

PROGRAMACIÓN POR METAS CON NIVELES DE ASPIRACIÓN IMPRECISOS

MARIANO JIMÉNEZ LÓPEZ

Dpto. Economía Aplicada I

Escuela Universitaria de Estudios Empresariales

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibersitatea UPV/EHU

Plaza de Oñati 1, 20018 Donostia / San Sebastián

mariano.jimenez@ehu.es

RESUMEN

En la programación por metas borrosa se trabaja con metas imprecisas del tipo “esencialmente menor (mayor) que b_i ”, las cuales se modelan mediante conjuntos borrosos, cuya función de pertenencia mide el grado de satisfacción respecto del logro de la meta. Para valores menores (mayores) que el nivel de aspiración b_i el grado de satisfacción va disminuyendo monótonamente hasta un umbral, fijado por el decisor, a partir del cual el grado de satisfacción es nulo. El hecho de que el umbral no se pueda sobrepasar conduce, en algunos casos, a problemas infactibles, para evitar lo cual se tiende a ampliar excesivamente dicho umbral. En este trabajo, en lugar de maximizar el grado de satisfacción, proponemos un enfoque similar al de la programación por metas estándar, de manera que lo que pretendemos es minimizar la distancia a los niveles de aspiración. Obtenemos un programa matemático con función objetivo cuadrática y restricciones lineales y, por tanto, fácil de resolver. Se incluye un ejemplo numérico en el que se compara el enfoque propuesto con la programación por metas estándar y con el enfoque borroso ordinario.

Palabras Clave: Conjuntos borrosos, Nivel de aspiración, Programación por metas, Programación matemática borrosa, Programación matemática cuadrática.

Código JEL: C61.

1. INTRODUCCIÓN

La programación por metas es una de las herramientas más usadas en la toma de decisiones. Está basada en la filosofía “satisfaciente”, la cual conjetura que, cuando no se pueden alcanzar simultáneamente varios objetivos, porque entran en conflicto, el decisor se conforma con fijar una meta para cada uno, intentando minimizar la falta de logro de las mismas. El decisor determina un valor numérico b_i como nivel de aspiración para cada atributo, de esta manera la estructura de una meta genérica es la siguiente,

$$f_i(x) + n_i - p_i = b_i$$

donde $f_i(x)$ es la expresión matemática del i -ésimo atributo, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el vector de las variables de decisión, n_i es la variable de desviación negativa y p_i es la variable de desviación positiva. Las metas pueden ser de tres tipos: a) “alcanzar un valor al menos igual a b_i ”, en cuyo caso la variable de desviación no deseada es la negativa y por lo tanto n_i debería ser minimizada; b) “alcanzar un valor como mucho igual a b_i ”, en cuyo caso la variable de desviación no deseada es la positiva y por tanto p_i debería ser minimizada; c) “obtener un valor igual a b_i ”, en cuyo caso las variables no deseadas son, simultáneamente, la negativa y la positiva y por tanto lo que se desearía minimizar es la suma n_i+p_i .

Sin embargo, en muchas situaciones el decisor sólo puede especificar el nivel de aspiración de forma imprecisa, en cuyo caso las metas se expresarían así: a) “esencialmente mayor que b_i ”; b) “esencialmente menor b_i ”; c) “aproximadamente igual a b_i ”.

El caso de un nivel de aspiración impreciso se aborda con la programación matemática borrosa en sus diversas variantes (Rommelfanger and Slowinski, 1998). La expresión semántica “se desea que $f_i(x)$ sea esencialmente mayor que b_i ” se representa algebraicamente por la expresión: $f_i(x) \succeq b_i$, donde $\succeq b_i$ es el conjunto borroso (Zimmermann, 1991) que representa la expresión “esencialmente mayor que b_i ”. La función de pertenencia de este conjunto borroso mide el grado de satisfacción del decisor respecto del logro de la meta (véase la figura 1),

$$\mu_{\succeq b_i}^{\%}(f_i(x)) = \begin{cases} 1 & f_i(x) \geq b_i \\ L_i(f_i(x)) & b_i - t_i \leq f_i(x) \leq b_i \\ 0 & f_i(x) \leq b_i - t_i \end{cases} \quad (1)$$

donde $L_i(f_i(x))$ es una función monótonamente creciente. En (1) observamos que todos los valores de $f_i(x)$ que sean mayores que b_i son plenamente satisfactorios y que para valores menores que b_i el grado de satisfacción va disminuyendo monótonamente hasta un umbral b_i-t_i , fijado por el decisor, a partir

del cual el grado de satisfacción es 0. En la programación borrosa ordinaria $b_i - t_i$ es un umbral que no se pueden sobrepasar, lo que conduce, en algunos, casos a problemas infactibles, para evitar lo cual se tiende a ampliar excesivamente dicho umbral.

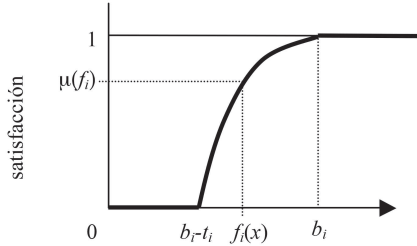


Figura 1. Nivel de aspiración borroso: “esencialmente mayor que b_i ”

En el enfoque borroso se busca el vector de decisión x que maximiza el grado de satisfacción de las metas. En el presente trabajo sin embargo proponemos un procedimiento distinto en el cual, aunque seguimos trabajando con niveles de aspiración borrosos, adoptamos un punto de vista similar al de la programación por metas estándar, donde lo que se pretende es minimizar la desviación no deseada al nivel de aspiración.

2. NIVELES DE ASPIRACIÓN NÍTIDOS. PROGRAMACIÓN POR METAS ESTÁNDAR

En la programación por metas estándar se asume que el decisor es capaz de determinar un nivel de aspiración nítido para cada meta. Por sencillez, y sin pérdida de generalidad, supongamos que todas las metas son del tipo “al menos igual”, de manera que las desviaciones no deseadas sean, en todos los casos, las negativas. Si utilizamos la programación por metas ponderadas el modelo es el siguiente (véanse, por ejemplo, Romero, 1991 y Jones and Tamiz, 2010),

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{b_i} n_i \\
 & \text{Subjec to} \\
 & f_i(x) + n_i - p_i = b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & x, n_i, p_i \geq 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Donde los coeficientes w_i ponderan la importancia relativa que el decisor asigna a la realización de cada meta. Se ha normalizado la función de logro, dividiendo por b_i las desviaciones no deseadas, para homogeneizar las distintas dimensiones de los diversos niveles de aspiración y para evitar soluciones sesgadas hacia un mayor cumplimiento de las metas con un nivel de aspiración más elevado, (Romero, 1993).

Un nivel de aspiración nítido puede considerarse como un caso particular de lo que hemos representado en la figura 1 como nivel de aspiración borroso y por tanto, por analogía, lo representamos de manera similar, tal y como se ve en la figura 2. Obsérvese que, considerando este punto de vista, la desviación no deseada n_i puede interpretarse como el área de la región comprendida entre los valores $f_i(x)$ y b_i , la cual está sombreada en la figura 2, (esta interpretación de n_i la compararemos luego con las figuras 4 y 5).

La función de penalización correspondiente a la meta i -ésima del modelo estándar (2) es la siguiente (véase la figura 3),

$$P(f_i(x)) = \begin{cases} w_i n_i & f_i(x) < b_i \\ 0 & f_i(x) \geq b_i \end{cases}$$

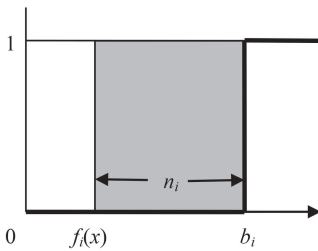


Figura 2: Nivel de aspiración nítido: b_i .
Meta: "al menos igual a b_i ".
 $f_i(x)$ con desviación negativa n_i

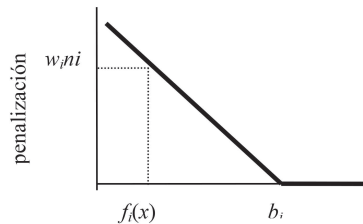


Figura 3: Función de penalización
para una meta "al menos igual a b_i ".

3. NIVELES DE ASPIRACIÓN IMPRECISOS. NUEVO PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

Consideremos ahora el caso de un nivel de aspiración impreciso, "esencialmente mayor que b_i ", como el de la figura 1, por analogía con el modelo de programación por metas estándar (véase la figura 2) proponemos la siguiente la función de penalización para los diferentes valores que tome $f_i(x)$,

$$P(u_i) = \begin{cases} b_i - t_i - u_i + \int_{b_i - t_i}^{b_i} (1 - L_i(u_i)) du_i & \text{si } u_i < b_i - t_i \\ \int_{u_i}^{b_i} (1 - L_i(u_i)) du_i & \text{si } b_i - t_i \leq u_i \leq b_i \end{cases} \quad (3)$$

donde $u_i \equiv f_i(x)$.

Cada trozo de la función de penalización (3) puede interpretarse geoméricamente como el área de las regiones rayadas, respectivamente, en las figuras 4 y 5. Obsérvese que, comparándolo con la figura 2, podemos decir que el modelo estándar es un caso particular del que estamos tratando ahora.

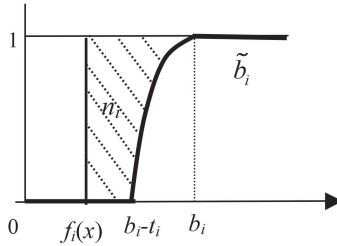


Figura 4: Desviación negativa n_i entre $f_i(x)$ y el nivel de aspiración $\geq b_i$ en caso de que $f_i(x) < b_i - t_i$.

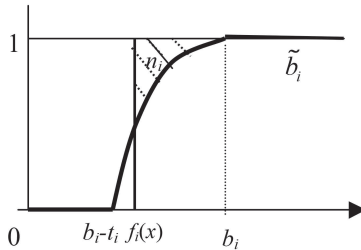


Figura 5: Desviación negativa n_i entre $f_i(x)$ y el nivel de aspiración $\geq b_i$ en caso de que $b_i - t_i \leq f_i(x) \leq b_i$

Chanas y Kuchta (2001) han propuesto un enfoque parecido a éste, pero no contemplan la posibilidad de que el umbral $b_i - t_i$ se pueda sobrepasar, es decir no consideran el primer trozo de la función de penalización (3) y, por tanto, no resuelven el problema de infactibilidad cuando los umbrales de las diferentes metas resultan incompatibles entre sí.

En particular si $L_i(f_i(x))$ (véase (1)) es una función lineal, el conjunto borroso $\geq b_i$ se representará así: $\geq b_i = (b_i - h_i, b_i, \infty)$ En este caso,

$$L_i(f_i(x)) = \frac{f_i(x) - (b_i - t_i)}{t_i}$$

y la función de penalización (3) quedaría así (véase la figura 6),

$$P(f_i(x)) = \begin{cases} b_i - t_i - f_i(x) + \frac{1}{2}t_i & \text{si } f_i(x) < b_i - t_i \\ \frac{(b_i - f_i(x))^2}{2t_i} & \text{si } b_i - t_i \leq f_i(x) \leq b_i \end{cases} \quad (4)$$

Que expresada en función de las desviación negativas respecto de $b_i - t_i$ y de b_i queda así,

$$P(f_i(x)) = \begin{cases} n_{i1} + \frac{1}{2}t_i, & f_i(x) < b_i - t_i \\ \frac{n_{i2}^2}{2t_i}, & b_i - t_i \leq f_i(x) \leq b_i \end{cases} \quad (5)$$

donde n_{i2} es la desviación negativa de $f_i(x)$ respecto de b_i y n_{i1} es la desviación negativa de $f_i(x)$ respecto de $b_i - t_i$.

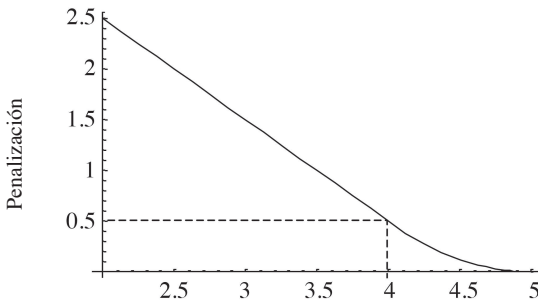


Figura 6: Función de penalización respecto de la meta "al menos aproximadamente igual a 5", con nivel de aspiración impreciso representado por conjunto borroso $\tilde{b}_i = (4.5, \infty)$

Obsérvese que con el método que estamos proponiendo la función de penalización se genera de forma más natural que mediante el método utilizado normalmente (Jones and Tamiz, 1995) en el cual el decisor debe ser capaz de fijar diferentes penalizaciones dependiendo de la distancia a b_i .

Teniendo en cuenta la expresión (5), el modelo (2) quedaría así,

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{b_i} \left(\frac{(n_{i2} - n_{i1})^2}{2t_i} + n_{i1} \right) \\ \text{Sujeta a } \quad &f_i(x) + n_{i2} - p_{i2} = b_i \\ &f_i(x) + n_{i1} - p_{i1} = b_i - t_i \\ &x, n_{i1}, n_{i2}, p_{i1}, p_{i2} \geq 0; \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (6)$$

Como se ve (6) es un modelo de programación matemática no lineal, pero la función objetivo (o de logro) es cuadrática y las restricciones son lineales, es decir es un programa matemático cuadrático y, por tanto, fácilmente resoluble mediante diversos programas de ordenador. En este trabajo se ha utilizado la herramienta SOLVER de EXCEL.

Si la función de pertenencia, $L_i(f_i(x))$, de $\geq b_i$ no fuese lineal, la función objetivo del modelo (6) adoptaría una forma más compleja, lo que podría hacer que dicho modelo fuese difícil de resolver. En este caso se podría aproximar la mencionada función mediante una lineal a trozos y construir el correspondiente programa lineal aproximado siguiendo el método propuesto por Jones y Tamiz (1995).

Todo lo anterior es inmediatamente generalizable para metas del tipo “como mucho igual” o “aproximadamente igual”, con la única diferencia de que en el primer caso trabajaríamos con las desviaciones positivas y en el segundo con las negativas y positivas simultáneamente.

4. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Sea el siguiente programa lineal multiobjetivo:

$$\begin{aligned} \text{Max } z_1 &= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{Min } z_2 &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{Sujeto a: } &4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 20 \\ &2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15 \\ &x_i \geq 0, \quad i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7)$$

Para comparar diversos enfoques, vamos a resolverlo mediante: 1) el método propuesto en este trabajo, 2) la programación por metas ponderadas y 3) la programación borrosa.

4.1. Resolución mediante el método propuesto en este trabajo

Supongamos que el decisor ante la imposibilidad alcanzar simultáneamente los dos objetivos se fija como niveles de aspiración que “ z_1 sea esencialmente mayor a 17 unidades” y que “ z_2 sea esencialmente menor a 9 unidades”. Preguntado acerca de que entiende por “esencialmente mayor que 17 unidades” y por “esencialmente menor que 9 unidades” nos propone respectivamente los conjuntos borrosos $\geq 17 = (14, 17, \infty)$ y $\leq 9 = (-\infty, 9, 11)$. Entonces, de acuerdo con el modelo (6) nuestro programa multiobjetivo (7) se escribiría así,

$$\text{Min } \frac{1}{17} \left(\frac{(n_{12} - n_{11})^2}{2 \cdot 3} + n_{11} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{(p_{22} - p_{21})^2}{2 \cdot 2} + p_{21} \right)$$

$$\text{Sujeto a: } \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + n_{12} - p_{12} &= 17 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + n_{11} - p_{11} &= 14 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + n_{22} - p_{22} &= 9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + n_{21} - p_{21} &= 11 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\geq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 15 \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3 \end{aligned} \quad (8)$$

Este es un programa cuadrático y por lo tanto fácil de resolver. En este caso se ha utilizado la herramienta SOLVER de EXCEL. La solución obtenida es la siguiente: $x_1^* = 3.42654$, $x_2^* = 2.71564$, $x_3 = 0$; siendo los valores alcanzados por las funciones objetivo: $z_1^* = 15.71$, $z_2^* = 9.57$.

Obsérvese que, con este método, no es preciso que el decisor asigne pesos para ponderar la importancia relativa respecto del cumplimiento de cada meta, ya que esto está implícito en la longitud del soporte de los conjuntos borrosos “esencialmente mayor que 17” y “esencialmente menor que 9”. Por ejemplo supongamos que se estrecha el soporte de ≥ 17 , de manera que ahora es: $\geq 17 = (15, 17, \infty)$. Esto significa que la importancia del logro de la primera meta ha aumentado. En efecto, si resolvemos el modelo (8) cambiando, en el segundo miembro de la segunda restricción, 14 por 15, obtenemos $z_1^* = 15.91$, $z_2^* = 9.72$. Es decir que, como era deseable, el nivel de logro de la primera meta ha aumentado mientras que el de la segunda ha disminuido. Si continuáramos aumentando la importancia de la primera meta escribiendo

16 en lugar de 15, la nueva solución sería $z_1^*=16.25$, $z_2^*=10$. Como se ve el modelo propuesto es sensible a los cambios introducidos por el decisor para mostrar sus preferencias con respecto al logro de las diversas metas.

4.2. Resolución mediante programación por metas ponderadas

En este caso los niveles de aspiración serían que “ z_1 sea al menos igual a 17 unidades” y que “ z_2 sea como mucho igual a 9 unidades”. De acuerdo con el modelo (2) el problema (7) se formulará así,

$$\begin{aligned} \text{Mín} \quad & \frac{w_1}{17} n_1 + \frac{w_2}{9} p_2 \\ \text{S. a.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + n_1 - p_1 = 17 \\ & 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + n_2 - p_2 = 9 \\ & 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15 \\ & x_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (9)$$

Si asignamos la misma importancia a las dos metas, es decir $w_1 = w_2 = 0.5$, la solución es: $x_1^*=3$, $x_2^*=3$, $x_3^*=0$; $z_1^*=15$, $z_2^*=9$. Como se ve, esta solución es menos equilibrada que la obtenida con el método propuesto en este trabajo, ya que se alcanza por completo la segunda meta pero a costa de un mayor deterioro de la primera. Para tratar de equilibrarla, asignamos un peso mayor al logro de esta última, por ejemplo hacemos $w_1 = 0.6$, $w_2 = 0.4$, observamos que la solución no cambia. Sin embargo para un nuevo, pequeño, cambio: $w_1 = 0.7$, $w_2 = 0.3$, la solución salta drásticamente a otra también desequilibrada: $z_1^*=17$, $z_2^*=10.6$, sólo que ahora es al revés, la meta que se alcanza totalmente es la primera a costa de un elevado incumplimiento de la segunda. Como se ve, el enfoque tradicional es mucho menos robusto que el nuestro frente a cambios en las preferencias sobre el cumplimiento de las diversas metas. Jones (2011) ha publicado recientemente un artículo en el que aborda el problema de la posible falta de sintonía entre el esquema de preferencias y las soluciones, en la programación por metas estándar.

4.3. Resolución mediante el enfoque borroso estándar

Si utilizáramos el enfoque borroso, los niveles de aspiración serían que “ z_1 sea esencialmente mayor que 17” y que “ z_2 sea esencialmente menor que 9”. El grado de satisfacción desciende monótonamente hasta hacerse cero para valores de z_1 menores o iguales que 14 y para valores de z_2 mayores o iguales que 11 (véase la expresión (1)), esto quiere decir que 14 y 11 son umbrales que no se pueden sobrepasar. Por sencillez supondremos que las funciones de pertenencia de los niveles de aspiración son lineales. Si además, para mantener la mayor analogía posible con el enfoque propuesto en este

trabajo, optamos por utilizar como función de agregación la suma ponderada de los grados de satisfacción (Jiménez et al., 2002) nuestro modelo, ahora, se escribirá así,

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2 \\
 \text{S.a. } & \frac{1}{3}(3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 14) = \alpha_1 \\
 & \frac{1}{2}(11 - 2x_1 - x_2 - 3x_3) = \alpha_2 \quad (10) \\
 & 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 20 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15 \\
 & x_i \geq 0; i=1,2,3 \\
 & 0 \leq \alpha_j \leq 1; j=1,2
 \end{aligned}$$

Al resolver este modelo se alcanzan también soluciones poco equilibradas, así para $w_1=w_2=0.5$ obtenemos que $z_1=15$, $z_2=9$ y para $w_1=0.6$, $w_2=0.4$ resulta que $z_1^*=17$, $z_2^*=10.6$.

Obsérvese también, que al ser, en el enfoque borroso, 14 y 11 umbrales que no se pueden sobrepasar, podría ocurrir que el problema fuese infactible. Así, por ejemplo, supongamos que el decisor propusiera, para la primera meta, un nivel de aspiración de “esencialmente mayor que 23” y que el mismo se representara por el conjunto borroso $(20, 23, \infty)$. En este caso el modelo (10) resulta infactible, ya que el umbral 20 es inalcanzable. Sin embargo, en el modelo (8), sustituyendo los segundos miembros de las dos primeras restricciones por 23 y 20 respectivamente, proporciona la siguiente solución: $z_1^*=16.22$, $z_2^*=9.98$, la cual, si no es aceptada por el decisor, puede servir como punto de partida para una revisión de los niveles de aspiración inicialmente planteados.

Así pues observamos que el método propuesto en este trabajo puede proporcionar soluciones más equilibradas y ser más robusto, frente a cambios en las preferencias del decisor, que la programación por metas estándar y que el enfoque borroso ordinario y, además, evita los posibles problemas de infactibilidad de éste último.

5. CONCLUSIONES

Se presenta en este trabajo un método para resolver problemas de programación por metas con niveles de aspiración imprecisos que incorpora una parte borrosa, en la modelización del nivel de aspiración, y una parte

estándar, en la construcción de la función de logro. Este método se diferencia del enfoque borroso en que en la determinación del nivel de aspiración no se obliga al decisor a fijar un umbral que no se pueda sobrepasar. Esto evita que, para eludir la aparición de infactibilidades, dicho umbral se haga artificialmente amplio y, por tanto, permite que el nivel de aspiración se ajuste mejor a los deseos del decisor. En cuanto al enfoque estándar, el decisor se sentirá más cómodo si puede expresar el nivel de aspiración de manera vaga, mediante una expresión semántica, que se modela mediante un conjunto borroso. El método propuesto proporciona soluciones más equilibradas y es más sensible a cambios en las preferencias del decisor que la programación por metas tradicional y que el enfoque borroso ordinario y, además, evita los posibles problemas de infactibilidad de éste último.

AGRADECIMIENTO

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación ECO2011-26499 financiado por el Ministerio de Educación y Cultura.

6. BIBLIOGRAFÍA

- CHANAS, S. and KUTCHTA, D. (2001): "A new approach to fuzzy goal programming". En M. Garibaldi and R. I. John (Eds): *Proceedings of the 2nd International Conference in Fuzzy Logic and Technology*, Leicester, United Kingdom, September 5-7, pp. 199-201.
- JIMÉNEZ, M.; RODRÍGUEZ URÍA, M. V.; ARENAS, M. and BILBAO, A. (2002): "On considering flexible constraints of different importance in goal programming problems". En T. Trzaskalik and J. Michnik (Eds): *Advances in Soft Computing: Multiple objectives and goal programming*. Physica-Verlag, Heidelberg, New York.
- JONES, D. F. (2011): "A practical weight sensitivity algorithm for goal and multiple objective programming", *European Journal of Operational Research*, nº 213, pp. 238-245.
- JONES, D. F. and TAMIZ, M. (1995): "Expanding the flexibility of goal programming via preference modelling techniques", *Omega*, vol. 23, nº 1, pp. 41-48.
- JONES, D. F. and TAMIZ, M. (2010): *Practical Goal programming*. Springer. New York.
- ROMERO, C. (1991): *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press. Oxford.

- ROMERO, C. (1993): *Teoría de la decisión multicriterio Conceptos, técnicas y aplicaciones*, Alianza Universidad Textos, Madrid.
- ROMMELFANGER, H. and R. SLOWINSKI, R. (1998), “Fuzzy linear programming with single or multiple objective functions”. En R. Slowinski (Ed.): *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operational Research and Statistics*. Kluwer. Boston. 1998.
- ZIMMERMANN, H. J. (1991): *Fuzzy Set Theory and its Applications, Second Edition*, Kluwer Academic Publishers, Boston.