EXÁMENES RESUELTOS DE ÁLGEBRA LINEAL Y MATEMÁTICAS I

2001-2005

Eugenio Bravo Sevilla, Ana Gloria González López,
M. Esther Gutiérrez Orantia, F. Javier Molinuevo Fano,
C. Mónica Rebollo Gómez, M. Verónica Valdenebro Villar

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EXÁMENES RESUELTOS
DE ÁLGEBRA LINEAL Y MATEMÁTICAS I
2001-2005

INGENIERÍA INDUSTRIAL E INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

EXÁMENES RESUELTOS
DE ÁLGEBRA LINEAL Y MATEMÁTICAS I
2001-2005

INGENIERÍA INDUSTRIAL E INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE BILBAO

Eugenio Bravo Sevilla, Ana Gloria González López, M. Esther Gutiérrez Orrantia,
F. Javier Molinuevo Fano, C. Mónica Rebollo Gómez, M. Verónica Valdenebro Villar.

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

ISBN: 978-84-9082-996-7

ÍNDICE

PRÓLOGO

Este libro es una recopilación de los problemas de examen propuestos en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao para las asignaturas de Álgebra Lineal (en Ingeniería Industrial) y Matemáticas I (en Ingeniería de Telecomunicaciones) en las diferentes convocatorias de los cursos 2000-2001 a 2004-2005. La amplia aceptación entre el alumnado del libro *Exámenes resueltos de Álgebra Lineal y Matemáticas I (1996-2000)* nos ha llevado a la elaboración de este segundo volumen con exámenes más recientes, y que esperamos sea de tanta ayuda para la preparación de las asignaturas como el anterior. Por la utilidad demostrada, se ha mantenido la estructura del libro anterior, mostrándose los problemas de los distintos exámenes distribuidos según los capítulos de teoría al que corresponden. De esta manera, el libro consta de 7 capítulos, correspondiendo cada uno de ellos a un tema del programa que se imparte en la actualidad en las asignaturas de Álgebra Lineal y Matemáticas I en la mencionada Escuela; el tema 6 (Formas bilineales y cuadráticas) no ha sido impartido algunos años por cuestiones de programación. Si un problema contiene preguntas que corresponden a varios capítulos de teoría, se ha asignado al último de ellos.

Los autores del libro han sido los profesores que impartieron las asignaturas anteriormente citadas en los años que el libro abarca; cada profesor ha realizado uno o más capítulos según se muestra al final de este prólogo. Dentro de cada tema los problemas se han ordenado por fechas, presentándose todos ellos resueltos. Al final de cada capítulo se encuentran las cuestiones teóricas y teórico-prácticas correspondientes al tema que se trata en dicho capítulo; aquéllas puramente teóricas no se han resuelto, pudiendo el alumno consultar la respuesta adecuada en el libro de Apuntes de Clase editado por el Servicio de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao.

Autores del libro:

Tema 1	C. Mónica Rebollo Gómez
Tema 2	Ana Gloria González López
Tema 3	M. Esther Gutiérrez Orrantia
Tema 4	M. Verónica Valdenebro Villar
Tema 5	Eugenio Bravo Sevilla
Tema 6	Ana Gloria González López
Tema 7	Eugenio Bravo Sevilla y M. Esther Gutiérrez Orrantia
Revisión	F. Javier Molinuevo Fano

1

MATRICES Y DETERMINANTES

1.1 Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + 3z = 13 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$$

(Febrero 2001)

Resolución:

La forma más sencilla de resolverlos usando el método de Gauss es hacerlo simultáneamente. La matriz ampliada de los sistemas sería:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 13 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 13 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right) \underset{\langle F_3 - 4F_1 \rangle}{\xrightarrow{\langle F_2 - 2F_1 \rangle}} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_3 - 3F_2 \rangle}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -21 \end{array}\right).$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes de cada sistema transformado es 3 y el de la correspondiente matriz ampliada también es 3, cada sistema es compatible, y como el número de incógnitas es 3, los sistemas considerados son compatibles determinados, y tienen solución única:

Sistema I:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \quad - y + z = 0 \\ \qquad -7z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Sistema II:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad - y + z = 1 \\ \qquad -7z = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}.$$

■

1.2 Sea el conjunto $S = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;/\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$. Estudiar si es grupo multiplicativo.

(Febrero 2001)

Resolución:

Para que el conjunto S sea un grupo multiplicativo se han de cumplir los axiomas de grupo:

a) Ley Interna: $\forall\ A,B \in S$: $A\cdot B \in S$?

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ / x, y, z, m, n, p$\in\mathbb{R}$, entonces

$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & m+x & n+px+y \\ 0 & 1 & p+z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, m+x, n+px+y, p+z$\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $A\cdot B \in S$.

Luego se verifica el axioma de ley interna.

b) Propiedad Asociativa: se verifica por ser asociativo el producto de matrices cualesquiera.

c) Elemento Neutro: : $\forall\ A \in S\ \ \exists! I \in S\ /\ \ A\cdot I = I\cdot A = A$?

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S.$$

Luego se verifica el axioma de existencia de elemento neutro.

d) Elemento Inverso: $\forall\ A \in S\ \ \exists (A)^{-1} \in S\ /\ A\cdot(A)^{-1} = (A)^{-1}\cdot A = I$?

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$ / x,y,z$\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $|A| = 1$ $\Rightarrow$ $\exists (A)^{-1}$.

Si calculamos la inversa de A:

$$(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz-y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{/ -x, xz-y, -z} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; (A)^{-1} \in S.$$

Luego se verifican todos los axiomas, y por lo tanto el conjunto S sí que es un grupo multiplicativo.

■

1.3 Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1+x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1+x_n \end{vmatrix}.$$

(Febrero 2001)

Resolución:

Aplicando las propiedades de los determinantes se tiene que.

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & 1+x_{n-1} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1+x_n \end{vmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\langle C_1 + C_2 + ... + C_n \rangle}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} x_i & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1+\sum_{i=1}^{n} x_i & 1+x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1+\sum_{i=1}^{n} x_i & x_2 & \cdots & 1+x_{n-1} & x_n \\ 1+\sum_{i=1}^{n} x_i & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1+x_n \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & 1+x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & 1+x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & 1+x_n \end{vmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix} \langle F_2 - F_1 \rangle \\ \langle F_3 - F_1 \rangle \\ \cdots \\ \langle F_n - F_1 \rangle \end{matrix}}} \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

■

1.4 Calcular la inversa de la matriz A mediante transformaciones elementales

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Febrero 2001)

Resolución:

Trabajando con la matriz A y con I_3 a la vez

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_3+2F_1\rangle} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_3-2F_2\rangle}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle -\frac{1}{7}F_3\rangle} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_2-2F_3\rangle}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & +\frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_1+2F_3\rangle} \left(\begin{array}{ccc:ccc} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

De donde:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

■

1.5 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, determinar A^n por el método de inducción completa.

(Septiembre 2001)

Resolución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 \\ 0 & x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^4 & 4x^3 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix}.$$

Con lo que parece que :

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1} \\ 0 & x^n \end{pmatrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se comprobará que, efectivamente, A^n responde a esa expresión, utilizando el método de inducción matemática:

1. Se demuestra que la expresión es verdadera para $n = 1$ y para $n = 2$,

$$A = A^1 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & 1x^{1-1} \\ 0 & x^1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

2. Supuesto cierto para $n = k$, se demuestra que es también cierto para $n = k+1$. Es decir hay que demostrar que $A^{k+1} = \begin{pmatrix} x^{k+1} & (k+1)x^{k+1-1} \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix}$, basándose en que $A^k = \begin{pmatrix} x^k & kx^{k-1} \\ 0 & x^k \end{pmatrix}$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} x^k & kx^{k-1} \\ 0 & x^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{k+1} & (k+1)x^{k+1-1} \\ 0 & x^{k+1} \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene lo que se quería demostrar.

■

1.6 Determinar las matrices regulares X e Y tales que:

$$\left.\begin{array}{l} X\cdot Y=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} \\ Y\cdot X=\begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\right\}, \text{ donde } Y=\begin{pmatrix} \mathrm{a} & 3 \\ \mathrm{c} & 1 \end{pmatrix} \ / \ \mathrm{a,c}\in\mathbb{R}.$$

(Septiembre 2001)

Resolución:

Como las matrices X e Y son regulares, existe la inversa de Y:

$$Y=\begin{pmatrix} a & 3 \\ c & 1 \end{pmatrix},\ |Y|=a-3c \quad\Rightarrow\quad Y^{-1}=\frac{1}{a-3c}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$X\cdot Y=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}\cdot Y^{-1}=\frac{1}{a-3c}\begin{pmatrix} 8-5c & -24+5a \\ 20-13c & -60+13a \end{pmatrix}$$

$$Y\cdot X=\begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow X=Y^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}=\frac{1}{a-3c}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -13c+5a & -20c+8a \end{pmatrix}.$$

Igualando ambas expresiones de X:

$$\left\{\begin{array}{l} 8-5c=-2 \\ -24+5a=-4 \\ 20-13c=-13c+5a \\ -60+13a=-20c+8a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=4 \\ c=2 \end{array}\right.,$$

de donde

$$\begin{array}{l} X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ Y=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

■

1.7 Resolver de la forma más adecuada los siguientes sistemas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{y}_2 \\ \mathrm{y}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{z}_2 \\ \mathrm{z}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_1 & \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{y}_2 & \mathrm{z}_2 \\ \mathrm{x}_3 & \mathrm{y}_3 & \mathrm{z}_3 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

¿Qué relación existe entre A y B? Compruébese.

(Septiembre 2001)

Resolución:

La forma más sencilla de resolverlos es hacerlo simultáneamente usando el método de Gauss. La matriz ampliada es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_2 - F_1 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_3 - F_2 \rangle}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes de cada sistema transformado es 3 y el de la correspondiente matriz ampliada también es 3, cada sistema es compatible, y como el número de incógnitas es 3, los sistemas considerados son compatibles determinados, y tienen solución única:

Sistema I:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}\right. .$$

Sistema II:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 + y_3 = 0 \\ y_2 - y_3 = 1 \\ y_3 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -1 \end{array}\right. .$$

Sistema III:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 + z_3 = 0 \\ z_2 - z_3 = 0 \\ z_3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 = -1 \\ z_2 = 1 \\ z_3 = 1 \end{array}\right. .$$

Teniendo en cuenta como esta definida la matriz B, se tiene:

$$B=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando A y B:

$$A{\cdot}B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\left(A{\cdot}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| A{\cdot}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| A{\cdot}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=I.$$

Luego B es la inversa de A.

■

1.8 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

-Dado que toda matriz es solución de su ecuación característica, hallar $p_3(A) = (0)$.

Nota: Téngase en cuenta que

$$p_A(\lambda) = (-1)^n\left[\ \lambda^n - \text{traza}(A){\cdot}\lambda^{n-1} + ... + (1)^n|A|\ \right] = 0$$

$$p_n(A) = (-1)^n\left[\ A^n - \text{traza}(A){\cdot}A^{n-1} + ... + (1)^n|A|{\cdot}I\ \right] = (0).$$

-Determinar por operaciones elementales la inversa de la matriz A.

-Verificar el resultado anterior utilizando el primer apartado.

-Resolver, utilizando el cálculo matricial el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y \qquad = 3 \\ -x + 3y + z = 3 \\ \qquad y + z = 2 \end{cases}.$$

(Septiembre 2001)

Resolución:

-En este caso

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4,$$

$$P_3(A) = (0) \quad \Leftrightarrow \quad -A^3 + 5A^2 - 8A + 4I = (0).$$

-Para hallar la inversa de A con transformaciones elementales, se trabaja a la vez con A y con I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_2 + F_1 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle \frac{1}{5} F_2 \rangle}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_3 - F_2 \rangle]{\langle F_1 - 2F_2 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3/5 & -2/5 & 0 & 1 & 0 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 1 & 0 & 0 & 4/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\langle \frac{5}{4} F_3 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3/5 & -2/5 & 0 & 1 & 0 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \\ -1/4 & -1/4 & 5/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\langle F_2 - \frac{1}{5} F_3 \rangle]{\langle F_1 + \frac{2}{5} F_3 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 5/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

De donde:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

-Por otra parte,

$$A^3 - 5A^2 + 8A = 4I \quad \Rightarrow \quad A(A^2 - 5A + 8I) = 4I \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -5 & 15 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

-Para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3y + z = 3, \\ y + z = 2 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo,

$$A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

usando la inversa de A, ya calculada, se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

■

1.9 Calcular el determinante de A, hallando previamente $A\cdot A^t$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

(Febrero 2002)

Resolución:

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det(A\cdot A^t) = \det(A)\cdot\det(A^t) = (\det(A))^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

■

1.10 Sea $\lambda \in \mathbb{R}$-{0} y $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \lambda\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Hallar la expresión de A^n, $n \in \mathbb{N}$, demostrándolo por el método de inducción.

(Septiembre 2002)

Resolución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \lambda\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \lambda\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \lambda\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta & 2\lambda\,\text{sen}\theta\cos\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \lambda\,\text{sen}2\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Con lo que parece que:

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \lambda\,\text{sen}(n\theta) \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Se comprobará que, efectivamente, A^n responde a esa expresión, utilizando el método de inducción matemática:

1. Se demuestra que la expresión es verdadera para n = 1 y para n = 2,

$$A = A^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \lambda\,\text{sen}\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(1\cdot\theta) & \lambda\,\text{sen}(1\cdot\theta) \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}(1\cdot\theta) & \cos(1\cdot\theta) \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \lambda\,\text{sen}2\theta \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

2. Supuesto cierto para n = k, se demuestra que es también cierto para n = k+1. Es decir hay que demostrar que

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos((k+1)\theta) & \lambda\,\text{sen}((k+1)\theta) \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{pmatrix}, \text{ basándose en que}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \lambda\,\text{sen}(k\theta) \\ -\frac{1}{\lambda}\text{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}.$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \lambda\,\mathrm{sen}(k\theta) \\ -\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \lambda\,\mathrm{sen}\theta \\ -\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot\cos(k\theta) - \mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}(k\theta) & \lambda\,(\mathrm{sen}\theta\cdot\cos(k\theta) + \cos\theta\cdot\mathrm{sen}(k\theta)) \\ -\dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{sen}\theta\cdot\cos(k\theta) + \cos\theta\cdot\mathrm{sen}(k\theta) & \cos\theta\cdot\cos(k\theta) - \mathrm{sen}\theta\cdot\mathrm{sen}(k\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos((k+1)\theta) & \lambda\,\mathrm{sen}((k+1)\theta) \\ -\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene lo que se quería demostrar.

■

1.11 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la inversa de A mediante partición de matrices.

b) Hallar la inversa de A mediante transformaciones elementales.

c) Resolver el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ de la forma más sencilla posible.

d) ¿Cuál es la forma canónica de Hermite de la matriz A?. Razona la respuesta.

e) Sin realizar operaciones, analizar cuáles son los valores propios de A, y cuáles son los de A^{-1}.

(Febrero 2003)

<u>*Resolución:*</u>

a) Teniendo en cuenta que

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_2 & B_{2x2} \\ (0)_{2x2} & -I_2 \end{pmatrix},$$

la inversa de A ha de estar particionada en la forma

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{2x2} & Y_{2x2} \\ \hline Z_{2x2} & T_{2x2} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & B_{2x2} \\ (0)_{2x2} & -I_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} X_{2x2} & Y_{2x2} \\ \hline Z_{2x2} & T_{2x2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & (0)_{2x2} \\ \hline (0)_{2x2} & I_2 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} X + B \cdot Z = I_2 \\ Y + B \cdot T = (0) \\ -Z \qquad = (0) \\ -T \qquad = I_2 \end{cases}.$$

De donde se obtiene

$$\begin{cases} X = I_2 \\ Y = B \\ Z = (0) \\ T = -I_2 \end{cases}$$

De donde

$$A^{-1} = A.$$

b) Trabajando a la vez con A y con I:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle -F_4 \rangle]{\langle -F_3 \rangle} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\langle F_2 - 2F_3 \rangle]{\langle F_1 - F_3 \rangle} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_2 + F_4 \rangle]{\langle F_1 - F_4 \rangle}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

De donde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) La forma más sencilla para resolver el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, teniendo en cuenta que ya se conoce la inversa de A, es hacer

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

d) Como la matriz A es regular de orden 4, su forma de Hermite es la matriz unidad de orden 4.

e) Como la matriz A es triangular superior sus valores propios son sus elementos principales, es decir, 1, 1, -1 y -1. Los de A^{-1} son los mismos que los de A, ya que ambas matrices son iguales.

■

1.12 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar tres matrices elementales P_1, P_2 y P_3 tales que $P_3\cdot P_2\cdot P_1\cdot A = U$, siendo U una matriz triangular superior.

(Febrero 2004)

Resolución:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\langle F_2 - 3F_1\rangle} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\langle F_3 - 2F_1\rangle} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\langle F_3 + F_1\rangle} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tomando:

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P_3\cdot P_2\cdot P_1\cdot A.$$

■

1.13 Hallar utilizando el principio de inducción matemática A^n, $n \in \mathbb{N}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 2004)

Resolución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que parece que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se comprobará que, efectivamente, A^n responde a esa expresión, utilizando el método de inducción matemática:

1. Se demuestra que la expresión es verdadera para $n = 1$ y para $n = 2$,

$$A = A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Supuesto cierto para n = k, se demuestra que es también cierto para n = k+1. Es decir hay que demostrar que $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & -(k+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, basándose en que $A^k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene lo que se quería demostrar.

■

1.14 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Hallar su inversa mediante transformaciones elementales.

b) Hallar la forma canónica de Hermite de A, H, y relacionar ambas matrices (es decir, expresar H = P·A·Q).

(Febrero 2005)

Resolución:

a) Para hallar la inversa de A con transformaciones elementales, se va a trabajar a la vez con A y con I:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_1 \approx F_3 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_2 \approx F_3 \rangle}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_3 - F_1 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

De donde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) En general se tiene: $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline & I_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} P & I_n \\ \hline & Q \end{array}\right)$.

De lo calculado en el apartado anterior:

$$I = H = P{\cdot}A{\cdot}Q = P{\cdot}A{\cdot}I \quad (P{=}A^{-1}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

1.15 Sabiendo que la matriz D es regular, hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} B_{3x2} & I_3 \\ D_{2x2} & (0) \end{pmatrix}$.

(Febrero 2005)

Resolución:

Teniendo en cuenta la partición realizada sobre la matriz A, su inversa ha de estar particionada en la forma

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{2x3} & Y_{2x2} \\ \hline Z_{3x3} & T_{3x2} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$A{\cdot}A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{3x2} & I_3 \\ D_{2x2} & (0) \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{array}{c|c} X_{2x3} & Y_{2x2} \\ \hline Z_{3x3} & T_{3x2} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I_3 & (0)_{3x2} \\ \hline (0)_{2x3} & I_2 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} B{\cdot}X + Z = I_3 \\ B{\cdot}Y + T = (0) \\ D{\cdot}X \qquad = (0) \\ D{\cdot}Y \qquad = I_2 \end{cases}.$$

De donde se obtiene (por ser D regular):

$$\begin{cases} X = (0) \\ Y = D^{-1} \\ Z = I_3 \\ T = -B{\cdot}D^{-1} \end{cases},$$

es decir

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} (0)_{2x3} & D^{-1} \\ \hline I_3 & -B \cdot D^{-1} \end{array}\right).$$

■

1.16 Hallar el valor del determinante de A_n, (n entero positivo):

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ n & 1 & 3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 1 & 1 & \ldots & n \end{pmatrix}_{nxn}.$$

(Febrero 2005)

<u>*Resolución:*</u>

$$|A_n| = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ n & 1 & 3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix} \underset{\substack{\langle F_2 - F_1\rangle \\ \langle F_3 - F_1\rangle \\ \ldots \\ \langle F_n - F_1\rangle}}{=} \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 \end{vmatrix} = n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) = n!.$$

■

1.17 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Hallar su inversa mediante transformaciones elementales.

b) Resolver el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ de dos formas diferentes

(Septiembre 2005)

Resolución:

a) Trabajando con A y con I a la vez:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_2 - F_1 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_3 \approx F_2 \rangle}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle \frac{1}{2} F_2 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_3 - 2F_2 \rangle]{\langle F_1 - F_2 \rangle}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle \frac{1}{2} F_3 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

De donde:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Dos de los métodos que se pueden usar para resolver el sistema son:

- Método de la Inversa: ya se tiene la inversa del apartado anterior,

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

- Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_2 - F_1 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\langle F_3 - F_2 \rangle} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Con lo que el sistema que se ha de resolver es:

$$\begin{cases} x + y \qquad = 5 \\ \quad 2y + 2z = 6 \\ \qquad\; -2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

■

1.18 Una matriz A se denomina nilpotente de orden p, con $p \in \mathbb{N}$, si $A^p = (0)$ y $A^k \neq (0)$, para todo $k < p$ ($k \in \mathbb{N}$).

a) Estudiar si es cierto que toda matriz nilpotente es singular.

b) Demostrar que si A es nilpotente de orden p, entonces

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}.$$

(Septiembre 2005)

Resolución:

a) Teniendo en cuenta la definición de matriz nilpotente de orden p:

$$A^p = (0) \;\Rightarrow\; |A^p| = |A|^p = 0 \;\Rightarrow\; |A| = 0 \;\Rightarrow\; \text{A es singular.}$$

b) Por otra parte,

$$(I-A)^{-1} \cdot (I-A) = (I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}) \cdot (I-A) = I - A^p = I,$$

$$(I-A) \cdot (I-A)^{-1} = (I-A) \cdot (I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}) = I - A^p = I.$$

Luego:

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}.$$

■

1.19 Sean A y B dos matrices simétricas de orden tres, tales que rango(A)=3 y rango(B)=2. Se verifica entonces que $C = A \cdot B$ es simétrica e invertible.

-Verdadero, porque el producto de matrices simétricas es simétrica, y como rango($A \cdot B$)= Máx{ rango(A), rango(B) } entonces rango($A \cdot B$)=3 y $C = A \cdot B$ es invertible.

-Verdadero que $C = A \cdot B$ es una matriz simétrica por ser producto de dos matrices simétricas, pero es falso que sea invertible, pues si existe C^{-1} sería, $C^{-1} = (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ y esto no es posible al ser B una matriz no invertible.

-Todo lo que afirma el enunciado es falso, ya que $A \cdot B$ y B son matrices de igual rango (son equivalentes), no siendo por tanto $C = A \cdot B$ invertible. Además al multiplicar matrices simétricas no se obtiene, en general, como resultado una matriz simétrica.

Razonar qué respuesta es la correcta

(Febrero 2002)

Resolución:

La respuesta verdadera es la tercera, la matriz $C = A \cdot B = A \cdot B \cdot I$, siendo A e I regulares, luego C y B son equivalentes, y por lo tanto tienen igual rango y dimensión.

La primera y la segunda no son verdaderas ya que el producto de dos matrices simétricas no es, en general, otra matriz simétrica. Por ejemplo, si se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ (simétricas), su producto es la matriz

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 32 & 31 \end{pmatrix}.$$

■

1.20 Establecer razonadamente la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes, aportando un contraejemplo en el caso de que sean falsas:

a) La suma de dos matrices regulares de orden n es una matriz regular de orden n.

b) El producto de dos matrices regulares de orden n es una matriz regular de orden n.

c) La suma de una matriz A de rango dos con una matriz B de rango tres es una matriz de rango cinco.

d) La inversa del producto de dos matrices regulares es el producto de las inversas.

e) La traspuesta del producto de dos matrices regulares de orden n es el producto de sus inversas.

f) Si $A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $|\lambda \cdot A| = \lambda \cdot |A|$.

g) Si $A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$ y traza $(A^t \cdot A) = 0$, entonces $A = (0)$.

h) Si $A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$es regular y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A asociado al vector propio **v** , entonces $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1} asociado a **v**.

(Febrero 2003)

<u>*Resolución:*</u>

a) Falso, la suma de dos matrices regulares no tiene por que ser otra matriz regular.

Contraejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, A y B son regulares y A+B no es regular.

b) Verdadero, si $A, B \in E_{nxn}(\mathbb{R})$ y son regulares $\Rightarrow$ $|A| \neq 0 \ \wedge \ |B| \neq 0 \ \Rightarrow$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \neq 0 \ \Rightarrow \ A \cdot B \in E_{nxn}(\mathbb{R}) \text{ y es regular.}$$

c) Falso, no tiene porque cumplirse esto.

Contraejemplo: Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

rango(A)=2, rango(B)=3, rango(A+B)=3 $\neq$ rango(A)+rango(B)=5.

d) Falso, lo que se cumple es $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Contraejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \ B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -15/2 & 7/2 \\ 11/2 & -5/2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 11/2 & -2 \end{pmatrix} = (A)^{-1} \cdot (B)^{-1}.$$

e) Falso, lo que se cumple es $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Contraejemplo: Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix},\ A\cdot B=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq (A)^{-1}\cdot(B)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

f) Falso, lo que se cumple es $|\lambda\cdot A| = \lambda^n\cdot|A|$ si $A\in E_{nxn}(\mathbb{R})$ y $\lambda\in\mathbb{R}$.

Contraejemplo: Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 4\cdot A=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

$$|4\cdot A| = 96 \neq 24 = 4|A|.$$

g) Esta afirmación es verdadera:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\cdot A^t=$$

$$\begin{pmatrix} (a_{11})^2+(a_{12})^2+\dots+(a_{1n})^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & (a_{21})^2+(a_{22})^2+\dots+(a_{2n})^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (a_{n1})^2+(a_{n2})^2+\dots+(a_{nn})^2 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Traza$(A\cdot A^t)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a_{11}=a_{12}=\dots=a_{1n}=a_{21}=a_{22}=\dots=a_{2n}=\dots=a_{nn}=0$.

h) Verdadero, si A es regular $(\Rightarrow \exists A^{-1})$ y $A\cdot\mathbf{v}=\lambda\cdot\mathbf{v}$ $(\Rightarrow \lambda\neq 0)$ $\Rightarrow$ $A^{-1}\cdot A\cdot\mathbf{v}= A^{-1}\cdot\lambda\cdot\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}= A^{-1}\cdot\lambda\cdot\mathbf{v} \Rightarrow (1/\lambda)\cdot\mathbf{v}= A^{-1}\cdot\mathbf{v} \Rightarrow \lambda$ valor propio de A^{-1} asociado al vector propio $\mathbf{v}$.

■

1.21 Establecer razonadamente la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) Dada una matriz regular $A\in E_{nxn}(\mathbb{R})$ se verifica que $\text{traza}(A^{-1})=\dfrac{1}{\text{traza}(A)}$ y que $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

b) Dadas A y B dos matrices regulares de orden n se verifica que $|A\cdot B^t\cdot A^{-1}|=|B|$.

c) Si A es una matriz cuadrada de orden n es cierto que $A + A^t$, $A\cdot A^t$ y $A^t\cdot A$ son matrices simétricas.

(Septiembre 2003)

Resolución:

a) En principio no se ha hecho en clase ninguna referencia a tal "propiedad" lo cual hace pensar que puede que no se verifica dicha igualdad.

Contraejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, de donde se deduce que $\text{traza}(A^{-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq \frac{1}{\text{traza}(A)} = \frac{1}{2+3}$ Luego la primera parte de la afirmación es falsa.

Es cierto que $|A^{-1}| = 1/|A|$. Es una propiedad de los determinantes de las matrices regulares, que se deduce teniendo en cuenta que si A es regular entonces $\exists A^{-1}$ y se verifica $A \cdot A^{-1} = I$, tomando determinantes en esa igualdad se obtiene $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$ y despejando se deduce que $|A^{-1}| = 1/|A|$.

b) Si A y B son matrices regulares de orden n, aplicando las propiedades de los determinantes (determinante del producto de dos matrices cuadradas igual al producto de sus determinantes), se obtiene

$$|A \cdot B^t \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |B^t| \cdot |A^{-1}| = |B^t| = |B| \cdot$$

de donde se deduce que la igualdad $|A \cdot B^t \cdot A^{-1}| = |B| \cdot$ es cierta.

c) Sea A una matriz cuadrada, entonces:

- $(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$, luego $(A+A^t)$ es simétrica.
- $(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t$, luego $(A \cdot A^t)$ es simétrica.
- $(A^t \cdot A)^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A$, luego $(A^t \cdot A)$ es simétrica.

■

1.22 Sean A y B $\in E_{3x3}(\mathbb{R})$, tales que rango (A) = 3 y rango (B) = 2. Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El sistema de ecuaciones $(A \cdot B) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución $(0\ 0\ 0)^t$.

b) El sistema $A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ es un sistema compatible determinado.

c) Si $(1\ 2\ 0)^t$ es una solución del sistema $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces dicho sistema tiene infinitas soluciones.

(Septiembre 2003)

Resolución:

a) Al ser B una matriz singular, el determinante de A·B es 0, y por lo tanto A·B es singular, entonces rango(A·B) < número de incógnitas, de donde el sistema homogéneo considerado tiene infinitas soluciones. Por lo tanto la afirmación es falsa.

b) $\left|A^2\right| = |A \cdot A| = |A||A| \neq 0$, luego A^2 es regular, su rango es 3 que coincide con el número de incógnitas del sistema, por lo que el sistema es compatible determinado. Y por lo tanto, la afirmación es verdadera.

c) Si $(1\ 2\ 0)^t$ es una solución del sistema $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces dicho sistema tiene al menos una solución (es compatible) y como el rango de la matriz de los coeficientes es $2 < 3 =$ número de incógnitas, el sistema ha de ser indeterminado, luego se tata de un sistema compatible indeterminado, luego tiene infinitas soluciones. Y por lo tanto, la afirmación es verdadera.

■

1.23 Indicar razonadamente si son verdaderas (v) o falsas (f) las siguientes propiedades, siendo A, B $\in E_{nxn}(\mathbb{R})$, **.**

a) $(A \cdot B)^{-1} = (A)^{-1} \cdot (B)^{-1}$

b) det (A + B) = det (A) + det (B)

c) A·B =B·A

d) det (A·B) = det (B·A)

e) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

(Septiembre 2004)

Resolución:

a) $(A \cdot B)^{-1} = (A)^{-1} \cdot (B)^{-1}$. Esta afirmación es falsa. Lo verdadero es que $(A \cdot B)^{-1} = (B)^{-1} \cdot (A)^{-1}$.

Contraejemplo: si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene que $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$,

mientras que $(A)^{-1} \cdot (B)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$.

b) det (A + B) = det (A) + det (B) **.** Esta afirmación es falsa.

Contraejemplo: si A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene que det(A+B)=3, mientras que det(A)+det(B)=0

c) A·B = B·A. El producto de matrices no es conmutativo, luego esta afirmación es falsa.

Contraejemplo: tomando A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

d) Det(A·B) = det(B·A). Esta afirmación es verdadera, por las propiedades de los determinantes sabemos que, si A y B son cuadradas,

det(A·B)=det(A)·det(B)= det(B)·det(A)=det(B·A).

e) $(A+B)^{-1}=(A)^{-1}+(B)^{-1}$ Esta afirmación es falsa.

Contraejemplo: si A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene que $(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ mientras que $=(A)^{-1}+(B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

■

2

ESPACIOS VECTORIALES

2.1 Estudiar si los siguientes conjuntos de $E_{2x2}(\mathbb{R})$, espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos y elementos reales, son subespacios vectoriales:

a) $S_1 = \{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / \ rango(A) = 1 \}$

b) $S_2 = \{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / \ traza(A) = 0 \}$

En caso afirmativo hallar base y ecuaciones.

(Febrero 2001)

Resolución:

a) Para que S_1 sea subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ ha de cumplir:

i) La matriz nula: $(0) \in S_1$

ii) $\forall$ A, B $\in S_1 \Rightarrow$ A+B$\in S_1$

iii) $\forall$ A$\in S_1$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot A \in S_1$

Sin embargo,

i) La matriz nula: $(0) \notin S_1$, puesto que $rango[(0)] = 0$

Por tanto, S_1 **no** tiene estructura de subespacio vectorial.

Se comprueban las otras dos condiciones:

ii) Las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_1$, *rango*(A) = *rango*(B) = 1,

pero A+B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin S_1$, pues *rango*(A+B) = 2. Tampoco se cumple.

iii) $\forall$ A$\in S_1$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot A \in S_1$. Sí que se cumple, pues $\alpha \cdot A$ tiene el mismo rango que la matriz A.

b) Para que S_2 sea subespacio vectorial se ha de cumplir que:

i) La matriz nula: $(0) \in S_2$, lo cual es cierto pues $traza[(0)] = 0$.

ii) $\forall$ A, B $\in S_2 \Rightarrow$ A+B$\in S_2$.

Se cumple, pues *traza*(A+B) = *traza*(A) + *traza*(B). Luego si *traza*(A) = 0 y *traza*(B) =0 $\Rightarrow$ *traza*(A+B) = 0.

iii) $\forall$ A$\in S_2$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot A \in S_2$.

También se cumple, pues $traza(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot traza(A)$.

Luego *traza*(A) = 0 $\Rightarrow traza(\alpha \cdot A) = 0$.

Por tanto, S_2 es subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$.

Para hallar las ecuaciones y una base de S_2:

$$S_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \; / \; x + t = 0 \right\}.$$

La ecuación cartesiana de S_2 es, por tanto: $x+t = 0$.

Por otro lado, S_2 puede expresarse también como el conjunto:

$$S_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \; / \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; / \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

De lo cual se deduce que una base de S_2 es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

■

2.2 En un problema físico es necesario descomponer una matriz cuadrada como suma de una matriz simétrica y otra matriz antisimétrica ¿Tiene solución este problema? ¿Es única? Demuéstralo.

Si se modifican las condiciones iniciales del problema, se llega a que la descomposición ha de ser como suma de una matriz triangular superior y otra triangular inferior. Ahora, ¿tiene solución el problema? ¿Es única? Justifícalo.

(Febrero 2001)

Resolución:

Todo vector **z** de un espacio vectorial E puede descomponerse como suma de un vector **x** y otro vector **y** ($\mathbf{x} \in F$, $\mathbf{y} \in G$, con F y G subespacios vectoriales de E), cuando E = F+G.

Dicha descomposición es única si además $F \cap G = \{\mathbf{o}\}$, en cuyo caso los subespacios F y G se dicen suplementarios y la suma se llama directa, escribiéndose: $E = F \oplus G$.

a) El primer problema planteado tiene solución única:

Sea E el conjunto de matrices cuadradas de orden *n*. F y G los subespacios de matrices simétricas y antisimétricas respectivamente.

Veamos primero que $F \cap G = \{ (0) \}$:

La matriz $A \in F \cap G \Leftrightarrow A = A^t$ y $A^t = -A \Leftrightarrow A = -A \Leftrightarrow A = (0)$.

Para demostrar finalmente que E = F+G, utilizaremos la relación entre las dimensiones: *dim*(F+G) = *dim*(F) + *dim*(G) - *dim*($F \cap G$)

$dim(E) = n^2$, $dim(F) = \dfrac{n^2+n}{2}$, $dim(G) = \dfrac{n^2-n}{2}$.

$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = \dfrac{n^2+n}{2} + \dfrac{n^2-n}{2} - 0 = n^2$.

Luego F+G = E.

Quedando probado que E = $F \oplus G$, es decir, que toda matriz de E puede expresarse de manera única como suma de una matriz simétrica (ó de F) y otra matriz antisimétrica (ó de G).

b) El segundo problema planteado tiene solución, pero no es única:

Sean ahora F y G los subespacios vectoriales de matrices cuadradas de orden n triangulares superiores y triangulares inferiores respectivamente.

El subespacio $F \cap G$ es el conjunto de matrices diagonales. Es decir, los subespacios vectoriales F y G no son disjuntos: $F \cap G \neq \{ (0) \}$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que:

$dim(F) = \dfrac{n^2+n}{2}$, $dim(G) = \dfrac{n^2+n}{2}$ y $dim(F \cap G) = n$,

$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = \dfrac{n^2+n}{2} + \dfrac{n^2+n}{2} - n = n^2$.

Es decir, se cumple que: F+G = E.

Todo ello supone que cualquier matriz cuadrada de orden n puede descomponerse de infinitas formas como suma de una matriz triangular superior y otra matriz triangular inferior.

■

2.3 Sea C[a,b] = $\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ continua} \}$, y sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ m puntos del intervalo [a,b]. Se considera la aplicación $\|\cdot\| : C[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $\|f\| = \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, \cdots, |f(x_m)|\}$. ¿Es norma dicha aplicación? Estudiar qué propiedades fallan.

(Febrero 2001)

<u>*Resolución:*</u>

a) $\|f\| = \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, \cdots, |f(x_m)|\} \geq 0$. Se cumple evidentemente, puesto que el valor absoluto es siempre no negativo.

b) $\|f\| = \max\left\{|f(x_1)|,\ |f(x_2)|,\ \cdots,\ |f(x_m)|\right\} = 0 \ \Leftrightarrow\ f \equiv 0$

La implicación hacia la izquierda es cierta, pues si f es la función nula, o sea toma valor 0 en todos los puntos del intervalo [a,b] , en particular también sobre los m puntos fijados y el máximo sería 0.

Sin embargo la propiedad falla al no cumplirse la implicación hacia la derecha, pues cualquier función f continua y no nula que se corte con el eje de abscisas en los m puntos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \cdots$, $\mathbf{x}_m$, tendría asignado $\|f\| = \max\left\{|f(x_1)|,\ |f(x_2)|,\ \cdots,\ |f(x_m)|\right\} = 0$.

c) $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f \in$ C[a,b]

Se cumple, puesto que

$$\|\lambda \mathrm{f}\| = \max\left\{|\lambda \cdot \mathrm{f}(\mathrm{x}_1)|, |\lambda \cdot \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)|, \cdots, |\lambda \cdot \mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|\right\} =$$

$$= \max\left\{|\lambda| \cdot |\mathrm{f}(\mathrm{x}_1)|, |\lambda| \cdot |\mathrm{f}(\mathrm{x}_2)|, \cdots, |\lambda| \cdot |\mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|\right\} =$$

$$= |\lambda| \cdot \max\left\{|\mathrm{f}(\mathrm{x}_1)|, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_2)|, \cdots, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|\right\} = |\lambda| \cdot \|\mathrm{f}\|$$

d) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$, $\forall f, g \in$ C[a,b]

$$\|\mathrm{f}+\mathrm{g}\| = \max\left\{|\mathrm{f}(\mathrm{x}_1)+\mathrm{g}(\mathrm{x}_1)|, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_2)+\mathrm{g}(\mathrm{x}_2)|, \cdots, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{m})+\mathrm{g}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{|\mathrm{f}(\mathrm{x}_1)|+|\mathrm{g}(\mathrm{x}_1)|, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_2)|+|\mathrm{g}(\mathrm{x}_2)|, \cdots, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|+|\mathrm{g}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{|\mathrm{f}(\mathrm{x}_1)|, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_2)|, \cdots, |\mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|\right\} + \max\left\{|\mathrm{g}(\mathrm{x}_1)|, |\mathrm{g}(\mathrm{x}_2)|, \cdots, |\mathrm{g}(\mathrm{x}_\mathrm{m})|\right\} =$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

Se cumple también.

En conclusión, la aplicación **no** es norma por no cumplirse el axioma b).

■

2.4 Dada la matriz $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

a) dado que toda matriz es solución de su ecuación característica, hallar $\mathrm{P}_3(\mathrm{A})$ que será igual a la matriz nula (0).

Nota: Téngase en cuenta que

$$\mathrm{P}_A(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \mathrm{traza(A)} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot |\mathrm{A}|\right] = 0$$

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{A}) = (-1)^n \left[\mathrm{A}^n - \mathrm{traza(A)} \cdot \mathrm{A}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot |\mathrm{A}|\right] = (0)$$

b) Determinar, por operaciones elementales, la inversa de la matriz A.

c) Verificar el resultado anterior utilizando el primer apartado.

d) Resolver, utilizando el cálculo matricial, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

(Septiembre 2001)

Resolución:

a) $P_3(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 8 \cdot \lambda + 5 \cdot \lambda^2 - \lambda^3$

Se cumple, por tanto, que $P_3(A) = 4 \cdot I - 8 \cdot A + 5 \cdot A^2 - A^3 = (0)$.

Se observa que, el término independiente de $P_3(\lambda)$ vale 4, es el valor del determinante de A, es decir, la matriz A posee inversa.

b) Para obtener A^{-1} mediante transformaciones elementales de filas se coloca la matriz unidad a la izquierda y la matriz A a la derecha, se realizan transformaciones elementales de filas adecuadas hasta obtener la matriz unidad en la parte derecha:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \langle F_2 + F_1 \rangle \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \langle F_3 \leftrightarrow F_2 \rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \left\langle \begin{matrix} F_1 - 2F_2 \\ F_3 - 5F_2 \end{matrix} \right\rangle \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \left\langle \frac{F_3}{-4} \right\rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left\langle \begin{matrix} F_1 + 2F_3 \\ F_2 - F_3 \end{matrix} \right\rangle \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces: La matriz situada en la parte izquierda es la matriz inversa de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Según el apartado a), se cumple que:

$$4\cdot I - 8\cdot A + 5\cdot A^2 - A^3 = (0) \iff 4\cdot I = 8\cdot A - 5\cdot A^2 + A^3 \iff$$

$\iff 4\cdot I = A\cdot(8\cdot I - 5\cdot A + A^2) \iff 4\cdot A^{-1} = 8\cdot I - 5\cdot A + A^2$, al premultiplicar por A^{-1} los dos miembros de la ecuación matricial.

Por tanto,

$$4\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -5 & 15 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, finalmente $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

e) Escribiendo el sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + 3y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$ en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

2.5 Sea el vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$, referido a la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

a) Considérese el subespacio U de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Determinar la dimensión y una base del subespacio U.

b) Estudiar si los vectores $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenecen al subespacio U anterior y calcular la dependencia si es posible.

c) Considérese el subespacio V, que admite como sistema generador:

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$. Determinar sus ecuaciones cartesianas.

d) Hallar la dimensión, base y ecuaciones del subespacio vectorial $U \cap V$.

e) Analizar si el espacio $\mathbb{R}^4$ es suma directa de los subespacios U y V.

f) Se efectúa un cambio de base de B a $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$, cuyos vectores están relacionados por las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 + \mathbf{e}'_4 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}'_1 \end{cases}$$

Determinar en la base B, el vector de coordenadas $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base B′.

(Septiembre 2001)

Resolución:

a) La dimensión de U es:

dim (U) = *dim* ($\mathbb{R}^4$) – *nº de ecuaciones* (U) = 4 – 2 = 2.

Resolviendo el sistema de ecuaciones que define el subespacio U:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{se obtiene:} \quad \begin{cases} x_4 = x_1 \\ x_3 = 2x_2 - x_1 \end{cases},$$

por tanto:

$$U=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ 2x_2-x_1\\ x_1\end{pmatrix} / x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} / x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

De donde se obtiene una base de U: $B_U=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$.

b) El vector $\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in U$, puesto que verifica sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\\ x_1 - x_4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2+1 = 0\\ 1-1 = 0\end{cases}$$

Análogamente sucede con los vectores:

$$\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} : \begin{cases}1-1=0\\1-1=0\end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\3\end{pmatrix} : \begin{cases}3-2-1=0\\3-3=0\end{cases}$$

Por tanto, los tres vectores pertenecen al subespacio U.

Como $\mathit{rango}\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\1&-1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}=2$. Significa que los vectores son linealmente dependientes. Solamente dos de ellos serían linealmente independientes.

Para obtener la relación de dependencia:

$$\alpha\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_2+\gamma\mathbf{u}_3=\mathbf{o} \Leftrightarrow \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\1&-1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Realizando las transformaciones elementales adecuadas sobre la matriz de coeficientes: $\langle F_2 - F_1,\, F_3 - F_1,\, F_4 - F_1 \rangle$ se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma & = 0 \\ \alpha + 2\beta & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = -\gamma \\ \beta & = -2\gamma \end{cases}$$

Es decir, se cumple que:

$$-\gamma\mathbf{u}_1 - 2\gamma\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3 = \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad -\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{o}$$

c) Para hallar una base de V estudiamos si los vectores del sistema generador $\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ son linealmente independientes o no.

Como $rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$. Los tres vectores son linealmente independientes, luego forman una base de V y, por tanto, la dimensión de V es igual a 3.

Para obtener las ecuaciones de V imponemos que un vector genérico de V, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, debe de ser linealmente dependiente de los vectores de la base, es decir, debe ocurrir que: $rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 & x_4 \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 & x_4 \end{vmatrix} = 0$

$$\langle F_4 - F_1 \rangle \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 & x_4 - x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_4 - x_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.$ Ecuación cartesiana de V.

d) El sistema de ecuaciones cartesianas del subespacio $U \bigcap V$ está formado por las ecuaciones de U y las ecuaciones de V:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 \quad\quad - x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 .$$

$$U \bigcap V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} / \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$. Por tanto $B_{U \cap V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $U \bigcap V$ y la dimensión de $U \bigcap V$ es igual a 1.

e) El espacio vectorial total $\mathbb{R}^4$ **no** es suma directa de U y V, pues una de las condiciones es que la intersección de ambos subespacios sea el vector nulo y en este caso no se cumple.

f) Llamando P a la matriz de paso de la base B a la nueva base B´, la matriz de paso de B´ a B será P^{-1}. La relación entre las coordenadas de los vectores en dichas bases está expresada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$. En este caso como:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$, se cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 & = 2 \\ x_1 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Es decir, las coordenadas del vector dado en la base B son: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

■

2.6 a) Estudiar si el siguiente conjunto de $E_{2x2}(\mathbb{R})$, espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos y elementos reales, es subespacio vectorial:

$$V = \left\{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / A \cdot B = B \cdot A, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Estudiar si S es o no subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ b = 1 \right\}.$$

En caso afirmativo hallar dimensión, base y ecuaciones.

(Febrero 2002)

<u>*Resolución:*</u>

Para que un subconjunto U de un espacio vectorial E sea subespacio vectorial se debe cumplir:

i) El vector nulo $\mathbf{o} \in$ U

ii) $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in U$

iii) $\forall\, \mathbf{x} \in U,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} \in U$

a) El subconjunto V de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ cumple:

i) La matriz nula: (0) $\in$ V, puesto que $(0) \cdot B = B \cdot (0) = (0)$.

ii) $\forall$ C, D $\in$ V $\Rightarrow$ C+D$\in$ V.

Si $C \cdot B = B \cdot C$ y $D \cdot B = B \cdot D$, entonces:

$(C + D) \cdot B = C \cdot B + D \cdot B = B \cdot C + B \cdot D = B \cdot (C + D)$

iii) $\forall$ C $\in$ V, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot C \in$ V.

Si $C \cdot B = B \cdot C$, entonces: $(\alpha \cdot C) \cdot B = \alpha \cdot (C \cdot B) = \alpha \cdot (B \cdot C) = B \cdot (\alpha \cdot C)$,

por las propiedades de matrices.

Por tanto, V es subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$.

Para hallar las ecuaciones, una base y la dimensión de V:

Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in V$, se cumple que:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x = 2x + z \Rightarrow z = 0 \\ x + 2y = 2y + t \Rightarrow x = t \\ 2z = 2z \\ z + 2t = 2t \Rightarrow z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = 0 \end{cases}$, es el sistema de ecuaciones de V.

Por tanto:

$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / \ x = t, z = 0 \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / \ x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / \ x, y \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \text{Una base de V es:}$$

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y la dimensión de V es 2.}$$

b) El conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \ b = 1 \right\}$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, dado que no cumple ninguna de las tres condiciones:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \ b = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \ a \in \mathbb{R} \right\}$$

i) El vector nulo $\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin S$, pues no es de la forma $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

ii) No es estable con respecto a la suma:

$$\forall\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \in S \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a+c \\ 2 \end{pmatrix} \notin S$$

iii) No es estable para el producto escalar:

$\forall\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \in U,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \\ \alpha \end{pmatrix} \notin S$ en general (salvo para $\alpha = 1$).

■

2.7 Sea V = Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y S el subespacio vectorial de las matrices simétricas reales de orden dos. Obtener las ecuaciones cartesianas del subespacio interseción $V \cap S$.

(Septiembre 2002)

Resolución:

V = Span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Para obtener las ecuaciones cartesianas debe ocurrir que:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 3 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 2, \ \forall A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V.$$

Los siguientes determinantes de orden tres han de ser nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff x_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 3 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 - x_4 = 0$$

Obteniéndose las ecuaciones de V: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

Por otro lado:

S = $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_2 = x_3 \right\}$. La ecuación de S es: $x_2 = x_3$

Por tanto, las ecuaciones de $V \cap S$ son :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

■

2.8 Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$,

a) Siendo U el subespacio generado por los vectores **u** = $(0\ 1\ 1)^t$, **v** = $(4\ 1\ -1)^t$ y **w** = $(2\ 1\ 0)^t$, encontrar una base de U.

b) ¿Cuál es la condición para que un vector **x** = $(x_1\ x_2\ x_3)^t$ de $\mathbb{R}^3$ pertenezca al subespacio U?

c) Siendo V el subespacio dado por:
V = $\left\{ (\lambda + 3\mu - \theta \ \ \mu - \theta \ \ \lambda + 2\mu)^t \ / \ \lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R} \right\}$, encontrar una base de V.

d) Obtener una base del subespacio $G = U \cap V$.

e) Obtener una base del subespacio $H = U+V$.

(Febrero 2003)

Resolución:

a) Estudiamos el rango de la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores. Su determinante es:

$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = 0, luego el rango de la matriz es dos y los tres vectores son linealmente dependientes.

Por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, luego una base de U es $B_U = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$.

b) El vector $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^t$ pertenece a U si y sólo si es combinación lineal de los vectores de la base de U, es decir:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$

c) $V = \left\{ (\lambda + 3\mu - \theta\ \ \mu - \theta\ \ \lambda + 2\mu)^t \ /\ \lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\{ \lambda (1\ 0\ 1)^t + \mu (3\ 1\ 2)^t + \theta(\text{-}1\ \text{-}1\ 0)^t \ /\ \lambda, \mu, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = 0, indica que los vectores que generan el subespacio V son linealmente dependientes. El menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, indica que el primer y tercer vector son linealmente independientes, es decir, una base de V es: $B_V = \left\{ (1\ 0\ 1)^t,\ (1\ 1\ 0)^t \right\}$.

d) El sistema de ecuaciones de $U \cap V$ está formado por las ecuaciones de U y las ecuaciones de V.

Ecuaciones del subespacio V: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Ecuaciones de $U \cap V$: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - \ x_2 - \ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$

$U \cap V = \left\{ (4x_3 \;\; 3x_3 \;\; x_3)^t \; / \; x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 (4 \;\; 3 \;\; 1)^t \; / \; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Base de $U \cap V$: $B_{U \cap V} = \left\{ (4 \;\; 3 \;\; 1)^t \right\}$.

e) La dimensión de U+V:

$dim\,(U+V) = dim\,(U) + dim\,(V) - dim\,(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3 \;\; \Leftrightarrow \;\; U+V \equiv \mathbb{R}^3$

Una base de U+V es, por ejemplo, la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$B_{U+V} = \left\{ (1 \;\; 0 \;\; 0)^t, (0 \;\; 1 \;\; 0)^t, (0 \;\; 0 \;\; 1)^t \right\}$.

■

2.9 Comprobar que P_3, espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que tres, no está generado por el conjunto $\left\{1+t, \; t^2+t^3\right\}$.

(Septiembre 2003)

Resolución:

El espacio vectorial P_3 tiene dimensión 4, por ello todas las bases han de estar formadas por cuatro vectores, por ejemplo, la base canónica: $\left\{ 1, \; t, \; t^2, \; t^3 \right\}$.

Todo sistema generador ha de tener al menos cuatro vectores. Por tanto el conjunto $\left\{1+t, \; t^2+t^3\right\}$ **no** puede generar el espacio total P_3. El conjunto $\left\{1+t, \; t^2+t^3\right\}$ genera un subespacio vectorial S de P_3 de dimensión dos, ya que los dos vectores del conjunto son linealmente independientes:

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in S \Leftrightarrow p(t) = \alpha(1+t) + \beta(t^2+t^3) \;\; \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\; a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = \alpha + \alpha\, t + \beta\, t^2 + \beta\, t^3 \;\; \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \;\; \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 = \alpha \\ a_2 = \beta \\ a_3 = \beta \end{cases} \text{, son las ecuaciones paramétricas de S} \;\; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\; \begin{cases} a_0 = a_1 \\ a_2 = a_3 \end{cases} \text{, ecuaciones cartesianas o implícitas del subespacio S.}$$

La dimensión del subespacio S es dos: Las ecuaciones paramétricas tienen dos parámetros libres o *dim*(S) = *dim*(P_3) - nº ecuaciones cartesianas = 4 – 2 = 2. El conjunto $\left\{1+t, \; t^2+t^3\right\}$ constituye una base de S.

■

2.10 Dado el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden tres, donde los elementos son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se definen los subespacios:

S_1: Matrices simétricas

S_2: Matrices antisimétricas

S_3: Matrices triangulares superiores

S_4: Matrices triangulares inferiores.

a) Calcular la base, dimensión y ecuaciones cartesianas de los subespacios:

$S_1 \cap S_3$, $S_1 + S_3$, $S_2 \cap S_4$, $S_2 + S_4$.

b) ¿Es $S_1 + S_3$ suma directa? ¿Y $S_2 + S_4$?

(Septiembre 2003)

Resolución:

Las ecuaciones de S_1 son: $\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \end{cases}$,

y su dimensión: $dim\,(S_1) = dim\,(E_{3x3}(\mathbb{R})) - n^o\ de\ ecuaciones\,(S_1) = 9 - 3 = 6.$

Ecuaciones de S_2: $\begin{cases} a_{12} = -a_{21} \\ a_{13} = -a_{31} \\ a_{23} = -a_{32} \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \end{cases}$,

$dim\,(S_2) = dim\,(E_{3x3}(\mathbb{R})) - n^o\ de\ ecuaciones\,(S_2) = 9 - 6 = 3.$

Ecuaciones de S_3: $\begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \\ a_{32} = 0 \end{cases}$,

$dim\,(S_3) = dim\,(E_{3x3}(\mathbb{R})) - n^o\ de\ ecuaciones\,(S_3) = 9 - 3 = 6.$

Ecuaciones de S_4: $\begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \end{cases}$,

$dim\ (S_4) = dim\ (E_{3x3}(\mathbb{R})) - n^o\ de\ ecuaciones\ (S_4) = 9 - 3 = 6.$

a) Por tanto las ecuaciones del subespacio $S_1 \cap S_3$ son:

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \\ a_{21} = 0 \\ a_{32} = 0 \\ a_{32} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{21} = 0 \\ a_{32} = 0 \\ a_{32} = 0 \end{cases}$$

y $dim\ (S_1 \cap S_3) = dim\ (E_{3x3}(\mathbb{R})) - n^o\ de\ ecuaciones\ (S_2) = 9 - 6 = 3.$

$$S_1 \cap S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \ / \ a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base de $S_1 \cap S_3$ es, por tanto:

$$B_{S_1 \cap S_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Subespacio $S_1 + S_3$:

$dim\ (S_1 + S_3) = dim\ (S_1) + dim\ (S_3) - dim\ (S_1 \cap S_3) = 6+6-3 = 9$

Por tanto, $S_1 + S_3 \equiv E_{3x3}(\mathbb{R})$. Cualquier base de $E_{3x3}(\mathbb{R})$ es una base de $S_1 + S_3$, por ejemplo la base canónica. No tiene ecuaciones cartesianas.

Subespacio $S_2 \cap S_4$:

Ecuaciones cartesianas: $\begin{cases} a_{12} = -a_{21} \\ a_{13} = -a_{31} \\ a_{23} = -a_{32} \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0 \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_2 \cap S_4 = \{(0)\}$, $dim(S_2 \cap S_4) = 0$. No tiene ninguna base.

Subespacio S_2+S_4 :

$dim(S_2+S_4) = dim(S_2) + dim(S_4) - dim(S_2 \cap S_4) = 6+6-3 = 9$

Por tanto, $S_2+S_4 \equiv E_{3x3}(\mathbb{R})$. Cualquier base de $E_{3x3}(\mathbb{R})$ es una base de S_2+S_4 , por ejemplo la base canónica. No tiene ecuaciones cartesianas.

b) Según se ha probado en el apartado a): $S_1+S_3 \equiv E_{3x3}(\mathbb{R})$ y $S_2+S_4 \equiv E_{3x3}(\mathbb{R})$.
Sin embargo:

El subespacio S_1+S_3 **no** es suma directa de S_1 y S_3, ya que S_1, S_3 no son subespacios disjuntos: $S_1 \cap S_3 \neq \{(0)\}$.

El subespacio S_2+S_4 **sí** es suma directa de S_2 y S_4, ya que S_2, S_4 son subespacios disjuntos, puesto que el subespacio intersección se reduce a la matriz nula: $S_2 \cap S_4 = \{(0)\}$.

■

2.11 Sean los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y=0,\ y+z=0 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x-y+z=0,\ x-z=0 \right\}$$

Elige la opción correcta y razona la respuesta:

a) $E_1+E_2 = \mathbb{R}^3$, pero la suma no es directa.

b) $E_1+E_2 = \mathbb{R}^3$ y la suma es directa.

c) $E_1+E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=z \right\}$ y la suma es directa.

d) $E_1+E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=z \right\}$, pero la suma no es directa.

e) Ninguna de las anteriores.

(Febrero 2004)

Resolución:

Se calcula una base y la dimensión del subespacio E_1:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=z \end{cases}$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de E_1 : $B_{E_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathit{dim}(E_1) = 1$.

Se calcula una base y la dimensión del subespacio E_2 :

$$\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x \quad\ -z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=3z \end{cases}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de E_2 : $B_{E_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathit{dim}(E_2) = 1$.

Subespacio intersección $E_1 \cap E_2$:

$$\begin{cases} x+y \quad\ =0 \\ \quad y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x \quad\ -z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$E_1 \cap E_2 = \{\mathbf{o}\}$ $\Leftrightarrow$ Los subespacios E_1 y E_2 son disjuntos $\Leftrightarrow$ La suma E_1+E_2 es directa.

Subespacio E_1+E_2 :

$E_1+E_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Como los dos vectores con linealmente independientes forman base de E_1+E_2 .

Ecuaciones de E_1+E_2 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 3 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \iff x = z.$

Por tanto, la respuesta correcta es la **c)**.

■

2.12 Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } T = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -6 \end{pmatrix} \right\}, \text{ calcular:}$$

a) Los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ para los que S = T.

b) El valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in S$.

(Febrero 2004)

Resolución:

a) $S = T \iff$ Todo vector de S pertenece a T y viceversa.

Esto equivale a que ambos subespacios tienen la misma dimensión y que los dos vectores del sistema generador de T son combinación lineal de los vectores de S.

dim (S) = 2 = *dim* (T), puesto que los vectores de ambos sistemas generadores son linealmente independientes.

Imponiendo la condición de que los vectores del sistema generador o base de T pertenezcan a S:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ a & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -4a + 28 = 0 \iff a = 7$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & b \\ 7 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \iff -6b - 72 = 0 \iff b = -12.$$

b) El vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in S \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores de la base de S $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ a & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; -12a + 84 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 7.$

■

2.13 Estudiar si los subconjuntos siguientes son subespacios vectoriales de $E_{2x2}(\mathbb{R})$, indicando en caso de que no lo sean por qué.

a) $U = \left\{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\; A^{-1} = A^{t} \right\}$

b) $V = \left\{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\; traza(A) = 0 \right\}$

c) $W = \left\{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\; det(A) = 0 \right\}$

(Septiembre 2004)

Resolución:

Las condiciones necesarias y suficientes para que U sea subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ son:

i) La matriz nula: $(0) \in U$

ii) $\forall\, A, B \in U \Rightarrow A+B \in U$

iii) $\forall\, A \in U,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot A \in U$

a) La condición $A^{-1} = A^{t}$ es equivalente a $A \cdot A^{t} = I$ (A es matriz ortogonal).

Comprobando cada una de las condiciones, se observa que:

i) La matriz nula: $(0) \notin U$, pues $(0) \cdot (0)^{t} = (0) \neq I$

ii) $\forall\, A, B \in U \Rightarrow A+B \in U$

El hecho de que se cumpla que $A \cdot A^{t} = I$ y $B \cdot B^{t} = I$, no implica que $(A+B) \cdot (A+B)^{t} = I$, pues

$$(A+B) \cdot (A+B)^{t} = (A+B) \cdot (A^{t} + B^{t}) = A \cdot A^{t} + A \cdot B^{t} + B \cdot A^{t} + B \cdot B^{t} =$$

$$= I + A \cdot B^{t} + B \cdot A^{t} + I \neq I.$$

iii) $\forall$ A$\in$U, $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \alpha\cdot$A$\in$U

Si A$\in$U $\Rightarrow$ A $\cdot$ A^t = I, sin embargo: $(\alpha\text{A})\cdot(\alpha\text{A})^t = \alpha^2\,(\text{A}\cdot\text{A})^t = \alpha^2\,\text{I}\neq\text{I}$, en general.

Se concluye que U no es subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$, fallando todas las condiciones.

b) Para que V sea subespacio vectorial se ha de cumplir que:

i) La matriz nula: (0) $\in$V, lo cual es cierto pues *traza*(0) = 0.

ii) $\forall$ A, B $\in$V $\Rightarrow$ A+B$\in$V.

Se cumple, pues *traza*(A+B) = *traza*(A)+ *traza*(B). Luego si *traza*(A) = 0 y *traza*(B) =0, la *traza*(A+B) = 0.

iii) $\forall$ A$\in$V, $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \alpha\cdot$A$\in$V.

También se cumple, pues *traza*($\alpha\cdot$A) = $\alpha\cdot$ *traza*(A).

Luego si *traza*(A) = 0, también *traza*($\alpha\cdot$A) = 0.

Por tanto, V es subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$.

c) Finalmente, para el subespacio W:

i) La matriz nula: (0) $\notin$W, puesto que *det*(0) = 0

Por tanto, W no tiene estructura de subespacio vectorial.

Comprobando las otras dos condiciones:

ii) Las matrices A = $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\in$W (puesto que *det*(A) = *det*(B)=0),

sin embargo, A+B = $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\notin$W, pues *det*(A+B) = 1. Tampoco se cumple.

iii) $\forall$ A$\in$W, $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \alpha\cdot$A$\in$W.

Sí que se cumple, pues si *det*(A) =0, entonces *det*($\alpha\cdot$A) = α^2 *det*(A)=0

■

2.14 Sea S = $\left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} ax - y + az \\ x \quad + 3z \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix} \;/\; a, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

a) Hallar la dimensión de S en función de a.

b) Calcular los valores de a para los cuales el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$.

(Septiembre 2004)

Resolución:

a) El subespacio S puede expresarse como:

$$\left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} ax - y + az \\ x \quad + 3z \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix} / \; a, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \mathbf{v} = x \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} / \; a, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Luego el conjunto de vectores $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema generador de S.

Para ver si dicho sistema es libre:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2a = 0 \iff a = -2.$$

Por tanto:

$\forall a \neq -2$, $\;dim(S) = 3 \iff S \equiv \mathbb{R}^3$.

Si $a = -2$, $\;dim(S) = 2$. Una base de S es, por ejemplo, $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) De acuerdo con lo estudiado en el apartado anterior:

$\forall a \neq -2$, $\;S \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S$.

Si $a = -2$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S \iff \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff -3 -2 + 2 + 3 = 0$.

Luego: $\mathbf{v} \in S$, $\;\forall a \in \mathbb{R}$.

Otra forma de resolver este apartado, directamente:

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}$ es combinación lineal de los vectores del sistema generador de S: $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a\alpha - \beta + a\gamma = -3 \\ \alpha \quad + 3\gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 3 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema lineal es:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 2a = 0 \quad \Leftrightarrow a = -2.$$

$\forall a \neq -2$, el rango de la matriz de coeficientes es h = 3, luego coincide con el rango de la matriz ampliada h´ y con el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y tiene solución única. Ello significa que el vector $\mathbf{v} \in S$ (y se puede expresar de manera única como combinación lineal de los vectores de S).

Si a = -2, el rango de la matriz de coeficientes es h = 2: $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

Estudiando el rango de la matriz ampliada: $\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h' = 2$

Entonces: h = h´ = 2 < nº incógnitas = 3 $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. En este caso el vector **v** admite infinitas formas como combinación lineal de los vectores del sistema generador (que no es base). En definitiva también $\mathbf{v} \in S$.

■

2.15 Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

El vector **x** tiene por coordenadas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ en la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

El vector **y** tiene por coordenadas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ en la base $B' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\}$.

Calcular las coordenadas del vector **x**+**y** en la base $B'' = \{\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$.

(Septiembre 2004)

Resolución:

$$C_B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2 + c\,\mathbf{e}_3 + d\,\mathbf{e}_4$$

$$C_{B'}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{y} = a\,\mathbf{e}_2 + b\,\mathbf{e}_3 + c\,\mathbf{e}_1 + d\,\mathbf{e}_4$$

Entonces:

$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (a+c)\,\mathbf{e}_1 + (a+b)\,\mathbf{e}_2 + (b+c)\,\mathbf{e}_3 + 2d\,\mathbf{e}_4$,

es decir, el vector coordenado de **x**+**y** en la base B´´ es:

$$C_{B''}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 2d \\ b+c \\ a+b \\ a+c \end{pmatrix}$$

■

2.16 Sean $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ y $F = \{A \in E_{2x3}(\mathbb{R}) / M \cdot A = (0)\}$

a) ¿Es F subespacio vectorial de $E_{2x3}(\mathbb{R})$?

b) Calcular la dimensión y hallar una base de F.

c) Hallar unas ecuaciones implícitas de F respecto de la base canónica B de $E_{2x3}(\mathbb{R})$ y obtener unas ecuaciones paramétricas de F respecto de la base B.

(Febrero 2005)

Resolución:

a) El subconjunto F de $E_{2x3}(\mathbb{R})$ cumple:

i) La matriz nula: (0) $\in$ F, puesto que $M \cdot (0) = (0)$.

ii) $\forall$ A,B$\in$F $\Rightarrow$ A+B$\in$F.

Se cumple, pues si $M \cdot A = (0)$ y $M \cdot B = (0)$, entonces

$M \cdot (A + B) = M \cdot A + M \cdot B = (0)$

iii) $\forall$ A$\in$F, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot A \in F$.

También se cumple, pues si $M \cdot A = (0)$, entonces

$M \cdot (\alpha \cdot A) = \alpha \cdot (M \cdot A) = (0)$

Por tanto, F es subespacio vectorial de $E_{2x3}(\mathbb{R})$.

b) $$M \cdot A = (0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2d = 0 \\ b + 2e = 0 \\ c + 2f = 0 \\ 3a + 6d = 0 \\ 3b + 6e = 0 \\ 3c + 6f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2d = 0 \\ b + 2e = 0 \\ c + 2f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2d \\ b = -2e \\ c = -2f \end{cases}$$

Por tanto, la dimensión del subespacio es:

dim(F) = *dim*($E_{2x3}(\mathbb{R})$) – nº de ecuaciones independientes = 6 – 3 = 3.

El subespacio F es el conjunto:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} -2d & -2e & -2f \\ d & e & f \end{pmatrix} / d, e, f \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ d\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base de F:

$$B_F = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) De acuerdo con el resultado obtenido en el apartado b), las ecfuaciones implícitas o cartesianas de F son:

$$\begin{cases} a + 2d = 0 \\ b + 2e = 0 \\ c + 2f = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas se obtienen resolviendo este sistema:

$$\begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = -2\gamma \\ d = \alpha \\ e = \beta \\ f = \gamma \end{cases} \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

■

2.17 Para cada número real α se considera el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$:

$$H_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \alpha x - y + z = 0 \right\}.$$

Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $F = \text{Span}\{\mathbf{u}\}$. ¿Para qué valores de α se cumple la igualdad $\mathbb{R}^3 = H_\alpha \oplus F$?

(Febrero 2005)

Resolución:

Se obtiene una base de H_α:

$$H_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \alpha x - y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\alpha x + y \end{pmatrix} / \ x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \ x, y \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow B_{H_\alpha} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por otro lado, una base de F es: $B_F = \{\mathbf{u}\}$

Para que el espacio $\mathbb{R}^3$ sea suma directa de los subespacios H_α y F (o lo que es lo mismo, los subespacios H_α y F sean suplementarios):

$$\mathbb{R}^3 = H_\alpha \oplus F \Leftrightarrow \begin{cases} H_\alpha \cap F = \{\mathbf{o}\} \\ H_\alpha + F = \mathbb{R}^3 \end{cases} \Leftrightarrow B_{H_\alpha} \cup B_F = B_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \mathit{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Calculando el determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha - 1 = \alpha$, se concluye que:

$\mathbb{R}^3 = H_\alpha \oplus F \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

■

2.18 Sean a y b dos números reales y consideremos los subespacios H y L de $\mathbb{R}^4$ con ecuaciones implícitas

$$H \equiv \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad L \equiv \begin{cases} 2(a-1)x_1 + (1-a)x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Calcular las dimensiones de H y L.

b) ¿Existen valores de a y b para los que H = L?

c) ¿Qué han de cumplir a y b para que $H \neq L$ y $H + L \neq \mathbb{R}^4$?

(Septiembre 2005)

Resolución:

a) Tanto las ecuaciones de H como las de L son linealmente independientes. Por tanto:

dim(H) = *dim*(L) = *dim*($\mathbb{R}^4$) – nº de ecuaciones independientes = 4 - 2 = 2.

b) Se cumple la primera condición para que los subespacios H y L puedan coincidir, ya que ambos tienen la misma dimensión.

Calculando una base de H y de L:

$$H \equiv \begin{cases} x_4 = -bx_1 + bx_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ -bx_1 + bx_2 \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Base de H: $B_H = \left\{ \mathbf{h_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}, \ \mathbf{h_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right\}$.

$$L \equiv \begin{cases} x_3 = (a-1)x_1 + \frac{1}{2}(1-a)x_2 \\ x_4 = -bx_1 + \frac{1}{2}(a+b)x_2 \end{cases}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ (a-1)x_1 + \frac{1}{2}(1-a)x_2 \\ -bx_1 + \frac{1}{2}(a+b)x_2 \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-1 \\ -b \end{pmatrix} + \frac{1}{2} x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \\ a+b \end{pmatrix} \ / \ x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Base de L: $B_L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-1 \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \\ a+b \end{pmatrix} \right\}$.

Finalmente, para que H = L debe de ocurrir que los vectores de la base de L sean combinación lineal de los de la base de H, es decir, debe ocurrir que

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ -b & b & -b & b+1 \end{pmatrix} = rango(A) = 2$$

Resolviendo el determinante de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ -b & b & -b & b+1 \end{vmatrix} = (a\text{-}1)\,(a\text{-}b) = 0 \ \Leftrightarrow a = 1 \ \text{ó} \ b = a$$

Si $a \neq 1$ y $b \neq a$, el rango de la matriz es 4.

Si $a = 1$:

$$rango(\mathrm{A}) = rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & -b & b+1 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -b & b & b+1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -b & b & b+1 \end{vmatrix} = b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

Si $b = a$:

$$rango(\mathrm{A}) = rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & b-1 & 1-b \\ -b & b & -b & 2b \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix} = b$ - 1 , se concluye que:

Cuando $a = b \neq 1$, $rango(\mathrm{A}) = 3$

Cuando $a = b = 1$

$$rango(\mathrm{A}) = rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

En resumen, los únicos valores de a y b para los que H = L son $a = b = 1$.

c) El rango de la matriz A estudiado en el apartado anterior, cuyas columnas son los vectores de B_{H} y de B_{L}, nos proporciona la dimensión del espacio H + L. tenga rango 4. Esto sucede, según se ha estudiado en el apartado anterior, cuando $a = 1$ ó $b = 1$.

Según el apartado anterior $\mathrm{H} + \mathrm{L} = \mathbb{R}^4$ en los casos en que $a \neq 1$ y $b \neq a$, pues el rango de la matriz A es 4.

En los restantes casos, será $\mathrm{H}+\mathrm{L} \neq \mathbb{R}^4$ en los demás casos, es decir, cuando:

$a = 1$ ó $b = a$

Para que, por otro lado, $\mathrm{H} \neq \mathrm{L}$, se excluye el caso $a = b = 1$

Por tanto, $\mathrm{H}+\mathrm{L} \neq \mathbb{R}^4$ y $\mathrm{H} \neq \mathrm{L}$ se cumple cuando

$a = 1$ y $b \neq 1$, o bien, $b = a$ y $a \neq 1$, es decir,

$a = 1$ ó $b = a$ en todo caso en que $b \neq 1$.

Nota.- Si el problema sólo hubiera pedido los apartados a) y b), la forma más sencilla de resolver el apartado b), es decir, para que los subespacios H y L sean iguales sería exigir que los vectores de la base de H cumplan las ecuaciones de L:

$$\mathbf{h_1} \in \mathrm{L} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1)\cdot 1 + (1-a)\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \\ 2\cdot b\cdot 1 - (a+b)\cdot 0 - 2\cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{h_2} \in \mathrm{L} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1)\cdot 0 + (1-a)\cdot 1 - 2\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \\ 2\cdot b\cdot 0 - (a+b)\cdot 1 - 2\cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow b = a \end{cases}$$

Se obtiene el resultado que ya se conoce: $\mathrm{H} = \mathrm{L} \Leftrightarrow a = b = 1$.

■

2.19

a) Sea E un espacio vectorial real de dimensión 3. Sea B = $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base usual de E y sean $\mathrm{B}_1 = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ y $\mathrm{B}_2 = \{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3\}$ dos bases de E. Sean P_1 la matriz de paso de la base B a la base B_1 y P_2 la matriz de paso de B a B_2. Deducir cual es P_3, matriz de paso de P_1 a P_2.

b) Probar que $\mathrm{B}_1 = \{2, 3\mathrm{x}, \mathrm{x} + \mathrm{x}^2\}$ y $\mathrm{B}_2 = \{1, 1 + \mathrm{x}, \mathrm{x}^2 - \mathrm{x}\}$ son bases del espacio $\mathrm{P}_2(\mathrm{x})$. Obtener la matriz de paso de la base B_1 a la base B_2. Hallar las coordenadas del polinomio $\mathrm{p(x)} = 4 + 7\mathrm{x} + \mathrm{x}^2$ respecto de ambas bases.

(Septiembre 2005)

Resolución:

a) Si los vectores coordenados de un vector genérico **x** de E en las bases B, B_1, B_2 son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}.$$

Es sabido que las relaciones entre ellos son:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{P}_1 \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{P}_2 \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}, \text{ por tanto:}$$

$$\mathrm{P}_1 \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathrm{P}_2 \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix},$$

premultiplicando por $(P_1)^{-1}$ (las matrices de paso son regulares) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (P_1)^{-1} \cdot P_2 \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = P_3 \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix},$$

de aquí finalmente se deduce, teniendo en cuenta que las coordenadas de un vector en cualquier base son únicas, que

$$P_3 = (P_1)^{-1} \cdot P_2 .$$

b) $B_1 = \{2, 3x, x + x^2\}$ y $B_2 = \{1, 1 + x, x^2 - x\}$ son bases del espacio $P_2(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Los tres polinomios o vectores que componen cada uno de los conjuntos son linealmente independientes $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Las matrices $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tienen rango 3, lo cual se cumple, como fácilmente puede comprobarse (las matrices son triangulares superiores, por lo que su determinante es el producto de elementos de la diagonal principal distinto de cero en ambos casos).

La matriz de paso de la base B_1 a la base B_2, según se ha demostrado en el apartado a), se obtiene como: $P_3 = (P_1)^{-1} \cdot P_2$

Se calcula $(P_1)^{-1} = \frac{1}{|P_1|} \cdot (P_1)^a = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, luego

$$P_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

El vector coordenado del polinomio $p(x) = 4 + 7x + x^2$ respecto a la base canónica o usual de $P_2(x)$, $B = \{1, x, x^2\}$, es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto el vector coordenado de p(x) referido a la base B_1 se obtiene como:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (P_1)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, el vector coordenado de p(x) referido a la base B_2, $\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}$, se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x''_1 + x''_2 = 4 \\ x''_2 - x''_3 = 7 \\ x''_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

2.20 a) Definición de suma de dos subespacios vectoriales.

b) Si dos subespacios vectoriales son disjuntos, ¿cómo se llama la suma de dichos subespacios vectoriales?

c) ¿De cuántas formas se puede descomponer un vector del espacio suma, como suma de un vector de cada subespacio? Demuestra lo que ocurre en el caso de suma directa.

d) Demostrar si la suma de los subespacios vectoriales de las matrices simétricas y de las matrices antisimétricas es suma directa o no. Lo mismo para los subespacios vectoriales de las matrices triangulares superiores e inferiores.

(Febrero 2002)

Resolución:

a) Sea E espacio vectorial y U, V subespacios vectoriales de E. Se llama suma de U y V, U+V, a otro subespacio de E formado por la suma de todos los vectores de U con todos los vectores de V:

$U+V = \{\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \,/\, \mathbf{u} \in U \wedge \mathbf{v} \in V\}$

b) Si los dos subespacios anteriores U y V son disjuntos, es decir, su intersección es el vector nulo, la suma se denomina directa. Se representa por $U \oplus V$:

$U \oplus V = \{\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \,/\, \mathbf{u} \in U \wedge \mathbf{v} \in V\}$, siendo $U \cap V = \{\mathbf{o}\}$

c) Un vector perteneciente a la suma de dos subespacios se puede descomponer de infinitas formas si la suma no es directa y de una forma única si la suma es directa.

Demostración del último caso: Suponiendo que un vector **z** del subespacio $U \oplus V$ se puede descomponer de las dos siguientes formas:

$\mathbf{z} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \,/\, \mathbf{u}_1 \in U \wedge \mathbf{v}_1 \in V$

$\mathbf{z} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \,/\, \mathbf{u}_2 \in U \wedge \mathbf{v}_2 \in V$

restando, se obtendría:

$\mathbf{o} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \iff \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

Como $(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \in U \wedge (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \in V$ (por ser U y V subespacios vectoriales) y al tratarse del mismo vector, se concluye que

$\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in U \cap V$, que es el subespacio nulo, luego $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{o} \iff \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \end{cases}$, es decir, las dos descomposiciones del vector **z** son la misma. Es decir, todo vector **z** de $U \oplus V$ se descompone de manera única como suma de un vector de U y otro vector de V.

d) La suma de los subespacios de las matrices simétricas y antisimétricas del mismo orden, es suma directa, puesto que la intersección de ambos se reduce a la matriz nula:

Si A es una matriz de la intersección de U y V, tiene que ocurrir que:

$A^t = A$ (por ser simétrica) y $A^t = -A$ (por ser antisimétrica) $\Rightarrow$ $A = -A$, es decir, A es la matriz nula.

Sin embargo, la suma de los subespacios de las matrices triangulares superiores y de las matrices triangulares inferiores del mismo orden **no** es suma directa, puesto que el subespacio intersección de ambos es el conjunto de las matrices diagonales.

■

2.21 Sean F y G dos subespacios vectoriales de E, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Demostrar que el conjunto intersección $F \cap G$ es otro subespacio vectorial de E.

(Septiembre 2002)

2.22

a) Demostrar que las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ¿son A y B semejantes? Justificar la respuesta.

(Febrero 2003)

Resolución:

a) Sean A y B matrices cuadradas de orden n.

B es semejante a A $\Leftrightarrow$ $\exists$ P regular / $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$P_B(\lambda) = |B - \lambda \cdot I| = |P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda \cdot I| = |P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda \cdot P^{-1} \cdot I \cdot P| = |P^{-1} \cdot (A - \lambda \cdot I) \cdot P| = |P^{-1}|\,|A - \lambda \cdot I \cdot P|\,|P| = |A - \lambda \cdot I \cdot P| = P_A(\lambda)$,

teniendo en cuenta que $|P^{-1}| = 1/|P|$.

b) Las matrices A y B **no** son semejantes, pues no cumplen la condición necesaria demostrada en el apartado a), de tener el mismo polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)\,(2-\lambda)^2 \neq P_B(\lambda) = (3-\lambda)^2\,(1-\lambda).$$

■

2.23 Sean A y $B \in E_{3x3}(\mathbb{R})$, tales que *rango*(A) = 3 y *rango*(B) = 2. Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El sistema $(A \cdot B) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ tiene únicamente la solución $(0\ \ 0\ \ 0)^t$.

b) El sistema $A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ es un sistema compatible determinado.

c) Si $(1\ \ 2\ \ 0)^t$ es una solución del sistema $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces dicho sistema tiene infinitas soluciones.

(Septiembre 2003)

Resolución:

a) Las matrices A y B tienen *rango*(A) = 3 y *rango*(B) = 2 $\Rightarrow |A| \neq 0$ y $|B| = 0$. Entonces:

$|A \cdot B| = |A|\,|B| = 0 \Rightarrow$ *rango*$(A \cdot B) < 3$ = nº de incógnitas del sistema $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones, una de ellas la trivial $(0\ \ 0\ \ 0)^t$ por ser homogéneo. La afirmación es, pues, **falsa**.

b) El determinante $|A^2| = |A|^2 \neq 0 \Rightarrow$ *rango*$(A^2) = 3$.

Entonces, el sistema $A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ es compatible determinado, pues el rango de su matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes y con el número de incógnitas.

La afirmación es, pues, **verdadera**.

c) Si $(1\ \ 2\ \ 0)^t$ es una solución del sistema $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, significa que el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada: *rango*(B)= *rango*(B/ **y**). Como *rango*(B)=2, se tiene:

rango(B)= *rango*(B/**y**) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

La afirmación es, pues, **verdadera**.

■

3

APLICACIONES LINEALES

3.1 De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se sabe que en la base usual de $\mathbb{R}^3$, $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ tiene asociada la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$, y en la base $B' = \{ \mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}' = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}' = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \}$ la matriz que representa a f es $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 3 & * & 6 \end{pmatrix}$, donde $*$ representa escalares que no se conocen. Hallar la matriz A_1.

(Febrero 2001)

Resolución:

La relación entre las matrices A_1 y A_2 que caracterizan a la aplicación lineal f en dos bases distintas, B y B', es

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

siendo P la matriz de paso de la base B a la nueva base B'.

Dicha matriz tendrá por columnas las coordenadas de los vectores de la base antigua referidos a la nueva base, es decir, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculando la inversa de P, se obtiene $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego,

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P \iff \begin{pmatrix} -1 & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 3 & * & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde,

$$\begin{pmatrix} -1 & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 3 & * & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a-c & 0 \\ b-c & b-a & 0 \\ c & c+a & c+a+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-1 \\ c=3 \\ a+b+c=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

Llevando estos valores a la matriz A_1 resulta:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

3.2 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}_3(x)$ de la que se sabe que en las bases $B_1 = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$ de $\mathbb{P}_3(x)$:

$f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{x^3}$

$f(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{0}$

$f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{x^3} + 2\mathbf{x^2} \mathbf{- 1}$

a) Obtener la matriz de la aplicación f en las bases B_1 de $\mathbb{R}^3$ y B_2 de $\mathbb{P}_3(x)$.

b) Hallar la dimensión, base y ecuaciones implícitas de los subespacios núcleo e imagen de f. ¿Son suplementarios?. Razona la repuesta.

c) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razona la respuesta.

d) Se considera una nueva base de $\mathbb{R}^3$, $B_1' = \{\mathbf{u_1} = \mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3},\ \mathbf{u_2} = \mathbf{e_1}+\mathbf{e_3},\ \mathbf{u_3} = \mathbf{e_3}\}$. Determinar la matriz de la aplicación en esta nueva base de $\mathbb{R}^3$.

e) Calcular la imagen del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en las bases de $\mathbb{R}^3$, B_1 y B_1'.

(Febrero 2001)

<u>*Resolución:*</u>

a) La matriz A de la aplicación f tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(\mathbf{e_1})$, $f(\mathbf{e_2})$ y $f(\mathbf{e_3})$ referidos a la base B_2. Dichas coordenadas se obtienen de los datos del problema, es decir:

$f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{x^3}$

$f(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow f(\mathbf{e_2}) + f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow f(\mathbf{e_2}) = -2\mathbf{x^2} + \mathbf{1}$

$f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{x^3} + 2\mathbf{x^2} - \mathbf{1} \Leftrightarrow f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{x^3} + 2\mathbf{x^2} - \mathbf{1} \Leftrightarrow f(\mathbf{e_3}) = 2\mathbf{x^2} - \mathbf{1}$

De donde, la matriz A resulta ser:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Ker f = $\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{P}_3} \right\}$ = {$\mathbf{x}$ / A·$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ }, luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = x_3.$$

Estas son las ecuaciones implícitas del núcleo de f.

A continuación se halla la base y dimensión del núcleo :

$$\text{Ker } f = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ x_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Base del Ker} f = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

De donde se obtiene que la dimensión del subespacio Núcleo de la aplicación es uno, es decir *dim* Ker f = 1.

Para hallar la dimensión del subespacio Imagen de la aplicación, se tiene que *dim* Im f = *rango* (A) = 2, ya que la segunda y tercera columnas de A son linealmente dependientes. Entonces, una posible base de Im f es por ejemplo:

$$B_{\text{Im} f} = \left\{ f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv \{ x^3, 1\text{-}2x^2 \}$$

A continuación se calculan las ecuaciones implícitas de Im f:

$$p(x) = a + b\cdot x + c\cdot x^2 + d\cdot x^3 \in \text{Im} f \quad \Leftrightarrow \quad rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -2 & c \\ 1 & 0 & d \end{pmatrix} = 2$$

de donde

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & -2 & c \\ 1 & 0 & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c + 2a = 0$$

Luego, las ecuaciones implícitas de Im f = $\begin{cases} b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$.

Los subespacios Ker f e Im f no pueden ser suplementarios, pues son subespacios de distintos espacios vectoriales, así Ker $f \subset \mathbb{R}^3$ e Im $f \subset \mathbb{P}_3$ (x).

c) $\text{Ker} f \neq \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \} \Leftrightarrow f$ no es inyectiva.

$\text{Im} f \neq \mathbb{P}_3 \qquad \Leftrightarrow f$ no es sobreyectiva.

d) En la nueva base $B_1' = \{\mathbf{u_1} = \mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3},\ \mathbf{u_2} = \mathbf{e_1}+\mathbf{e_3},\ \mathbf{u_3} = \mathbf{e_3}\}$, la matriz de f, A_2, tendrá por columnas las coordenadas de los vectores $f(\mathbf{u_1})$, $f(\mathbf{u_2})$ y $f(\mathbf{u_3})$ referidos a la base B_2:

$f(\mathbf{u_1}) = f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_2}) + f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{x^3} - 2\mathbf{x^2} + \mathbf{1} + 2\mathbf{x^2} - \mathbf{1} = \ \mathbf{x^3}$

$f(\mathbf{u_2}) = f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}) = f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_3}) = \ \mathbf{x^3} + 2\mathbf{x^2} - \mathbf{1}$

$f(\mathbf{u_3}) = f(\mathbf{e_3}) = 2\mathbf{x^2} - \mathbf{1}$

luego, la matriz asociada a f en las bases B_1' y B_2 resulta:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De otra forma:

También se podía haber calculado A_2 teniendo en cuenta la relación entre las matrices que caracterizan una misma aplicación lineal en dos bases distintas:

$$A_2 = R^{-1} \cdot A \cdot P$$

Siendo $R = I$ la matriz de paso de B_2 a B_2 (ya que esta base de $\mathbb{P}_3$ no cambia)

y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de paso de B_1 a B_1' (bases de $\mathbb{R}^3$).

e) $$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\text{en } B_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\text{en } B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv x^3$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\text{en } B_1) = f(\mathbf{u_1}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\text{en } B_1') = A_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv x^3$$

■

3.3 Se define la aplicación $f : \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{R}^4 \ / \ f[(p(x)] = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}$ siendo $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado ≤ 2, con coeficientes reales. Se pide:

a) Demostrar que f es lineal.

b) Obtener la expresión matricial de la aplicación considerando las bases usuales de $\mathbb{P}_2(x)$ y de $\mathbb{R}^4$.

c) Calcular la dimensión, base y ecuaciones cartesianas de los subespacios núcleo e imagen de la aplicación.

d) Analizar si f es inyectiva y si es sobreyectiva.

e) Obtener la expresión matricial de la aplicación considerando ahora como nueva base de $\mathbb{R}^4$ los vectores $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ y manteniendo la base utilizada anteriormente para $\mathbb{P}_2(x)$.

(Febrero 2002)

Resolución:

a) Para ver si la aplicación dada, f, es lineal se comprueba si verifica las dos condiciones siguientes:

i) $\forall\, p, q \in \mathbb{P}_2(x) \qquad f(p + q) = f(p) + f(q)$

ii) $\forall\, p \in \mathbb{P}_2(x) \;\wedge\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad f(\alpha \cdot p) = \alpha \cdot f(p)$

Para comprobar la primera:

$$f[(p+q)(x)] = \begin{pmatrix}(p+q)(0)\\(p+q)(1)\\(p+q)(2)\\(p+q)(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p(0)+q(0)\\p(1)+q(1)\\p(2)+q(2)\\p(3)+q(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p(0)\\p(1)\\p(2)\\p(3)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}q(0)\\q(1)\\q(2)\\q(3)\end{pmatrix} = f[p(x)] + f[q(x)]$$

luego, sí se verifica.

Veamos la segunda condición:

$$f[(\alpha \cdot p)(x)] = \begin{pmatrix}(\alpha\cdot p)(0)\\(\alpha\cdot p)(1)\\(\alpha\cdot p)(2)\\(\alpha\cdot p)(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\cdot p(0)\\\alpha\cdot p(1)\\\alpha\cdot p(2)\\\alpha\cdot p(3)\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}p(0)\\p(1)\\p(2)\\p(3)\end{pmatrix} = \alpha \cdot f[p(x)]$$

por tanto la segunda condición también se verifica.

Luego, f es aplicación lineal.

b) Consideremos como base usual de $\mathbb{P}_2(x)$:

$$B_{\mathbb{P}_2} = \{ \mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2} \}$$

y como base usual de $\mathbb{R}^4$:

$$B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

La expresión matricial de la aplicación lineal $f: \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{R}^4$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

donde la matriz A de la aplicación es de dimensión 4x3 y tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(\mathbf{1})$, $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{x^2})$ referidos a la base usual de $\mathbb{R}^4$ elegida, es decir:

$$A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}.$$

c) Para hallar la dimensión del subespacio Imagen de la aplicación, se tiene que *dim* (Im *f*) = *rango* (A) = 3, ya que las tres columnas de A son linealmente independientes.

Una posible base de Im f son las tres columnas de la matriz A:

$$B_{\mathrm{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\end{pmatrix} \right\}$$

Para conocer el número de ecuaciones cartesianas de Im f, se plantea:

nº ecuaciones cartesianas de Im f = *dim* $\mathbb{R}^4$ - *dim* (Im f) = 4 – 3 = 1.

Para calcular la ecuación se forma una matriz que tenga por columnas las coordenadas de los vectores de la base de Im f y las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4)^t \in \mathrm{Im} f$, y se impone la condición de que dicha matriz tenga rango tres, es decir:

$$rango\begin{pmatrix}1&0&0&y_1\\1&1&1&y_2\\1&2&4&y_3\\1&3&9&y_4\end{pmatrix} = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}1&0&0&y_1\\1&1&1&y_2\\1&2&4&y_3\\1&3&9&y_4\end{vmatrix} = 0$$

desarrollando este determinante se obtiene la ecuación del subespacio Im f:

$$y_1 - 3y_2 + 3y_3 - y_4 = 0$$

Para hallar la dimensión del subespacio Núcleo de la aplicación, empleamos el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales:

$\dim \mathbb{P}_2 = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_{\mathbb{P}_2}\}$

luego, no existe una base del núcleo de la aplicación.

Para conocer el número de ecuaciones cartesianas del $\mathrm{Ker}\, f$, se plantea:

nº ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Ker}\, f = \dim \mathbb{P}_2 - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 0 = 3$,

que son $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

d) $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_{\mathbb{P}_2}\} \Leftrightarrow f$ es inyectiva.

$\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow f$ no es sobreyectiva.

e) Teniendo en cuenta la relación entre las matrices que caracterizan una misma aplicación lineal en dos bases distintas:

$$A_2 = R^{-1} \cdot A \cdot P$$

siendo $P = I$ la matriz de paso de B_1 (base usual de $\mathbb{P}_2$) a B_1 (ya que la base de $\mathbb{P}_2$ no cambia) y $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de paso de B_2 (base usual de $\mathbb{R}^4$) a B_3 (nueva base de $\mathbb{R}^4$). Luego,

$$A_2 = R^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la expresión matricial de f al cambiar la base en $\mathbb{R}^4$ resulta ser:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = A_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

■

3.4 Sabiendo que la aplicación f transforma los vectores $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, en los vectores $\mathbf{v_1}= \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v_3}= \begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$ respectivamente:

a) Hallar la matriz A_1 de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$

b) Hallar la matriz A_2 de f en la base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$

c) Obtener las ecuaciones cartesianas y una base de los subespacios Núcleo e Imagen de la aplicación.

d) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva?. Razona las respuestas.

(Septiembre 2002)

Resolución:

a) La matriz A_1 de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, tendrá por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de esa base, es decir, de $f(\mathbf{e_1})$, $f(\mathbf{e_2})$ y $f(\mathbf{e_3})$. Vamos a calcularlas:

$$f(\mathbf{u_1}) = f(\mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{2e_3} \Rightarrow f(\mathbf{e_1}) = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{u_2}) = f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_2}) = 3\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{2e_3} \Rightarrow f(\mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{u_3})=f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3})=f(\mathbf{e_1})+f(\mathbf{e_2})+f(\mathbf{e_3})=6\mathbf{e_1}+\mathbf{2e_2}+\mathbf{3e_3} \Rightarrow f(\mathbf{e_3})= \begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

De donde:

$$A_1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Teniendo en cuenta la relación entre las matrices que caracterizan una misma aplicación lineal f en dos bases distintas, se tiene que

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

siendo A_1 la matriz de f en la base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, A_2 la matriz de f en la base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de paso de $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ a $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.

Luego,

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Para hallar la dimensión del subespacio Imagen de la aplicación, se tiene que *dim* (Im f) = *rango* (A_1) = 3, ya que las tres columnas de A son linealmente independientes. Por tanto, Im $f = \{ \mathbb{R}^3 \}$,de donde una base de Im f será cualquier base de $\mathbb{R}^3$. Para hallar el número de ecuaciones:

nº ecuaciones cartesianas de Im f = *dim* $\mathbb{R}^3$ - *dim* (Im f) = 3 – 3 = 0

Para conocer estos datos del Ker f, por el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales:

$dim\, \mathbb{R}^3 = dim\, (\mathrm{Ker}\, f) + dim\, (\mathrm{Im}\, f) \Rightarrow dim\, (\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ luego, no existe una base del núcleo de la aplicación.

Para conocer el número de ecuaciones cartesianas del Ker f, se plantea:

nº ecuaciones cartesianas de Ker f = *dim* $\mathbb{R}^3$ - *dim* (Ker f) = 3 – 0 = 3 ,

que son $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

d) $\mathrm{Ker}\, f = \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \} \Leftrightarrow f$ es inyectiva.

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.

Por ser inyectiva y sobreyectiva es biyectiva.

■

3.5 Siendo $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que dos, se define la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{P}_2(x) \ / \ f[(p(x)] = p(x) + x^2 \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$$

Se pide:

a) Hallar la expresión matricial de la aplicación f en la base $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$.

b) Obtener las ecuaciones cartesianas y una base de los subespacios Núcleo e Imagen de la aplicación f.

c) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? . Razona las respuestas.

d) ¿Son los subespacios Ker f e Im f suplementarios?. Justifica la respuesta.

(Febrero 2003)

---

a) Sea $f : \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x) \;/\; f[p(x)] = p(x) + x^2 \cdot p\left(\frac{1}{x}\right)$

Se considera $p(x) \in \mathbb{P}_2(x) \;/\; p(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ en la base $B = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$. Por otro lado: $p\left(\frac{1}{x}\right) = a + b \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Llevando estas dos expresiones a la expresión de f dada en el enunciado, se tiene que:

$f[p(x)] = p(x) + x^2 \cdot p\left(\frac{1}{x}\right) = a + b{\cdot}x + c{\cdot}x^2 + x^2 \cdot \left[a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right] = a + b{\cdot}x + c{\cdot}x^2$
$+ a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = (a + c) + 2\,b{\cdot}x + (a+c){\cdot}x^2$

El vector formado por las coordenadas de $f[p(x)]$ en la base B es $\begin{pmatrix} a+c \\ 2b \\ a+c \end{pmatrix}$.

Por tanto la expresión matricial de f en B es:

$$f[p(x)] = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ 2b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \cdot [p(x)]$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

b) Comenzamos hallando las ecuaciones del núcleo de f:

$\text{Ker } f = \{\; p(x) \in \mathbb{P}_2(x) \;/\; f[p(x)] = \mathbf{0}_{\mathbb{P}_2} \;\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ecuaciones cartesianas de $\text{Ker} f = \begin{cases} a + c = 0 \Rightarrow c = -a \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$.

Luego: $\text{Ker} f = \left\{p(x) = a - a{\cdot}x^2 = a(1 - x^2)\right\} \Rightarrow$ Una base de Ker f = $\{1 - x^2\}$, luego la dimensión del núcleo será: *dim* (Ker f) = 1.

El vector formado por las coordenadas de $\{1–x^2\}$ en la base B es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para hallar la dimensión del subespacio Imagen de la aplicación, se tiene que *dim* (Im f) = *rango* (A) = 2, ya que existen dos columnas de A que son linealmente independientes. Una base de Im f puede estar formada por esas dos columnas : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ que corresponden a las coordenadas de los vectores $B_{\mathrm{Im} f} = \{1+x^2,\ 2x\}$.

Para hallar el número de ecuaciones de Im f:

nº ecuaciones cartesianas de Im f = *dim* $\mathbb{P}_2(x)$ - *dim* (Im f) = 3 – 2 = 1

Para calcular la ecuación de Im f se forma una matriz que tenga por columnas las coordenadas de los vectores de la base de Im f y las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{y} = (a'\ b'\ c')^t \in$ Im f, y se impone la condición de que dicha matriz tenga rango dos, es decir:

$$rango\begin{pmatrix}1 & 0 & a'\\0 & 2 & b'\\1 & 0 & c'\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & a'\\0 & 2 & b'\\1 & 0 & c'\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2c' - 2a' = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $a' = c'$ es la ecuación cartesiana de Im f

c) Im $f \neq \mathbb{P}_2(x)$ $\Leftrightarrow$ f no es sobreyectiva.

Ker $f \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{P}_2}\}$ $\Leftrightarrow$ f no es inyectiva.

d) Para estudiar si Ker f e Im f son suplementarios hay que ver cómo son los subespacios Ker $f \cap$ Im f, así como el subespacio Ker f + Im f:

$$\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{ p(x) \,/\, p(x)\in \mathrm{Ker} f \wedge p(x)\in \mathrm{Im} f\} = \left\{ \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}\alpha\\2\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\gamma\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \gamma\\ \beta = 0\\ \alpha = -\gamma\end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{\mathbf{0}_{\mathbb{P}_2}\}.$$

Por ser Ker f e Im f subespacios disjuntos, la dimensión del subespacio suma es:

dim (Ker f + Im f) = *dim* (Ker f) + *dim* (Im f) = 1 + 2 = 3 = *dim* $\mathbb{P}_2(x)$

y como,

(Ker f + Im f) $\subseteq \mathbb{P}_2(x)$, se tiene en este caso que Ker f + Im f $\equiv \mathbb{P}_2(x)$.

Luego, por verificarse que:

Ker $f \cap$ Im f = $\{\mathbf{0}_{\mathbb{P}_2}\}$ $\wedge$ Ker f + Im f $\equiv \mathbb{P}_2(x)$ $\Rightarrow$ Ker f e Im f son subespacios suplementarios.

■

3.6 Sea la aplicación lineal

$$f : \mathbb{P}_3(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x) \;/\; f[(p(x)] = \left(\frac{d(p(x))}{dx}\right)$$

Se pide:

a) Obtener la expresión matricial de la aplicación f en las bases $B_1 = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$ de $\mathbb{P}_3(x)$ y $B_2 = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$.

b) Obtener la expresión matricial de la aplicación f en las nuevas bases $B_3 = \left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}\right\}$ de $\mathbb{P}_3(x)$ y $B_4 = \left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}\right\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$.

c) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? . Razona las respuestas.

d) Obtener las ecuaciones cartesianas y una base de los subespacios núcleo de la aplicación, Ker f, e imagen de la aplicación, Im f.

(Septiembre 2003)

Resolución:

a) La expresión matricial de la aplicación lineal $f : \mathbb{P}_3(x) \rightarrow \mathbb{P}_2(x)$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

donde la matriz A_1 de la aplicación f es de dimensión 3x4, y tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(\mathbf{1})$, $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x^2})$ y $f(\mathbf{x^3})$ referidos a la base $B_2 = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$. Para calcular dichas columnas empleamos la expresión del enunciado. Así:

$f(\mathbf{1}) = \left(\frac{d1}{dx}\right) = \mathbf{0}$, que en la base B_2 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{dx}{dx}\right) = \mathbf{1}$, que en la base B_2 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f(\mathbf{x^2}) = \left(\frac{d(x^2)}{dx}\right) = 2\mathbf{x}$, que en la base B_2 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$f(\mathbf{x^3}) = \left(\frac{d(x^3)}{dx}\right) = 3\mathbf{x^2},$$ que en la base B_2 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$**.**

Luego, la expresión matricial de la aplicación f en las bases $B_1=\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$ de $\mathbb{P}_3(x)$ y $B_2 = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ resulta ser:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

b) La expresión matricial de la aplicación lineal $f : \mathbb{P}_3(x) \to \mathbb{P}_2(x)$ en las nuevas bases es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = A_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

donde la matriz A_2 de la aplicación f es de dimensión 3x4, y tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(\mathbf{1})$, $f\left(\frac{x}{1!}\right)$, $f\left(\frac{x^2}{2!}\right)$ y $f\left(\frac{x^3}{3!}\right)$ referidos a la base $B_4 = \left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}\right\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$. Así:

$f(\mathbf{1}) = \left(\frac{d1}{dx}\right) = \mathbf{0},$ que en la base B_4 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**

$f\left(\frac{x}{1!}\right) = \left(\frac{dx}{dx}\right) = \mathbf{1},$ que en la base B_4 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**

$f\left(\frac{x^2}{2!}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{x^2}{2!}\right)}{dx}\right) = \frac{2x}{2!} = \mathbf{x},$ que en B_4 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**

$f\left(\frac{x^3}{3!}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{x^3}{3!}\right)}{dx}\right) = \frac{3x^2}{3!} = \frac{x^2}{2}$,que en B_4 de $\mathbb{P}_2(x)$ tiene por coordenadas: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

Luego, la expresión matricial de la aplicación f en las nuevas bases $B_3 = \left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}\right\}$ de $\mathbb{P}_3(x)$ y $B_4 = \left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}\right\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$ resulta ser:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

c) Para hallar la dimensión del subespacio Imagen de la aplicación, se tiene que *dim* (Im f) = *rango* (A_1) = 3, ya que existen tres columnas de A_1 que son linealmente independientes. Luego, *dim* (Im f) = *dim* $\mathbb{P}_2(x)$, y como Im $f \subset \mathbb{P}_2(x) \Rightarrow$ Im $f = \mathbb{P}_2(x) \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.

Por el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales:

dim $\mathbb{P}_3(x)$ = *dim* (Ker f) + *dim* (Im f) $\Rightarrow$ *dim* (Ker f) = 4 - 3 = 1

de donde : Ker $f \neq \{ \mathbf{0}_{\mathbb{P}_3} \} \Leftrightarrow f$ no es inyectiva.

d) Ker $f = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \ / \ f[p(\mathbf{x})] = \mathbf{0}_{\mathbb{P}_2} \} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$. Son las ecuaciones cartesianas del subespacio núcleo de f. Luego,

$B_{\text{Ker} f} = \{ \mathbf{1} \}$, cuyo vector coordenado es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Para hallar el número de ecuaciones de Im f :

nº ecuaciones cartesianas de Im f = *dim* $\mathbb{P}_2(x)$ - *dim* (Im f) = 3 – 3 = 0

por tanto el subespacio imagen de f no tiene ecuaciones.

Una base de Im f sería la formada por los tres vectores cuyas coordenadas constituyen las tres columnas de la matriz A_1 linealmente independientes que nos han dado el valor del rango de A_1, es decir:

$$B_{\text{Im}f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad B_{\text{Im}f} = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$$

que equivale a haber considerado una base cualquiera de $\mathbb{P}_2(x)$, por ejemplo, $\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$, por ser f sobreyectiva.

■

3.7 Se define una aplicación lineal $f : \mathbb{P}_3(x) \rightarrow \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$, siendo $\mathbb{P}_3(x)$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado ≤ 3, y $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden dos, de la que se conoce que:

$$f(x^3) = f(-2x) \qquad f(1-x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(1-x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la matriz A de f en las bases usuales de $\mathbb{P}_3(x)$ y de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$.

b) Hallar la base, dimensión y ecuaciones de los subespacios núcleo e imagen de la aplicación f.

c) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?. ¿Son los subespacios Ker f e Im f suplementarios?. Razona las respuestas.

(Febrero 2004)

Resolución:

a) Para calcular la matriz A de la aplicación lineal f se tiene en cuenta que la matriz de la aplicación tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base del espacio inicial referidos a la base del espacio final. Se consideran las bases usuales:

B_1 de $\mathbb{P}_3(x) = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}, \mathbf{x^3}\}$, y

B_2 de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para calcular $f(\mathbf{1})$, $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x^2})$ y $f(\mathbf{x^3})$ se consideran los datos del problema. Así:

$$f(1-x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f(\mathbf{1}) - f(\mathbf{x^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f(\mathbf{x^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$f(1\text{- x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{1}) \text{ - } f(\mathbf{x}) \;\; \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{1}) \text{ - } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ - } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \; f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

$f(x^3) = f(\text{-}2x) = \text{-}\, 2 f(\mathbf{x}) = \text{-}2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Así, las columnas de A son:

$C_{B_{E_{2x2}}}(f(\mathbf{1})) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{B_{E_{2x2}}}(f(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$C_{B_{E_{2x2}}}(f(\mathbf{x^2})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_{B_{E_{2x2}}}(f(\mathbf{x^3})) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Luego :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ p(x) \in P_3(x) / \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b + 2d = 0 \Rightarrow a = 0 \\ -b + 2d = 0 \Rightarrow .... \\ a + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ -b + 2d = 0 \Rightarrow b = 2d \end{cases} \Rightarrow \text{ Ecuaciones cartesianas de Ker} f.$$

Por tanto, el vector coordenado del núcleo es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2d \\ 0 \\ d \end{pmatrix} / d \in R \right\} \Rightarrow$

Base de Ker f ={ $2x + x^3$}. De donde: *dim* (Ker f) = 1.

Para hallar la dimensión del subespacio Imagen de la aplicación, se tiene que *dim* (Im f) = *rango* (A) = 3, ya que la segunda y cuarta columnas son linealmente dependientes.

Una base de Im f sería la formada por los tres vectores cuyas coordenadas corresponden a las tres primeras columnas de A que son las que nos han dado el valor del rango. Luego,

$$\text{Base de Im}\,f = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \equiv \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Para conocer el número de ecuaciones cartesianas de Im f, se plantea:

nº ecuaciones cartesianas de Im f = $dim\ \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ - $dim\ (\text{Im}\,f) = 4 - 3 = 1$.

Para calcular la ecuación se forma una matriz que tenga por columnas las coordenadas de los vectores de la base de Im f y las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4)^t \in \text{Im}\,f$, y se impone la condición de que dicha matriz tenga rango tres, es decir:

$$rango\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & y_1\\0 & -1 & 0 & y_2\\1 & 0 & 1 & y_3\\0 & -1 & 0 & y_4\end{pmatrix} = 3 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & y_1\\0 & -1 & 0 & y_2\\1 & 0 & 1 & y_3\\0 & -1 & 0 & y_4\end{vmatrix} = 0$$

desarrollando este determinante se obtiene la ecuación cartesiana del subespacio Im f: $\quad y_2 - y_4 = 0$.

b) $\text{Ker}\,f \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{P}_3}\} \Leftrightarrow f$ no es inyectiva.

$\text{Im}\,f \neq \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f$ no es sobreyectiva

El núcleo y la imagen de esta aplicación no son subespacios suplementarios, ya que son subespacios vectoriales de distintos espacios vectoriales, así mientras que $\text{Ker}\,f \in \mathbb{P}_3(x)$, el subespacio $\text{Im}\,f \in \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$.

■

3.8 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que en las bases canónicas viene dada por la expresión $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-x_1 + x_2 + x_3\end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar la matriz A de f en estas bases.

b) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?. Razona las respuestas.

c) Si las coordenadas de un vector **x** respecto de la base:

B' = { $\mathbf{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_4}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ } son $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallar su transformado, es decir $f(\mathbf{x})$.

d) Obtener las ecuaciones así como una base de los subespacios Núcleo e Imagen de *f*.

(Septiembre 2004)

Resolución:

a) De la expresión dada de la aplicación lineal se tiene que:

$$f(\mathbf{x}) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathrm{A}\cdot\mathbf{x}$$

de donde la matriz de la aplicación lineal resulta ser:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) *f* inyectiva $\Leftrightarrow$ Ker $f = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \right\} = \left\{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \right\}$.

Pero $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow \mathrm{Ker} f \neq \left\{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \right\} \Rightarrow f$ no inyectiva.

f sobreyectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f \equiv \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ *dim* (Im f) = *rango* (A) = 3 $\Rightarrow f$ sobreyectiva.

c) Como en la base B´ las coordenadas del vector **x** son $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{e_1}' + 2\mathbf{e_2}' + \mathbf{e_3}' + \mathbf{e_4}' = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

De donde su transformado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $f(\mathbf{x}) = A\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$.

d) $\operatorname{Ker} f = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 /\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\ \} \Rightarrow A\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}x_1 = 0\\x_2 = 0\\-x_1 + x_2 + x_3 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0. \text{ Luego, } \quad B_{\operatorname{Ker} f} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Como $\operatorname{Im} f \equiv \mathbb{R}^3$, el subespacio imagen de la aplicación no tiene ecuaciones cartesianas. Una base cualquiera de Im f sería una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la usual:

$$B_{\operatorname{Im} f} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

■

3.9 Sea E = Span {sen (x), cos (x)}. Se considera la aplicación:

$$f : E \to E \ \ /\ f[p(x)] = a\cdot\left(\frac{d^2p(x)}{dx^2}\right) + b\cdot\left(\frac{dp(x)}{dx}\right) + c\cdot p(x)$$

a) Estudiar si es lineal.

b) Encontrar la expresión matricial de la aplicación en la base B = {sen (x), cos (x)}.

c) Discutir la naturaleza de la aplicación en función de a, b y c.

(Febrero 2005)

Resolución:

a) Para ver si la aplicación dada, f, es lineal se comprueba si verifica las dos condiciones siguientes:

i) $\forall\, p, q \in E \qquad f(p + q) = f(p) + f(q)$

ii) $\forall\, p \in E \ \wedge\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad f(\alpha\cdot p) = \alpha\cdot f(p)$

Para comprobar la primera:

$$f[(p+q)(x)] = a \cdot \left(\frac{d^2[(p+q)(x)]}{dx^2}\right) + b \cdot \left(\frac{d[(p+q)(x)]}{dx}\right) + c \cdot [(p+q)(x)] =$$

$$= a \cdot \left(\frac{d^2p(x)}{dx^2}\right) + b \cdot \left(\frac{dp(x)}{dx}\right) + c \cdot p(x) + a \cdot \left(\frac{d^2q(x)}{dx^2}\right) + b \cdot \left(\frac{dq(x)}{dx}\right) + c \cdot q(x) =$$

$= f[p(x)] + f[q(x)]$ luego, sí se verifica.

Veamos la segunda condición:

$$f[(\alpha \cdot p)(x)] = a \cdot \left(\frac{d^2(\alpha \cdot p)(x)}{dx^2}\right) + b \cdot \left(\frac{d(\alpha \cdot p)(x)}{dx}\right) + c \cdot (\alpha \cdot p)(x) =$$

$$= \alpha \cdot a \cdot \left(\frac{d^2p(x)}{dx^2}\right) + \alpha \cdot b \cdot \left(\frac{dp(x)}{dx}\right) + \alpha \cdot c \cdot p(x) = \alpha \cdot f[p(x)]$$

por tanto la segunda condición también se verifica.

Luego, f es aplicación lineal.

b) La expresión matricial de f es de la forma $f(x) = A \cdot x$, siendo A una matriz de dimensión 2x2, y cuyas columnas son las coordenadas de $f(\text{sen } x)$ y de $f(\cos x)$ en la base B = {sen (x), cos (x)}. Vamos a calcularlo:

$$f(\text{sen } x) = -a \cdot \text{sen}(x) + b \cdot \cos(x) + c \cdot \text{sen}(x) \quad \Rightarrow \text{ en B: } \begin{pmatrix} c-a \\ b \end{pmatrix}$$

$$f(\cos x) = -a \cdot \cos(x) - b \cdot \text{sen}(x) + c \cdot \cos(x) \quad \Rightarrow \text{ en B: } \begin{pmatrix} -b \\ c-a \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz A resulta ser: $A = \begin{pmatrix} c-a & -b \\ b & c-a \end{pmatrix}$, y la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-a & -b \\ b & c-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

c) Esta aplicación es un endomorfismo. Si a su vez es inyectiva o sobreyectiva implica que también es biyectiva. Estudiemos por tanto si es sobreyectiva (o inyectiva) mediante el rango de la matriz.

Si *rango*(A) = 2 $\Rightarrow f$ biyectiva.

Si *rango*(A) < 2 $\Rightarrow f$ no es sobreyectiva ni inyectiva.

Por tanto: *rango*(A) = 2 $\Leftrightarrow (c-a)^2 + b^2 \neq 0$ ó $b \neq \pm i \cdot (c-a)$

■

3.10 Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

a) Dada una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ arbitraria, los subespacios $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ no tienen ningún vector en común.

b) La aplicación $f : E_{nxn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \;/\; f(A) = \det(A)$ es lineal.

(Septiembre 2005)

<u>*Resolución:*</u>

a) Los subespacios $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ lo son del mismo espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, por lo tanto el vector nulo de cada uno de ellos es el mismo vector nulo de $\mathbb{R}^n$, por lo tanto tienen en común como mínimo el vector nulo de $\mathbb{R}^n$.

Si la aplicación es inyectiva, el único vector en común será el vector nulo, pero si no lo es, pueden tener más vectores en común.

Ejemplo: Si la matriz asociada a $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

Base de $\operatorname{Im} f = \{(1\ 0\ 0)^t\}$, Base de $\operatorname{Ker} f = \{(1\ 0\ 0)^t, (0\ 1\ -1)^t\}$ y

Base de $(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = \{(1\ 0\ 0)^t\}$.

b) Para que sea aplicación lineal:

i) $\forall\, A,B \in E_{nxn}(\mathbb{R}) \qquad f(A+B) = f(A) + f(B)$

Como $f(A+B) = \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$, no se cumple.

ii) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall\, A \in E_{nxn}(\mathbb{R}) \qquad f(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot f(A)$

Puesto que $f(\alpha \cdot A) = \det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A) \neq \alpha \cdot f(A)$, no se cumple.

■

3.11

a) Definir núcleo de una aplicación lineal f.

b) Definir imagen de una aplicación lineal f.

c) Condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal f sea inyectiva (enunciado).

d) Condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal f sea sobreyectiva (enunciado).

e) Condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal f sea biyectiva (enunciado).

f) Enunciar el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales.

(Septiembre 2001)

3.12 Demostrar que si $f : E \to F$ es una aplicación lineal inyectiva y $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_p}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}),\ldots, f(\mathbf{e_p})\}$ son también linealmente independientes en F.

(Febrero 2003)

3.13

a) Sean E y F dos espacios vectoriales reales de dimensiones n y m respectivamente. Deducir la relación existente entre las matrices asociadas a una misma aplicación lineal $f : E \to F$ cuando cambian las bases de los dos espacios vectoriales. ¿Son dichas matrices equivalentes, semejantes o congruentes?.

b) Particularizar la expresión obtenida en el apartado anterior para el caso en que E = F.¿Cómo son en este caso dichas matrices, equivalentes, semejantes o congruentes?.

(Febrero 2004)

3.14 Enunciar el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales.

(Febrero 2005)

4

DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

4.1 Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión 5, E($\mathbb{K}$). Se sabe que la matriz A que lo caracteriza en una cierta base B es una matriz simétrica, cuyos autovalores son λ_1 y λ_2, de multiplicidades algebraicas m_1 y m_2, respectivamente. Se sabe además que:

- $\mathbf{u_3}$ es un autovector asociado a λ_1 y tal que $f(\mathbf{u_3})= \mathbf{0}$
- $\{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \}$ es una base de V(λ_2)
- Traza (A)= 4

a) Hallar la matriz que caracteriza al endomorfismo en una base de autovectores (no se pide calcular dicha base).

b) Hallar *dim* (Ker f), *dim* (Im f) e indicar la naturaleza del endomorfismo.

(Enero 2001)

Resolución:

a) Si $\exists$ una base de autovectores $\Rightarrow$ A es diagonalizable ($\exists$ P regular / $D = P^{-1}$ A P)

La matriz que caracteriza al endomorfismo en una base de autovectores es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal principal serán los autovalores de A (λ_1 y λ_2) repetidos tantas veces como indiquen sus multiplicidades algebraicas respectivas (m_1 y m_2). Obtengamos dicha matriz.

Sabemos que:

- las matrices cuadradas A y D son de orden 5, por caracterizar a un endomorfismo en un espacio vectorial de dimensión 5.
- $m_1 + m_2 = 5$

  puesto que si A es diagonalizable, ha de cumplir la condición necesaria de diagonalización.
- $m_2 = 2$

  ya que se nos dice que $\{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \}$ es una base de V(λ_2) $\Longrightarrow \mu_2 = 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} m_2 = 2$

  (1) para toda matriz, $\mu_i \leq m_i$ y, en caso de ser diagonalizable, $\mu_i = m_i$ (cond. necesaria y suficiente de diagonalización)

  Entonces:

$$m_1 = 5\text{-}2\text{=}3$$

- Además, si $\mathbf{u_3} \in$ V(λ_1) y $f(\mathbf{u_3})= \mathbf{0} \Rightarrow$

$$f(\mathbf{u_3})= 0 \cdot \mathbf{u_3} \Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$$

- Por otra parte

$$tr\,(\mathrm{A})= 4 \overset{(2)}{=} m_1 \cdot \lambda_1 + m_2 \cdot \lambda_2$$

$$4 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot \lambda_2 \Longrightarrow \boxed{\lambda_2 = 2}$$

(2) La traza de una matriz es igual a la suma de las raíces de su polinomio característico.

Por lo tanto:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $dim\,(\mathrm{Im}\,f) = rg\,f = rg(\mathrm{A}) \overset{(3)}{=} rg(\mathrm{D}) = 2 \neq dim\,\mathrm{E} \Longrightarrow$ no es sobreyectivo

(3) Por caracterizar al mismo endomorfismo en bases distintas, A y D son semejantes; por lo tanto también son equivalentes (la semejanza es un caso particular de la equivalencia) y, entonces, tienen el mismo rango.

$dim\,(\mathrm{Ker}\,f) + dim\,(\mathrm{Im}\,f) \overset{(4)}{=} dim\,\mathrm{E} \Longrightarrow dim\,(\mathrm{Ker}\,f) = 5\text{-}2 = 3 \neq 0 \Longrightarrow$

el endomorfismo tampoco es inyectivo. (5)

(4) Teorema fundamental de las aplicaciones lineales.
(5) Ya se sabía, puesto que si un endomorfismo no es sobreyectivo, tampoco es inyectivo.

- Otra forma de haber justificado en este caso que el endomorfismo no es inyectivo ni sobreyectivo, sin necesidad de calcular la dimensión del núcleo ni de la imagen (aunque nos las piden):

  sabemos que $f(\mathbf{u_3}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{u_3} \in \mathrm{Ker}\,f \Longrightarrow \mathrm{Ker}\,f \neq \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow f$ no es inyectiva y, por ser endomorfismo tampoco es sobreyectiva (ver notas de clase).

■

4.2 Sea A una matriz diagonalizable por semejanza, cuyos valores propios son todos $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Demostrar que $A^{-1} = A$.

(Febrero 2002)

Resolución:

- Si A es diagonalizable $\Longrightarrow \exists$ P regular / $D = P^{-1}\cdot A\cdot P$, siendo D una matriz diagonal cuya diagonal principal está formada por los valores propios de A

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- por otra parte, si todos los valores propios son 1 ó -1, A es regular (1).

(1) - el determinante de una matriz cuadrada A coincide con el producto de las raíces de su polinomio característico, que en nuestro problema son todas 1 ó -1; por lo tanto:

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \lambda_n \neq 0 \quad y \quad A \text{ es regular}$$

- otra forma de demostrarlo:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Longrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Longrightarrow |A| = |P \cdot D \cdot P^{-1}| = |P| \cdot |D| \cdot |P^{-1}| = |P| \cdot |D| \cdot \frac{1}{|P|} =$$

$$= |P| \cdot \frac{1}{|P|} \cdot |D| = |D| \neq 0 \Longrightarrow A \text{ es regular}$$

Calculemos A^{-1}:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Tomando inversas:

$$A^{-1} = (P \cdot D \cdot P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} \cdot D^{-1} \cdot P^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$$

$$D^{-1} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

(2) Por ser D diagonal.

(3) Por ser todos los λ_i de valor 1 ó -1, sus inversos son ellos mismos.

Por lo tanto:

$$A^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} = A$$

■

4.3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ discutir, en función de los valores de α, si es diagonalizable y, cuando lo sea, obtener las matrices D y P tales que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

(Septiembre 2002)

Resolución:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- Valores propios:

$$\boxed{p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=0}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & -2 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (\alpha-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$(\alpha-\lambda)\cdot(\lambda^2-3\lambda+2)=(\alpha-\lambda)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\alpha \\ \lambda_2=2 \\ \lambda_3=1 \end{cases}$$

(1) desarrollando el determinante por los elementos de la 3ª fila

- Discusión de la diagonalización de A. Sabemos que:

$\boxed{\text{A es diagonalizable} \Leftrightarrow \mu_i = m_i}$ donde $\mu_i = \mathit{dim}\, V(\lambda_i))$, $\forall i$

Estudiemos los posibles casos en función de los valores de α.

i) Si $\alpha\neq1 \wedge \alpha\neq2$:

$$\left.\begin{cases} \lambda_1=\alpha & (m_1=1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_1=1) \\ \lambda_2=2 & (m_2=1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_2=1) \\ \lambda_3=1 & (m_3=1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_3=1) \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{ A DIAGONALIZABLE}$$

(2) por ser valores propios simples

Obtención de las matrices D y P:

$\boxed{\lambda_1=\alpha}$ $V(\alpha)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3 / A\cdot\mathbf{x}=\alpha\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3/ (A-\alpha\cdot I)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A-\alpha\cdot I)$

$$\begin{pmatrix} 4-\alpha & 6 & -2 \\ -1 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4-\alpha)x_1+6x_2-2x_3=0 \\ -x_1-(1+\alpha)x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_3=(\alpha-1)x_2 \end{cases}, \ \forall x_2 \in \mathbb{K}$$

$\mathbf{x} \in V(\alpha) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (\,-2x_2 \;\; x_2 \;\; (\alpha-1)x_2\,)^t$; $B_{V(\alpha)}=\{\,(\,-2 \;\; 1 \;\; \alpha-1)^t\,\}$

$\boxed{\lambda_2=2}$ V(2)={$\mathbf{x} \in K^3$/ A·$\mathbf{x}$ = 2·$\mathbf{x}$}={$\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$/ (A-2 I)·$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$}=Ker (A-2 I)

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha - 2)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases}, \forall x_2 \in \mathbb{K}$$

$\mathbf{x} \in V(2) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (-3x_2 \;\; x_2 \;\; 0)^t$; $B_{V(2)} = \{ (-3 \;\; 1 \;\; 0)^t \}$

$\boxed{\lambda_3=1}$ V(1)={$\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$/ A·$\mathbf{x}$ = 1·$\mathbf{x}$}={$\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$/ (A-I)·$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$}=Ker (A-I)

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha - 1)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}, \forall x_2 \in \mathbb{K}$$

$\mathbf{x} \in V(1) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (-2x_2 \;\; x_2 \;\; 0)^t$; $B_{V(1)} = \{ (-2 \;\; 1 \;\; 0)^t \}$

Entonces:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Si $\alpha = 2$:

En este caso $\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 & (m_1 = 2) \\ \lambda_2 = 1 & (m_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = 1) \end{array} \right\}$; A diag. $\Leftrightarrow$ *dim* V(λ_1)=2

$\boxed{\lambda_1=2}$ V(2)={$\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$/ A·$\mathbf{x}$ = 2·$\mathbf{x}$}={$\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$/ (A-2·I)·$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$}=Ker (A- 2·I)

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dim (V(2)) = dim $\mathbb{K}^3$- nº ecs.lin.indeps. = 3 – rg (A-2I) =
= 3-1 = 2 $\Longrightarrow$ A DIAGONALIZABLE

Vectores propios:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x_1 = x_3 - 3x_2 \quad , \forall x_2, x_3 \in \mathbb{K}$$

$$\mathbf{x} \in V(2) \iff \mathbf{x} = (\, x_3\text{-}3x_2 \;\; x_2 \;\; x_3\,)^t \;;$$

$$B_{V(2)} = \{\, (-3 \;\; 1 \;\; 0)^t \,, (1 \;\; 0 \;\; 1)^t \,\}$$

$\boxed{\lambda_2=1}$ $\quad V(1)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3 / \, A\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3 / \, (A\text{-}I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A\text{-}I)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ \text{-}x_1\text{-}2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases} \quad , \forall x_2 \in \mathbb{K}$$

$\mathbf{x} \in V(1) \iff \mathbf{x} = (\, \text{-}2x_2 \;\; x_2 \;\; 0\,)^t \;;\; B_{V(1)} = \{\, (-2 \;\; 1 \;\; 0)^t \,\}$

Entonces:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iii) Si $\alpha = 1$:

En este caso $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \quad (m_1 = 1 \Rightarrow \mu_1 = 1) \\ \lambda_2 = 1 \quad (m_2 = 2) \end{array} \right\}$; A diag. $\iff$ *dim* V(1)=2

$V(1)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3 / \, A\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3 / \, (A\text{-}1\cdot I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A\text{-}\,1\cdot I)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dim (V(1)) = dim $\mathbb{K}^3$*- nº ecs.lin.indeps =3–rg (A-I) =*

= 3-2 = 1 $\Longrightarrow$ A NO DIAGONALIZABL*E*

■

4.4 Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo y considérese la base B = {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$}. Se sabe que:

- el vector $\mathbf{e_2}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$
- Ker *f* = { $\mathbf{x} = (\, x_1 \; x_2 \; x_3\,)^t \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x_1 + 5x_2 = 0 \wedge 7x_1 - 3x_2 = 0$ }
- la imagen mediante *f* del vector $3\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} - 9\mathbf{e_3}$ es el vector $6\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} - 6\mathbf{e_3}$.

Se pide:

a) Obtener la matriz de la transformación en la base B.

b) Obtener los valores y vectores propios, así como la naturaleza de la transformación.

c) Encontrar una base B' en la que la matriz asociada a *f* sea lo más sencilla posible. Escribir dicha matriz así como la relación entre las matrices asociadas a *f* en las bases B y B'.

(Enero 2003)

<u>*Resolución:*</u>

a) $$A_B = \left((f(\mathbf{e_1}))_B \quad (f(\mathbf{e_2}))_B \quad (f(\mathbf{e_3}))_B \right)$$

- $f(\mathbf{e_2}) \overset{(1)}{=} 1\cdot \mathbf{e_2} \Longrightarrow \boxed{(f(\mathbf{e_2}))_B = (\ 0\ \ 1\ \ 0\ )^t}$

(1) por ser $\mathbf{e_2}$ un vector propio asociado a 1

- $f(3\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} - 9\mathbf{e_3}) = 6\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} - 6\mathbf{e_3} \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$3f(\mathbf{e_1})+6f(\mathbf{e_2})-9f(\mathbf{e_3}) = 6\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e_2} - 6\mathbf{e_3} \qquad (*)$$

(2) por ser f lineal

- $\operatorname{Ker} f = \{\ \mathbf{x} = (\ x_1\ x_2\ x_3\ )^t \in \mathbb{R}^3/\ \ 3x_1 + 5x_2 = 0\ \wedge\ 7x_1 - 3x_2 = 0\ \}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \mathbf{x}_B = (\ 0\ \ 0\ \ x_3\ )^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{e_3} \in \operatorname{Ker} f \ \text{ por lo que }\ f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{f(\mathbf{e_3})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Sutituyendo $f(\mathbf{e_2})$ y $f(\mathbf{e_3})$ en la expresión (*) y despejando se sobtiene $f(\mathbf{e_1})$:

$$f(\mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_3} \Longrightarrow \boxed{(f(\mathbf{e_1}))_B = (\ 2\ \ 0\ \ -2\ )^t}$$

Con lo que

$$\begin{array}{cccc} & (f(\mathbf{e_1}))_B & (f(\mathbf{e_2}))_B & (f(\mathbf{e_3}))_B \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_B = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

b)

- <u>Naturaleza de la transformación</u>:

  Del apartado anterior sabemos que Ker $f \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow$ el endomorfismo no es inyectivo $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ no es sobreyectivo

  (3) Por ser endomorfismo.

- <u>Valores propios</u>:

$$\boxed{p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)(-\lambda)\right] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} \lambda_1 = 2 \quad (m_1 = 1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \mu_1 = 1) \\ \lambda_2 = 1 \quad (m_2 = 1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \mu_1 = 1) \\ \lambda_3 = 0 \quad (m_3 = 1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \mu_1 = 1) \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{A DIAGONALIZABLE}$$

(4) Por ser valores propios simples

La matriz más sencilla asociada a *f* será diagonal, y la base correspondiente será una base de vectores propios.

$\boxed{\lambda_1=2}$ V(2)=$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 2\cdot\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-2\cdot I)\ \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$=Ker (A- 2·I)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}, \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x} \in V(2) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (\ x_1\ \ 0\ \ -x_1\ )^t$; $B_{V(2)} = \{\ \mathbf{v_1} = (\ 1\ 0\ -1)^t\ \}$

$\boxed{\lambda_2=1}$ V(1)=$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 1\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-I)\ \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$=Ker (A- I)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -2x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x} \in V(1) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (\ 0\ x_2\ \ 0)^t$; $B_{V(1)} = \{\ \mathbf{v_2} = (\ 0\ 1\ \ 0\ )^t\ \}$

$\boxed{\lambda_3=0}$ No hace falta realizar los cálculos para obtener V(0) puesto que V(0)=Ker (f) y en este caso ya lo conocemos

$$V(0) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A \cdot \mathbf{x} = 0\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-0 \cdot I)\ \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{Ker}\ (A-0 \cdot I) = \text{Ker} f$$

$$B_{V(0)} = B_{\text{Ker} f} = \{\ \mathbf{v_3} = (\ 0\ \ 0\ \ 1)^t\ \}$$

En la base de vectores propios B'={ $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ }, la matriz asociada al endomorfismo es diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verificándose la relación

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

4.5 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ¿son A y B semejantes?. Justificar la respuesta.

(Enero 2003)

Resolución:

A y B no son semejantes, puesto que una condición necesaria (no suficiente) de semejanza es que sus polinomios característicos sean iguales y en este caso son distintos, lo cual se observa a simple vista, por ser A y B matrices triangulares.

$$p_A(\lambda)=(3-\lambda)\ (2-\lambda)^2$$

$$p_B(\lambda)=(3-\lambda)^2\ (1-\lambda)$$

■

4.6 Dada una matriz $A \in E_{2x2}(\mathbb{R})$ con valores propios $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ y vectores propios asociados $\mathbf{v_1} = (1\ 3\ )^t$ y $\mathbf{v_2} = (3\ -1\ )^t$ respectivamente:

a) ¿Es la matriz A simétrica? Razona la respuesta.

b) Calcular el determinante de A.

c) ¿Cuántas de dichas matrices existen? Calcular una.

(Septiembre 2003)

<u>*Resolución:*</u>

a) Una matriz es simétrica si y sólo si es diagonalizable mediante una matriz ortogonal real. Lo cual equivale a decir que una matriz es simétrica si y sólo si vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí.

En este caso:

$$< \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} > = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$$

Por lo tanto, estos vectores son ortogonales y la matriz A es simétrica.

b) Por ser A simétrica, es diagonalizable por semejanza, es decir

$$\exists \text{ P regular } / \text{ D} = \text{P}^{-1} \cdot \text{A} \cdot \text{P}$$

siendo D una matriz diagonal cuya diagonal principal está formada por los valores propios de A. En este caso:

$$\text{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejando A en la expresión anterior:

$$\text{A} = \text{P} \cdot \text{D} \cdot \text{P}^{-1} \Longrightarrow |\text{A}| = |\text{P} \cdot \text{D} \cdot \text{P}^{-1}| \overset{(1)}{=} |\text{P}| \cdot |\text{D}| \cdot |\text{P}^{-1}| \overset{(1)}{=} |\text{P}| \cdot |\text{D}| \cdot \frac{1}{|P|} \overset{(2)}{=}$$

$$= |\text{P}| \cdot \frac{1}{|P|} \cdot |\text{D}| = |\text{D}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \cdot 1 = 0$$

(1) Por las propiedades de los determinantes.
(2) Por la prop. conmutativa del producto de números reales.

- <u>Otra forma</u>:

  El determinante de una matriz cuadrada coincide con el producto de las raíces de su polinomio característico (ver notas de clase). Entonces, en este caso:

$$|\text{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \cdot 1 = 0$$

c)

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v_1} \in \text{V}(0) \Longrightarrow \text{A} \cdot \mathbf{v_1} = 0 \cdot \mathbf{v_1} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v_2} \in \text{V}(1) \Longrightarrow \text{A} \cdot \mathbf{v_2} = 1 \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{v_2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}+3a_{12}=0 \\ a_{21}+3a_{22}=0 \\ 3a_{11}-a_{12}=3 \\ 3a_{21}-a_{22}=-1 \end{cases}$$

Éste es un sistema compatible determinado (se dejan los cálculos para el alumno), por lo tanto, la matriz A es única . Resolviendo se obtiene:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

■

4.7 Demostrar que siendo A y B dos matrices cuadradas, una de ellas regular, las matrices A·B y B·A tienen los mismos valores propios.

(Septiembre 2003)

Resolución:

Sean

$$C = A\cdot B \qquad (1)$$

$$D = B\cdot A \qquad (2)$$

Supongamos que A es la matriz que es regular. Ello significa que existe A^{-1}.

Premultiplicando (1) por A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot C = A^{-1}\cdot A\cdot B = B$$

y, sustituyendo B en (2):

$$D = B\cdot A = A^{-1}\cdot C\cdot A \;\Rightarrow\; \text{A y D son semejantes}$$

Por ser semejantes, C y D tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios.

■

4.8 Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que en una base B verifica:

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar la matriz A que define dicha aplicación en la base B.

b) ¿Es la matriz A diagonalizable? Justificar la respuesta.

c) En caso de ser A diagonalizable, diagonalizarla.

d) Hallar $|A|^5$.

e) Encontrar, si es posible, una matriz P ortogonal tal que $D = P^t \cdot A \cdot P$.

(Enero 2004)

<u>*Resolución:*</u>

a) La matriz que caracteriza a la aplicación en una base $B = \{ \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \}$ es

$$A = \begin{pmatrix} (f(\mathbf{e_1}))_B & (f(\mathbf{e_2}))_B & (f(\mathbf{e_3}))_B \end{pmatrix}$$

<u>Datos</u>:

- $f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(\, 2\mathbf{e_2}\,) = 2\mathbf{e_1} + 2\,\mathbf{e_3} \overset{(1)}{\Rightarrow} 2f(\,\mathbf{e_2}\,) = 2\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_3}$

- $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(\,\mathbf{e_3}\,) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$

- $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(\,\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = 2\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_2}) + f(\mathbf{e_3}) = 2\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$$

(1)por ser f lineal

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \Longrightarrow f(\mathbf{e_1})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_3} \Longrightarrow f(\mathbf{e_2})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \Longrightarrow f(\mathbf{e_3})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La matriz A es diagonalizable, puesto que toda matriz simétrica real lo es.

c) $$\boxed{p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 & m_1 = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 & m_2 = 1 \Rightarrow \mu_2 = 1 \end{cases}$$

(2) Por ser A diagonalizable

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

Por ser A y D semejantes: $|A| \overset{(3)}{=} |D| \Rightarrow |A|^5 = |D|^5 = 2^5 = 32$

(3) $D = P^{-1}\cdot A\cdot P \Longrightarrow A = P\cdot D\cdot P^{-1} \Longrightarrow |A| = |P\cdot D\cdot P^{-1}| = |P|\cdot|D|\cdot|P^{-1}| = |P|\cdot|D|\cdot\dfrac{1}{|P|} =$

$$= |P|\cdot\frac{1}{|P|}\cdot|D| = |D|$$

e) Sí será posible encontrar P ortogonal, puesto que toda matriz simétrica real es diagonalizable por semejanza ortogonal; es decir

$\exists$ P ortogonal $(P^{-1}=P^t)$ / $D = P^{-1}\cdot A\cdot P \Longrightarrow D = P^{-1}\cdot A\cdot P = P^t\cdot A\cdot P$

Necesitamos obtener una base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

$\boxed{\lambda_1=-1}$ $\quad V(-1)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = -1\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A+I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\mathrm{Ker}\,(A+I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\dim(V(-1)) = \dim \mathbb{R}^3$ - nº ecs. lin. indeps. $=3-\mathrm{rg}\,(A+I) = 3-1 = 2$,
como ya sabíamos que tenía que ocurrir

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \quad , \forall x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \in V(-1) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (-x_2-x_3 \;\; x_2 \;\; x_3)^t \;;$$

$$B_{V(-1)} = \{\mathbf{v_1} = (-1 \;\; 1 \;\; 0)^t, \mathbf{v_2} = (-1 \;\; 0 \;\; 1)^t\}$$

$\boxed{\lambda_2=2}$ $\quad V(2)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 2\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-2I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker }(A-2I)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}, \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x} \in V(2) \Leftrightarrow \mathbf{x} = (\, x_1 \;\; x_1 \;\; x_1 \,)^t \;;\; B_{V(2)} = \{\, \mathbf{v_3} = (\, 1 \;\; 1 \;\; 1)^t \,\}$

$B_1=\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ es una base de vectores propios de A. En esta base, la matriz del endomorfismo es diagonal, cumpliéndose

$$D = P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{v_1}{\downarrow} & \overset{v_2}{\downarrow} & \overset{v_3}{\downarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pero P_1 no es ortogonal (es decir $P^{-1} \neq P^t$). Para que la matriz P de semejanza sea ortogonal necesitamos obtener una base de vectores propios ortonormada.

- Primero obtenemos una base B_2 ortogonal a partir de B_1.

  Los vectores $\{\, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \,\}$ son ortogonales a $\mathbf{v_3}$, por ser vectores propios de una matriz simétrica real asociados a valores propios distintos.

  A partir de $\{\, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \,\}$ obtenemos dos vectores $\in V(-1)$ ortogonales entre sí, mediante el método de Gram-Schmidt.

  $\mathbf{v'_1} = \mathbf{v_1} = (\, -1 \;\; 1 \;\; 0 \,)^t$

  $\mathbf{v'_2} = \mathbf{v_2} + \alpha\, \mathbf{v'_1} \;/\; \langle \mathbf{v'_2}, \mathbf{v'_1} \rangle = 0 \quad \Rightarrow$

  $\mathbf{v'_2} = (\, -1-\alpha \;\; \alpha \;\; 1 \,)^t \;/\; (1+\alpha) + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1/2 \quad \Rightarrow$

  $$\mathbf{v'_2} = (\, -1/2 \;\; -1/2 \;\; 1 \,)^t$$

  $B_2=\{\mathbf{v'_1}, \mathbf{v'_2}, \mathbf{v_3}\}$

- A continuación, se normaliza B_2 para obtener una base ortonormada, B_3. Para ello, se divide cada vector entre su norma.

$$B_3 = \{\mathbf{v}''_1, \mathbf{v}''_2, \mathbf{v}''_3\} = \left\{\frac{\mathbf{v}'_1}{\|\mathbf{v}'_1\|}, \frac{\mathbf{v}'_2}{\|\mathbf{v}'_2\|}, \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}\right\}, \quad \text{siendo:}$$

$$\|\mathbf{v}'_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1 \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v}'_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_2 \rangle} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

obteniéndose la base ortonormada:

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^t, \ \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}^t, \ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \right\}$$

Luego

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \ \ v''_1 & \ \ v''_2 & \ \ v''_3 \\ \ \ \downarrow & \ \ \downarrow & \ \ \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{array}$$

verificándose:

$$\boxed{D = P_2^{-1} \cdot A \cdot P_2 = P_2^t \cdot A \cdot P_2}\text{, por ser } P_2 \text{ ortogonal.}$$

■

4.9 Dada la matriz $A(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Diagonalizar A por semejanza, indicando la matriz P de semejanza.

b) Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, calcular A^6 y A^{-1}.

(Enero 2005)

Resolución:

a) A es simétrica real, por lo tanto es diagonalizable por semejanza (además ortogonalmente si fuera necesario, aunque no se pide).

- Valores propios:

$$\boxed{p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \quad (m_1 = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_1 = 2) \\ \lambda_2 = -1 \quad (m_2 = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu_1 = 1) \end{cases}$$

(1) Desarrollando por los elementos de la segunda fila
(2)Por ser A diagonalizable

- Vectores propios:

$\boxed{\lambda_1=1}$ V(1)={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ A·**x** = 1·**x**}={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ (A-I)·**x** = **0**}=Ker (A-I)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dim (V(1)) = dim $\mathbb{R}^3$- nº ecs. lin. indeps. = 3– rg (A-I) = 3-1 = 2
como ya sabíamos que tenía que ocurrir

Vectores propios:

$$-x_1 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1 \qquad , \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \in V(1) \iff \mathbf{x} = (\, x_1 \;\; x_2 \;\; x_1\,)^t \;\; ;$$

$$B_{V(1)} = \{\, \mathbf{v_1} = (1 \;\; 0 \;\; 1)^t, \mathbf{v_2} = (0 \;\; 1 \;\; 0)^t \,\}$$

$\boxed{\lambda_2=-1}$ V(-1)={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ A·**x** = -1·**x**}={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ (A+I)·**x** = **0**}=Ker (A+I)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 = 0 \Rightarrow \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases} \qquad , \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \in V(-1) \iff \mathbf{x} = (\, x_1 \;\; 0 \;\; -x_1\,)^t \;\; ; \quad B_{V(2)} = \{\, \mathbf{v_3} = (\,1 \;\; 0 \;\; -1)^t \,\}$$

B_1={**v₁**, **v₂**, **v₃**} es una base de vectores propios de A. En esta base, la matriz del endomorfismo es diagonal, cumpliéndose

$$D = P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si fuera necesario, a partir de B_1 podríamos obtener una base de vectores propios ortonormada; en este caso se cumpliría

$$D = P_2^{-1} \cdot A \cdot P_2 = P_2^{t} \cdot A \cdot P_2 ,$$

siendo P_2 ortogonal.

b)

- A^6

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Longrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Longrightarrow$$

$$A^6 = (P \cdot D \cdot P^{-1})^6 = (P \cdot D \cdot P^{-1})\,(P \cdot D \cdot P^{-1}) \ldots (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$

$$= P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot I \cdot \ldots \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^6 \cdot P^{-1} = P \cdot I \cdot P^{-1} = I$$

- A^{-1}

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = (P \cdot D \cdot P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} \cdot D^{-1} \cdot P^{-1} =$$

$$= P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1} = A$$

■

4.10 Diagonalizar la matriz A, indicando cuál es la matriz P de semejanza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2005)

Resolución:

- Valores propios:

$$\boxed{p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \quad (m_1 = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu_1 = 1) \\ \lambda_2 = 2 \quad (m_2 = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu_2 = 1) \quad \Rightarrow \quad \text{A es diagonalizable} \\ \lambda_3 = -2 \quad (m_3 = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu_3 = 1) \end{cases}$$

(1) Por ser valores propios simples

- Vectores propios:

$\boxed{\lambda_1=1}$ V(1)={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ A·$\mathbf{x}$ = 1·$\mathbf{x}$}={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ (A-I)·$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$}=Ker (A-I)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(dim (V(1)) = dim $\mathbb{R}^3$- nº ecs. lin. indeps. = dim $\mathbb{R}^3$ – rg (A-I) = 3-2 = 1, como ya sabíamos).

Obtenemos los vectores propios:

$$\begin{cases} 2x_1 \quad +3x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -\dfrac{2}{3}x_1 \\ x_2 = -\dfrac{7}{3}x_1 \end{cases} , \ \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x} \in$ V(1) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x} = (x_1 \ \ -\frac{7}{3}x_1 \ \ -\frac{2}{3}x_1)^t$; $B_{V(1)}$ = { $\mathbf{v_1} = (1 \ \ -\frac{7}{3} \ \ -\frac{2}{3})^t$}

$\boxed{\lambda_2=2}$ V(2)={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ A·$\mathbf{x}$ = 2·$\mathbf{x}$}={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ (A-2I)·$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$}=Ker (A-2I)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(dim (V(1)) = dim $\mathbb{R}^3$- nº ecs. lin. indeps. = dim $\mathbb{R}^3$ – rg (A-2I) = 3-2 = 1, como ya sabíamos).

Obtenemos los vectores propios:

$$\begin{cases} -x_1 \qquad\qquad = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases} , \ \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x} \in$ V(2) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x} = (0 \ \ 3x_3 \ \ x_3)^t$; $B_{V(2)}$ = { $\mathbf{v_2} = (0\ 3\ 1)^t$}

$\boxed{\lambda_3=-2}$ V(-2)={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ A·$\mathbf{x}$ = -2·$\mathbf{x}$}={$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$/ (A+2I)·$\mathbf{x}$ = $\mathbf{0}$}=Ker (A+2I)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(dim (V(-2)) = dim $\mathbb{R}^3$- nº ecs. lin. indeps. = dim $\mathbb{R}^3$ – rg (A+2I) = 3-2 = 1, como ya sabíamos).

Obtenemos los vectores propios:

$$\begin{cases} 3x_1 \qquad\qquad = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} , \ \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{x} \in$ V(-2) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x} = (0 \ \ -x_3 \ \ x_3)^t$; $B_{V(-2)}$ = { $\mathbf{v_3} = (0\ -1\ 1)^t$}

entonces

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{3} & 3 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

verificándose

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

■

4.11 ¿Es cierto que los autovectores de una matriz cuadrada de orden *n* asociados a autovalores distintos son linealmente independientes? En caso afirmativo demuéstralo.

(Enero 2001)

4.12 Demostrar que las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

(Enero 2003)

4.13

a) Enunciar:

- condición necesaria de diagonalización de una matriz $A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$
- condición necesaria y suficiente de diagonalización de una matriz $A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$
- condición suficiente de diagonalización de una matriz $A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$

b) Demostrar que un vector propio $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ de una matriz $A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$ está asociado a un único valor propio de A.

(Enero 2003)

4.14 Sea λ un valor propio de A y sea **x** un vector propio asociado a λ. Utilizar el método de inducción para demostrar que λ^m es un valor propio asociado a A^m y el mismo **x** es un vector propio de A^m asociado a λ^m, $\forall$m. (Nota de ayuda: para la demostración partir de la definición de valor y vector propio)

(Enero 2005)

<u>*Resolución:*</u>

Se pide demostrar que $A^m \cdot \mathbf{x} = \lambda^m \cdot \mathbf{x}$ sabiendo que $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$.

Para m=1: Cierto (dato)

Para m=k, se supone cierto (hipótesis de inducción):

$$A^k \cdot \mathbf{x} = \lambda^k \cdot \mathbf{x}$$

Para m=k+1: suponiéndose cierto para m=k se demuestra que también es cierto para m=k+1. Es decir, se quiere demostrar que $A^{k+1} \cdot \mathbf{x} = \lambda^{k+1} \cdot \mathbf{x}$

$$A^{k+1} \cdot \mathbf{x} = A \cdot (A^k \cdot \mathbf{x}) \overset{(1)}{=} A \cdot (\lambda^k \cdot \mathbf{x}) \overset{(2)}{=} \lambda^k \cdot (A \cdot \mathbf{x}) \overset{(3)}{=} \lambda^k \cdot (\lambda \cdot \mathbf{x}) =$$

$$= \lambda^{k+1} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \text{cierto para m=k+1} \Rightarrow \text{cierto } \forall m.$$

(1) Por la hipótesis de inducción
(2) Por las propiedades del producto de matrices por un escalar
(3) Por cumplirse para m=1

■

5

TRIANGULARIZACIÓN POR SEMEJANZA

5.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$ / a,b,c$\in \mathbb{R}$, se pide:

a) Para $a \neq 0$ ¿ Que relación debe verificarse entre los parámetros b y c para que A tenga un autovalor triple?

b) Suponiendo que a=1, b=2, c=0

i) Hallar la matriz de Jordan de A

ii) Obtener una matriz regular P, tal que P J = A P

(Septiembre de 2001)

Resolución:

a) Valores propios de A :

$$|A-\lambda I| = 0 \;\Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ c & a-\lambda & b \\ 0 & c & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^3 - 2(a-\lambda)\cdot b \cdot c = .$$

$$(a-\lambda)\cdot\left[(a-\lambda)^2 - 2\cdot b\cdot c\right] = (a-\lambda)\cdot\left[\lambda^2 - 2a\lambda - 2bc + a^2\right]$$

$$p(\lambda) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \lambda = a \\ \lambda = \dfrac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\left[a^2 - 2bc\right]}}{2} \end{cases} \Rightarrow bc = 0 \Rightarrow b = 0 \;\text{ o }\; c = 0$$

b) Para a=1, b=2, c=0 la matriz A es : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

λ=1 triple

V($\lambda = 1$) :

$$(\text{A-I})\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} \in V(\lambda = 1) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \; x_2 = x_3 = 0 \;\;\Rightarrow\; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{V(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathrm{V}_2(\lambda=1)$:

$$(\mathrm{A}\text{-}\mathrm{I})^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x_3 = 0$$

$$\mathbf{x} \in \mathrm{V}_2(\lambda=1) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{B}_{\mathrm{V}_2(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathrm{V}_3(\lambda=1)$:

$$(\mathrm{A}\text{-}\mathrm{I})^3 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \in \mathrm{V}_3(\lambda=1) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{B}_{\mathrm{V}_3(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Columnas de la matriz P:

$$u_3 \in V_3(\lambda=1) - V_2(\lambda=1) \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = (A-I)u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$u_1 = (A-I)u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

5.2 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular la matriz de Jordan J semejante a A, así como la matriz de paso que cumple $J=P^{-1}AP$

(Febrero de 2002)

Resolución:

Valores propios:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 .$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda^2-2\lambda+1)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$(\lambda^2-2\lambda+1)\left[\left(2-\lambda\right)(-\lambda)+1\right]=(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1 \text{ cuádruple}$$

$$V(\lambda): \quad (A-\lambda I)\,\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1=x_2 \\ x_3=x_4 \end{cases} \quad ; x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} B_{v(\lambda)}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Como la dimensión del subespacio propio no coincide con la multiplicidad algebraica se continúa calculando subespacios sucesivos hasta conseguir uno de dimensión cuatro.

$$V_2(\lambda) \Rightarrow (A- \lambda I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{v_2(\lambda)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u_3}$ se obtiene mediante la expresión $\mathbf{u_3}=(A-\lambda_1 I)\mathbf{u_4}= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u_1}$ se obtiene mediante la expresión $\mathbf{u_1}=(A-\lambda_1 I)\mathbf{u_2}= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Por tanto la matriz P tiene por columnas los cuatro vectores calculados u_i , mientras la matriz J tiene dos bloques elemental de Jordan de orden dos correspondientes a λ.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

5.3 Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcular la matriz de Jordan, J, semejante a A así como la matriz de paso que cumple J=P^{-1} A P.

(Septiembre de 2002)

Resolución:

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -4 & 8 \\ 2 & -1-\lambda & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1)$$

λ_1=1 Multiplicidad algebraica 3

λ_2=2 Multiplicidad algebraica 1

$$V(\lambda_1): \quad (A-\lambda_1 I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad ; x = \begin{pmatrix} x_2+2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B_{v(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como la dimensión del subespacio propio no coincide con la multiplicidad algebraica se continúa calculando subespacios sucesivos hasta conseguir uno de dimensión cuatro.

$$V_2(\lambda_1) \Rightarrow (A-\lambda_1 I)^2\,\mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = 0$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\0\end{pmatrix} B_{v_2(\lambda_1)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V(\lambda_2): \quad (A-\lambda_2 I)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-4&8\\2&-3&-4&8\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}x_1=x_2=0\\ x_3=2x_4\end{cases} \quad ; x=\begin{pmatrix}0\\0\\2x_4\\x_4\end{pmatrix} B_{v(\lambda_1)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

- Vectores de la base de Jordan:

$$\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$\mathbf{u_2}$ se obtiene mediante la expresión $\mathbf{u_2}=(A-\lambda_1 I)\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}2&-2&-4&8\\2&-2&-4&8\\0&0&0&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}.$

$$\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u_4}\in V(\lambda_2); u_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz P tiene por columnas los cuatro vectores calculados u_i , mientras la matriz J tiene tres bloques elemental de Jordan dos asociados a λ=1 y uno asociado a λ=2.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

5.4 Hallar la forma de Jordan de la siguiente matriz, así como la matriz P, tal que : $P^{-1}AP=J$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(Septiembre de 2003)

Resolución:

Valores propios:

$$\left|A-\lambda I\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 4 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(-3-\lambda)(-3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3-\lambda)^2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 & m_2 = 2 \end{cases}.$$

- $\boldsymbol{\lambda_1}$:

$$V(\lambda_1): \quad (A-\lambda_1 I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u_3}$ se obtiene mediante la expresión $\mathbf{u_3}=(A-\lambda_1 I)\mathbf{u_4}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto la matriz P tiene por columnas los cuatro vectores calculados u_i , mientras la matriz J tiene un bloque elemental de Jordan de orden dos correspondiente a λ_1 y dos bloques elementales de Jordan de orden uno correspondientes a λ_2.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad J=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

5.5 Se define una aplicación lineal f de $P_3(x)$ (espacio vectorial de los polinomios en x y coeficientes reales de grado menor o igual que tres) en $E_{2x2}(\mathbb{R})$ (espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 definidas sobre $\mathbb{R}$),

$f: P_3(x) \to E_{2x2}(\mathbb{R})$, de la que se conoce que:

$$f(x^3)=f(-2x) \qquad f(1-x^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(x^2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(1-x)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Obtener la matriz A de f en las bases usuales de $P_3(x)$ y $E_{2x2}(\mathbb{R})$.

b) Hallar la base, dimensión y ecuaciones de los subespacios núcleo e imagen de f.

c) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Son Ker(f) e Im(f) subespacios suplementarios? Razona las respuestas.

d) Si la matriz A representara un endomorfismo T: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, cuál sería la matriz más sencilla posible semejante a A?.

(Febrero de 2004)

Resolución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(1-x^2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \\ f(x^2)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+f(x^2)\Rightarrow$$

$$f(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1-x)=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \\ f(1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=f(1)-\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$f(x^3)=f(-2x)\Rightarrow f(x^3)=-2f(x)=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$$

La matriz de la aplicación tiene por columnas las coordenadas de los transformados de los vectores de la base B={$1,x,x^2,x^3$} en la base usual de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&0&2\\1&0&1&0\\0&-1&0&2\end{pmatrix}$$

b) Núcleo de la Aplicación:

A**x**=0.

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&0&2\\1&0&1&0\\0&-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2+2x_4=0\\ -x_2+2x_4=0\\ x_1=-x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}x_1=0\\x_3=0\\x_2=2x_4\end{array}\quad B_{Ker(f)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Imagen de la aplicación:

Dim P_3(x)=Dim Ker(f)+Dim Im(f)

4 = 1 + 3

$$B_{\mathrm{Im}(f)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Ecuaciones de la Imagen de la aplicación:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = x_4$$

c) Carácter de la Aplicación:

No es inyectiva, Ker(*f*)≠{0}.

No es sobreyectiva Im(*f*)≠ E_{2x2}.

No es biyectiva.

No son subespacios suplementarios puesto que no perteneces al mismo espacio vectorial.

d) Valores propios de A

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda^2-\lambda) = \lambda(1-\lambda)^2(\lambda-1)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \;\; \mathrm{m}_1 = 1 \;\; \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \;\; \mathrm{m}_2 = 3 \;\; \mu_2 = ? \end{cases}$$

$$\mathrm{V}(\lambda_1) : \quad (\mathrm{A}-\lambda_1\mathrm{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad ; B_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathrm{V}(\lambda_2) : (\mathrm{A}-\lambda_2\mathrm{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_4 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_4 = 0\,; \\ 2x_2 = 2x_4 \end{cases} \qquad B_{V(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Como la dimensión del subespacio propio no coincide con la multiplicidad algebraica se continúa calculando subespacios sucesivos hasta conseguir uno de dimensión dos.

$V_2(\lambda_2) \Rightarrow (A- \lambda_2 I)^2\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_2 = 2x_4 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_4 = 0\,; \qquad B_{V_2(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$V_3(\lambda_2) \Rightarrow (A- \lambda_2 I)^3\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{x_2 = x_4\,; \qquad B_{V_3(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u_3}$ se obtiene mediante la expresión $\mathbf{u_3} = (A-\lambda_2 I)\mathbf{u_4}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{u_2}$ se obtiene mediante la expresión $\mathbf{u_2} = (A-\lambda_2 I)\mathbf{u_3}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u_1}$ pertenece al subespacio propio del primer autovalor λ_1 ; $\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

5.6 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Dados los vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dos de ellos no pueden pertenecer a una misma base de Jordan para la matriz A anterior. Dí cuáles son y justifica la respuesta.

b) Obtener una base de Jordan que contenga al vector $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(Febrero de 2004)

Resolución:

*a)*Valores propios de la matriz A; $|A-\lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)[-\lambda(-2-\lambda)+1]$$

$\Rightarrow(-1-\lambda)[\lambda^2+2\lambda+1]$ $\Rightarrow -(\lambda+1)^3=0$

$\lambda=-1$ multiplicidad algebraica = 3.

Vectores propios de A; $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ Se calculan para $\lambda=-1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x_2 = x_3 \Rightarrow V(\lambda=-1)=\left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / a,b \in R \right\}.$$

$dim(V(\lambda=-1))=2 \Rightarrow$ multiplicidad geométrica $\mu=2 <3 \Rightarrow$ Matriz no diagonalizable.

Se pasa a estudiar subespacios sucesivos de $\lambda=-1$ hasta llegar a uno de dimensión tres.

$V_2(\lambda=-1)$: $(A-\lambda I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}.$

$$(A-\lambda I)^2= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$V_2(\lambda=-1)=\left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / a,b,c \in R \right\}.$$

Por tanto, no pueden ser simultáneamente vectores que pertenezcan a la base de Jordan los vectores z e y dado que ambos son vectores que pertenecesn a $V_2(\lambda)$ y tan solo puede haber un vector de $V_2(\lambda)$ en la base de Jordan.

b)

$$\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación se calcula el vector $V(\lambda)$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{u_2} = (A-\lambda I)\cdot \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{u_2} \in V(\lambda).$$

Se debe elegir un nuevo vector para formar una base de R^3. Como la dimensión de $V(\lambda)$ es dos y solo se ha utilizado un vector propio, $\mathbf{u_2}$, se debe escoger un vector de $V(\lambda)$ linealmente independiente con $\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_3}$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \ \mathbf{u_1} \in V(\lambda).$$

La matriz J está formada por dos bloques elementales de Jordan, uno de dimensión uno, correspondiente a el vector $\mathbf{u_1}$ y otro de dimensión dos correspondiente a los vectores $\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_3}$.

$$J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

■

5.7 Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que respecto de la base usual tiene la siguiente expresión:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\3y+2z\\3z\end{pmatrix}.$$

a) Hallar Ker(f) e Im(f).

b) ¿Es f diagonalizable? Hallar la matriz más sencilla posible semejante a A (A matriz del endomorfismo en la base usual), así como la correspondiente matriz regular P.

c) Hallar la matriz de la aplicación en la base $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(Febrero de 2005)

Resolución:

a)

i. Ker(f)

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\3y+2z\\3z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=0\\3y+2z=0\\3z=0\end{cases}\Rightarrow x=y=z=0\Rightarrow \text{Ker(f)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ii. Im(f)

Dim E=Dim Ker(f) + Dim Im(f)

3 = 0 + 3

Dim Im(f)=3$\Rightarrow$Im(f)$\equiv\mathbb{R}^3$

b)

Matriz de la aplicación:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Valores propios de A:

$$\lambda=3 \qquad m=3.$$

Vectores propios:

$$V(\lambda) \Rightarrow (A-\lambda I)\ \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$V(\lambda=3)=\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B_{V(\lambda)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensión del subespacio $V(\lambda)$ debería ser tres para que la matriz sea diagonalizable. Por tanto, la matriz A, no es diagonalizable, por lo que calcularemos la matriz de Jordan.

$V_2(\lambda)=\mathrm{Ker}(A-3I)^2=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A-3I)^2\ \mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

$$(A-3I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A-3I)^2\ \mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{x_3 = 0\,.$$

$$V_2(\lambda)= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B_{V_2(\lambda)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$V_3(\lambda)=\mathrm{Ker}(A-3I)^3=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, (A-3I)^3\ \mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

$$(A-3I)^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$V_3(\lambda)= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B_{V_3(\lambda)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para formar la base de $\mathbb{R}^3$ se debe tomar un vector perteneciente a $V_3(\lambda)$, uno perteneciente a $V_2(\lambda)$ y otro perteneciente a $V(\lambda)$.

$$\mathbf{u_3} \in V_3(\lambda) - V_2(\lambda).$$

$$\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u_2} = (A - 3\ I)\ \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u_1} = (A - 3\ I)\ \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A' = P^{-1}AP$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

■

5.8 Sea J= $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ la forma de Jordan de una matriz A. Obtener los valores propios de A y la dimensión de los subespacios $V_k(\lambda)$ correspondientes, siendo $V_k(\lambda)$ =Ker$(A-\lambda I)^k$.

(Febrero de 2003)

Resolución:

Las matrices semejantes tienen los mismos valores propios. J y A son matrices semejantes, luego $\lambda_1=4$ $m_1=4$; $\lambda_2=3$ $m_2=3$.

Dimensiones de los subespacios:

Para $\lambda_1=4$.

$dim(V(\lambda_1))=2$ $dim(V_2(\lambda_1))=3$ $dim(V_3(\lambda_1))=4$.

Para $\lambda_2=3$.

$dim(V(\lambda_2))=1$; $dim(V_2(\lambda_2))=2$; $dim(V_3(\lambda_2))=3$.

■

5.9 Sea M= $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar para qué valores de a es diagonalizable la matriz M.

b) Hallar la matriz mas sencilla posible, semejante a M para a=1, así como la matriz P correspondiente.

(Septiembre de 2004)

Resolución:

a) Valores y vectores propios:

- Valores propios

$\lambda=a$ m=4

- Vectores propios

$V(\lambda)$ Ker(M-aI); $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$B_{V(\lambda=a)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mu=2 < m \Rightarrow$ Matriz no diagonalizable

b) a=1;

$B_{V(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$V_2(\lambda=1)=\mathrm{Ker}((M-\lambda I)^2)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0$$

$B_{V_2(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$V_3(\lambda=1) \equiv \mathbb{R}^4$

$B_{V_3(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Vectores que se eligen:

$$\mathbf{u_4} \in V_3(\lambda)\text{-}V_2(\lambda) \Rightarrow \mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u_3}=(A-\lambda I)\mathbf{u_4}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u_2}=(A-\lambda I)\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{u_1}\in V(\lambda)$ y es linealmente independiente a $\mathbf{u_4}$, $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_2} \Rightarrow \mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$

La matriz J_1 tiene dos bloques elementales de Jordan, uno de dimensión uno partiendo del vector $\mathbf{u_1}$ y otro del dimensión tres que se obtiene partiendo de los vectores $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_4}$.

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix};$$

■

5.10 Se sabe que el polinomio característico de una matriz cuadrada A es:

$$p(\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+3)^3$$

a) ¿Cuál es el orden de la matriz A?. ¿ y su determinante?

b) ¿ Cuales son las posibles formas de Jordan de la Matriz A?

(Septiembre de 2004)

Resolución:

a) La dimensión de la matriz coincide con el grado del polinomio característico.

La matriz A, por tanto es una matriz 5x5.

El determinante coincide con el producto de los valores propios de la matriz.
$\mathrm{Det}(A) = (1)(-2)(-3)^3=54$

b) Hay tres posibles formas de la matriz de Jordan, solo depende las multiplicidades geométricas del valor propio $\lambda=-3$

i. Dim V(λ=3)=3 Matriz Diagonalizable

$$J=D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ii. Dim V(λ=3)=2 Matriz no diagonalizable

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

iii. Dim V(λ=3)=1 Matriz no diagonalizable

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

■

5.11 Sabiendo que la forma de Jordan de una matriz A es: $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular, de forma razonada, el determinante de A^7.

b) Valores propios λ_i de la matriz A, indicando para cada uno de ellos:

i) Multiplicidad algebraica m_i.

ii) Multiplicidad geometrica μ_i.

iii) Dimensión de los subespacios $V_p(\lambda_i)=Ker(A-\lambda_i I)^p$ que se calculan para obtener la matriz P de semejanza.

c) Dimensiones de los subespacio Núcleo e imagen del endomorfismo *f* asociado a la matriz A

(Septiembre de 2004)

Resolución:

a) Dos matrices semejantes tiene los mismo valores propios y el mismo determinante, por tanto:

Det(A)=Det(J)=$(1)^6\,2=2$

Det(A^7)=$(\text{Det(A)})^7=2^7=128$

b) Valores propios de A:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & m_1 = 6 \\ \lambda_2 = 2 & m_2 = 1 \end{cases}.$$

DimV(λ=1),coincide con el numero de boques elementales de Jordan correspondientes a λ=1, por tanto dimV(λ=1),

Se van calculando subespacios hasta llegar a uno con dimensión igual a la multiplicidad algebraica, por tanto:

$\dim V_2(\lambda=1)=4$ $\qquad$ $\dim V_3(\lambda=1)=5$

Para λ=2 la multiplicidad algebraica y geometrica coincide m=μ=1, dimV(λ=2)=1

c) Como λ=0 no es valor propio de la matriz A, Ker(f)={0}

Por tanto, Dim (Ker(f)) + Dim(Im(f))=Dim($\mathbb{R}^6$)

Dim(Im(f))=6

Im(f) $\equiv \mathbb{R}^6$

■

6

FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

6.1 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ se define una forma cuadrática: $\varphi(\mathbf{x}) = 2\sqrt{2}\, x_1x_2 - x_2^{\,2}$, referida a la base usual.

a) Hallar la forma polar asociada a φ.

b) Diagonalizar ortogonalmente $\varphi(\mathbf{x})$ por el método de los valores propios, obteniendo la matriz de paso P.

c) ¿Qué relación existe entre la matriz que caracteriza a $\varphi(\mathbf{x})$ en la base usual y la matriz P?

d) Clasificar la forma cuadrática. Hallar su signatura.

e) Siendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base usual, hallar un vector conjugado a él.

(Febrero 2002)

<u>*Resolución:*</u>

a) Expresión matricial de $\varphi(\mathbf{x}) = 2\sqrt{2}\, x_1x_2 - x_2^{\,2}$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t\right] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Su forma polar f(**x**, **y**) tiene asociada la misma matriz, luego:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\, x_1y_2 + \sqrt{2}\, x_2y_1 - x_2y_2 .$$

Otra forma de obtener directamente la forma polar f(**x**, **y**) de $\varphi(\mathbf{x})$ consiste en aplicar la fórmula:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{2}\,(x_1+y_1)(x_2+y_2) - (x_2+y_2)^2 - 2\sqrt{2}\, x_1x_2 + x_2^{\,2} - 2\sqrt{2}\, y_1y_2 + y_2^{\,2}\right]$$

$$= \sqrt{2}\, x_1y_2 + \sqrt{2}\, x_2y_1 - x_2y_2 .$$

b) Se calculan en primer lugar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ asociada a $\varphi(\mathbf{x})$ y a f(**x**, **y**) en la base usual:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ó } \lambda = -2.$$

A continuación se toma un vector propio asociado a cada valor propio:

Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x_1 + \sqrt{2}\,x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \sqrt{2}\,x_2 : \; \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,x_1 + x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -\sqrt{2}\,x_1 : \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Se observa que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales.

Para obtener una base de vectores propios ortonormal, se multiplica cada vector por el inverso de su norma.

Las normas de estos vectores son: $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}$ y $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{3}$.

Por tanto, una base de vectores propios ortonormal es:

$$B^* = \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$$

La matriz de paso de la base usual a la base B* tiene por columnas las coordenadas de los vectores de ésta referidos a la base usual:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La expresión de $\varphi(\mathbf{x})$ en la base B* de vectores propios es la forma canónica:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (x_1')^2 - 2\,(x_2')^2.$$

c) Se cumple la siguiente igualdad que relaciona las matrices A y D asociadas a $\varphi(\mathbf{x})$ en las bases inicial y la base B* respectivamente:

$$D = P'\cdot A \cdot P$$

$$P'\cdot A\cdot P = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = D.$$

d) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Como un valor propio es positivo y el otro negativo, la forma cuadrática es indefinida y su signatura es (1,1).

e) Los vectores **x** e **y** son conjugados $\Leftrightarrow$ f(**x**, **y**) = 0

Para hallar un vector **y** = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ conjugado con **x** = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2}\, y_1 - y_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y_2 = \sqrt{2}\, y_1$$

Por ejemplo, si $y_1 = 1$, el vector **y** = $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ es un vector conjugado de **x**.

■

6.2 Sea $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\, \mathbf{x}$, donde A es una matriz simétrica de orden 3 no regular tal que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Se puede afirmar entonces que $\varphi(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa?

a) Es verdadero, pues $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$ son autovalores de A, por lo que al ser A simétrica uno de ellos será un autovalor doble. En cualquier caso, ya sea $\lambda_1 = 0$ doble o $\lambda_2 = -1$ doble, la forma cuadrática $\varphi(\mathbf{x})$ es semidefinida negativa.

b) Es falso, lo único que podemos afirmar es que $\varphi(\mathbf{x})$ no es ni definida positiva, ni definida negativa, ni semidefinida positiva.

c) Sería verdadero si *traza*(A) = -4.

Razonar qué respuestas son correctas de entre las anteriores.

(Septiembre 2002)

Resolución

La matriz A es singular $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0$ es autovalor de A.

Como: $A \cdot \mathbf{v} = (-1) \cdot \mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = (1\ -1\ 0)^t$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_2 = -1$ es autovalor de A.

a) Que la matriz A sea simétrica, no implica que tenga autovalores múltiples. No se conoce el tercer autovalor. No es cierto que la forma cuadrática sea necesariamente semidefinida negativa, pues el tercer autovalor puede ser positivo.

b) Sólo se conocen los dos autovalores $\lambda_1 = 0$ (lo que indica que la forma cuadrática no puede ser definida, ni positiva ni negativa) y λ_2 = -1 (tampoco puede ser semidefinida positiva). Puede ser semidefinida negativa o indefinida.

c) Que *traza*(A) = - 4 $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ = - 4 $\Leftrightarrow$ $0 + (-1) + \lambda_3$ = - 4 $\Leftrightarrow$ λ_3 = - 3. En este caso la afirmación es cierta: la forma cuadrática tiene dos autovalores negativos y uno nulo; es, por tanto, semidefinida negativa.

■

6.3 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ referido a la base B = $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ se define la forma cuadrática: $\varphi(\mathbf{x}) = [\varphi(x_1 \ x_2)^t] = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$.

a) Determinar la expresión de $\varphi(\mathbf{x})$ en la nueva base: B´ = $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, siendo $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

b) Calcular la forma polar asociada a $\varphi(\mathbf{x})$ en la base B.

c) ¿Son conjugados los vectores **u** y **v** del apartado *a*)?

d) Diagonalizar ortogonalmente la forma cuadrática $\varphi(\mathbf{x})$, hallando la nueva base.

e) Enunciar la ley de inercia de Silvester. Hallar la signatura de $\varphi(\mathbf{x})$ y clasificarla.

(Febrero 2003)

<u>*Resolución:*</u>

a) Expresión matricial de $\varphi(\mathbf{x})$ en la base inicial B:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi[(x_1 \quad x_2)^t] = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a $\varphi(\mathbf{x})$ en la nueva base B´ se obtiene mediante la relación:

$A_2 = P^t \cdot A_1 \cdot P$,

donde $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a $\varphi(\mathbf{x})$ en la base B

y la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de paso de B a B´.

Entonces:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}$$

Expresión matricial de $\varphi(\mathbf{x})$ en la base B´:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 9\left(x_1'\right)^2 + 6\ x_1'\ x_2' + 17\left(x_2'\right)^2 .$$

b) La forma polar de $\varphi(\mathbf{x})$ en B es la forma bilineal:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2 .$$

También puede hallarse la forma polar f($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$) mediante la fórmula:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\,[\,\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\,].$$

c) Dos vectores **u** y **v** son conjugados si y sólo si f(**u**, **v**) = 0:

Sin embargo la imagen por f de los vectores **u** y **v** de B´ no es nula:

$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$. Por tanto, no son conjugados.

d) Se calculan en primer lugar los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ asociada a $\varphi(\mathbf{x})$ y a f($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$), en la base inicial B:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 9 \text{ ó } \lambda = 4.$$

A continuación se toma un vector propio asociado a cada valor propio:

Para $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2x_1 - x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -2x_1 :\ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 2x_2 :\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales.

Para obtener una base de vectores propios ortonormal, se multiplica cada vector por el inverso de su norma. Las normas de los vectores son: $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{5}$ y $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{5}$.

Así, una base de vectores propios ortonormal es:

$$B^* = \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}.$$

La matriz asociada a $\varphi(\mathbf{x})$ en la base B* es la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Por tanto, la expresión de $\varphi(\mathbf{x})$ en la base B* de vectores propios ortonormal es la forma canónica:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1'' & x_2'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = 9\left(x_1''\right)^2 + 4\left(x_2''\right)^2.$$

e) Ley de inercia de Silvester: El número de coeficientes positivos, p, y el número de coeficientes negativos, q, de una forma cuadrática real φ expresada en forma canónica es invariante al cambio de base ortonormal. Al par (p,q) se le llama signatura de la forma cuadrática φ.

En este caso: signatura de φ = (2,0). Es una forma cuadrática definida positiva.

■

6.4 Sean los vectores $\mathbf{x} = \left(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\right)^t$ e $\mathbf{y} = \left(y_1\, y_2\, y_3\, y_4\right)^t$. Expresar en función de estas coordenadas la forma polar f(**x**, **y**) asociada a las siguientes formas cuadráticas:

a) $\varphi(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - x_3x_4$

b) $\varphi(\mathbf{x}) = x_1^{\,2} - 5x_2x_3 + x_4^{\,2}$

(Septiembre 2003)

Resolución:

a) $$\varphi(\mathbf{x}) = \left(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1y_2 + x_2y_1 - \frac{1}{2}x_3y_4 - \frac{1}{2}x_4y_3.$$

b) $\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

f(**x**, **y**) = $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} =$

$= x_1y_1 - \frac{5}{2}x_2y_3 - \frac{5}{2}x_3y_2 + x_4y_4$.

<u>**Nota**</u>.- También puede hallarse la forma polar f(**x**, **y**) mediante la fórmula:

f(**x**, **y**) = $\frac{1}{2}[\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})]$.

■

7

PRODUCTO ESCALAR

7.1 Indicar razonadamente cuáles de las siguientes matrices pueden estar asociadas a un producto escalar :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

(Enero 2001)

Resolución:

Para que una matriz represente a un producto escalar en una cierta base, debe cumplir las siguientes condiciones: ser cuadrada, simétrica y definida positiva.

La matriz A no es cuadrada, por tanto no representa un producto escalar.

La matriz B no es simétrica, por tanto no representa un producto escalar.

La matriz C es cuadrada, simétrica y definida positiva, ya que todos sus menores principales son positivos:

$\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix} = 2 > 0$ y $\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix} = 2 > 0$. Por tanto la matriz C sí puede estar asociada a un producto escalar.

La matriz D es cuadrada y simétrica, pero no es definida positiva, ya que:

$\Delta_1 = 1 > 0$ pero $\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} = -2 < 0$. Luego, la matriz D no puede estar asociada a un producto escalar.

■

7.2 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define, para una base $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$, un producto escalar representado por la matriz:

$$G=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

a) Estudiar si $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de espacio euclídeo.

b) Calcular la norma del vector $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

c) A partir de la base B, utilizando el método de Gram-Schmidt, obtener una base ortonormada B''.

d) Indicar cómo se relacionan las matrices asociadas al producto escalar en las bases B y B''. Comprobarlo.

(Septiembre 2001)

<u>*Resolución:*</u>

a) $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = (x_1\ x_2\ x_3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

Utilizando esta expresión matricial, podemos comprobar si se cumplen los axiomas de producto escalar.

i) Positividad: $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq 0$ y $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

G es definida positiva, ya que todos sus menores principales son positivos:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 2 > 0, \quad \Delta_3 = 2 > 0$$

por lo tanto, se cumple la positividad.

ii) Simetría: $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

Se cumple por ser G simétrica.

iii) Bilinealidad: $\langle \mathbf{x},\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z}\rangle = \alpha\cdot\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \beta\cdot\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle$ $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha,\beta,\in \mathbb{R}$

Se cumple por cumplirse la bilinealidad en el producto de matrices.

Por lo tanto, $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de espacio euclídeo.

b) $\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\|^2 = \langle \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\rangle = \langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1\rangle + 2\langle \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle + \langle \mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2\rangle = 2 - 4 + 3 = 1.$

Luego, $\|\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\| = 1.$

c) Sea B = {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$} la base que hay que ortonormalizar.

Llamemos B'= {$\mathbf{e_1}'$,$\mathbf{e_2}'$,$\mathbf{e_3}'$} a la base ortogonal que obtengamos por el método de Gram-Schmidt y B'' = {$\mathbf{e_1}''$,$\mathbf{e_2}''$,$\mathbf{e_3}''$} a la base ortonormal. Así:

$\mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1} = (1\quad 0\quad 0)^t$

$\mathbf{e_2}' = \mathbf{e_2} + \lambda\mathbf{e_1}' = (0\quad 1\quad 0)^t + \lambda(1\quad 0\quad 0)^t = (\lambda\quad 1\quad 0)^t$

$\langle \mathbf{e_2}'\cdot\mathbf{e_1}'\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle(\lambda\quad 1\quad 0)^t\cdot(1\quad 0\quad 0)^t\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$(\lambda\quad 1\quad 0)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda\quad 1\quad 0)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda\ \text{-}2 = 0$$

Luego, $\lambda = 1 \Rightarrow \mathbf{e_2}' = (1\quad 1\quad 0)^t$

$$\mathbf{e_3}' = \mathbf{e_3} + \alpha\mathbf{e_2}' + \beta\mathbf{e_1}' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^t + \alpha\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t + \beta\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 1\end{pmatrix}^t$$

$$\langle \mathbf{e_3}' \cdot \mathbf{e_2}' \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\langle \mathbf{e_3}' \cdot \mathbf{e_1}' \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2\alpha + 2\beta - 2\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Luego, $\mathbf{e_3}' = \begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\end{pmatrix}^t$.

Base ortogonal: B'={ $\mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}' = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}' = -2\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$}=

= {$(1\ 0\ 0)^t$, $(1\ 1\ 0)^t$, $(-2\ -2\ 1)^t$}.

A continuación se calculan las normas de los vectores:

$\|\mathbf{e}_1'\| = \|\mathbf{e_1}\| = \sqrt{2}$.

$\|\mathbf{e}_2'\| = \|\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\| = 1$.

$$\|\mathbf{e}_3'\| = \|-2\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}\| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\end{pmatrix}^t \rangle} =$$

$$= \sqrt{\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

Base ortonormal: B'' ={ $\mathbf{e_1}'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}'' = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}'' = -2\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$}=

$$= \left\{ \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\end{pmatrix}^t \right\}.$$

d) Si G es la matriz del producto escalar en la base B y llamamos G'' a la matriz del producto escalar en B'', la relación entre esas dos matrices es la siguiente:

G'' = $P^t \cdot G \cdot P$, siendo P la matriz de paso de B a B'', así

$$G'' = P^t \cdot G \cdot P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

7.3 En un espacio euclídeo E_3 se define un producto escalar referido a una base ortonormal $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$. Se efectúa un cambio de base, siendo la nueva base:

$B' = \{\mathbf{e_1} = \mathbf{u_1},\ \mathbf{e_2} = -\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2},\ \mathbf{e_3} = -\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}\}$. Se pide:

a) Calcular la matriz asociada al producto escalar en B.

b) En B' se consideran dos vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Hallar el ángulo que forman dichos vectores.

(Febrero 2002)

<u>*Resolución:*</u>

a) La matriz G de este producto escalar, referida a la base ortonormal $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$, es la matriz unidad de orden tres: $G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

La matriz de paso de B a B' es: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como la relación entre las matrices G del producto escalar en dos bases diferentes es que son congruentes, es decir, $G_{B'} = P^t \cdot G_B \cdot P$, se tiene que:

$$G_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) El ángulo que forman los vectores viene dado por: $\cos\ \theta = \dfrac{\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$.

$$\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -3\end{pmatrix} = -2$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -3\end{pmatrix}} = \sqrt{6}$$

$$\text{Cos }\theta = \frac{\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} = \frac{-2}{\sqrt{12}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

De otra forma: Trabajando con los vectores **x** e **y** en la base B (que es ortonormal). Para ello debemos calcular las coordenadas de **x** e **y** en B:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Así se tiene que:

$$\text{Cos }\theta = \frac{\langle \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|} = \frac{\langle (1 \ \ 0 \ \ 1)\cdot(-1 \ \ 2 \ \ -1)\rangle}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot(-1)}{\sqrt{12}} = \frac{-2}{\sqrt{12}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

■

7.4 Indicar razonadamente cuáles de las siguientes matrices pueden estar asociadas a un producto escalar:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 5 & 2 & 3\\ 7 & 5 & 4\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -3 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

(Septiembre 2002)

Resolución:

Para que una matriz represente a un producto escalar en una cierta base, debe cumplir las siguientes condiciones: ser cuadrada, simétrica y definida positiva.

La matriz A no es cuadrada, por tanto no representa un producto escalar.

La matriz B no es simétrica, ya que $B \neq B^t$, por tanto no representa un producto escalar.

La matriz C no es simétrica, ya que $C \neq C^t$, por tanto no representa un producto escalar.

La matriz D es cuadrada, simétrica, ya que $D = D^t$, y definida positiva, ya que todos sus menores principales son positivos:

$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad y \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Por tanto la matriz D sí puede estar asociada a un producto escalar.

■

7.5 Consideremos el espacio vectorial real de los polinomios de grado ≤ 2, $\mathbb{P}_2(x)$, y sea la aplicación :

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{P}_2(x) \times \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{R}$$
$$(p,q) \to \langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

a) Probar que dicha aplicación es un producto escalar.

b) Hallar la matriz G de dicho producto escalar en la base B ={**1, x, x²**} de $\mathbb{P}_2(x)$.

c) ¿Es la base B ortonormada? Razonarlo.

d) Dados los vectores $p(x) = 3x^2 + 1$ y $q(x) = 2x + 1$ referidos a la base B, calcular el valor de la integral $\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ sin efectuar la integración.

e) A partir de la base B, hallar una base ortonormada por el método de Gram-Schmidt.

(Enero 2003)

Resolución

a) Para que la aplicación dada sea producto escalar ha de verificar:

Positividad: $\langle p,p\rangle \geq 0$, $\quad \forall\, p \in \mathbb{P}_2$, es decir:

$$\langle p,p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot p(x)dx = \int_{-1}^{1} [p(x)]^2 dx \geq 0 .$$

Simetría: $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)dx = \int_{-1}^{1} q(x)\cdot p(x)dx = \langle q,p\rangle, \quad \forall\, p,q \in \mathbb{P}_2$

Bilinealidad: $\langle p,(\alpha\cdot q + \beta\cdot r)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\cdot[\alpha\cdot q(x) + \beta\cdot r(x)]dx =$

$$= \alpha\cdot\int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)dx + \beta\cdot\int_{-1}^{1} p(x)\cdot r(x)dx = \alpha\cdot\langle p,q\rangle + \beta\cdot\langle p,r\rangle$$

$\forall\, p,q,r \in \mathbb{P}_2$ y $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Como verifica los tres axiomas es producto escalar.

b) En la base $B = \{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2}\}$ la matriz G es de la forma:

$$G = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle & \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle & \langle \mathbf{1},\mathbf{x^2}\rangle \\ \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle & \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle & \langle \mathbf{x},\mathbf{x^2}\rangle \\ \langle \mathbf{1},\mathbf{x^2}\rangle & \langle \mathbf{x},\mathbf{x^2}\rangle & \langle \mathbf{x^2},\mathbf{x^2}\rangle \end{pmatrix}$$

Se calculan los elementos de G:

$$\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle = \int_{-1}^{1} 1dx = [1]_{-1}^{+1} = 2$$

$$\langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot x\, dx = [\, x^2/2\,]_{-1}^{+1} = 0$$

$$\langle \mathbf{1},\mathbf{x^2}\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot x^2\, dx = [\, x^3/3\,]_{-1}^{+1} = 2/3$$

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot x\, dx = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = [\, x^3/3\,]_{-1}^{+1} = 2/3$$

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x^2}\rangle = \int_{-1}^{1} x\cdot x^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = [x^4/4]_{-1}^{+1} = 0$$

$$\langle \mathbf{x^2},\mathbf{x^2}\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\cdot x^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^4\, dx = [x^5/5]_{-1}^{+1} = 2/5$$

Luego, $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$.

c) La base B no es ortonormada, ya que para serlo la matriz G debería ser I_3, y no es.

d) $$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx = \langle p,q\rangle = (1\ \ 0\ \ 3)\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ \ 0\ \ 3)\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 4$$

e) Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base que hay que ortonormalizar.

Llamemos $B' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ a la base ortogonal que obtengamos por el método de Gram-Schmidt y $B'' = \{\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''\}$ a la base ortonormal. Así:

$$\mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1} = (1\quad 0\quad 0)^t$$

$$\mathbf{e_2}' = \mathbf{e_2} + \lambda \mathbf{e_1}' = (0\quad 1\quad 0)^t + \lambda(1\quad 0\quad 0)^t = (\lambda\quad 1\quad 0)^t$$

$$\langle \mathbf{e_2}'\cdot \mathbf{e_1}'\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle(\lambda\quad 1\quad 0)^t\cdot (1\quad 0\quad 0)^t\rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda\quad 1\quad 0)\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda\quad 1\quad 0)\cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0$$

Luego, $\lambda = 0 \Rightarrow \mathbf{e_2}' = (0 \quad 1 \quad 0)^t$

$$\mathbf{e_3}' = \mathbf{e_3} + \alpha\mathbf{e_2}' + \beta\mathbf{e_1}' = (0 \quad 0 \quad 1)^t + \alpha(0 \quad 1 \quad 0)^t + \beta(1 \quad 0 \quad 0)^t = (\beta \quad \alpha \quad 1)^t$$

$$\langle \mathbf{e_3}' \cdot \mathbf{e_2}' \rangle = 0 \Leftrightarrow (\beta \quad \alpha \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta \quad \alpha \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

$$\langle \mathbf{e_3}' \cdot \mathbf{e_1}' \rangle = 0 \Leftrightarrow (\beta \quad \alpha \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta \quad \alpha \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2\beta + 2/3 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, $\mathbf{e_3}' = (-1/3 \quad 0 \quad 1)^t$.

Base ortogonal: B'={ $\mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}' = \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}' = -\frac{1}{3}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$}=

= {$(1 \; 0 \; 0)^t$, $(0 \; 1 \; 0)^t$, $(-1/3 \; 0 \; 1)^t$}.

A continuación se calculan las normas de los vectores:

$\|\mathbf{e_1}'\| = \|(1 \quad 0 \quad 0)^t\| = \|\mathbf{e_1}\| = \sqrt{2}$ (valor obtenido de G)

$\|\mathbf{e_2}'\| = \|(0 \quad 1 \quad 0)^t\| = \|\mathbf{e_2}\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (valor obtenido de G)

$$\|\mathbf{e_3}'\| = \|(-1/3 \quad 0 \quad 1)^t\| = \sqrt{\langle (-1/3 \quad 0 \quad 1)^t \cdot (-1/3 \quad 0 \quad 1)^t \rangle} =$$

$$= \sqrt{(-1/3 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{(-1/3 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8/45 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{8}{45}}$$

Base ortonormal: B'' = {$\mathbf{e_1}'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}'' = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}'' = \sqrt{\frac{45}{8}}\left[-\frac{1}{3}\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}\right]$}=

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{pmatrix}^t, \sqrt{\frac{45}{8}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \right\}.$$

■

7.6 En un espacio vectorial E de dimensión 3 referido a una base B={$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$} se define un producto escalar mediante la matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Determinar una base ortonormal de E respecto de dicho producto escalar

(Septiembre 2003)

Resolución

B = {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$}

$B_{ortogonal}$ = {$\mathbf{e'_1}$, $\mathbf{e'_2}$, $\mathbf{e'_3}$}

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

$\mathbf{e'_1}=\mathbf{e_1}$

$\mathbf{e'_2}=\mathbf{e_2} + \alpha\, \mathbf{e'_1}$

$\mathbf{e'_3}=\mathbf{e_3} + \alpha\, \mathbf{e'_1} + \beta \mathbf{e'_2}$

Obtención de los vectores:

$$\mathbf{e'_1}=\mathbf{e_1} \Rightarrow C(\mathbf{e'_1})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e'_2}=\mathbf{e_2} + \alpha\, \mathbf{e'_1} \Rightarrow C(\mathbf{e'_2})_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_1} \rangle = 0 \Rightarrow (\alpha,1,0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = (\alpha,1,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow C(\mathbf{e'_2})_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e'_3}=\mathbf{e_3} + \alpha\, \mathbf{e'_1} + \beta\, \mathbf{e'_2} \Rightarrow C(\mathrm{e'_3})_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_1 \rangle = 0 \Rightarrow (\alpha-\beta,\beta,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = (\alpha-\beta,\beta,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha = 0$$

$$\langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_2 \rangle = 0 \Rightarrow (\alpha-\beta,\beta,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = (\alpha-\beta,\beta,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta = 0$$

$$\Rightarrow C(\mathrm{e}'_3)_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B_{\text{ortonormal}} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$

$$\mathbf{u_1} = \frac{\mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|} \qquad \mathbf{u_2} = \frac{\mathbf{e}'_2}{\|\mathbf{e}'_2\|} \qquad \mathbf{u_3} = \frac{\mathbf{e}'_3}{\|\mathbf{e}'_3\|}$$

$$\|\mathbf{e}'_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1 \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} \rangle} = \sqrt{G_{11}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{e}'_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2 \rangle} = \sqrt{(-1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(-1,1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{e}'_3\| = \sqrt{\langle \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_3 \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{e_3}, \mathbf{e_3} \rangle} = \sqrt{G_{33}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\mathbf{u_1} = \frac{\mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u_2} = \frac{\mathbf{e}'_2}{\|\mathbf{e}'_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \frac{\mathbf{e}'_3}{\|\mathbf{e}'_3\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

■

7.7 Sea $\mathbb{P}_2$(x) el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos en x con coeficientes reales. Se define la aplicación:

$$f : \mathbb{P}_2(\mathrm{x}) \times \mathbb{P}_2(\mathrm{x}) \to \mathbb{R}$$
$$(p,q) \quad \to f(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

a) ¿Es *f* producto escalar?. Razonar la respuesta

b) ¿Existe algún polinomio de grado dos en $\mathbb{P}_2$(x) que sea ortogonal al 1 y a x? En caso afirmativo hallar uno.

c) Si la aplicación estuviera definida sobre $\mathbb{P}_n$(x), el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n, *i)* ¿Existiría algún polinomio de grado n ortogonal a 1, x, x^2,…, x^{n-1}? Demostrarlo.

ii) Calcular la matriz de *f* en la base {1, x, x^2, …, x^{n-1}, x^n }

(Enero 2004)

<u>*Resolución*</u>

a) Sí es producto escalar, ya que cumple las tres condiciones:

Positividad:

$$\int_0^1 p(x)p(x)dx \geq 0 \;\; \forall p(x) \in \mathbb{P}_2(x); \qquad \text{Si } \int_0^1 p(x)p(x)dx = 0 \;\; \Rightarrow p(x) = 0$$

Simetría:

$$\int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 q(x)p(x)dx \;\; \forall p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2(x)$$

Bilinealidad:

$$\int_0^1 (\alpha p(x) + \beta q(x))r(x)dx = \alpha \int_0^1 p(x)r(x)dx + \beta \int_0^1 q(x)r(x)dx \;\; \forall p,q,r \in \mathbb{P}_2(x) \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b) $p(x) = a + bx + cx^2$;

$$\langle p(x), 1 \rangle = 0; \qquad \int_0^1 (a + bx + cx^2)1dx = 0; \Rightarrow \left. ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} \right]_0^1 = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0$$

$$\langle p(x), x \rangle = 0; \qquad \int_0^1 (a + bx + cx^2)xdx = 0; \Rightarrow \left. \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^4}{4} \right]_0^1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0$$

$$\begin{cases} 6a + 3b + 2c = 0 \\ 6a + 4b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = -b \Rightarrow b = -6a$$

$p(x) = a - 6ax + 6ax^2$; Si a=1 el polinomio sería $p(x) = 1 - 6x + 6x^2$;

c)

i) $p(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + wx^n$

Debería verificarse:

$$\langle p(x), 1 \rangle = 0; \Rightarrow \int_0^1 (a + bx + cx^2 + \ldots + wx^n)1dx = 0;$$

$$\Rightarrow \left. ax + \frac{bx^2}{2} + \ldots + \frac{wx^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \ldots + \frac{w}{n+1} = 0$$

$$\langle p(x), x \rangle = 0; \Rightarrow \int_0^1 (a + bx + cx^2 + \ldots + wx^n)xdx = 0;$$

$$\Rightarrow \left. \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \ldots + \frac{wx^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \ldots + \frac{w}{n+2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\left\langle p(x), x^{n-1} \right\rangle = 0; \Rightarrow \int_0^1 (a + bx + cx^2 + \ldots + wx^n) x^{n-1} dx = 0;$$

$$\Rightarrow \frac{ax^n}{2} + \frac{bx^{n+1}}{3} + \ldots + \frac{wx^{2n}}{n+2} \Bigg]_0^1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} + \ldots + \frac{w}{2n} = 0$$

Esto representa un sistema de n ecuaciones con n+1 incógnitas, homogéneo:

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \ldots + \frac{w}{n+1} = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \ldots + \frac{w}{n+2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} + \ldots + \frac{w}{2n} = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo tiene siempre solución , además si el número de incógnitas (n+1) es mayor que el número de ecuaciones(n) la solución será distinta de la solución trivial..

ii)

$$\left\langle 1,1 \right\rangle = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = x \Big]_0^1 = 1 \qquad \left\langle 1,x \right\rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle 1,x^2 \right\rangle = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{3}. \quad \ldots.. \quad \left\langle 1,x^n \right\rangle = \int_0^1 1 \cdot x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\left\langle x,x \right\rangle = \int_0^1 x \cdot x dx = \frac{x^3}{3} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \left\langle x,x^2 \right\rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \frac{x^4}{4} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\ldots.. \quad \left\langle x,x^n \right\rangle = \int_0^1 x \cdot x^n dx = \frac{x^{n+2}}{n+2} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

$$\left\langle x^2,x^2 \right\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx = \frac{x^5}{5} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{5} \qquad \left\langle x^2,x^3 \right\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot x^3 dx = \frac{x^6}{6} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\ldots.. \quad \left\langle x^2,x^n \right\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot x^n dx = \frac{x^{n+3}}{n+3} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{n+3}$$

$$\left\langle x^n,x^n \right\rangle = \int_0^1 x^n \cdot x^n dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

La matriz del producto escalar será:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

■

7.8 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define un producto escalar cuya matriz en la base usual B es: $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Obtener una base ortonormada B´ a partir del siguiente sistema de vectores, utilizando el método de Gram-Schmidt:

$$S = \left\{(1\ 0\ 0)^t, (0\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t, (1\ 1\ 1)^t\right\}$$

b) Obtener la matriz de paso de B a B´

c) Expresión del producto escalar en la base B´

(Septiembre 2004)

<u>*Resolución*</u>

a) Para obtener una base a partir de un sistema de vectores se deben extraer los linealmente independientes.

En la familia S hay solo tres vectores independientes , se pueden elegir

$\mathbf{e'_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e'_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{e'_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es dependiente de los anteriores.

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$\mathbf{u_1} = \mathbf{e'_1}$

$\mathbf{u_2} = \mathbf{e'_2} + \alpha\, \mathbf{u_1}$

$\mathbf{u_3} = \mathbf{e'_3} + \alpha\, \mathbf{u_1} + \beta\, \mathbf{u_2}$

$\mathbf{u_1}=\mathbf{e'_1} \Rightarrow \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{u_2}=\mathbf{e'_2} + \alpha\, \mathbf{u_1} \Rightarrow \mathbf{u'_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1} \rangle = 0 \Rightarrow (\alpha,1,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = (\alpha,1,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e'_2}$$

$\mathbf{u_3}=\mathbf{e'_3} + \alpha\, \mathbf{u_1} + \beta\, \mathbf{u_2} \Rightarrow \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_1} \rangle = 0 \Rightarrow (\alpha,\beta,1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = (\alpha,\beta,1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2}$$

$$\langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_2} \rangle = 0 \Rightarrow (\alpha,\beta,1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = (\alpha,\beta,1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta = 0$$

$$\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$B_{ortonormal} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$

$\mathbf{v_1} = \dfrac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|} \qquad \mathbf{v_2} = \dfrac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|} \qquad \mathbf{v_3} = \dfrac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|}$

$\|\mathbf{u_1}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} \rangle} = \sqrt{G_{11}} = \sqrt{2}$

$\|\mathbf{u_2}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{u_2} \rangle} = \sqrt{G_{22}} = \sqrt{1} = 1$

$$\|\mathbf{u_3}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u_3}, \mathbf{u_3} \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{v_1} = \frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v_2} = \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v_3} = \frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

b) Matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

c) Representación del producto escalar en B´

Dado que B´ es una base ortonormal, la matriz que representa el producto escalar es la matriz unidad. $P^t \cdot G \cdot P = I$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = C(\mathbf{x})_{B'}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C(\mathbf{y})_{B'}$$

■

7.9 En el espacio vectorial $\mathbb{P}_2(x)$ de los polinomios en x con coeficientes reales de grado menor o igual que 2, se considera la aplicación producto escalar:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{P}_2(x) \times \mathbb{P}_2(x) && \to \mathbb{R} \\ & (p(x),q(x)) && \to f(p(x),q(x))=p(0)\cdot q(0)+p(1)\cdot q(1)+p(-1)\cdot q(-1) \end{aligned}$$

a) Hallar la expresión matricial del producto escalar en la base B={1,x,x^2}.

b) Comprobar que esta aplicación es producto escalar.

c) Hallar una base ortonormada de $\mathbb{P}_2(x)$ para este producto escalar.

(Febrero 2005)

Resolución

a) $\langle 1,1\rangle = 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 = 3$

$\langle 1,x\rangle = 1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot(-1) = 0$; $\langle x,1\rangle = 0\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 1 = 0$

$\langle 1,x^2\rangle = 1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 1 = 2$; $\langle x^2,1\rangle = 0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 = 2$

$\langle x,x\rangle = 0\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) = 2$

$\langle x,x^2\rangle = 0\cdot 0+1\cdot 1+(-1)\cdot 1 = 0$; $\langle x^2,x\rangle = 0\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot(-1) = 0$

$\langle x^2,x^2\rangle = 0\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 1 = 2$

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para demostrar que la aplicación es producto escalar:se emplea la matriz G, así:

- Positividad.

Los menores principales de G deben ser positivos:

$\Delta_1 = G_{11} = 3 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$; $\Delta_3 = |G| = 4 > 0$

- Simetría.

La matriz G debe ser simétrica G=G^t

- Bilinealidad.

Como la aplicación puede ser representada mediante una matriz, cuadrada 3x3, cumple la condición de bilinealidad.

c) Base ortonormada.

$B=\{1,x,x^2\}$

Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

$\mathbf{u_1}=1$

$\mathbf{u_2}=x+\alpha\, u_1$

$\mathbf{u_3}=x^2+\alpha\, u_1+\beta\, u_2$

$C(\mathbf{u_1})_B=(1\ 0\ 0)^t$

$C(\mathbf{u_2})_B=(\alpha\ 1\ 0)^t$

$$\langle \mathbf{u_2},\mathbf{u_1}\rangle=0\Rightarrow(\alpha,1,0)\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0=(\alpha,1,0)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=3\alpha=0$$

$C(\mathbf{u_2})_B=(0\ 1\ 0)^t\Rightarrow u_2=x$

$\mathbf{u_3}=x^2+\alpha\,\mathbf{u_1}+\beta\,\mathbf{u_2}\Rightarrow C(\mathbf{u}_3)_B=(\alpha\ \beta\ \ 1)^t$

$$\langle \mathbf{u_3},\mathbf{u_1}\rangle=0\Rightarrow(\alpha,\beta,1)\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0=(\alpha,\beta,1)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=3\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=\frac{-2}{3}$$

$$\langle \mathbf{u_3},\mathbf{u_2}\rangle=0\Rightarrow(\alpha,\beta,1)\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0=(\alpha,\beta,1)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=2\beta=0\Rightarrow\beta=0$$

$C(\mathbf{u_3})_B=\left(\frac{-2}{3}\ \ 0\ 1\right)^t\Rightarrow\mathbf{u_3}=-\frac{2}{3}+x^2$

$B_{ortonormal}=\{\mathbf{v_1}\ ,\ \mathbf{v_2}\ ,\ \mathbf{v_3}\}$

$$\mathbf{v_1}=\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|}\qquad \mathbf{v_2}=\frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|}\qquad \mathbf{v_3}=\frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|}$$

$$\|\mathbf{u_1}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u_1},\mathbf{u_1}\rangle}=\sqrt{G_{11}}=\sqrt{3}$$

$$\|\mathbf{u_2}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u_2},\mathbf{u_2}\rangle}=\sqrt{G_{22}}=\sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u_3}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u_3},\mathbf{u_3}\rangle}=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\ \ 0\ 1\right)\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\1\end{pmatrix}}=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\ \ 0\ 1\right)\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{v_1}=\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \frac{-\frac{2}{3} + x^2}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}x^2$$

■

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H. *Introducción al Álgebra Lineal* (Segunda Edición). Limusa, México, 1992.

Anzola, M. y Caruncho, J. *Problemas de Álgebra.* B.U.M.A.R., Madrid, 1978.

Burgos, J. De. *Álgebra Lineal.* McGraw-Hill, Madrid, 1993.

Burgos, J. De. *Curso de Álgebra y Geometría.* Alhambra, Madrid, 1977.

Casanova, J. y Vila, J. *Exámenes de Álgebra Lineal. Problemas Resueltos Propuestos en las E.T.S. de Ingenieros Industriales.* Ediciones Universidad y Cultura, Madrid, 1986.

Diego, B., Gordillo, E. y Valeiras, G. *Problemas de Álgebra y Geometría.* Deimos, Sevilla, 1986.

Espada, E. *Problemas Resueltos de Álgebra.* Editorial Universitaria de Barcelona, 1984.

Faddieev, D. y Sominski, I. *Problemas de Álgebra Superior.* Mir, Moscú, 1976.

García Galludo, M., Bronte Abaurrea, R., Rodriguez Herrerías, M. y Castiñeira Echeverría, CH. *Problemas de Álgebra y Analítica.* Los Autores, Madrid, 1984.

García García, J. y Lopez Pellicer, M. *Álgebra Lineal y Geometría (Curso Teórico-Práctico).* Marfil, Alcoy, 1977.

Hernández, E. *Álgebra y Geometría.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1987.

Hill, R. *Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones* (Tercera Edición). Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1997.

Lang, S. *Álgebra Lineal.* Fondo Educativo Interamericano. México, 1976.

Leon, S. J. *Linear Algebra with Applications.* Prentice-Hall, Inc. 1998.

Luzárraga, A. *Problemas Resueltos de Álgebra Lineal.* Romargraf S.A, Barcelona, 1966.

Noble, B. y Daniel, J.W. *Applied Linear Algebra* (Tercera Edición). Prentice-Hall International Editions, Nueva Jersey, 1988.

Proskuriakov, I.V. *2000 Problemas de Álgebra Lineal.* Reverté, Barcelona, 1978.

Rojo, J. *Álgebra Lineal.* AC, Madrid, 1986.

Rojo, J. y Martín, I. *Ejercicios y Problemas de Álgebra Lineal.* Mc. Graw-Hill / Interamericana de España, S.A, Madrid, 1994.

Strang, G. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1982

Tebar, E. *Problemas de Álgebra* (Segunda Edición). Tebar Flores, Madrid, 1973.

Villa, A. De La. *Problemas de Álgebra.* CLAGSA, Madrid, 1989.