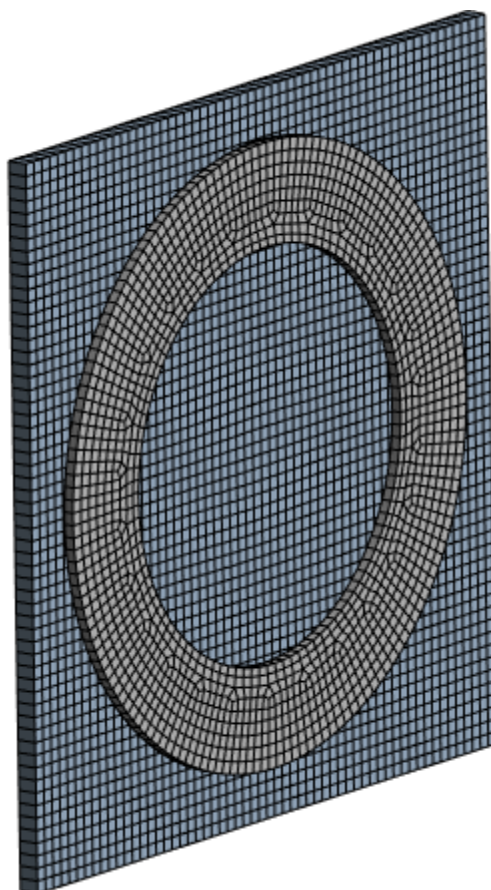


Figura 7. Modelo utilizado para el Método de Elementos Finitos

3.6 Selección/Descripción de la solución propuesta. Diseño (básico o de alto nivel)

Se ha optado por realizar un trabajo de cálculo (no experimental) en el que se comparan dos metodologías de cálculo para demostrar que se obtienen resultados equivalentes con la idea de

avalar la utilización del método analítico cuya aplicación resulta mucho más sencilla y tiene un menor costo computacional. En el apartado 4 se describe el fundamento de la metodología empleada.

3.7 Diagrama de Gantt/cronograma

A continuación, en la Tabla 1, se muestra el tiempo dedicado para las diferentes tareas que se han desarrollado en la elaboración del presente Trabajo de Fin de Grado, situándolas cronológicamente por medio de un diagrama de Gantt como se ve en la Figura 8.

Tabla 1. Diagrama de Gantt.

Id	Nombre de tarea	Duración	Comienzo	Fin
1	TIEMPO TOTAL DE PROYECTO	33 sem.	mié 01/11/23	mar 18/06/24
2	Estudiar bibliografía de referencia de los elementos finitos	4 sem.	mié 01/11/23	mar 28/11/23
3	Programación de Matlab cabeza del tornillo	4 sem.	mié 29/11/23	mar 26/12/23
4	Vacaciones y preparación exámenes	4 sem.	mié 27/12/23	mar 23/01/24
5	Revisión programa Matlab	2 sem.	mié 24/01/24	mar 06/02/24
6	Cálculos de cada caso Matlab	3 sem.	mié 07/02/24	mar 27/02/24
7	Geometría Ansys cabeza tornillo	6 sem.	mié 28/02/24	mar 09/04/24
8	Pruebas Ansys cabeza tornillo	3 sem.	mié 10/04/24	mar 30/04/24
9	Elaboración trabajo fin de grado	5 sem.	mié 01/05/24	mar 04/06/24
10	Corrección trabajo fin de grado	2 sem.	mié 05/06/24	mar 18/06/24

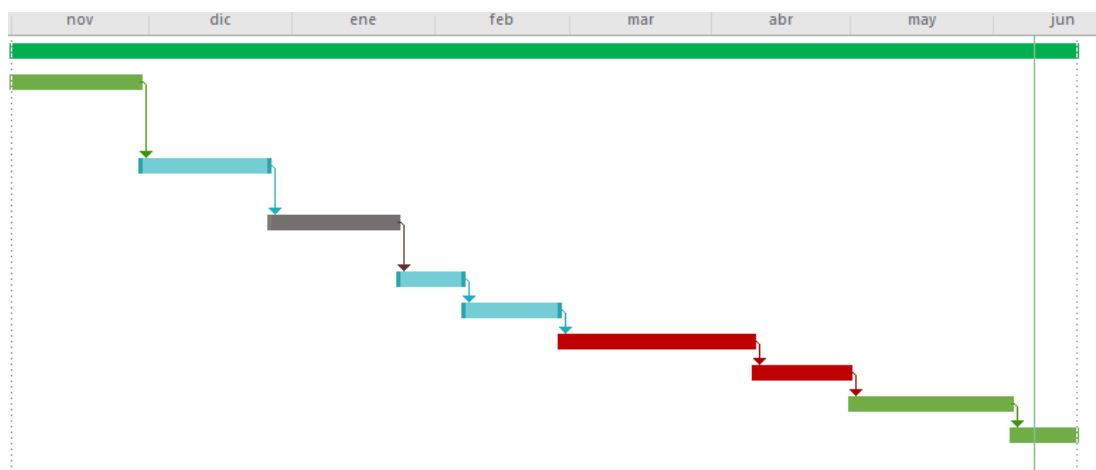


Figura 8. Diagrama de Gantt.

Para la realización del trabajo ha sido necesaria una serie de horas, las cuales han sido distribuidas entre los meses de noviembre a junio. Las unidades de trabajo en las que se ha invertido más tiempo, han sido relativas al uso del programa Ansys para el cálculo del modelo de elementos finitos.

3.8 Aspectos económicos

En este apartado se expone el cálculo estimado del coste para la elaboración del Trabajo de Fin de Grado, teniendo en cuenta las horas de dedicación invertidas tanto por el autor del trabajo como por su tutor, las amortizaciones correspondientes al ordenador y las licencias de Microsoft, Matlab y Ansys. A este subtotal se le ha añadido una estimación del cinco por ciento en relación a costes indirectos como son el suministro de electricidad o calefacción, red de datos y telefonía. Todo esto, eleva el gasto total de la realización del presente Trabajo de Fin de Grado 4107,13 euros.

Tabla 2. Horas de dedicación.

HORAS DE DEDICACIÓN			
	Horas	Coste horario (€/h)	Total (€)
Autor TFG	200	15	3000
Director TFG	20	45	900
Subtotal			3900

Tabla 3. Amortizaciones.

AMORTIZACIONES				
	Precio (€)	Vida útil (años)	Uso (h)	Total (€)
Ordenador	600	10	200	6,6
Licencia Microsoft	69	1	100	3,8
Licencia Matlab	69	1	30	1,15
Licencia Ansys Student	0	1	70	0
1Año = 1800h			Subtotal	11,55

Tabla 4. Resumen de gastos.

RESUMEN	
	Coste (€)
Horas de dedicación	3900
Amortizaciones	11,55
Subtotal 1	3911,55
Gastos indirectos (%5)	195,98
Total	4107,13

4 Fundamento de los métodos empleados

A continuación, se describe el fundamento de los dos métodos empleados: el modelo analítico propuesto por Nassar y el modelo basado en los elementos finitos desarrollado a través del software Ansys.

4.1 Modelo analítico

A continuación, se explica el desarrollo matemático que conduce a las fórmulas del modelo analítico empleado y se explica su programación en Matlab.

4.1.1 Estudio del contacto de la cabeza del tornillo. Fórmulas teóricas.

En la Figura 9 se muestra la cabeza del tornillo vista desde abajo (desde el vástago).

El par torsor en color rojo trata de aflojar el tornillo (par a favor de la dirección de giro de aflojamiento del tornillo). Este es el par necesario para aflojar el tornillo en esta zona, que debe ser igual al par resistente de fricción T_b . Este par genera una fuerza dF_{T_b} sobre un diferencial de área de contacto.

Adicionalmente existe una fuerza cortante F_{eb} en color azul, que genera una fuerza dF_{eb} . A estas fuerzas se opone una fuerza de fricción. Para que el tornillo se afloje en esta zona de contacto de la cabeza del tornillo, toda la superficie de contacto debe deslizar teniendo todas las fuerzas de fricción diferenciales $dF_{bf} = \mu p dA$ la dirección contraria al movimiento de deslizamiento. Esto implica que en esta condición la superficie debe girar con respecto al punto C_b de la Figura 9, que se encuentra a una distancia r_{cb} del eje del tornillo.

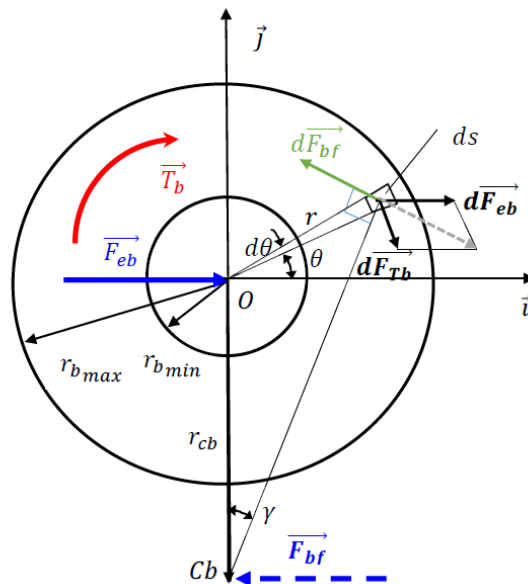


Figura 9. Equilibrio de fuerzas en la superficie de contacto de la cabeza del tornillo

El ángulo γ que forma un área diferencial se observa en la Figura 9, siendo:

$\cos \gamma = \frac{r_{cb} + r \sin \theta}{\sqrt{(r_{cb} + r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2}} = \frac{r_{cb} + r \sin \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb}r \sin \theta}}$ $\sin \gamma = \frac{r \cos \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb}r \sin \theta}}$	(11)
---	------

Planteando el equilibrio de pares con respecto al punto C_b :

$T_{bf} = T_b + F_{eb} r_{cb}$	(12)
--------------------------------	------

Donde T_{bf} es el par correspondiente a las fuerzas de fricción dF_{bf} con respecto a C_b :

	$T_{bf} = \int r x dF_{bf} = \int \mu p \sqrt{(r_{cb} + r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} dA \quad (13)$	
--	--	--

Suponiendo presión constante, y siendo el diferencial de área:

	$dA = r dr d\theta \quad (14)$	
--	--------------------------------	--

La ecuación (3) queda:

	$T_{bf} = \mu p \int \sqrt{(r_{cb} + r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} r dr d\theta$ $= \mu p \int \sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb} r \sin \theta} r dr d\theta \quad (15)$	
--	---	--

Por otra parte, planteando el equilibrio de fuerzas en dirección i:

	$F_{eb} = \int dF_{bf} \cos \gamma = \mu p \int \frac{r_{cb} + r \sin \theta}{\sqrt{(r_{cb} + r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2}} r dr d\theta$ $= \mu p \int \frac{r_{cb} + r \sin \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb} r \sin \theta}} r dr d\theta \quad (16)$	
--	--	--

La ecuación 16 coincide con la ecuación 2 que aparece en el apartado 3.5

Ambas a integrar numéricamente entre $r_{bmin} < r < r_{bmax}$ (radio interior y exterior de la superficie de contacto de la cabeza del tornillo) y $0 < \theta < 2\pi$. Sustituyendo (15) y (16) en (12) se obtiene el valor de T_b en función de r_{cb} :

	$T_b = T_{bf} - F_{eb} r_{cb} = \mu p \int \frac{r + r_{cb} \sin \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb} r \sin \theta}} r^2 dr d\theta \quad (17)$	
--	--	--

La ecuación 17 coincide con la ecuación 3 que aparece en el apartado 3.5

Donde, siendo F la fuerza de precarga del tornillo:

	$p = \frac{F}{\pi \cdot (r_{bmax}^2 - r_{bmin}^2)} \quad (18)$	
--	--	--

Sustituyendo (18) en (16) y (17):

	$F_{eb} = \frac{\mu F}{\pi \cdot (r_{bmax}^2 - r_{bmin}^2)} \int \frac{r_{cb} + r \sin \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb} r \sin \theta}} r dr d\theta$ $T_b = \frac{\mu F}{\pi \cdot (r_{bmax}^2 - r_{bmin}^2)} \int \frac{r + r_{cb} \sin \theta}{\sqrt{r_{cb}^2 + r^2 + 2r_{cb} r \sin \theta}} r^2 dr d\theta \quad (19)$	
--	---	--

De la fórmula de F_{eb} de (19) se puede extraer el valor de r_{cb} correspondiente a una fuerza F_{eb} conocida, e introduciendo ese valor en la fórmula de T_b de (17), se calcula el par T_b necesario para provocar el deslizamiento en este contacto y por tanto promover el aflojamiento del tornillo.

Como caso particular, cuando la fuerza cortante F_{eb} es nula, r_{cb} es cero y T_b es:

	$T_b(F_{eb} = 0) = \mu F \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{r_{bmax}^3 - r_{bmin}^3}{r_{bmax}^2 - r_{bmin}^2}$	(20)
--	---	------

Para relaciones r_{bmax}/r_{bmin} relativamente pequeñas, se cumple:

	$\frac{2}{3} \cdot \frac{r_{bmax}^3 - r_{bmin}^3}{r_{bmax}^2 - r_{bmin}^2} \approx \frac{r_{bmax} + r_{bmin}}{2}$	(21)
--	---	------

Por tanto, la expresión (10) queda:

	$T_b(F_{eb} = 0) = \mu F \cdot \frac{r_{bmax} + r_{bmin}}{2}$	(22)
--	---	------

Otro caso particular es cuando r_{cb} es ∞ , en cuyo caso según la expresión (19) T_b es cero y $F_{eb} = \mu F$.

Estas expresiones son válidas incluso cuando hay un momento flector sobre la superficie de contacto, ya que la variación de presión debido a un momento flector es lineal, y por tanto el incremento de presión de la mitad derecha de la superficie se ve compensada con el decremento de presión de la mitad izquierda, dando los mismos resultados que habría en ausencia de momento flector (presión uniforme). Esto es válido siempre y cuando no se pierda el contacto en ningún punto de la superficie.

4.1.2 Programación de Matlab con las ecuaciones del método analítico

Para la realización de los cálculos correspondientes al modelo analítico se ha optado por la utilización del programa Matlab que permite:

- Por un lado, introducir las fórmulas correspondientes a la ecuación 16 para el cálculo de la fuerza cortante (F_{eb}) y la ecuación 17 para el cálculo del par torsor (T_b)
- Introducir unos valores concretos para las variables que aparecen en dichas ecuaciones. En concreto, se han introducido los valores de:
 - Un coeficiente de fricción (μ) de 0,1. Como puede verse en la Tabla 5 puede ser un valor típico en algunas circunstancias.
 - La precarga (p) de 1000 N
 - Los radios máximo (r_{bmax}) y mínimo (r_{bmin}) de 15 mm y 10 mm respectivamente, correspondientes a un tornillo DIN 6912 M20, como se ve en la Tabla 6.

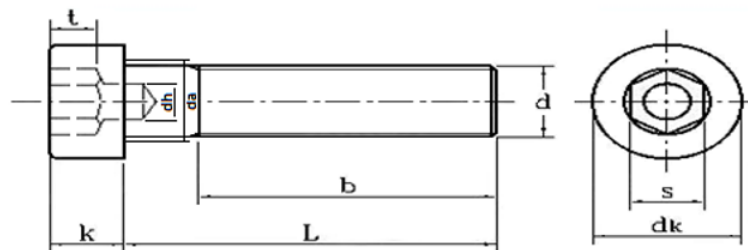
Se han elegido estos valores por considerarse representativos de una situación típica, pero en realidad, lo importante es la utilización de los mismos valores en los dos métodos de trabajo: analítico y mediante elementos finitos. Se podrían repetir de forma sencilla todos los cálculos con otros valores en caso de interés.

Tabla 5. Valores orientativos para el coeficiente de fricción de rosca μ

Rosca de tornillo		Acero							
		ennegrecido o fosfato de cinc							
Rosca de tuerca			prensado enrollado	torneado tronzado	amolado	cadmiado 6 μ	cincado 6 μ		
	Acero	laminado	ligeramente lubricado	0,14	0,10	0,16	0,10	0,10	
amolado				0,16	0,10	0,16	0,10	0,10	
torneado amolado				fosfato de cinc	0,14		0,10		
torneado amolado					0,10				
torneado amolado				0,10		0,10	0,10	0,10	
cadmiado		6 μ					0,14		
cincado								0,10	
cadmiado				seco	0,10		0,10	0,14	
cincado					0,10		0,10		0,14

Tabla 6. Medidas tornillos DIN6912

DIN 6912 SOCKET HEAD CAPSCREW (LOW HEAD)



Thread, d	p	b			dk		da	dh		k		s		t	
		$l \leq 125\text{mm}$	$125 < l \leq 200\text{mm}$	$l > 200\text{mm}$	MAX	MIN	MAX	MAX	MIN (NOM)	MAX	MIN	MAX	MIN	MAX	MIN
M4	0.7	14	-	-	7	6.78	4.7	2.06	2	2.8	2.66	3.1	3.02	1.72	1.48
M5	0.8	16	-	-	8.5	8.28	5.7	2.56	2.5	3.5	3.32	4.12	4.02	2.12	1.88
M6	1	18	-	-	10	9.78	6.8	3.06	3	4	3.82	5.14	5.02	2.62	2.38
M8	1.25	22	-	-	13	12.73	9.2	4.075	4	5	4.82	6.14	6.02	3.12	2.88
M10	1.5	26	32	-	16	15.73	11.2	5.075	5	6.5	6.28	8.175	8.025	3.65	3.35
M12	1.75	30	36	-	18	17.73	13.7	6.075	6	7.5	7.28	10.18	10.03	4.15	3.85
M14	2	34	40	-	21	20.67	15.7	7.09	7	8.5	8.28	12.21	12.03	4.65	4.35
M16	2	38	44	57	24	23.67	17.7	8.09	8	10	9.78	14.21	14.03	5.65	5.35
M18	2.5	42	48	61	27	26.67	20.2	8.09	8	11	10.73	14.21	14.03	6.15	5.85
M20	2.5	46	52	65	30	29.67	22.4	10.09	10	12	11.73	17.23	17.05	6.68	6.32
M22	2.5	50	56	69	33	32.61	24.4	10.09	10	13	12.73	17.23	17.05	7.18	6.82
M24	3	54	60	73	36	35.61	26.4	12.11	12	14	13.73	19.28	19.07	7.18	6.82
M27	3	60	66	79	40	39.61	30.4	12.11	12	16	15.73	19.28	19.07	8.68	8.32
M30	3.5	66	72	85	45	44.61	33.4	15.11	15	17.5	17.23	22.28	22.07	9.18	8.82
M33	3.5	72	78	91	50	49.61	36.4	16.61	16.5	19.5	19.17	24.28	24.07	10.18	9.82
M36	4	78	84	97	54	53.54	39.4	18.11	18	21.5	21.17	27.28	27.07	11.72	11.28

- Que el programa vaya haciendo secuencialmente, a través de la función "while" los cálculos de T_e y F_{eb} variando progresivamente el valor de r_{cb} (distancia del eje del tornillo al punto C_b con respecto al cual gira la superficie) desde 0 hasta el momento en el que el valor de T_b sea inferior a 10000 Nmm (10Nm) por considerar que en ese valor ya se va llegando al valor

asintótico para el que apenas hay variación. La variación de r_{cb} se ha establecido mediante la fórmula:

$$r_{cb} = r_{cb} + \frac{rb_{max}}{25} \quad (23)$$

que permite que el incremento sea proporcional al tamaño del tornillo para el que se quieren hacer los cálculos.

- Que el programa genere, con los resultados obtenidos de todos esos cálculos por medio de la función “plot” varias gráficas, como las de la Figura 10, en las que se represente:
 - La variación de F_{eb} según se van haciendo los cálculos con distintos r_{cb}
 - La variación de T_b según se van haciendo los cálculos con distintos r_{cb}
 - La variación de r_{cb} a lo largo de los diferentes cálculos

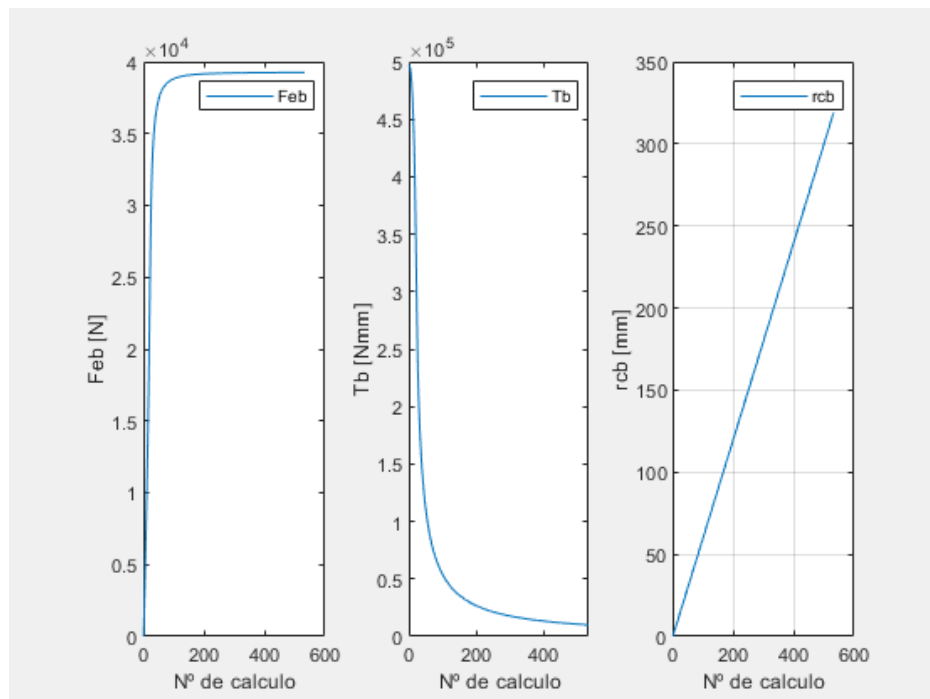


Figura 10. Variaciones de F_{eb} , T_b y r_{cb} .

- Finalmente, el programa representa con la función “plot”, en una única gráfica, la relación entre los valores del par torsor (T_b) y la fuerza cortante (F_{eb}). En la gráfica los puntos se pueden interpolar a una línea curva que marca el límite donde empezará a deslizarse la cabeza del tornillo. A continuación, se muestra en la Figura 11 la gráfica que se obtiene al representar los valores de T_b frente a F_{eb} .

Así, si un tornillo está bajo la carga de una T_b determinada y por las vibraciones o cualquier fuerza cíclica recibe una F_{eb} de un valor mayor al correspondiente al punto de la curva de ese valor de T_b , momentáneamente en ese instante el tornillo deslizará dando como resultado que el tornillo se afloje un poco. Cada vez que se sobrepase el valor de F_{eb} de la curva el tornillo se ira aflojando un poco más.

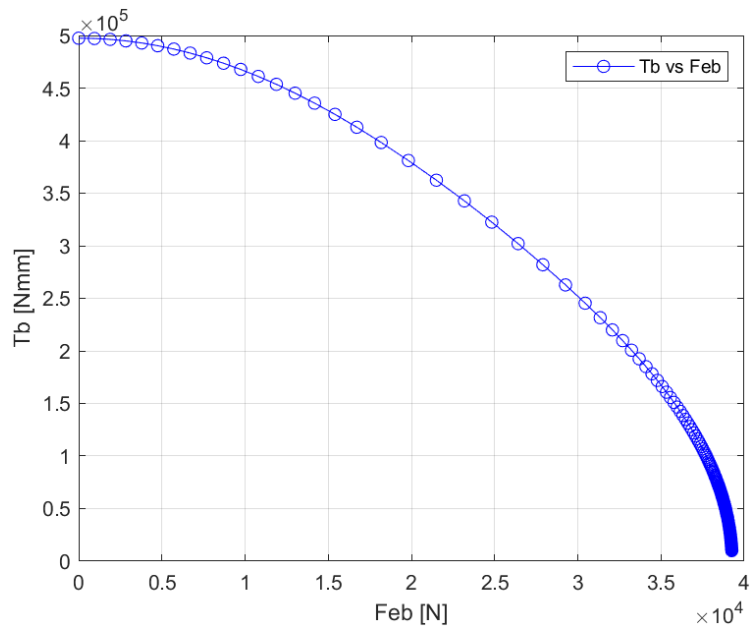


Figura 11. Resultados modelo analítico rango completo.

Y lo mismo sería al revés, cuando ya está bajo una fuerza cortante (F_{eb}) determinada y se le aplica un par torsor (T_b) que sobrepase al correspondiente valor de la curva, se produciría igualmente el desplazamiento que daría lugar al aflojamiento. El caso más común en la vida real es cuando no existe par torsor y las vibraciones crean una fuerza cortante suficientemente grande como para que se produzca el deslizamiento, es decir estaríamos en el eje de abscisas de la gráfica.

La curva que une todos los puntos marca el limite de la zona donde se produce el deslizamiento del tornillo como se indica en la siguiente Figura 12:

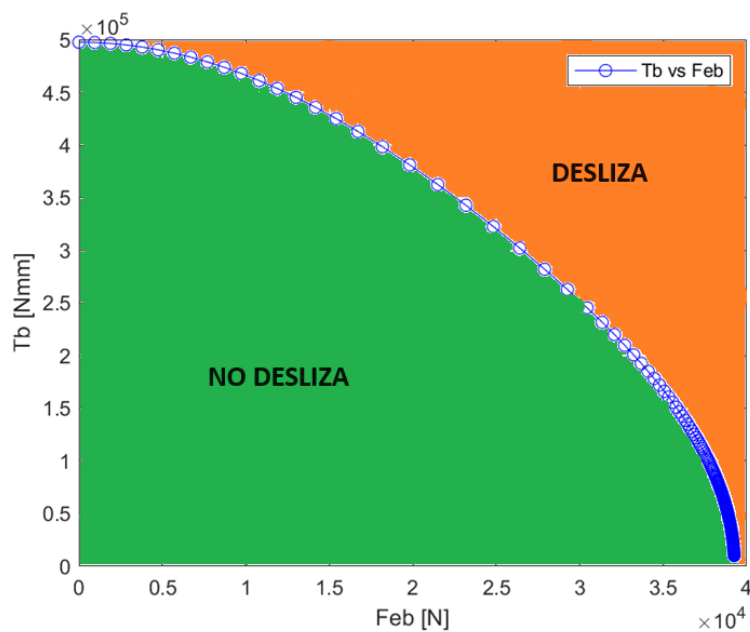


Figura 12. División de zonas de autoaflojamiento.

Por todo ello, Matlab ha sido la herramienta de cálculo elegida y se ha tenido que programar todo lo anterior en dicha herramienta, consistiendo la primera parte de este Trabajo de Fin de Grado en la programación de Matlab para que pudieran realizarse por medio del programa todos los cálculos y gráficos arriba explicados.

El primer cálculo realizado con Matlab en las condiciones arriba indicadas produjo como resultados los datos de la Tabla 10 del anexo II y los gráficos de las figuras 10 y 11 arriba indicadas.

A partir de la gráfica T_b vs F_{eb} (figura 11) se decidió elegir tres puntos equidistantes para los que realizar la comparativa entre los dos métodos (analítico y de EF). Los puntos elegidos fueron los correspondientes a los valores de T_b de 450Nm, 300Nm y 150Nm. Los datos obtenidos en el primer cálculo para esos valores que más se aproximan a esos valores de T_b son los que aparecen en la Tabla 7:

Tabla 7. Resultados más próximos a los valores de T_b escogidos

F_{eb} (N)	T_b (Nmm)	r_{cb} (mm)
11883.16	453549.94	7.20
13006.88	445120.02	7.80

F_{eb} (N)	T_b (Nmm)	r_{cb} (mm)
26411.69	302035.69	13.20
27900.49	281942.37	13.80

F_{eb} (N)	T_b (Nmm)	r_{cb} (mm)
35782.64	150997.34	22.20
35978.54	146592.27	22.80

Estos valores nos permiten tener una primera aproximación del valor de r_{cb} que corresponde a los valores de T_b escogidos.

Para poder disponer de datos más precisos mediante el modelo analítico, se volvieron a repetir los cálculos focalizando los resultados en estas zonas.

- Para conseguir los datos más precisos en $T_b=450\text{Nm}$ se ha empezado con $r_{cb}=7,2\text{mm}$ y se ha ido subiendo $0,01\text{mm}$ en cada calculo hasta llegar a $7,8\text{mm}$, que corresponden a los valores de los dos puntos más próximos según se indica en la Tabla 7.
- Para conseguir los datos más precisos en $T_b=300\text{ Nm}$ se ha empezado con un $r_{cb}=13,2\text{mm}$ y se ha ido subiendo hasta llegar a $13,8\text{mm}$, que corresponden a los valores de los dos puntos más próximos según se indica en la Tabla 7.

- Por último, en el caso de $T_b=150$ Nm se ha empezado con $r_{cb}=22,2$ mm y se ha terminado con $r_{cb}=22,8$ mm, que corresponden a los valores de los dos puntos más próximos según se indica en la Tabla 7.

Todos los programas desarrollados en Matlab, uno para la curva completa y los tres que cubren cada zona específica, están en el Anexo I.

4.2 Método de los Elementos Finitos (EF). Utilización de Ansys.

Para la realización de los análisis correspondientes mediante el método de los elementos finitos se ha optado por la utilización del programa Ansys.

Ansys es un Software líder de simulación por Elementos Finitos (CAE). Incluye las fases de pre-proceso (creación de geometría, mallado, aplicación de fuerzas y condiciones de contornos), resolución (cálculo) y post-proceso (visualización de los resultados) en una única plataforma de trabajo. Ansys ejecuta el análisis a piezas o conjuntos de piezas usados en ingeniería y diseño mecánico que están sometidos a uno o varios fenómenos físicos de manera individual o simultánea.

En cuanto al procedimiento utilizado, lo primero fue realizar el modelo geométrico de elementos finitos (EF) mediante el software Ansys. Se decidió modelizar, tal y como se ve en la Figura 13:

- un disco con un agujero en el medio, es decir, una corona circular con un pequeño espesor, simulando la cara inferior de la cabeza del tornillo y
- una superficie plana que simulara la superficie de uno de los materiales que se quiere unir que está en contacto con el tornillo.

Esto supone una simplificación porque hacer el diseño de la cabeza completa del tornillo incrementaría muchísimo el coste computacional para hacer los cálculos y se estimaba que no supondría un incremento en la precisión de los resultados.

Se podría pensar que la geometría elegida (corona circular) podría ser simplificada por ser una figura simétrica, tomando la geometría de una parte, y así ahorrar coste computacional. Sin embargo, no es así ya que teniendo en cuenta las fuerzas que se aplican pierde toda la simetría que tenía, ya que, aunque el modelo geométrico siga siendo simétrico, en sus diferentes puntos habrá fuerzas aplicadas en direcciones diferentes.

Para la geometría se han usado las medidas de un tornillo DIN 6912 M20, al igual que se había hecho en Matlab. Todos los datos utilizados (dimensiones de la cabeza del tornillo, coeficiente de fricción y precarga), son los mismos que fueron usados en el caso analítico con objeto de poder comprobar que se obtenían resultados equivalentes por los dos métodos.

Después de modelar la geometría que se ha explicado, en Ansys se ha escogido como material de ambas partes (disco y superficie plana) el acero. Las propiedades de este material ya vienen definidas en Ansys por defecto, y son las que se muestran en la Figura 14.

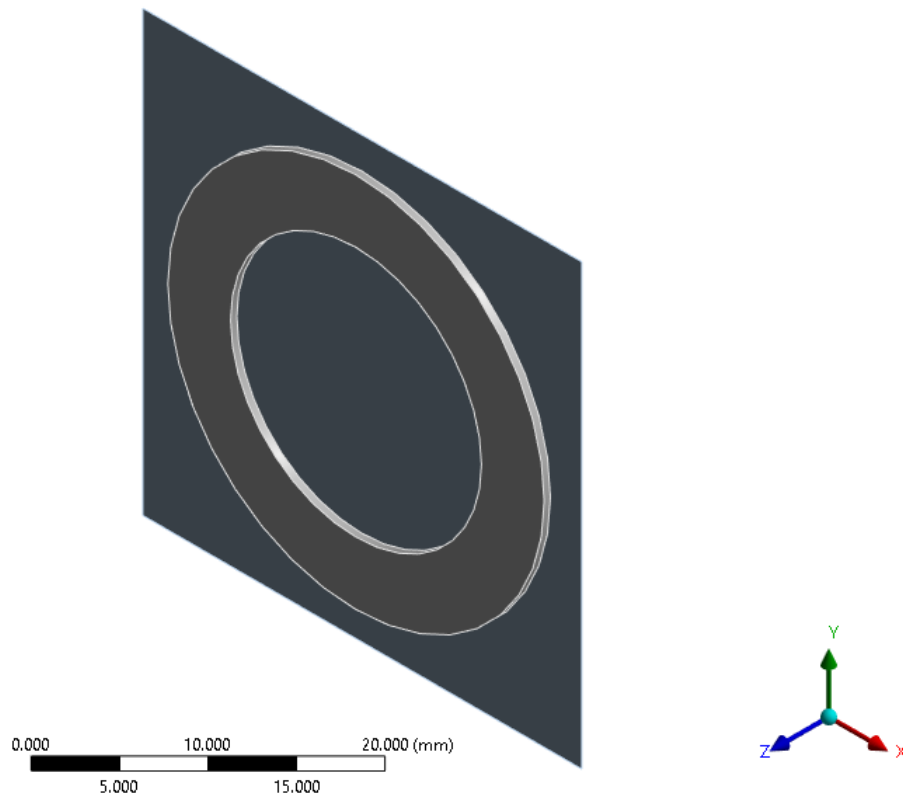


Figura 13. Geometría del contacto entre la cabeza de un tornillo y otro objeto

Outline of Schematic A2: Engineering Data					
	A	B	C	D	E
1	Contents of Engineering Data			Source	Description
2	Material				
3	Structural Steel				Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5 -110.1
*	Click here to add a new material				

Properties of Outline Row 3: Structural Steel					
	A	B	C	D	E
1	Property	Value	Unit		
2	Material Field Variables	Table			
3	Density	7850	kg m ⁻³		
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion				
6	Isotropic Elasticity				
7	Derive from	Young's Modulu...			
8	Young's Modulus	2E+11	Pa		
9	Poisson's Ratio	0.3			
10	Bulk Modulus	1.6667E+11	Pa		
11	Shear Modulus	7.6923E+10	Pa		
12	Strain-Life Parameters				
20	S-N Curve	Tabular			
24	Tensile Yield Strength	2.5E+08	Pa		
25	Compressive Yield Strength	2.5E+08	Pa		
26	Tensile Ultimate Strength	4.6E+08	Pa		
27	Compressive Ultimate Strength	0	Pa		

Figura 14. Propiedades definidas del acero en Ansys.

En las geometrías de tres dimensiones, como es este caso, se suele discretizar la pieza en elementos con forma de tetraedros o hexaedros. Cada uno de estos elementos tiene unas características que hay que tener en cuenta antes de optar por una u otra forma:

- Los elementos hexaedros aportan una mayor precisión. Los elementos tetraedros son elementos de tensión constante, es decir, que no son capaces de percibir más de una tensión en el mismo elemento, mientras que los elementos hexaedros si pueden hacerlo. Por lo tanto, los elementos hexaedros permiten obtener más precisión con menos elementos lo que significa que tendrá un menor coste computacional.
- Los elementos tetraedros, por su parte, se adaptan mejor a geometrías complejas que los elementos hexaedros.

Como en este caso el modelo no tiene geometrías con mucha complejidad se ha optado por discretizar con hexaedros.

Más concretamente, para la realización de la malla se han utilizado elementos hexaedros de segundo orden. La diferencia entre elementos de primer orden o de segundo orden, es que los elementos de primer orden tienen los nodos en las esquinas y los elementos de segundo orden, además de los nodos de las esquinas, tienen un nodo intermedio en cada arista. Por lo tanto, utilizando elementos de segundo orden se obtienen resultados más precisos, ya que son elementos con más nodos y el ordenador calcula más resultados, por lo que las interpolaciones para el resto de puntos que no sean nodos serán más precisas. Además, estos elementos se adaptan mejor a geometrías complejas.

Para el tamaño de la malla se han usado elementos de un tamaño de 0,6mm resultando la figura 15. Para elegir el tamaño de esta hay que intentar obtener un buen nivel de precisión a un coste asumible. Por este motivo, en el primero de los cálculos por este método, se hizo un análisis de sensibilidad, que consiste en hacer el análisis con distintos tamaños de malla. Cuando se hacen los cálculos con dos tamaños y apenas hay variación entre los resultados obtenidos para dos tamaños de malla distintos, se considera que la reducción en el tamaño de malla va a suponer un mayor coste computacional, pero sin mejorar la precisión, por lo que se considera óptimo el mayor tamaño. En el apartado 5.2 se indica los resultados de este análisis de sensibilidad para la T_b de 300 Nm.

A continuación, se ha definido el contacto entre las dos piezas. Existen varios tipos de contacto posibles. Los más usados son los siguientes:

- Bonded: no puede haber deslizamiento ni separación entre las superficies que están como si estuvieran pegadas
- Friction: para geometrías que pueden sufrir ciertas tensiones en las superficies de contacto antes de producirse el deslizamiento
- Frictionless: para geometrías que deslizan con cualquier tensión porque el coeficiente de fricción es nulo

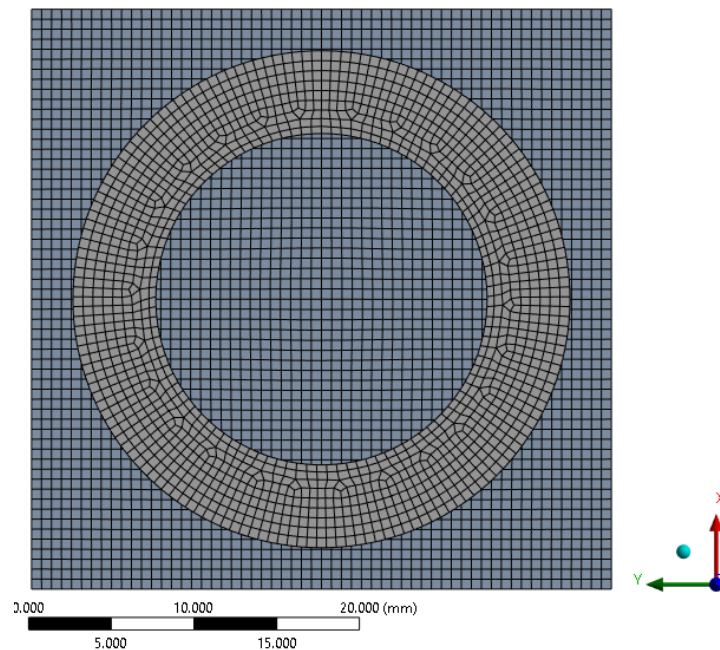


Figura 15. Mallado de la geometría de las dos piezas.

En este caso, se ha usado el contacto denominado “Frictional” en Ansys, que supone que una superficie no pueda atravesar la otra, pero sí permite que pueda deslizar por encima de la otra con un coeficiente de fricción aplicado, que en este caso es de 0,1 (el mismo que se escogió en el método analítico). Las superficies seleccionadas para el contacto se indican en la Figura 16.

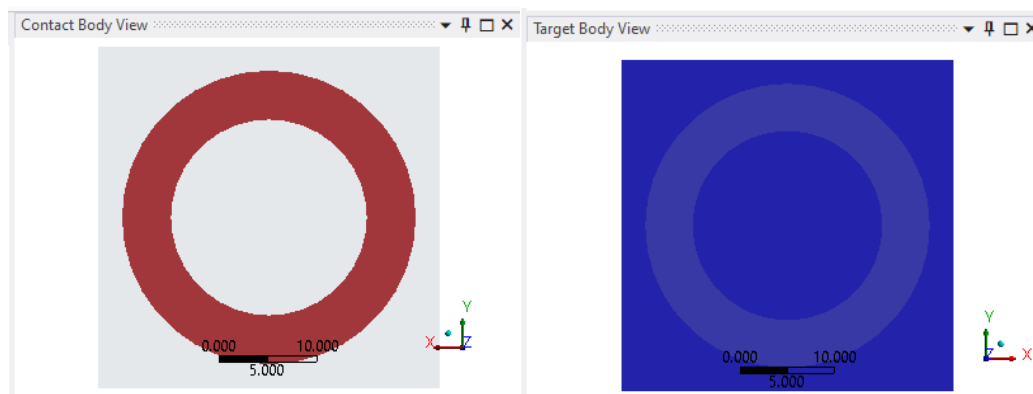


Figura 16. Las superficies seleccionadas para el contacto “Frictional”.

A la hora de definir las condiciones de contorno que se desean imponer se ha establecido lo siguiente:

- Empotramiento de la cara exterior de la superficie plana mediante la función “Fixed Support”. Eso hace que se restrinja todo movimiento y giro en esta cara, ya que, en la realidad, la pieza no termina en ese punto, sino que el movimiento en ese punto está restringido por el material restante de la pieza que no se ha representado.

En cuanto a las cargas externas que actúan sobre el tornillo, representado por la corona circular de un pequeño espesor, se han introducido todas ellas en la cara que no está en contacto con la superficie plana y son las siguientes:

- Presión: Una presión en el eje Z haciendo que las dos piezas se junten, simulando la reacción de la precarga como se ve en la Figura 17 (a).
- Fuerza cortante: Una fuerza en el eje X intentando que la cabeza del tornillo se desplace hacia un lado, representada en la Figura 17 (b).
- Par torsor: Es una fuerza giratoria en el eje Z que trata de aflojar el tornillo (par a favor de la dirección de giro de aflojamiento del tornillo), como aparece en la Figura 17 (c). Para aplicar este par se ha creado un Punto remoto justo en el medio de la corona para que la fuerza gire alrededor de ese punto.

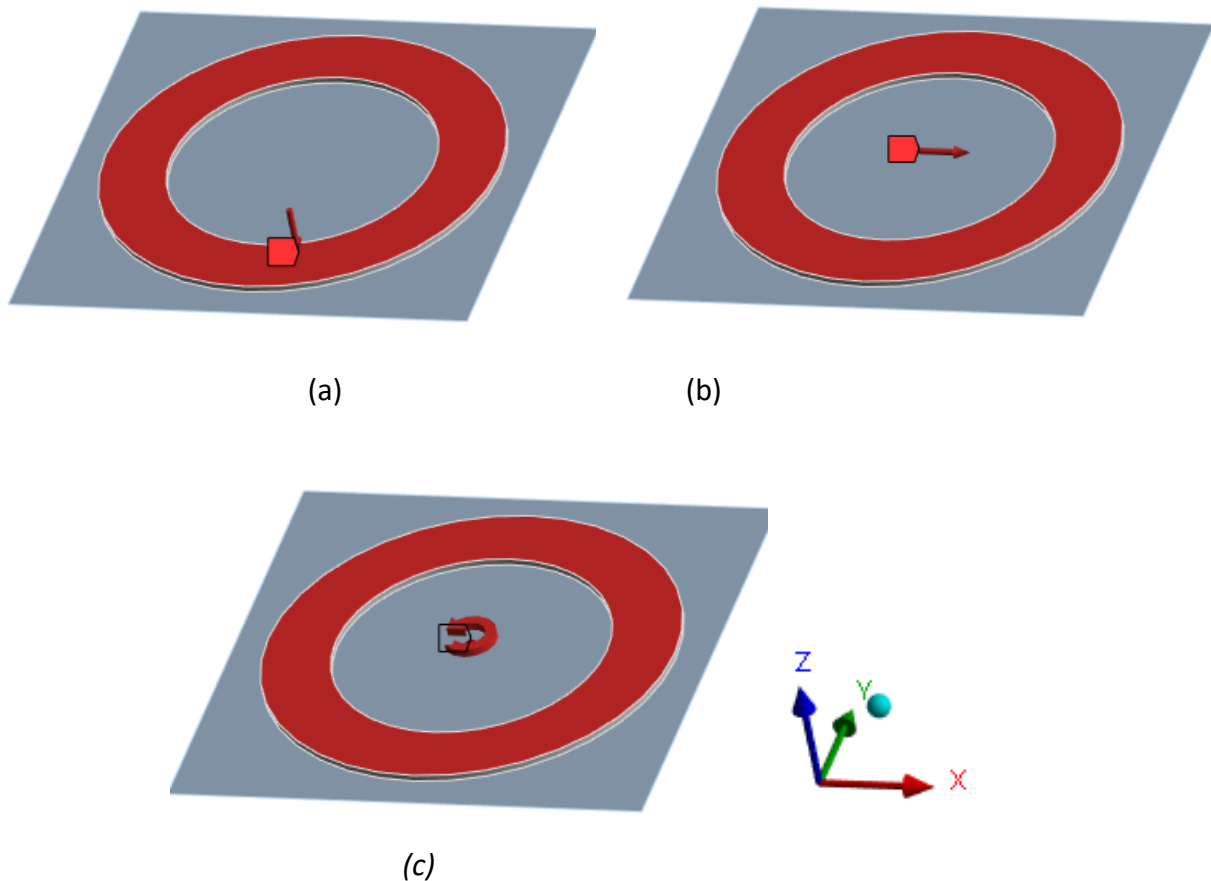


Figura 17. Cargas externas.

Con esto se daría por finalizado el diseño del modelo geométrico y quedaría por definir el tipo de análisis que se va a hacer, lineal o no lineal.

El análisis lineal es una forma rápida y eficiente de abordar muchos problemas de ingeniería, no obstante, la mayoría de fenómenos tienen un comportamiento no lineal. El grado de no linealidad es el que determina la validez o no de un análisis lineal. Muchas veces, si se entiende la naturaleza

del problema, se puede realizar un análisis lineal y sacar conclusiones de cómo será la respuesta del sistema no lineal (por ejemplo, cuando en una zona de una pieza se supera la fluencia en un análisis lineal, se sabe que la tensión adicional se redistribuye sin necesidad de realizar un análisis no lineal).

Por ello, mientras que el análisis lineal se realiza en un solo paso, el análisis no lineal se resuelve realizando el análisis en varios pasos (durante los cuales la sollicitación se incrementa gradualmente), de forma que a mayor número de pasos mayor es la precisión, pero mayor el coste computacional. Por este motivo, el análisis no lineal sólo debe emplearse cuando sea totalmente necesario:

- 1) Cuando se requieran resultados con una precisión muy grande, por ejemplo, en piezas que puedan provocar daños catastróficos.
- 2) Cuando existe contacto entre partes de la pieza (penetración, deslizamiento, etcétera).
- 3) Cuando existen grandes deformaciones en partes flexibles de la pieza.
- 4) Cuando el comportamiento del material es no lineal (imprescindible por ejemplo en análisis de procesos de fabricación como el conformado plástico que se basan en esta característica del material).
- 5) Cuando existen fenómenos de rigidización tensional, inestabilidad a pandeo, creep, etcétera.

En este trabajo se realizará un análisis no lineal, ya que se trata de dos piezas que están en contacto, y por lo tanto la matriz de rigidez es variable con el nivel de carga aplicado.

Por lo tanto, en este análisis se van a realizar diferentes pasos (steps), en concreto se han hecho tres steps y dentro de cada uno 100 substeps. Hay que tener en cuenta que el análisis que se está haciendo es el correspondiente a un sistema estático. Por ello, en el momento en el que la cabeza del tornillo esté deslizando completamente deja de converger y se interrumpe el cálculo, porque el sistema habrá dejado de ser estático para ser un sistema dinámico. Analizando cual ha sido el último substep en el que el cálculo ha sido posible, se podrá saber el valor límite para el par torsor y la fuerza cortante a partir de los cuales se produce el deslizamiento.

Se han hecho tres análisis con diferentes pares torsores y fuerzas cortantes. Al igual que en Matlab se ha decidido escoger los mismos puntos: $T_b=450\text{Nm}$, $T_b=300\text{Nm}$ y $T_b=150\text{Nm}$, con objeto de poder cuantificar la diferencia en los resultados entre un método y el otro.

En cada caso se han usado tres “steps” para ir introduciendo las cargas:

- Primer step: Se ha introducido únicamente la presión de reacción de la precarga que va incrementando poco a poco durante todo el step hasta el valor de 1000N. Luego se mantiene en ese valor durante los siguientes dos steps como se muestra en la Figura 18. Este primer step es igual para los tres casos estudiados.

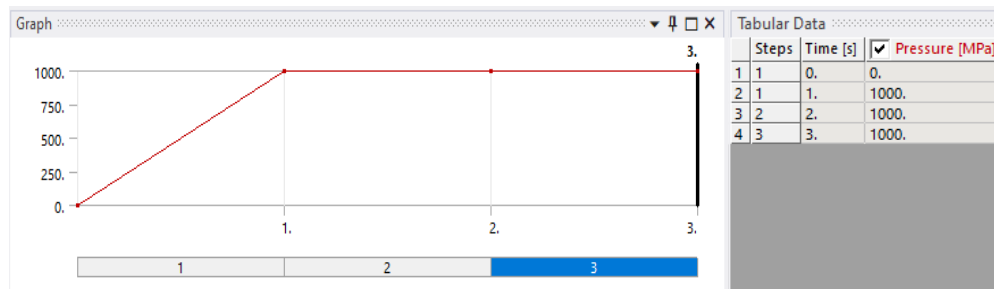


Figura 18. La presión aplicada en la cabeza del tornillo.

- Segundo step varía con cada caso. En este step, además de la presión que viene del step anterior se aplican dos cargas:
 - El par torsor (T_b) que se va aplicando incrementándolo gradualmente desde 0 hasta el valor elegido en cada caso:

- Para T_b de 450Nm el par torsor se aplicará durante el segundo step subiéndolo de 0 a 450Nm y luego se mantiene durante el tercer step como se ve en la Figura 19.

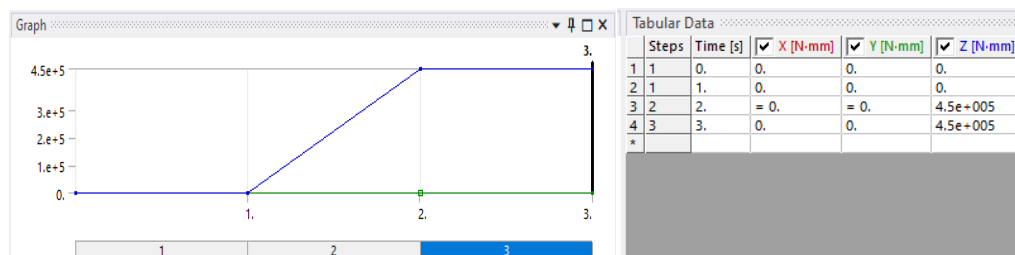


Figura 19. El par torsor (T_b) aplicado en la cabeza del tornillo ($T_b=450\text{Nm}$).

- Para T_b de 300Nm el par torsor se aplicará durante el segundo step subiéndolo de 0 a 300Nm y luego se mantiene durante el tercer step como se ve en la Figura 20.

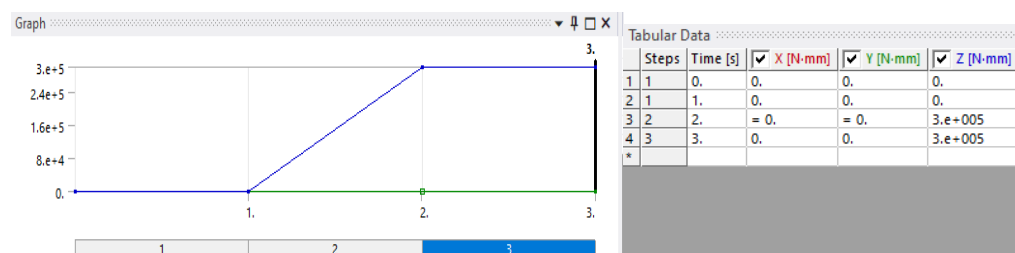


Figura 20. El par torsor (T_b) aplicado en la cabeza del tornillo ($T_b=300\text{Nm}$).

- Para T_b de 150Nm el par torsor se aplicará durante el segundo step subiéndolo de 0 a 150Nm y luego se mantiene durante el tercer step como se ve en la Figura 21.

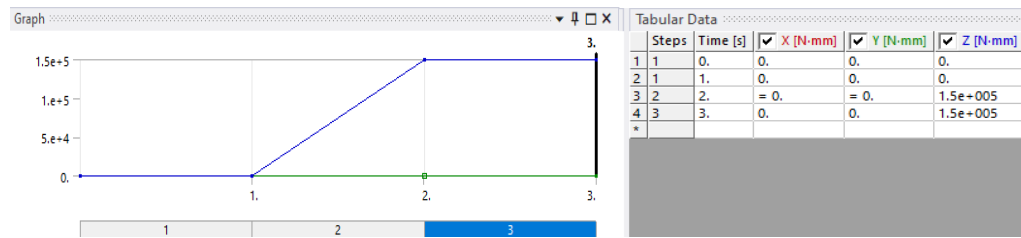


Figura 21. El par torsor (T_b) aplicado en la cabeza del tornillo ($T_b=150Nm$).

- La fuerza cortante (F_{eb}), que se va aplicando en el step 2 incrementándola gradualmente desde 0 hasta un valor estimado y luego en el step 3 se sigue incrementando. Véase la explicación en el step 3.
- Tercer Step: en este paso, además de la presión y el par torsor que continuarán con el mismo valor que se tenía en el step 2, se seguirá incrementando el valor de la fuerza cortante F_{eb} .

Así, el valor de la fuerza cortante se habrá ido incrementando en el step 2 desde 0 hasta un valor estimado y luego se seguirá incrementando hasta un valor máximo en el step 3. Lo que se pretende es ir subiendo la fuerza cortante en el step 2 sin llegar a alcanzar un valor que produciría el deslizamiento para que sea en el step 3, en el que ya el par torsor tiene su valor máximo, en el que se vayan haciendo incrementos en la fuerza cortante hasta llegar a un substep en el que deje de converger porque la pieza ha empezado a deslizar. De esta manera, al empezar el step 3 con un valor de fuerza cortante de cierta entidad, esto permitirá que los incrementos que se realicen en los substeps del step 3 sean menores y se pueda determinar la F_{eb} que estamos buscando con mayor precisión.

El valor estimado que supondrá el máximo a alcanzar en el step 2 corresponderá a un valor que se aproxime algo al valor de F_{eb} que estamos buscando (en el que se produciría el deslizamiento), pero en el que aún no debería deslizar. Esta estimación se hace de la siguiente manera. Se ha consultado la Figura 11 obtenida en el primer cálculo de Matlab y se ha estimado en cada caso un valor de F_{eb} inferior al valor correspondiente para cada T_b en la curva, que será el máximo a alcanzar en el step 2 y un valor por encima del valor que estamos buscando, que tomaremos como valor máximo para el step 3, como se ve en las figuras 22, 23 y 24 que corresponden a los siguientes valores:

- Para T_b : 450Nm,
 - F_{eb} máxima step 2: 11000N,
 - F_{eb} máxima step 3: 14000N

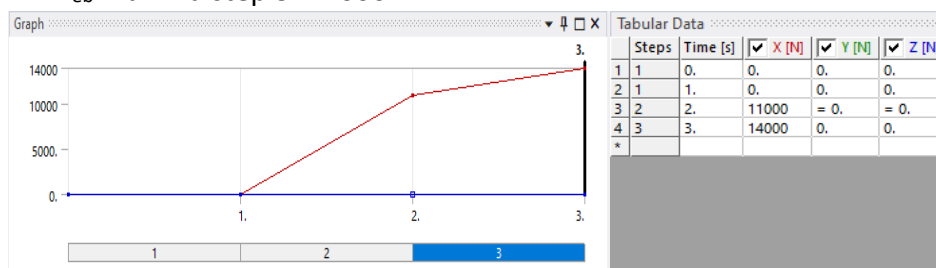


Figura 22. La fuerza cortante (F_{eb}) aplicada en la cabeza del tornillo ($T_b=450Nm$).

- Para T_b : 300Nm,
 - F_{eb} máxima step 2: 25000N,
 - F_{eb} máxima step 3: 28000N

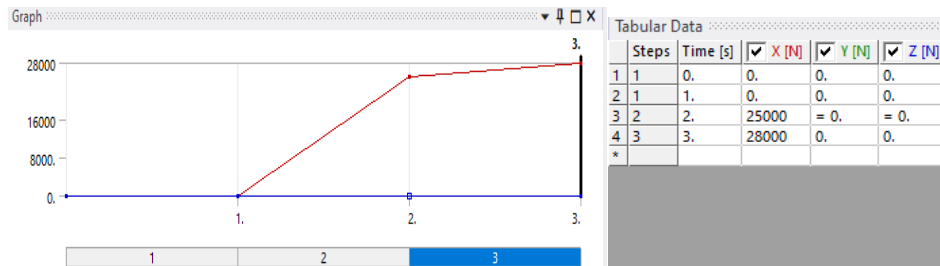


Figura 23. La fuerza cortante (F_{eb}) aplicada en la cabeza del tornillo ($T_b=300Nm$).

- Para T_b : 150Nm,
 - F_{eb} máxima step 2: 34000N,
 - F_{eb} máxima step 3: 37000N

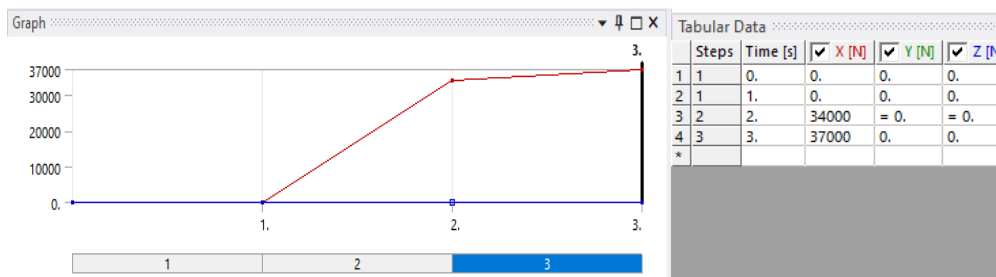


Figura 24. La fuerza cortante (F_{eb}) aplicada en la cabeza del tornillo ($T_b=150Nm$).

5 RESULTADOS

En este apartado se muestran:

- Primeramente, los resultados obtenidos mediante el método analítico para los tres valores de T_b elegidos
- En segundo lugar, los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos para los tres valores de T_b elegidos
- Finalmente, la comparativa entre los resultados de ambos métodos.

5.1 Método analítico

Resultados para T_b en torno a 450 Nm

Las gráficas obtenidas en Matlab han sido las correspondientes a las figuras 25 y 26:

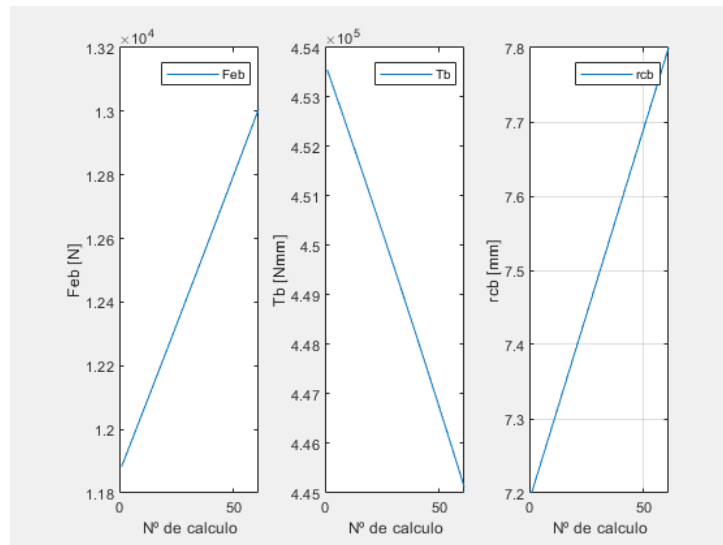


Figura 25. Variaciones de F_{eb} , T_b y r_{cb} (T_b alrededor de 450Nm).

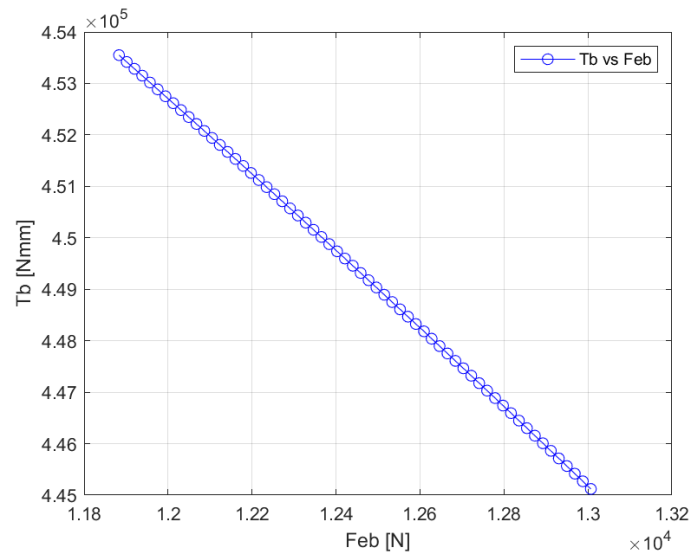


Figura 26. Resultados modelo analítico (T_b alrededor de 450Nm).

El listado de valores se encuentra en la Tabla 11 que se encuentra en el Anexo II. Como puede verse en dicha tabla, los valores más próximos a un T_b de 450 Nm serían los que aparecen en la Tabla 8:

Tabla 8. Los valores más próximos al $T_b=450$ Nm

F_{eb} (N)	T_b (Nmm)	r_{cb} (mm)
12365.13	450016.94	7.46
12383.81	449877.47	7.47

Por la interpolación a partir de esos valores se obtiene un valor de:

$$\frac{450020 - 449880}{12365 - 12384} = \frac{450000 - 449880}{F_b - 12384} \rightarrow F_{eb} = 12367,71N$$

Resultados para $T_b=300\text{ Nm}$

Las gráficas obtenidas en Matlab han sido las correspondientes a las figuras 27 y 28:

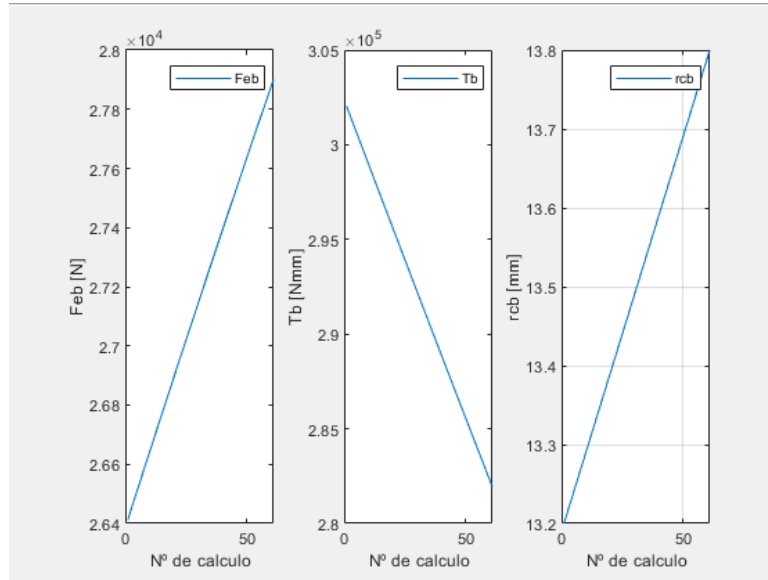


Figura 27. Variaciones de F_{eb} , T_b y r_{cb} (T_b alrededor de 300 Nm).

La tabla de valores se encuentra en la Tabla 12 que se encuentra en el anexo II. Como puede verse en dicha tabla, se ha obtenido directamente un valor muy próximo a un T_b de 300 Nmm :

F_{eb} (N)	T_b (Nmm)	r_{cb} (mm)
26565.23	300004.38	13.26

Por tanto, $F_{eb} = 26565.23\text{ N}$

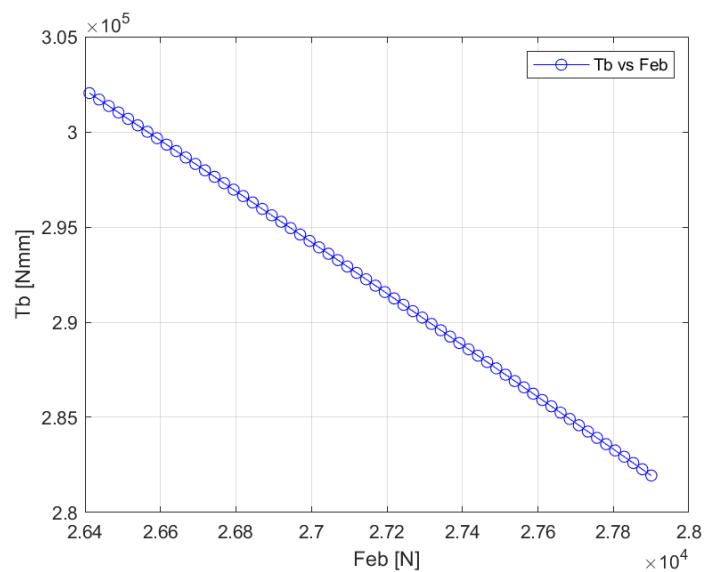


Figura 28. Resultados modelo analítico (T_b alrededor de 300 Nm).

Resultados para $T_b=150$ Nm

Las gráficas obtenidas en Matlab han sido las correspondientes a las figuras 29 y 30:

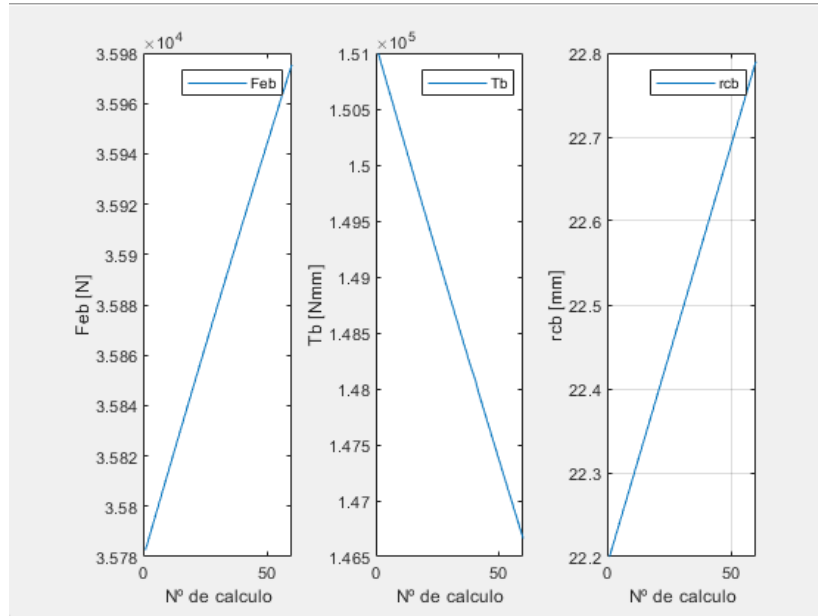


Figura 29. Variaciones de F_{eb} , T_b y r_{cb} (T_b alrededor de 300Nm).

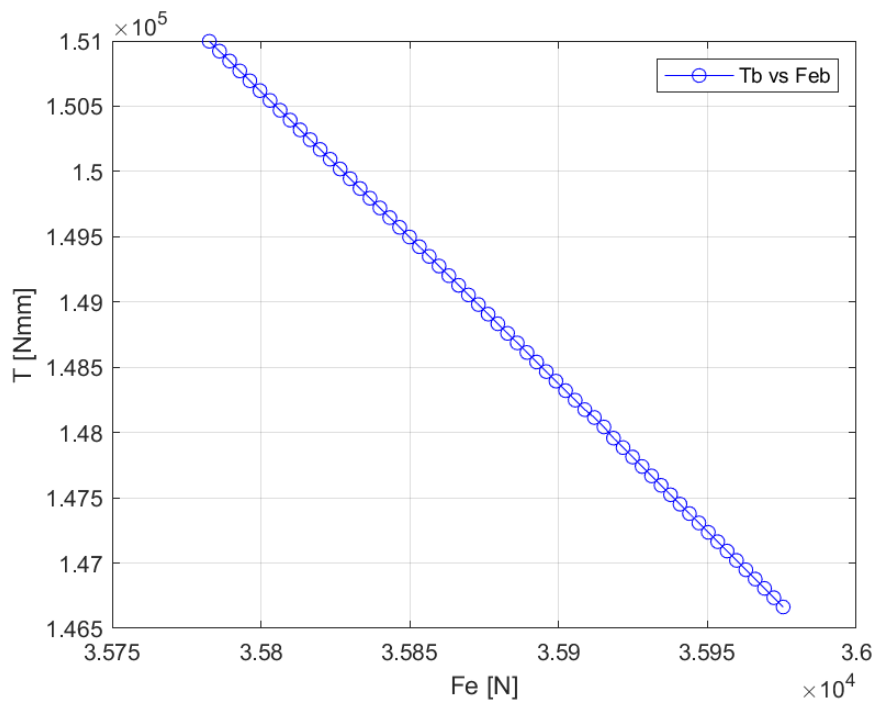


Figura 30. Resultados modelo analítico (T_b alrededor de 150Nm).

La tabla de valores se encuentra en la Tabla 13. que se encuentra en el anexo II. Como puede verse en dicha tabla, los valores más próximos a un T_b de 150 Nmm serían los que aparecen en la Tabla 9:

Tabla 9. Los valores más próximos al $T_b=150 \text{ Nm}$

F_{eb} (N)	T_b (Nmm)	r_{cb} (mm)
35826.59	150019.00	22.33
35829.93	149944.31	22.34

Por la interpolación a partir de esos valores se obtiene un valor de:

$$\frac{150020-149940}{35827-35830} = \frac{150000-149940}{F_b-35830} \rightarrow F_{eb} = 35827,75 \text{ N}$$

5.2 Método Elementos Finitos (EF)

En el programa Ansys, una vez establecidas las cargas tal y como se ha definido en el apartado 4.2 se ejecuta el programa.

El programa graba la situación que se da en cada momento de los tres steps prefijados y presenta las imágenes correspondientes a esa secuencia. En el momento en que la cabeza desliza completamente, ya no se dan las condiciones de un análisis estático, el programa deja de converger y por tanto, deja de calcular. A continuación, se muestra un ejemplo (que corresponde al cálculo para $T_b=300 \text{ Nm}$) en el que se ve cómo va presentando la situación de contacto en cada momento:

- Durante el step 1 cuando se empieza a aplicar la presión (de 0 a 1000N), la superficie se encuentra próxima en un principio. Véase Figura 31 (a). Al haber solo presión y no haber fuerza lateral ni de giro no hay tensiones cortantes. No hay deslizamiento.
- Durante el step 2 se ha ido aplicando progresivamente el par torsor (de 0 a 300Nm) y la fuerza cortante (de 0 a 25000N). Al principio, la superficie sigue pegada porque aún no se ha alcanzado el valor de tensión cortante que supere el valor de la fuerza de fricción ($\mu p=0,1*1000=100 \text{ MPa}$), véase Figura 31 (b). Al final del mismo, ha empezado a haber zonas en las que el valor de tensión cortante supera el valor de la fuerza de fricción y se producen microdeslizamientos en esas zonas, véase Figura 31 (c).
- A lo largo del step 3 se va manteniendo el par torsor (en 300Nm) e incrementando la fuerza cortante (de 25000 a 28000N) y se va viendo que, progresivamente, hay más zonas en las que se producen microdeslizamientos, disminuyendo la superficie que sigue pegada y aumentando la superficie deslizante, hasta llegar a un momento en el que sólo un punto no desliza. Véase Figura 31 (d, e, f y g). Finalmente, cuando desliza ese último punto se produce el macrodeslizamiento, es decir, el movimiento de toda la superficie de la cabeza del tornillo, el sistema deja de converger y el programa deja de calcular. Es el último cálculo antes de que deslice toda la cabeza el que proporciona el valor de la fuerza cortante que se quiere comparar con el método analítico y la última zona que aparece sin deslizar corresponde al lugar del punto C_b , que es el punto con respecto al cual gira la superficie y que se encuentra a una distancia r_{cb} del eje del tornillo.

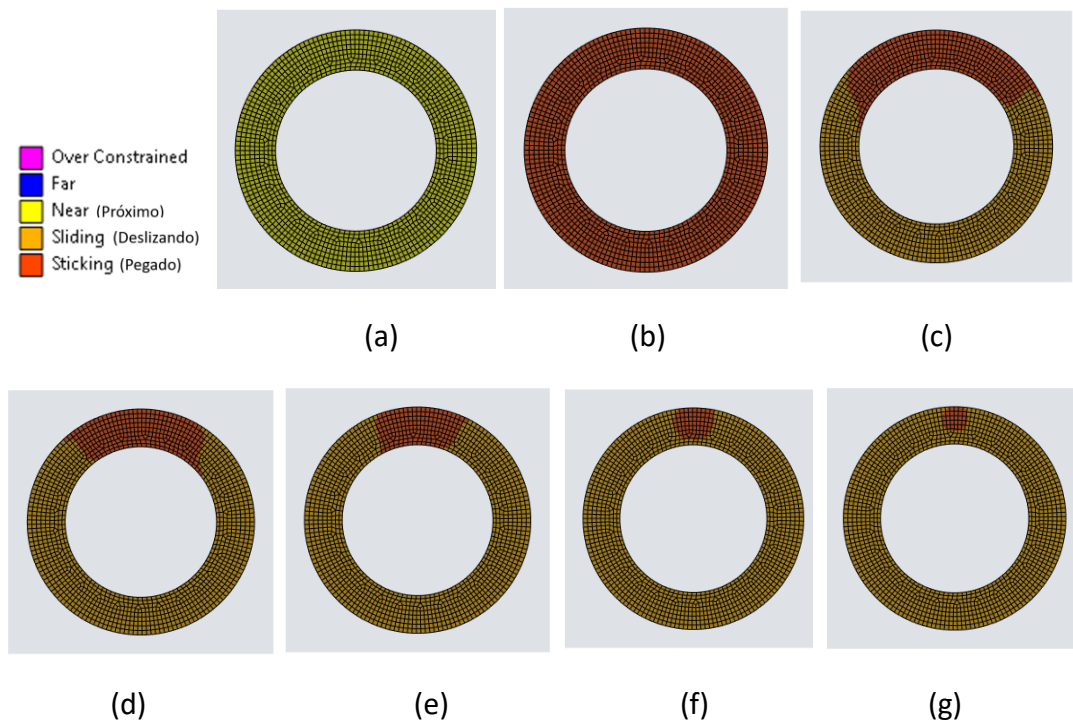


Figura 31: Deslizamiento de la base de la cabeza del tornillo paso a paso.

(a) principio de step 1 ($p=0N$, $T_b=0Nm$, $F_{eb}=0N$)

(b) principio de step 2 ($p=1000N$, $T_b=0Nm$, $F_{eb}=0N$)

(c) fin step 2 (2,0) ($p=1000N$, $T_b=300Nm$, $F_{eb}=25000N$)

(d) step 3 (2,2) ($p=1000N$, $T_b=300Nm$, $F_{eb}=25600N$)

(e) step 3 (2,4) ($p=1000N$, $T_b=300Nm$, $F_{eb}=26200N$)

(f) step 3 (2,6) ($p=1000N$, $T_b=300Nm$, $F_{eb}=26800N$)

(g) step 3 (2,69, último valor calculado) ($p=1000N$, $T_b=300Nm$, $F_{eb}=27070N$)

A continuación, se muestran los cálculos de los tres casos, en el instante previo al deslizamiento de la superficie.

T=450Nm

En este caso, la aplicación de la F_{eb} se había establecido de la siguiente manera:

- F_{eb} máxima step 2: 11000N,
- F_{eb} máxima step 3: 14000N

El último punto de cálculo ha correspondido al step 2,58. Esto quiere decir:

- Que hasta el punto 2.0 se había aplicado una fuerza cortante de 11000N
- Que en el step 3 se había ido incrementando un total de 3000 N (14000-11000) entre 100 substeps.

Resultado Ansys $\rightarrow F_{eb} = 11000 + 3000 * 0,58 = 12740N$

A continuación, se muestra las imágenes que se han obtenido del programa correspondientes a:

1. Desplazamiento general

En la Figura 32 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza.

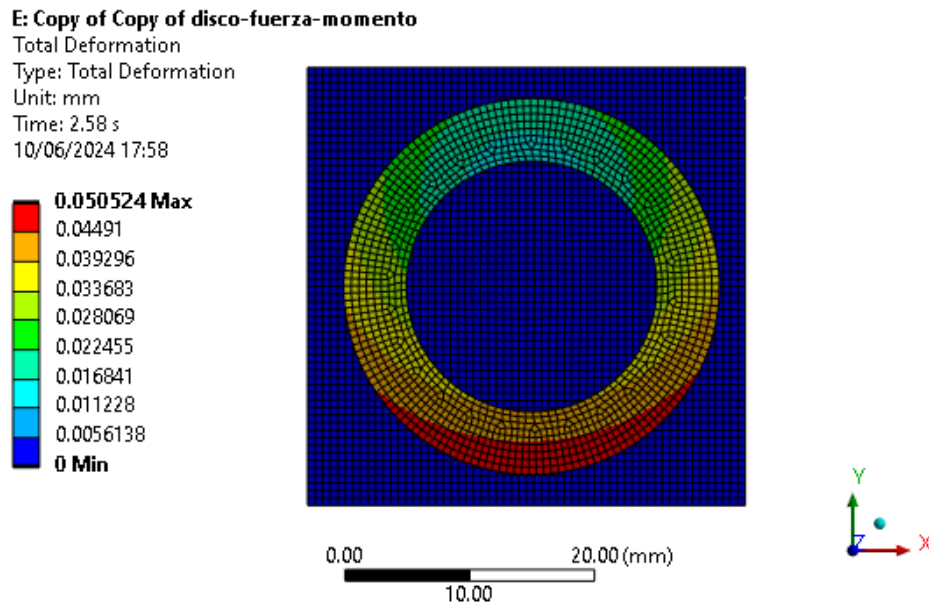


Figura 32. Desplazamiento general T_b 450 Nm.

2. Desplazamiento en el eje Z

En la Figura 33 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza en el eje Z.

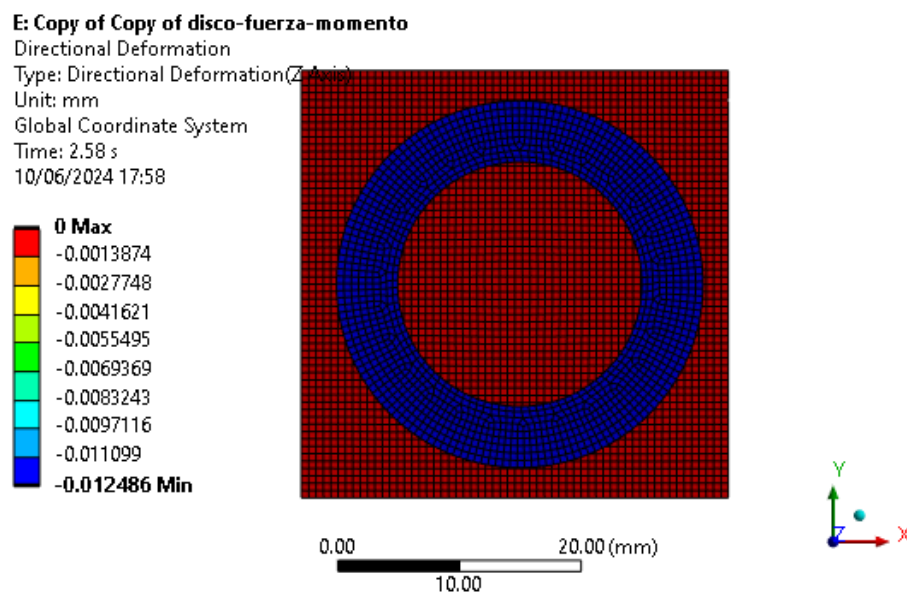


Figura 33. Desplazamiento en eje Z T_b 450 Nm.

3. Desplazamiento en eje X

En la Figura 34 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza en el eje X.

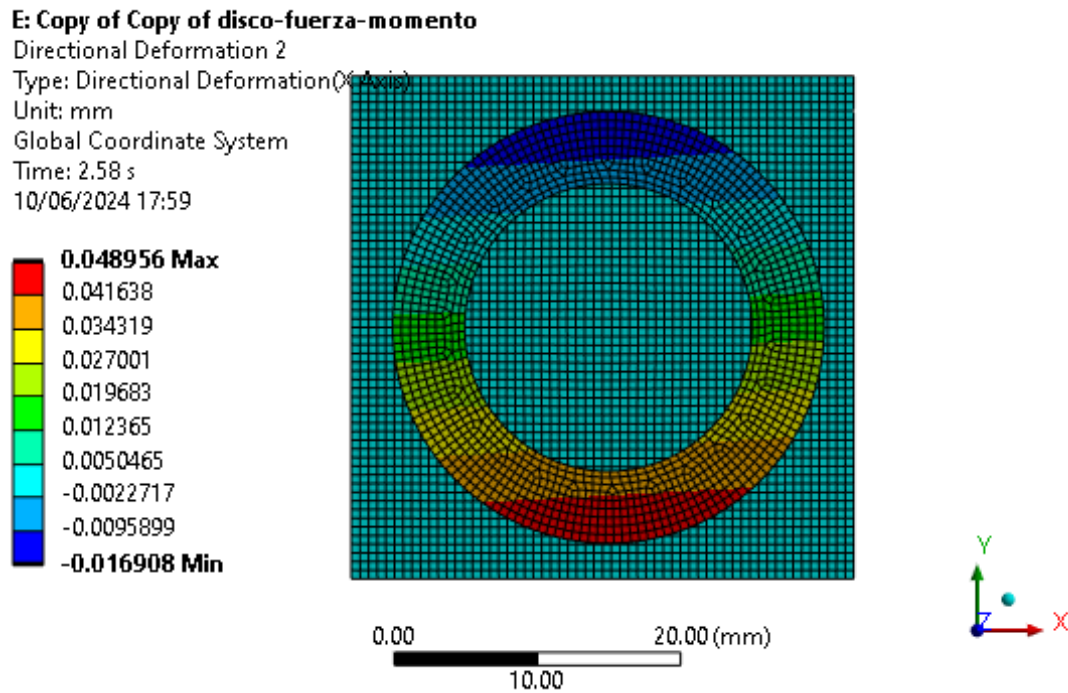


Figura 34. Desplazamiento en eje X T_b 450 Nm.

4. Información sobre el contacto entre las dos piezas

En la Figura 35 se muestra como la mayor parte de la superficie está deslizando salvo una pequeña zona que se muestra ampliada.

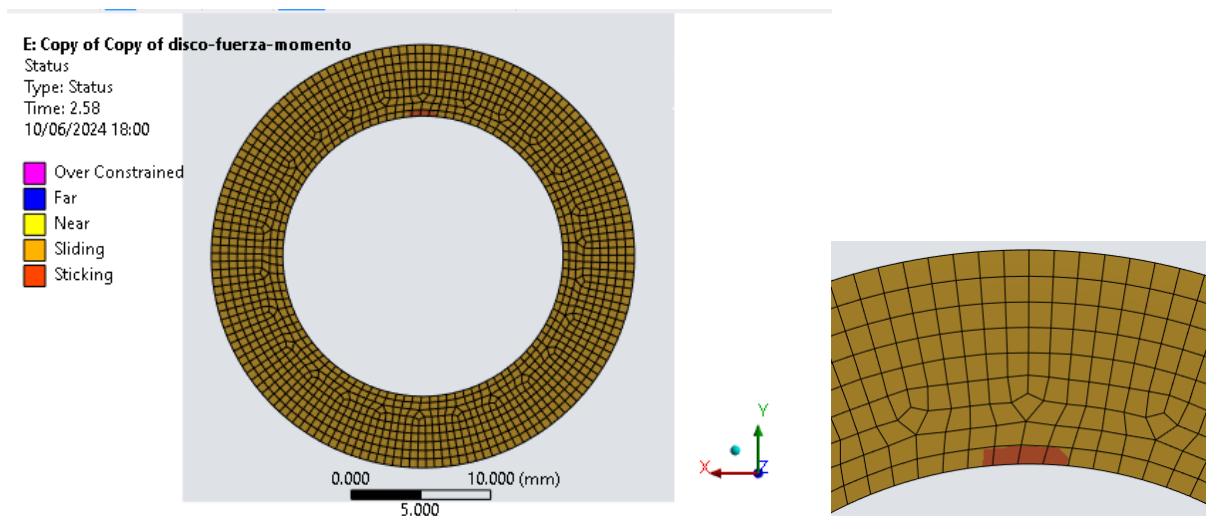


Figura 35. Contacto entre las piezas T_b 450 Nm y detalle.

5. Tensión cortante o tangencial

En la Figura 36 se muestra la tensión cortante (τ) que resulta de la aplicación de la fuerza cortante y el par torsor. Nuevamente se ha incluido un detalle de la pequeña zona en la que hay menor tensión cortante porque está más cerca del punto C_b , con respecto al que gira la superficie.

Como puede verse, en casi todos los puntos el valor de τ ha llegado al valor de 100 (correspondiente a $\mu \cdot P$) y por esta razón, se producen deslizamientos y aparecen representados en color rojo. Todas las zonas que no están en rojo significan que la fuerza en ese punto es menor que $\mu \cdot P$

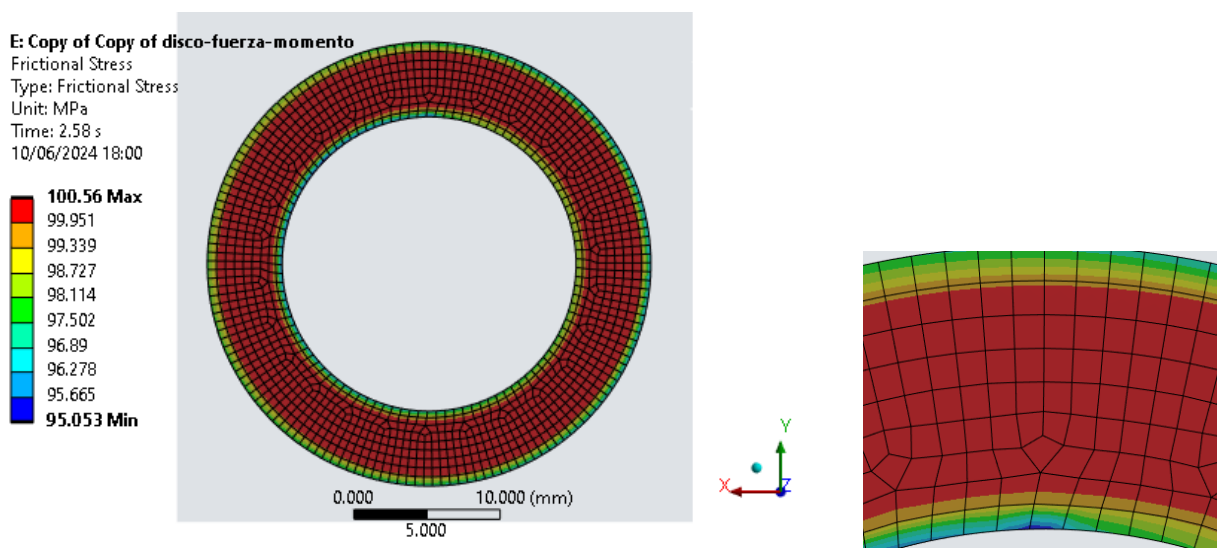


Figura 36. Tensión cortante para T_b 450 Nm y detalle.

6. Presión

En la Figura 37 se indica en MPa la presión que aparece en el contacto entre las dos piezas.

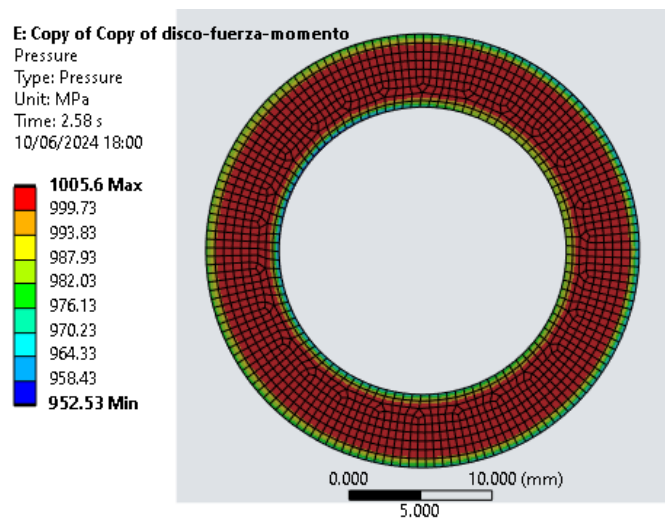


Figura 37. Presión T_b 450 Nm.

Como se aprecia en las figuras 32, 35 y 36, el punto C_b se encontraría en el interior de la corona circular siendo el valor de r_{cb} inferior al radio interior de la cabeza del tornillo.

T=300Nm

En este caso, la aplicación de la F_{eb} se había establecido de la siguiente manera:

- F_{eb} máxima step 2: 25000N,
- F_{eb} máxima step 3: 28000N

El último punto de cálculo ha correspondido al step 2,69. Esto quiere decir:

- Que hasta el punto 2.0 se había aplicado una fuerza cortante de 25000N
- Que en el step 3 se había ido incrementando un total de 3000 N (28000-25000) entre 100 substeps.

Resultado Ansys $\rightarrow F_{eb} = 25000 + 3000 * 0,69 = 27070N$

A continuación, se muestra cada una de las imágenes que se han obtenido del programa correspondientes a:

1. Desplazamiento general

En la Figura 38 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza.

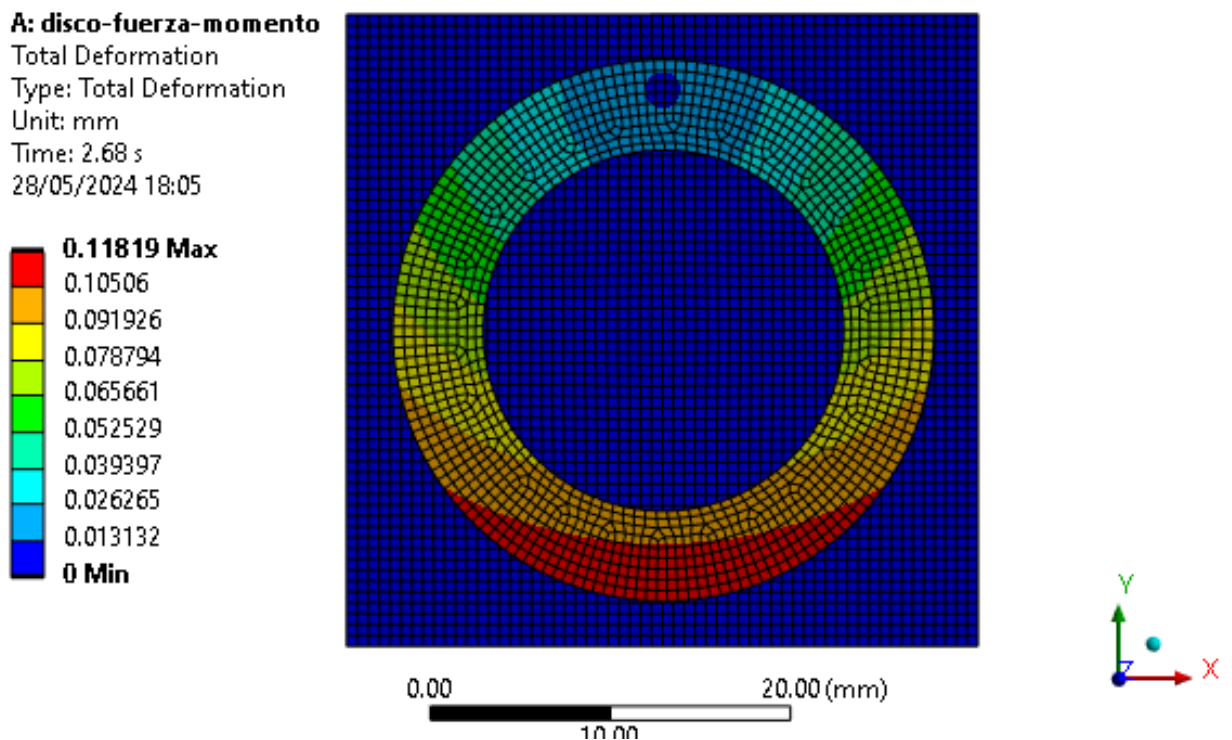


Figura 38. Desplazamiento general T_b 300 Nm.

2. Desplazamiento en el eje Z

En la Figura 39 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza en el eje Z.

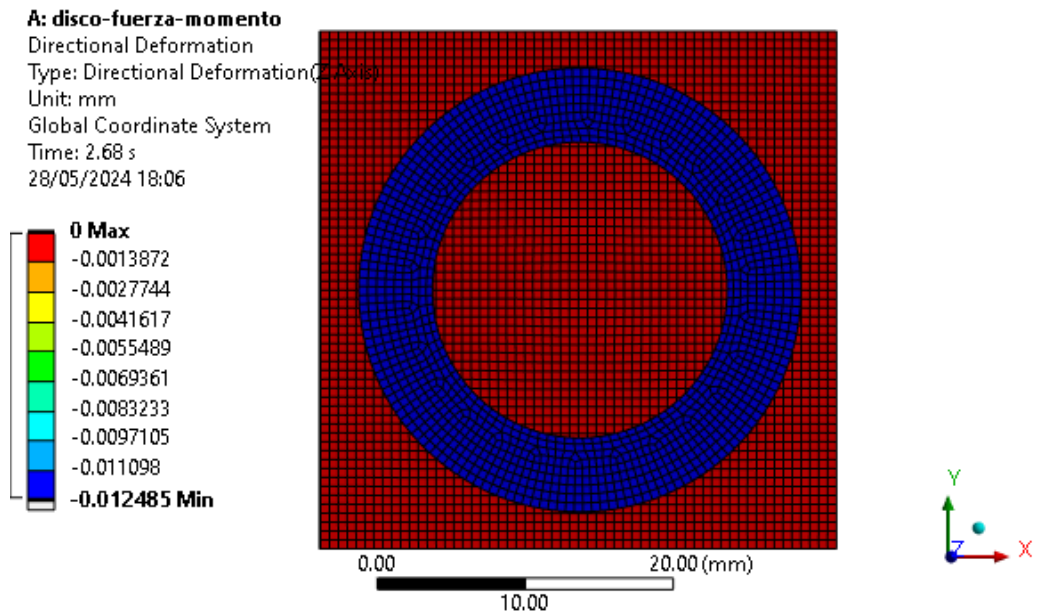


Figura 39. Desplazamiento en eje Z T_b 300 Nm.

3. Desplazamiento en eje X

En la Figura 40 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza en el eje X.

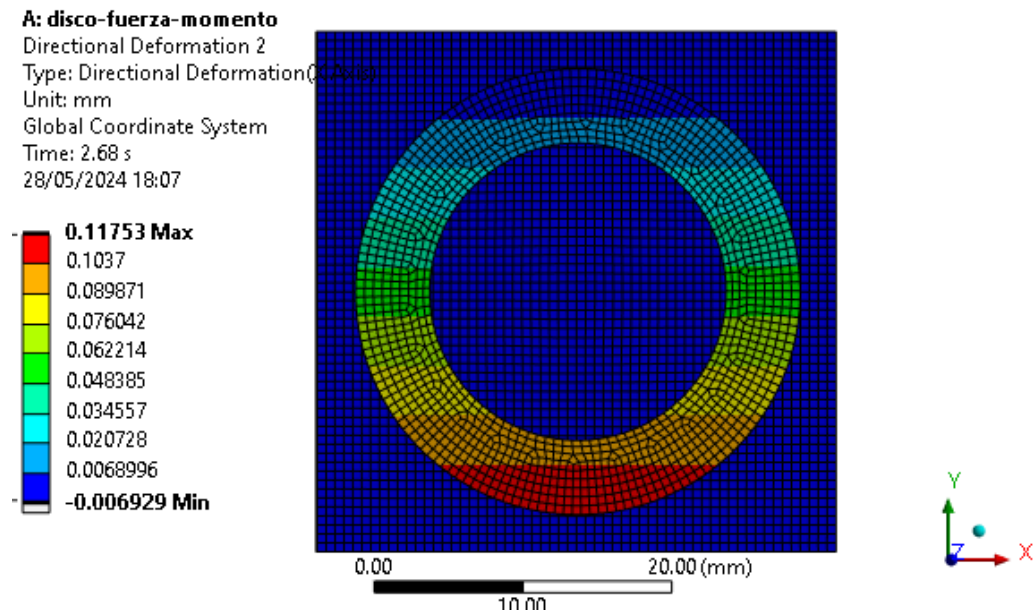


Figura 40. Desplazamiento en eje X T_b 300 Nm.

4. Información sobre el contacto entre las dos piezas

En la Figura 41 se muestra como la mayor parte de la superficie está deslizando salvo una pequeña zona.

Con este valor de T_b es con el que se hizo el análisis de sensibilidad. Para ello, se probó una malla en la que el tamaño de los elementos era la mitad y en la Figura 42 se muestra la respuesta de este análisis y se ve que deja de converger en el mismo substep (2,69) que con la malla inicial y que C_b se encuentra en el mismo sitio. Sin embargo, este tamaño menor de malla supone un coste computacional mucho mayor que no se considera rentable.

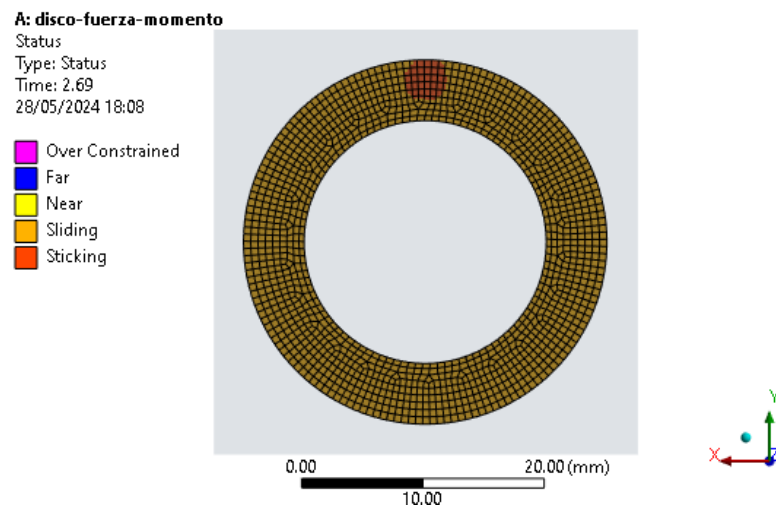


Figura 41. Contacto entre las piezas T_b 300 Nm.



Figura 42. Contacto entre las piezas T_b 300 Nm con una malla más fina.

5. Tensión cortante o tangencial

En la Figura 43 se muestra la tensión cortante (τ) que resulta de la aplicación de la fuerza cortante y el par torsor. Se puede apreciar la pequeña zona en la que hay menor tensión cortante porque es el punto C_b , con respecto al que gira la superficie.

Como puede verse, en casi todos los puntos el valor de τ ha llegado al valor de 100 (correspondiente a $\mu \cdot P$) y por esta razón, se producen deslizamientos y aparecen representados en color rojo. Todas las zonas que no están en rojo significan que la fuerza en ese punto es menor que $\mu \cdot P$.

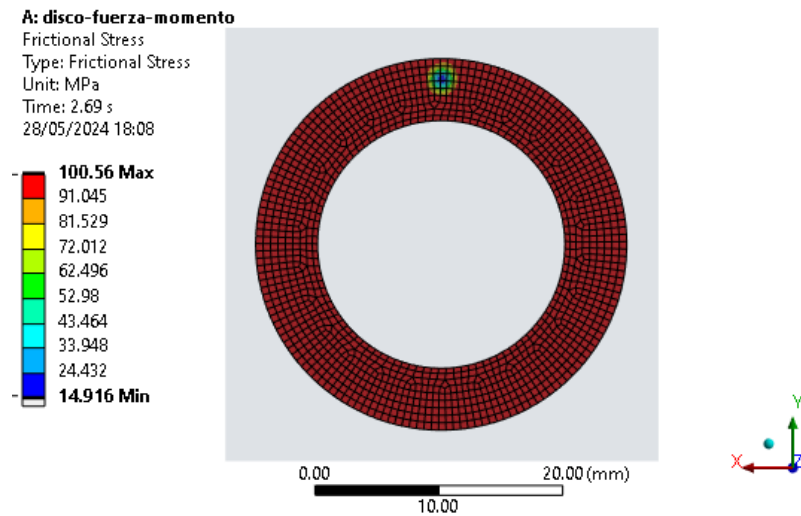


Figura 43. Tensión de rozamiento T_b 300 Nm.

6. Presión

En la Figura 44 se indica en MPa la presión que aparece en el contacto entre las dos piezas.

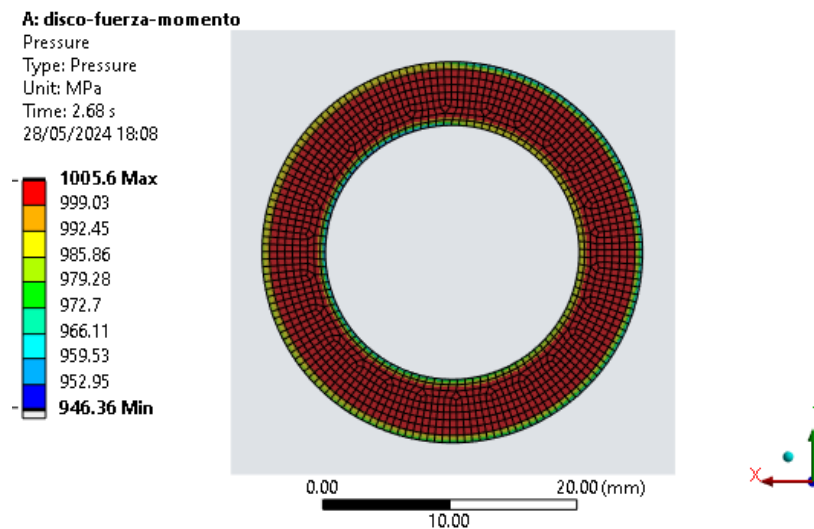


Figura 44. Presión T_b 300 Nm.

Como se aprecia en las figuras 38, 41 y 43, el punto C_b se encontraría en la corona circular siendo el valor de r_{cb} entre el radio interior y el radio exterior de la cabeza del tornillo.

T=150Nm

En este caso, la aplicación de la F_{eb} se había establecido de la siguiente manera:

- F_{eb} máxima step 2: 34000N,
- F_{eb} máxima step 3: 37000N

El último punto de cálculo ha correspondido al step 2,66. Esto quiere decir:

- Que hasta el punto 2.0 se había aplicado una fuerza cortante de 34000N
- Que en el step 3 se había ido incrementando un total de 3000 N (34000-37000) entre 100 substeps.

Resultado Ansys $\rightarrow F_{eb} = 34000 + 3000 * 0,66 = 35980N$

A continuación, se muestra cada una de las imágenes que se han obtenido del programa correspondientes a:

1. Desplazamiento general

En la Figura 45 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza.

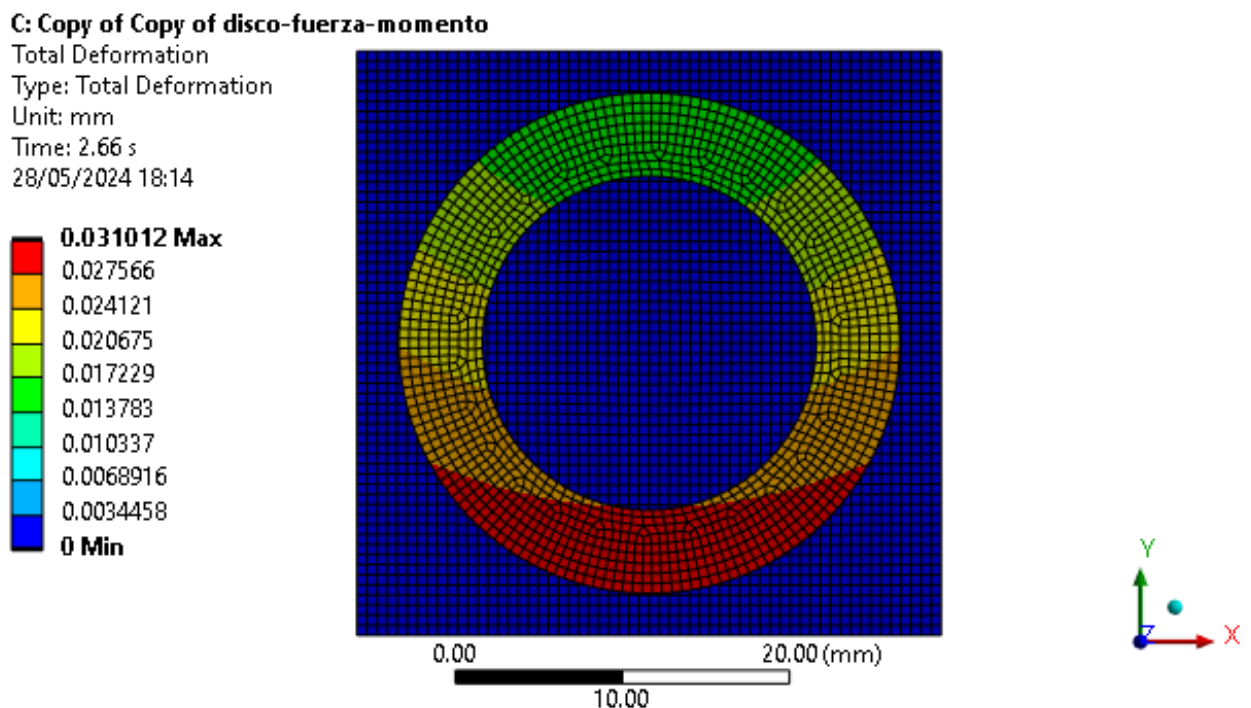


Figura 45. Desplazamiento general T_b 150 Nm.

2. Desplazamiento en el eje Z

En la Figura 46 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza en el eje Z.

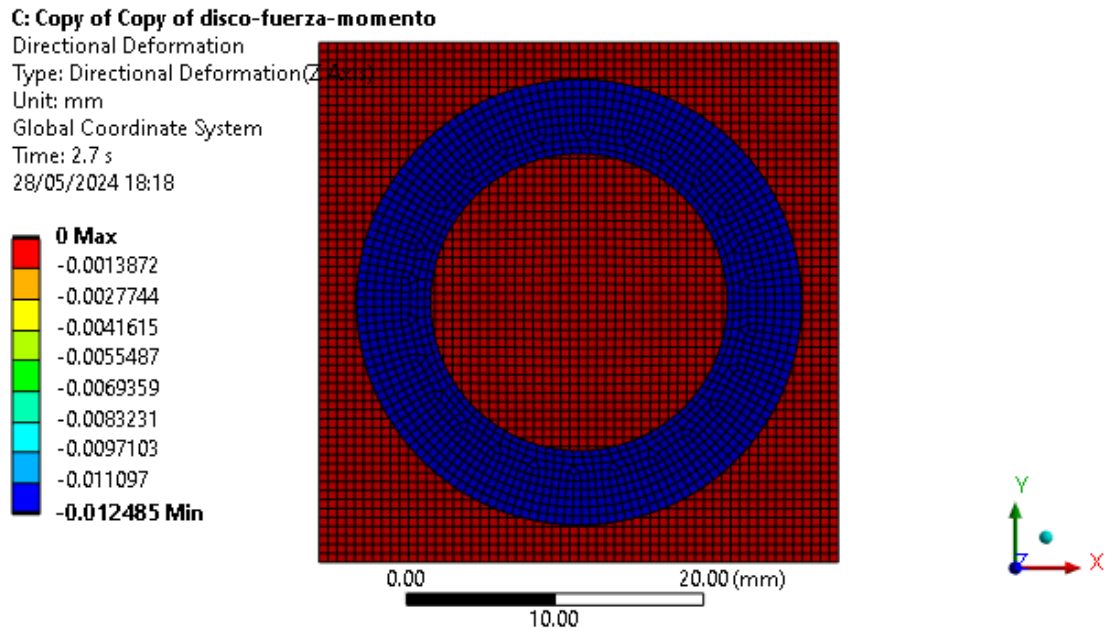


Figura 46. Desplazamiento en eje Z T_b 150 Nm.

3. Desplazamiento en eje X

En la Figura 47 se indica en mm el desplazamiento de cada uno de los nodos de la pieza en el eje X.

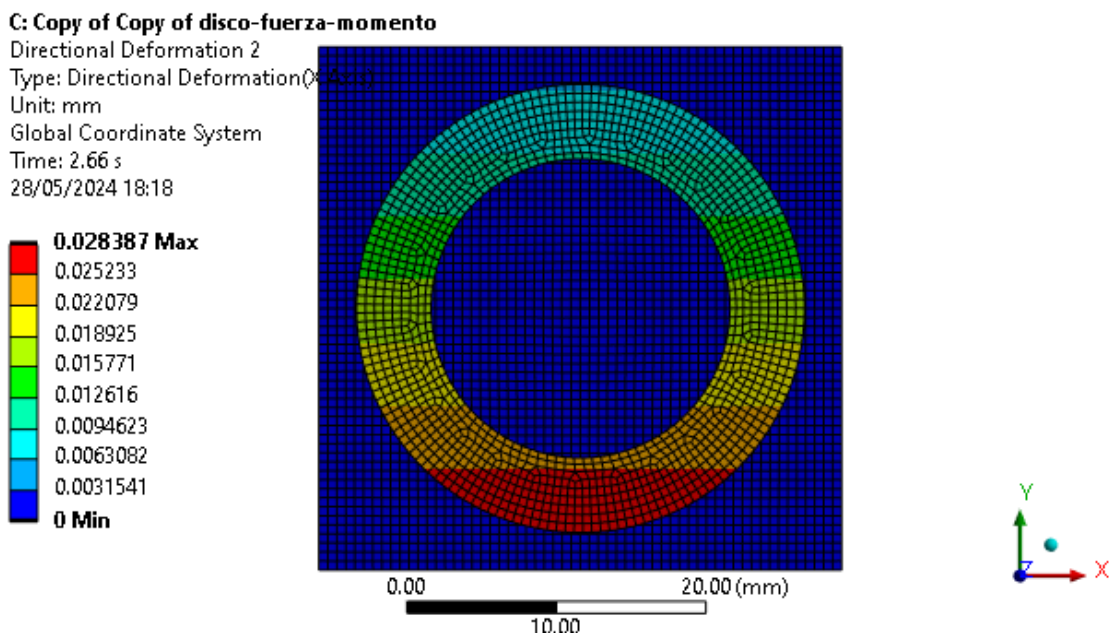


Figura 47. Desplazamiento en eje X T_b 150 Nm.

4. Información sobre el contacto entre las dos piezas

En la Figura 48 se muestra como la mayor parte de la superficie está deslizando salvo una pequeña zona que se muestra debajo ampliada.

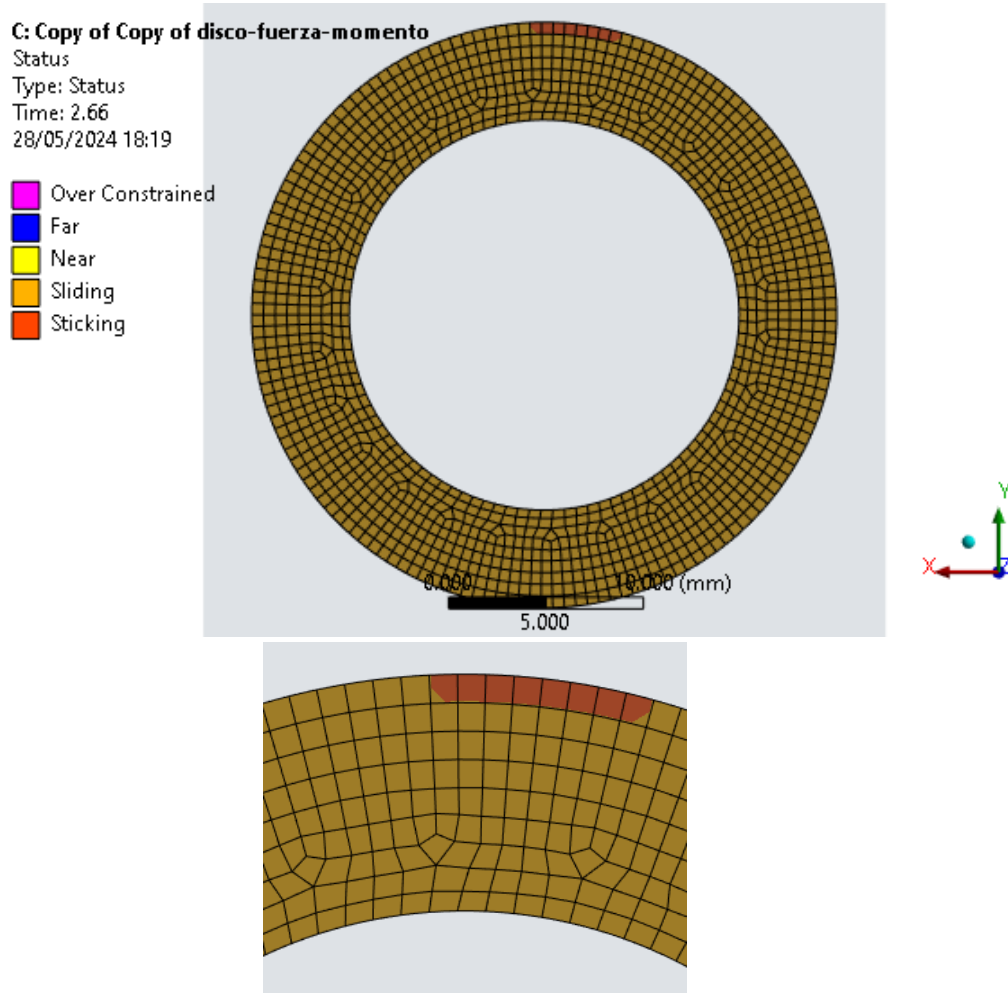


Figura 48. Contacto entre las piezas T_b 150 Nm y detalle.

5. Tensión cortante o tangencial

En la Figura 49 se muestra la tensión cortante (τ) que resulta de la aplicación de la fuerza cortante y el par torsor. Nuevamente se ha incluido un detalle de la pequeña zona en la que hay menor tensión cortante porque está más cerca del punto C_b , con respecto al que gira la superficie.

Como puede verse, en casi todos los puntos el valor de τ ha llegado al valor de 100 (correspondiente a $\mu \cdot P$) y por esta razón, se producen deslizamientos y aparecen representados en color rojo. Todas las zonas que no están en rojo significan que la fuerza en ese punto es menor que $\mu \cdot P$

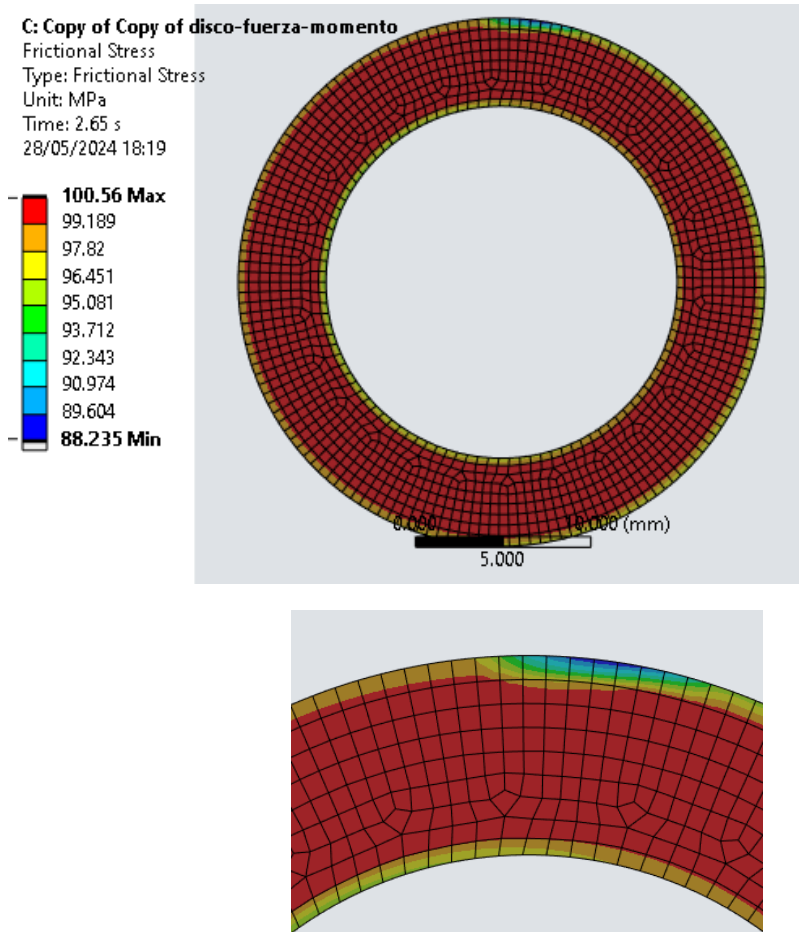


Figura 49. Tensión de rozamiento T_b 150 Nm y detalle.

6. Presión

En la Figura 50 se indica en MPa la presión que aparece en el contacto entre las dos piezas

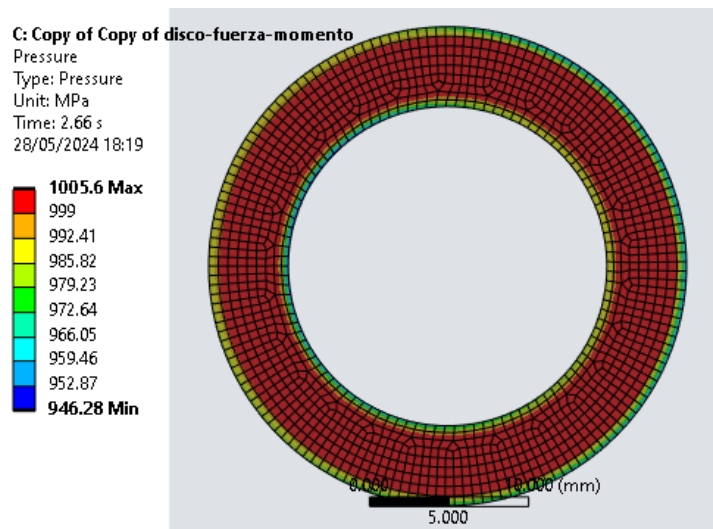


Figura 50. Presión T_b 150 Nm.

Como se aprecia en las figuras 45, 48 y 49, el punto C_b se encontraría en el exterior de la corona circular siendo el valor de r_{cb} mayor al radio exterior de la cabeza del tornillo.

5.3 Comparación entre los dos métodos

En este apartado se van a comparar los resultados obtenidos tras la aplicación de ambos métodos, el analítico y el basado en EF.

$T_b=450Nm$

Matlab	Ansys
12367,71N	12740N

Se puede ver que la diferencia entre el resultado del modelo analítico y el modelo calculado mediante elementos finitos es de un 3,01%

Y viendo las Figuras 32, 35 y 36, el punto C_b se encontraría en el interior de la corona circular siendo el valor de r_{cb} menor al radio exterior de la cabeza del tornillo que es de 10mm. Esto es coherente con los resultados del modelo analítico donde se obtuvo un r_{cb} de 7.46mm.

$T_b=300Nm$

Matlab	Ansys
26565,23N	27070N

Se puede ver que la diferencia entre el resultado del modelo analítico y el modelo calculado mediante elementos finitos es de un 1,9%

Y viendo las Figuras 38, 41 y 43, el punto C_b se encontraría en la corona circular siendo el valor de r_{cb} entre el radio interior y exterior de la cabeza del tornillo que es entre 10mm y 15mm. Esto es coherente con los resultados del modelo analítico donde se obtuvo un r_{cb} de 13,26 mm.

$T_b=150Nm$

Matlab	Ansys
35827,75N	35980N

Se puede ver que la diferencia entre el resultado del modelo analítico y el modelo calculado mediante elementos finitos es de un 0,42%

Y viendo las Figuras 45, 48 y 49, el punto C_b se encontraría en el exterior de la corona circular siendo el valor de r_{cb} mayor al radio exterior de la cabeza del tornillo que es de 15mm. Esto es coherente con los resultados del modelo analítico donde se obtuvo un r_{cb} de 22,33 mm.

A continuación, se representa en una única gráfica los valores obtenidos por el método analítico correspondientes a la tabla 10 del anexo II y los valores obtenidos por ansys en la Figura 51.

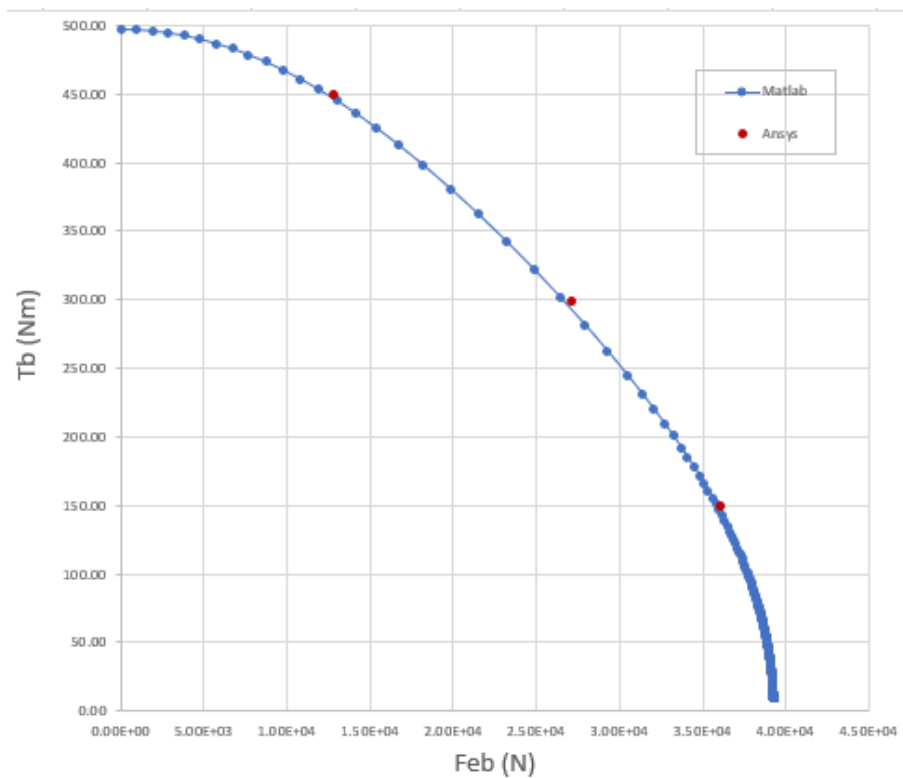


Figura 51. Comparativa de datos obtenidos por los dos métodos.

6 CONCLUSIONES

En conclusión, en este trabajo se ha demostrado que los resultados obtenidos por ambos métodos con respecto a la cabeza del tornillo son comparables ya que la diferencia entre los resultados de modelo analítico y los del modelo mediante EF es menor al 5%.

Podría continuarse el trabajo haciendo un análisis similar para la rosca del tornillo, pero como en el cálculo correspondiente a la cabeza los resultados obtenidos por los dos métodos han sido totalmente comparables, se puede estimar que en la parte de la rosca también lo sean.

Por todo ello, en conclusión, se podría aplicar el método analítico para determinar los valores límites de la fuerza cortante que daría lugar a un desplazamiento en una gran variedad de casos ya que el cambio de parámetros de este método es muy rápido y sencillo. En conclusión, el modelo analítico ha demostrado ser una alternativa eficiente y con una precisión muy buena, frente al método de elementos finitos que supone un coste computacional mucho mayor y frente a los ensayos experimentales que son más costosos y presentan una mayor complejidad con respecto al cambio de cualquier variable.

Dado que la medición de vibraciones está muy extendida entre los programas de mantenimiento de las diferentes máquinas y equipos conociendo el dato de la vibración y a través del método analítico se puede predecir el posible fallo de una maquina por aflojamiento del tornillo antes de que esto ocurra. Es lo que viene a llamarse mantenimiento predictivo.

7 BIBLIOGRAFÍA

Abasolo M., Aguirrebeitia J., Coria I. y Heras I. Guía práctica de Elementos Finitos en Estática. Ediciones Paraninfo 2017.

Análisis del efecto de la tensión fuera del plano en la conformabilidad de chapa metálica. Capítulo 2. El método de los elementos finitos. Biblus.us.es. Recuperado el 12 de junio de 2024, de <https://biblus.us.es/bibing/proyectos/abreproy/60222/fichero/02++Capitulo+2.+El+metodo+de+elementos+finitos.pdf>

Ansys. (s/f). Nysplm.com. Recuperado el 12 de junio de 2024, de <https://www.nysplm.com/ansys/>

Cálculo de Tornillos. (2019, julio 25). studylib.es. <https://studylib.es/doc/8819239/calculo-de-tornillos>

Cálculo de Uniones Atornilladas. (s/f). Ingemecanica.com. Recuperado el 11 de junio de 2024, de <https://ingemecanica.com/tutorialsemanal/tutorialn32.html>

De tornillo, R. (s/f). Valores orientativos para el coeficiente de fricción de rosca μ . Rodavigo.net. Recuperado el 12 de junio de 2024, de <https://rodavigo.net/catalogos/GEDORE/15%20Ap%C3%A9ndice/04%20Coeficientes%20de%20fricci%C3%B3n.pdf>

DIN 916 dimensions. (2021, agosto 20). Beacon Corporation | Specialised Fasteners & High Integrity Bolting; Specialised Fasteners & High Integrity Bolting. <https://www.beaconcorporation.co.uk/products/socket-slotted-products/din-6912-dimensions/>

Diseño de maquinas, [2017/11][cas]. (s/f). OCW. Recuperado el 17 de junio de 2024, de <https://ocw.ehu.eus/course/view.php?id=441>

Episer Marketing Digital. (2017, noviembre 2). Normas de tornillería: te explicamos sus distintos certificados y homologaciones. Tormetal. <https://tormetal.com/blog/conoce-tormetal-las-normas-habituales-tornilleria/>

Episer Marketing Digital. (2021, abril 29). Cómo conseguir el par de apriete óptimo de los tornillos. Tormetal. <https://tormetal.com/blog/como-conseguir-el-par-de-apriete-optimo-de-los-tornillos/>

Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla. Caracterización experimental del comportamiento de uniones atornilladas sometidas a fracción. Recuperado el 11 de junio de 2024, de <https://ingemecanica.com/tutorialsemanal/objetos/figutut30/doc2tut30.pdf>

Marca Spiralock®. (s/f). Stanleyengineeredfastening.com. Recuperado el 12 de junio de 2024, de <https://www.stanleyengineeredfastening.com/es-ES/brands/Optia/Spiralock>

Mirlisenna, G. (2016, enero 22). ¿Qué es el método de elementos finitos y cómo es utilizado en la simulación? ESSS. <https://www.esss.com/es/blog/metodo-de-los-elementos-finitos-que-es/>

Nassar Sayed A., Yang Xianjie. A Mathematical Model for Vibration-Induced Loosening of Preloaded Threaded Fasteners. Journal of Vibration and Acoustics. APRIL 2009, Vol. 131.

Nassar Sayed A., Yang Xianjie. Novel Formulation of the Tightening and Breakaway Torque Components in Threaded Fasteners. Journal of Pressure Vessel Technology. NOVEMBER 2007, Vol. 129.

¿Qué le ocurre a la precarga y a la fuerza de amarre al aplicar cargas externas? (2021, marzo 23). Nord-lock.com; Nord-Lock Group. <https://www.nord-lock.com/es-es/panorama/consejos-de-atornillado/2021/what-happens-to-preload-and-clamp-force-when-external-loads-are-applied/>

(S/f). Tindsa.es. Recuperado el 12 de junio de 2024, de <https://tindsa.es/wp-content/uploads/2013/02/General-Catalogue-2010.pdf>

s/f). Wurth.es. Tornillos DIN 912, DIN 7984, DIN 6912 para Profesionales. Recuperado el 12 de junio de 2024, de <https://www.wurth.es/catalogo/normalizado-din/tornillos-metricos-imperiales/tornillos-cabeza-cilindrica/tornillo-cab-cilindrica-con-hex-int>

Tipos de tornillos: características y usos de cada uno de ellos. (2023, enero 31). Ferreterías cerca de ti - Cadena88; Cadena88. <https://www.cadena88.com/es/consejos-y-trucos/tipos-de-tornillos>

Tornillo. (s/f). Mec.es. Recuperado el 11 de junio de 2024, de http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material107/operadores/ope_tornillo.htm

8 ANEXOS

8.1 ANEXO I: Programación en Matlab

Programa Matlab para la curva T_b vs F_{eb} completa

```

%bolt head
clc
clear
rbmax=15;
rbmin=10;
rb=2/3*(rbmax^3-rbmin^3)/(rbmax^2-rbmin^2);
areab=pi*(rbmax^2-rbmin^2);
pb=1000;
F=pb*areab;
mu=0.1;
rcb=0;
i=1;
par=100000;
while par>10000
    fun=@(r,theta) r.*(rcb+r.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5);
%ecuacin 6
    Feb(i)=mu*pb*integral2(fun,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    fun2=@(r,theta)
r.^2.*(r+rcb.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5); %ecuacin 7
    Tb(i)=mu*pb*integral2(fun2,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    par=Tb(i);
    arrayrcb(i)=rcb;
    i=i+1;
    rcb=rcb+rbmax/25;
end

%grafica no normalizada
figure (3)
plot(Feb,Tb,'-bo');
xlabel('Feb [N]')
ylabel('Tb [Nmm]')
legend('Tb vs Feb');
grid on

figure(4);
subplot(1,3,1)
plot(Feb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Feb [N]')
legend('Feb');
hold on;
subplot(1,3,2)
plot(Tb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Tb [Nmm]')
legend('Tb');
hold on;
subplot(1,3,3)
plot(arrayrcb)
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('rcb [mm]')
legend('rcb');
grid on;
  
```

Programa Matlab para la zona próxima a $T_b=450\text{Nm}$

```

%bolt head
clc
clear
rbmax=15;
rbmin=10;
rb=2/3*(rbmax^3-rbmin^3)/(rbmax^2-rbmin^2);
areab=pi*(rbmax^2-rbmin^2);
pb=1000;
F=pb*areab;
mu=0.1;
rcb=7.2;
i=1;
par=100000;
while rcb<7.8
    fun=@(r,theta) r.*(rcb+r.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5);
%ecuacin 6
    Feb(i)=mu*pb*integral2(fun,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    fun2=@(r,theta)
r.^2.*(r+rcb.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5); %ecuacin 7
    Tb(i)=mu*pb*integral2(fun2,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    par=Tb(i);
    arrayrcb(i)=rcb;
    i=i+1;
    rcb=rcb+0.01;
end

%grafica no normalizada
figure (3)
plot(Feb,Tb,'-bo');
xlabel('Feb [N]')
ylabel('Tb [Nmm]')
legend('Tb vs Feb');
grid on

figure(4);
subplot(1,3,1)
plot(Feb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Feb [N]')
legend('Feb');
hold on;
subplot(1,3,2)
plot(Tb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Tb [Nmm]')
legend('Tb');
hold on;
subplot(1,3,3)
plot(arrayrcb)
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('rcb [mm]')
legend('rcb');
grid on;
  
```

Programa Matlab para la zona próxima a $T_b=300\text{Nm}$

```

%bolt head
clc
clear
rbmax=15;
rbmin=10;
rb=2/3*(rbmax^3-rbmin^3)/(rbmax^2-rbmin^2);
areab=pi*(rbmax^2-rbmin^2);
pb=1000;
F=pb*areab;
mu=0.1;
rcb=13.2;
i=1;
par=100000;
while rcb<13.8
    fun=@(r,theta) r.*(rcb+r.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5);
%ecuacin 6
    Feb(i)=mu*pb*integral2(fun,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    fun2=@(r,theta)
r.^2.*(r+rcb.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5); %ecuacin 7
    Tb(i)=mu*pb*integral2(fun2,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    par=Tb(i);
    arrayrcb(i)=rcb;
    i=i+1;
    rcb=rcb+0.01;
end

%grafica no normalizada
figure (3)
plot(Feb,Tb,'-bo');
xlabel('Feb [N]')
ylabel('Tb [Nmm]')
legend('Tb vs Feb');
grid on

figure(4);
subplot(1,3,1)
plot(Feb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Feb [N]')
legend('Feb');
hold on;
subplot(1,3,2)
plot(Tb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Tb [Nmm]')
legend('Tb');
hold on;
subplot(1,3,3)
plot(arrayrcb)
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('rcb [mm]')
legend('rcb');
grid on;
  
```

Programa Matlab para la zona próxima a $T_0=150\text{Nm}$

```

%bolt head
clc
clear
rbmax=15;
rbmin=10;
rb=2/3*(rbmax^3-rbmin^3)/(rbmax^2-rbmin^2);
areab=pi*(rbmax^2-rbmin^2);
pb=1000;
F=pb*areab;
mu=0.1;
rcb=22.2;
i=1;
par=100000;
while rcb<22.8
    fun=@(r,theta) r.*(rcb+r.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5);
%ecuacin 6
    Feb(i)=mu*pb*integral2(fun,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    fun2=@(r,theta)
r.^2.*(r+rcb.*sin(theta))./((rcb.^2+r.^2+2*rcb.*r.*sin(theta)).^0.5); %ecuacin 7
    Tb(i)=mu*pb*integral2(fun2,rbmin,rbmax,0,2*pi);
    par=Tb(i);
    arrayrcb(i)=rcb;
    i=i+1;
    rcb=rcb+0.01;
end

%grafica no normalizada
figure (3)
plot(Feb,Tb,'-bo');
xlabel('Fe [N]')
ylabel('T [Nmm]')
legend('Tb vs Feb');
grid on

figure(4);
subplot(1,3,1)
plot(Feb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Feb [N]')
legend('Feb');
hold on;
subplot(1,3,2)
plot(Tb);
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('Tb [Nmm]')
legend('Tb');
hold on;
subplot(1,3,3)
plot(arrayrcb)
xlabel('Nº de calculo')
ylabel('rcb [mm]')
legend('rcb');
grid on;
  
```

8.2 ANEXO II: Tabla de valores de Matlab

Tabla 10. Tabla de resultados modelo analítico rango completo (1/3)

	Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)
1	0.00	497418.84	0.00	61	38006.68	90168.69	36.00	121	38960.24	44499.59	72.00
2	942.76	497135.97	0.60	62	38048.84	88638.59	36.60	122	38965.37	44128.77	72.60
3	1887.23	496285.82	1.20	63	38088.90	87160.48	37.20	123	38970.37	43764.11	73.20
4	2835.13	494863.74	1.80	64	38127.00	85731.71	37.80	124	38975.25	43405.45	73.80
5	3788.29	492861.82	2.40	65	38163.28	84349.80	38.40	125	38980.01	43052.64	74.40
6	4748.60	490268.55	3.00	66	38197.83	83012.44	39.00	126	38984.66	42705.54	75.00
7	5718.14	487068.57	3.60	67	38230.79	81717.49	39.60	127	38989.19	42364.02	75.60
8	6699.18	483241.89	4.20	68	38262.23	80462.92	40.20	128	38993.62	42027.94	76.20
9	7694.27	478762.51	4.80	69	38292.26	79246.84	40.80	129	38997.95	41697.17	76.80
10	8706.36	473600.60	5.40	70	38320.96	78067.49	41.40	130	39002.17	41371.58	77.40
11	9738.91	467713.96	6.00	71	38348.40	76923.20	42.00	131	39006.29	41051.06	78.00
12	10796.10	461052.30	6.60	72	38374.66	75812.41	42.60	132	39010.33	40735.48	78.60
13	11883.16	453549.94	7.20	73	38399.81	74733.64	43.20	133	39014.26	40424.73	79.20
14	13006.88	445120.02	7.80	74	38423.90	73685.53	43.80	134	39018.11	40118.71	79.80
15	14176.55	435643.03	8.40	75	38447.01	72666.76	44.40	135	39021.88	39817.30	80.40
16	15406.03	424943.08	9.00	76	38469.17	71761.10	45.00	136	39025.56	39520.40	81.00
17	16719.25	412725.12	9.60	77	38490.44	70712.40	45.60	137	39029.15	39227.91	81.60
18	18183.88	398213.89	10.20	78	38510.88	69774.54	46.20	138	39032.67	38939.73	82.20
19	19817.52	381056.27	10.80	79	38530.51	68861.51	46.80	139	39036.11	38655.77	82.80
20	21501.49	362363.20	11.40	80	38549.39	67972.31	47.40	140	39039.48	38375.93	83.40
21	23183.83	342680.90	12.00	81	38567.56	67106.00	48.00	141	39042.78	38100.12	84.00
22	24830.10	322434.36	12.60	82	38585.04	66261.72	48.60	142	39046.00	37828.27	84.60
23	26411.69	302035.69	13.20	83	38601.87	65438.63	49.20	143	39049.16	37560.28	85.20
24	27900.49	281942.37	13.80	84	38618.09	64635.91	49.80	144	39052.25	37296.07	85.80
25	29263.09	262737.01	14.40	85	38633.72	63852.84	50.40	145	39055.27	37035.56	86.40
26	30443.29	245399.73	15.00	86	38648.79	63088.67	51.00	146	39058.24	36778.68	87.00
27	31347.15	231581.84	15.60	87	38663.33	62342.74	51.60	147	39061.14	36525.35	87.60
28	32079.83	219938.89	16.20	88	38677.36	61614.39	52.20	148	39063.98	36275.49	88.20
29	32697.82	209747.03	16.80	89	38690.92	60903.00	52.80	149	39066.77	36029.03	88.80
30	33229.21	200664.08	17.40	90	38704.00	60207.98	53.40	150	39069.49	35785.92	89.40
31	33692.09	192474.08	18.00	91	38716.65	59528.76	54.00	151	39072.17	35546.06	90.00
32	34099.26	185025.47	18.60	92	38728.88	58864.82	54.60	152	39074.79	35309.42	90.60
33	34460.23	178205.20	19.20	93	38740.71	58215.64	55.20	153	39077.36	35075.91	91.20
34	34782.34	171925.82	19.80	94	38752.15	57580.72	55.80	154	39079.88	34845.47	91.80
35	35071.39	166117.51	20.40	95	38763.22	56959.60	56.40	155	39082.35	34618.06	92.40
36	35332.04	160723.44	21.00	96	38773.94	56351.83	57.00	156	39084.77	34393.59	93.00
37	35568.09	155696.55	21.60	97	38784.32	55756.98	57.60	157	39087.14	34172.03	93.60
38	35782.64	150997.34	22.20	98	38794.38	55174.64	58.20	158	39089.47	33953.31	94.20
39	35978.54	146592.27	22.80	99	38804.13	54604.42	58.80	159	39091.76	33737.38	94.80
40	36157.78	142452.58	23.40	100	38813.58	54045.94	59.40	160	39094.00	33524.19	95.40
41	36322.33	138553.44	24.00	101	38822.74	53498.84	60.00	161	39096.20	33313.68	96.00
42	36473.57	134873.21	24.60	102	38831.63	52962.77	60.60	162	39098.36	33105.80	96.60
43	36613.59	131392.93	25.20	103	38840.26	52437.40	61.20	163	39100.47	32900.51	97.20
44	36742.91	128095.89	25.80	104	38848.63	51922.41	61.80	164	39102.55	32697.75	97.80
45	36862.79	124967.31	26.40	105	38856.76	51417.50	62.40	165	39104.60	32497.48	98.40
46	36974.17	121994.02	27.00	106	38864.66	50922.37	63.00	166	39106.60	32299.66	99.00
47	37077.84	119164.24	27.60	107	38872.33	50436.74	63.60	167	39108.57	32104.24	99.60
48	37174.51	116467.42	28.20	108	38879.79	49960.33	64.20	168	39110.50	31911.17	100.20
49	37264.81	113894.07	28.80	109	38887.03	49492.88	64.80	169	39112.40	31720.41	100.80
50	37349.31	111435.59	29.40	110	38894.08	49034.15	65.40	170	39114.26	31531.93	101.40
51	37428.49	109084.21	30.00	111	38900.93	48583.89	66.00	171	39116.09	31345.68	102.00
52	37502.80	106832.85	30.60	112	38907.60	48141.86	66.60	172	39117.89	31161.62	102.60
53	37572.53	104675.08	31.20	113	38914.09	47707.84	67.20	173	39119.66	30979.71	103.20
54	37638.36	102605.03	31.80	114	38920.40	47281.61	67.80	174	39121.40	30799.92	103.80
55	37700.29	100617.29	32.40	115	38926.55	46862.97	68.40	175	39123.11	30622.20	104.40
56	37758.71	98706.93	33.00	116	38932.54	46451.71	69.00	176	39124.78	30446.53	105.00
57	37813.90	96869.42	33.60	117	38938.37	46047.64	69.60	177	39126.43	30272.87	105.60
58	37866.08	95100.56	34.20	118	38944.05	45650.57	70.20	178	39128.05	30101.18	106.20
59	37915.48	93396.49	34.80	119	38949.58	45260.32	70.80	179	39129.65	29931.44	106.80
60	37962.29	91753.63	35.40	120	38954.98	44876.72	71.40	180	39131.22	29763.60	107.40

Tabla 10. Tabla de resultados modelo analítico rango completo (2/3)

	Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)
181	39132.76	29597.63	108.00	241	39192.85	22180.35	144.00	301	39220.62	17737.68	180.00
182	39134.27	29433.51	108.60	242	39193.49	22088.13	144.60	302	39220.95	17678.68	180.60
183	39135.76	29271.20	109.20	243	39194.12	21996.67	145.20	303	39221.27	17620.06	181.20
184	39137.23	29110.68	109.80	244	39194.75	21905.96	145.80	304	39221.59	17561.84	181.80
185	39138.67	28951.91	110.40	245	39195.36	21816.00	146.40	305	39221.91	17503.99	182.40
186	39140.09	28794.86	111.00	246	39195.97	21726.78	147.00	306	39222.22	17446.53	183.00
187	39141.48	28639.52	111.60	247	39196.57	21638.29	147.60	307	39222.54	17389.44	183.60
188	39142.86	28485.84	112.20	248	39197.17	21550.51	148.20	308	39222.84	17332.73	184.20
189	39144.21	28333.80	112.80	249	39197.75	21463.45	148.80	309	39223.15	17276.38	184.80
190	39145.54	28183.39	113.40	250	39198.33	21377.08	149.40	310	39223.45	17220.40	185.40
191	39146.85	28034.56	114.00	251	39198.90	21291.41	150.00	311	39223.75	17164.78	186.00
192	39148.14	27887.30	114.60	252	39199.47	21206.42	150.60	312	39224.05	17109.52	186.60
193	39149.40	27741.58	115.20	253	39200.03	21122.11	151.20	313	39224.34	17054.62	187.20
194	39150.65	27597.38	115.80	254	39200.58	21038.47	151.80	314	39224.63	17000.06	187.80
195	39151.88	27454.68	116.40	255	39201.12	20955.49	152.40	315	39224.92	16945.86	188.40
196	39153.09	27313.44	117.00	256	39201.66	20873.16	153.00	316	39225.21	16892.00	189.00
197	39154.28	27173.65	117.60	257	39202.20	20791.48	153.60	317	39225.49	16838.48	189.60
198	39155.46	27035.29	118.20	258	39202.72	20710.43	154.20	318	39225.77	16785.30	190.20
199	39156.61	26898.33	118.80	259	39203.24	20630.01	154.80	319	39226.05	16732.45	190.80
200	39157.75	26762.75	119.40	260	39203.76	20550.22	155.40	320	39226.32	16679.94	191.40
201	39158.87	26628.54	120.00	261	39204.27	20471.04	156.00	321	39226.59	16627.75	192.00
202	39159.98	26495.67	120.60	262	39204.77	20392.47	156.60	322	39226.86	16575.89	192.60
203	39161.07	26364.12	121.20	263	39205.27	20314.50	157.20	323	39227.13	16524.35	193.20
204	39162.14	26233.87	121.80	264	39205.76	20237.13	157.80	324	39227.40	16473.14	193.80
205	39163.19	26104.90	122.40	265	39206.24	20160.34	158.40	325	39227.66	16422.24	194.40
206	39164.24	25977.20	123.00	266	39206.72	20084.13	159.00	326	39227.92	16371.65	195.00
207	39165.26	25850.74	123.60	267	39207.20	20008.50	159.60	327	39228.18	16321.37	195.60
208	39166.27	25725.51	124.20	268	39207.67	19933.44	160.20	328	39228.43	16271.40	196.20
209	39167.27	25601.48	124.80	269	39208.13	19858.94	160.80	329	39228.68	16221.74	196.80
210	39168.25	25478.65	125.40	270	39208.59	19784.99	161.40	330	39228.93	16172.38	197.40
211	39169.22	25357.00	126.00	271	39209.05	19711.59	162.00	331	39229.18	16123.32	198.00
212	39170.17	25236.50	126.60	272	39209.49	19638.74	162.60	332	39229.43	16074.56	198.60
213	39171.11	25117.14	127.20	273	39209.94	19566.42	163.20	333	39229.67	16026.09	199.20
214	39172.04	24998.91	127.80	274	39210.38	19494.63	163.80	334	39229.91	15977.91	199.80
215	39172.95	24881.79	128.40	275	39210.81	19423.37	164.40	335	39230.15	15930.02	200.40
216	39173.86	24765.76	129.00	276	39211.24	19352.63	165.00	336	39230.39	15882.42	201.00
217	39174.74	24650.81	129.60	277	39211.67	19282.40	165.60	337	39230.62	15835.10	201.60
218	39175.62	24536.93	130.20	278	39212.09	19212.68	166.20	338	39230.86	15788.06	202.20
219	39176.49	24424.09	130.80	279	39212.50	19143.47	166.80	339	39231.09	15741.30	202.80
220	39177.34	24312.28	131.40	280	39212.91	19074.75	167.40	340	39231.32	15694.82	203.40
221	39178.18	24201.50	132.00	281	39213.32	19006.52	168.00	341	39231.54	15648.61	204.00
222	39179.01	24091.72	132.60	282	39213.72	18938.78	168.60	342	39231.77	15602.67	204.60
223	39179.83	23982.94	133.20	283	39214.12	18871.52	169.20	343	39231.99	15557.00	205.20
224	39180.64	23875.13	133.80	284	39214.51	18804.74	169.80	344	39232.21	15511.60	205.80
225	39181.43	23768.30	134.40	285	39214.90	18738.42	170.40	345	39232.43	15466.47	206.40
226	39182.22	23662.41	135.00	286	39215.29	18672.58	171.00	346	39232.65	15421.59	207.00
227	39182.99	23557.46	135.60	287	39215.67	18607.19	171.60	347	39232.86	15376.98	207.60
228	39183.76	23453.45	136.20	288	39216.05	18542.27	172.20	348	39233.08	15332.62	208.20
229	39184.51	23350.34	136.80	289	39216.42	18477.79	172.80	349	39233.29	15288.52	208.80
230	39185.26	23248.15	137.40	290	39216.79	18413.76	173.40	350	39233.50	15244.67	209.40
231	39186.00	23146.84	138.00	291	39217.16	18350.18	174.00	351	39233.71	15201.07	210.00
232	39186.72	23046.41	138.60	292	39217.52	18287.03	174.60	352	39233.91	15157.72	210.60
233	39187.44	22946.85	139.20	293	39217.88	18224.32	175.20	353	39234.12	15114.61	211.20
234	39188.15	22848.15	139.80	294	39218.23	18162.03	175.80	354	39234.32	15071.76	211.80
235	39188.84	22750.30	140.40	295	39218.59	18100.17	176.40	355	39234.52	15029.14	212.40
236	39189.53	22653.28	141.00	296	39218.93	18038.73	177.00	356	39234.72	14986.76	213.00
237	39190.22	22557.08	141.60	297	39219.28	17977.71	177.60	357	39234.92	14944.63	213.60
238	39190.89	22461.70	142.20	298	39219.62	17917.09	178.20	358	39235.11	14902.73	214.20
239	39191.55	22367.13	142.80	299	39219.96	17856.89	178.80	359	39235.31	14861.06	214.80
240	39192.21	22273.35	143.40	300	39220.29	17797.09	179.40	360	39235.50	14819.63	215.40

Tabla 10. Tabla de resultados modelo analítico rango completo (3/3)

	Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)
361	39235.69	14778.42	216.00	421	39244.77	12665.68	252.00	481	39250.67	11081.60	288.00
362	39235.88	14737.45	216.60	422	39244.89	12635.58	252.60	482	39250.75	11058.55	288.60
363	39236.07	14696.70	217.20	423	39245.01	12605.61	253.20	483	39250.83	11035.59	289.20
364	39236.25	14656.18	217.80	424	39245.13	12575.79	253.80	484	39250.91	11012.73	289.80
365	39236.44	14615.88	218.40	425	39245.25	12546.11	254.40	485	39250.98	10989.97	290.40
366	39236.62	14575.80	219.00	426	39245.36	12516.57	255.00	486	39251.06	10967.30	291.00
367	39236.80	14535.94	219.60	427	39245.48	12487.17	255.60	487	39251.14	10944.72	291.60
368	39236.98	14496.29	220.20	428	39245.59	12457.91	256.20	488	39251.22	10922.24	292.20
369	39237.16	14456.87	220.80	429	39245.70	12428.78	256.80	489	39251.29	10899.84	292.80
370	39237.34	14417.66	221.40	430	39245.82	12399.79	257.40	490	39251.37	10877.54	293.40
371	39237.52	14378.65	222.00	431	39245.93	12370.94	258.00	491	39251.44	10855.33	294.00
372	39237.69	14339.86	222.60	432	39246.04	12342.22	258.60	492	39251.52	10833.21	294.60
373	39237.86	14301.28	223.20	433	39246.15	12313.63	259.20	493	39251.59	10811.18	295.20
374	39238.04	14262.91	223.80	434	39246.26	12285.17	259.80	494	39251.67	10789.24	295.80
375	39238.21	14224.74	224.40	435	39246.37	12256.85	260.40	495	39251.74	10767.39	296.40
376	39238.38	14186.78	225.00	436	39246.48	12228.66	261.00	496	39251.82	10745.63	297.00
377	39238.54	14149.01	225.60	437	39246.59	12200.59	261.60	497	39251.89	10723.95	297.60
378	39238.71	14111.45	226.20	438	39246.69	12172.65	262.20	498	39251.96	10702.37	298.20
379	39238.87	14074.09	226.80	439	39246.80	12144.85	262.80	499	39252.03	10680.86	298.80
380	39239.04	14036.92	227.40	440	39246.90	12117.16	263.40	500	39252.10	10659.45	299.40
381	39239.20	13999.95	228.00	441	39247.01	12089.61	264.00	501	39252.18	10638.12	300.00
382	39239.36	13963.18	228.60	442	39247.11	12062.18	264.60	502	39252.25	10616.88	300.60
383	39239.52	13926.60	229.20	443	39247.21	12034.87	265.20	503	39252.32	10595.72	301.20
384	39239.68	13890.20	229.80	444	39247.32	12007.69	265.80	504	39252.39	10574.64	301.80
385	39239.84	13854.00	230.40	445	39247.42	11980.63	266.40	505	39252.46	10553.65	302.40
386	39239.99	13817.99	231.00	446	39247.52	11953.69	267.00	506	39252.53	10532.74	303.00
387	39240.15	13782.16	231.60	447	39247.62	11926.87	267.60	507	39252.59	10511.92	303.60
388	39240.30	13746.52	232.20	448	39247.72	11900.17	268.20	508	39252.66	10491.18	304.20
389	39240.45	13711.07	232.80	449	39247.82	11873.59	268.80	509	39252.73	10470.51	304.80
390	39240.61	13675.79	233.40	450	39247.92	11847.13	269.40	510	39252.80	10449.93	305.40
391	39240.76	13640.70	234.00	451	39248.01	11820.79	270.00	511	39252.86	10429.43	306.00
392	39240.90	13605.78	234.60	452	39248.11	11794.57	270.60	512	39252.93	10409.02	306.60
393	39241.05	13571.05	235.20	453	39248.21	11768.46	271.20	513	39253.00	10388.68	307.20
394	39241.20	13536.49	235.80	454	39248.30	11742.46	271.80	514	39253.06	10368.42	307.80
395	39241.34	13502.11	236.40	455	39248.40	11716.58	272.40	515	39253.13	10348.23	308.40
396	39241.49	13467.90	237.00	456	39248.49	11690.82	273.00	516	39253.19	10328.13	309.00
397	39241.63	13433.86	237.60	457	39248.59	11665.17	273.60	517	39253.26	10308.11	309.60
398	39241.78	13400.00	238.20	458	39248.68	11639.63	274.20	518	39253.32	10288.16	310.20
399	39241.92	13366.30	238.80	459	39248.77	11614.20	274.80	519	39253.39	10268.29	310.80
400	39242.06	13332.78	239.40	460	39248.87	11588.88	275.40	520	39253.45	10248.50	311.40
401	39242.20	13299.42	240.00	461	39248.96	11563.67	276.00	521	39253.51	10228.78	312.00
402	39242.33	13266.23	240.60	462	39249.05	11538.57	276.60	522	39253.58	10209.14	312.60
403	39242.47	13233.21	241.20	463	39249.14	11513.58	277.20	523	39253.64	10189.57	313.20
404	39242.61	13200.35	241.80	464	39249.23	11488.70	277.80	524	39253.70	10170.08	313.80
405	39242.74	13167.65	242.40	465	39249.32	11463.93	278.40	525	39253.76	10150.66	314.40
406	39242.88	13135.11	243.00	466	39249.40	11439.26	279.00	526	39253.82	10131.32	315.00
407	39243.01	13102.74	243.60	467	39249.49	11414.70	279.60	527	39253.89	10112.05	315.60
408	39243.14	13070.52	244.20	468	39249.58	11390.25	280.20	528	39253.95	10092.85	316.20
409	39243.27	13038.46	244.80	469	39249.67	11365.89	280.80	529	39254.01	10073.73	316.80
410	39243.40	13006.56	245.40	470	39249.75	11341.65	281.40	530	39254.07	10054.68	317.40
411	39243.53	12974.82	246.00	471	39249.84	11317.50	282.00	531	39254.13	10035.70	318.00
412	39243.66	12943.22	246.60	472	39249.92	11293.46	282.60	532	39254.19	10016.79	318.60
413	39243.79	12911.79	247.20	473	39250.01	11269.52	283.20	533	39254.25	9997.96	319.20
414	39243.91	12880.50	247.80	474	39250.09	11245.68	283.80				
415	39244.04	12849.37	248.40	475	39250.18	11221.95	284.40				
416	39244.16	12818.38	249.00	476	39250.26	11198.31	285.00				
417	39244.29	12787.55	249.60	477	39250.34	11174.77	285.60				
418	39244.41	12756.86	250.20	478	39250.42	11151.33	286.20				
419	39244.53	12726.32	250.80	479	39250.51	11127.99	286.80				
420	39244.65	12695.93	251.40	480	39250.59	11104.75	287.40				

Tabla 11. Tabla de resultados modelo analítico para la zona próxima a $T_b=450Nm$

	Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)
1	11883.16	453549.94	7.20	32	12458.66	449316.89	7.51
2	11901.57	453417.32	7.21	33	12477.40	449176.06	7.52
3	11919.98	453284.44	7.22	34	12496.15	449034.96	7.53
4	11938.41	453151.31	7.23	35	12514.91	448893.59	7.54
5	11956.85	453017.91	7.24	36	12533.68	448751.94	7.55
6	11975.29	452884.26	7.25	37	12552.47	448610.02	7.56
7	11993.75	452750.35	7.26	38	12571.26	448467.83	7.57
8	12012.22	452616.18	7.27	39	12590.07	448325.36	7.58
9	12030.70	452481.75	7.28	40	12609.46	448182.61	7.59
10	12049.19	452347.06	7.29	41	12627.72	448039.58	7.60
11	12067.69	452212.11	7.30	42	12646.57	447896.28	7.61
12	12086.20	452076.89	7.31	43	12665.42	447752.70	7.62
13	12104.72	451941.41	7.32	44	12684.29	447608.84	7.63
14	12123.25	451805.68	7.33	45	12703.17	447464.70	7.64
15	12141.79	451669.67	7.34	46	12722.06	447320.28	7.65
16	12160.34	451533.41	7.35	47	12740.96	447175.58	7.66
17	12178.90	451396.88	7.36	48	12759.87	447030.60	7.67
18	12197.48	451260.08	7.37	49	12778.80	446885.34	7.68
19	12216.06	451123.02	7.38	50	12797.74	446739.80	7.69
20	12234.66	450985.70	7.39	51	12816.69	446593.97	7.70
21	12253.26	450848.11	7.40	52	12835.65	446447.86	7.71
22	12271.88	450710.25	7.41	53	12854.63	446301.47	7.72
23	12290.51	450572.12	7.42	54	12873.62	446154.79	7.73
24	12309.15	450433.73	7.43	55	12892.61	446007.83	7.74
25	12327.80	450295.07	7.44	56	12911.63	445860.58	7.75
26	12346.46	450156.14	7.45	57	12930.65	445713.04	7.76
27	12365.13	450016.94	7.46	58	12949.69	445565.22	7.77
28	12383.81	449877.47	7.47	59	12968.74	445417.11	7.78
29	12402.51	449737.73	7.48	60	12987.80	445268.71	7.79
30	12421.21	449597.72	7.49	61	13006.88	445120.02	7.80
31	12439.93	449457.44	7.50				

Tabla 12. Tabla de resultados modelo analítico para la zona próxima a $T_b=300Nm$

	Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)
1	26411.69	302035.69	13.20	32	27194.38	291583.56	13.51
2	26437.35	301696.91	13.21	33	27219.17	291248.51	13.52
3	26462.98	301358.22	13.22	34	27243.93	290913.63	13.53
4	26488.58	301019.62	13.23	35	27268.66	290578.90	13.54
5	26514.16	300681.14	13.24	36	27293.36	290244.35	13.55
6	26539.71	300342.71	13.25	37	27318.03	289909.96	13.56
7	26565.23	300004.38	13.26	38	27342.67	289575.75	13.57
8	26590.73	299666.11	13.27	39	27367.28	289241.70	13.58
9	26616.20	299327.98	13.28	40	27391.85	288907.84	13.59
10	26641.65	298989.94	13.29	41	27416.40	288574.15	13.60
11	26667.06	298652.01	13.30	42	27440.91	288240.65	13.61
12	26692.46	298314.18	13.31	43	27465.39	287907.33	13.62
13	26717.82	297976.46	13.32	44	27489.84	287574.20	13.63
14	26743.16	297638.86	13.33	45	27514.26	287241.25	13.64
15	26768.47	297301.36	13.34	46	27538.65	286908.50	13.65
16	26793.75	296963.98	13.35	47	27563.00	286575.95	13.66
17	26819.00	296626.72	13.36	48	27587.32	286243.59	13.67
18	26844.23	296289.57	13.37	49	27611.61	285911.48	13.68
19	26869.43	295952.55	13.38	50	27635.87	285579.53	13.69
20	26894.59	295615.66	13.39	51	27660.09	285247.75	13.70
21	26919.74	295278.89	13.40	52	27684.28	284916.22	13.71
22	26944.85	294942.25	13.41	53	27708.44	284584.90	13.72
23	26969.93	294605.74	13.42	54	27732.56	284253.79	13.73
24	26994.99	294269.37	13.43	55	27756.65	283922.91	13.74
25	27020.02	293933.14	13.44	56	27780.71	283592.25	13.75
26	27045.01	293597.04	13.45	57	27804.73	283261.81	13.76
27	27069.98	293261.09	13.46	58	27828.72	282931.60	13.77
28	27094.92	292925.28	13.47	59	27852.68	282601.62	13.78
29	27119.83	292589.62	13.48	60	27876.60	282271.88	13.79
30	27144.71	292254.12	13.49	61	27900.49	281942.37	13.80
31	27169.56	291918.76	13.50				

Tabla 13. Tabla de resultados modelo analítico para la zona próxima a $T_b=150Nm$

	Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)		Feb (N)	Tb (Nmm)	rcb (mm)
1	35782.64	150997.34	22.20	31	35882.83	148759.93	22.50
2	35786.05	150921.60	22.21	32	35886.09	148686.58	22.51
3	35789.46	150845.94	22.22	33	35889.34	148613.29	22.52
4	35792.86	150770.36	22.23	34	35892.59	148540.09	22.53
5	35796.26	150694.86	22.24	35	35895.84	148466.96	22.54
6	35799.65	150619.44	22.25	36	35899.08	148393.91	22.55
7	35803.03	150544.11	22.26	37	35902.31	148320.94	22.56
8	35806.41	150468.85	22.27	38	35905.54	148248.04	22.57
9	35809.79	150393.68	22.28	39	35908.77	148175.22	22.58
10	35813.16	150318.58	22.29	40	35911.99	148115.19	22.59
11	35816.52	150243.57	22.30	41	35915.21	148042.48	22.60
12	35819.88	150168.63	22.31	42	35918.42	147975.21	22.61
13	35823.24	150093.78	22.32	43	35921.62	147884.70	22.62
14	35826.59	150019.00	22.33	44	35924.83	147812.26	22.63
15	35829.93	149944.31	22.34	45	35928.02	147739.89	22.64
16	35833.27	149869.69	22.35	46	35931.22	147667.61	22.65
17	35836.61	149795.16	22.36	47	35934.40	147595.39	22.66
18	35839.94	149720.70	22.37	48	35937.59	147523.25	22.67
19	35843.26	149646.33	22.38	49	35940.76	147451.19	22.68
20	35846.58	149572.03	22.39	50	35943.94	147379.21	22.69
21	35849.89	149497.81	22.40	51	35947.11	147307.29	22.70
22	35853.20	149423.67	22.41	52	35950.27	147235.46	22.71
23	35856.51	149349.61	22.42	53	35953.43	147163.69	22.72
24	35859.81	149275.63	22.43	54	35956.58	147092.00	22.73
25	35863.10	149201.72	22.44	55	35959.73	147020.39	22.74
26	35866.39	149127.90	22.45	56	35962.88	146948.85	22.75
27	35869.68	149054.15	22.46	57	35966.02	146877.39	22.76
28	35873.02	148980.48	22.47	58	35969.15	146806.00	22.77
29	35876.29	148906.89	22.48	59	35972.29	146734.68	22.78
30	35879.56	148833.37	22.49	60	35975.41	146663.44	22.79