



baliabideak
material de aprendizaje



Los fenómenos aleatorios en Estadística

Izaskun Alvarez Meaza

Cuaderno del estudiante

IKD baliabideak 4 (2012)



baliabideak

INDICE

CONTEXTO DEL PROBLEMA PROPUESTO	3
1) Características generales de la asignatura	3
2) Características del área de temario elegida.....	3
PROBLEMA ESTRUCTURANTE Y ACTIVIDADES ASOCIADAS.....	5
1) Problema estructurante	5
2) Actividades asociadas	6
EVALUACIÓN	15

CONTEXTO DEL PROBLEMA PROPUESTO

1) Características generales de la asignatura

La asignatura de Estadística se imparte en el segundo cuatrimestre del primer curso del Grado de Ingeniería Técnica de Telecomunicación en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao.

A continuación se muestran las características generales del contexto de la asignatura:

- a) **Grado:** Ingeniería Técnica en Telecomunicación
- b) **Departamento:** Organización de Empresas
- c) **Asignatura:** Estadística
- d) **Curso:** primero
- e) **Cuatrimestre:** segundo
- f) **Grupo:** 31 (euskera)
- g) **Modalidades docentes:** clases magistrales, prácticas de aula, seminario y prácticas de ordenador.
- h) **Número de créditos ECTS:** 6.
 - a. Número de créditos ECTS seminario: 0,5
 - b. Número de créditos ECTS prácticas de ordenador: 0,5
- i) **Tiempo disponible:**
 - a. 20 horas magistrales
 - b. 30 horas prácticas de aula
 - c. 5 horas seminario (ABP)
 - d. 5 horas prácticas de ordenador (ABP)
- j) **Número de alumnos estimado por modalidad docente:**
 - a. Clases magistrales y prácticas de aula: 30-40 alumnos.
 - b. Seminarios y prácticas de ordenador: 20 alumnos

2) Características del área de temario elegida

Las partes del temario seleccionadas para la aplicación del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) han sido la segunda parte, denominada variable aleatoria unidimensional, y la cuarta parte, denominada modelo de distribución de probabilidades.

En esta parte del temario, se trabaja la adquisición de las competencias específicas de la asignatura, C1 y C2 (Ver tabla1):

Competencias Específicas	
C1	Presentar e interpretar los fenómenos aleatorios. Introducir la teoría de la probabilidad, el concepto de variable aleatoria y distribución de probabilidad. Estudiar los modelos de distribución más utilizados en el ámbito de la ingeniería. Establecer los principios de los procesos estocásticos.
C2	Esta asignatura contribuye al desarrollo de las competencias del módulo mediante la adquisición por parte del alumno de la capacidad de comprensión de textos redactados en lenguaje matemático, adquisición de capacidad de análisis crítico en la resolución de problemas que puedan plantearse en la ingeniería y mediante la adquisición de capacidad de utilización de software específico en matemáticas para la resolución de problemas que puedan plantearse en la ingeniería (Stargraphics Plus 5.0, Excel, SPSS).

Tabla 1. Competencias específicas de la asignatura

El desarrollo de estas competencias va a llevar a resolver el problema que se va a proponer, pero, es necesario disponer de unas competencias más concretas que permitan puntualizar mejor qué necesita conocer el alumno para resolver el problema. Para ello, se definen los siguientes objetivos de aprendizaje:

- 1) Ser capaz de identificar y analizar los fenómenos aleatorios vs fenómenos deterministas. OA1
- 2) Ser capaz de identificar y comprender el significado de una variable aleatoria en un problema matemático - estadístico. OA2
- 3) Ser capaz de calcular e interpretar la función de probabilidad asociada a una variable aleatoria en un problema matemático - estadístico. OA3
- 4) Estudiar los modelos de distribución más utilizados en el ámbito de la ingeniería. OA5
- 5) Ser capaz de realizar la representación gráfica de la función de probabilidad de una variable aleatoria. OA6
- 6) Obtener una noción básica de las herramientas de software existentes en el mercado, como son Excel y SPSS, en el análisis de datos de fenómenos aleatorios. OA9
- 7) Utilizar el proceso de simulación para la generación de nuevos datos a través del uso del software Excel. OA10
- 8) Adquiera destrezas propias del trabajo científico. OA11
- 9) Ser capaz de comunicar su conocimiento. OA12
- 10) Ser capaz de trabajar en grupo. OA13

En la tabla 2, se relacionan los bloques de temario elegidos para aplicar ABP con las competencias específicas y los objetivos de aprendizaje.

	Competencias Específicas	Objetivos de Aprendizaje
Tema 2: variable aleatoria unidimensional	C1	OA1, OA2, OA3, OA11, OA12, OA13
Tema 4: modelo de distribución de probabilidades	C2	OA3, OA5, OA6, OA9, OA10, OA11, OA12, OA13

Tabla 2

PROBLEMA ESTRUCTURANTE Y ACTIVIDADES ASOCIADAS

1) Problema estructurante

ANÁLISIS DEL USO DE UN CAJERO AUTOMÁTICO

Un banco contrata unos servicios de una consultoría que analiza el uso que los clientes hacen de las distintas funciones que tienen los cajeros automáticos, con el fin de analizar cuáles son los procesos más requeridos por los clientes. En un cajero se tiene que tener en cuenta que los clientes no llegan a intervalos regulares de tiempo, no todos solicitan el mismo servicio (retirar dinero, consultar saldo, recargar teléfono, etc..) ni todos tardan lo mismo.

En la tabla 3, se presentan los datos de los clientes 40, 41 y 42, el tipo de servicio que han requerido y el tiempo que le ha llevado realizar el servicio desde que se introduce la tarjeta hasta que obtiene el último documento que da el servicio solicitado.

	Instante de llegada	Tipo de servicio	Tiempo de servicio
..... Cliente 40	12.00	Efectivo	77 s
..... Cliente 41	12.03	Recargar	52 s
..... Cliente 42	12.05	Efectivo	130 s
.....

Tabla 3

Para que se pueda definir un modelo que reproduzca lo que ocurriría en realidad, se debe se debe conocer que:

Un estudio previo determina que el 50% de los clientes solicita retirar efectivo, el 30% consultar el saldo y el 20% restante recargar el teléfono.

El banco le solicita a la consultora que desarrolle un estudio de la utilización de los cajeros, con el fin de obtener un conjunto de datos que le permita realizar un análisis de uso de los mismos.

2) Actividades asociadas

2.1) Actividad 1

ACTIVIDAD 1	
Presencial	Tiempo estimado 10 minutos
Trabajo individual	Modalidad seminario

Un banco contrata unos servicios de una consultoría que analiza el uso que los clientes hacen de las distintas funciones que tienen los cajeros automáticos, con el fin de analizar cuáles son los procesos más requeridos por los clientes. En un cajero se tiene que tener en cuenta que los clientes no llegan a intervalos regulares de tiempo, no todos solicitan el mismo servicio (retirar dinero, consultar saldo, recargar teléfono, etc...) ni todos tardan lo mismo.

En la tabla 4, se presentan los datos de los clientes 40, 41 y 42, el tipo de servicio que han requerido y el tiempo que le ha llevado realizar el servicio desde que se introduce la tarjeta hasta que obtiene el último documento que da el servicio solicitado.

	Instante de llegada	Tipo de servicio	Tiempo de servicio
..... Cliente 40 12.00 Efectivo 77 s
..... Cliente 41 12.03 Recargar 52 s
..... Cliente 42 12.05 Efectivo 130 s
.....

Tabla 4

Para que se pueda definir un modelo que reproduzca lo que ocurriría en realidad, se debe se debe conocer que:

Un estudio previo determina que el 50% de los clientes solicita retirar efectivo, el 30% consultar el saldo y el 20% restante recargar el teléfono.

El banco le solicita a la consultora que desarrolle un estudio de la utilización de los cajeros, con el fin de obtener un conjunto de datos que le permita realizar un análisis de uso de los mismos.

SE PIDE:

✍ Escribir en dos líneas cuál es el fenómeno o fenómenos que está describiendo el problema. ¿Tienen algo que ver con el azar o sabemos lo que va a ocurrir?

2.2) Actividad 2

ACTIVIDAD 2

Presencial

Tiempo estimado 45 minutos

Trabajo grupo

Modalidad seminario

📖 Siguiendo con el problema anterior se proponen los siguientes fenómenos que deben ser analizados, pero previamente a su análisis se debe conocer qué tipo de fenómeno es: determinista o aleatorio.

- Lanzar una moneda al aire.
- El tiempo que tarda un coche a una velocidad de 50 km/hora en recorrer 100m.
- El tiempo que hará el mismo día que hoy dentro de seis años
- El tiempo que hizo el mismo día que hoy hace seis años
- La temperatura de ebullición del agua en un cazo que tenemos en el fuego
- Etc.

👉 Trabajar en grupos de 3 personas durante ⌚15 minutos y proponer y justificar el tipo de fenómeno que rigen estos ejemplos y proponer alguno diferente con la justificación necesaria.

🔔 El grupo presenta su trabajo en ⌚1 minuto, justificando en una frase la opción tomada.

2.3) Actividad 3

ACTIVIDAD 3

No Presencial

Tiempo estimado 60 minutos

Trabajo grupo

✍ Redactar la definición formal de fenómeno determinista y aleatorio.

🔍 Realizar una búsqueda y ✍ redactar un listado de los diferentes fenómenos según su tipología que se presentan en la práctica de la ingeniería de telecomunicación.

🔔 Presentación del trabajo en grupo en la próxima sesión en ⌚ 2 minutos.

2.4) Actividad 4

ACTIVIDAD 4	
Presencial	Tiempo estimado 30 minutos
Trabajo grupo	Modalidad seminario

🔔 Presentación de la actividad 3. ¿Qué diferencia existe entre los fenómenos aleatorios y deterministas? Fenómenos aleatorios en la práctica de la ingeniería de telecomunicación.

2.5) Actividad 5

ACTIVIDAD 5	
Presencial	Tiempo estimado 30 minutos
Trabajo grupo	Modalidad seminario

🔑 Análisis de los fenómenos aleatorios definidos para el siguiente problema. ¿Son fenómenos aleatorios? ¿Por qué? ⌚(15 minutos)

📖 Un banco contrata unos servicios de una consultoría que analiza el uso que los clientes hacen de las distintas funciones que tienen los cajeros automáticos, con el fin de analizar cuáles son los procesos más requeridos por los clientes. En un cajero se tiene que tener en cuenta que los clientes no llegan a intervalos regulares de tiempo, no todos solicitan el mismo servicio (retirar dinero, consultar saldo, recargar teléfono, etc...) ni todos tardan lo mismo.

En la tabla 5, se presentan los datos de los clientes 40, 41 y 42, el tipo de servicio que han requerido y el tiempo que le ha llevado realizar el servicio desde que se introduce la tarjeta hasta que obtiene el último documento que da el servicio solicitado.

	Instante de llegada	Tipo de servicio	Tiempo de servicio
.....
Cliente 40	12.00	Efectivo	77 s
Cliente 41	12.03	Recargar	52 s
Cliente 42	12.05	Efectivo	130 s
.....

Tabla 5

Para que se pueda definir un modelo que reproduzca lo que ocurriría en realidad, se debe se debe conocer que:

Un estudio previo determina que el 50% de los clientes solicita retirar efectivo, el 30% consultar el saldo y el 20% restante recargar el teléfono.

El banco le solicita a la consultora que desarrolle un estudio de la utilización de los cajeros, con el fin de obtener un conjunto de datos que le permita realizar un análisis de uso de los mismos.

🔔 Presentación de los resultados del análisis (⌚ 5 minutos)

2.6) Actividad 6

ACTIVIDAD 6	
Presencial	Tiempo estimado 30 minutos
Trabajo grupo	Modalidad seminario

📖 Lanzar un dado al aire. ¿Qué resultados se obtienen? ¿Siempre se obtiene el mismo resultado? Si es no la respuesta, ¿Por qué? ¿A través de qué le doy sentido matemático a la incertidumbre de los resultados? ⌚ 2 minutos

👉 Trabajar en equipo las reflexiones ⌚ 3 minutos

🔔 Presentación de las reflexiones ⌚ 1 minuto

2.7) Actividad 7

ACTIVIDAD 7	
Presencial	Tiempo estimado 30 minutos
Trabajo grupo	Modalidad seminario

📖 Un agente de bolsa ha comprado acciones de tres empresas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el transcurso de un mes suban las acciones al menos dos de las tres empresas?

- a) La probabilidad es $\frac{1}{2}$
- b) La probabilidad es $\frac{3}{8}$
- c) La probabilidad es ____
- d) No puedo calcular la probabilidad.

👉 Por favor, razona la respuesta en grupo: ⌚ 5 minutos.

🔔 Presentación de las reflexiones ⌚ 2 minutos

2.8) Actividad 8

ACTIVIDAD 8	
No Presencial	Tiempo estimado 90 minutos
Trabajo individual	

📖 Lanzar un dado al aire.

✍ ¿Este suceso sigue un modelo determinista? ¿Por qué? ¿Cómo puedo calcular su resultado?

2.9) Actividad 9

ACTIVIDAD 9

Presencial

Tiempo estimado 30 minutos

Trabajo grupo

Modalidad seminario

☞ Proponer posibles sucesos y realizar un análisis de los resultados de los mismos. (Se puede tomar de ejemplo la actividad 2)

Por ejemplo, 📖 Lanzar un dado al aire.

✍ ¿Cómo se presentan los resultados de este fenómeno aleatorio?

2.10) Actividad 10

ACTIVIDAD 10

Presencial

Tiempo estimado 30 minutos

Trabajo individual

Modalidad seminario

📖 Un banco contrata unos servicios de una consultoría que analiza el uso que los clientes hacen de las distintas funciones que tienen los cajeros automáticos, con el fin de analizar cuáles son los procesos más requeridos por los clientes. En un cajero se tiene que tener en cuenta que los clientes no llegan a intervalos regulares de tiempo, no todos solicitan el mismo servicio (retirar dinero, consultar saldo, recargar teléfono, etc...) ni todos tardan lo mismo.

En la tabla 6, se presentan los datos de los clientes 40, 41 y 42, el tipo de servicio que han requerido y el tiempo que le ha llevado realizar el servicio desde que se introduce la tarjeta hasta que obtiene el último documento que da el servicio solicitado.

	Instante de llegada	Tipo de servicio	Tiempo de servicio
.....
Cliente 40	12.00	Efectivo	77 s
Cliente 41	12.03	Recargar	52 s
Cliente 42	12.05	Efectivo	130 s
.....

Tabla 6

Para que se pueda definir un modelo que reproduzca lo que ocurriría en realidad, se debe se debe conocer que:

Un estudio previo determina que el 50% de los clientes solicita retirar efectivo, el 30% consultar el saldo y el 20% restante recargar el teléfono.

El banco le solicita a la consultora que desarrolle un estudio de la utilización de los cajeros, con el fin de obtener un conjunto de datos que le permita realizar un análisis de uso de los mismos.

✍ Definir el fenómeno aleatorio que se presenta para contextualizar el problema y describir que sucesos se vinculan al mismo. ¿Qué resultados presenta el suceso aleatorio? ¿por qué cambian de valor? Razonad la respuesta ⌚ 30 minutos.

2.11) Actividad 11

ACTIVIDAD 11	
Presencial	Tiempo estimado 60 minutos
Trabajo grupo	Modalidad seminario

📖 Un banco contrata unos servicios de una consultoría que analiza el uso que los clientes hacen de las distintas funciones que tienen los cajeros automáticos, con el fin de analizar cuáles son los procesos más requeridos por los clientes. En un cajero se tiene que tener en cuenta que los clientes no llegan a intervalos regulares de tiempo, no todos solicitan el mismo servicio (retirar dinero, consultar saldo, recargar teléfono, etc...) ni todos tardan lo mismo.

En la tabla 7, se presentan los datos de los clientes 40, 41 y 42, el tipo de servicio que han requerido y el tiempo que le ha llevado realizar el servicio desde que se introduce la tarjeta hasta que obtiene el último documento que da el servicio solicitado.

	Instante de llegada	Tipo de servicio	Tiempo de servicio
..... Cliente 40	12.00	Efectivo	77 s
..... Cliente 41	12.03	Recargar	52 s
..... Cliente 42	12.05	Efectivo	130 s
.....

Tabla 7


Para que se pueda definir un modelo que reproduzca lo que ocurriría en realidad, se debe se debe conocer que:

Un estudio previo determina que el 50% de los clientes solicita retirar efectivo, el 30% consultar el saldo y el 20% restante recargar el teléfono.


Además, se sabe que llegan 50 clientes /hora y que la media del tiempo de servicio es de 60 segundos.

El banco le solicita a la consultora que desarrolle un estudio de la utilización de los cajeros, con el fin de obtener un conjunto de datos que le permita realizar un análisis de uso de los mismos.

 Lectura de texto ⌚ 2 minuto

 Redacción simple explicando los sucesos que se presentan en el problema y definir las variables aleatorias asociadas a los mismos. ⌚ 10 minutos.

 Presentación del trabajo por parte del grupo ⌚ 3 minutos

 ¿Qué probabilidad existe de que lleguen 30 clientes al cajero? ¿Qué probabilidad existe que el tipo de servicio que solicita al cajero sea de sacar efectivo? ¿El tiempo de realizar el servicio de sacar efectivo es siempre el mismo para un cliente o para otro?

¿En la teoría se presenta algún modelo que cumpla las características probabilísticas de las variables definidas? ⌚ 20 minutos

 Presentación del trabajo por parte del grupo ⌚ 3 minutos

2.12) Actividad 12


ACTIVIDAD 12

Presencial

Tiempo estimado 60 minutos

Trabajo individual

Modalidad prácticas de ordenador

 PROBLEMA 1 ⌚ 30 minutos

Un agente de seguros vende pólizas a 5 individuos, todos de la misma edad. De acuerdo con las tablas actuariales, la probabilidad de que un individuo con esa edad viva 30 años más es de $\frac{3}{5}$. Determinar la probabilidad de que dentro de 20 años vivan:

- a) Los 5 individuos
- b) Al menos 3
- c) Sólo 2
- d) Al menos 1

 PROBLEMA 2 ⌚ 30 minutos

En una farmacia se ha calculado la probabilidad de venderle a un cliente un producto con fin de obra social es del 20%. Se eligen al azar 15 clientes de ese tipo que ingresan al negocio y se desea calcular la probabilidad de realizar menos de tres ventas de este tipo.

2.13) Actividad 13

ACTIVIDAD 13

Presencial

Tiempo estimado 60 minutos

Trabajo individual

Modalidad prácticas de ordenador

☞ PROBLEMA 1 ⌚ 30 minutos

El número medio de automóviles que llegan a una estación de suministro de gasolina es de 210 por hora. Si dicha estación puede atender a un máximo de 10 automóviles por minuto, determinar la probabilidad de que en un minuto dado lleguen a la estación de suministro más automóviles de los que puede atender. Hallar y representar gráficamente la función de distribución de la variable aleatoria número aleatorio de automóviles que llegan a la estación de servicio en un minuto. Hallar también la ley de probabilidad y representarla gráficamente.

☞ PROBLEMA 2 ⌚ 30 minutos

Calcular y representar la función de distribución y la ley de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson del problema que estamos tratando desde el comienzo del tema: "el proceso de llegada de clientes es un proceso Poissoniano de tasa $\lambda=50$ clientes/hora".

2.14) Actividad 14

ACTIVIDAD 14

Presencial

Tiempo estimado 60 minutos

Trabajo individual

Modalidad prácticas de ordenador

☞ PROBLEMA 1 ⌚ 30 minutos

En un proceso de fabricación, se sabe que el número aleatorio de unidades defectuosas producidas diariamente viene dado por una variable de Poisson de parámetro 10. Determinar la probabilidad de que en 150 días el número de unidades defectuosas producidas supere las 1480 unidades.

☞ PROBLEMA 2 ⌚ 30 minutos

Representar la ley de probabilidad y la función de distribución de una variable que sigue una distribución exponencial con una media 60 segundos.

2.15) Actividad 15

ACTIVIDAD 15	
No Presencial	Tiempo estimado 60 minutos
Trabajo individual	Modalidad prácticas de ordenador

PROBLEMA

Representar la ley de probabilidad y la función de distribución de una variable que sigue una distribución normal con media 5 y varianza 4.

- Calcular la probabilidad de que la variable tenga un valor inferior a 4.
- Calcular la probabilidad de que la variable tenga un valor superior a 5,5.

2.16) Actividad 16

ACTIVIDAD 16	
Presencial	Tiempo estimado 60 minutos
Trabajo individual	Modalidad prácticas de ordenador

PROBLEMA 1 ⌚ 60 minutos

En un banco, la probabilidad de recibir un cheque sin fondos es igual a 0,15. Si durante una semana se espera recibir 1000 cheques, hállese la probabilidad de los sucesos siguientes:

- Recibir como máximo 125 cheques sin fondos.
- El número de cheques sin fondos esté entre 140 y 155
- Los cheques sin fondos sean más de 200.

Usar, si es posible, la aproximación normal de la binomial y comprobarla gráficamente.

2.17) Actividad 17

ACTIVIDAD 17	
Presencial	Tiempo estimado 60 minutos
Trabajo individual	Modalidad prácticas de ordenador

PROBLEMA ⌚ 60 minutos

Supongamos que deseamos generar una sucesión de solicitudes de clientes a un cajero automático de manera que el 50% de los clientes solicita retirar efectivo, el 30% consultar el saldo y el 20% restante recargar el teléfono.

EVALUACIÓN

El porcentaje del valor del ABP en la evaluación global de la asignatura es del 25% y su puntuación se obtiene a partir de las siguientes puntuaciones:

- El portafolio (5%) : recoge las actividades realizadas
- Evaluación Oral (5%) : evalúa la presentación de las actividades
- Observación de la participación en tutorías (5%) : evalúa la participación en las tutorías de los miembros de los distintos equipos
- Test de evaluación del equipo (5%): los miembros del equipo de trabajo se evalúan entre ellos y se evalúa el mismo.
- Examen (5%) se realizan dos exámenes, uno individual y otra grupal, en las actividades con el fin de evaluar si han alcanzado los objetivos marcados.



Álvarez, I. (2012). Los fenómenos aleatorios en Estadística – IKD baliabideak 4 -
<http://cvb.ehu.es/ikd-baliabideak/ik/alvarezmeaza-4-2012-ik.pdf>



Reconocimiento – No Comercial – Compartir Igual (by-nc-sa): No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.