KOPELMAN, R.E. (1985): "Job Redesign and Productivity: A Review of the Evidence", *National Productivity Review*, 4, pp. 237-255.

KUSHNIR, T.; MELAMED, S. (1991): "Work-Load, Perceived Control and Psychological Distress in Type A/B Industrial Workers", *Journal of Organizational Behavior*, 12, pp. 155-168.

MARCUS, J.B. (1978): *TM and Business*, McGraw-Hill, Nueva York.

MARQUÍNEZ, F.; AYALA, A. (1995): "Estrés ocupacional: un problema capital", *Capital Humano*, núm. 79, junio.

MASLACH, C. (1982): *Burnout: The Cost of Caring*, Prentice Hall, Nueva York.

MURPHY, R.L. (1988): "Workplace Interventions for Stress Reduction and Prevention", en C.L. Cooper y R. Payne: *Causes, Coping and Consequences of Stress at Work*, John Wiley & Sons, Chichester, pp. 301-342.

ORGANIZACIÓN INTERNACIONAL DEL TRABAJO (1993): *World Labour Report*, cap. 5, OIT, Ginebra.

PEIRÓ, J.Mª, SALVADOR, A. (1993): *Control del estrés laboral*, Eudema, Madrid.

PEIRÓ, J.Mª. (1993): *Desencadenantes del estrés laboral*, Eudema, Madrid.

ROSENER, J.B. (1990): "Ways Women Lead", *Harvard Business Review*, noviembre-diciembre, pp. 119-125.

SELYE, H. (1974): *Stress without Distres*, Lippincott, Philadelphia.

WHARTON, A.S.; ERICKSON, R.J. (1993): "Managing Emotions on the Job and at Home: Understanding the Consequences of Multiple Emotional Roles", *Academy of Management Review*, 18, pp. 457-486.

LOS FACTORES DE SENSIBILIDAD DE LAS OPCIONES FINANCIERAS (DESARROLLO TEÓRICO)

Autores:
Fermín Martínez Ibáñez
Miguel Angel Peña Cerezo
(Universidad del País Vasco)
Vicente Ruiz Herrán
(Universidad del País Vasco)

1. INTRODUCCIÓN.

El objeto del presente artículo consiste en proporcionar a los interesados en el mundo de las opciones la posibilidad de encontrar de forma sistematizada el desarrollo de los factores de sensibilidad: deltha, gamma, theta, vega y rho.

Creemos que es de gran utilidad que se recopile en un artículo, a nuestro entender de fácil comprensión, el desarrollo de cada uno de estos factores que se encuentran dispersos en la vasta bibliografía existente sobre la materia. Cabe resaltar la dificultad de localizar en la literatura especializada el desarrollo teórico necesario para obtener la expresión matemática de cada uno de los cinco factores de sensibilidad, que si bien nacen de la simple derivación de la fórmula matemática del valor de la opción, por su relevancia merecen ser destacados de forma individual.

La valoración ha sido dentro del campo de los activos financieros derivados una de las áreas que más interés ha despertado en los economistas, es decir, el interés por obtener un modelo teórico que sirva para conocer, a partir de una serie de variables, el valor que debería tener en condiciones de equilibrio un activo determinado. Si nos circunscribimos a las opciones financieras, de entre todos los modelos desarrollados, por su importancia cabe destacar el de F. Black y M. Scholes (1973)[1], el cuál que determina el valor de una opción europea, ya sea de compra "call" o de venta "put", que tiene como subyacente una acción que no reparte dividendos.

La fórmula de valoración de Black-Scholes-73 proporciona el precio de la opción en un momento determinado y en unas circunstancias concretas, es decir, desde un punto de vista estático; en cambio, si queremos saber el efecto que tendrá cualquier cambio en alguna de las variables del modelo sobre el precio de las opciones, deberemos hacer uso de los factores de sensibilidad. Estos indicadores proporcionan un punto de vista dinámico que necesariamente debe complementar la información estática que ofrece la fórmula de valoración. De hecho, el conocimiento de los factores de sensibilidad es fundamental a la hora de llevar a cabo estrategias de inversión.

A lo largo de nuestro trabajo hemos utilizado como modelo de valoración de opciones el de Black-Scholes-73 que tiene como fórmula final para la opción de compra,

$$C = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2)$$

y para la opción de venta,

$$P = C + E \cdot e^{-rt} - S$$

[1] BLACK y SCHOLES (1973).

donde:

$$d_1 = \left[\ln(S/E) + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)\cdot t\right] / \sigma\cdot\sqrt{t}$$

$$d_2 = \left[\ln(S/E) + (r + \tfrac{1}{2}\sigma^2)\cdot t\right] / \sigma\cdot\sqrt{t} = d_1 - \sigma\cdot\sqrt{t}$$

siendo:

- $N(d_1)$ y $N(d_2)$, los valores de la distribución normal acumulada en los puntos d_1 y d_2 de cada distribución respectiva;
- r, la tasa de interés compuesta anual continua y sin riesgo;
- t, el tiempo que resta para la expiración de la opción expresada en fracción de año;
- σ, la desviación estándar de la tasa compuesta de rendimiento anual derivada del cambio del precio de la acción, lo que representa la volatilidad del precio de la acción opcional en el mercado.

Indicamos a continuación la simbología empleada anteriormente y que se mantendrá en los apartados siguientes:

Concepto	*Símbolo*
Precio del Subyacente	S
Precio de Ejercicio	E
Precio del *call*	C
Precio del *put*	P
Tiempo	t
Volatilidad	σ

Los supuestos en los que se desenvuelve el modelo de Black-Scholes[2] son los clásicos del análisis de títulos en un mercado perfecto, es decir:

1.- Los inversores pueden prestar y pedir prestado sin limitación a la misma tasa de interés sin riesgo, conocida y constante en el tiempo estimado.
2.- No se consideran los costes de transacción y de información.
3.- La venta de títulos a corto se puede realizar sin limitación alguna.
4.- El mercado opera continuamente y ofrece cotizaciones continuas sobre las acciones opcionales (activo subyacente).
5.- No tiene en cuenta el dividendo pagado a las acciones opcionales.

[2] SOLDEVILLA, E. (1994).

6.- La distribución de probabilidad de los precios futuros de las acciones es logarítmico-normal, es decir, la distribución logarítmica del precio sigue la ley normal de probabilidad y la varianza del rendimiento de las acciones es constante por unidad de tiempo del periodo.
7.- La opción es de tipo europeo.

2. OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA BLACK-SCHOLES PARA OPCIONES EUROPEAS SOBRE ACCIONES QUE NO REPARTEN DIVIDENDOS (BLACK-SCHOLES 73)

A continuación se indica el desarrollo de la función de valor de las opciones *call* y *put*. Para simplificar dicho desarrollo, se parte del supuesto de que la función de utilidad del inversor es lineal, consiguiendo con ello llegar a la misma fórmula obtenida por los autores originales pero haciéndolo de una forma más comprensible.

2.1. Expresión de la opción de compra (call)

El valor de la opción *call* utilizando la fórmula Black-Scholes es independiente de las preferencias subjetivas del inversor. Por lo tanto, se podrá calcular el valor de la opción de compra asumiendo la función de utilidad más simple *(función de utilidad lineal)*. No obstante, la realización de este supuesto no resta utilidad al resultado, ya que utilizando la fórmula Black-Scholes el precio del *call* resultante es el precio de la opción en equilibrio, incluso cuando las preferencias no son lineales. La finalidad de este supuesto es únicamente simplificar en lo posible el proceso demostrativo de la fórmula.

Si suponemos que falta una fracción de año t para que la opción de compra expire, el valor de esta en el momento de la expiración vendrá dado por:

$$C = \begin{cases} S_t - E & si\ S_t > E \\ 0 & si\ S_t \le E \end{cases}$$

donde S_t es el precio del subyacente a la expiración y E es el precio de ejercicio de la opción de compra.

Asumiendo que la función de utilidad es lineal, el precio del *call* en el momento actual, C_0, es igual al valor esperado $E(C)$ de la opción de compra en el momento de la expiración, descontado a la tasa de interés sin riesgo r, para valorarlo en términos presentes. Teniendo,
siendo $f(S_t)$, la función de densidad de la distribución de probabilidad de la variable S_t en el

$$C_0 = e^{-r}\int_{-\infty}^{\infty} C\, f(C)\, dC = e^{-r}\left[\int_{-\infty}^{E} 0\cdot f(S_t)\cdot dS_t + \int_{E}^{\infty}(S_t - E)\cdot f(S_t)\cdot dS_t\right]$$

$$\Rightarrow C_0 = e^{-r} \int_E^{\infty} (S_t - E) \cdot f(S_t) \cdot dS_t$$

vencimiento de la opción, que se supone logarítmico-normal. El valor esperado de la opción de compra $E(C)$ está descontado por el factor de actualización continuo e^{-r}, donde r es el tipo de interés continuo libre de riesgo para el periodo t hasta la fecha de la expiración. En definitiva, C_0 es el valor presente del beneficio futuro esperado derivado de la posesión de la opción de compra.

Si definimos (con el objeto de facilitar el desarrollo matemático) la variable

$$e^S = S_t, \qquad [2]$$

de donde,

$$d(e^S) = e^S \, dS = dS_t.$$

Si como hemos supuesto, S_t se distribuye lognormalmente, entonces:

$$E(S_t) = e^{\mu + 0.5\sigma^2} \qquad [3]$$

donde μ y σ^2 representan la media y la varianza de la distribución para t, que representa el periodo de tiempo restante hasta la expiración.

Si utilizamos de nuevo la hipótesis de existencia de linealidad en la función de utilidad del inversor, es decir, que éste es neutral al riesgo, podremos valorar el valor a día de hoy del activo subyacente (S_0) en función del valor esperado del activo subyacente en t (S_t) de modo que:

$$S_0 = e^{-r} E(S_t),$$

de donde,

$$E(S_t) = e^r S_0$$

$$e^{\mu + 0.5\sigma^2} = S_0 e^r \qquad [4]$$

y tomando logaritmos en ambos lados de la relación, tenemos que,

$$\mu + 0.5\sigma^2 = \ln S_0 + r \qquad [5]$$

Volviendo a la ecuación [1],

$$C_0 = e^{-r} \int_E^{\infty} S_t \cdot f(S_t) \cdot dS_t - e^{-r} E \int_E^{\infty} f(S_t) \cdot dS_t \equiv A - B \qquad [1']$$

Analizaremos primero A para pasar después a B.

Usando la función de densidad lognormal para $f(S_t)$, tendríamos:

$$A = e^{-r} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_E^{\infty} S_t \frac{1}{S_t} \cdot e^{-\left[(\ln S_t - \mu)^2\right]/2\sigma^2} \cdot dS_t$$

Si se divide por S_t y se sustituye e^S por S_t, S por $\ln S_t$, y $e^S\, dS$ por $d\, S_t$, (véase expresión *[2]*) obtendremos:

$$A = e^{-r} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\ln E}^{\infty} e^S \cdot e^{-\ln(S-\mu)^2/2\sigma^2} \cdot dS = e^{-r} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\ln E}^{\infty} e^{S - \left[(S-\mu)^2/2\sigma^2\right]} \cdot dS \qquad [6]$$

A su vez, para que el resultado sea congruente tras la transformación, el límite inferior de la integral también se ha transformado, pasando de E a ln E.

Si nos centramos ahora únicamente en el exponente de la e de la expresión [6], podremos transformarlo tal y como sigue:

$$S - \frac{(S-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{-(S^2 - 2\mu S + \mu^2 - 2\sigma^2 S)}{2\sigma^2} =$$

$$= \frac{-\left[S^2 - 2S(\mu + \sigma^2) + \mu^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4\right] + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2\sigma^2} =$$

$$= \frac{-\left[S - (\mu + \sigma^2)\right]^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

Por consiguiente, el término A se podrá escribir así:

$$A = e^{-r} \cdot e^{\mu + (\sigma^2/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\ln E}^{\infty} e^{-\left[S - (\mu + \sigma^2)\right]^2/2\sigma^2} \cdot dS \qquad [7]$$

Como $e^{\mu + 0.5\sigma^2} = S_0 e^r$ (*expresión [4]*) tenemos que:

$$A = S_0 e^{-r} e^r \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\ln E}^{\infty} e^{-\left[S - (\mu + \sigma^2)\right]^2/2\sigma^2} \cdot dS$$

Como $e^r \cdot e^{-r} = 1$, si llamamos y a la siguiente expresión $[S-(\mu + \sigma^2)]/\sigma$ (siendo, por lo tanto, $dS = \sigma\, dy$) obtendremos:

$$A = S_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left[\ln E - (\mu + \sigma^2)\right]/\sigma}^{\infty} e^{-(y^2/2)} \cdot dy$$

En esta expresión, se ha redefinido el límite inferior de la integral para reflejar el cambio sufrido por la variable de integración (que ha pasado de ser S a ser y).

Como se puede observar, la expresión anterior representa la *distribución normal estandarizada*, es decir, la probabilidad acumulada desde $z = [\ln E - (\mu + \sigma^2)]/\sigma$ hasta el infinito:

$$A = S_0 \Pr\left(z \geq \frac{\ln E - (\mu + \sigma^2)}{\sigma} \right) = S_0 \Pr\left(z \leq - \frac{\ln E - (\mu + \sigma^2)}{\sigma} \right)$$

$$= S_0 N\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln E}{\sigma} \right)$$

denotando por N la función de probabilidad acumulada de la distribución normal estandarizada.

A su vez, si

$$\mu + \sigma^2 = \mu + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} = \ln S_0 + r + \frac{\sigma^2}{2} \qquad \text{véase [5]}$$

entonces podemos obtener que:

$$A = S_0 N\left(\frac{\ln S_0 - \ln E + r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) = \qquad [8]$$

$$= S_0 N\left(\frac{\ln(S_0/E) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma} \right)$$

Retomando el término B de la expresión [1']:

$$B = e^{-r} E \int_E^\infty f(S_t) \cdot dS_t = e^{-r} E \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_E^\infty \frac{1}{S_t} \cdot e^{-\left[(\ln S_t - \mu)^2\right]/2\sigma^2} \cdot dS_t$$

Si sustituimos $(\ln S_t - \mu)/\sigma = y$ (por lo tanto: $dS_t = S_t\, \sigma\, dy$) obtenemos:

ó $$B = e^{-r} \cdot E \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[\ln E - \mu]/\sigma}^\infty e^{-(y^2/2)} \cdot dy = E \cdot e^{-r} \cdot Pr\left(z \geq \frac{\ln E - \mu}{\sigma} \right)$$

$$B = e^{-r} \cdot E \cdot \Pr\left(z \leq - \frac{\ln E - \mu}{\sigma} \right)$$

Sin embargo, si $\mu = \ln S_0 + r - (\sigma^2/2)$ (véase [5]) tenemos,

$$B = E\, e^{-r} N\left(\frac{\ln S_0 - \ln E + r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) = \qquad [9]$$

$$= E\, e^{-r} N\left(\frac{\ln(S_0/E) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma} \right)$$

Si finalmente sustituimos los resultados obtenidos para A y B (expresiones [8] y [9]

respectivamente) en la expresión [1'], obtendremos la expresión del *call*:

$$C_0 = A - B = S_0 N\left(\frac{\ln(S_0/E) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma} \right) - E\, e^{-r} N\left(\frac{\ln(S_0/E) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma} \right) \qquad [10]$$

Esta fórmula es útil siempre y cuando los parámetros r y σ estén referidos al periodo de tiempo equivalente al vencimiento de la opción, es decir, si la opción vence en seis meses, los parámetros r y σ harán referencia al tipo de interés sin riesgo y a la volatilidad del subyacente para un periodo de seis meses.

Si por otra parte, queremos obtener una fórmula general en la que se utilicen datos anuales, tanto de r como de σ, simplemente tendremos que hacer las siguientes transformaciones:

$$r = tr_a \quad y \quad \sigma = \sigma_a \cdot \sqrt{t}$$

donde t es la fracción de año que representa el vencimiento (para el ejemplo anterior: 0.5) y r_a, σ_a son los parámetros (interés sin riesgo y volatilidad, medida mediante la desviación típica) en base anual.

Introduciendo estos cambios en la expresión [10] conseguiremos la fórmula general de Black-Scholes para la valoración de opciones de compra.

$$C_0 = S_0 N\left(\frac{\ln(S_0/E) + \left(r_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)t}{\sigma_a \sqrt{t}} \right) - E\, e^{-r_a t} N\left(\frac{\ln(S_0/E) + \left(r_a - \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)t}{\sigma_a \sqrt{t}} \right) \qquad [11]$$

Como se indicó al comienzo del apéndice, la fórmula Black-Scholes es válida para cualquier tipo de función de utilidad. En este caso, partiendo de una función de utilidad lineal (la más sencilla con la que operar) se llega a la misma expresión.

2.2. Expresión de la opción de venta (put)

Si queremos calcular el valor de la opción de venta lo podremos hacer a partir de la técnica del arbitraje, es decir, formando carteras de tal forma que el riesgo sea nulo, de modo que la rentabilidad anual obtenida sea r o tipo de interés (anual) sin riesgo.

Primero calcularemos el valor del futuro, que será necesario para calcular el valor de la opción de venta, siempre bajo el supuesto de no existencia de costes de transacción.

Supongamos que un individuo realiza simultáneamente las siguientes inversiones:

1.- Comprar una acción *X* hoy, a su precio de mercado *(S_0)* y la mantiene *t* años, y

2.- Vender un futuro (con valor *F*) con vencimiento *t* años sobre una acción *X*. Como es sabido, en el momento inicial, si despreciamos el margen de garantía, el flujo de caja inicial obtenido en esta segunda alternativa es nulo.

El resultado final de esta operación conjunta es la venta en el momento *t* de una acción que previamente se había comprado en el contado en el momento inicial.

Se puede comprobar fácilmente que independientemente del valor que tome el precio de la acción en el momento *t* *(S_t)*, el beneficio conjunto obtenido es cierto *a priori*, es decir, una vez conocidos S_0 y *F*, la inversión anterior se convierte en una inversión cierta en la que todos los flujos de caja son conocidos. Por lo tanto, la rentabilidad (o *TIR*) a obtener como consecuencia de llevar a cabo dicha inversión debe ser el tipo de interés sin riesgo (anual) o *r*.

Si representamos los flujos de caja derivados de estas dos inversiones tendríamos:

FNC	**Compra Contado**	**Venta Futuro**	**Inversión Conjunta**
Momento 0	$-S_0$	0	$-S_0$
Momento t	$+S_t$	$F-S_t$	F

Si la *Tasa Interna de Rentabilidad anual* es *r*, entonces:

$$0 = -S0 + F \cdot e^{-rt}$$

$$F = S_0 e^{rt} \qquad [12]$$

De modo que siempre y cuando el precio del futuro difiera del valor teórico del mismo, los arbitrajistas podrán obtener un beneficio inmediato (y por lo tanto, sin ningún tipo de riesgo) comprando y vendiendo en los mercados de contado y de futuro, según convenga, garantizando así que el precio real no va a diferir más allá del muy corto plazo de su valor teórico.

Una vez que conocemos el valor del futuro, vamos a calcular el valor de la opción de venta de una forma análoga.

Supongamos ahora que un individuo lleva a cabo dos inversiones simultaneas:

1.- Compra de un *call* (con precio *C*) y venta de un *put* (con precio *P*), en el momento inicial sobre una misma acción *X* que no reparte dividendos, con un mismo precio de ejercicio *(E)* y con una fecha de vencimiento (al cabo de *t* años) idéntica. También conocido como compra de un *futuro sintético*.

2.- Venta de un futuro (que cotiza a *F*) sobre dicha acción con vencimiento dentro de *t* años.

Al igual que en el caso anterior, se puede demostrar que independientemente del valor que tome el precio de la acción *X* en el momento *t* *(S_t)*, el beneficio conjunto obtenido es cierto *a priori*, es decir, una vez conocidos *C, P y F*, la inversión anterior se convierte en una inversión cierta en la que todos los flujos de caja son conocidos. Por lo tanto, la rentabilidad (o *TIR*) a obtener como consecuencia de llevar a cabo dicha inversión debe ser el tipo de interés sin riesgo o *r*.

Si representamos los flujos de caja derivados de estas dos inversiones tendríamos:

FNC	**Com/Vta opciones**	**Venta Futuro**	**Inversión Conjunta**
Momento 0	$P-C$	0	$P-C$
Momento t	S_t-E	$F-S_t$	$F-E$

Si la *Tasa Interna de Rentabilidad anual* es *r*, entonces:

$$0 = P - C + (F - E) \cdot e^{-rt}$$

$$P = C - (F - E) \cdot e^{-rt}$$

Si sustituimos el valor de *F* obtenido en la expresión [12], obtendremos

$$P = C - (S_0 e^{rt} - E) \cdot e^{-rt}$$

$$P = C + E e^{-rt} (S_0 \qquad [13]$$

Al igual que en el caso anterior, cuando el precio del *put* varíe del anteriormente calculado, es decir, cuando la relación [13] no se cumpla, se podrá *arbitrar* u obtener una rentabilidad inmediata y sin riesgo de tal forma que dicha diferencia desaparecerá.

Si insertamos el valor calculado para la opción de compra [11] en la expresión que nos calcula la opción de venta [13], tendremos:

$$P = S_0 N\left(\frac{\ln(S_0/E)+\left(r_a+\frac{1}{2}\sigma_a^2\right)t}{\sigma_a\, t}\right) - E\,e^{-r_a t} N\left(\frac{\ln(S_0/E)+\left(r_a-\frac{1}{2}\sigma_a^2\right)t}{\sigma_a\, t}\right) + E\,e^{-r_a t} - S_0$$

Si denotamos por r el tipo de interés sin riesgo anual, y por σ la volatilidad anual, la expresión final sería:

$$P = S_0 N\left(\frac{\ln(S_0/E)+\left(r_a+\frac{1}{2}\sigma_a^2\right)t}{\sigma_a\, t}\right) - E\,e^{-r_a t} N\left(\frac{\ln(S_0/E)+\left(r_a-\frac{1}{2}\sigma_a^2\right)t}{\sigma_a\, t}\right) + E\,e^{-r_a t} - S_0$$

De modo que el valor de la opción europea de venta de una acción que no reparte dividendos, con vencimiento t años, precio actual del subyacente S_0, precio de ejercicio E, volatilidad anual σ y tipo de interés sin riesgo anual r, será:

$$P = S_0 N(d_1) - E\,e^{-rt} N(d_2) + E\,e^{-rt} - S_0 \equiv$$
$$\equiv E\,e^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

siendo,

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/E)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/E)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

3. FACTORES DE SENSIBILIDAD

3.1. Delta

El factor de sensibilidad *delta* (Δ), obtenido como la derivada de la función de Black y Scholes respecto al precio del subyacente, muestra la variación relativa del precio de la opción ante variaciones en el precio del activo subyacente. A su vez, indica la probabilidad de que la opción termine en el vencimiento *dentro de dinero*. Por norma general se dan las siguientes circunstancias:

1. Las opciones *fuera de dinero* (S<E) tendrán un valor de *delta* (en términos absolutos) bajo (menor que 0.5). Esto es debido a que la probabilidad de que termine *dentro de dinero* es menor a la probabilidad de que termine *fuera de dinero*.

2. Las opciones que se encuentren profundamente *dentro de dinero* (S>E), tendrán una *delta* (en términos absolutos) próxima a uno, lo que indica que casi con toda probabilidad la opción terminará *dentro de dinero* y será ejercida por el tenedor de la misma.

3. Para el caso de las opciones que se encuentran al dinero ($S \approx E$), el valor de la delta (en valores absolutos) será de 0.5, es decir, la probabilidad de que el precio del activo subyacente en el momento del vencimiento termine por debajo del precio de ejercicio es la misma de que termine por encima.

4. En caso de las opciones que se encuentran en dinero o fuera de dinero el transcurso del tiempo consolida los valores de la delta haciéndolos tender a uno o cero respectivamente.

5. Las opciones de compra tendrán delta mayor que cero, mientras que las opciones de venta (put) tendrán delta menor que cero

3.1.1. DELTA DEL CALL

$$C = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-r \cdot t} \cdot N(d_2) \text{ Si:}$$

entonces:

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - E \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial S} =$$
$$= N(d_1) + S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} - E \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \cdot \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

siendo:

$$\frac{\partial N(d_i)}{\partial d_i} = N'(d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_i^2}{2}}$$

Si sustituimos obtenemos:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} - E \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_2^2}{2}} \cdot \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Además si:

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

entonces:

$$d_2^2 = d_1^2 + \sigma^2 \cdot t - 2 \cdot d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{d_2^2}{2}} = e^{\frac{-\left(d_1^2+\sigma^2 t-2d_1\sigma\sqrt{t}\right)}{2}} = e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 \cdot t}{2}} \cdot e^{d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}}$$

Sustituyendo y ordenando términos:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} - E \cdot e^{-r \cdot t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} e^{-\frac{\sigma^2 \cdot t}{2}} \cdot e^{d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}} =$$

$$= N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \left[S - E \cdot e^{-r \cdot t} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 \cdot t}{2}} \cdot e^{d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}} \right] =$$

$$= N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \left[S - E \cdot e^{-\left(r \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t}{2}\right)} \cdot e^{d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}} \right]$$

Por otra parte si:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

entonces,

$$d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t} = \ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t} = \ln\left(\frac{S}{E}\right) + \ln e^{(r+\frac{\sigma^2}{2}) \cdot t} = \ln\left(\frac{S}{E} \cdot e^{(r+\frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}} = \frac{S}{E} \cdot e^{(r \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t}{2})}$$

Sustituyendo:

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot \left(S - E \cdot e^{-(r \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t}{2})} \cdot \frac{S}{E} \cdot e^{(r \cdot t + \frac{\sigma^2 \cdot t}{2})} \right) =$$

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

3.1.2. DELTA DEL PUT

Hacemos lo mismo para la opción de venta o put.

$$P = C + E \cdot e^{-r \cdot t} - S$$

El indicador Deltha de la opción put se obtendrá como sigue:

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial (E \cdot e^{-r \cdot t})}{\partial S} - \frac{\partial S}{\partial S}$$

Como hemos demostrado:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\frac{\partial (E \cdot e^{-r \cdot t})}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial S} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) + 0 - 1$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) + 0 - 1$$

o lo que es igual:

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1)$$

3.2. Theta

Centrándonos en el factor de sensibilidad *Theta* (derivada parcial del valor de la opción con respecto al tiempo[3]) señalaremos que éste representa el *desgaste* en el valor de la opción como consecuencia del transcurso del tiempo de tal forma que, normalmente, a medida que transcurre el tiempo, el valor, tanto de las opciones de compra como de las de venta disminuye.

No obstante, en el caso de las opciones de venta, el *desgaste* no siempre se produce, es decir, la *Theta* no siempre es positiva. Esta situación puede darse cuando la opción de venta está profundamente dentro de dinero, ya que ente caso puede darse la posibilidad de

[3]Algunos autores (Soldevilla (94), Briys y otros (98), etc.) consideran el factor Theta como la derivada del valor de la opción respecto al tiempo, pero con signo negativo (para que el concepto matemático se acerque más a la idea intuitiva del *desgaste* de la opción. Por lo tanto, según este criterio las opciones compradas tienen delta negativa mientras que las vendidas la tienen positiva.

mejorar con el transcurso del tiempo (como consecuencia de una reducción en el precio del activo subyacente) es muy inferior a la posibilidad de empeorar (como consecuencia de un aumento en el precio del activo subyacente), debido a que la cotización del subyacente es tan baja que es *poco probable* que termine el vencimiento por debajo de dicho precio, si lo comparamos con la posibilidad de que termine por encima del mismo[4].

Por lo tanto, el hecho de encontrarnos *profundamente dentro de dinero* hace que el transcurso del tiempo no desgaste, sino que incremente el valor de la opción de venta, explicando de esta forma que el valor teórico de la opción sea inferior al valor intrínseco, o lo que es lo mismo, que el valor temporal sea negativo.

3.2.1. THETA DEL CALL

$$\begin{aligned}\Theta_c &= \frac{\partial C}{\partial t} = S\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial t} - E\left[e^{-rt}\cdot\frac{N'(d_2)}{\partial t} + \frac{\partial(e^{-rt})}{\partial t}\cdot N(d_2)\right] = \\ &= S\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t} - E\left[e^{-rt}\cdot\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t} + (-r)\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2)\right]\end{aligned} \qquad [14]$$

Sabiendo que:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$
$$d_2^2 = d_1^2 + \sigma^2 t - 2d_1\sigma\sqrt{t}$$

y sustituyendo en [14] obtendremos la siguiente expresión:

$$S\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} - E\left[e^{-rt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_2^2}{2}}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t} + (-r)\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2)\right] =$$

$$= S\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} - E\left[e^{-rt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(d_1^2+\sigma^2 t-2d_1\sigma\sqrt{t})}{2}}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t} - r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\left[S\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t} - E\cdot e^{-rt}\cdot e^{d_1\sigma\sqrt{t}-\frac{\sigma^2 t}{2}}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t}\right] + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) =$$

[4]Un caso extremo puede contribuir a entender esta situación. Supongamos una opción *put* con precio de ejercicio, cien y precio del activo subyacente, cero; tendrá un valor intrínseco de cien. Pero, ¿cómo afecta el transcurso del tiempo a dicha opción?; obviamente, la probabilidad de que se produzca un decremento en el nivel del precio del subyacente es nula (cero, es el mínimo). En cambio, sí que existe una probabilidad (exactamente el 100%) de que el precio del subyacente sobrepase el nivel cero, con la consiguiente reducción en el precio de la opción. En resumen, cabe la posibilidad de que empeoremos pero no de que mejoremos con el devenir del tiempo. Conclusión: el tiempo restante hasta la expiración afecta negativamente a la valoración de la opción de venta, o lo que es mismo, su valor temporal (el valor añadido que se consigue con el tiempo) es negativo.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\left[S\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t} - E\cdot e^{-rt}\cdot e^{\frac{2d_1\sigma\sqrt{t}-\sigma^2 t}{2}}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t}\right] + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\left[S\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t} - E\cdot e^{-(rt+\frac{\sigma^2 t}{2})}\cdot e^{d_1\sigma\sqrt{t}}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t}\right] + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) \qquad [15]$$

como

$$d_1\sigma\sqrt{t} = \ln\frac{S}{E} + (r+\frac{\sigma^2}{2})\cdot t$$

y sustituyendo en [15] obtenemos:

$$\begin{aligned}\Theta_c &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\left[S\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t} - E\cdot e^{-(rt+\frac{\sigma^2 t}{2})}\cdot e^{\ln\frac{S}{E}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\cdot t}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t}\right] + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot\left[S\cdot\frac{\partial d_1}{\partial t} - S\cdot\frac{\partial d_2}{\partial t}\right] + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) = \\ &= S\cdot N'(d_1)\cdot\left(\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial(d_1-\sigma\sqrt{t})}{\partial t}\right) + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) = \\ &= S\cdot N'(d_1)\cdot\left(\frac{\partial(\sigma\sqrt{t})}{\partial t}\right) + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) = \\ &= S\cdot N'(d_1)\cdot\sigma\frac{1}{2\sqrt{t}} + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) =\end{aligned}$$

$$\Theta_c = \frac{S\cdot N'(d_1)\cdot\sigma}{2\sqrt{t}} + E\cdot r\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2)$$

3.2.2. THETA DEL PUT

$$\begin{aligned}\Theta_p &= \frac{\partial(C+E\cdot e^{-rt}-S)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial C}{\partial t} + E\cdot\frac{\partial e^{-rt}}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t} = \\ &= \Theta_c + E\cdot(-r)\cdot e^{-rt} = \\ &= \Theta_c - r\cdot E\cdot e^{-rt} = \\ &= \frac{S\cdot\sigma\cdot N'(d_1)}{2\cdot\sqrt{t}} + r\cdot E\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2) - r\cdot E\cdot e^{-rt} = \\ &= \frac{S\cdot\sigma\cdot N'(d_1)}{2\cdot\sqrt{t}} + r\cdot E\cdot e^{-rt}\cdot[N(d_2)-1] =\end{aligned}$$

$$\Theta_p = \frac{S\cdot\sigma\cdot N'(d_1)}{2\cdot\sqrt{t}} - r\cdot E\cdot e^{-rt}\cdot N(-d_2)$$

3.3.- Gamma

Mide la sensibilidad de la delta con respecto al precio del subyacente. Podríamos decir que se trata de un indicador de segundo orden, ya que se obtiene a partir de otro factor de sensibilidad.

El valor de Gamma aumenta a medida que se aproxima el vencimiento de la opción. Este factor de sensibilidad también está relacionado con la volatilidad, de hecho tiene una correlación muy alta con el factor de sensibilidad vega.

3.3.1. GAMMA DEL CALL

$$\begin{aligned}
\Gamma_c &= \frac{\partial \Delta_c}{\partial S} = \frac{\partial [N(d_1)]}{\partial S} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} = \\
&= N'(d_1) \cdot \frac{\partial \left[\dfrac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}{\sigma \sqrt{t}} \right]}{\partial S} = \\
&= N'(d_1) \cdot \left[\frac{\partial \left[\dfrac{\ln(\frac{S}{E})}{\sigma\sqrt{t}} \right]}{\partial S} + \frac{\partial \left[\dfrac{(r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}{\sigma \sqrt{t}} \right]}{\partial S} \right] = \\
&= N'(d_1) \cdot \frac{\partial \left[\dfrac{\ln(\frac{S}{E})}{\sigma\sqrt{t}} \right]}{\partial S} = \\
&= N'(d_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{S} =
\end{aligned}$$

$$\Gamma_c = \frac{N'(d_1)}{\sigma \sqrt{t} \cdot S}$$

3.3.2. GAMMA DEL PUT

$$\Gamma_p = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial (\Delta_c - 1)}{\partial S} = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S} = \Gamma_c = \frac{N'(d_1)}{\sigma \sqrt{t} \cdot S}$$

3.4. Vega

Este factor de sensibilidad representa la variación relativa de la prima con respecto a la volatilidad del subyacente. Este indicador adquiere gran importancia a la hora de diseñar estrategias basadas en *spreads* de volatilidad[5]. Conforme mayor sea la vega de una opción en términos absolutos, mayor será el efecto de una variación en la volatilidad sobre el beneficio de una posición.

Un aumento de la volatilidad favorece al comprador, mientras que una reducción de la misma favorece al vendedor.

3.4.1. VEGA DEL CALL

$$\begin{aligned}
v_c &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial \left[S \cdot N(d_1) - E \cdot N(d_2) \cdot e^{-rt} \right]}{\partial \sigma} = \\
&= S \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} - E \cdot e^{-rt} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} = \\
&= S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} - E \cdot e^{-rt} \cdot N'(d_2) \cdot \frac{\partial (d_2)}{\partial \sigma} = \qquad [16] \\
&= S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} - E \cdot e^{-rt} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_2^2}{2}} \cdot \frac{\partial (d_2)}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$N'(d_1) = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$N(d_2) = N(d_1 - \sigma\sqrt{t})$$

y sustituyendo en [16], obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
&= S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} - E \cdot e^{-rt} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(d_1^2 + \sigma^2 t - 2 d_1 \sigma \sqrt{t})}{2}} \cdot \frac{\partial (d_2)}{\partial \sigma} = \\
&= S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} - E \cdot e^{-rt} \cdot N'(d_1) \cdot e^{-\frac{(\sigma^2 t - 2 d_1 \sigma \sqrt{t})}{2}} \cdot \frac{\partial (d_2)}{\partial \sigma} = \\
&= S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} - E \cdot e^{-(rt + \frac{\sigma^2 t}{2})} \cdot N'(d_1) \cdot e^{d_1 \sigma \sqrt{t}} \cdot \frac{\partial (d_2)}{\partial \sigma} = \qquad [17] \\
&= S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} - E \cdot e^{-(rt + \frac{\sigma^2 t}{2})} \cdot N'(d_1) \cdot e^{\left[\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t \right]} \cdot \frac{\partial (d_2)}{\partial \sigma} = \\
&= S \cdot N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} - N'(d_1) \cdot S \cdot \frac{\partial (d_2)}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

[5] Se definen por spread de volatilidad a todas aquellas posiciones que cumplen las siguientes condiciones: i) tienen delta neutral, ii) son sensibles a la variación del precio del subyacente, iii) son sensibles a los cambios en la volatiliad implícita y iv) son sensibles al transcurso del tiempo.

Llegados a este punto vamos a obtener, por una parte $\frac{\partial(d_1)}{\partial\sigma}$ y por otra parte $\frac{\partial(d_2)}{\partial\sigma}$

$$\frac{\partial(d_1)}{\partial\sigma}=\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\cdot t\cdot\frac{2\sigma}{2}-\frac{\ln \frac{S}{E}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\cdot t}{\sqrt{t}\cdot\sigma^2}=\sqrt{t}-\frac{d_1}{\sigma}$$

$$\frac{\partial(d_2)}{\partial\sigma}=-\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\cdot t\cdot\sigma-\frac{\ln \frac{S}{E}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\cdot t}{\sqrt{t}\cdot\sigma^2}=-\sqrt{t}-\frac{d_2}{\sigma}$$

Y sustituyendo los resultados en la expresión [17], obtenemos

$$S\cdot N'(d_1)\cdot\left(\sqrt{t}-\frac{d_1}{\sigma}\right)+N'(d_1)\cdot S\cdot\left(\sqrt{t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)=$$

$$=S\cdot N'(d_1)\cdot\left(\sqrt{t}-\frac{d_1}{\sigma}+\sqrt{t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)=$$

$$=S\cdot N'(d_1)\cdot\left(\sqrt{t}-\frac{d_1}{\sigma}+\sqrt{t}+\frac{d_1-\sigma\sqrt{t}}{\sigma}\right)=$$

$$v_c=S\cdot N'(d_1)\cdot\sqrt{t}$$

3.4.2. VEGA DEL PUT

$$v_p=\frac{\partial P}{\partial\sigma}=\frac{\partial\left(C+E\cdot e^{-rt}-S\right)}{\partial\sigma}=\frac{\partial C}{\partial\sigma}+\frac{\partial\left(E\cdot e^{-rt}\right)}{\partial\sigma}-\frac{\partial S}{\partial\sigma}=v_c$$

3.5. Rho

Este factor de sensibilidad mide la variación en el valor de la opción ante variaciones en el tipo de interés.

Se puede considerar que en entornos no altamente inflacionistas y para opciones de vencimientos no muy lejanos carece de importancia.

3.5.1. RHO DEL CALL

$$C=S\cdot N(d_1)-E\cdot N(d_2)\cdot e^{-rt}$$

$$\mathrm{Rho_C}=\frac{\partial P_c}{\partial r}=S\cdot\frac{\partial N(d_1)}{\partial(d_1)}\cdot\frac{\partial d_1}{\partial r}-\left[E\cdot N(d_2)\cdot(-t)\cdot e^{-rt}+E\cdot e^{-rt}\cdot\frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial r}\right]=$$

$$=S\cdot N'(d_1)\cdot\frac{\partial d_1}{\partial r}+E\cdot N(d_2)\cdot t\cdot e^{-rt}-E\cdot e^{-rt}\cdot N'(d_2)\cdot\frac{\partial d_2}{\partial r}=$$

$$=S\cdot N'(d_1)\cdot\frac{\partial d_1}{\partial r}+E\cdot e^{-rt}\left(N(d_2)\cdot t-N'(d_2)\cdot\frac{\partial d_2}{\partial r}\right) \qquad [18]$$

Sabiendo que

y

$$\frac{\partial d_1}{\partial r}=\frac{\partial d_2}{\partial r}=\frac{\sqrt{t}}{\sigma}$$

y

$$N'(d_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{d_2^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(d_1-\sigma\sqrt{t})^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[e^{-\frac{d_1^2}{2}}\cdot e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\cdot e^{d_1\sigma\sqrt{t}}\right]=$$

$$N'(d_1)\cdot e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\cdot e^{d_1\sigma\sqrt{t}}$$

como:

$$d_1=\frac{\ln\frac{S}{E}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot t}{\sigma\cdot\sqrt{t}}$$

entonces

$$d_1\cdot\sigma\sqrt{t}=\ln\frac{S}{E}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\cdot t$$

por lo tanto

$$N'(d_1)\cdot e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\cdot e^{d_1\sigma\sqrt{t}}=N'(d_1)\cdot e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\cdot e^{\left[\ln\frac{S}{E}+(r+\frac{\sigma^2}{2})t\right]}$$

$$N'(d_1)\cdot e^{rt}\cdot\frac{S}{E}=N'(d_2)$$

Sustituyendo en la expresión [18] obtenemos:

$$S\cdot N'(d_1)\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sigma}+E\cdot e^{-rt}\left(N(d_2)\cdot t-N'(d_1)\cdot e^{+rt}\cdot\frac{S}{E}\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sigma}\right)=$$

$$=S\cdot N'(d_1)\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sigma}+E\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2)\cdot t-E\cdot e^{-rt}\cdot N'(d_1)\cdot e^{-rt}\cdot\frac{S}{E}\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sigma}=$$

$$=N'(d_1)\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sigma}\cdot S\left(1-e^0\right)+E\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2)\cdot t=$$

$$\mathrm{Rho_C}=E\cdot e^{-rt}\cdot N(d_2)\cdot t$$

3.5.2. RHO DEL PUT

$$P_p = P_c + P_E \cdot e^{-rt} - S$$

$$\text{Rho}_P = \frac{\partial(C + E \cdot e^{-rt} - S)}{\partial r} = \frac{\partial(C)}{\partial r} + \frac{\partial(E \cdot e^{-rt})}{\partial r} - \frac{\partial(S)}{\partial r} = Rho_C + \frac{\partial(E \cdot e^{-rt})}{\partial r} =$$
$$= E \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \cdot t - t \cdot e^{-rt} \cdot E = -E \cdot e^{-rt} \cdot t \cdot (N(d_2) - 1) =$$

$$\text{Rho}_p = -E \cdot e^{-rt} \cdot t \cdot N(\sigma\sqrt{t} - d_1)$$

4. RESUMEN.

En el siguiente cuadro, se indica a modo de resumen el valor de los factores de sensibilidad de las opciones sobre acciones que no reparten dividendos[6].

	CALL	PUT
Delta (Δ)	$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$	$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1)$
Theta (Θ)	$\Theta_c = \frac{S \cdot N'(d_1) \cdot \sigma}{2\sqrt{t}} + E \cdot r \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2)$	$\Theta_p = \frac{S \cdot \sigma \cdot N'(d_1)}{2 \cdot \sqrt{t}} - r \cdot E \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2)$
Gamma (Γ)	$\Gamma_c = \frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{t} \cdot S}$	$\Gamma_p = \Gamma_c = \frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{t} \cdot S}$
Vega (ν)	$\nu_c = S \cdot N'(d_1) \cdot \sqrt{t}$	$\nu_p = \nu_c$
Rho	$\text{Rho}_C = E \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \cdot t$	$\text{Rho}_p = -E \cdot e^{-rt} \cdot t \cdot N(\sigma\sqrt{t} - d_1)$

[6] El valor se refiere a la compra de opciones

BIBLIOGRAFÍA.

Black, F. y Scholes, M.: "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, mayo-junio de 1973, pp. 654-673.

Briys, E., Bellalah, M., Minh Mai, H. y DE Varenne, F.: *Options, Futures and Exotic Derivatives: Theory, application and Practice*. Ed. John Wiley & Sons, N.Y., 1998.

Chriss, N.: *Black-Scholes and Beyond, Option Pricing Models*. Ed. Irwin, Chicago, 1997.

Fernández, P.: *Opciones, Futuros e Instrumentos Derivados*. Ed. Deusto, Bilbao, 1996.

Hull, John C.: *Options, Futures and Other Derivatives*. Ed. Prentice-Hall International, London, 1989.

Hull, John C.: *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Ed. Prentice-Hall International, Madrid. 1998.

Levy, H. y Sarnat, M.: *Portfolio and Investment Selection: Theory and Practise*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

Natenberg, S.: *Options Volatility and Pricing*, Ed. Irwin, Chicago, 1988.

Soldevilla García, E.: *Opciones y Futuros*. BBV Interactivos, Bilbao, 1994.

Soldevilla García, E.: *Opciones y Futuros sobre Divisas*. Ed. APD, Bilbao, 1996.