

Sarriko-On

Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako
Lizentziaturako Ikerkuntza Operatiboko azterketak

ISBN: 978-84-695-4216-3

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

08-12



Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

**ENPRESEN ADMINISTRAZIO ETA
ZUZENDARITZAKO LIZENTZIATURAKO
IKERKUNTZA OPERATIBOKO AZTERKETAK**

**M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi**

AURKIBIDEA

Sarrera	3
Azterketen enuntziatuak.....	5
Azterketen erantzunak.....	62

SARRERA

Euskal Herriko Unibertsitateko Ekonomia eta Enpresa Zientzien fakultateko Enpresen Administrazio eta Zuzendaritzako lizentziaturako Ikerkuntza Operatiboko irakasgaiari matrikulatuta dauden ikasleentzat baliagarriak dira hemen jasotzen diren ariketak. Halaber, Ikerkuntza Operatiboko eredu determinista nahiz oinarrizko topikoetan interesa duen edonorentzat lagungarria izan daiteke azterketa bilduma hau. Hain zuzen, azken urteotan irakasgai honetan jarritako azterketak eta horien erantzunak jasotzen dira bertan.

Hasteko, azterketen enuntziatuak daude. Horiek, azterketen orokortasunaz jabetzeko aukera ematen dute. Horrela, erantzuna begiratu gabe ikaslea azterketa osoa egiten saia daiteke. Gero erantzunak jasotzen dira. Horiekin ikasleek aurretik egindako lana aztertzeko aukera dute: erantzunen zergatia zein den eta, behar izanez gero, euren hutsuneetatik jabetu ondoren, horiei aurre egiteko behar dutenaz jabetuko dira.

Azterketak ordena kronologikoan jaso dira eta bertan aztertzen diren gaiak irakasgaiaren programa honetan daude:

I. PROGRAMAZIO LINEAL OSOA

- Programazio lineal osoko problemak formulazioa.
- Adartze eta bornatze metodoa.
- Beste ebazpen metodo batzuk.

II. HELBURUANITZEKO PROGRAMAZIOA

- Sarrera.
- Helmugetikiko programazioa.
- Lehentasunetikiko programazioa.

III. SARE EREDUAK

- Oinarrizko kontzeptuak.
- Bide laburreneko problema.
- Bide luzeeneko problema.
- Fluxu maximoko problema.

- Hedadura zuhaitz minimoko problema.
- Esleipen problema.
- Proiektu Plangintza: C.P.M. eta P.E.R.T. metodoak.

Gai horien garapen teorikoa bibliografia honetan aurkitu daiteke:

- *Investigación Operativa. Optimización*, Rios, Centro de Estudios Ramón Areces, 1988.
- *Introducción a la Investigación de Operaciones*, Hillier eta Lieberman, McGraw-Hill, 1997.

AZTERKETEN ENUNTZIATUAK

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2001eko ekaina

1. Konpainia bat hiru produktu berri, A , B eta C , ekoiztea pentsatzen ari da. Gerentziak horietako bakoitza merkaturatzeko beharrezkoa den inbertsioaren txostena prestatzea eskatu dio marketin sailari eta salmenta sailari produktu bakoitzaren salneurri unitarioa. Lortutako informazioa, eurotan, taula honetan jasotzen da:

	A produktua	B produktua	C produktua
Marketin kostu finkoa	25000	35000	30000
Salneurri unitarioa	35	45	40

Produktu guztiak konpainiaren bi plantetan, 1 eta 2, prozesatu behar dira. Planta bakoitzeko edukiera 6000 ordukoa da eta A produktuko unitate bat ekoizteko 1 plantan 5 ordu eta 2 plantan 4 eman behar ditu; B produktu unitateko, 6 ordu 1 plantan eta 4 ordu 2 plantan; azkenik, C produktu unitateko 3 ordu 1 plantan eta 5 ordu 2 plantan.

Merkatu arrazoiengatik, enpresak gutxienez produktu bat merkaturatuko du.

Gerentziak zein produktu eta zer neurritan ekoiztuko dituen erabaki behar du, helburua mozkin maximizatzea izanik.

- a) Programazio lineal osoko problema moduan formula ezazu.
 - b) Bestalde, konpainia bi plantetatik bakar batean lan edukiera 1000 ordutan handitzea pentsatzen ari bada, formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan, informazio hori erantsiz.
2. Aurkitu problema honen soluzio eraginkorrak:

$$\begin{aligned} & \max(125x_1 + 150x_2) \\ & \min(30x_1 - 40x_2) \\ \text{m.} & \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 6 \\ x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3. a) Honako taula honetan hiru langile, A, B eta C, 4 ekintzetan, E1, E2, E3 eta E4, esleitzerakoan lortutako utilitatea ematen da:

	E 1	E 2	E 3	E 4
A	65	73	--	57
B	67	70	69	58
C	68	--	70	55

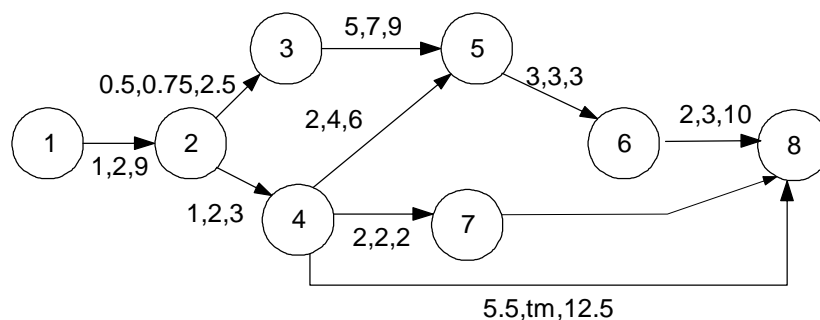
--: Esleipen bateraezina

Erantzun, problema ebatzi gabe, galdera hauek:

- i. Zein tauletan erabiliko zenuke hungariar metodoa problemaren helburua 3 langileak dauden 4 ekintzetatik 3ri esleitzea bada, langile bakoitzari soilik ekintza bat egokituko zaiola eta utilitate total maximoa lortu nahi dela kontuan izanik?
 - ii. Erabaki zein taulari aplikatuko zeniokeen hungariar metodoa problemaren helburuak hauek badira: 4 ekintzak esleitu behar dira, langile bakoitzak gehienez bi ekintza egin ditzake, ekintza bakoitza langile bakar batek egingo du, langile guztiak esleituak izango dira eta utilitate total maximoa lortu nahi da.
- b) Taula honetan 4 langile (A, B, C eta D) 4 ekintzei (E1, E2, E3 eta E4) esleitzeko kostua, moneta unitatetan, jasotzen da. Kalkula ezazu esleipen hoberena hungariar metodoa erabiliz, helburua langile bakoitza ekintza bakar bati eta ekintza bakoitza langile bakar bati esleitzea bada.

	E 1	E 2	E 3	E 4
A	6	7	5	0
B	0	3	6	0
C	0	2	1	0
D	6	0	0	0

4. Sare honetan proiektu bat osatzen duten ekintzen arteko aurre erlazioak irudikatzen dira. Ekintza bakoitzarekin bere iraupen baikorra, probableena eta ezkorra (egunetan) agertzen dira, (4,8) ekintzaren salbuespenarekin, bere balio minimoa eta maximoa ezagunak izanik, ez ordea bere balio modala, tm.



Erantzun, arrazoituz, galdera hauek, tm-k hartzen duen balioa 12 egun edo gutxiago bada.

- a) Proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena, ekintzen marjina eta bide kritikoa kalkulatu al daitezke (4,8) ekintzaren denbora modalak edozein balio ($t_m \leq 12$) hartzen bada?
- b) (3,5) ekintza bere batezbesteko iraupenetik 3 egun atzeratzen bada, zer gertatuko zaio proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupenari? Eta ekintza hori bere batezbesteko iraupena baino 3 egun lehenago bukatzen bada, zer gertatuko zaio proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denborari?
- c) (2,4) ekintzaren batezbesteko iraupena egun bat atzeratzeak zer eragin edukiko du (4,5) eta (4,7) ekintzen marjinetan?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)**2001eko iraila**

1. Tutu S.A. enpresak hiru tutu mota, *A*, *B* eta *C*, egiten ditu eta metroko 10, 12 eta 9 eurotan saltzen ditu, hurrenez hurren. Tutu metro bakoitzeko ekoizpenak prozesaketa minutu batzuk, lehengai gramo batzuk eta eurotan adierazitako ekoizpen kostu batzuk behar ditu, taula honetan jasotzen direnak:

	prozesaketa (minutuak)	lehengai (gramoak)	Ekoizpen kostua
<i>A</i>	5	100	3
<i>B</i>	4.5	100	4
<i>C</i>	6	100	4

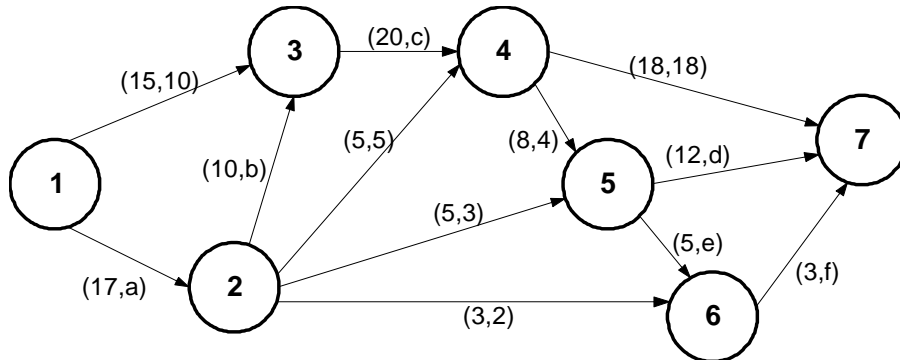
Tutu S.A. hurrengo asterako *A* tututik 2000 metro, *B* tututik 4000 metro eta *C* tututik 5000 metroko eskari berezia jaso du. Aste horretako edukierak 400 prozesaketa ordu eta 550 kilo lehengai dira. Zuzendaritzak hurrengo astetako eskaria hain handia izango ez dela pentsatzen duenez, ez ditu ekoizpen instalazioak handitu nahi. Horregatik tutu batzuk japoniar enpresa bati erostea pentsatzen ari da, metroko 6, 6 eta 7 eurotan, hurrenez hurren, *A*, *B* eta *C* motentzako.

- Formulatu, ebatzi gabe, zenbat metro ekoiztuko dituen eta zenbat erosiko dituen tutu mota bakoitzeko, mozkinak maximizatzeko eta inportazioen kostu totala minimizatzeko.
 - Enpresako gerenteak aurreko bi helburuen artean egon daitekeen bateraezintasunaz ohartuta, gutxienez 55000 euroko mozkinak eta inportazio kostuak gehienez 40000 eurotan mugatzea komenigarriagoa litzatekeela erabakitzen du. Formula ezazu problema, euro bateko mozkin faltaren balioa inportazioen gehiegizko euro batenaren bikoitza dela jakinik.
2. Demagun Programazio Lineal Osoko problema hau dugula:

$$\begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{cases}$$

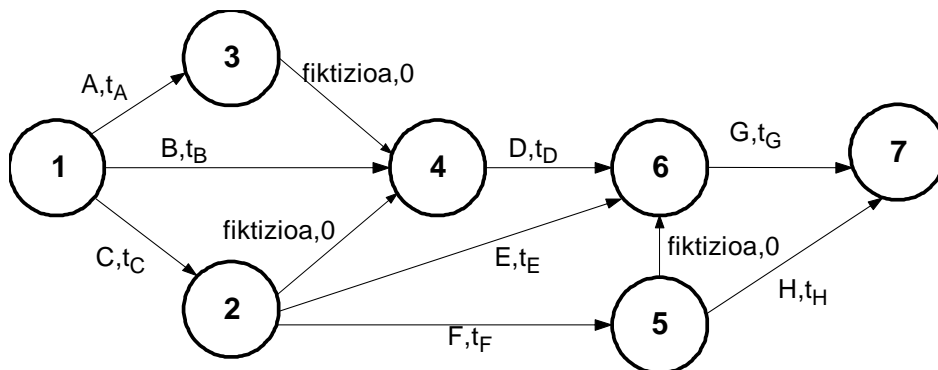
Ebatzi, adartze eta bornatze metodoa erabiliz.

3. Demagun honako sare hau dugula, arku bakoitzari elkartutako bikotearen lehen zenbakiak arku horren edukiera adierazten duelarik:



Erantzun galdera hauek:

- Arku bakoitzari elkartutako bikotearen bigarren zenbakiak, a, b, c, d, e eta f-ren zein baliotarako definituko dute sarea zeharkatzen duen fluxu bat?
 - Kalkulatu fluxua $e = 0$ bada. Zein da sarea zeharkatzen duen fluxu maximoaren balioa?
4. Demagun proiektu bat irudikatzen duen sare hau dugula, ekintzak eta haien iraupenak arkutan adierazten direlarik:



Erantzun, arrazoituz, galdera hauek:

- Zer baldintza bete behar dute ekintzen iraupenak D, E eta F ekintzen hasiera denbora goiztiarrena berdina izateko?
- Zer baldintza bete behar dute ekintzen iraupenak E eta F ekintzen bukaera denbora goiztiarrena berdina izateko?
- Zer baldintza bete behar dute ekintzen iraupenak E eta F ekintzen bukaera denbora berankorrena berdina izateko?
- Abiaburutik irteten diren ekintzetatik soilik A bada kritikoa, zein da proiektuaren aurreikusitako iraupena? Eta D, E eta F ekintzen marjina?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

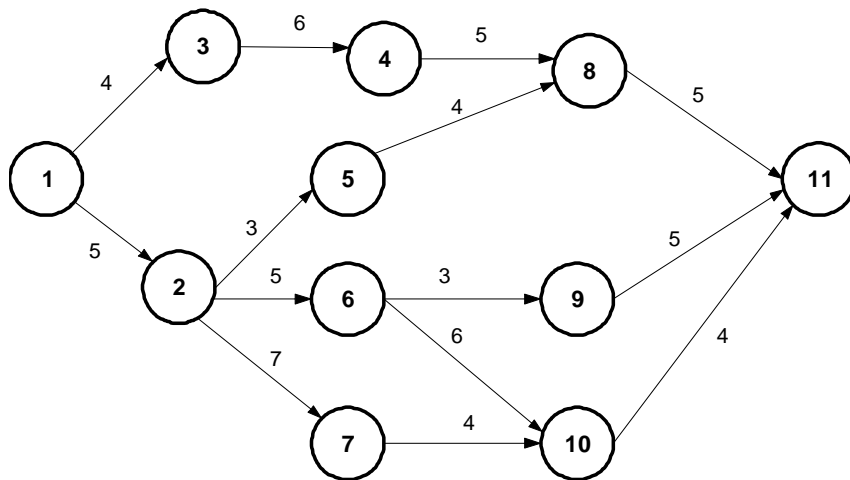
2002ko ekaina

1. Tailer mekaniko txiki batean T tornu bat eta bi fresatzaile, F_1 eta F_2 , daude. Hiruhileroko lan programan T tornua gehienez 200 ordu erabil daiteke, F_1 fresatzailea 84 ordu eta F_2 fresatzailea 100 ordu. Hiru pieza mota egin daitezke (A , B eta C) eta bakoitza egiteko bi tresna erabiliko dira: tornua eta bitariko fresatzaile bat, F_1 edo F_2 . A motako pieza bakoitza egiteko T -n 2 ordu behar dira, 6 ordu F_1 -en edo 5 ordu F_2 -n; B motako bakoitza egiteko T -n ordu bat, 5 ordu F_1 -en edo 5 ordu F_2 -n; C motako bakoitza egiteko T -n 5 ordu, 3 ordu F_1 -en edo 4 ordu F_2 -n. A , B eta C -ren produkzio kostuak unitateko (moneta unitatetan) T tornuan eta F_1 , F_2 fresatzaileetan taula honetan adierazten dira:

	Produkzio kostuak F_1 -en	Produkzio kostuak F_2 -n	Produkzio kostuak T -n
A	2	3	4
B	5	4	4
C	3	2	2

Enpresak jakin nahi du bi fresatzaile horietatik zein edo zeintzuk martxan jarri behar dituen, F_1 eta F_2 fresatzaileak martxan jartzeko kostua 75 eta 80 m.u. izanik, hurrenez hurren. Bestalde, A , B eta C pieza bakoitzeko sarrerak 60, 40 eta 35 m.u. dira, hurrenez hurren. Formula ezazu problema (ebatzi gabe), programazio lineal osoko problema bezala, helburua hiruhileko mozkin maximoa lortzea izanik.

2. Izan bedi honako sare hau, ekintzen iraupenak astetan ematen direlarik:



- a) Zein da proiektuaren iraupen minimoa? Eman bide kritiko guztiak.
- b) Aurreko sareari t iraupeneko (7,9) ekintza berria eransten badiogu,
- Ba al dago a) atalean lortutako proiektuaren iraupena laburtzen duen t -ren baliorik?
 - t -ren zein baliotarako luzatuko da a) atalean lortutako proiektuaren iraupena? Balio horietarako, eman proiektuaren iraupena eta ekintzen marjinak t -ren funtzio moduan.

3. Enpresa bateko langileen zuzendariak 4 langile ditu 4 sailei esleitzeko. Langile bakoitzaren utilitatea sail bakoitzean taula honetan jasotzen da:

Langilea\Saila	1	2	3	4
1	12	6	10	3
2	10	8	15	4
3	17	6	16	7
4	20	8	10	3

- a) Sail bakoitzari langile desberdin bat esleitzen badiogu, kalkulatu utilitate osoa maximizatzen duen esleipena. Bigarren langilearen utilitate bakoitza unitate 1 handituz gero, esleipena aldatuko litzateke? (Azaldu berriro ebatzi gabe).
- b) Enpresak 5. langile bat dauka, utilitate hauekin:

16	7	12	2
----	---	----	---

Zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa kasu hauetan? (taula planteatu ebatzi gabe eta kontuan hartu langile bati ezin zaizkiola bi sail esleitu).

- Enpresak 5. langilea sail bati esleitzeko konpromezua dauka eta sail bakoitzari langile bakar bat esleituko zaio.
- Enpresak ez du 5. langilea sail bati esleitzeko konpromezurik eta sail bakoitzari langile bakar bat esleituko zaio.
- 5 langileak esleituak egon behar dira eta sail guztiak erabili behar ditugu.

4. Ebatzi:

$$\begin{aligned} & \min L(y_1^-, y_4^+, y_2^- + y_3^+, y_5^-) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 90 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 4x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ y_1^+ - y_4^+ + y_4^- = 10 \\ x_1 + 2x_2 - y_5^+ + y_5^- = 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5) \end{cases} \end{aligned}$$

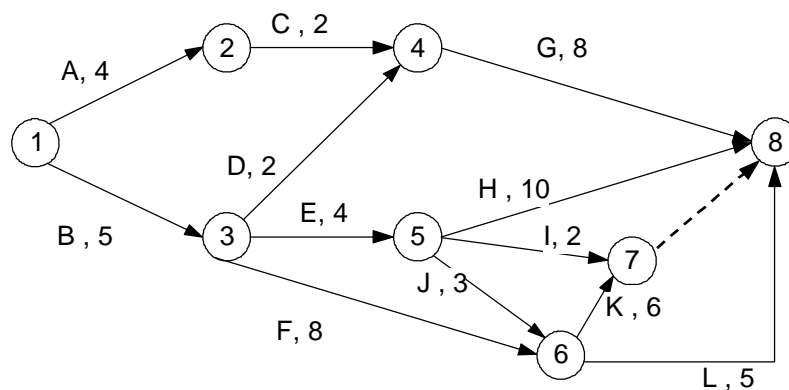
IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2002ko iraila

1. Enpresa batek 3 makina ezberdinetan ekoiztu daitekeen produktu jakin baten 50000 unitate merkaturatu nahi ditu. Makina bakoitza martxan jartzeko kostua eta unitateko ekoizpenarenak taula honetan jasotzen dira, moneta unitatetan, makina bakoitzaren edukiera maximoarekin batera:

	Martxan jartzeko kostua	Ekoizpen kostua unitateko	Ekoizpen edukiera maximoa
1 Makina	250	25	15000
2 Makina	750	5	20000
3 Makina	500	13	30000

Enpresaren helburua makina horietatik zein edo zeintzuk erabiliko dituen erabakitzea da, esandako lotea kostu total minimoan ekoizteko.

- a) Formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.
- b) Administrazioak ekoizpena 40000 unitatera murrizteagatik 300 m.u.ko diru laguntza eskaintzen badio, eta enpresak ekoizpena kantitate horretaraino murriztea edo ez erabaki behar badu, formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.
2. Grafo honek proiektu bat jasotzen du eta arku bakoitzean ekintza bakoitzaren iraupena, egunetan, adierazten da, beraien izen identifikatzailearekin batera:



- a) Kalkula ezazu proiektuaren aurreikusitako iraupena eta bide kritikoa. Zein da D ekintzaren hasiera denbora berankorrena? Eta C ekintzaren bukaera denbora goiztiarrena?
- b) Erantzun, arrazoituz, galdera hauek:

- i. Zein da F ekintzaren marjina? F ekintzaren iraupena 6 egunekoa bada, eta beste ekintzak jatorrizko denboran egiten badira, zer eragin edukiko du horrek proiektuaren aurreikusitako iraupenean? Eta 10 eguneko iraupena badu?
 - ii. Zein da D ekintzaren marjina? D ekintzaren iraupena egun batekoa bada, eta beste ekintzak jatorrizko denboran egiten badira, zer eragin edukiko du horrek proiektuaren aurreikusitako iraupen denboran? Eta 6 eguneko iraupena badu?
 - c) M eta N ekintza berriak sartu behar baditugu, horien berehalako aurreko bakarra C delarik eta M eta N beste ekintzen berehalako aurrekoak ez izanik, nola geldituko litzateke proiektua irudikatuko duen grafo berria?
- 3.** Enpresa kimiko batek bi produktu, CS-1 eta CS-2, nahastuz konposatu edo nahaste berri bat lortzen du. CS-1 litro bakoitza 3 m.u. kostatzen da eta bere ekarpena konposatuan sodioko 5gr eta sufreko 2 gr-koa da. CS-2 litro bakoitza, ordea, 1 m.u. kostatzen da eta bere ekarpena konposatuan sodioko 2gr eta sufreko 1 gr-koa da. Lortutako konposatuak gutxienez sodio 9 gr eta sufre 4 gr eduki behar ditu.
- Helmuga hauek ezartzen dira:
- 4 litro konposatu ekoiztu.
 - Kostua 5 m.u. baino handiagoa ez izatea.
- Honako hau eskatzen da:
- a) Formulatu eta ebatzi problema, lehenengo lehentasuna kostua 5 m.u. baino handiagoa ez izatea bada, eta bigarren lehentasuna ekoizpena 4 litro konposatu izatea bada.
 - b) Formula ezazu aurreko problema, kostua gainditzeak (gainetik egoteak) konposatuaren ekoizpena 4 litroko asmoaren gainetik egotearen ponderazio berdina badu, eta azpitik egotearen ponderazioaren bikoitza.

4. Higiezin agentzi batek 4 etxebizitza ditu saltzeko eta 5 bezeroen, A, B, C, D eta E, eskaintzak ditu. Bezero bakoitzak etxebizitza bakar bat erosiko du eta etxebizitza bakoitza bezero bakar bati salduko zaio. Bezero bakoitzak egindako eskaintzak taula honetan jasotzen dira (mila hamarreko eurotan):

	E1	E2	E3	E4
A	--	12	18	15
B	12	14	17	19
C	11	17	15	16
D	14	17	22	--
E	13	--	20	17

non – bezeroak etxebizitza hori ez duela nahi adierazten duen.

- Ebatzi, hungariar metodoa erabiliz, lau etxebizitzak bost bezeroetatik lauri esleitzeko problema, agentziaren sarrerak maximizatuz.
- Agentziak C bezeroari etxebizitza bat salduko diola erabakitzen badu, eraiki (ebatzi gabe) hungariar metodoa erabiliz, esleipen hobereana lortzeko erabiliko genukeen taula.
- Agentziak E4 etxebizitza ez badu salgai jartzen (soilik hiru salgai) eta C eta D bezeroak egoera berdinean gelditu behar badute (hau da, biak etxebizitza bana jasotzen dute, edo inori ez zaio etxebizitzarik esleitzen), planteatu problema, programazio lineal osoko problema moduan.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2003ko ekaina

1. Enpresa batek bi konposatu, C1 eta C2, ekoizten ditu. Egungo ekoizpen instalazioak 10 langile ditu, bakoitzak asteko 40 orduz lan egiten dutenak, guztira asteko gehienez 400 orduko lan edukiera izanik. C1-eko unitate bakoitzak 3 lan ordu behar ditu eta C2-ko unitate bakoitzak 2 ordu. Enpresak erabaki hau hartu behar du: egungo instalazioarekin jarraitu edo beste berri batekin aldatu, azken horren lan edukiera berdina izanik, baina orain C1 eta C2 konposatuak egiteko beharrezko lan orduak 2 eta 3, hurrenez hurren, izanik. C2 konposatuaren asteko eskaria gehienez 125 unitatekoa da. Enpresak mozkin maximoa lortu nahi du, C1 eta C2 unitateko mozkina, hurrenez hurren, 300 eta 500 m.u. direla jakinik.

a) Formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.

b) a) ataleko erabaki hoberena eguneko ekoizpen instalazioarekin jarraitzea dela jakinik, enpresak orain gehienez 3 langile gehiago kontrata ditzake, bakoitzeko kostua asteko 800 m.u. izanik. Gainera, zuzendaritzak ekoizpen instalazioa handitzea kontuan har dezake, 200.000 m.u.ko kostuarekin. Handitze horrekin enpresak gehienez 8 langile gehiago kontrata ditzake, handitu gabe kontrata daitezkeenak baino 5 gehiago. Formula ezazu problema berria programazio lineal osoko problema moduan.

2. Foru aldundiak Urkiolako natura-parkeko 4 tokitan basoa berritu nahi du. Alda ditzaketan espezieak eta aldaketa kostuak (moneta unitatetan) ezberdinak dira toki bakoitzean, taula honetan jasotzen den moduan:

	Gaztainondo	Haritza	Intxaurrondo	Pagoa
A	20	15	22	25
B	16	19	25	14
C	18	14	20	20
D	21	17	18	16

a) Lau espezieak aldatu nahi badira, bakoitza toki batean, zein izango da kostu total minimoko tokien banaketa?

b) a) ataleko planari aldaketa hauek egin zaizkio:

i. Lau tokietatik bitan gaztainondoa aldatzeko aukera kontuan hartu behar da.

ii. Haritza derrigorrean aldatuko da.

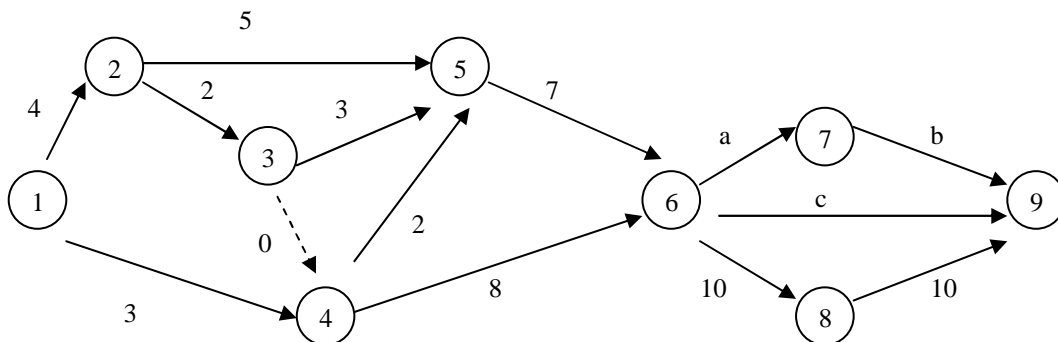
iii. Toki ezberdinetako lur azterketek C tokian soilik haritza eta pagoa alda daitezkeela ondorioztatzen dute.

Adierazi (ebatzi gabe) zein taulari aplikatuko zeniokeen hungariar metodoa, kostu total minimoa lortzeko.

3. Gobernu kanpoko erakunde batek laguntza paketeak bidali nahi ditu estatu jakin batera. Bi pakete mota dauzka: oinarritzko paketea, 400 \$ kostatzen dena eta 40 pertsoneri laguntzeko balio duena eta pakete aurreratua, 800 \$ kostatzen dena eta 50 pertsoneri laguntzeko balio duena. Laguntza paketeetan murrizketa hauek daude: gehienez 40000 pakete bidal daitezke, hauetatik gutxienez 5000 aurreratuak izanik. Helmuga hauek lehentasun ordena honekin ezarri dira:

1. Laguntzaren kostua 20 milioi dolar baino handiagoa ez izatea.
2. 11 milioiko populazioa duen estatu horretako biztanleriaren %20ari gutxienez laguntza ematea.
 - a) Formula ezazu problema eta ebatzi problema lasaitua.
 - b) Lehentasun ordena kontrakoa balitz, zein litzateke soluzioa?

4. Grafo honek proiektu bat irudikatzen du, ekintzen arteko aurre-erlazioak eta beraien iraupena azaltzen delarik ($t(6,7) = a$, $t(7,9) = b$, eta $t(6,9) = c$ dira).



- a) Eman bide kritikoa(k), proiektuaren aurreikusitako iraupena eta ekintzen marjina, $a=15$, $b=8$ eta $c=10$ izanik.
- b) Eman bide kritikoa(k), proiektuaren aurreikusitako iraupena eta ekintzen marjina, $c > a + b > 20$ izanik.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2003ko iraila

1. Zerbitzu empresa batek 3 disolbatzaile mota, *A*, *B* eta *C*, eros ditzake itsasaldeko arroketan itsatsitako galipota garbitzeko. Disolbatzaile mota bakoitza erabiltzeko kostu finkoa, tonako kostu aldakorra eta erabilitako tona bakoitzeko garbitzen den galipot kilo kopurua taula honetan jasotzen dira:

	Disolbatzailea erabiltzearen kostu finkoa (m.u.)	Disolbatzailearen kostua tonako (m.u.)	Disolbatzaile tona bakoitzeko garbitutako galipot kg
<i>A</i>	100000	20	750
<i>B</i>	130000	30	600
<i>C</i>	120000	23	650

Honako hau ezagutzen da:

- *A*, *B* eta *C* disolbatzaile bakoitzetik gehienez 50 tona eros daitezke eta erosten bada, gutxienez 20 tona erosiko dira.
- *B* disolbatzailea erabiltzen bada gobernuak tonako 5 moneta unitateko diru-laguntza emango lioke.
- *A* disolbatzailea erabili ordez, beraren deribatua, *D*, erabil daiteke. *D* disolbatzaileari buruz hau ezagutzen da: erositako tona bakoitzeko kostua 25 m.u. da, tonako 800 kg galipot garbitzen ditu eta gehienez 40 tona eros daitezke.
- Enpresak arroketan itsatsitako 10000 tona galipot garbitu behar ditu gutxienez.

Helburua murrizketa guztiak kostu minimoarekin betetzea bada, formula ezazu problema, ebatzi gabe, programazio lineal osoko problema moduan.

2. Enpresa batek motorrak eta konpresoreak ekoizten ditu. Motor bakoitzak 2.25 ekoizpen ordu behar ditu eta konpresore bakoitzak 1.5 ordu. Motor bakoitzaren bukatua eta kalitate kontrolak 1.5 ordu behar ditu eta konpresore bakoitzak, ordea, 3 ordu. Unitate bakoitzak (motorrak zein konpresoreak) biltegian betetzen duen espazioa 1.5 metro kubikokoa da. Biltegitratze kostua 200 eta 400 eurotakoa da motor eta konpresore unitateko, hurrenez hurren; unitateko mozkinak, ordea, 30 eta 50, hurrenez hurren. 13500 ekoizpen ordu erabil daitezke eta bukatze eta kalitate kontrol ordu erabilgarriak 18750 ordu dira. Honako helmuga hauek lehentasun orden honekin ezartzen dira:
- i) 11250 metro kubikoko edukiera ez gainditzen saiatu.
 - ii) 2000000 euro baino gehiago ez gastatzen saiatu.

- iii) Produktu bakoitzetik gutxienez 3000 unitate saltzea lortu.
- iv) Gutxienez 300000 euroko mozkina lortzen saiatu.

Formula eta ebatzi ezazu elkartutako problema lasaitua.

3. Turbina baten ekoizpenak 4 prozesu behar ditu: P_1 , P_2 , P_3 eta P_4 . Horretarako, enpresak 4 makina ditu eta prozesu bakoitzaren kostua makina bakoitzean ezagutzen da (m.u.-tan), taula honetan jasotzen delarik:

	Makina 1	Makina 2	Makina 3	Makina 4
P_1	6	7	3	5
P_2	3	5	6	6
P_3	4	14	5	4
P_4	5	4	3	3

Enpresak makina berri bat presta dezake, baina hau P_2 eta P_3 prozesuetan erabil daiteke soilik, 2 eta 1 prozesamendu kostuekin, hurrenez hurren. Makina bakoitza prozesu bakar bati eta prozesu bakoitza makina bakar bati esleitu behar dela jakinik,

- a) Erabaki prozesu bakoitzari esleitu beharreko makina, turbina egiteko kostua minimoa izatea nahi bada.
- b) Makina berria prestatzeko kostua 4 m.u.-koa balitz, erabaki esleipen hobereana.

4. Ekintza hauek eta beraien berehalako aurrekoak jasotzen dituen proiektua kontuan hartuz,

Ekintza	Berehalako aurrekoak
A	-
B	-
C	-
D	A, C
E	A, B
F	A, B
G	A, B
H	D, G
I	E, F

- a) Eraiki proiektua jasoko duen sarea.
- b) Hiru ekintza berri, J, K eta L, aurreko grafoan sartu nahi dira. Ekintza horiei buruz hauxe dakigu: J ekintza egiteko G ekintzak bukatuta egon behar du, eta K eta L ekintzak E ekintza ondoren egingo dira. artu ekintza horiek aurreko grafoan.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2004ko ekaina

1. Jostailu enpresa batek hiru jostailu modelo berri (1, 2 eta 3) garatu ditu hurrengo gabonetako kanpainan sartu ahal izateko. Martxan jartzeko kostuak 50000 €, 80000 € eta 70000 € dira 1, 2 eta 3 modeloentzako, hurrenez hurren, eta unitateko mozkinak 10 €, 15 € eta 13 €, hurrenez hurren. Enpresak 3 ekoizpen planta dauzka modelo horiek egiteko, baina gastuak saihesteko, jostailuak instalazio bakar batean ekoiztuko dira.

Orduko ekoiztu daitekeen jostailu kopurua instalazio bakoitzean hau da:

	1 Jostailua	2 Jostailua	3 Jostailua
1 Instalazioa	50	40	60
2 Instalazioa	40	25	20
3 Instalazioa	35	30	20

Instalazioen edukiera 500, 600 eta 630 ordutakoa da, hurrenez hurren. Gerentziak modelo bat edo bi ekoiztea erabaki du.

Formula ezazu problema, programazio lineal osoa erabiliz, mozkin totala maximizatzeko.

2. Lau bazkideko enpresa txiki batean opor-hilabeteak banatuko dituzte, bakoitzak hilabete ezberdina hartuz. Hilabete posibleak maiatza, ekaina, uztaila, abuztua eta iraila dira, baina merkatu arrazoiengatik abuztuko hilabetean norbaitek derrigorrean hartu beharko ditu oporrak.

Esleipena modurik onenean egiteko, preferentzi zerrenda bat (data, tokia, itsasoa, mendia eta abar) egitea erabaki dute. Zerrenda hori taula honetan jasotzen da, 1 eta 9 arteko puntuazioarekin:

	Maiatza	Ekaina	Uztaila	Abuztua	Iraila
1 Bazkidea	9	7	3	5	4
2 Bazkidea	3	8	1	7	6
3 Bazkidea	7	5	4	2	1
4 Bazkidea	5	6	9	5	7

- a) Kalkulatu, hungariar metodoa erabiliz, puntuazio totala maximizatzeko duten esleipenak.
- b) Bazkide batek, aurreko preferentziak errespetatuz, bi planteamendu berri proposatzen ditu: bata abendua opor-hilabete moduan sartzea eta bigarrena, abenduko hilabetean norbaitek

derrigorrean oporrak hartzea. Bazkide bakoitzak abendurako preferentziak eman ditu, taula honetan jasotzen direlarik:

	Abendua
1 Bazkidea	2
2 Bazkidea	5
3 Bazkidea	9
4 Bazkidea	6

Eraiki hungariar metodoa aplikatzeko osatuko zenukeen taula bi kasuetan.

3. a) Ospitale batean 5 osagaiekin, *A*, *B*, *C*, *D* eta *E*, menua prestatu nahi dute, janariak gutxienez 63000 miligramo (mg) proteina, 10 mg burdin, 15 mg niacina, 1 mg tiamina eta 50 mg C bitamina eman ditzan. Osagai bakoitzeko 100 gramok elikagai bakoitzetik ematen duen kantitatea taula honetan jasotzen da:

Mg/100 gramo	Proteina	Burdina	Niacina	Tiamina	C Bitamina	Koipea
<i>A</i>	5000	1.1	1.4	0.18	0	5000
<i>B</i>	29300	1.8	5.4	0.06	0	5000
<i>C</i>	5300	0.5	0.9	0.06	10	7900
<i>D</i>	3000	2.2	0.5	0.07	28	300
<i>E</i>	4000	1.2	0.6	0.15	3	14300

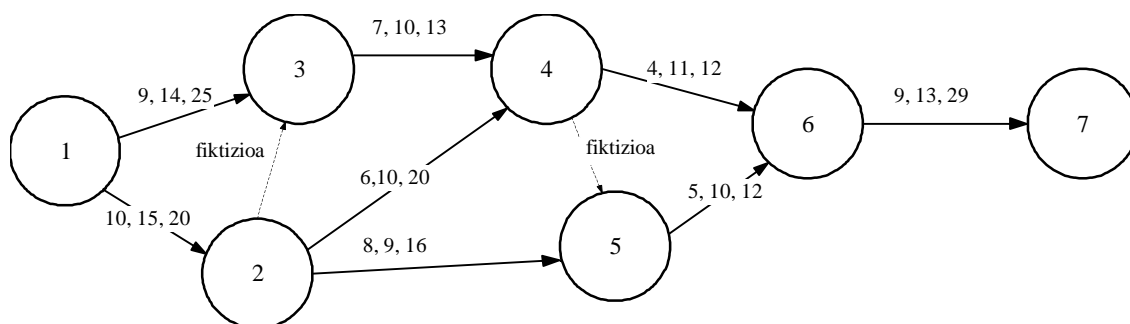
Janaria ongi orekatuta egoteko eta gaixoez gustuko izan dezaten, osagai bakoitzak, gehienez, kantitate hauek izango ditu: *A*-tik 300 gramo, *B*-tik 300 gramo *C*-tik 200 gramo, *D*-tik 100 gramo eta *E*-tik 100 gramo. Gainera *A*-ko kantitateak gutxienez *D*-koa bider hiru izan behar du. Bestalde, osagai bakoitzeko kostuak 100 gramoko hurrengoak dira:

Osagaia	Euro/100 gramo
A	0.15
B	0.80
C	0.12
D	0.20
E	0.51

Formula ezazu problema, koipe eduki totala eta janari kostua minimizatzeko. Koipe kantitatea edo janariaren kostua zero izatea gerta daiteke?

- b) Aurreko bi helburu funtzioak banan bana minimizatuta, gatazka hau agertzen da: osagai kantitate hoberenak ezberdinak dira. Ospitaleko zuzendariak helmugak eta zigorrak (ponderazioak) ezartzea proposatu du. Hain zuzen, janariaren kostua 2 euro baino gehiago ez izateko helmuga jarri du, eta neurri berdina erabilia zigortuko da. Gainera, janariaren koipe edukia 55000 mg bainoa handiagoa ez izatea nahi da, eta janariaren koipe kantitatea miligramo bat txikiagotzeko 0.009 zentimo ordaintzeko prest legokeela estimatu da. Formulatu problema hau. Ponderatutako helburu funtzioaren balio hobereana janariaren kostu totala al da?

4. Sare honetan proiektu bat osatzen duten ekintzen arteko aurre-erlazioak irudikatuta daude. Ekintza bakoitzarekin bere iraupen baikorra, modala eta ezkorra (egunetan) jasotzen dira.



PERT metodoaren hipotesiak kontuan hartuta, eman bide kritikoa, proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena, proiektuaren iraupenaren bariantza, proiektuaren iraupenak jarraitzen duen banaketa eta ekintzen marjina.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2004ko iraila

1. a) Adartze eta bornatze metodoa erabiliz, programazio lineal osoko problema hau ebatzi

$$\begin{aligned} & \max(10x_1 + 15x_2) \\ \text{m.} & \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Aurreko atala kontuan izanik programazio lineal osoko hurrengo problema ebatzi

$$\begin{aligned} & \max(10x_1 + 15x_2 - 5z) \\ \text{m.} & \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ 10x_1 + x_2 \leq Mz \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \\ z = 0 \text{ edo } 1 \end{cases} \end{aligned}$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

2. Har dezagun 9 ekintza dituen proiektu bat. Taula honetan jasotzen dira proiektuaren ekintzak, ekintzen iraupena eta ekintza bakoitzaren berehalako aurreko ekintzak.

Ekintza	Berehalako aurrekoak	Iraupena (egun)
A	--	17
B	A	13
C	B	3
D	B	10
E	D, C	7
F	B	17
G	B	30
H	E, F	8
I	E, F	10

- a) Proiektua irudikatuko duen sarea eraiki.
b) Proiektuaren aurreikusitako iraupen denbora eta bide kritikoa kalkulatu.

- c) Zein da I ekintza hasi daitekeen azkenengo eguna, proiektuaren aurreikusitako iraupena atzeratu gabe? Zein da D ekintza bukatu daitekeen egunik goiztiarrena?
- d) G ekintzaren iraupena 30 izan beharrean 28 balitz, bide kritikoa aldatuko litzateke? Erantzuna arrazoitu.

3. Formulatu, ebatzi gabe, problema hau: Elektronika enpresa batek audioak eta bideoak fabrikatzen ditu. Unitateko mozkina 60 euro audio bakoitzeko eta 120 euro bideo bakoitzekoa da. Enpresak bi aparatuetako kitak jasotzen ditu eta horiek muntatu eta ondo dabilzan kontrolatu behar du. Aparatu bakoitzak muntatu eta kontrolatzeko behar dituen denborak eta asteko erabilgarria den denbora taula honetan azaltzen dira (ordutan):

	Muntaketa	Kontrola
Audio	6	1
Bideo	8	2
Denbora erabilgarria	300	80

Bi lanetan ordu estrak egitea posible izango da, muntaketako ordu estra bakoitzaren kostua 12 euro eta kontrolekoa 15 euro izanik. Bi produktuen kalitatea eta prezioa dela eta, konpainiak salmenta ziurtatua dagoela uste du. Enpresak helmuga hauek lehentasun orden honekin ezarri ditu:

- i. Bi lanetan erabili gabeko denbora minimoa izatea nahi du.
- ii. Gutxienez 4200euroko mozkina lortu nahi du.
- iii. Denbora estra totala minimizatu nahi du.

4. Hiru kokapen posible ditugu, horietako bakoitzean gehienez fabrika industrial bat kokatzeko. Kokapenaren arabera, fabrika eraikitzeak kostu finko bat du, eta eskari maximo bat bete dezake. Taulan honetan eraikuntza kostuak eta eskari maximoa ikus ditzakegu:

Kokapena	1	2	3
Eraikuntza kostua	10	14	13
Eskari maximoa	20	30	45

Lau bezero ditugu, *A*, *B*, *C* eta *D*, bezero bakoitzak eskaera jakin bat du eta eskaera hau osorik fabrika bakar batean zerbitzatua izan behar da. Eskaerak eta fabrika bakoitzetik unitate bat zerbitzatzearen mozkina taula honetan jasotzen da:

Bezeroa	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
Eskaera	15	15	10	15
1 kokapena	6	4	5	4
2 kokapena	3	3	5	1
3 kokapena	1	5	2	4

- a) Programazio lineal osoko problema bat bezala modelizatu eraiki beharreko fabrikak eta fabrika bakoitzak zein bezeroren eskaria bete behar duen zehazteko, mozkinaren kostuak maximizatu.
- b) Demagun hiru fabrikak eraikitzea erabakitzen dela eta hirurak erabiliak izan behar direla, hungariar metodoa erabiliz, adierazi bezero bakoitza zein kokapenetan atendituko den, eskaera osoa fabrika bakar batek zebitzatua izan behar dela jakinik, mozkin maximoa lortzeko.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2005eko ekaina

1. Jostailu enpresa batek hiru jostailu modelo berri (1, 2 eta 3) garatu ditu hurrengo gabonetako kanpainan sartu ahal izateko. Jostailu berri horiek ekoizteko instalazioen prestaketa kostua 25000 €, 35000 € eta 30000 € dira 1, 2 eta 3 modeloentzako hurrenez hurren, eta unitateko mozkinak 10 €, 15 € eta 13 €, hurrenez hurren. Enpresak 3 fabrikaduzka modelo hauek ekoizteko, baina gastuak saihesteko jostailuak fabrika bakar batean ekoiztuko dira, aukeraketa mozkinen maximizazioarekin egingo delarik.

Jostailu modelo bakoitzak fabrika bakoitzean behar duen ordu kopurua hau da:

	1 modeloa	2 modeloa	3 modeloa
1 fabrika	5	4	6
2 fabrika	4	2	2
3 fabrika	3	3	2

Fabriken edukiera 500, 600 eta 630 ordutakoa da, hurrenez hurren. Gerentziak gutxienez modelo bat ekoiztea erabaki du.

- a) Formula ezazu problema, programazio lineal osoa erabiliz, mozkin totala maximizatzeko.
- b) Enpresak soilik 3 modeloa ekoiztea erabaki du, baina 50 unitate baino gehiago ekoiztuz gero, honako hauek hartu beharko ditu kontuan:
 - 3 modeloa ekoizteko instalazioen prestaketa kostua 40000€ da
 - 3 fabrikan ekoiztu behar du

Formula ezazu problema, informazio hori erantsita, programazio lineal osoa erabiliz.

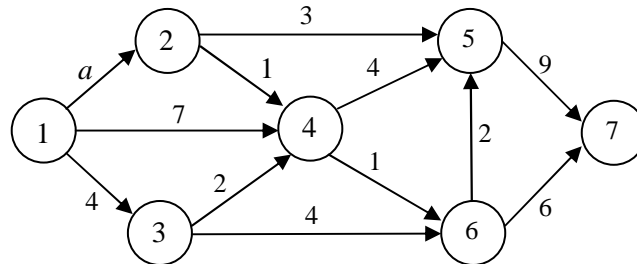
2. Okindegi batean bi ogi mota berri ekoiztu nahi dira: irin osokoa eta zekale-ogia, euren ekoizpenaren salmenta ziurtatuta baitago. Ogi horiek oinarritzko osagai hauekin egiten dira: osoko zahia, gari-irina eta zekale-irina. Irin osoko ogi 1 kg egiteko 350 g osoko zahia eta 150 g gari-irin behar dira, eta zekale-ogi 1 kg egiteko 250 g gari-irin eta 250 g zekale-irin. Osoko zahia erabilgarritasuna 210 kg da eguneko, 115 kg gari-irinarena eta 100 kg zekale-irinarena. Ogi kg bakoitzak utzitako mozkinak 0.40 € da irin osoko ogiarentzat eta 0.60 € zekale-ogiarentzat.

Kalkulatu eguneko irin osoko eta zekale-ogi ekoizpena helmuga hauek lehenetsun orden honekin hartuta:

1. lehenetsuna: Eguneko mozkinak gutxienez 240 €-koa izatea nahi da.
2. lehenetsuna: Eguneko irin osoko ogiaren ekoizpena gutxienez zekale-ogiaren ekoizpenaren bikoitza izatea nahi da.

3. lehenetsuna: Eguneko zekale-ogiaren ekoizpena 300 kg baino txikiagoa ez izatea nahi da Ezarritako helmugetatik zeintzuk bete dira?

3. Demagun sare hau:



- a) Arkuen balioek distantziak adierazten badituzte, aurkitu, arrazoituz, a -ren zein baliotarako 1 korapilotik 7 korapiloraino doan bide laburrena derrigorrean 2 korapilotik pasako den. Eman bide laburrena.
- b) $a = 5$ bada eta arkuen balioek fluxu edukiera adierazten badute, kalkula ezazu 1 korapilotik 7 korapilora doan fluxu maximoaren balioa.

4. Demagun 11 ekintzez osaturiko proiektua dugula. Taula honek ekintza horiek, euren iraupena (egunetan) eta berehalako aurrekoak jasotzen ditu:

Ekintza	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	2	--
B	2	--
C	6	A
D	Td	A
E	1	B
F	2	B
G	4	D, E
H	Th	D, E
I	2	F, H
J	2	G, I, C
K	3	F, H

- a) Eraiki proiektua irudikatzen duen sarea.

- b) Proiektuaren ekintza kritikoak A, C, D, G, H, I eta J direla jakinik, kalkula ezazu aldez aurretik pentsatutako proiektuaren iraupena, bide kritikoak eta D eta H ekintzen iraupena.
- c) Kalkula ezazu ekintza ez kritikoen marjina.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2005eko iraila

1. Programazio lineal osoko problema hau formulatu (ebatzi gabe): Unibertsitate batek batzorde bat sortu nahi du. Hamar pertsona izendatuak izan dira: *A, B, C, D, E, F, G, H, I* eta *J*. Araudiak dio gutxienez emakumezko bat, gizonetzko bat, ikasle bat, administrari bat eta irakasle bat aukeratu behar direla, emakumeen kopurua gizonetzkoenaren berdina izan behar dela eta irakasleen kopurua administrariena baino txikiagoa ez dela izar behar. Izendatuen ezaugarriak hauek dira:

Ezaugarriak	Pertsonak
Emakumeak	<i>A, B, C, D, E</i>
Gizonak	<i>F, G, H, I, J</i>
Ikasleak	<i>A, B, C, J</i>
Administrariak	<i>E, F</i>
Irakasleak	<i>D, G, H, I</i>

Programazio lineal osoko problema formulatu (ebatzi gabe), batzordea osatuko duen pertsona kopurua ahalik eta txikiena izan dadin.

2. Enpresa bateko langile zuzendariak 5 eginkizun (*E1, E2, E3, E4* eta *E5*) 4 langileei (*L1, L2, L3* eta *L4*) esleitu behar dizkie, aurreko esperientziaren arabera eginiko balorazioa kontuan izanik. Balorazioak taula honetan azaltzen dira (puntuazioa: 0 txarra, 10 bikaina, “–” bateraezintasuna):

	<i>E1</i>	<i>E2</i>	<i>E3</i>	<i>E4</i>	<i>E5</i>
<i>L1</i>	6	8	9	3	7
<i>L2</i>	2	3	–	4	–
<i>L3</i>	5	6	8	9	6
<i>L4</i>	2	3	7	8	6

Gainera, murrizketa hauek kontuan izan behar dira: langileak ezin dira eginkizun gabe gelditu, *L2* langileari derrigorrean eginkizun bakar bat esleitu behar zaio eta eginkizunak ezin dira partekatu.

- a) Programazio lineal osoko problema moduan formulatu.
- b) Hungariar metodoa erabiliz, soluzio hoberen bat aurkitu.

3. Ebatzi: $\min L(y_1^+, y_2^-, y_3^-, y_4^-)$

$$m. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 45 \\ y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

4. Taula honetan proiektu bat osatzen duten ekintzak, horien iraupena eta berehalako aurrekoak azaltzen dira.

Ekintza	Iraupena (egun)	Ekintzen Berehalako Aurrekoak
A	3	-
B	2	A
C	6	A
D	2	C
E	3	A
F	3	B
G	5	C
H	1	C
I	1.5	F, H
J	2	I

- a) Proiektua irudikatzen duen sarea eraiki eta aldeztatik aurretik pentsatutako proiektuaren iraupena aurkitu.
- b) Proiektuaren ekintzen taula eraiki.
- c) Galdera hauek erantzun:
 - i. Zer gertatuko litzateke proiektuaren iraupenarekin, lehenengo ekintza 2 egunetan atzeratuz gero?
 - ii. Zenbat egunetan atzera daiteke D ekintza, proiektuaren aldeztatik aurretik pentsatutako iraupena aldatu gabe?
 - iii. Zein izan beharko litzateke B ekintzaren iraupena, B kritikoa izateko beste ekintzen iraupena finko mantenduz?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2006ko ekaina

1. Fabrika batek 4 motatako xaboiak ekoizten ditu. Xaboi horiek ekoizteko 5 osagai behar dira. Taula honetan xaboi-pastilla bat ekoizteko beharrezkoak diren osagaik azaltzen dira.

	olioa	ura	sosa kaustikoa	glizerina	limoi esentzia	marrubi esentzia
X1	250 ml	240 ml	42 gr	1 gr	1 ml	3 ml
X2	200 ml	210 ml	2 gr	40 gr	2 ml	1 ml
X3	230 ml	240 ml	20 gr	25 gr	3 ml	1 ml
X4	180 ml	200 ml	10gr	35 gr	1 ml	3 ml

Fabrikaren edukierak eguneko 150000 ml olio, 160000 ml ur, 12 kg sosa kaustikoa, 3 kg glizerina, 2000 ml limoi esentzia eta 3000 ml marrubi esentzia dira. Egunean gutxienez xaboi mota bat ekoiztu behar da eta gehienez hiru. Gainera, 1 motako xaboiak ekoiztu ezker ezingo dira 4 motakoak ekoiztu.

Xaboi-pastilla mota bakoitzeko mozkinak 10, 13, 15 y 11 euroakoa da, hurrenez hurren.

Fabrika ekoizpen instalazioa handitzea pentsatzen ari da 200000 euroko kostuarekin, jakinik instalazioa handituz gero, edukierak kantitate hauetan handituko direla: 50000 ml olio, 70000 ml ur, 4 kg de sosa kaustikoa, 4 kg glizerina, 1000 ml limoi esentzia eta 500 ml marrubi esentzia. Gainera, instalazioa handitzen bada eta 3 motako xaboi-pastillak ekoizten badira, 1 motako xaboi-pastillak ekoiztuko dira.

Formula ezazu problema programazio lineal osoko problema bezala, mozkinak maximizatuz.

2. Gozoki fabrika batek bi motatako gozokiak, G1 eta G2, ekoizten ditu. G1 gozoki kilogramo bakoitza 200 eurotan saltzen da eta 100 gr azukre eta 200 gr fruta ditu, eta G2 gozoki kilogramo bakoitza 300 eurotan saltzen da eta 400 gr azukre eta 400 gr fruta ditu. G1-en ekoizpena G2-rena baino handiagoa izan behar da gutxienez 5 kilogramotan, eta fruta kantitatea gutxienez 1600 gr izan behar da.
- a) Sarrera maximizatu eta azukre kantitatea minimizatzen duten soluzio eraginkorrak aurkitu.
 - b) Badakigu azukre kilogramo baten murrizketa diru sarreraren 2 euroren murrizketaren baliokide dela. Formulatu, ekoiztu gabe, problema haztatua.

c) Gozokien bilgarrien kostua 0.1 eurokoa da G1 goxoki kg bakoitzeko, eta 0.2 G2 gozoki kilogramo bakoitzeko. Diru sarrera maximizatu, azukre kantitatea minimizatu eta bilgarri kostua minimizatzen duen soluzio eraginkor bat aurkitu.

3. Margolari ospetsu baten bosgarren mendeurrena dela eta, museo garrantzitsu batek bere 5 lan berriztatzea erabaki du. Horretarako, 3 berriztatze talde kontratatu dira. Talde bakoitzak lan bakoitzarentzat duen berriztatze aurrekontua aurkeztu du, taula honetan jasotzen den bezala, milaka eurotan:

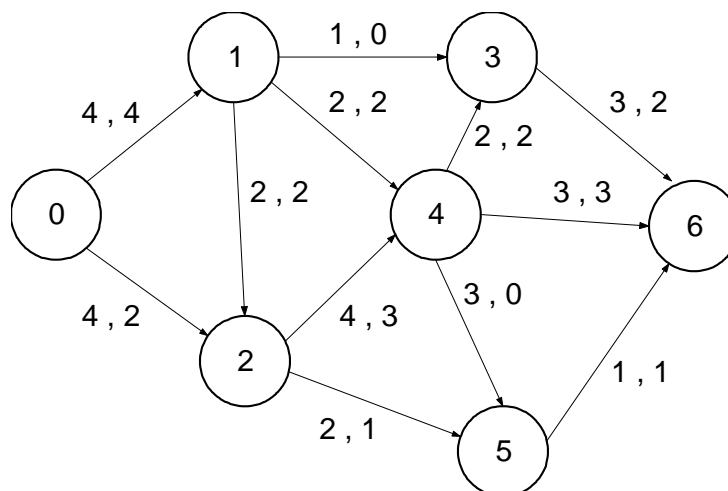
	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
B ₁	600	-	900	-	1200
B ₂	700	900	800	1000	800
B ₃	-	700	1200	900	1000

(non – berriztatze talde horrek ez duela lan hori berriztatuko esan nahi duen).

Lehenengo berriztatze taldea sei pertsonen osatua dago, bigarrena lau pertsonen eta hirugarrena hiru pertsonen. Lan bakoitza berriztatzeko bi pertsona behar direla jakinik,

- Zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa 5 lanak kostu minimoarekin berriztatzeko, jakinik lan bakoitza berriztatze talde bakar batek berriztatu behar duela eta hiru taldeek berriztapenean parte hartu behar dutela?
- Jakinik 5 lanen berriztaperen kostua oso altua dela, museoko zuzendaritzak hiru lan bakarrik berriztatzea pentsatu du, talde bakoitzari lan bakar bat esleituz. Kostua minimizatzen duten esleipen posible guztiak lortu, hungariar metodoa aplikatuz.

4. Demagun sare hau:



- a) Eman abiaburutik helburura doan kate bat, bidea ez dena, eta 5 korapilotik pasatzen dena.
 - b) Arkuen balioek edukiera (ezkerreko zenbakia) eta fluxuaren balioa (eskuineko zenbakia) adierazten badute, kalkulatu, posible bada, sare horretan fluxua handitzen duen kate bat (asetu gabea).
 - c) Sareak adierazten duen fluxutik abiatuz, fluxu maximoa lortu.
5. Proiektu plangintzan, ekintza baten hasiera denbora goiztiarrenaren eta bukaera denbora berankorrenaren esanahiak azaldu.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2006ko iraila

1. Enpresa bat 5 proiektu aztertzen ari da. Onartutako proiektu bakoitza hiru urteko epean burutuko da. Itxarotako urteko errendimenduak, gastuak eta fondo erabilgarriak taula honetan jasotzen dira, milaka eurotan:

Proiektua	Gastuak			Errendimenduak
	1 urtea	2 urtea	3 urtea	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondo erabilgarriak	25	25	25	

Enpresak fondo erabilgarriak kontuan hartuta, eta errendimendu totalak maximizatzeko helburuarekin, proiektuak aukeratu behar ditu. Gainera informazio hau ezagutzen da:

- 3 proiektua ez da egiten, 5 egiten bada.
- 1 eta 2 proiektuak batera egingo dira soilik 4 eta 5 egiten ez badira.
- Enpresak urte batean bere fondoak 5 mila eurotan murriztu behar ditu, eta zein urtetan izango den erabaki behar du.

Formula ezazu problema, ebatzi gabe, programazio lineal osoko problema moduan.

2. Enpresa batek bi ekoizpen kate ditu artikulu bakarra ekoizteko. 1 katean orduko 2 unitate ekoizten dira unitateko 3000 €-ko mozkinarekin. 2 katean beriz, orduko 3 unitate ekoizten dira unitateko 3000 €-ko mozkinarekin. Unitate baten biltegiratzekostua 10 €-koa da.

Kalkulatu kate bakoitzaren ekoizpen orduak, enpresak helmuga eta helburu hauek lehentasun orden konekin kontuan hartzen baditu:

- 1. lehentasuna: gutxienez 30000 unitate ekoiztu nahi dira.
- 2. lehentasuna: biltegiratze kostuak 450000 € ez gänditzea nahi da.
- 3. lehentasuna: 1 katearen ekoizpen orduak gutxienez 2 katean bezain beste izatea nahi da, baina bider hiru izatera iritsi gabe.
- 4. lehentasuna: mozkina maximizatu nahi da.

3. Lokal bateko jabea alokatze kontratuen epeak aztertzen ari da. Taula honek itxarotako utilitatearen kalkulua jasotzen du, ehundaka eurotan, i urtearen hasieran alokatzen badu j urtearen hasieraraino.

$i \backslash j$	2	3	4	5
1	12	22	38	40
2	-	13	20	29
3	-	-	10	19
4	-	-	-	12

Jabeak, hurrengo lau urteetan, lokala noiz eta zenbat urtetako alokatuko duen erabaki nahi du, helburua itxarotako utilitate totala maximizatzea izanik.

4. Taula honetan proiektua osatzen duten ekintzak, horien arteko aurre erlazioak eta iraupena jasotzen dira:

Ekintza	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	4 egun	-
B	6 egun	-
C	7 egun	-
D	t egun	A
E	5 egun	B, D
F	1 egun	A
G	2 egun	B, D
H	3 egun	C, E

- Eraiki proiektua irudikatuko duen sarea.
- Zein izango da proiektuaren iraupena, D ekintzaren iraupena 2 egun baino txikiagoa bada? Eraiki proiektuaren ekintzen taula, ekintza kritikoak adieraziz.
- D ekintza $\frac{1}{2}$ egun arte atzera daiteke proiektuaren iraupena aldatu gabe. Zein da D ekintzaren iraupena?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2007ko ekaina

1. P1, P2, P3 produktuak egiten dituen enpresari batek mozkinak maximizatzen dituen eguneko ekoizpena aurkitu nahi du. Lau makina ditu, eta horietako bitan prozesatzen dira produktuak, baina ez edozein bitan: A eta B-n, edo C eta D-n. A, B, C eta D makinak martxan jartzeko kostua 20, 25, 35 eta 15 m.u.-koa da, hurrenez hurren. P1 unitate bakoitzaren sarrera 5 m.u.-koa da, P2 bakoitzarena 5 m.u.-koa eta P3 bakoitzarena 10 m.u.-koa. Unitate bakoitzeko ordu kopurua makina bakoitzean taula honetan agertzen da:

	A makina	B makina	C makina	D makina
P1	1	1	2	1
P2	1	1	1	2
P3	2	1	1	1

Makina bakoitzak egunean erabil dezakeen ordu kopurua 190, 210, 170 eta 200 da, hurrenez hurren.

- a) Formula ezazu problema P.L.O. erabiliz, eguneko mozkin totala maximizatzeko.
- b) Formula ezazu problema P.L.O. erabiliz, baldintza hau eransten badiogu: P1 egiten bada, orduan gutxienez 10 unitate P1 egin behar dira, gehienez 20 unitate P2 eta gehienez 5 unitate P3.
2. Bidaia-agentzia bat bidai pakete bat prestatzen ari da C lekurako. Bi abiaburu aireportu daude eta ez dago hegaldi zuzenik. Tarteko konexioak 5 aireportutan egin daitezke. Konexioak egiteko nahiko denbora dagoen aireportuen arteko hegaldietarako, turista motako plaza kopurua hegaldi ezberdinentzako taula honetan agertzen da:

	B1	B2	B3	B4	B5	C
A1	45	40	30	-	-	-
A2	-	-	30	-	-	-
B1	-	-	-	20	30	-
B2	-	-	-	25	-	-
B3	-	-	-	-	35	20
B4	-	-	-	-	-	40
B5	-	-	-	-	-	65

- a) Eraiki dagokion sare bat.
- b) Taula honetan turistak C lekura bidaltzeko planifikazio bat adierazten da:
Zenbat turista joango lirateke C lekura?

	B1	B2	B3	B4	B5	C
A1	45	20	25	-	-	-
A2	-	-	30	-	-	-
B1	-	-	-	20	25	-
B2				20	-	-
B3	-	-	-	-	35	20
B4	-	-	-	-	-	40
B5	-	-	-	-	-	60

Aurreko plazak hartuak daudela kontuan izanik, zenbat turista gehiago bidal daiteke?

3. Enpresa bateko Pertsonal-buruak bere sailean dauden hiru pertsonen oporrak banatu nahi ditu. Esleipen hobereana egiteko asmoarekin, ekain, uztail, abuztu eta irailko bakoitzaren lehentasunekin taula hau osatu du:

	Ekaina	Uztaila	Abuztua	Iraila
P1	5	4	9	--
P2	--	3	6	7
P3	7	5	5	6

Aurten, saileko oinarrizko beharrak bete ahal izateko, Pertsonal-buruak udako hilabeteetan beste sail batetik bere sailera laugarren pertsona bat ekartzea erabaki du.

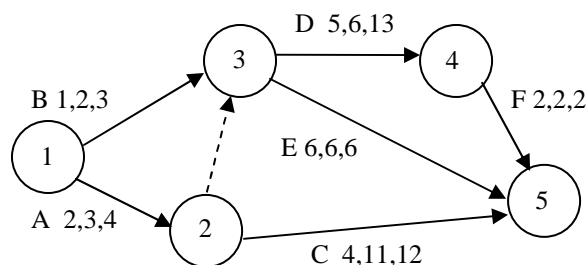
a) Honako taula honek laugarren pertsonaren lehentasunak adierazten baditu,

	Ekaina	Uztaila	Abuztua
P4	6	--	9

aurkitu guztien lehentasunak hoberenatzen dituen esleipena, bi baldintza hauek kontutan izanik: lauen oporraldia ekainean, uztailean edo abuztuan bete behar da (bakoitzak hilabete osoa) eta hilabete guzti horietan gutxienez pertsona batek oporretan egon behar du.

b) Laugarren pertsonaren lehentasun bakarra lau hilabetetik hirutan jarraian lan egitea bada, Pertsonal-buruari ez zaio gaizki iruditzen iraila ere sartzea bere planifikazioan. Honela, lauen oporraldia lau hilabeteetan bete behar bada, baina bakoitzarena hilabete desberdin batean, planteatu ezazu Hungariar Metodoa aplikatuko zenukean taula, helburua lauen lehentasun maila hoberenatzea izanik.

4. Taula honetan adierazita daude proiektu baten ekintzak eta bakoitzaren iraupen baikorra, ezkorra eta modala (egunetan):



a) Kalkulatu proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora, proiektuaren iraupenaren bariantza eta ekintza kritikoak. Ekintzen taula osatu.

b) Erantzun galdera hauek (eta azaldu erantzunak):

- Zenbat egunetan labur daiteke C ekintzaren batezbesteko iraupena, proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora kopuru berean laburtzeko?
- G ekintza berri bat eranstean diogu, bere berehalako aurrekoa E delarik. Gehienez zenbat egunekoa izan behar da bere batezbesteko iraupena, (a) atalean kalkulaturako proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora ez aldatzeko?

iii. G ekintza berriaren berehalako aurrekoak E eta D badira, gehienez zenbat egunekoa izan behar da bere batezbesteko iraupena, (a) atalean kalkulaturako proiektuarentzako estimaturako batezbesteko iraupen denbora ez aldatzeko? Eraiki proiektu berri horri dagokion sare bat.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) **2007ko iraila**

1. Demagun programazio lineal osoko problema hau:

$$\begin{aligned} \max(2x_1 + 5x_2) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{aligned}$$

- a) Ebatzi problema hori Adartze eta Bornatze metodoa erabiliz.
- b) Helburu funtzioko x_1 aldagaiaren koefizientea 2 izan beharrea 10/3 bada, kalkulatu zein izango den problemaren soluzio berria.

2. Automobilgintza enpresa batek “lehen ekipoen” merkaturako produktu bat egiten du, bere mozkin unitate bakoitzeko k m.u.-koa izanik. Enpresa horrek produktu hori “ordezko piezen” merkatuan ere sartzea planteatzen ari da, hemen unitate bakoitzeko mozkin bikoizten delako. Eguneko ekoizpena 800 piezakoa da eta Enpresako Zuzendaritzak ez du kopuru hori handitzeko asmorik.

- a) Gaur egungo bezeroak galtzeko beldurrez, gerentziak egunean gutxienez produkzio totalaren %75a “lehen ekipoen” merkaturako eta gutxienez 160 unitate “ordezko piezen” merkaturako izatea erabaki du.

Formulatu eta erabaki, problema lasaitua ebatziz, enpresak merkatu bakoitzean jarri behar duen kopurua bi helburu hauek betetzeko: mozkinak maximizatu eta “lehen ekipoen” merkatuan ahal den kopuru handiena jarri.

- b) “Ordezko piezen” merkatuko bezero batek eguneko 180 piezako eskaera bidali dio Enpresako Zuzendaritzari eta hori ikusita Enpresako Gerentziak egoera birplantatzea erabaki du, helmuga eta helburu hauek jarritz, honako lehentasunekin:

1. lehentasuna: Egunean “lehen ekipoen” merkaturako jarritako unitate pieza kopurua produkzio totalaren %75 baino txikiagoa ez izatea.
2. lehentasuna: Egunean “ordezko piezen” merkaturako jarritako unitate pieza kopuruak bezero berriaren beharrak asetzea.
3. lehentasuna: Egunean “ordezko piezen” merkaturako jarritako unitate pieza kopurua produkzio totalaren %20 baino txikiagoa izatea.
4. lehentasuna: Mozkinak maximizatu.

Kalkula ezazu egunean merkatu bakoitzean jarri behar den kopurua, eta egin lortutako soluzioaren azterketa zehatza.

3. Udaletxe batek erabaki behar du ura nola eraman D udal gordailutik 7 nekazal etxeetaraino, kostu minimoan (bidalketa ez da zertan era zuzenean egin behar). Ura eramateko lotura posibleak eta beraiei elkartutako kostuak taula honetan adierazita daude:

	D	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
D	-	10	12	14	-	-	-	-
E1		-	-	-	3	-	-	-
E2			-	-	2	4	-	-
E3				-	-	3	-	-
E4					-	3	5	6
E5						-	7	5
E6							-	4
E7								-

Adibidez, 2. etxetik 5. etxera ura eramateak 4 moneta unitateko kostua dauka.

- a) Kalkulatu loturak ezartzeko era posible guztiak, kostu totala minimoa izan dadin.
 b) 7 etxe izan beharrean 8 etxe baditugu, zenbat lotura beharko genituzke? Azaldu erantzuna.
4. Taula honetan proiektua osatzen duten ekintzak eta horien arteko aurre erlazioak jasotzen dira:

Ekintzak	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Berehalako aurrekoak	-	-	A	A	A	B	B	D, E, F	C, D	D	D	D	I, J

Eraiki proiektua irudikatuko duen sare bat.

5. Izan bitez sare bateko hiru ekintza, (3, 8), (4, 8) eta (4, 9) arkuen bitartez adieraziak. Gainera, honako hau dakigu:

- Hiruen iraupena berdina da: bi aste.
- Proiektua ez bada atzeratu nahi, (4, 8) ekintza proiektua hasi eta 20. astean bukatua egon behar da.
- (4, 8) ekintza 3 aste atzera daiteke proiektua atzeratu gabe.

Erantzun bi galdera hauei (eta erantzunak azaldu):

- a) Zein dira (4,9) ekintzaren hasiera eta bukaera denbora goiztiarrenak?
- b) Zein dira (3,8) ekintzaren hasiera eta bukaera denbora berankorrenak?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2008ko ekaina

1. Enpresa batek bi produktu, A eta B, ekoizten ditu hiru makinetan, M_1 , M_2 eta M_3 . Prozesamendu denbora makina bakoitzean produktu unitate bakoitzeko, produktu bakoitzeko unitateko sarrerak eta makina bakoitzaren asteko erabilgarritasuna taula honetan jasotzen dira:

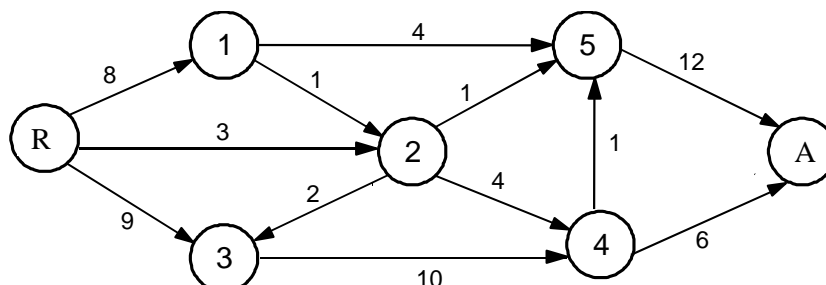
	A	B	Erabilgarritasuna asteko (orduak)
M_1	3	5	30
M_2	1	10	35
M_3	2	8	40
Unitateko Sarrerak (euroak)	1000	2000	

Enpresa M_1 makinaren asteko erabilgarritasuna 10 ordutan handitzea kontuan hartzen ari da edo/eta M_2 makinarena 15 ordutan handitzea edo/eta M_3 makinarena 20 ordutan handitzea, kostu hauekin, hurrenez hurren, 400 €, 600 € eta 500 €, dñtu totala 1200 € baino handiagoa izan gabe. M_2 makinaren erabilgarritasuna handitu daiteke solik M_1 makinarena handitzen bada. Formula ezazu problema programazio lineal osoko problema bezala, mozkina maximizatuz.

2. Ebatzi

$$\begin{cases} \min L (y_1^+, y_2^- + y_3^+, y_4^-) \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 \\ 3x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 180 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0, (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

3. Petrolio estatu-konpainia batek bere R birfindegitik A biltegi zentrura petrolioa garraitzeko sare hau dauka. Arku bakoitzaren balioak bertatik egunero bidal daitekeen edukiera maximoa milaka litrotan adierazten du.

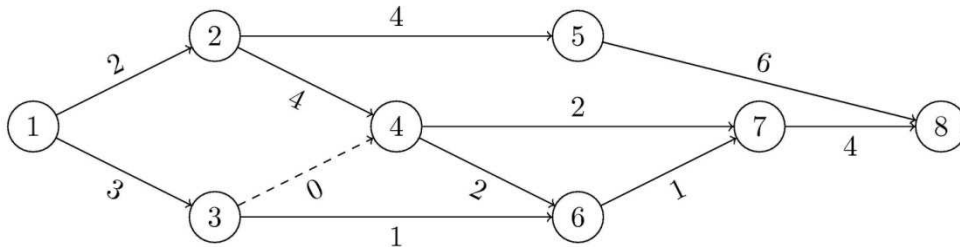


- a) Erabaki birfindegitik biltegi zentrura 60000 litro garraitzeko beharko den denbora, egunero bidal daitekeen kantitate maximoa bidaltzen bada.
- b) (2,5) arkuaren edukiera 1etik 4ra handitzen bada, eta a) atalean lortutako garraio-banaketa kontuan hartuta, zenbatean gutxitzen da emandako denbora?
4. Taula honetan enpresa baten urteko kontuen formulazioa egiteko behar diren ekintzak (euren iraupena egunetan eta aurre-erlazioak) jasotzen dira:

Ekintza	Deskripzioa	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	Inbentarioa (kontaketa fisikoa)	2	--
B	Inbentarioaren balorazioa (moneta funtzionalera itzulita)	1/4	A
C	Egiaztagirak (fakturen identifikazioa)	2	--
D	Kontabilitate-erregistroa	1	C
E	Auditoretza I (saldo-egiaztapena)	1	D
F	Auditoretza II (erregistro-prozesuaren berrikuspena)	1/2	E
G	Kontu korrante zordunen zirkularizazioa	7	D
H	Kontu korrante aktiboen zirkularizazioa	5	F
I	Ondare-saldoaren azken egiaztapena	3	F eta G
J	Zenbaketen eta saldoen egiaztapen balantzea	1/2	I
K	Erregularizazioa (gastu eta sarreraren intsuldaketa eta kontabilitate-emaitzaren egiaztapena)	1/2	G
L	Azken balantzea	1/2	J eta K

Eraiki proiektu horri elkartutako sare bat.

5. Sare honetan proiektu bat irudikatzen da. Arkuetan ekintza ezberdinen iraupena, egunetan, jasotzen da.



- Kalkulatu proiektuaren aurreikusitako iraupena eta bide kritikoa. Kalkulatu (4,7) eta (2,4) ekintzen marjinak.
- (2,4) ekintzaren iraupena 1 egun laburtzen bada, zer eragin edukiko luke proiektuaren aurreikusitako iraupenean? Eta bide kritikoa?
- (6,7) ekintzan aldaketa bat balego, eta bere iraupena 4 egunetakoa balitz, zein litzateke proiektuaren aurreikusitako iraupena? Eta zeintzuk lirateke ekintza kritikoak?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) **2008ko iraila**

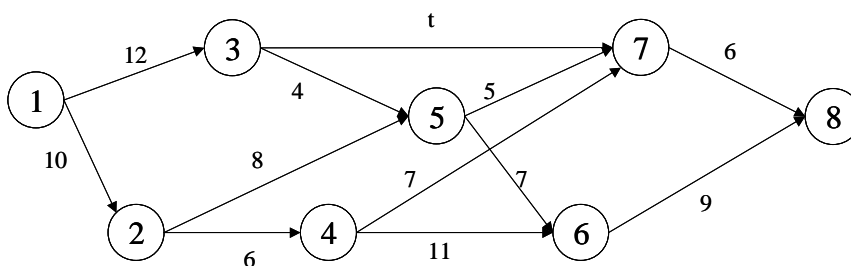
1. Enpresa baten inbertsio saileko administrazio kontseiluak 1000000 € ditu 7 fondo ezberdinetan inbertitzeko. Inbertitutako 1 €-en errentagarritasuna i fondoan, R_i da. Kontseiluak errendimendu totala maximizatu nahi du, baldintza hauek kontuan hartuta:
 - 2 fondoan inbertituko da soilik 1 fondoan inbertitzen bada.
 - 4 fondoko inbertsioa derrigorrean burutu behar da, 1 eta 3 fondoetan inbertsioak egiten badira.
 - 1 edo 4 fondoetan inbertitzen bada, ez da inbertsiorik egingo 6 fondoan.
 - Ez bada 2 fondoan ezta 5-ean ere inbertsiorik burutzen, orduan ez da 7 fondoan inbertsiorik egingo.
 - Fondoren batean inbertitzen bada, fondo horretan inbertitutako kantitatea gutxienez 600 €-koa izan behar da.
 - a) Formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.
 - b) Administrazio kontseiluak 200000 € gehiago erabil ditzake. Diru horrekin zer egin erabaki behar du: diru gehigarri guzti hori altxor-letretan inbertitu (horrek R errendimendu totala emango lioke), ala diru gehigarri hori hasierako kantitateari gehitu aurreko inbertsio fondoetan birbanatzeko. Egoera berri horretan errendimendu totala maximizatzen duen programazio lineal osoko problema formula ezazu.

2. Udalerrri bateko udaletxeak ikasle-egoitza bat eraikiko du. Bertan, logela txikiak eta handiak egingo dira, 2 eta 4 pertsonentzako edukierarekin, hurrenez hurren. Dauden beharrak kontuan hartuta, proiektua egingarria eta egokia izan dadin, gehienez 400 logela egongo dira guztira, eta logela txikiek gutxienez logela guztien %40 izan behar dute. Logela txiki bakoitzaren eraikuntza kostua 40000 €-koa da eta logela handiena 60000 €-koa. Eraikuntzaren kostua minimizatu eta egoitzaren ikasle-edukiera maximizatu nahi da.
 - a) Formulatu helburuanitzeko problema, eta aurkitu beraren soluzio eraginkor guztiak.
 - b) Jakinik logela txiki bakoitzak 22 m²-ko azalera duela, eta logela handi bakoitzak 28 m²-koa, aurreko bi helburuez gain eraikitako azalera ere minimizatu nahi bada, lortu helburuanitzeko problema berriaren 2 soluzio eraginkor.

3. Enpresa batek bi hozkailu-kamioi ditu, K1 eta K2, 100 eta 60 tonako edukierakoak, hurrenez hurren. Enpresak bidaia bakar batean 4 zama garraiatu nahi ditu: A eta B, 40 tonakoa bakoitza, eta C eta D, 50 tonakoa bakoitza. Taula honek, zama bakoitzeko garraio-mozkinak jasotzen ditu, milaka eurotan:

	A	B	C	D
K1	10	10	8	8
K2	6	6	4	4

- a) Hungariar metodoaren bitartez, zehaztu mozkin totala maximizatzeko zein zama garraiatuko den bi kamioiak erabiltzen badira.
- b) Demagun enpresak 3. kamio bat ere baduela, K3, 150 tonako edukiera duena eta zama bakoitzeko 7000 euroko garraio mozkin duena. Jakinik K3 ez dela hozkailu-kamioia eta soilik A eta B zamek behar dutela hozkailu-kamioia, mozkin maximoa izan dadin, zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa (ebatzi gabe), 4 zama kamioiei esleitu nahi bazaizkie? Eta gainera, hiru kamioiak erabili beharko balira, zein taulari aplikatuko zenioke?
4. Sare honek proiektu bat irudikatzen du. Arku bakoitzak ekintza bat adierazten du, eta arkuei elkartutako balioek ekintzaren iraupena egunetan. (3,7) ekintzaren iraupena t da, $t \leq 10$ izanik,



- a) Eman proiektuaren aurreikusitako iraupena eta bide kritikoa.
- b) (3,5) eta (5,6) ekintzen hasiera denbora goiztiarrena (HDG), bukaera denbora berankorrena (BDB) eta marjinak kalkulatu.
- c) (4,6) ekintzaren iraupena 2 egunetan laburtzen bada, zenbatean laburtuko da proiektuaren aurreikusitako iraupena? Eta 4 egunetan murrizten bada?
- d) (5,7) ekintza 2 egun atzeratzeak ba al du eraginik proiektuaren ekintzen marjinean? Zein ekintzetan eta zenbat?
- e) (3,7) ekintzaren bukaera denbora goiztiarrena 20 dela jakinik, zehaztu zein den (3,7) ekintzaren iraupena.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2009ko ekaina

1. Baratze baten jabeak 100 hektareako lursoria du erabilgarri. Bertan, tomateak, piperrak, azenarioak, kipulak eta letxugak hazi nahi ditu. Baratze osoa lantzeko guztira duen ordu kopurua 300 da. Honako taula honetan, produktu bakoitza lantzeko beharrezkoa den hektareako ordu kopurua adierazten da.

	Tomateak	Piperrak	Azenarioak	Kipulak	Letxugak
Orduak/ha	5	4	5	2	3

Taula honetan, produktu bakoitzeko landatutako hektarea bakoitzari dagozkien hazi eta ongarrien kostua, eta produktu bakoitza landatzeak suposatzen dituen kostu finkoak adierazten dira.

	Tomateak	Piperrak	Azenarioak	Kipulak	Letxugak
Hazi eta ongarrien kostua (€/ha)	25	15	10	8	25
Landatze kostu finkoa (€)	100	120	100	80	150

Baratzaren arduradunak honako hau ezarri du:

- Gutxienez 3 produktu landatuko ditu eta gehienez 4.
 - Tomateak landatzen baditu, ez ditu kipulak landatuko.
 - Letxugak landatuko ditu soilik piperrak landatzen baditu.
- a) Plantea ezazu Programazio Lineal Osoko problema bezala, helburua kostuak minimizatzea dela jakinik.
- b) Enpresa, landatze-sistema berri bat ezartzea pentsatzen ari da. Sistema horrek, produktu bakoitzeko beharrezkoa den hektareako ordu kopurua murriztuko luke, taulan adierazten den bezala.

	Tomateak	Piperrak	Azenarioak	Kipulak	Letxugak
Orduak/ha	4	2	2	1	2

Sistema berri horren ezarpenak 1000 €-ko hasierako inbertsioa suposatuko luke. Plantea ezazu problema, 2 aukerak adieraziz: sistema berria ezarri edo lehengoarekin jarraitu.

2. Pentsua lantzen duen enpresa batek C1 eta C2 osagaiak ekoizten ditu, A eta B lehengaiak erabiliz. C1 osagaiaren 1 tona ekoizteko A lehengaiaren 0.25 tona eta B-ren 0.75 tona behar dira, eta C2 osagaiaren 1 tona ekoizteko A-ren 0.5 tona eta B-ren 0.5 tona. C1 osagaiaren tona bakoitzeko mozkina 1 m.u-koa da eta C2-rena 2 m.u.

Astean erabilgarri duen A eta B osagaien kopurua 10 tona eta 18 tona dira, hurrenez hurren.

Europar Batasuneko pentsu landatze programara egokitzeko asmoarekin, enpresak helmuga eta helburu hauek ezarri ditu, lehentasun orden honekin:

1. lehentasuna: C2 osagaiarekin, gutxienez C1 osagaiarekin lortutako asteko mozkinak berdintzea.
2. lehentasuna: C1 osagaiaren asteko ekoizpena 16 tona baino txikiagoa ez izatea nahi du.
3. lehentasuna: C2-ren asteko ekoizpena minimizatu nahi du.

Erabaki zein den osagai bakoitzaren asteko ekoizpen hoberena. Helburu eta helmuga bakoitza grafikoki adieraziz eta ebatziz, lortutako emaitza interpreta ezazu.

3. Publizitate enpresa bateko zuzendariak 4 bezero berriei (C1, C2, C3, C4) publizistak esleitu nahi dizkie. Bezero bakoitzari bere 3 publizista onenak (P1, P2, P3) esleitzearen kostuak, mila eurotan, taula honetan adierazten dira:

	P1	P2	P3
C1	4	6	8
C2	2	3	4
C3	4	8	5
C4	1	2	6

- a) Erabaki zeintzuk diren esleipen hoberen posibleak, publizista bakoitzak bezero bakar batekin lan egingo duela jakinik (3 publizista 4 bezeroetatik 3-ri esleituz).
- b) Adieraz ezazu zein taulari aplikatu behar zaion Hungariar Metodoa baldintza hauek bete daitezen: 4 bezeroak esleituko dira, jakinik 3 publizistek bezero bat baino gehiagorekin lan egiteko aukera dutela, eta denak (bai bezero zein publizistak) esleituta egon behar dutela.

4. Enpresa batek bere eskeintza zabaldu nahi du merkatu berrietara irekitzeko, eta helburu horrekin, merkatu ikerketa bat burutzea eskatu dio marketin departamentuari. Marketin departamentuak burutu beharreko ekintzen zerrenda bat osatu du, horrekin batera ekintzen iraupena eta horien arteko erlazioak ezarri dituelarik. Hona hemen lortutako informazioa:

Ekintza	Arkua (i, j)	Deskribapena	Iraupena (egunetan)	Berehalako aurrekoa
A	(1, 3)	Bigarren mailako informazio bilketa eta analisia	3	-
B	(1, 2)	Helburu eta metodologiaren definizioa	1	-
C	(2, 5)	Lagina aukeratu eta bere tamaina zehaztu	2	B
D	(3, 5)	Galdeketaren zehazpena	1	A eta B
E	(5, 6)	Inkestak burutu eta informazioa kodifikatu	10	C eta D
F	(3, 4)	Elkarrizketa diseinatu eta elkarrizketarako	2	A eta B
G	(4, 6)	Elkarrizketak burutu	t	F
H	(6, 7)	Informazioaren analisi kualitatibo eta	k	E eta G
I	(7, 8)	Ikerketaren idazketa	3	H

G eta H ekintzen iraupenak t eta k aldagaien bidez adierazten dira, hurrenez hurren.

- a) Irudika ezazu proiektu horri elkartutako grafoa, ekintza fiktizioak gehituz beharrezkoa balitz, adierazitako berehalako aurreko erlazioak mantentzeko eta adierazitako arkuen numerazioa kontuan hartuz.
- b) t aldagaiaren balioa 9 baino txikiagoa dela jakinik:
 - i. Posible al da proiektuaren esperotako iraupena eta bide kritikoa kalkulatzeko, t eta k aldagaiek zein balio hartzen dituzten ezagutu gabe? Kalkula itzazu t eta k aldagaien menpe, beharrezkoa bada.
 - ii. Zein balio har ditzake k aldagaia, proiektua 25 egun baino lehen burutu nahi bada?
 - iii. Proiektuaren esperotako iraupena ez atzeratzeko, F ekintza seigarren egunean bukatuta egon behar dela jakinik, zein da t -ren balioa? Lortutako balioa kontuan hartuta, zenbat egun atzera daiteke G ekintza proiektuaren esperotako iraupena ez atzeratzeko?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2009ko iraila

1. Demagun programazio lineal osoko problema hau:

$$\begin{aligned} \min (x_1 + x_2) \\ 3x_1 - x_2 &\leq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \text{ eta osoak} \end{aligned}$$

- a) Ebatzi problema, adartze eta bornatze metodoa erabiliz.
- b) Helburu funtzioan x_1 aldagaiaren koefizientea 1 izan beharrez, $\lambda > 5/2$ beste edozein balio hartzen bada, kalkula ezazu problemaren soluzio hoberena.

2. Enpresa bateko Giza Baliabide Sailak Madrilen formakuntza topaketa bat antolatu nahi du Bilbo, Bartzelona, Sevilla, Valentzia eta Zaragozako delegazioetako langileentzat. Langileen formakuntza beharrak aztertu ondoren, aldi berean 3 mintegi, M1, M2 eta M3 antolatzea erabaki du. Bilboko delegazioak gehienez 7 langile eraman ditzake topaketa horretara, Bartzelonakoak 5, Sevillakoak 7, Valentziakoak 2 eta Zaragozakoak 6. Taula honek, mintegi bakoitzean gehienez parte har dezaketen langile kopurua adierazten du.

	Bilbo	Bartzelona	Sevilla	Valentzia	Zaragoza
M1	4	2	2	-	-
M2	1	3	2	2	3
M3	-	-	3	-	1

Mintegi bakoitza Madrilgo egoitzeko bilera gela batean egingo da, horietako gela bakoitzean gehienez 8 pertsona bil daitezkeelarik.

- a) Mintegietan parte hartuko duten langile kopurua maximizatu nahi bada, problema horri dagokion sarea irudikatu.
- b) Giza Baliabide Sailak honako langile hauen inskripzioa baieztatu du mintegi bakoitzean:

	Bilbo	Bartzelona	Sevilla	Valentzia	Zaragoza
M1	4	2	0	-	-
M2	1	3	2	2	0
M3	-	-	3	-	1

Mintegiren batean langile gehiago onartzea posible al litzateke? Zein izango litzateke mintegietan parte hartuko duen langile kopuru maximoa? (Erantzun arrazoituz)

- c) Valentziako delegazioak bere langileak M3 mintegira bidali baditzake, mintegietan parte hartuko duen langile kopuru maximoa aldatuko al da? (Erantzun arrazoituz)

3. Enpresa batek bi motako bonboiak ekoizten ditu, kalitate bikainekoak eta kalitate onekoak. Horiek ekoizteko kakaoa eta almendrak erabiltzen ditu, 48 kilo eta 4.5 kilo dituelarik erabilgarri astero, hurrenez hurren. Kalitate bikaineko bonboi kutxa bat ekoizteko 600 gr kakao eta 50 gr almendra behar dira, aldiz, kalitate oneko bonboi kutxa bat ekoizteko 400 gr kakao eta 50 gr almendra. Kalitate bikaineko kutxa bakoitzagatik 70 €-ko mozkin eta kalitate oneko kutxa bakoitzagatik 40 €-ko mozkin lortzen bada, eta ekoizten den guztiasaltzeko arazorik ez dela jakinik,

- a) Adieraz ezazu, problema lasaitua ebatziz, enpresaren mozkinak eta salmentak maximizatuko dituen asteko bonboi kutxa ekoizpen eraginkorra.
- b) Salmenta bat 10 €-ko mozkinaren baliokide bada enpresarentzat, planteatu ezazu problema (eredua zehaztu).
- c) Kalitate bikaineko kutxa bat lortzeko 7 lan-ordu behar badira eta kalitate oneko kutxa bat lortzeko 4 lan ordu, adierazi bi asteko ekoizpen eraginkor, enpresaren irabaziak eta salmentak maximizatzen direlarik eta erabilitako lanorduak minimizatzen direlarik.

4. Led Zeppelin rock taldea bere agurreko diska prestatzen ari da. Taldeko managerra proiektu berri hori definitzen ari da, berau burutzeko beharrezkoak diren ekintzak, horien iraupenak (astetan) eta beraien arteko erlazioak zehaztuz. Taula honetan adierazten dira datuok:

Ekintza	Deskribapena	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	Abestien konposaketa	10	-
B	Ekoizpena	5	-
C	Azalaren diseinua	7	-
D	Diskaren grabazioa	4	A eta B
E	Fabrikazioa	3	C eta D
F	Promozioa	6	E
G	Abestien erregistroa	1	E
H	Banaketa	2	F eta G

- a) Irudika ezazu proiektu horri dagokion sarea, kalkula ezazu proiektuaren esperotako iraupena eta adieraz ezazu zein den bide kritikoa.
- b) Taldeko managerrak ekintza berri bat ezarri du diskaren arrakasta bermatzeko. Ekintza berri hori bideoklip baten grabaketa da, eta berau diskaren grabazioaren ondoren eta promozio fasearen aurretik egingo da. Bideokliparen grabazioak 5 aste iraungo du. Irudika ezazu proiektu horri dagokion sarea.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2010eko ekaina

1. Konpainia batek lau produktu ekoizten ditu: P1, P2, P3 eta P4. Produktu bakoitza hiru ekoizpen solairuetatik pasatzen da: A solairua, B solairua eta C solairua. Solairu bakoitzak 10000 lan orduko gaitasuna du.

Honako taulan produktu bakoitzaren unitateko irabaziak eta solairu bakoitzean produktu bakoitzaren unitate bat egiteko beharrezkoak diren orduak adierazten dira.

Produktua	P1	P2	P3	P4
Unitateko irabaziak	6 €	7 €	8 €	9 €
A solairua	5 ordu	3 ordu	6 ordu	4 ordu
B solairua	4 ordu	6 ordu	3 ordu	5 ordu
C solairua	5 ordu	6 ordu	3 ordu	2 ordu

Produktu bakoitzaren ekoizpenerako kostu finkoak 2800, 4000, 3800 y 4100 € direla jakinik, enpresak gehienez horietako 3 produktu ekoiztea erabaki du. Gainera, honako hau erabaki du:

- P2 ekoiztuko da soilik P3 ekoizten bada.

- P4 ekoizten ez bada, orduan P1 eta P2 ekoiztu behar dira.

- a) Programazio lineal osoko problema bat planteatu, zein produktu ekoiztu behar den eta bakoitzetik zenbat unitate ekoiztu behar diren jakiteko, enpresaren helburua mozkinak maximizatzea delarik.
- b) Enpresak bi solairutan 1000 orduna gehituko ditu. Programazio lineal osoko problema bat planteatu, gehikuntza hori zein solairutan egingo den jakiteko.

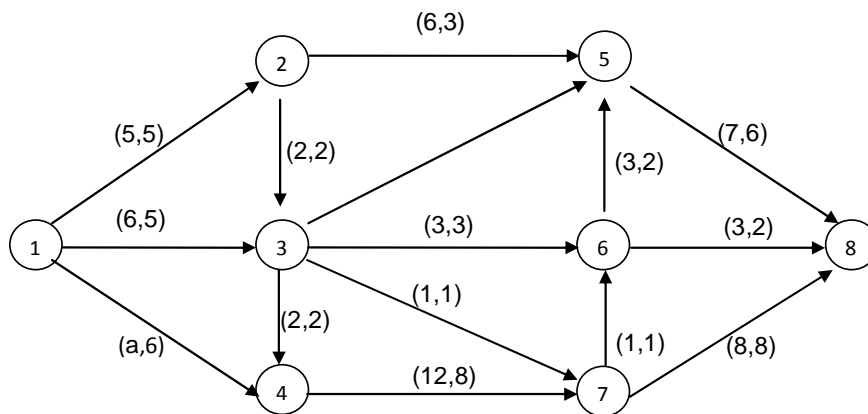
2. Enpresa bat olibondoak eta ekiloreak hazteko 15 hektareatako lursail baten banaketa antolatzen ari da.

Olibondo landaketaren hektarea bakoitzak 10000 €-ako inbertsioa du eta ekilore landaketaren hektarea bakoitzak 5000 €-takoa.

Kontseilu erregulatzailerak olioaren ekoizpenerako emandako gomendioak jarraituz, olibondo landaketaren zatiak 8 eta 12 hektarea artean egon behar du (biak barne) eta ekilore landaketaren zatiak 2 eta 6 hektarea artean (biak barne).

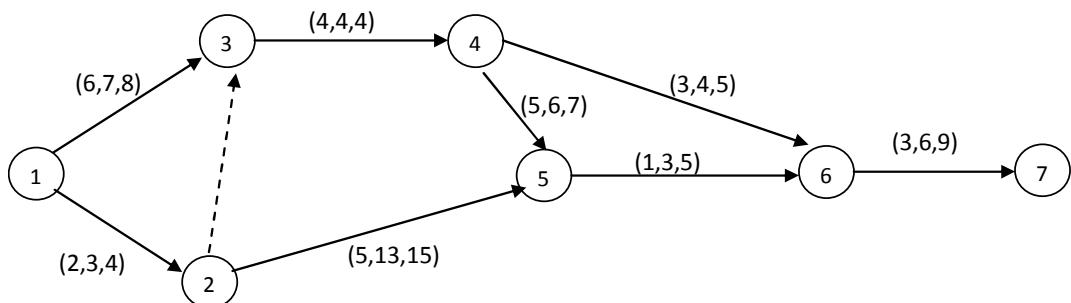
- a) Enpresaren helburuak inbertsioa minimizatzea eta olibondo landaketaren hektareak maximizatzea dira.
Aurkitu grafikoki X soluzio egingarrien multzoa, irudikatu bere irudi multzoa, $f(X)$, eta aurkitu soluzio eraginkorrak.
- b) Zerga arrazoiengatik, enpresak gutxienez 140000 € inbertitzeko helmuga ezartzea eta landatutako hektarea kopurua maximizatzea planteatu du, lehentasun orden horrekin.
Planteatu eta ebatzi problema berria.

3. Demagun sare hau, bikote bakoitzaren lehenengo zenbakiak edukiera adierazten duelarik:



$a \geq 6$ izanik.

- a) (1,4) arkuaren edukiera 6 bada, sarean emandako esleipena fluxu bat al da? Fluxu maximo bat al da? (Arrazoituz erantzun galderak).
- b) Sarean emandako esleipenetik abiatuz, kalkulatu fluxu maximoaren balioa $a = 8$ denean.
4. Sare honetan proiektu bat osatzen duten ekintzen arteko aurre-erlazioak irudikatzen dira. Ekintza bakoitzarekin bere iraupen baikorra, probableena eta ezkorra (egunetan) agertzen dira.



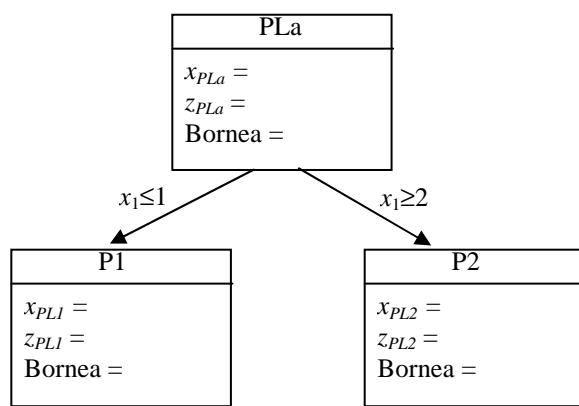
- a) Kalkulatu proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena, bide kritikoa eta iraupenaren bariantza. (1,2) eta (3,4) ekintzen marjinak kalkulatu.

- b) (2,4) arkuan ekintza berri bat sartzen da, beraren batezbesteko iraupena t delarik. Erantzun, arrazoituz, honako galdera hauek:
- i) t -ren zein balioetarako ez da aldatuko proiektuaren batezbesteko iraupena?
 - ii) t -ren zein balioetarako utziko dio (3,4) ekintzak kritikoa izateari? Zein izango da beraren marjina?

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2010eko iraila

1. Demagun PLOko problema hau:

$$\begin{aligned} & \max(3x_1+x_2) \\ & \begin{cases} 5x_1+2x_2 \leq 10 \\ 4x_1+x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{cases} \end{aligned}$$



Aurreko problemari adartze eta bornatze metodoa aplikatuz, dagokion zuhaitzean falta diren datuak bete, eta jarraitu soluzio hobereana lortzeko, horrela behar baduzu.

2. Nekazaritza konpainia bat garia eta zekalea hazteko 1000 hektareetako lursailaren jabe da. Gari hazkuntzari eskainitako hektarea bakoitzeko, 150 m.u.-ko kostuarekin 2 tona gari lortzen du, eta zekaleari eskainitako hektarea bakoitzeko, berriz, 200 m.u.-ko kostuarekin 3 tona zekale lortzen du. Datorren denboraldian zereal bakoitzeko 2500 tonako eskaera bete behar du, baina eskaera osoa betetzeko beharko lukeen hainbeste lursail hektarearik ez daukanez, eskaera hori betetzeko falta zaion garia eta zekalea erosi beharko du, gari tona bakoitza 200 m.u.-tan eta zekale bakoitza 180 m.u.-tan.

- a) Formulatu, ebatzi gabe, erabakitzeko zenbat hektarea gari eta zekale hazi behar den eta zenbat tona erosi behar den kostu totalak minimizatzeko eta hazitako lursail hektareak maximizatzeko.
- b) Konpainiak helburuak malgutzea erabakitzen du. Kostu totalak 180000 m.u.-ak ez gainditzea eta hazitako lursaila gutxienez 800 hektareatakoa izatea gustatuko litzaiotke. Formulatu problema, ebatzi gabe, helmuga hauek kontutan hartuta, eta, gainera, hazitako lursail hektarea bakoitzaren falta kostu totalen m.u. bateko gehiegizkoaren bikoitza baloratzen bada.

3. Demagun L1, L2, L3, eta L4 enpresa bateko langileak eta A, B, C eta D manufakturatutako lau lan produktu mota direla. Enpresako kalitate-kontrol sailak langile bakoitzak aipatutako produktu bakoitzean egindako batezbesteko okerrak biltzen ditu, taula honetan agertzen den moduan,

	A	B	C	D
L1	4	8	9	3
L2	9	1	6	4
L3	7	3	6	8
L4	6	5	7	—

non – gidoiak aztertzen ez dela adierazten duen.

Produktu bakoitza langile bakarrak egiten badu eta produktu guztiak egiten direla kontutan harturta,

- Langile bakoitzak produktu bakarra egiten badu, esleitu produktu bakoitza langile bakoitzari batezbesteko oker totalak minimizatzeko.
- Krisiaren eraginez, enpresak L4 langilea botatzea eta E produktua manufakturatzea erabaki du. E produktuari dagozkion batezbesteko okerrak taula honetan biltzen dira:

	E
L1	4
L2	9
L3	7

Batezbesteko oker totalak minimizatuko dituzten esleipen hoberenak lortu nahi baditugu, zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa bi egoera hauetan?

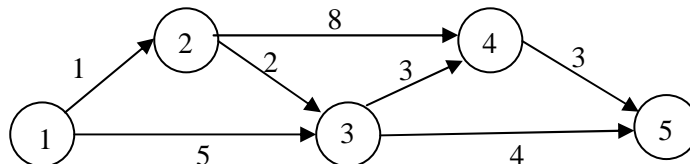
- Langile bakoitzak gutxienez produktu bat eta gehienez bi egin behar ditu.
- Langile bakoitzak gutxienez produktu bat eta gehienez bi egin behar ditu, baina, gainera, L1 eta L2-k produktu kopuru bera eginez.

4. a) Taula honetan proiektua osatzen duten ekintzak, hauen arteko aurre erlazioak eta iraupenak jasotzen dira:

Ekintzak	Berehalako aurrekoak
A	---
B	---
C	A,B
D	A,B
E	D
F	B
G	F
H	E,G
I	E
J	H,I
K	H,I

Eraiki proiektua irudikatuko duen sarea.

- b) Grafo honetan proiektu bat jasotzen da, non arku bakoitzean ekintza bakoitzaren iraupena, egunetan, adierazten den:



- i. Kalkula ezazu: (3,4) ekintzaren hasiera denbora goiztiarrena, (2,3)-ren bukaera denbora berankorrena, (3,5)-en marjina eta beraren bukaera denbora goiztiarrena.
- ii. (2,3) ekintza t egun atzeratzen bada, erantzun, arrazoituz, hurrengo galderak:
 - a. Zein izan beharko da t -ren balioa (3,4)-ren hasiera denbora goiztiarrena aurreko atalean lortutako bera izaten jarraitzeko?
 - b. t -ren balioen arabera, zein da (3,4)-ren bukaera denbora berankorrena?

AZTERKETEN ERANTZUNAK

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2001eko ekaina

1. Konpainia bat hiru produktu berri, A , B eta C , ekoiztea pentsatzen ari da. Gerentziak horietako bakoitza merkaturatzeko beharrezkoa den inbertsioaren txostena prestatzea eskatu dio marketin sailari eta salmenta sailari produktu bakoitzaren salneurri unitarioa. Lortutako informazioa, eurotan, taula honetan jasotzen da:

	A produktua	B produktua	C produktua
Marketin kostu finkoa	25000	35000	30000
Salneurri unitarioa	35	45	40

Produktu guztiak konpainiaren bi plantetan, 1 eta 2, prozesatu behar dira. Planta bakoitzeko edukiera 6000 ordukoa da eta A produktuko unitate bat ekoizteko 1 plantan 5 ordu eta 2 plantan 4 eman behar ditu; B produktu unitateko, 6 ordu 1 plantan eta 4 ordu 2 plantan; azkenik, C produktu unitateko 3 ordu 1 plantan eta 5 ordu 2 plantan.

Merkatu arrazoiengatik, enpresak gutxienez produktu bat merkaturatuko du.

Gerentziak zein produktu eta zer neurritan ekoiztuko dituen erabaki behar du, helburua mozkin maximizatzea izanik.

- a) Programazio lineal osoko problema moduan formula ezazu.
- b) Bestalde, konpainia bi plantetatik bakar batean lan edukiera 1000 ordutan handitzea pentsatzen ari bada, formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan, informazio hori erantsiz.

EBAZPENA.

a)

x_i = ekoiztuko den i produktu kantitatea. ($i = A, B, C$)

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ produktua ekoizten bada} \\ 0 & \text{beste kasutan} \end{cases} \quad (i = A, B, C)$$

$$\max(35x_A - 25000y_A + 45x_B - 35000y_B + 40x_C - 30000y_C)$$

$$\text{m.} \begin{cases} y_A + y_B + y_C \geq 1 \\ 5x_A + 6x_B + 3x_C \leq 6000 \\ 4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 6000 \\ x_i \leq My_i \quad (i = A, B, C) \\ x_i \geq 0 \text{ eta osoak} \quad (i = A, B, C) \\ y_i = 0 \text{ edo } 1 \quad (i = A, B, C) \end{cases}$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

b)

$$\max(35x_A - 25000y_A + 45x_B - 35000y_B + 40x_C - 30000y_C)$$

$$\text{m.} \begin{cases} y_A + y_B + y_C \geq 1 \\ 5x_A + 6x_B + 3x_C \leq 6000 + 1000(1 - y) \\ 4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 6000 + 1000y \\ x_i \leq My_i \quad (i = A, B, C) \\ x_i \geq 0 \text{ eta osoak } (i = A, B, C) \\ y_i = 0 \text{ edo } 1 \quad (i = A, B, C) \end{cases}$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den eta

$$y = \begin{cases} 1 & 1000 \text{ ordu 2 plantan gehitzen badira} \\ 0 & \text{beste kasutan} \end{cases}$$

2. Aurkitu problema honen soluzio eraginkorrak:

$$\max(125x_1 + 150x_2)$$

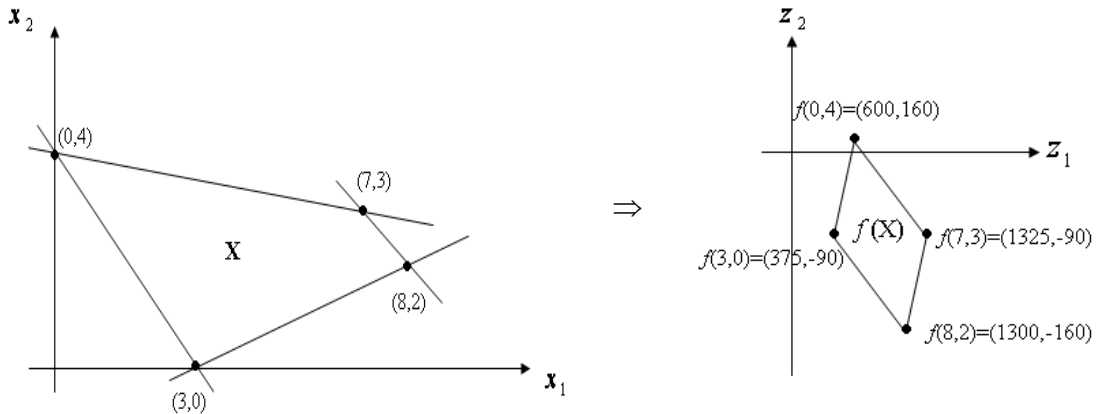
$$\min(30x_1 - 40x_2)$$

$$\text{m.} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 6 \\ x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

EBAZPENA.

$$\max(125x_1 + 150x_2, -30x_1 + 40x_2)$$

$$\text{m.} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 12 \\ x_1 + 7x_2 \leq 28 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Soluzio eraginkorrak: $\overline{(0,4),(7,3)}$.

3. a) Honako taula honetan hiru langile, A, B eta C, 4 ekintzetan, E1, E2, E3 eta E4, esleitzerakoan lortutako utilitatea ematen da:

	E 1	E 2	E 3	E 4
A	65	73	--	57
B	67	70	69	58
C	68	--	70	55

--: Esleipen bateraezina

Erantzun, problema ebatzi gabe, galdera hauek:

- i. Zein tauletan erabiliko zenuke hungariar metodoa problemaren helburua 3 langileak dauden 4 ekintzetatik 3ri esleitzea bada, langile bakoitzari soilik ekintza bat egokituko zaiola eta utilitate total maximoa lortu nahi dela kontuan izanik?
 - ii. Erabaki zein taulari aplikatuko zeniokeen hungariar metodoa problemaren helburuak hauek badira: 4 ekintzak esleitu behar dira, langile bakoitzak gehienez bi ekintza egin ditzake, ekintza bakoitza langile bakar batek egingo du, langile guztiak esleituak izango dira eta utilitate total maximoa lortu nahi da.
- b) Taula honetan 4 langile (A, B, C eta D) 4 ekintzei (E1, E2, E3 eta E4) esleitzeko kostua, moneta unitatetan, jasotzen da. Kalkula ezazu esleipen hoberena hungariar metodoa erabiliz, helburua langile bakoitza ekintza bakar bati eta ekintza bakoitza langile bakar bati esleitzea bada.

	E 1	E 2	E 3	E 4
A	6	7	5	0
B	0	3	6	0
C	0	2	1	0
D	6	0	0	0

EBAZPENA.

a)

i.

-	-73	M	-57
65			
-	-70	-69	-58
67			
-	M	-70	-55
68			
0	0	0	0

ii.

-65	-73	M	-57	0	0
-65	-73	M	-57	M	M
-67	-70	-69	-58	0	0
-67	-70	-69	-58	M	M
-68	M	-70	-55	0	0
-68	M	-70	-55	M	M

b)

6	7	5	0	-1	⇒	6	6	4	0
0	3	6	0	-1		0	2	5	0
0	2	1	0	-1		0	1	0	0
6	0	0	0			7	0	0	1
+1			+1						

Esleipen hoberena:

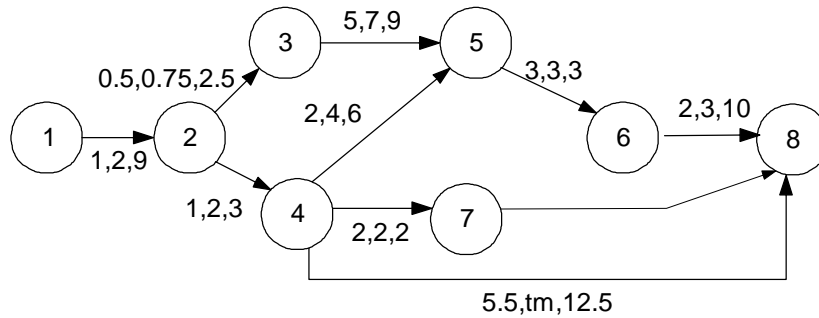
A ↔ E4

B ↔ E1

C ↔ E3

D ↔ E2

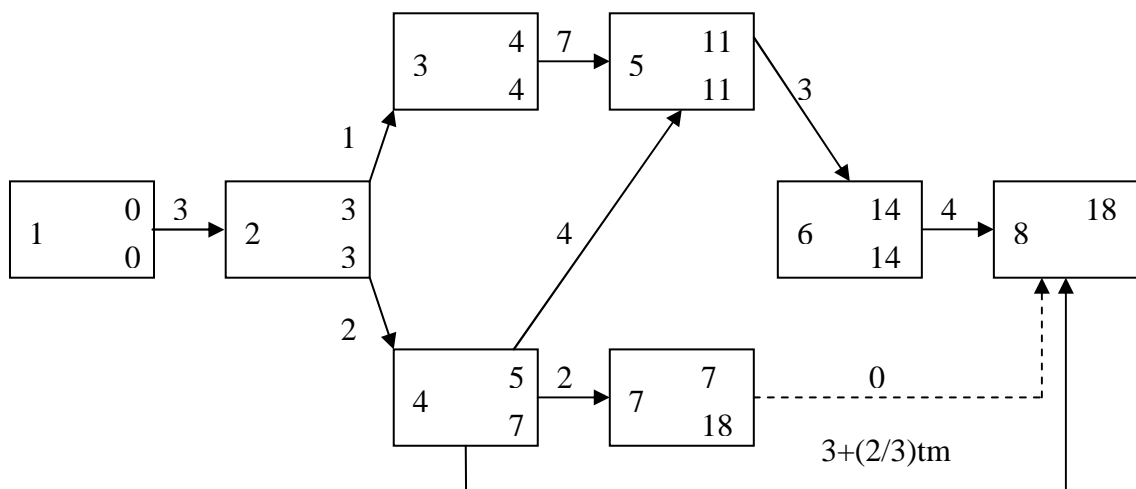
4. Sare honetan proiektu bat osatzen duten ekintzen arteko aurre erlazioak irudikatzen dira. Ekintza bakoitzarekin bere iraupen baikorra, probableena eta ezkorra (egunetan) agertzen dira, (4,8) ekintzaren salbuespenarekin, bere balio minimoa eta maximoa ezagunak izanik, ez ordea bere balio modala, tm .



Erantzun, arrazoituz, galdera hauek, tm -k hartzen duen balioa 12 egun edo gutxiago bada.

- Proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena, ekintzen marjina eta bide kritikoa kalkulatu al daitezke (4,8) ekintzaren denbora modalak edozein balio ($tm \leq 12$) hartzen bada?
- (3,5) ekintza bere batezbesteko iraupenetik 3 egun atzeratzen bada, zer gertatuko zaio proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupenari? Eta ekintza hori bere batezbesteko iraupena baino 3 egun lehenago bukatzen bada, zer gertatuko zaio proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denborari?
- (2,4) ekintzaren batezbesteko iraupena egun bat atzeratzeak zer eragin edukiko du (4,5) eta (4,7) ekintzen marjinetan?

EBAZPENA.



$$P(8) = \max(18, 8 + (2/3)tm) = 18 \quad tm \leq 12 \text{ bada.}$$

- a) Estimaturako batezbesteko iraupen denbora proiektuarentzat 18 egunetakoa da.

Bide kritikoa: (1,2,3,5,6,8)

Ekintza (i,j)	HDG(i,j)	BDB(i,j)	$\bar{t}(i,j)$	$M(i,j)$
(1,2)	0	3	3	0*
(2,3)	3	4	1	0*
(2,4)	3	7	2	2
(3,5)	4	11	7	0*
(4,5)	5	11	4	2
(4,7)	5	18	2	11
(4,8)	5	18	$3 + (2/3)tm$	$10 - (2/3)tm$
(5,6)	11	14	3	0*
(6,8)	14	18	4	0*

- b) (3,5) ekintza kritikoa da, beraz ekintza hau bere batezbesteko iraupenetik 3 egun atzeratzen bada proiektuarentzako estimaturako batezbesteko iraupena ere 3 egun atzeratuko da.
(3,5) ekintza bere batezbesteko iraupena baino 3 egun lehenago bukatzen bada, (1,2,4,5,6,8) bide kritiko berria dugu eta proiektuarentzako estimaturako batezbesteko iraupena 2 egun lehenago bukatuko da.
- c) (2,4), (4,5) eta (4,7) ekintzak ez kritikoak dira eta gainera (4,5) eta (4,7) ekintzak (2,4) ekintzaren berehalako ondorengoak dira, beraz, (2,4) ekintzaren batezbesteko iraupena egun 1 atzeratzen bada, (4,5) eta (4,7) ekintzen marjina egun 1 murriztuko da.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)**2001eko iraila**

1. Tutu S.A. enpresak hiru tutu mota, A , B eta C , egiten ditu eta metroko 10, 12 eta 9 eurotan saltzen ditu, hurrenez hurren. Tutu metro bakoitzeko ekoizpenak prozesaketa minutu batzuk, lehengai gramo batzuk eta eurotan adierazitako ekoizpen kostu batzuk behar ditu, taula honetan jasotzen direnak:

	prozesaketa (minutuak)	lehengai (gramoak)	Ekoizpen kostua
A	5	100	3
B	4.5	100	4
C	6	100	4

Tutu S.A. hurrengo asterako A tututik 2000 metro, B tututik 4000 metro eta C tututik 5000 metroko eskari berezia jaso du. Aste horretako edukierak 400 prozesaketa ordu eta 550 kilo lehengai dira. Zuzendaritzak hurrengo astetako eskaria hain handia izango ez dela pentsatzen duenez, ez ditu ekoizpen instalazioak handitu nahi. Horregatik tutu batzuk japoniar enpresa bati erostea pentsatzen ari da, metroko 6, 6 eta 7 eurotan, hurrenez hurren, A , B eta C motentzako.

- Formulatu, ebatzi gabe, zenbat metro ekoiztuko dituen eta zenbat erosiko dituen tutu mota bakoitzeko, mozkinak maximizatzeko eta inportazioen kostu totala minimizatzeko.
- Enpresako gerenteak aurreko bi helburuen artean egon daitekeen bateraezintasunaz ohartuta, gutxienez 55000 euroko mozkinak eta inportazio kostuak gehienez 40000 eurotan mugatzea komenigarriagoa litzatekeela erabakitzen du. Formula ezazu problema, euro bateko mozkin faltaren balioa inportazioen gehiegizko euro batenaren bikoitza dela jakinik.

EBAZPENA.

- Bira $x_i = i$ produktutik ekoizten diren metroak, $i = A, B, C$.

$$y_i = i \text{ produktutik erosten diren metroak, } i = A, B, C.$$

$$\begin{aligned} & \max(20000 + 48000 + 45000 - 3x_A - 4x_B - 4x_C - 6y_A - 6y_B - 7y_C) \\ & \min(6y_A + 6y_B + 7y_C) \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_A + y_A = 2000 \\ x_B + y_B = 4000 \\ x_C + y_C = 5000 \\ 5x_A + 4.5x_B + 6x_C \leq 24000 \\ 100x_A + 100x_B + 100x_C \leq 550000 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0; \\ y_A \geq 0, y_B \geq 0, y_C \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

b)

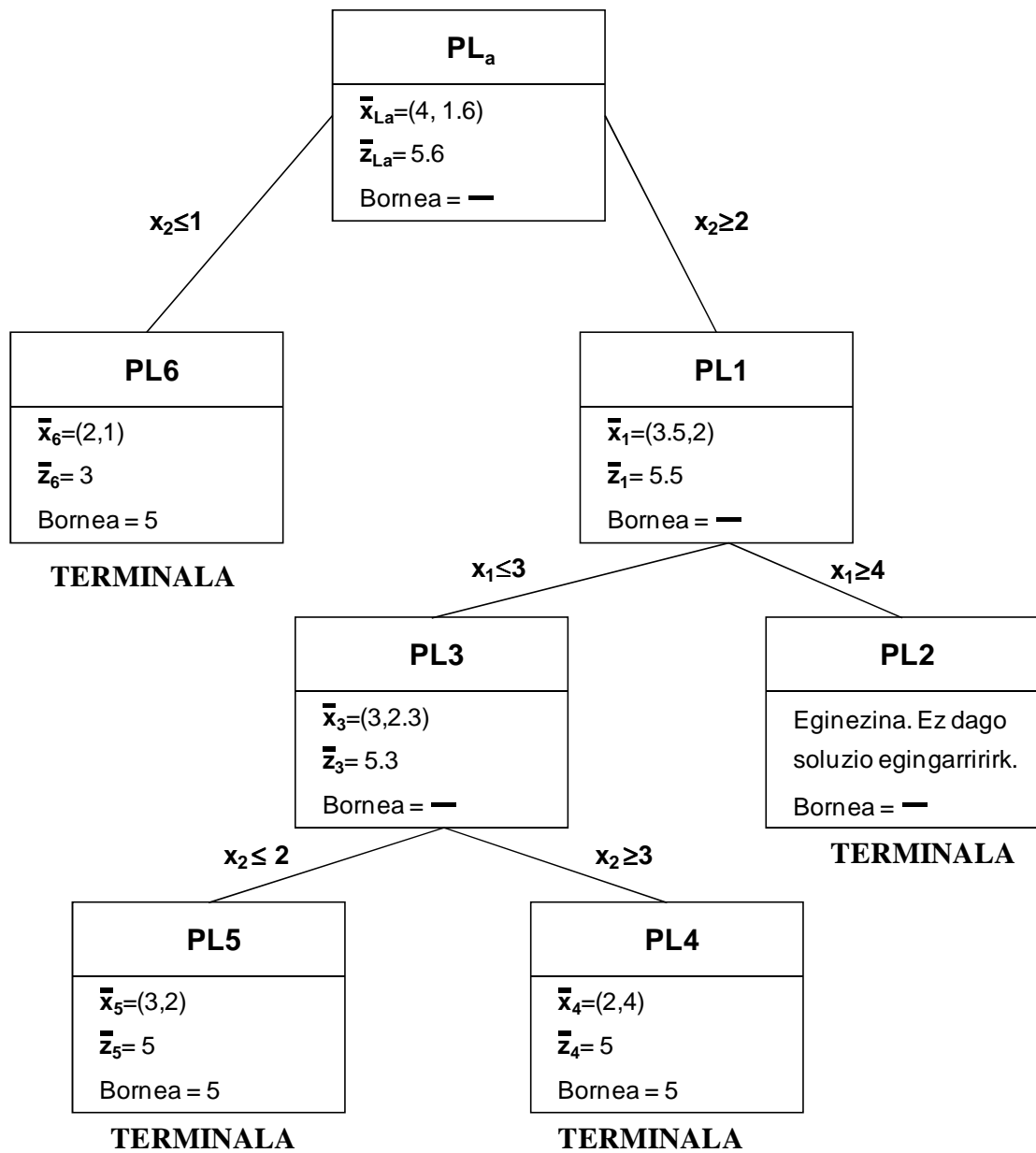
$$\begin{aligned} & \min(2y_1^- + y_2^+) \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_A + y_A = 2000 \\ x_B + y_B = 4000 \\ x_C + y_C = 5000 \\ 5x_A + 4.5x_B + 6x_C \leq 24000 \\ 100x_A + 100x_B + 100x_C \leq 550000 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0; \\ y_A \geq 0, y_B \geq 0, y_C \geq 0 \\ 20000 + 48000 + 45000 - 3x_A - 4x_B - 4x_C - 6y_A - 6y_B - 7y_C - y_1^+ + y_1^- = 55000 \\ 6y_A + 6y_B + 7y_C - y_2^+ + y_2^- = 40000 \\ y_1^+ \geq 0, y_1^- \geq 0, y_2^+ \geq 0, y_2^- \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

2. Demagun Programazio Lineal Osoko problema hau dugula:

$$\begin{aligned} & \max(x_1 + x_2) \\ & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{array} \right. \end{aligned}$$

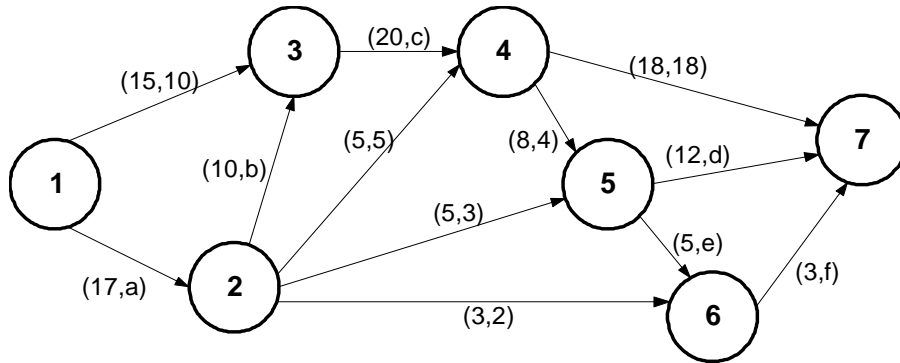
Ebatzi, adartze eta bornatze metodoa erabiliz.

EBAZPENA.



Problemaren soluzio hoberenak:(2,3) eta (3,2)

3. Demagun honako sare hau dugula, arku bakoitzari elkartutako bikotearen lehen zenbakiak arku horren edukiera adierazten duelarik:



Erantzun galdera hauek:

- Arku bakoitzari elkartutako bikotearen bigarren zenbakiak, a, b, c, d, e eta f-ren zein baliotarako definituko dute sarea zeharkatzen duen fluxu bat?
- Kalkulatu fluxua $e = 0$ bada. Zein da sarea zeharkatzen duen fluxu maximoaren balioa?

EBAZPENA.

a) Murrizketa hauek bete behar dira:

$10 + a = 18 + d + f$	$0 \leq a \leq 17$
$a = b + 10$	$0 \leq b \leq 10$
$10 + b = c$	$0 \leq c \leq 20$
$c + 5 = 22$	$0 \leq d \leq 12$
$7 = d + e$	$0 \leq e \leq 5$
$e + 2 = f$	$0 \leq f \leq 3$

a, b, c, d, e eta f askatuz: $a = 17$; $b = 7$; $c = 17$ eta d,e eta f-rentzako murrizketa hauek ditugu:

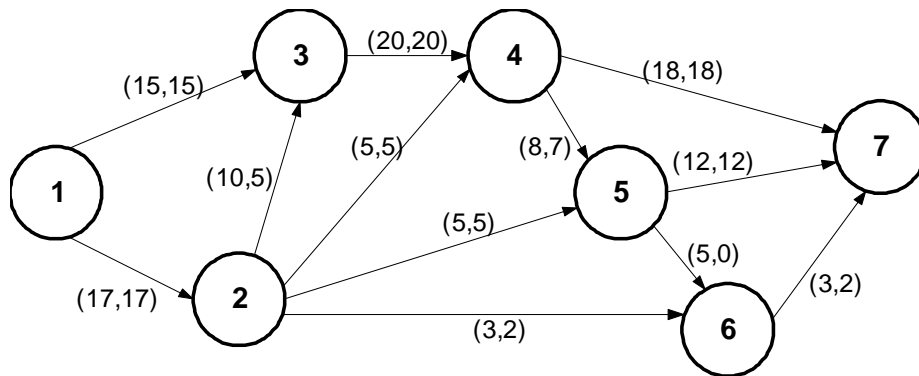
$$7 = d + e$$

$$e + 2 = f$$

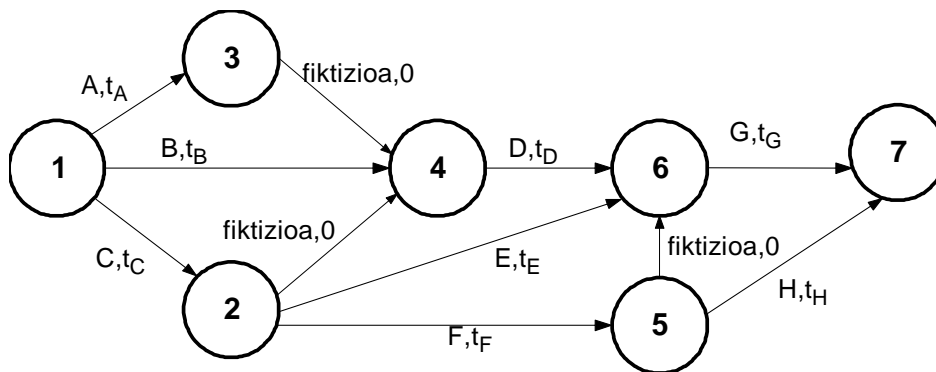
$$0 \leq e \leq 1$$

b) $e = 0$ bada, $a = 17$; $b = 7$; $c = 17$; $d = 7$; $e = 0$ eta $f = 2$.

Fluxu maximoa lortzeko (1,3,4,5,7) bidea eta (1,3,2,5,7) katea, orden horretan, asetzen ditugu; horrela, 32 balioko fluxu maximo hau lortzen dugu:



4. Demagun proiektu bat irudikatzen duen sare hau dugula, ekintzak eta haien iraupenak arkutan adierazten direlarik:



Erantzun, arrazoituz, galdera hauek:

- Zer baldintza bete behar dute ekintzen iraupenak D, E eta F ekintzen hasiera denbora goiztiarrena berdina izateko?
- Zer baldintza bete behar dute ekintzen iraupenak E eta F ekintzen bukaera denbora goiztiarrena berdina izateko?
- Zer baldintza bete behar dute ekintzen iraupenak E eta F ekintzen bukaera denbora berankorrena berdina izateko?
- Abiaburutik irteten diren ekintzetatik soilik A bada kritikoa, zein da proiektuaren aurreikusitako iraupena? Eta D, E eta F ekintzen marjina?

EBAZPENA.

- Horretarako, $P(2) = P(4)$ izan behar da; beraz, $t_C \geq t_A$ eta $t_C \geq t_B$.
- $BDG(E) = BDG(2,6) = P(2) + t_E$
 $BDG(F) = BDG(2,5) = P(2) + t_F$

Berdinak izateko $t_E = t_F$.

c) $Q(6) = Q(5)$ bete behar da; beraz $t_G \geq t_H$.

d) Abiaburutik irteten den ekintza kritiko bakarra A bada, proiektuaren bide kritikoa (1,3,4,6,7) da.

Orduan, proiektuaren aurreikusitako iraupena $t_A + t_D + t_G$ da.

$M(D) = M(4,6) = 0$, D kritikoa izateagatik.

$M(E) = M(2,6) = Q(6) - P(2) - t_E = t_A + t_D - t_C - t_E$

$M(F) = M(2,5) = Q(5) - P(2) - t_F$ eta bi kasu ezberdinduko ditugu:

- $t_G \geq t_H$ bada, orduan $M(F) = M(2,5) = t_A + t_D - t_C - t_F$.
- $t_H \geq t_G$ bada, orduan $M(F) = M(2,5) = t_A + t_D + t_G - t_H - t_C - t_F$.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2002ko ekaina

1. Tailer mekaniko txiki batean T tornu bat eta bi fresatzaile, F_1 eta F_2 , daude. Hiruhileroko lan programan T tornua gehienez 200 ordu erabil daiteke, F_1 fresatzailea 84 ordu eta F_2 fresatzailea 100 ordu. Hiru pieza mota egin daitezke (A , B eta C) eta bakoitza egiteko bi tresna erabiliko dira: tornua eta bitariko fresatzaile bat, F_1 edo F_2 . A motako pieza bakoitza egiteko T -n 2 ordu behar dira, 6 ordu F_1 -en edo 5 ordu F_2 -n; B motako bakoitza egiteko T -n ordu bat, 5 ordu F_1 -en edo 5 ordu F_2 -n; C motako bakoitza egiteko T -n 5 ordu, 3 ordu F_1 -en edo 4 ordu F_2 -n. A , B eta C -ren produkzio kostuak unitateko (moneta unitatetan) T tornuan eta F_1 , F_2 fresatzaileetan taula honetan adierazten dira:

	Produkzio kostuak F_1 -en	Produkzio kostuak F_2 -n	Produkzio kostuak T -n
A	2	3	4
B	5	4	4
C	3	2	2

Enpresak jakin nahi du bi fresatzaile horietatik zein edo zeintzuk martxan jarri behar dituen, F_1 eta F_2 fresatzaileak martxan jartzeko kostua 75 eta 80 m.u. izanik, hurrenez hurren. Bestalde, A , B eta C pieza bakoitzeko sarrerak 60, 40 eta 35 m.u. dira, hurrenez hurren. Formula ezazu problema (ebatzi gabe), programazio lineal osoko problema bezala, helburua hiruhileko mozkin maximoa lortzea izanik.

EBAZPENA.

Demagun x_{ij} F_j fresatzailetik pasatzen diren i motako piezak, $i = A, B, C; j = 1, 2$.

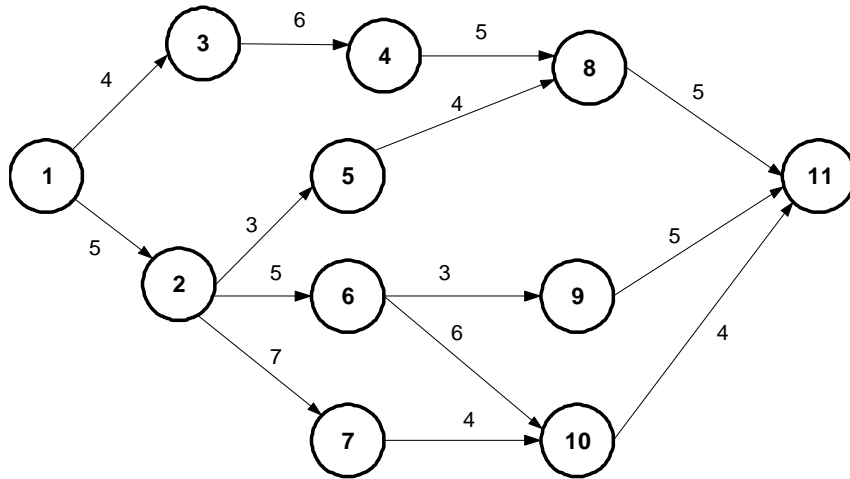
$$\text{Bira } y_j = \begin{cases} 1 & F_j \text{ fresatzailea erabiltzen bada} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

Problema honela idatz daiteke:

$$\max \begin{pmatrix} 60(x_{A1} + x_{A2}) + 40(x_{B1} + x_{B2}) + 35(x_{C1} + x_{C2}) - 4(x_{A1} + x_{A2}) - 4(x_{B1} + x_{B2}) - 2(x_{C1} + x_{C2}) \\ -2x_{A1} - 5x_{B1} - 3x_{C1} - 3x_{A2} - 4x_{B2} - 2x_{C2} - 75y_1 - 80y_2 \end{pmatrix}$$

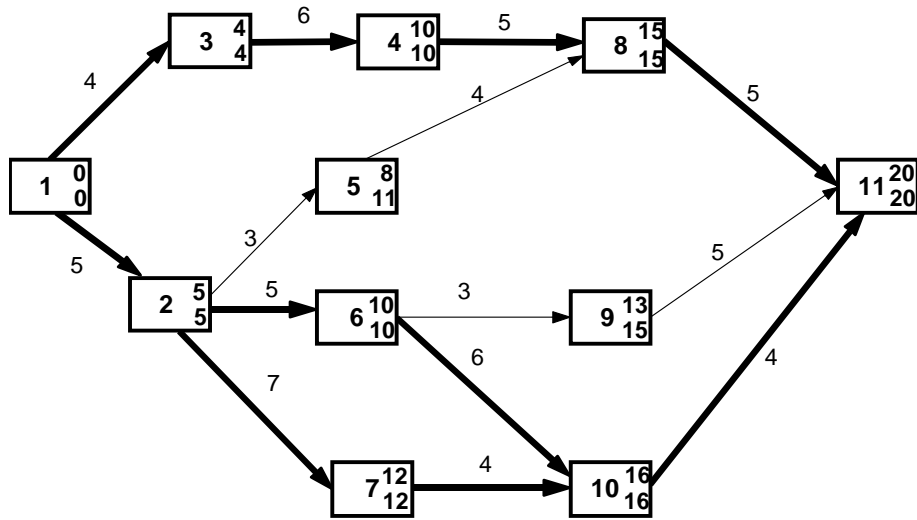
$$\begin{cases} 2(x_{A1} + x_{A2}) + (x_{B1} + x_{B2}) + 5(x_{C1} + x_{C2}) \leq 200 \\ 6x_{A1} + 5x_{B1} + 3x_{C1} \leq 84y_1 \\ 5x_{A2} + 5x_{B2} + 4x_{C2} \leq 100y_2 \\ x_{ij} \geq 0 \quad \text{osoak} \quad i = A, B, C \quad j = 1, 2 \\ y_i = 1 \text{ edo } 0 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

2. Izan bedi honako sare hau, ekintzen iraupenak astetan ematen direlarik:



- Zein da proiektuaren iraupen minimoa? Eman bide kritiko guztiak.
- Aurreko sareari t iraupeneko (7,9) ekintza berria eranstean badiogu,
 - Ba al dago a) atalean lortutako proiektuaren iraupena laburtzen duen t -ren baliorik?
 - t -ren zein baliotarako luzatuko da a) atalean lortutako proiektuaren iraupena? Balio horietarako, eman proiektuaren iraupena eta ekintzen marjinak t -ren funtzio moduan.

EBAZPENA.



a) Proiektuaren iraupen minimoa 20 astekoa da.

Bide kritikoak: (1,3,4,8,11), (1,2,6,10,11) eta (1,2,7,10,11).

b) i) Proiektuaren iraupena laburtzen duen t -ren baliorik ez dago, beste ekintzak bukatzeko 20 aste behar baitira. Ekintza berri bat erantsiz gero, proiektuaren iraupena mantendu edo handitu egingo da.

ii) Proiektuaren iraupena 20 baino handiagoa da $t > 3$ denean, iraupen berria $t + 17$ delarik.

Ekintza	Q(j)	P(i)	t(i,j)	M(i,j)
(1,2)	5	0	5	0
(1,3)	$1 + t(7,9)$	0	4	$t(7,9) - 3$
(2,5)	$8 + t(7,9)$	5	3	$t(7,9)$
(2,6)	$7 + t(7,9)$	5	5	$t(7,9) - 3$
(2,7)	12	5	7	0
(3,4)	$7 + t(7,9)$	4	6	$t(7,9) - 3$
(4,8)	$12 + t(7,9)$	10	5	$t(7,9) - 3$
(5,8)	$12 + t(7,9)$	8	4	$t(7,9)$
(6,9)	$12 + t(7,9)$	10	3	$t(7,9) - 1$
(6,10)	$13 + t(7,9)$	10	6	$t(7,9) - 3$
(7,9)	$12 + t(7,9)$	12	$t(7,9)$	0
(7,10)	$13 + t(7,9)$	12	4	$t(7,9) - 3$
(8,11)	$17 + t(7,9)$	15	5	$t(7,9) - 3$
(9,11)	$17 + t(7,9)$	$12 + t(7,9)$	5	0
(10,11)	$17 + t(7,9)$	16	4	$t(7,9) - 3$

3. Enpresa bateko langileen zuzendariak 4 langile ditu 4 sailei esleitzeko. Langile bakoitzaren utilitatea sail bakoitzean taula honetan jasotzen da:

Langilea\Saila	1	2	3	4
1	12	6	10	3
2	10	8	15	4
3	17	6	16	7
4	20	8	10	3

- a) Sail bakoitzari langile desberdin bat esleitzen badiogu, kalkulatu utilitate osoa maximizatzen duen esleipena. Bigarren langilearen utilitate bakoitza unitate 1 handituz gero, esleipena aldatuko litzateke? (Azaldu berriro ebatzi gabe).
- b) Enpresak 5. langile bat dauka, utilitate hauekin:

16	7	12	2
----	---	----	---

Zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa kasu hauetan? (taula planteatu ebatzi gabe eta kontuan hartu langile bati ezin zaizkiola bi sail esleitu).

- i. Enpresak 5. langilea sail bati esleitzeko konpromezua dauka eta sail bakoitzari langile bakar bat esleituko zaio.
- ii. Enpresak ez du 5. langilea sail bati esleitzeko konpromezurik eta sail bakoitzari langile bakar bat esleituko zaio.
- iii. 5 langileak esleituak egon behar dira eta sail guztiak erabili behar ditugu.

EBAZPENA.

a)

	S1	S2	S3	S4	
L1	-12	-6	-10	-3	+12
L2	-10	-8	-15	-4	+15
L3	-17	-6	-16	-7	+17
L4	-20	-8	-10	-3	+20

0	6	2	9
5	7	0	11
0	11	1	10
0	12	10	17
	-6		-9

0	0	2	0
5	1	0	2
0	5	①	1
0	6	10	8

1	0	2	0
6	1	0	2
0	4	0	0
0	5	9	7

Esleipen hobereena: L1 - S2

L2 - S3

L3 - S4

L4 - S1

Balio hobereena: $6 + 15 + 7 + 20 = 48$

Bigarren langilearen utilitate bakoitza unitate bat handituz gero, esleipena ez da aldatuko: lerro baten elementuei kopuru bera batuz esleipen hobereena ez baita aldatzen.

b)

(i)

	1	2	3	4	F
1	-12	-6	-10	-3	0
2	-10	-8	-15	-4	0
3	-17	-6	-16	-7	0
4	-20	-8	-10	-3	0
5	-16	-7	-12	-2	M

(ii)

	1	2	3	4	F
1	-12	-6	-10	-3	0
2	-10	-8	-15	-4	0
3	-17	-6	-16	-7	0
4	-20	-8	-10	-3	0
5	-16	-7	-12	-2	0

(iii)

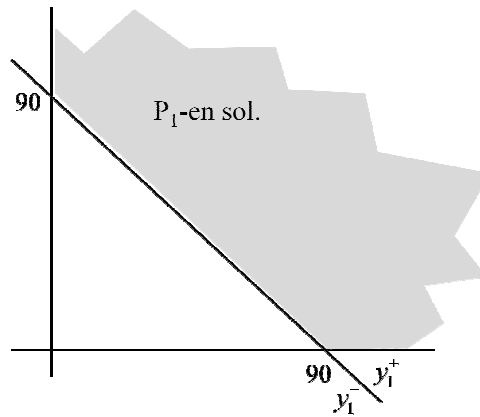
	1	1	2	2	3	3	4	4
1	-12	-12	-6	-6	-10	-10	-3	-3
2	-10	-10	-8	-8	-15	-15	-4	-4
3	-17	-17	-6	-6	-16	-16	-7	-7
4	-20	-20	-8	-8	-10	-10	-3	-3
5	-16	-16	-7	-7	-12	-12	-2	-2
F	0	M	0	M	0	M	0	M
F	0	M	0	M	0	M	0	M
F	0	M	0	M	0	M	0	M

4. Ebatzi:

$$\begin{aligned} & \min L(y_1^-, y_4^+, y_2^-, y_3^+, y_5^-) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 90 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 4x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ y_1^+ - y_4^+ + y_4^- = 10 \\ x_1 + 2x_2 - y_5^+ + y_5^- = 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5) \end{cases} \end{aligned}$$

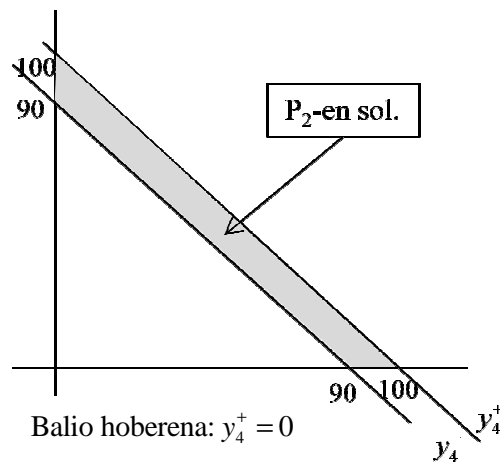
EBAZPENA.

$$\begin{aligned} & P_1 \equiv \min(y_1^-) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 90 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Balio hoberena: $y_1^- = 0$

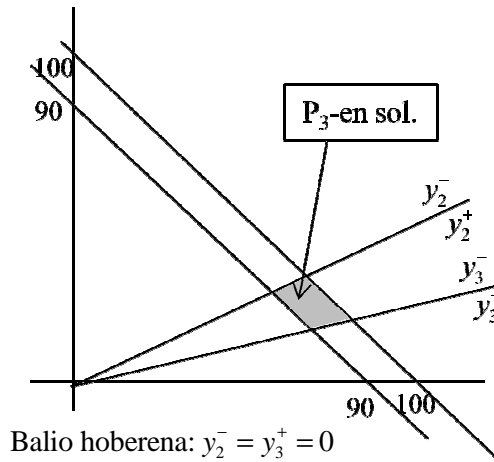
$$\begin{aligned} & P_2 \equiv \min(y_4^+) \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 90 \\ y_1^+ - y_4^+ + y_4^- = 10 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_4^+, y_4^- \geq 0; y_1^- = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



Balio hoberena: $y_4^+ = 0$

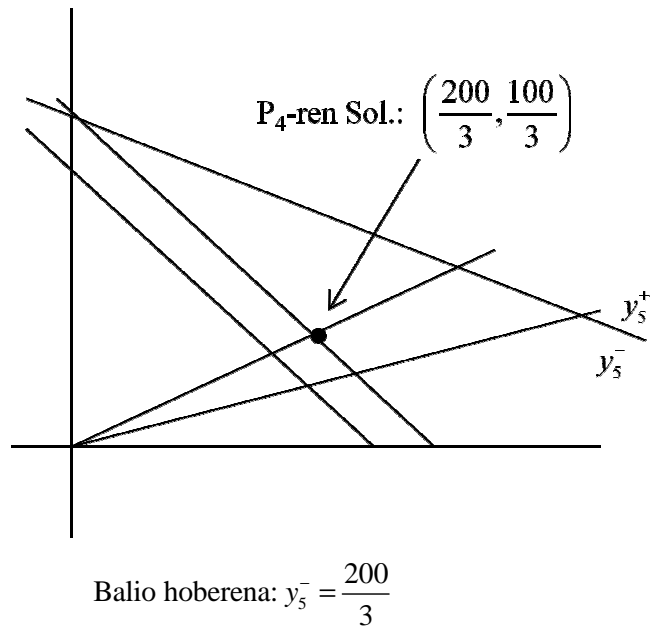
$$P_3 \equiv \min(y_2^- + y_3^+)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 90 \\ y_1^+ - y_4^+ + y_4^- = 10 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 4x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ y_1^- = y_4^+ = 0 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0, \quad i=1,2,3,4 \end{cases}$$



$$P_4 \equiv \min(y_5^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 90 \\ y_1^+ - y_4^+ + y_4^- = 10 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 4x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1 + 2x_2 - y_5^+ + y_5^- = 200 \\ y_1^- = y_2^- = y_3^+ = y_4^+ = 0 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0, \quad i=1,2,3,4,5 \end{cases}$$



Soluzioa: $(x_1, x_2) = \left(\frac{200}{3}, \frac{100}{3}\right)$.

$$y_1^- = y_2^- = y_3^+ = y_4^+ = 0, \quad y_5^- = \frac{200}{3}.$$

$$y_1^+ = 10, \quad y_2^+ = 0, \quad y_3^- = \frac{200}{3}, \quad y_4^- = 0, \quad y_5^+ = 0.$$

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2002ko iraila

1. Enpresa batek 3 makina ezberdinetan ekoiztu daitekeen produktu jakin baten 50000 unitate merkaturatu nahi ditu. Makina bakoitza martxan jartzeko kostua eta unitateko ekoizpenarenak taula honetan jasotzen dira, moneta unitatetan, makina bakoitzaren edukiera maximoarekin batera:

	Martxan jartzeko kostua	Ekoizpen kostua unitateko	Ekoizpen edukiera maximoa
1 Makina	250	25	15000
2 Makina	750	5	20000
3 Makina	500	13	30000

Enpresaren helburua makina horietatik zein edo zeintzuk erabiliko dituen erabakitzea da, esandako lotea kostu total minimoan ekoizteko.

- Formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.
- Administrazioak ekoizpena 40000 unitatera murrizteagatik 300 m.u.ko diru laguntza eskaintzen badio, eta enpresak ekoizpena kantitate horretaraino murriztea edo ez erabaki behar badu, formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.

EBAZPENA.

Bira x_i i makinak ekoizten duen unitate kopurua, $i = 1, 2, 3$ eta; $j = 1, 2$.

$$\text{Bira } y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ makina martxan jartzen badu} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

a)

$$\min(25x_1 + 250y_1 + 5x_2 + 750y_2 + 13x_3 + 500y_3)$$

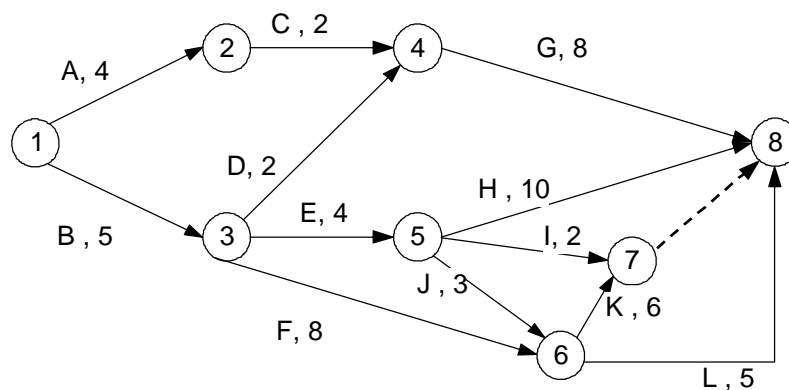
$$\begin{cases} x_1 \leq 15000y_1 \\ x_2 \leq 15000y_2 \\ x_3 \leq 30000y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 50000 \\ x_{ij} \geq 0 \text{ osoak } i = 1, 2, 3 \\ y_i = 1 \text{ edo } 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\text{b) Biz } y = \begin{cases} 1 & \text{enpresak murrizketa onartzen badu} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

$$\min(25x_1 + 250y_1 + 5x_2 + 750y_2 + 13x_3 + 500y_3)$$

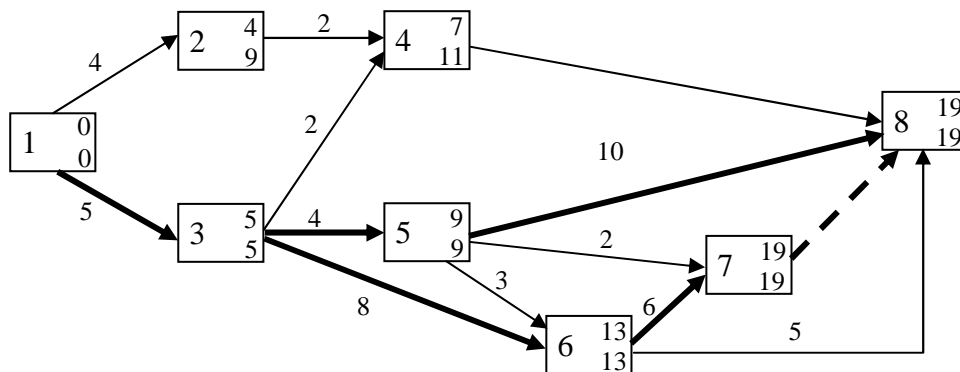
$$\begin{cases} x_1 \leq 15000y_1 \\ x_2 \leq 15000y_2 \\ x_3 \leq 30000y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 50000 \\ x_{ij} \geq 0 \text{ osoak } i=1,2,3 \\ x_{ij} \geq 0 \text{ osoak } i=1,2,3 \\ y_i = 1 \text{ edo } 0 \quad i=1, 2,3 \end{cases}$$

2. Grafo honek proiektu bat jasotzen du eta arku bakoitzean ekintza bakoitzaren iraupena, egunetan, adierazten da, beraien izen identifikatzailearekin batera:



- a) Kalkula ezazu proiektuaren aurreikusitako iraupena eta bide kritikoa. Zein da D ekintzaren hasiera denbora berankorrena? Eta C ekintzaren bukaera denbora goiztiarrena?
- b) Erantzun, arrazoituz, galdera hauek:
- Zein da F ekintzaren marjina? F ekintzaren iraupena 6 egunekoa bada, eta beste ekintzak jatorrizko denboran egiten badira, zer eragin edukiko du horrek proiektuaren aurreikusitako iraupenean? Eta 10 egunekoa bada?
 - Zein da D ekintzaren marjina? D ekintzaren iraupena egun batekoa bada, eta beste ekintzak jatorrizko denboran egiten badira, zer eragin edukiko du horrek proiektuaren aurreikusitako iraupen denboran? Eta 6 egunekoa bada?
- c) M eta N ekintza berriak sartu behar baditugu, horien berehalako aurreko bakarria C delarik eta M eta N beste ekintzen berehalako aurrekoak ez izanik, nola geldituko litzateke proiektua irudikatuko duen grafo berria?

EBAZPENA.



a) Proiektuaren aurreikusitako iraupena: 19 egun

Bide kritikoak: (1,3,5,8) eta (1,3,6,7,8)

$$HDB(D) = HDB(3,4) = BDB(3,4) - t(3,4) = Q(4) - t(3,4) = 9$$

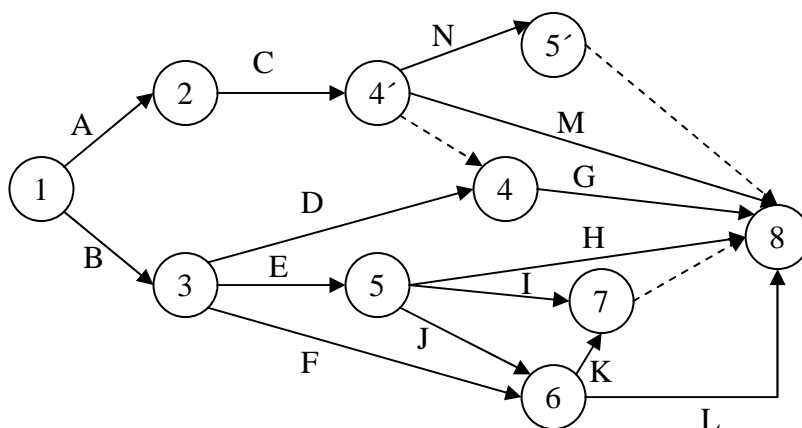
$$BDG(C) = BDG(2,4) = HDG(2,4) + t(2,4) = P(2) + t(2,4) = 6$$

b) i) $M(F) = M(3,6) = 0$ da, F ekintza kritikoa baita. Bere iraupena 2 egun murrizteak ez du proiektuaren aurreikusitako iraupenean eraginik, ekintza hori jasotzen ez duen beste bide kritikoa existitzen baita.

Ekintza hau 2 egun atzeratzen bada proiektuaren aurreikusitako iraupena ere 2 egun atzeratuko da, hau da 21 egunekoa izango da.

ii) $M(D) = M(3,4) = Q(4) - P(3) - t(3,4) = 4$. D ekintzaren iraupena egun bat murrizteak ez du eraginik proiektuaren aurreikusitako iraupenean, kritikoa ez baita. 4 egun atzeratzen bada, ez du proiektuaren aurreikusitako iraupenean eraginik, horixe baita bere marjina. Kasu horretan ekintza hori bide kritiko berri batean agertzen da.

c)



3. Enpresa kimiko batek bi produktu, CS-1 eta CS-2, nahastuz konposatu edo nahaste berri bat lortzen du. CS-1 litro bakoitza 3 m.u. kostatzen da eta bere ekarpena konposatuan sodioko 5gr eta sufreko 2 gr-koa da. CS-2 litro bakoitza, ordea, 1 m.u. kostatzen da eta bere ekarpena konposatuan sodioko 2gr eta sufreko 1 gr-koa da. Lortutako konposatuak gutxienez sodio 9 gr eta sufre 4 gr eduki behar ditu.

Helmuga hauek ezartzen dira:

- 4 litro konposatu ekoiztu.
- Kostua 5 m.u. baino handiagoa ez izatea.

Honako hau eskatzen da:

- Formulatu eta ebatzi problema, lehenengo lehentasuna kostua 5 m.u. baino handiagoa ez izatea bada, eta bigarren lehentasuna ekoizpena 4 litro konposatu izatea bada.
- Formula ezazu aurreko problema, kostua gainditzeak (gaintetik egoteak) konposatuaren ekoizpena 4 litroko asmoaren gaintetik egotearen ponderazio berdina badu, eta azpitik egotearen ponderazioaren bikoitza.

EBAZPENA.

x_1 = CS-1 produktutik erabilitako litroak

x_2 = CS-2 produktutik erabilitako litroak

a)

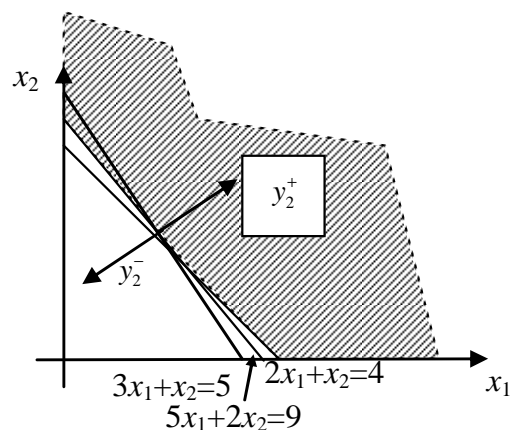
$$\min L(y_2^+, y_1^+ + y_1^-)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 4 \\ 3x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

$$P_1 \equiv \min(y_2^+)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_2^+, y_2^- \geq 0 \end{cases}$$

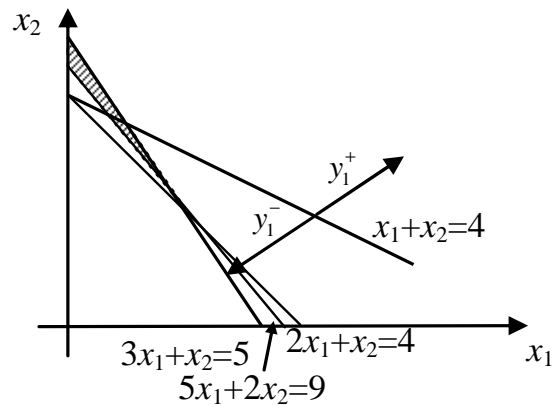
Soluzio hobereena: $y_2^+ = 0$



Bigarren lehentasuna ebazten dugu:

$$P_2 \equiv \min(y_1^+ + y_1^-)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 5 \\ x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_2^+ = 0, y_2^- \geq 0 \\ y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena: $y_1^+ + y_1^- = 0 \Rightarrow y_1^+ = 0; y_1^- = 0$

Problemaren soluzioa \overline{AB} zuzenkia da, A puntua $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ sistemaren soluzioa delarik

eta B puntua $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ sistemarena.

A puntuan $y_2^- = \frac{1}{3}$ betetzen da eta B puntuan $y_2^- = 0$.

Soluzio hoberenak: $\overline{AB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right) \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right); y_1^+ = 0; y_1^- = 0; y_2^+ = 0; y_2^- \geq 0$

Zehazki: $(x_1, x_2, y_2^-) \in \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 0\right)$.

b)

$$\min(2y_2^+ + 2y_1^+ + y_1^-)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 4 \\ 3x_1 + x_2 - y_2^+ + y_2^- = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

4. Higiezin agentzi batek 4 etxebizitza ditu saltzeko eta 5 bezeroen, A, B, C, D eta E, eskaintzak ditu. Bezero bakoitzak etxebizitza bakar bat erosiko du eta etxebizitza bakoitza bezero bakar bati salduko zaio. Bezero bakoitzak egindako eskaintzak taula honetan jasotzen dira (mila hamarreko eurotan):

	E1	E2	E3	E4
A	--	12	18	15
B	12	14	17	19
C	11	17	15	16
D	14	17	22	--
E	13	--	20	17

non – bezeroak etxebizitza hori ez duela nahi adierazten duen.

- Ebatzi, hungariar metodoa erabiliz, lau etxebizitzak bost bezeroetatik lauri esleitzeko problema, agentziaren sarrerak maximizatuz.
- Agentziak C bezeroari etxebizitza bat salduko diola erabakitzen badu, eraiki (ebatzi gabe) hungariar metodoa erabiliz, esleipen hobereana lortzeko erabiliko genukeen taula.
- Agentziak E4 etxebizitza ez badu salgai jartzen (soilik hiru salgai) eta C eta D bezeroak egoera berdinean gelditu behar badute (hau da, biak etxebizitza bana jasotzen dute, edo inori ez zaio etxebizitzarik esleitzen), planteatu problema, programazio lineal osoko problema moduan.

EBAZPENA.

a)

M	-12	-18	-15	0
-12	-14	-17	-19	0
-11	-17	-15	-16	0
-14	-17	-22	M	0
-13	M	-20	-17	0
+14	+17	+22	+19	

M	5	4	4	0
2	3	5	0	X
3	0	7	3	X
0	X	X	M	X
1	M	2	2	X

M	4	3	3	0
2	3	5	0	1
3	0	7	3	1
X	X	0	M	1
0	M	1	1	X

Esleipen hobereana: A-pisurik gabe; B-E4; C-E2; D-E3; E-E1.

Sarrera hobereana: 71 mila hamarreko euro.

b)

M	-12	-18	-15	0
-12	-14	-17	-19	0
-11	-17	-15	-16	M
-14	-17	-22	M	0
-13	M	-20	-17	0

c)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ bezeroari } j \text{ etxebizitza esleitzen bazaio} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

$$i = A, B, C, D, E; \quad j = 1, 2, 3.$$

$$\max[12x_{A2} + 18x_{A3} + 12x_{B1} + 14x_{B2} + \dots + 20x_{E3}]$$

$$x_{ij} = 0 \text{ edo } 1 \quad i = A, B, C, D, E; \quad j = 1, 2, 3; \quad x_{A1} = 0, x_{E2} = 0$$

$$x_{Aj} + x_{Bj} + x_{Cj} + x_{Dj} + x_{Ej} = 1 \quad j = 1, 2, 3$$

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} \leq 1 \quad i = A, B, C, D, E$$

$$x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} = x_{D1} + x_{D2} + x_{D3}$$

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2003ko ekaina

1. Enpresa batek bi konposatu, C1 eta C2, ekoizten ditu. Egungo ekoizpen instalazioak 10 langile ditu, bakoitzak asteko 40 orduz lan egiten dutenak, guztira asteko gehienez 400 orduko lan edukiera izanik. C1-eko unitate bakoitzak 3 lan ordu behar ditu eta C2-ko unitate bakoitzak 2 ordu. Enpresak erabaki hau hartu behar du: egungo instalazioarekin jarraitu edo beste berri batekin aldatu, azken horren lan edukiera berdina izanik, baina orain C1 eta C2 konposatuak egiteko beharrezko lan orduak 2 eta 3, hurrenez hurren, izanik. C2 konposatuaren asteko eskaria gehienez 125 unitatekoa da. Enpresak mozkin maximoa lortu nahi du, C1 eta C2 unitateko mozkina, hurrenez hurren, 300 eta 500 m.u. direla jakinik.
- a) Formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.
- b) a) ataleko erabaki hoberena eguneko ekoizpen instalazioarekin jarraitzea dela jakinik, enpresak orain gehienez 3 langile gehiago kontrata ditzake, bakoitzeko kostua asteko 800 m.u. izanik. Gainera, zuzendaritzak ekoizpen instalazioa handitzea kontuan har dezake, 200.000 m.u.ko kostuarekin. Handitze horrekin enpresak gehienez 8 langile gehiago kontrata ditzake, handitu gabe kontrata daitezkeenak baino 5 gehiago. Formula ezazu problema berria programazio lineal osoko problema moduan.

EBAZPENA.

$$x_1 = \text{C1ko unitate kopurua}$$

$$x_2 = \text{C2ko unitate kopurua}$$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{egungo instalazioarekin jarraitzen badu} \\ 0 & \text{egungo instalazioarekin jarraitzen ez badu} \end{cases}$$

a)

$$\max(300x_1 + 500x_2)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 400 + M(1 - y)$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 400 + My$$

$$x_2 \leq 125$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak}$$

$$y = 0 \text{ edo } 1$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

b)

 $x =$ gehitutako langile kopurua

$$z = \begin{cases} 1 & \text{ekoizpen instalazioa handitzen bada} \\ 0 & \text{ekoizpen instalazioa handitzen ez bada} \end{cases}$$

$$\max(300x_1 + 500x_2 - 800x_1 - 200.000z)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 400 + 40x$$

$$x \leq 3 + 5z$$

$$x_2 \leq 125$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x \geq 0 \text{ eta osoak}$$

$$z = 0 \text{ edo } 1$$

2. Foru aldundiak Urkiolako natura-parkeko 4 tokitan basoa berri nahi du. Alda ditzaketen espezieak eta aldaketa kostuak (moneta unitatetan) ezberdinak dira toki bakoitzean, taula honetan jasotzen den moduan:

	Gaztainondo	Haritza	Intxaurrondo	Pagoa
A	20	15	22	25
B	16	19	25	14
C	18	14	20	20
D	21	17	18	16

- a) Lau espezieak aldatu nahi badira, bakoitza toki batean, zein izango da kostu total minimoko tokien banaketa?
- b) a) ataleko planari aldaketa hauek egin zaizkio:
- i. Lau tokietatik bitan gaztainondoa aldatzeko aukera kontuan hartu behar da.
 - ii. Haritza derrigorrean aldatuko da.
 - iii. Toki ezberdinetako lur azterketek C tokian soilik haritza eta pagoa alda daitezkeela ondorioztatzen dute.

Adierazi (ebatzi gabe) zein taulari aplikatuko zeniokeen hungariar metodoa, kostu total minimoa lortzeko.

EBAZPENA.

a) Hungariar metodoa erabiliko dugu taula honetan:

	Gaztainondo	Haritza	Intxaurrondo	Pagoa
A	20	15	22	25
B	16	19	25	14
C	18	14	20	20
D	21	17	18	16

Esleipen hoberen hau lortzen da: A tokian -Haritza; B tokian-Pagoa; C tokian-Gaztainondoa eta D tokian-intxaurrondoa, 65 m.u.-ko kostu minimoarekin.

b) Hungariar metodoa erabiliko dugu taula honetan:

	Gaztainondo	Gaztainondo	Haritza	Intxaurrondoa	Pagoa
A	20	20	15	22	25
B	16	16	19	25	14
C	M	M	14	M	20
D	21	21	17	18	16
Fiktizioa	0	0	M	0	0

3. Gobernu kanpoko erakunde batek laguntza paketeak bidali nahi ditu estatu jakin batera. Bi pakete mota dauzka: oinarrizko paketea, 400 \$ kostatzen dena eta 40 pertsoneri laguntzeko balio duena eta pakete aurreratua, 800 \$ kostatzen dena eta 50 pertsoneri laguntzeko balio duena. Laguntza paketeetan murrizketa hauek daude: gehienez 40000 pakete bidal daitezke, hauetatik gutxienez 5000 aurreratuak izanik. Helmuga hauek lehentasun orden honekin ezarri dira:

1. Laguntzaren kostua 20 milioi dolar baino handiagoa ez izatea.
 2. 11 milioiko populazioa duen estatu horretako biztanleriaren %20ari gutxienez laguntza ematea.
- a) Formula ezazu problema eta ebatzi problema lasaitua.
 - b) Lehentasun ordena kontrakoa balitz, zein litzateke soluzioa?

EBAZPENA.

$$x_1 = \text{Oinarrizko pakete kopurua}$$

$$x_2 = \text{Pakete aurreratu kopurua}$$

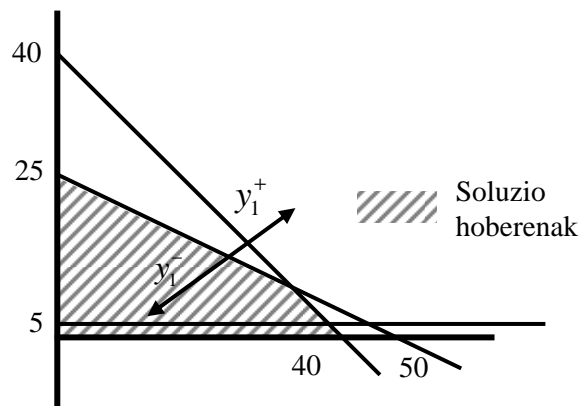
a)

$$\begin{aligned} \min L(y_1^+, y_2^-) \\ x_1 + x_2 &\leq 40000 \\ x_2 &\geq 5000 \\ 400x_1 + 800x_2 - y_1^+ + y_1^- &= 20000000 \\ 40x_1 + 50x_2 - y_2^+ + y_2^- &= 22000000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \\ y_i^+, y_i^- &\geq 0, i=1,2 \end{aligned}$$

P1

$$\begin{aligned} \min(y_1^+) \\ x_1 + x_2 &\leq 40000 \\ x_2 &\geq 5000 \\ 400x_1 + 800x_2 - y_1^+ + y_1^- &= 20000000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_1^+, y_1^- &\geq 0 \end{aligned}$$

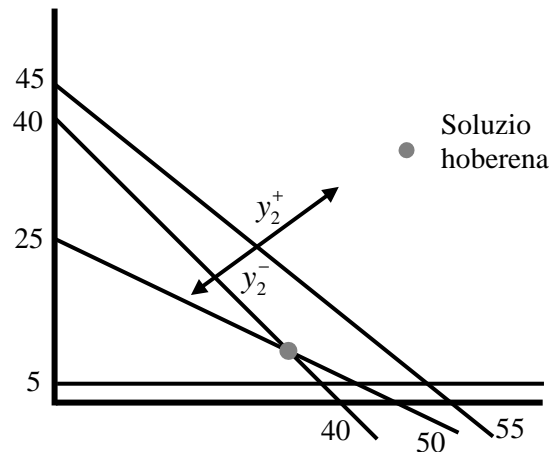
Balio hoberena: 0



P2

$$\begin{aligned} \min(y_2^-) \\ x_1 + x_2 &\leq 40000 \\ x_2 &\geq 5000 \\ 400x_1 + 800x_2 - y_1^+ + y_1^- &= 20000000 \\ 40x_1 + 50x_2 - y_2^+ + y_2^- &= 22000000 \\ y_1^+ = 0, y_1^- &\geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_2^+, y_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

Balio hoberena: 500000



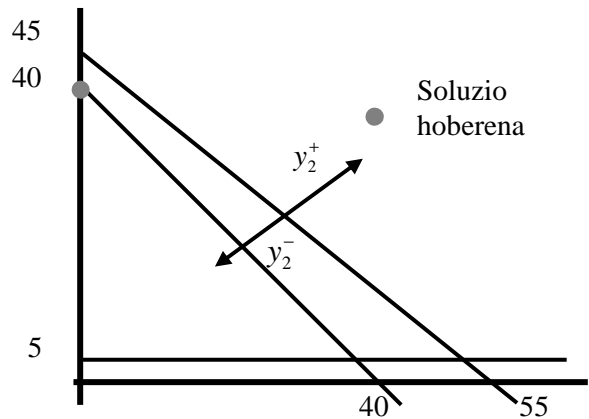
Ondorioa: 30000 oinarrizko pakete eta 10000 pakete aurreratu bidaliko dira, 20 milioi dolarreko kostuarekin. Laguntza 1700000 bizilagunei helduko zaie.

b)

$$\begin{aligned} \min L(y_2^-, y_1^+) \\ x_1 + x_2 &\leq 40000 \\ x_2 &\geq 5000 \\ 400x_1 + 800x_2 - y_1^+ + y_1^- &= 20000000 \\ 40x_1 + 50x_2 - y_2^+ + y_2^- &= 22000000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \\ y_i^+, y_i^- &\geq 0, i=1,2 \end{aligned}$$

P1

$$\begin{aligned} \min(y_2^-) \\ x_1 + x_2 &\leq 40000 \\ x_2 &\geq 5000 \\ 40x_1 + 50x_2 - y_2^+ + y_2^- &= 22000000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_1^+, y_1^- &\geq 0 \end{aligned}$$

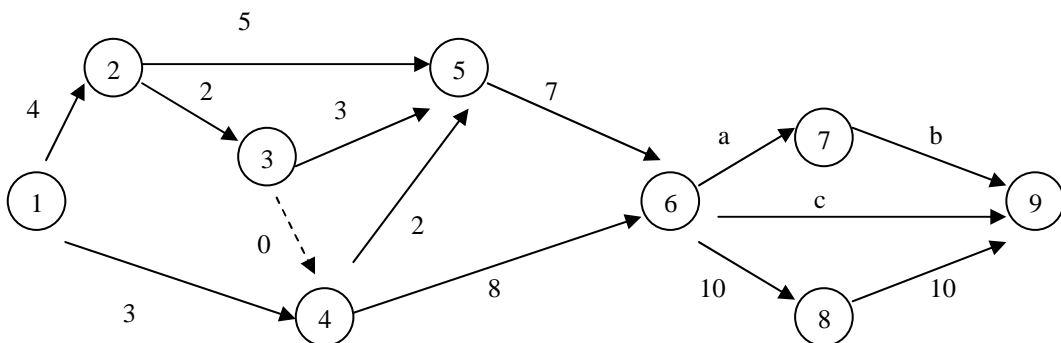


Balio hoberena: 200000

Ondorioa: 40000 pakete aurreratu bidaliko dira soilik, 32 milioi dolarreko kostuarekin.

Laguntza 2000000 bizilagunei helduko zaie.

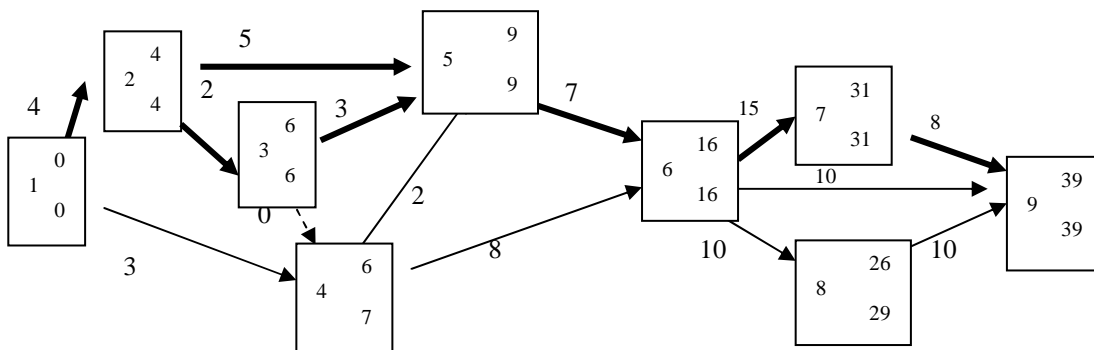
4. Grafo honek proiektu bat irudikatzen du, ekintzen arteko aurre-erlazioak eta beraien iraupena azaltzen delarik ($t(6,7) = a$, $t(7,9) = b$, eta $t(6,9) = c$ dira).



- a) Eman bide kritikoa(k), proiektuaren aurreikusitako iraupena eta ekintzen marjina, $a=15$, $b=8$ eta $c=10$ izanik.
- b) Eman bide kritikoa(k), proiektuaren aurreikusitako iraupena eta ekintzen marjina, $c > a + b > 20$ izanik.

EBAZPENA.

a)



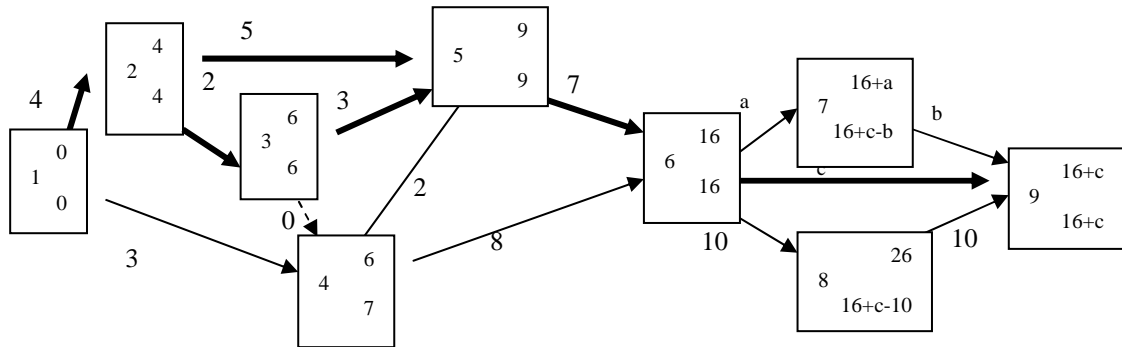
Bide kritikoak: a) (1,2,5,6,7,9)

Proiektuaren aurreikusitako iraupena: 39 egun

b) (1,2,3,5,6,7,9)

(i,j)	t(i,j)	BDB(i,j)	HDG(i,j)	M(i,j)
(1,2)	4	0	4	0*
(1,4)	3	0	7	4
(2,3)	2	4	6	0*
(2,5)	5	4	9	0*
(3,4)	0	6	7	1
(3,5)	3	6	9	0*
(4,5)	2	6	9	1
(4,6)	8	6	16	2
(5,6)	7	9	16	0*
(6,7)	15	16	31	0*
(6,8)	10	16	29	3
(6,9)	10	16	39	13
(7,9)	8	31	39	0*
(8,9)	10	26	39	3

b)



$c > a+b > 20$ denez:

$$P(9) = \max\{16 + a + b, 16 + c, 36\} = 16 + c$$

$$Q(6) = \min\{16 + c - a - b, 16, 16 + c - 20\} = 16$$

Bide kritikoak: a) (1,2,5,6,9)

b) (1,2,3,5,6,9)

Proiektuaren aurreikusitako iraupena: $16 + c$ egun

$$M(6,9) = 0$$

$$M(6,7) = Q(7) - P(6) - t(6,7) = 16 + c - b - 16 - a = c - (a+b)$$

$$M(6,8) = Q(8) - P(6) - t(6,8) = 16 + c - 10 - 16 - 10 = c - 20$$

$$M(7,9) = Q(9) - P(7) - t(7,9) = 16 + c - (16 + a) - b = c - (a+b)$$

$$M(8,9) = Q(9) - P(8) - t(8,9) = 16 + c - 26 - 10 = c - 20$$

Beste ekintza guztiek aurreko ataleko marjina mantentzen dute.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2003ko iraila

1. Zerbitzu empresa batek 3 disolbatzaile mota, A , B eta C , eros ditzake itsasaldeko arroketan itsatsitako galipota garbitzeko. Disolbatzaile mota bakoitza erabiltzeko kostu finkoa, tonako kostu aldakorra eta erabilitako tona bakoitzeko garbitzen den galipot kilo kopurua taula honetan jasotzen dira:

	Disolbatzailea erabiltzearen kostu finkoa (m.u.)	Disolbatzailearen kostua tonako (m.u.)	Disolbatzaile tona bakoitzeko garbitutako galipot kg
A	100000	20	750
B	130000	30	600
C	120000	23	650

Honako hau ezagutzen da:

- A , B eta C disolbatzaile bakoitzetik gehienez 50 tona eros daitezke eta erosten bada, gutxienez 20 tona erosiko dira.
- B disolbatzailea erabiltzen bada gobernuak tonako 5 moneta unitateko diru-laguntza emango lioke.
- A disolbatzailea erabili ordez, beraren deribatua, D , erabil daiteke. D disolbatzaileari buruz hau ezagutzen da: erositako tona bakoitzeko kostua 25 m.u. da, tonako 800 kg galipot garbitzen ditu eta gehienez 40 tona eros daitezke.
- Enpresak arroketan itsatsitako 10000 tona galipot garbitu behar ditu gutxienez.

Helburua murrizketa guztiak kostu minimoarekin betetzea bada, formula ezazu problema, ebatzi gabe, programazio lineal osoko problema moduan.

EBAZPENA.

Aldagai hauek definitzen dira:

$x_i = i$ disolbatzailetik 4 erositako tona kopurua ($i = A, B, C, D$)

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ disolbatzailea erosten bada} \\ 0 & i \text{ disolbatzailea erosten ez bada} \end{cases} \quad i = A, B, C, D$$

$$\begin{aligned} & \min(100000y_A + 20x_A + 130000y_B + 25x_B + 120000y_C + 23x_C + 25x_D) \\ & 0.75x_A + 0.6x_B + 0.65x_C + 0.8x_D \geq 10000 \\ & y_A + y_D \leq 1 \\ & 20y_A \leq x_A \leq 50y_A \\ & 20y_B \leq x_B \leq 50y_B \\ & 20y_C \leq x_C \leq 50y_C \\ & 0 \leq x_D \leq 40y_D \\ & y_i = 0,1 \quad i = A, B, C, D \end{aligned}$$

2. Enpresa batek motorrak eta konpresoreak ekoizten ditu. Motor bakoitzak 2.25 ekoizpen ordu behar ditu eta konpresore bakoitzak 1.5 ordu. Motor bakoitzaren bukatua eta kalitate kontrolak 1.5 ordu behar ditu eta konpresore bakoitzak, ordea, 3 ordu. Unitate bakoitzak (motorrak zein konpresoreak) biltegian betetzen duen espazioa 1.5 metro kubikokoa da. Biltegitze kostua 200 eta 400 eurotakoa da motor eta konpresore unitateko, hurrenez hurren; unitateko mozkinak, ordea, 30 eta 50, hurrenez hurren. 13500 ekoizpen ordu erabil daitezke eta bukatze eta kalitate kontrol ordu erabilgarriak 18750 ordu dira. Honako helmuga hauek lehentasun orden honekin ezartzen dira:

- i) 11250 metro kubikoko edukiera ez gainditzen saiatu.
- ii) 2000000 euro baino gehiago ez gastatzen saiatu.
- iii) Produktu bakoitzetik gutxienez 3000 unitate saltzea lortu.
- iv) Gutxienez 300000 euroko mozkin lortzen saiatu.

Formula eta ebatzi ezazu elkartutako problema lasaitua.

EBAZPENA.

x_m = Ekoiztutako motoreak eta x_k = Ekoiztutako konpresoreak. Horiekin eredua:

$$\begin{aligned} & \min L(y_1^+, y_2^+, y_3^-, y_4^-, y_5^-) \\ & 2.25x_m + 1.5x_k \leq 13500 \\ & 1.5x_m + 3x_k \leq 18750 \\ & 1.5x_m + 1.5x_k - y_1^+ + y_1^- = 11250 \\ & 200x_m + 400x_k - y_2^+ + y_2^- = 2000000 \\ & x_m - y_3^+ + y_3^- = 3000 \\ & x_k - y_4^+ + y_4^- = 3000 \\ & 30x_m + 50x_k - y_5^+ + y_5^- = 300000 \\ & x_m \geq 0, x_k \geq 0 \text{ eta osoak} \\ & y_i^+, y_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

L1

$\min(y_1^+)$

$$2.25x_m + 1.5x_k \leq 13500$$

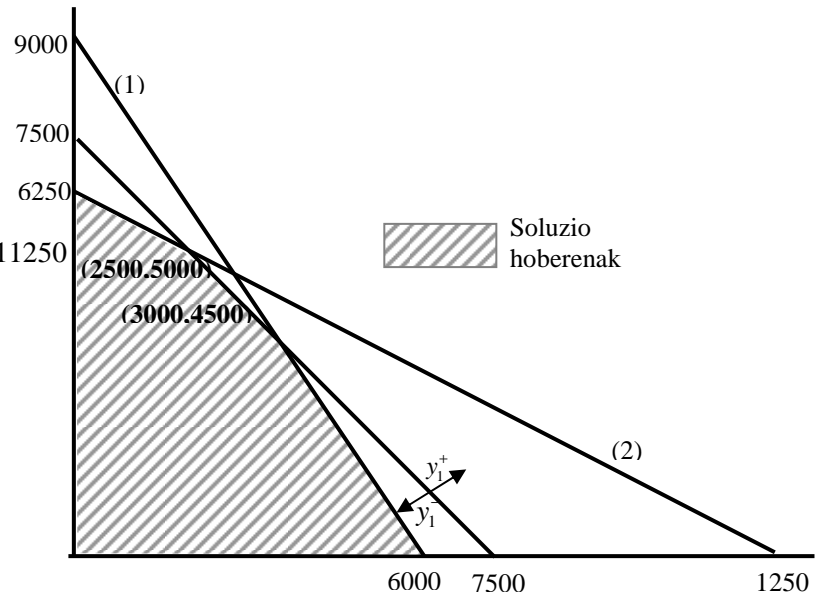
$$1.5x_m + 3x_k \leq 18750$$

$$1.5x_m + 1.5x_k - y_1^+ + y_1^- = 11250$$

$$x_m \geq 0, x_k \geq 0$$

$$y_i^+, y_i^- \geq 0, i=1, \dots, 5$$

Balio hoberena: 0



L2

$\min(y_2^+)$

$$2.25x_m + 1.5x_k \leq 13500$$

$$1.5x_m + 3x_k \leq 18750$$

$$1.5x_m + 1.5x_k - y_1^+ + y_1^- = 11250$$

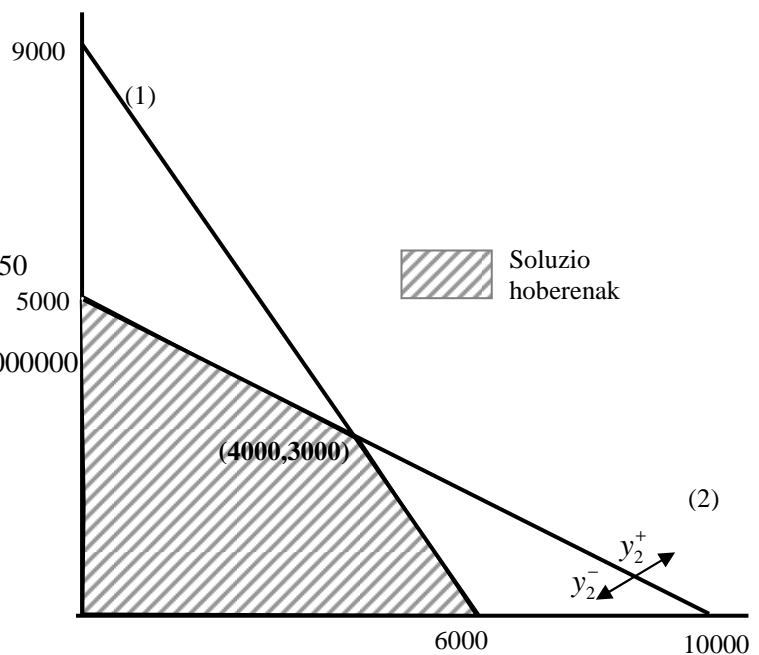
$$y_1^+ = 0$$

$$200x_m + 400x_k - y_2^+ + y_2^- = 2000000$$

$$x_m \geq 0, x_k \geq 0$$

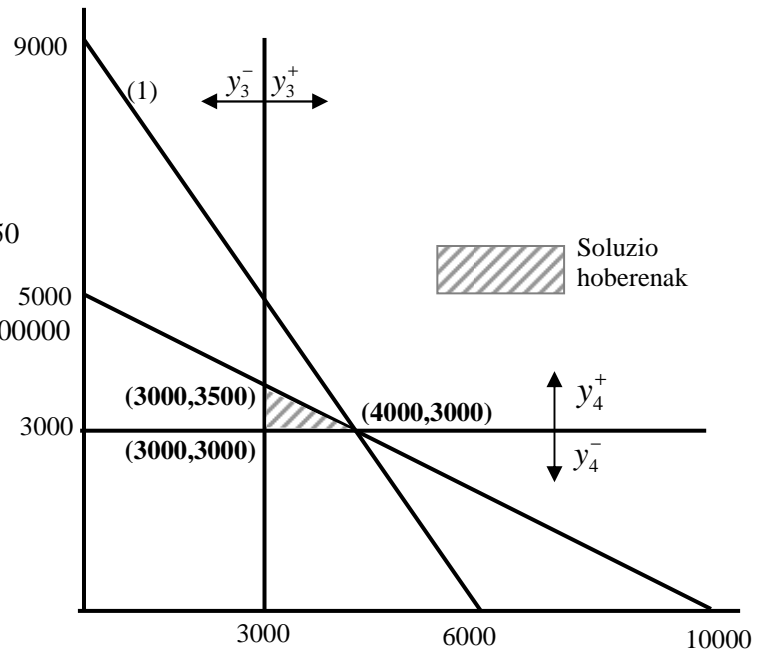
$$y_i^+, y_i^- \geq 0, i=1, 2$$

Balio hoberena: 0



L3

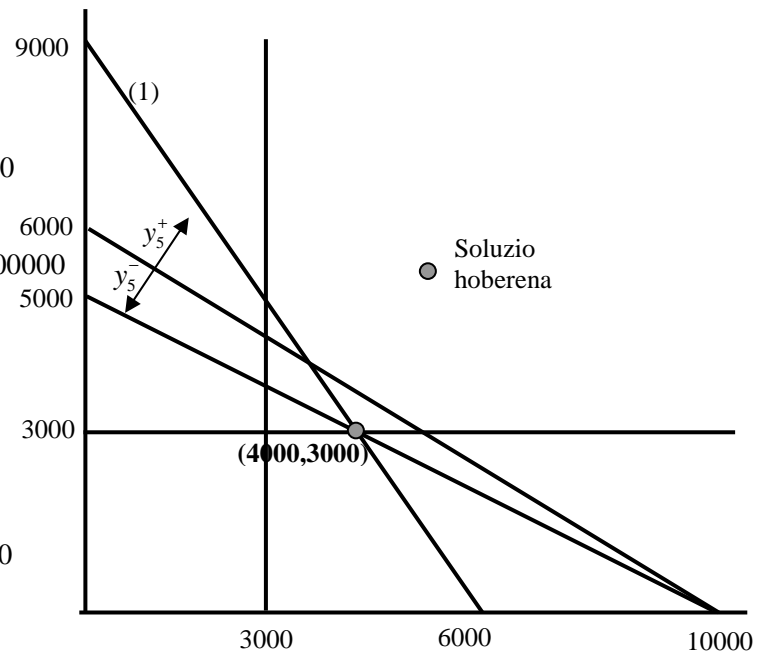
$$\begin{aligned} & \min(y_3^- + y_4^-) \\ & 2.25x_m + 1.5x_k \leq 13500 \\ & 1.5x_m + 3x_k \leq 18750 \\ & 1.5x_m + 1.5x_k - y_1^+ + y_1^- = 11250 \\ & y_1^+ = 0 \\ & 200x_m + 400x_k - y_2^+ + y_2^- = 2000000 \\ & y_2^+ = 0 \\ & x_m - y_3^+ + y_3^- = 3000 \\ & x_k - y_4^+ + y_4^- = 3000 \\ & x_m \geq 0, x_k \geq 0 \\ & y_i^+, y_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$



Balio hoberena: 0

L4

$$\begin{aligned} & \min(y_5^-) \\ & 2.25x_m + 1.5x_k \leq 13500 \\ & 1.5x_m + 3x_k \leq 18750 \\ & 1.5x_m + 1.5x_k - y_1^+ + y_1^- = 11250 \\ & y_1^+ = 0 \\ & 200x_m + 400x_k - y_2^+ + y_2^- = 2000000 \\ & y_2^+ = 0 \\ & x_m - y_3^+ + y_3^- = 3000 \\ & y_3^- = 0 \\ & x_k - y_4^+ + y_4^- = 3000 \\ & y_4^- = 0 \\ & 30x_m + 50x_k - y_5^+ + y_5^- = 300000 \\ & x_m \geq 0, x_k \geq 0 \\ & y_i^+, y_i^- \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$



Balio hoberena: 30000

Ondorioa: 4000 motor eta 3000 konpresore ekoiztuko dira. Biltegian 10500 metro kubikoko espazioa beteko dute. Gordetzeko gastua 2000000 eurokoa da eta lortzen den mozkina 270000 eurokoa.

3. Turbina baten ekoizpenak 4 prozesu behar ditu: P_1 , P_2 , P_3 eta P_4 . Horretarako, enpresak 4 makina ditu eta prozesu bakoitzaren kostua makina bakoitzean ezagutzen da (m.u.-tan), taula honetan jasotzen delarik:

	Makina 1	Makina 2	Makina 3	Makina 4
P_1	6	7	3	5
P_2	3	5	6	6
P_3	4	14	5	4
P_4	5	4	3	3

Enpresak makina berri bat presta dezake, baina hau P_2 eta P_3 prozesuetan erabil daiteke soilik, 2 eta 1 prozesamendu kostuekin, hurrenez hurren. Makina bakoitza prozesu bakar bati eta prozesu bakoitza makina bakar bati esleitu behar dela jakinik,

- Erabaki prozesu bakoitzari esleitu beharreko makina, turbina egiteko kostua minimoa izatea nahi bada.
- Makina berria prestatzeko kostua 4 m.u.-koa balitz, erabaki esleipen hobereana.

EBAZPENA.

- Taula honetan hungariar metodoa aplikatuz,

	Makina 1	Makina 2	Makina 3	Makina 4	Makina berria
P_1	6	7	3	5	M
P_2	3	5	6	6	2
P_3	4	14	5	4	1
P_4	5	4	3	3	M
Fikt ₁	0	0	0	0	0

esleipen hoberen hau lortzen da:

P_1 - Makina 3; P_2 - Makina 1; P_3 - Makina berria; P_4 - Makina 4

Kostu minimoa: 10 m.u.

- Taula honetan hungariar metodoa aplikatuz,

	Makina 1	Makina 2	Makina 3	Makina 4	Makina berria
P_1	6	7	3	5	M
P_2	3	5	6	6	6
P_3	4	14	5	4	5
P_4	5	4	3	3	M
Fikt ₁	0	0	0	0	0

esleipen hoberen hauek lortzen dira:

- a) P1- Makina 3; P2- Makina 1; P3- Makina 4; P4- Makina 2
 - b) P1- Makina 3; P2- Makina 1; P3- Makina berria; P4- Makina 4
- Kostu minimoa: 14 m.u.

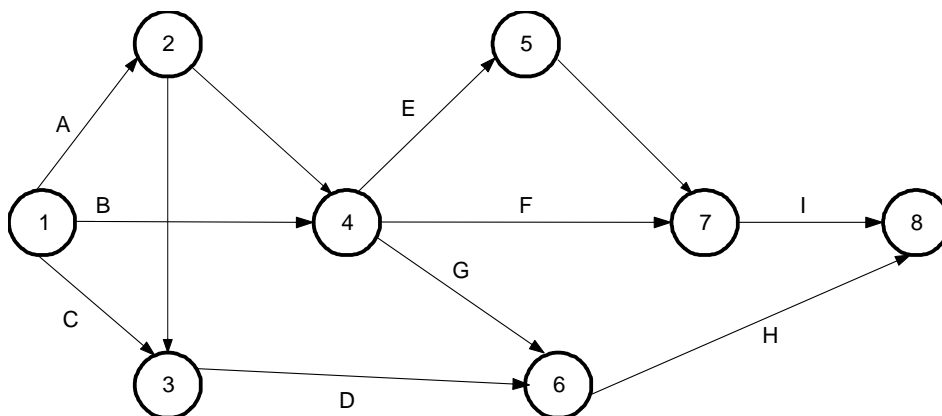
4. Ekintza hauek eta beraien berehalako aurrekoak jasotzen dituen proiektua kontuan hartuz,

Ekintza	Berehalako aurrekoak
A	-
B	-
C	-
D	A, C
E	A, B
F	A, B
G	A, B
H	D, G
I	E, F

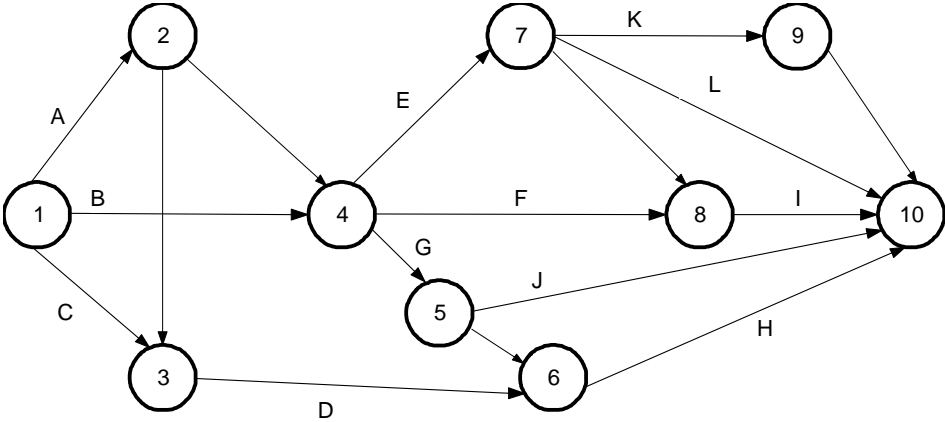
- a) Eraiki proiektua jasoko duen sarea.
- b) Hiru ekintza berri, J, K eta L, aurreko grafoan sartu nahi dira. Ekintza horiei buruz hauxe dakigu: J ekintza egiteko G ekintzak bukatuta egon behar du, eta K eta L ekintzak E ekintza ondoren egingo dira. artu ekintza horiek aurreko grafoan.

EBAZPENA.

a)



b)



IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2004ko ekaina

1. Jostailu enpresa batek hiru jostailu modelo berri (1, 2 eta 3) garatu ditu hurrengo gabonetako kanpainan sartu ahal izateko. Martxan jartzeko kostuak 50000 €, 80000 € eta 70000 € dira 1, 2 eta 3 modeloentzako, hurrenez hurren, eta unitateko mozkinak 10 €, 15 € eta 13 €, hurrenez hurren. Enpresak 3 ekoizpen planta dauzka modelo horiek egiteko, baina gastuak saihesteko, jostailuak instalazio bakar batean ekoiztuko dira.

Orduko ekoiztu daitekeen jostailu kopurua instalazio bakoitzean hau da:

	1 Jostailua	2 Jostailua	3 Jostailua
1 Instalazioa	50	40	60
2 Instalazioa	40	25	20
3 Instalazioa	35	30	20

Instalazioen edukiera 500, 600 eta 630 ordutakoa da, hurrenez hurren. Gerentziak modelo bat edo bi ekoiztea erabaki du.

Formula ezazu problema, programazio lineal osoa erabiliz, mozkin totala maximizatzeko.

EBAZPENA.

Aldagaiak: x_i : ekoizten den i jostailuaren kopurua, $i = 1, 2, 3$

$$y_i : \begin{cases} 1 & i \text{ jostailuaren eredia ekoizten bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

$$z_j : \begin{cases} 1 & i \text{ planta erabiltzen bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3$$

Eredua: $\max (10x_1 + 15x_2 + 13x_3 - 50000y_1 - 80000y_2 - 70000y_3)$

$$\frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{40} + \frac{x_3}{60} \leq 500 + M_1(1 - z_1)$$

$$\frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{25} + \frac{x_3}{20} \leq 600 + M_2(1 - z_2)$$

$$\frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{30} + \frac{x_3}{20} \leq 630 + M_3(1 - z_3)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \leq 1$$

$$x_i \leq M_i y_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$1 \leq y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$x_i \geq 0 \text{ eta osoak } i = 1, 2, 3$$

$$y_i = 1 \text{ edo } 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$z_j = 1 \text{ edo } 0 \quad j = 1, 2, 3$$

non M_i zenbakiak positiboak eta nahi adina handiak diren.

2. Lau bazkideko enpresa txiki batean opor-hilabeteak banatuko dituzte, bakoitzak hilabete ezberdina hartuz. Hilabete posibleak maiatza, ekaina, uztaila, abuztua eta iraila dira, baina merkatu arrazoiengatik abuztuko hilabetean norbaitek derrigorrean hartu beharko ditu oporrak.

Esleipena modurik onenean egiteko, preferentzi zerrenda bat (data, tokia, itsasoa, mendia eta abar) egitea erabaki dute. Zerrenda hori taula honetan jasotzen da, 1 eta 9 arteko puntuazioarekin:

	Maiatza	Ekaina	Uztaila	Abuztua	Iraila
1 Bazkidea	9	7	3	5	4
2 Bazkidea	3	8	1	7	6
3 Bazkidea	7	5	4	2	1
4 Bazkidea	5	6	9	5	7

- a) Kalkulatu, hungariar metodoa erabiliz, puntuazio totala maximizatuko duten esleipenak.
- b) Bazkide batek, aurreko preferentziak errespetatuz, bi planteamendu berri proposatzen ditu: bata abendua opor-hilabete moduan sartzea eta bigarrena, abenduko hilabetean norbaitek derrigorrean oporrak hartzea. Bazkide bakoitzak abendurako preferentziak eman ditu, taula honetan jasotzen direlarik:

	Abendua
1 Bazkidea	2
2 Bazkidea	5
3 Bazkidea	9
4 Bazkidea	6

Eraiki hungariar metodoa aplikatzeko osatuko zenukeen taula bi kasuetan.

EBAZPENA.

- a) Puntuaketa total maximoa egin nahi da. Horregatik Hungariar metodoa erabiltzeko preferentziak (-1) -ekin biderkatu behar ditugu.

Bost hilabete eta lau bazkide ditugu. Taula karratua izan behar denez, kostua 0 duen bazkide fiktizioa erantsiko dugu.

Abuztuko hilabetea derrigorrezkoa denez, bazkide baten batentzako ezingo diogu bazkide fiktizioari esleitu. Hortaz, bazkide fiktizioari abuztuko hilabetean zenbaki oso handia egokituko diogu, M-rekin adierazten duguna.

Hungariar metodoa taula honetan aplikatuko dugu:

	M	E	U	A	I												
B ₁	-9	-7	-3	-5	-4	-(-9)	0	2	6	4	5	0	2	6	3	5	-2
B ₂	-3	-8	-1	-7	-6	-(-8)	5	0	7	1	2	5	7	7	0	2	
B ₃	-7	-5	-4	-2	-1	-(-7)	0	2	3	5	6	0	2	3	4	6	-2
B ₄	-5	-6	-9	-5	-7	-(-9)	4	3	0	4	2	4	3	0	3	2	
B _F	0	0	0	M	0		0	0	0	M	0	0	0	0	M	0	

-1 +2

0	0	4	1	3
7	7	7	0	2
0	0	1	2	4
6	3	0	3	2
2	M	M	M	0

Puntuaketa total maximoa: 30

1. soluzioa:
- 1 bazkidea maiatzan
 - 2 bazkidea abuztuan
 - 3 bazkidea ekainean
 - 4 bazkidea uztailean

2. soluzioa:
- 1 bazkidea ekainean
 - 2 bazkidea abuztuan
 - 3 bazkidea maiatzan
 - 4 bazkidea uztailean

b)

Abendua hautazkoa

-9	-7	-3	-5	-4	-2
-3	-8	-1	-7	-6	-5
-7	-5	-4	-2	-1	-9
-5	-6	-9	-5	-7	-6
0	0	0	M	0	0
0	0	0	M	0	0

Abendua derrigorrezkoa

-9	-7	-3	-5	-4	-2
-3	-8	-1	-7	-6	-5
-7	-5	-4	-2	-1	-9
-5	-6	-9	-5	-7	-6
0	0	0	M	0	M
0	0	0	M	0	M

3. a) Ospitale batean 5 osagaiekin, *A*, *B*, *C*, *D* eta *E*, menua prestatu nahi dute, janariak gutxienez 63000 miligramo (mg) proteina, 10 mg burdin, 15 mg niacina, 1 mg tiamina eta 50 mg C bitamina eman ditzan. Osagai bakoitzeko 100 gramok elikagai bakoitzetik ematen duen kantitatea taula honetan jasotzen da:

Mg/100 gramo	Proteina	Burdina	Niacina	Tiamina	C Bitamina	Koipea
<i>A</i>	5000	1.1	1.4	0.18	0	5000
<i>B</i>	29300	1.8	5.4	0.06	0	5000
<i>C</i>	5300	0.5	0.9	0.06	10	7900
<i>D</i>	3000	2.2	0.5	0.07	28	300
<i>E</i>	4000	1.2	0.6	0.15	3	14300

Janaria ongi orekatuta egoteko eta gaixoek gustuko izan dezaten, osagai bakoitzak, gehienez, kantitate hauek izango ditu: *A*-tik 300 gramo, *B*-tik 300 gramo *C*-tik 200 gramo, *D*-tik 100 gramo eta *E*-tik 100 gramo. Gainera *A*-ko kantitateak gutxienez *D*-koa bider hiru izan behar du. Bestalde, osagai bakoitzeko kostuak 100 gramoko hurrengoak dira:

Osagaia	Euro/100 gramo
A	0.15
B	0.80
C	0.12
D	0.20
E	0.51

Formula ezazu problema, koipe eduki totala eta janari kostua minimizatzeko. Koipe kantitatea edo janariaren kostua zero izatea gerta daiteke?

- b) Aurreko bi helburu funtzioak banan bana minimizatuta, gatazka hau agertzen da: osagai kantitate hoberenak ezberdinak dira. Ospitaleko zuzendariak helmugak eta zigorrak (ponderazioak) ezartzea proposatu du. Hain zuzen, janariaren kostua 2 euro baino gehiago ez izateko helmuga jarri du, eta neurri berdina erabilita zigortuko da. Gainera, janariaren koipe edukia 55000 mg bainoa handiagoa ez izatea nahi da, eta janariaren koipe kantitatea miligramo bat txikiagotzeko 0.009 zentimo ordaintzeko prest legokeela estimatu da. Formulatu problema hau. Ponderatutako helburu funtzioaren balio hobereana janariaren kostu totala al da?

EBAZPENA.

- a) Aldagaiak: $x_i = i$ osagai kantitatea 100 gramotan $i=A, B, C, D, E$

Murrizketak:

$$\begin{cases} 5000x_A + 29300x_B + 5300x_C + 3000x_D + 4000x_E \geq 63000 \\ 1.1x_A + 1.8x_B + 0.5x_C + 2.2x_D + 1.2x_E \geq 10 \\ 1.4x_A + 5.4x_B + 0.9x_C + 0.5x_D + 0.6x_E \geq 15 \\ 0.18x_A + 0.06x_B + 0.06x_C + 0.07x_D + 0.15x_E \geq 1 \\ 0x_A + 0x_B + 10x_C + 28x_D + 3x_E \geq 50 \\ x_A \geq 3x_D \\ 0 \leq x_A \leq 3, \quad 0 \leq x_B \leq 3, \quad 0 \leq x_C \leq 2, \quad 0 \leq x_D \leq 1, \quad 0 \leq x_E \leq 1 \end{cases}$$

Helburu funtzioak:

$$\min (5000x_A + 5000x_B + 7900x_C + 300x_D + 14300x_E)$$

$$\min (0.15x_A + 0.800x_B + 0.12x_C + 0.20x_D + 0.15x_E)$$

Horrela, ezinezkoa da koipe kantitatea edo/eta kostua 0 izatea. Murrizketak direla eta, derrigorrez osagaien bat erabili beharko da, eta osagai guztiek koipea eta kostua dutenez, edozein soluziok koipe eta kostu bat izango du.

b) Aldagaiak: $x_i = i$ osagai kantitatea 100 gramotan $i=A, B, C, D, E$

Murrizketak:

- Aurreko guztiak
- $0.15x_A + 0.800x_B + 0.12x_C + 0.20x_D + 0.15x_E - y_1^+ + y_1^- = 2$
- $5000x_A + 5000x_B + 7900x_C + 300x_D + 14300x_E - y_2^+ + y_2^- = 55000$
- $y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0 \quad i=1, 2$

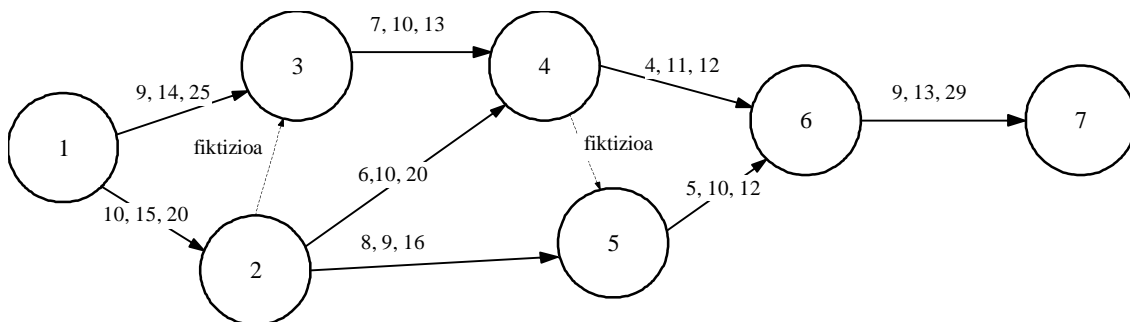
Helburu funtzioa: $\min(1 y_1^+ + 0.00009 y_2^+)$

Problemaren balio hoberena ez da menuaren kostua izango, nahiz eta bere unitateak euroak izan. Kostua $0.15x_A + 0.800x_B + 0.12x_C + 0.12x_D + 0.15x_E$ ekuazioaren balioa izango da.

Haztapenetako problema honen balio hoberena 1.036 da eta soluzio hoberena: $x_A = 3, x_B = 2, x_C = 2,$

$x_D = 1, x_E = 1$. Menuaren kostua aldiz 3 eurokoa da.

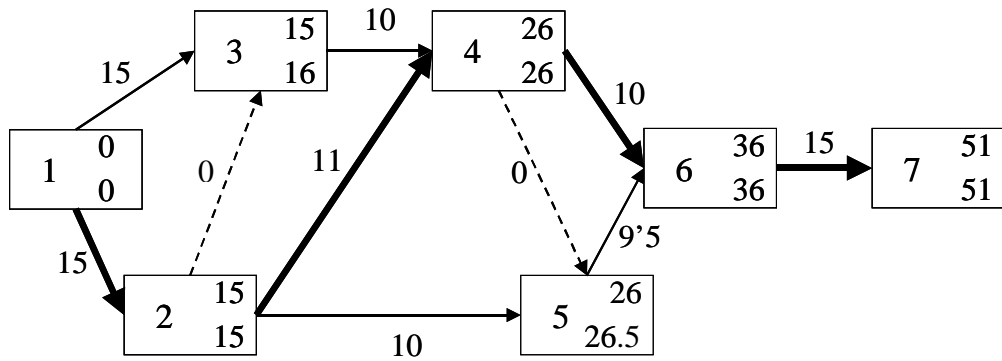
4. Sare honetan proiektu bat osatzen duten ekintzen arteko aurre-erlazioak irudikatuta daude. Ekintza bakoitzarekin bere iraupen baikorra, modala eta ezkorra (egunetan) jasotzen dira.



PERT metodoaren hipotesiak kontuan hartuta, eman bide kritikoa, proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena, proiektuaren iraupenaren bariantza, proiektuaren iraupenak jarraitzen duen banaketa eta ekintzen marjina.

EBAZPENA.

(i,j)	$t_b(i,j)$	$t_m(i,j)$	$t_e(i,j)$	$\bar{t}(i,j)$	$\sigma_{t(i,j)}^2$
(1,2)	10	15	20	15	2.77
(1,3)	9	14	25	15	7.11
(2,3)	0	0	0	0	0
(2,4)	6	10	20	11	5.44
(2,5)	8	9	16	10	1.78
(3,4)	7	10	13	10	1
(4,5)	0	0	0	0	0
(4,6)	4	11	12	10	1.78
(5,6)	5	10	12	9.5	1.36
(6,7)	9	13	29	15	11.111



- Bide kritikoa: (1,2,4,6,7)
- Proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena: 51 egun
- Proiektuaren iraupenaren bariantza: 21.11
- Proiektuaren iraupena (T) aldagaiaren banaketa: $N(51, 21.11)$
- Marjinak:

(i,j)	$\bar{t}(i,j)$	Q(j)	P(i)	M(i,j)
(1,2)	15	15	0	0
(1,3)	15	16	0	1
(2,3)	0	16	15	1
(2,4)	11	26	15	0
(2,5)	10	26.5	15	1.5
(3,4)	10	26	26	1
(4,5)	0	26.5	26	0.5
(4,6)	10	36	26	0
(5,6)	9.5	36	26	0.5
(6,7)	15	51	36	0

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)
2004ko iraila

1. a) Adartze eta bornatze metodoa erabiliz, programazio lineal osoko problema hau ebatzi

$$\begin{array}{l} \max(10x_1 + 15x_2) \\ \text{m.} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{cases} \end{array}$$

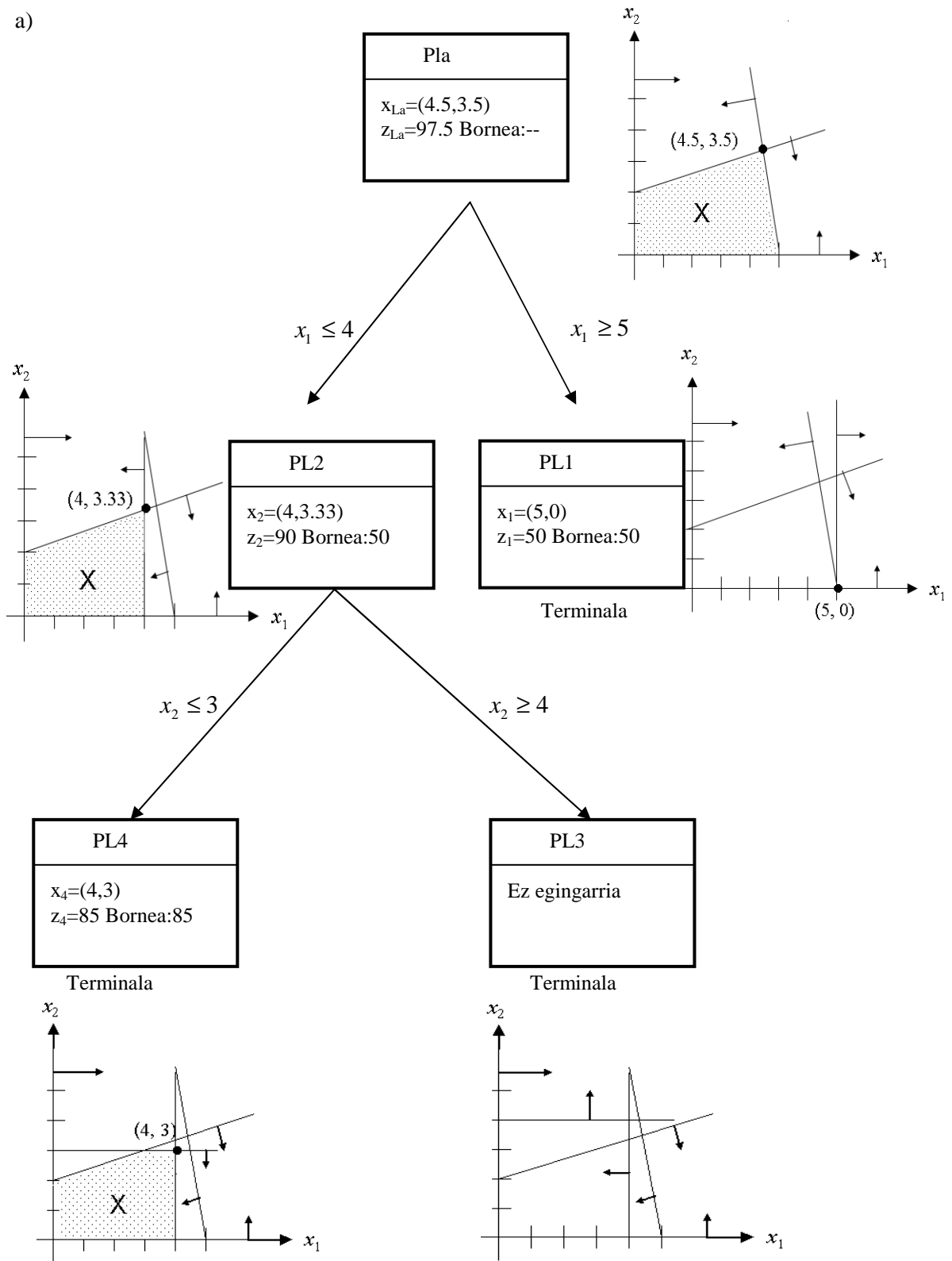
b) Aurreko atala kontuan izanik programazio lineal osoko hurrengo problema ebatzi

$$\begin{array}{l} \max(10x_1 + 15x_2 - 5z) \\ \text{m.} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ 10x_1 + x_2 \leq Mz \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \\ z = 0 \text{ edo } 1 \end{cases} \end{array}$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

EBAZPENA.

a)



Soluzio hoberena: (4,3). Balio hoberena: 85.

b) $z = 0$ eta $z = 1$ balioak bereizten ditugu eta balio hoberenarekin geratzeko emaitzak konparatzen ditugu.

$z = 1$: kasu honetan $10x_1 + x_2 \leq M$ murrizketa soberan dago, (x_1, x_2) puntu guztiek betetzen dutelako. Gainera, $\max(10x_1 + 15x_2 - 5)$ eta $\max(10x_1 + 15x_2)$ helburu funtzioak baliokideak dira (soluzio hoberen bera dute). Beraz, problema hori (b atalarena) $z = 1$ denean a) atalarena bezalakoa da eta bere soluzio hobereana $(4, 3)$ da, 80 balio hoberenarekin.

$z = 0$: b) atalaren problemaren soluzio egingarri bakarra $z = 0$ denean $(0, 0)$ puntua da. Beraz, soluzio hobereana da, 0 balio hoberenarekin.

Ondorioa: aurreko bi posibilitateak konparatuz, hobereana $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $z = 1$ puntua da, 80 balio hoberenarekin.

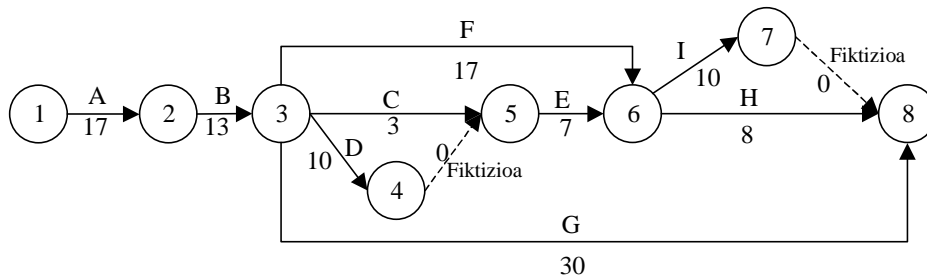
2. Har dezagun 9 ekintza dituen proiektu bat. Taula honetan jasotzen dira proiektuaren ekintzak, ekintzen iraupena eta ekintza bakoitzaren berehalako aurreko ekintzak.

Ekintza	Berehalako aurrekoak	Iraupena (egun)
A	--	17
B	A	13
C	B	3
D	B	10
E	D, C	7
F	B	17
G	B	30
H	E, F	8
I	E, F	10

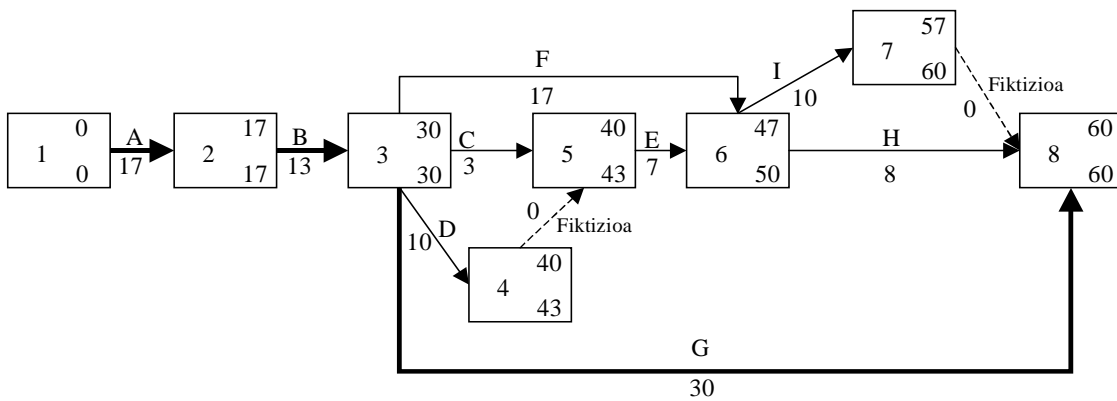
- Proiektua irudikatuko duen sarea eraiki.
- Proiektuaren aurreikusitako iraupen denbora eta bide kritikoa kalkulatu.
- Zein da I ekintza hasi daitekeen azkenengo eguna, proiektuaren aurreikusitako iraupena atzeratu gabe? Zein da D ekintza bukatu daitekeen egunik goiztiarrena?
- G ekintzaren iraupena 30 izan beharrean 28 balitz, bide kritikoa aldatuko litzateke? Erantzuna arrazoitu.

EBAZPENA.

a)



b)



Proiektuaren aurreikusitako iraupen denbora: 60 egun

Bide kritikoa: (1, 2, 3, 8)

c) $HDB(I) = HDB(6,7) = BDB(6,7) - t(6,7) = Q(7) - t(6,7) = 60 - 10 = 50$

$BDG(D) = BDG(3,4) = HDG(3,4) + t(3,4) = P(3) + t(3,4) = 30 + 10 = 40$

d) $P(8) = \max\{P(7) + t(7,8), P(6) + t(6,8), P(3) + t(3,8)\} = \max\{57, 55, 58\} = 58$

G ((3,8)) ekintzaren iraupena 28 izanik, bide kritikoa ez da aldatzen: (1,2,3,8) da orain ere.

Proiektuaren aurreikusitako iraupen denbora berria 58 izango da.

3. Formulatu, ebatzi gabe, problema hau: Elektronika enpresa batek audioak eta bideoak fabrikatzen ditu. Unitateko mozkina 60 euro audio bakoitzeko eta 120 euro bideo bakoitzekoa da. Enpresak bi aparatuetako kitak jasotzen ditu eta horiek muntatu eta ondo dabilzan kontrolatu behar du. Aparatu bakoitzak muntatu eta kontrolatzeko behar dituen denborak eta asteko erabilgarria den denbora taula honetan azaltzen dira (ordutan):

	Muntaketa	Kontrola
Audio	6	1
Bideo	8	2
Denbora erabilgarria	300	80

Bi lanetan ordu estrak egitea posible izango da, muntaketako ordu estra bakoitzaren kostua 12 euro eta kontrolekoa 15 euro izanik. Bi produktuen kalitatea eta prezioa dela eta, konpainiak salmenta ziurtatua dagoela uste du. Enpresak helmuga hauek lehentasun orden honekin ezarri ditu:

- i. Bi lanetan erabili gabeko denbora minimoa izatea nahi du.
- ii. Gutxienez 4200euroko mozkina lortu nahi du.
- iii. Denbora estra totala minimizatu nahi du.

EBAZPENA.

Aldagaiak: x_1 = Ekoizten diren audio kopurua.

x_2 = Ekoizten diren bideo kopurua.

Eredua:

$$\begin{aligned} & \min L(y_1^-, y_2^+, y_3^-, y_1^+, y_2^+) \\ & \begin{cases} 6x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 300 \\ x_1 + 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 80 \\ 60x_1 + 120x_2 - 12y_1^+ - 15y_2^+ - y_3^+ + y_3^- = 4200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Hiru kokapen posible ditugu, horietako bakoitzean gehienez fabrika industrial bat kokatzeko. Kokapenaren arabera, fabrika eraikitzeak kostu finko bat du, eta eskari maximo bat bete dezake. Taulan honetan eraikuntza kostuak eta eskari maximoa ikus ditzakegu:

Kokapena	1	2	3
Eraikuntza kostua	10	14	13
Eskari maximoa	20	30	45

Lau bezero ditugu, A , B , C eta D , bezero bakoitzak eskaera jakin bat du eta eskaera hau osorik fabrika bakar batean zerbitzatua izan behar da. Eskaerak eta fabrika bakoitzetik unitate bat zerbitzatzearen mozkin taula honetan jasotzen da:

Bezera	A	B	C	D
Eskaera	15	15	10	15
1 kokapena	6	4	5	4
2 kokapena	3	3	5	1
3 kokapena	1	5	2	4

- a) Programazio lineal osoko problema bat bezala modelizatu eraiki beharreko fabrikak eta fabrika bakoitzak zein bezeroren eskaria bete behar duen zehazteko, mozkin ken kostuak maximizatuz.
- b) Demagun hiru fabrikak eraikitzea erabakitzen dela eta hirurak erabiliak izan behar direla, hungariar metodoa erabiliz, adierazi bezero bakoitza zein kokapenetan atendituko den, eskaera osoa fabrika bakar batek zerbitzatua izan behar dela jakinik, mozkin maximoa lortzeko.

EBAZPENA.

- a) Aldagaiak definitzen ditugu:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & i \text{ kokapenari } j \text{ bezera esleitu} \\ 0 & \text{beste kasuan} \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\} \text{ eta } j \in \{A, B, C, D\}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{fabrika } i \text{ kokapenean eraikitzen bada} \\ 0 & \text{beste kasuan} \end{cases}$$

Beraz:

$$\max \left[\begin{aligned} &15(6x_{1A} + 3x_{2A} + x_{3A}) + 15(4x_{1B} + 3x_{2B} + 5x_{3B}) + 10(5x_{1C} + 5x_{2C} + 2x_{3C}) + \\ &+ 15(4x_{1D} + x_{2D} + 4x_{4D}) - (10y_1 + 14y_2 + 13y_3) \end{aligned} \right]$$

$$\text{m.} \begin{cases} x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = 1 \quad (j = A, B, C, D) \\ 15x_{1A} + 15x_{1B} + 10x_{1C} + 15x_{1D} \leq 20y_1 \\ 15x_{2A} + 15x_{2B} + 10x_{2C} + 15x_{2D} \leq 30y_2 \\ 15x_{3A} + 15x_{3B} + 10x_{3C} + 15x_{3D} \leq 45y_3 \\ x_{ij} = 0 \text{ edo } 1 \quad (i = 1, 2, 3 \text{ eta } j = A, B, C, D) \\ y_i = 0 \text{ edo } 1 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

b)

	A	B	C	D	F1	F2
K1	-90	-60	-50	-60	M	M
K2	-45	-45	-50	-15	M	M
K2	-45	-45	-50	-15	0	0
K3	-15	-75	-20	-60	0	0
K3	-15	-75	-20	-60	0	0
K3	-15	-75	-20	-60	0	0

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 +90 +75 +50 +60

	A	B	C	D	F1	F2
K1	0	15	0	0	M	M
K2	45	30	0	45	M	M
K2	45	30	0	45	0	0
K3	75	0	30	0	0	0
K3	75	0	30	0	0	0
K3	75	0	30	0	0	0

Esleipen hoberena:

K1 → A

K2 → C

K3 → B eta D

Mozkin maximoa (eraikuntza kostua kontuan hartu gabe): $90 + 50 + 75 + 60 = 275$

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2005eko ekaina

1. Jostailu enpresa batek hiru jostailu modelo berri (1, 2 eta 3) garatu ditu hurrengo gabonetako kanpainan sartu ahal izateko. Jostailu berri horiek ekoizteko instalazioen prestaketa kostua 25000 €, 35000 € eta 30000 € dira 1, 2 eta 3 modeloentzako, hurrenez hurren, eta unitateko mozkinak 10 €, 15 € eta 13 €, hurrenez hurren. Enpresak 3 fabrikaduzka modelo hauek ekoizteko, baina gastuak saihesteko jostailuak fabrika bakar batean ekoiztuko dira, aukeraketa mozkinen maximizazioarekin egingo delarik.

Jostailu modelo bakoitzak fabrika bakoitzean behar duen ordu kopurua hau da:

	1 modeloa	2 modeloa	3 modeloa
1 fabrika	5	4	6
2 fabrika	4	2	2
3 fabrika	3	3	2

Fabriken edukiera 500, 600 eta 630 ordutakoa da, hurrenez hurren. Gerentziak gutxienez modelo bat ekoiztea erabaki du.

- a) Formula ezazu problema, programazio lineal osoa erabiliz, mozkin totala maximizatzeko.
- b) Enpresak soilik 3 modeloa ekoiztea erabaki du, baina 50 unitate baino gehiago ekoiztuz gero, honako hauek hartu beharko ditu kontuan:
- 3 modeloa ekoizteko instalazioen prestaketa kostua 40000€ da
 - 3 fabrikan ekoiztu behar du

Formula ezazu problema, informazio hori erantsita, programazio lineal osoa erabiliz.

EBAZPENA.

- a) Aldagai hauek definituko ditugu:

$x_i = i$ jostailutik ekoiztutako unitateak

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ jostailua ekoizten bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases} \quad i = 1,2,3$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & j \text{ fabrikan ekoizten bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases} \quad j = 1,2,3$$

Eta aldagai horiekin eredu hau idazten dugu:

$$\max(10x_1 - 25000y_1 + 15x_2 - 35000y_2 + 13x_3 - 30000y_3)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

$$x_i \leq My_i \quad i=1,2,3$$

$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 500 + M(1 - z_1)$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 + M(1 - z_2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 630 + M(1 - z_3)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

$$x_i \geq 0 \text{ eta osoak } i=1,2,3$$

$$y_i = 0,1 \quad i=1,2,3$$

$$z_j = 0,1 \quad j=1,2,3$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

b) Egoera berri hau jasotzeko aldagai berri bat definituko dugu:

$$p = \begin{cases} 1 & x_3 \geq 51 \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

Eta eredu:

$$\max(13x_3 - 30000(1 - p) - 40000p)$$

$$51p \leq x_3 \leq 50 + Mp$$

$$p \leq z_3$$

$$6x_3 \leq 500 + M(1 - z_1)$$

$$2x_3 \leq 600 + M(1 - z_2)$$

$$2x_3 \leq 630 + M(1 - z_3)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

$$x_3 \geq 0 \text{ eta osoa}$$

$$p = 0,1$$

$$z_i = 0,1 \quad i=1,2,3$$

non M zenbaki positibo eta nahi adina handia den.

2. Okindegi batean bi ogi mota berri ekoiztu nahi dira: irin osokoa eta zekale-ogia, euren ekoizpenaren salmenta ziurtatuta baitago. Ogi horiek oinarritzko osagai hauekin egiten dira: osoko zahia, gari-irina eta zekale-irina. Irin osoko ogi 1 kg egiteko 350 g osoko zahia eta 150 g gari-irin behar dira, eta zekale-ogia 1 kg egiteko 250 g gari-irin eta 250 g zekale-irin. Osoko zahiaren erabilgarritasuna 210 kg da eguneko, 115 kg gari-irinarena eta 100 kg zekale-irinarena. Ogi kg bakoitzak utzitako mozkina 0.40 € da irin osoko ogiarentzat eta 0.60 € zekale-ogiarentzat.

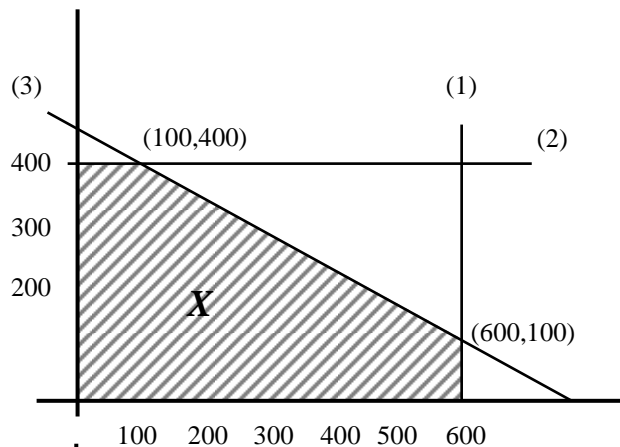
Kalkulatu eguneko irin osoko eta zekale-ogia ekoizpena helmuga hauek lehenetsun orden honekin hartuta:

1. lehenetsuna: Eguneko mozkina gutxienez 240 €-koa izatea nahi da.
2. lehenetsuna: Eguneko irin osoko ogiaren ekoizpena gutxienez zekale-ogia ekoizpenaren bikoitza izatea nahi da.
3. lehenetsuna: Eguneko zekale-ogia ekoizpena 300 kg baino txikiagoa ez izatea nahi da. Ezarritako helmugetatik zeintzuk bete dira?

EBAZPENA.

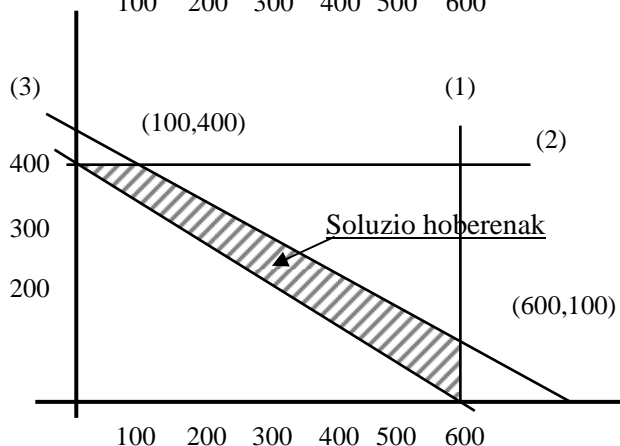
Aldagaiak x_1 : irin osoko ogi kantitatea kg-tan; x_2 : zekale-ogia ogi kantitatea kg-tan

$$\begin{cases} \min L(y_1, y_2, y_3) \\ 0.35x_1 \leq 210 & (1) \\ 0.25x_2 \leq 100 & (2) \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \leq 115 & (3) \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 300 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i=1,2,3 \end{cases}$$



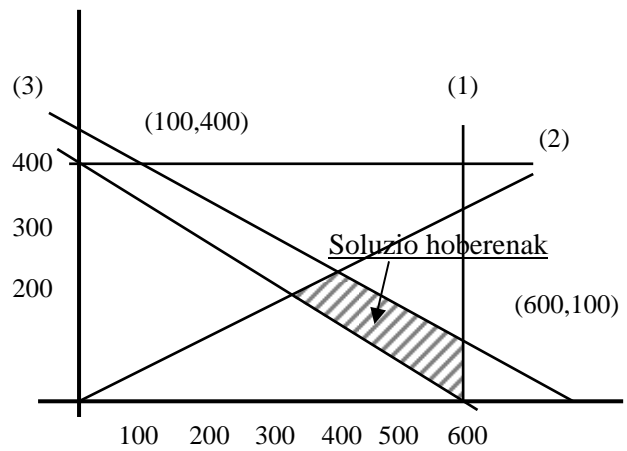
L1

$$\begin{cases} \min (y_1) \\ 0.35x_1 \leq 210 \\ 0.25x_2 \leq 100 \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \leq 115 \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$



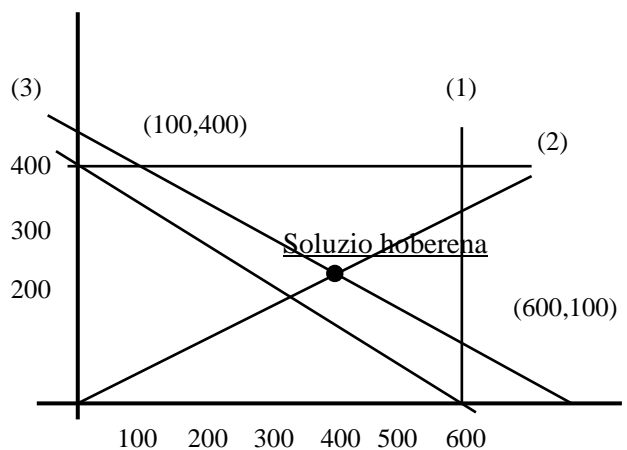
L2

$$\begin{cases} \min(y_2) \\ 0.35x_1 \leq 210 \\ 0.25x_2 \leq 100 \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \leq 115 \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ y_i^- = 0, x_1, x_2, y_1^+, y_2^+, y_2^- \geq 0 \end{cases}$$



L3

$$\begin{cases} \min(y_3) \\ 0.35x_1 \leq 210 \\ 0.25x_2 \leq 100 \\ 0.15x_1 + 0.25x_2 \leq 115 \\ 0.4x_1 + 0.6x_2 - y_1^+ + y_1^- = 240 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 300 \\ y_1^- = y_2^- = 0 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_2^+, y_3^+, y_3^- \geq 0 \end{cases}$$

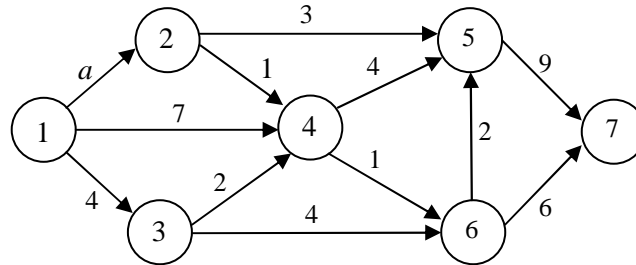


Soluzio hoberena $\left(\frac{4600}{11}, \frac{2300}{11}\right)$ da, $\begin{cases} 0.15x_1 + 0.25x_2 = 115 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ sistema ebatziz lortzen dena. Hau da,

$$x_1 = \frac{4600}{11} \text{ kg irin osoko ogi egunean; } x_2 = \frac{2300}{11} \text{ kg zekale-ogi egunean.}$$

Eguneko mozkinak 240€-ak gaintzen ditu, irin osko ogi kantitatea zekalearenaren bikoitza da, eta zekale-ogiaren kantitatea 209.1 kg eguneko da. Beraz, lehen eta bigarren helmugak betetzen dira, baina hirugarrena ez.

3. Demagun sare hau:



- a) Arkuen balioek distantziak adierazten badituzte, aurkitu, arazoituz, a -ren zein baliotarako 1 korapilotik 7 korapiloraino doan bide laburrena derrigorrean 2 korapilotik pasako den. Eman bide laburrena.
- b) $a = 5$ bada eta arkuen balioek fluxu edukiera adierazten badute, kalkula ezazu 1 korapilotik 7 korapilora doan fluxu maximoaren balioa.

EBAZPENA.

a) 1 korapilotik 7 korapilorainoko bideak:

(1,2,4,5,7) Balioa = $a + 14$

(1,2,4,6,7) Balioa = $a + 8$

(1,2,4,6,5,7) Balioa = $a + 13$

(1,2,3,7) Balioa = $a + 12$

(1, 4,5,7) Balioa = 20

(1,4,6,7) Balioa = 14

(1,4,6,5,7) Balioa = 19

(1,4,3,6,7) Balioa = 19

(1,4,3,6,5,7) Balioa = 24

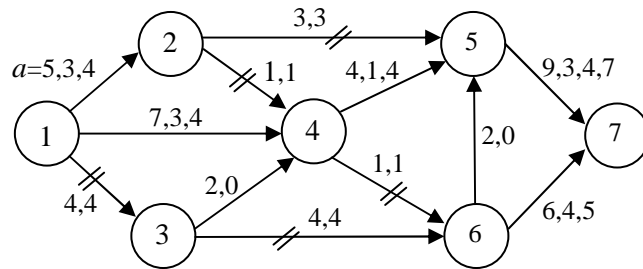
(1,3,6,7) Balioa = 14

(1,3,6,5,7) Balioa = 19

Bide laburrena derrigorrean 2 korapilotik pasa dadin: $a + 8 < 14 \Rightarrow a < 6$

Bide laburrena: (1,2,4,6,7).

b)



Bideak:

- (1,2,4,5,7) $\Delta f = \min \{5, 3, 9\} = 3$. $V = 3$
- (1,2,4,6,7) $\Delta f = \min \{5-3, 1, 4, 9-3\} = 1$. $V = 4$
- (1,2,4,6,5,7) $\Delta f = \min \{4, 4, 6\} = 4$. $V = 8$
- (1,2,3,7) $\Delta f = \min \{7, 4-3, 9-4\} = 3$. $V = 11$
- (1, 4,5,7) $\Delta f = \min \{7-3, 1, 6-4\} = 1$. $V = 12$

Fluxu maximoaren balioa 12 da.

4. Demagun 11 ekintzez osaturiko proiektua dugula. Taula honek ekintza horiek, euren iraupena (egunetan) eta berehalako aurrekoak jasotzen ditu:

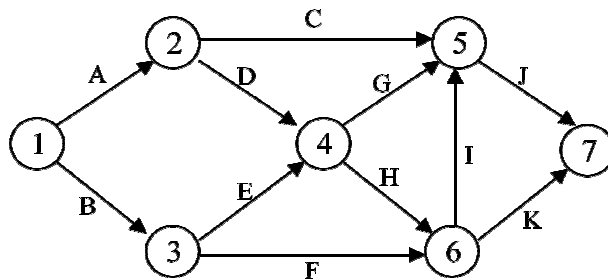
Ekintza	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	2	--
B	2	--
C	6	A
D	Td	A
E	1	B
F	2	B
G	4	D, E
H	Th	D, E
I	2	F, H
J	2	G, I, C
K	3	F, H

a) Eraiki proiektua irudikatzen duen sarea.

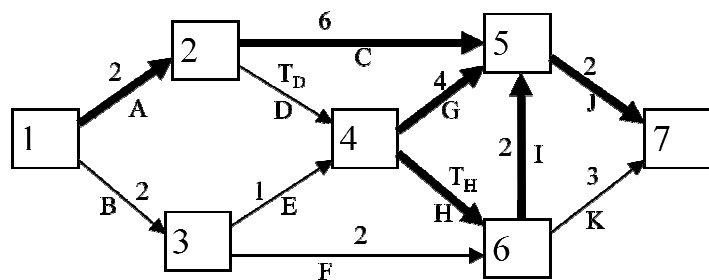
- b) Proiektuaren ekintza kritikoak A, C, D, G, H, I eta J direla jakinik, kalkula ezazu aldez aurretik pentsatutako proiektuaren iraupena, bide kritikoak eta D eta H ekintzen iraupena.
- c) Kalkula ezazu ekintza ez kritikoen marjina.

EBAZPENA.

a)



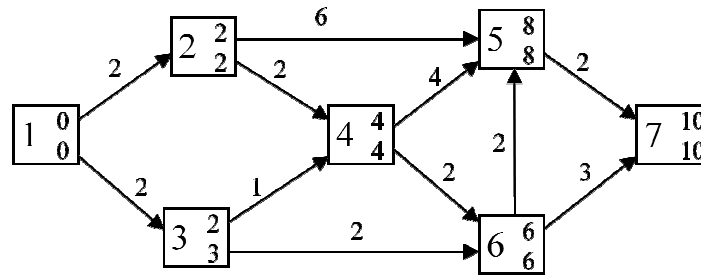
b)



A,C,D,G,H,I eta J ekintza kritikoak dira:

- Bide kritikoak: (1,2,6,7), (1,2,4,6,7), (1,2,4,5,6,7).
- Aldez aurretik pentsatutako proiektuaren iraupena:
(1,2,6,7) bidearen balioa $\rightarrow 2 + 6 + 2 = 10$ egun.
- D ekintzaren iraupena: $2 + T_D + 4 + 2 = 10 \rightarrow T_D = 2$.
- H ekintzaren iraupena: $2 + 2 + T_H + 2 + 2 = 10 \rightarrow T_H = 2$.

c)



- $M(i,j) = BBB(i,j) - HDG(i,j) - t(i,j) = Q(j) - P(i) - t(i,j)$.
- $M(1,3) = 3 - 0 - 2 = 1$ egun.
- $M(3,4) = 4 - 2 - 1 = 1$ egun.
- $M(3,5) = 6 - 2 - 2 = 2$ egun.
- $M(3,6) = 6 - 3 - 2 = 1$ egun.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2005eko iraila

1. Programazio lineal osoko problema hau formulatu (ebatzi gabe): Unibertsitate batek batzorde bat sortu nahi du. Hamar pertsona izendatuak izan dira: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ eta J . Araudiak dio gutxienez emakumezko bat, gizonetzko bat, ikasle bat, administrari bat eta irakasle bat aukeratu behar direla, emakumeen kopurua gizonetzkoenaren berdina izan behar dela eta irakasleen kopurua administrariena baino txikiagoa ez dela izar behar. Izendatuen ezaugarriak hauek dira:

Ezaugarriak	Pertsonak
Emakumeak	A, B, C, D, E
Gizonak	F, G, H, I, J
Ikasleak	A, B, C, J
Administrariak	E, F
Irakasleak	D, G, H, I

Programazio lineal osoko problema formulatu (ebatzi gabe), batzordea osatuko duen pertsona kopurua ahalik eta txikiena izan dadin.

EBAZPENA.

Aldagai hauek definituko ditugu:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{batzordekoa bada} \\ 0 & \text{beste kasuan} \end{cases} \quad i = A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$$

Eta aldagai horiekin eredu hau idazten dugu:

$$\begin{aligned} & \min(x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G + x_H + x_I + x_J) \\ & \begin{cases} x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \geq 1 \\ x_F + x_G + x_H + x_I + x_J \geq 1 \\ x_A + x_B + x_C + x_J \geq 1 \\ x_E + x_F \geq 1 \\ x_D + x_E + x_H + x_I \geq 1 \\ x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = x_F + x_G + x_H + x_I + x_J \\ x_D + x_G + x_H + x_I \geq x_E + x_F \\ x_i = 0,1 \quad i=A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \end{cases} \end{aligned}$$

2. Enpresa bateko langile zuzendariak 5 eginkizun (E1, E2, E3, E4 eta E5) 4 langileei (L1, L2, L3 eta L4) esleitu behar dizkie, aurreko esperientziaren arabera eginiko balorazioa kontuan izanik. Balorazioak taula honetan azaltzen dira (puntuazioa: 0 txarra, 10 bikaina, “-” bateraezintasuna):

	E1	E2	E3	E4	E5
L1	6	8	9	3	7
L2	2	3	-	4	-
L3	5	6	8	9	6
L4	2	3	7	8	6

Gainera, murrizketa hauek kontuan izan behar dira: langileak ezin dira eginkizun gabe gelditu, L2 langileari derrigorrean eginkizun bakar bat esleitu behar zaio eta eginkizunak ezin dira partekatu.

- Programazio lineal osoko problema moduan formulatu.
- Hungariar metodoa erabiliz, soluzio hoberen bat aurkitu.

EBAZPENA.

$$a) \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & E_i \text{ eginkizunari } L_j \text{ langilea esleitu} \\ 0 & \text{beste kasuan} \end{cases} \quad i = 1,2,3,4,5; \quad j=1,2,3,4.$$

$$\begin{aligned} & \max(6x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{21} + x_{22} + x_{24} + \\ & \quad + x_{31} + x_{32} + 9x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{41} + x_{42} + 9x_{43} + x_{44} + x_{45}) \\ & \begin{cases} 1 \leq x_{i1} + x_{i2} + 9x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} \leq 2, & i = 1,3,4. \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1 \\ x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} = 1; & j = 1,2,3,4,5. \\ x_{23} = x_{25} = 1 \\ x_{ij} = 0,1 & i = 1,2,3,4; \quad j = 1,2,3,4,5. \end{cases} \end{aligned}$$

b)

	E1	E2	E3	E4	E5	F1	F2
L1	-6	-8	-9	-3	-7	M	M
L1	-6	-8	-9	-3	-7	0	0
L2	-2	-3	M	-4	M	M	M
L3	-5	-6	-8	-9	-6	M	M
L3	-5	-6	-8	-9	-6	0	0
L4	-2	-3	-7	-8	-6	M	M
L4	-2	-3	-7	-8	-6	0	0

↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 +6 +8 +9 +9 +7

0	0	0	6	0	M	M
0	0	0	6	0	0	0
4	5	M	5	M	M	M
1	2	1	0	1	M	M
1	2	1	0	1	0	0
4	5	2	1	1	M	M
4	5	2	1	1	0	0

← -4

← -1

0	0	0	6	0	M	M
0	0	0	6	0	M	M
0	1	M	1	M	M	M
1	2	1	0	1	M	M
1	2	1	0	1	0	0
3	4	1	0	0	M	M
4	5	2	1	1	0	0

Soluzio hoberena: L1 → E2 eta E3; L2 → E1, L3 → E4, L4 → E5

Balio hoberena: 8 + 9 + 2 + 9 + 6 = 34 puntu.

3. Ebatzi:

$$\begin{aligned}
 & \min L(y_1^+, y_2^-, y_3^-, y_4^-) \\
 \text{m.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 45 \\ y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

EBAZPENA.

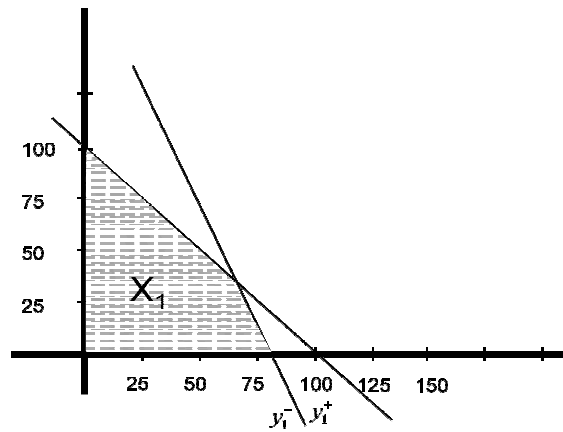
$$\min L(y_1^+, y_2^-, y_3^-, y_4^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 15 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

L1

$$\min(y_1^+)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$

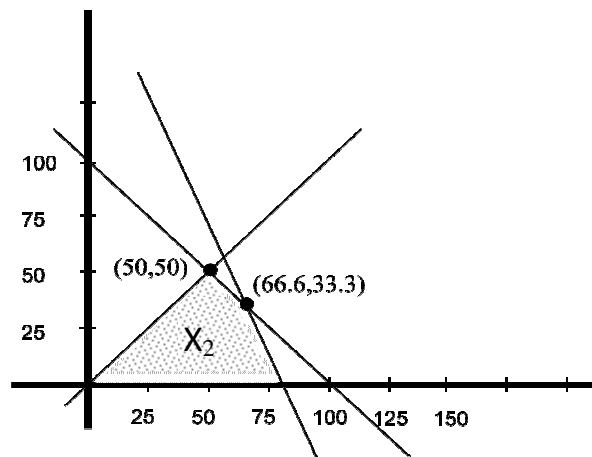


Soluzio hoberenak: X_1 Balio hoberena: 0

L2

$$\min(y_2^-)$$

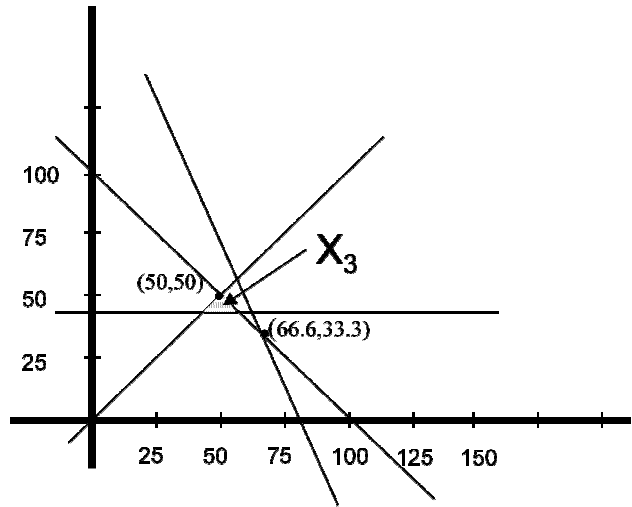
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2 \\ y_1^+ = 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberenak: X_2 Balio hoberena: 0

L3

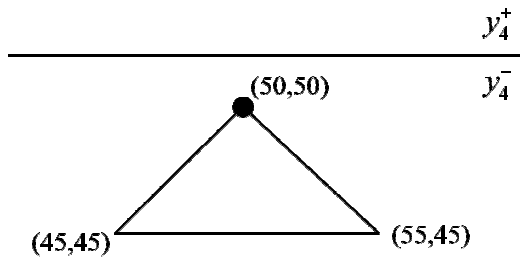
$$\begin{cases} \min(y_3^-) \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ y_1^+ = y_2^- = 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberenak: X_3 Balio hoberena: 0

L4

$$\begin{cases} \min(y_4^-) \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ 20x_1 + 8x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1600 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 15 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ y_1^+ = y_2^- = y_3^- = 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena: (50,50) Balio hoberena: $y_4^- = 10$.

Hasierako problemaren soluzio hoberena eta balio hoberenak:

$$x_1 = 50, x_2 = 50, y_1^+ = y_2^- = y_3^- = 0, y_1^- = 200, y_2^+ = 0, y_3^+ = 5, y_4^- = 10, y_4^+ = 0.$$

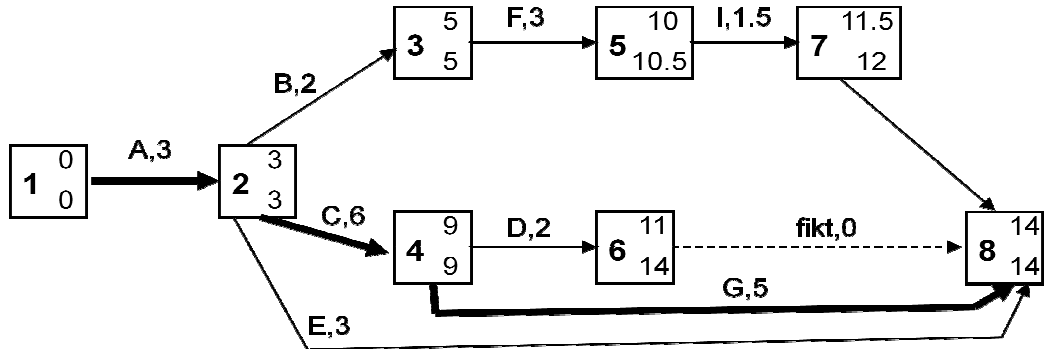
4. Taula honetan proiektu bat osatzen duten ekintzak, horien iraupena eta berehalako aurrekoak azaltzen dira:

Ekintza	Iraupena (egun)	Ekintzen Berehalako Aurrekoak
A	3	-
B	2	A
C	6	A
D	2	C
E	3	A
F	3	B
G	5	C
H	1	C
I	1.5	F, H
J	2	I

- a) Proiektua irudikatzen duen sarea eraiki eta aldez aurretik pentsatutako proiektuaren iraupena aurkitu.
- b) Proiektuaren ekintzen taula eraiki.
- c) Galdera hauek erantzun:
 - i. Zer gertatuko litzateke proiektuaren iraupenarekin, lehenengo ekintza 2 egunetan atzeratuz gero?
 - ii. Zenbat egunetan atzera daiteke D ekintza, proiektuaren aldez aurretik pentsatutako iraupena aldatu gabe?
 - iii. Zein izan beharko litzateke B ekintzaren iraupena, B kritikoa izateko beste ekintzen iraupena finko mantenduz?

EBAZPENA.

a)



Aldez aurretik pentsatutako proiektuaren iraupena 14 egun dira.

b)

(i,j)	t(i,j)	HDG(i,j)	BDB(i,j)	M(i,j)
A(1,2)	3	0	3	0*
B(2,3)	2	3	7.5	2.5
C(2,4)	6	3	9	0*
E(2,8)	3	3	14	8
F(3,5)	3	5	10.5	2.5
H(4,5)	1	9	10.5	0.5
D(4,6)	2	9	14	3
G(4,8)	5	9	14	0*
I(5,7)	1.5	10	12	0.5
fikt(6,8)	0	11	14	3
J(7,8)	2	11.5	14	0.5

Bide kritikoa (1,2,4,8).

- c) i. Proiektuaren iraupena 2 egunetan atzeratuko litzateke, A ekintza kritikoa baita.
- ii. D ekintzaren marjina 3 egunekoa da. Beraz, 3 egunetan atzera daiteke D ekintza proiektua atzeratu gabe.
- iii. B-ren marjina 2.5 da eta bere iraupena 2. Beraz, kritikoa izateko bere iraupena 4.5 baino handiagoa edo berdina izan beharko da. (2 + 2.5 = 4.5)

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2006ko ekaina

1. Fabrika batek 4 motatako xaboiak ekoizten ditu. Xaboi horiek ekoizteko 5 osagai behar dira. Taula honetan xaboi-pastilla bat ekoizteko beharrezkoak diren osagaik azaltzen dira.

	olioa	ura	sosa kaustikoa	glizerina	limoi esentzia	marrubi esentzia
X1	250 ml	240 ml	42 gr	1 gr	1 ml	3 ml
X2	200 ml	210 ml	2 gr	40 gr	2 ml	1 ml
X3	230 ml	240 ml	20 gr	25 gr	3 ml	1 ml
X4	180 ml	200 ml	10gr	35 gr	1 ml	3 ml

Fabrikaren edukierak eguneko 150000 ml olio, 160000 ml ur, 12 kg sosa kaustikoa, 3 kg glizerina, 2000 ml limoi esentzia eta 3000 ml marrubi esentzia dira. Egunean gutxienez xaboi mota bat ekoiztu behar da eta gehienez hiru. Gainera, 1 motako xaboiak ekoiztu ezker ezingo dira 4 motakoak ekoiztu.

Xaboi-pastilla mota bakoitzeko mozkinak 10, 13, 15 y 11 euroakoa da, hurrenez hurren.

Fabrika ekoizpen instalazioa handitzea pentsatzen ari da 200000 euroko kostuarekin, jakinik instalazioa handituz gero, edukierak kantitate hauetan handituko direla: 50000 ml olio, 70000 ml ur, 4 kg de sosa kaustikoa, 4 kg glizerina, 1000 ml limoi esentzia eta 500 ml marrubi esentzia. Gainera, instalazioa handitzen bada eta 3 motako xaboi-pastillak ekoizten badira, 1 motako xaboi-pastillak ekoiztuko dira.

Formula ezazu problema programazio lineal osoko problema bezala, mozkinak maximizatuz.

EBAZPENA.

Aldagai hauek definituko ditugu:

$x_i = X_i$ xaboiak ekoiztutako pastillak

$$y_i = \begin{cases} 1 & X_i \text{ pastilla mota ekoizten bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases} \quad i=1, \dots, 4$$

$$\text{eta } z = \begin{cases} 1 & \text{instalazioa handitzen bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

Eta eredu hau:

$$\begin{aligned} & \max(10x_1 + 13x_2 + 15x_3 + 11x_4 - 200000z) \\ & \left\{ \begin{array}{l} 250x_1 + 200x_2 + 230x_3 + 180x_4 \leq 150000 + 50000z \\ 240x_1 + 210x_2 + 240x_3 + 200x_4 \leq 160000 + 70000z \\ 42x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 10x_4 \leq 12000 + 4000z \\ x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 35x_4 \leq 3000 + 4000z \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2000 + 1000z \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 3000 + 500z \\ 1 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3 \\ y_4 \leq 1 - y_1 \\ y_1 \geq y_3 + z - 1 \\ x_i \leq My_i \\ x_i \geq 0 \text{ eta osoak } i = 1, \dots, 4 \\ y_i = 0, 1 \quad i = 1, \dots, 4 \\ z = 0, 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

2. Gozoki fabrika batek bi motatako gozokiak, G1 eta G2, ekoizten ditu. G1 gozoki kilogramo bakoitza 200 eurotan saltzen da eta 100 gr azukre eta 200 gr fruta ditu, eta G2 gozoki kilogramo bakoitza 300 eurotan saltzen da eta 400 gr azukre eta 400 gr fruta ditu. G1-en ekoizpena G2-rena baino handiagoa izan behar da gutxienez 5 kilogramotan, eta fruta kantitatea gutxienez 1600 gr izan behar da.
- Sarrera maximizatu eta azukre kantitatea minimizatzen duten soluzio eraginkorrak aurkitu.
 - Badakigu azukre kilogramo baten murrizketa diru sarreraren 2 euroren murrizketaren baliokide dela. Formulatu, ekoiztu gabe, problema haztatua.
 - Gozokien bilgarrien kostua 0.1 eurotako da G1 gozoki kg bakoitzeko, eta 0.2 G2 gozoki kilogramo bakoitzeko. Diru sarrera maximizatu, azukre kantitatea minimizatu eta bilgarri kostua minimizatzen duen soluzio eraginkor bat aurkitu.

EBAZPENA.

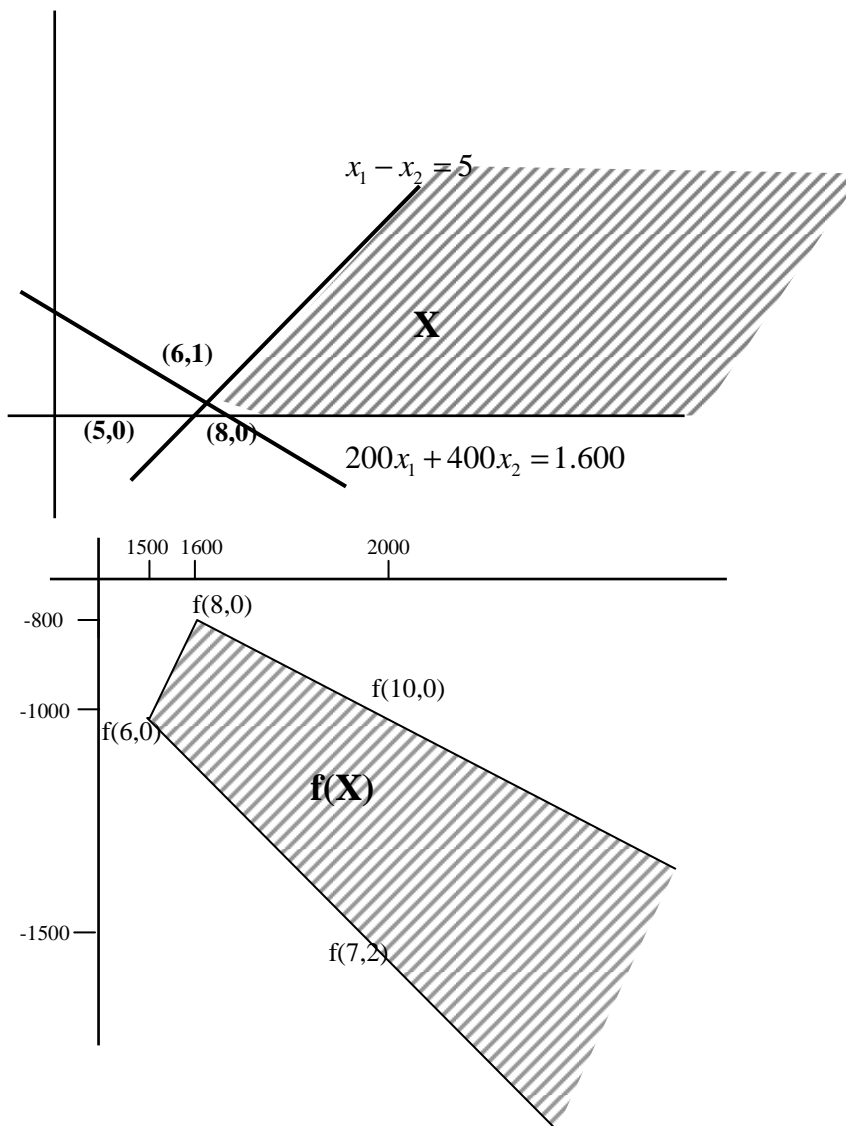
a) Definitutako aldagaiak:

$x_i = G_i$ gozoki kg-ak $i=1,2$

$$\max(200x_1 + 300x_2, -100x_1 - 400x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 5 \\ 200x_1 + 400x_2 \geq 1600 \\ x_i \geq 0 \quad i=1,2 \end{cases}$$

(x_1, x_2)	(z_1, z_2)
(6,1)	(1500, -1000)
(8,0)	(1600, -800)
(7,2)	(2000, -1500)
(10,0)	(2000, -1000)



Soluzio eraginkorrak: $\{(x_1, 0) / x_1 \geq 8\}$, hau da C_1 -etik 8 kg. edo gehiago ekoiztu eta ezer ere ez C_2 -tik.

b)

$$\max(1(200x_1 + 300x_2) + 2(-0.1x_1 - 0.4x_2))$$

$$x \in X$$

c) Zadeh-ren teoremaren arabera funtzioei ponderazio positiboak ematen badizkiogu problema ponderatuaren soluzio hobereana helburuanitzeko problemaren soluzio eraginkorra izango da:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 \text{ eta } \lambda_3 = 1000$$

$$\max(1(200x_1 + 300x_2) + 2(-100x_1 - 400x_2) + 100(-0.1x_1 - 0.2x_2)) = \max(-100x_1 - 700x_2)$$

$$x \in X$$

Problema ponderatuaren soluzio hobereana (8,0) da eta hauxe izango da helburuanitzeko problemaren soluzio eraginkor bat.

3. Margolari ospetsu baten bosgarren mendeurrena dela eta, museo garrantzitsu batek bere 5 lan berriztatzea erabaki du. Horretarako, 3 berriztatze talde kontratatu dira. Talde bakoitzak lan bakoitzarentzat duen berriztatze aurrekontua aurkeztu du, taula honetan jasotzen den bezala, milaka eurotan:

	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
B ₁	600	-	900	-	1200
B ₂	700	900	800	1000	800
B ₃	-	700	1200	900	1000

(non – berriztatze talde horrek ez duela lan hori berriztatuko esan nahi duen).

Lehenengo berriztatze taldea sei pertsonen osatua dago, bigarrena lau pertsonen eta hirugarrena hiru pertsonen. Lan bakoitza berriztatze bi pertsona behar direla jakinik,

- Zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa 5 lanak kostu minimoarekin berriztatze, jakinik lan bakoitza berriztatze talde bakar batek berriztatu behar duela eta hiru taldeek berriztapenean parte hartu behar dutela?
- Jakinik 5 lanen berriztapen kostua oso altua dela, museoko zuzendaritzak hiru lan bakarrik berriztatzea pentsatu du, talde bakoitzari lan bakar bat esleituz. Kostua minimizatzen duten esleipen posible guztiak lortu, hungariar metodoa aplikatuz.

EBAZPENA.

a) Hungariar metodoa taula honetan aplikatuko dugu:

	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅	F
B ₁	600	M	900	M	1200	0
B ₁	600	M	900	M	1200	0
B ₁	600	M	900	M	1200	0
B ₂	700	900	800	1000	800	0
B ₂	700	900	800	1000	800	0
B ₃	M	700	1200	900	1000	M

M zenbaki oso handia eta positiboa izanik.

b) Hungariar metodoa taula honetan aplikatuko dugu:

	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
B ₁	600	M	900	M	1200
B ₂	700	900	800	1000	800
B ₃	M	700	1200	900	1000
F	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0

M zenbaki oso handia eta positiboa izanik.

Eta bi soluzio hoberen hauek lortzen ditugu:

Soluzio hoberena 1:

$B_1 - L_1$

$B_2 - L_3$

$B_3 - L_2$

Soluzio hoberena 2:

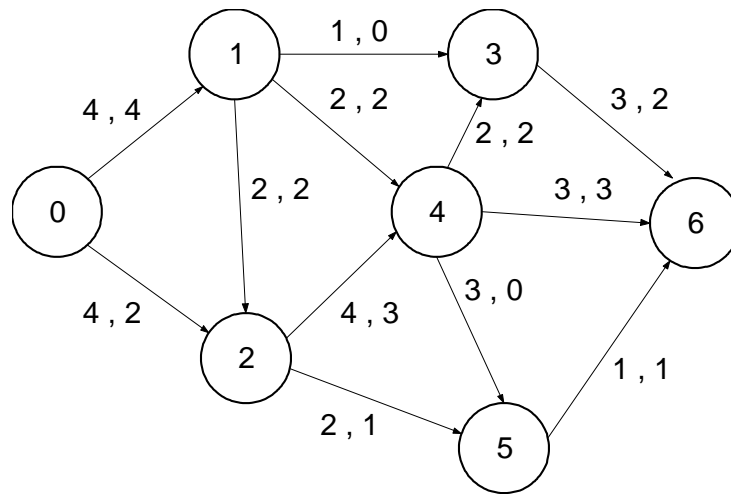
$B_1 - L_1$

$B_2 - L_5$

$B_3 - L_2$

Biak 210000 euroko kostuarekin.

4. Demagun sare hau:



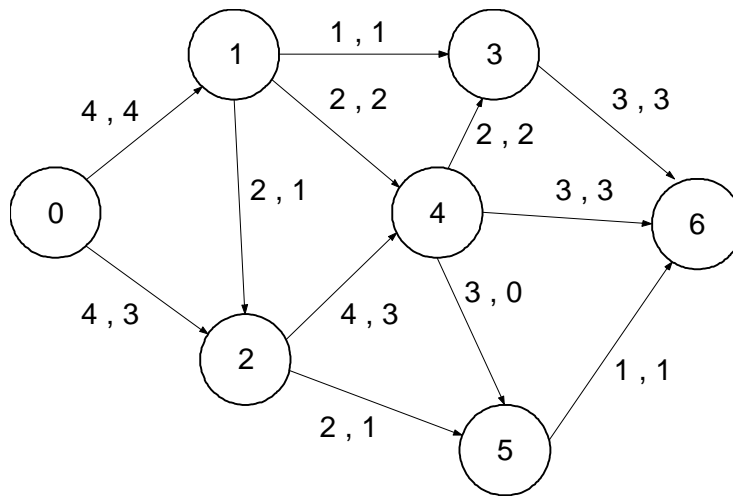
- Eman abiaburutik helburura doan kate bat, bidea ez dena, eta 5 korapilotik pasatzen dena.
- Arkuen balioek edukiera (ezkerreko zenbakia) eta fluxuaren balioa (eskuineko zenbakia) adierazten badute, kalkulatu, posible bada, sare horretan fluxua handitzen duen kate bat (asetu gabea).
- Sareak adierazten duen fluxutik abiatuz, fluxu maximoa lortu.

EBAZPENA.

- Adibidez, (0,2,5,4,6) katea ez da bidea eta 5 korapilotik pasatzen da.
- (0,2,1,3,6) katea ez dago asetua, hau da, arku zuzenak ez daude asetua eta kontuan hartutako alderantzizkoak ez du fluxu nulurik.
- Emandako fluxua kontuan izanik, aurreko atalean asetu gabe dagoen kate bat aurkitu dugu. Fluxuaren balioa kantitate honetan handi daiteke:

$$\Delta = \min\{4-2, 2, 1-0, 3-2\} = 1$$

Kantitate hori arku zuzenei erantsiz eta alderantzizkoari kenduz katea asetuko dugu. Emaitza hau da:



Egoera berri honetan abiaburu-helburu kate guztiak asetuta daude. Horrela, sarea zeharkatzen duen fluxua maximoa da eta bere balioa 7 da.

5. Proiektu plangintzan, ekintza baten hasiera denbora goiztiarrenaren eta bukaera denbora berankorrenaren esanahiak azaldu.

EBAZPENA.

Ekintza baten hasiera denbora goiztiarrenak, ekintza hori hasteko denbora instantarik txikiena jasotzen du, hori bai, bere aurreko guztiak bukatuta daudela ziurtatuta.

Ekintza baten bukaera denbora berankorrenak, ekintza hori bukatzeko denbora instantarik handiena jasotzen du, proiektua aldeztatik aurreikusitako iraupenatik atzeratu gabe.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2006ko iraila

1. Enpresa bat 5 proiektu aztertzen ari da. Onartutako proiektu bakoitza hiru urteko epean burutuko da. Itxarotako urteko errendimenduak, gastuak eta fondo erabilgarriak taula honetan jasotzen dira, milaka eurotan:

Proiektua	Gastuak			Errendimenduak
	1 urtea	2 urtea	3 urtea	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondo erabilgarriak	25	25	25	

Enpresak fondo erabilgarriak kontuan hartuta, eta errendimendu totalak maximizatzeko helburuarekin, proiektuak aukeratu behar ditu. Gainera informazio hau ezagutzen da:

- 3 proiektua ez da egiten, 5 egiten bada.
- 1 eta 2 proiektuak batera egingo dira soilik 4 eta 5 egiten ez badira.
- Enpresak urte batean bere fondoak 5 mila eurotan murriztu behar ditu, eta zein urtetan izango den erabaki behar du.

Formula ezazu problema, ebatzi gabe, programazio lineal osoko problema moduan.

EBAZPENA.

Aldagai hauek definituko ditugu:

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ proiektua burutzen bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases} \quad i=1,\dots,5$$

$$\text{eta } z_j = \begin{cases} 1 & j \text{ urtean fondoa murrizten bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases} \quad j=1,2,3$$

$$\begin{aligned} & \max(20y_1 + 40y_2 + 20y_3 + 15y_4 + 30y_5) \\ & \begin{cases} 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 7y_4 + 8y_5 \leq 25 - 5z_1 \\ y_1 + 7y_2 + 9y_3 + 4y_4 + 6y_5 \leq 25 - 5z_2 \\ 8y_1 + 10y_2 + 2y_3 + y_4 + 10y_5 \leq 25 - 5z_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ y_3 \leq 1 - y_5 \\ y_4 + y_5 \leq 4 - 2(y_1 + y_2) \\ y_i = 0,1 \quad i = 1, \dots, 5 \\ z_j = 0,1 \quad j = 1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Enpresa batek bi ekoizpen kate ditu artikulu bakarra ekoizteko. 1 katean orduko 2 unitate ekoizten dira unitateko 3000 €-ko mozkinarekin. 2 katean beriz, orduko 3 unitate ekoizten dira unitateko 3000 €-ko mozkinarekin. Unitate baten biltegiratzekostua 10 €-koa da.

Kalkulatu kate bakoitzaren ekoizpen orduak, enpresak helmuga eta helburu hauek lehentasun orden konekin kontuan hartzen baditu:

- 1. lehentasuna: gutxienez 30000 unitate ekoiztu nahi dira.
- 2. lehentasuna: biltegiratze kostuak 450000 € ez gänditzea nahi da.
- 3. lehentasuna: 1 katearen ekoizpen orduak gutxienez 2 katean bezain beste izatea nahi da, baina bider hiru izatera iritsi gabe.
- 4. lehentasuna: mozkina maximizatu nahi da.

EBAZPENA.

Aldagai hauek definitzen ditugu:

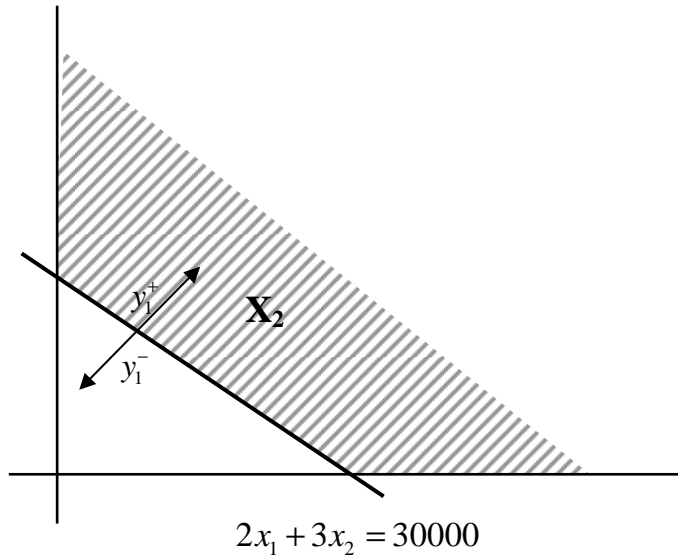
$x_1=1$ katearen ekoizpen orduak

$x_2=2$ katearen ekoizpen orduak

$$\begin{aligned} & \min L(y_1^-, y_2^+, y_3^-, y_4^+, -6000x_1 - 9000x_2) \\ & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 \\ 20x_1 + 30x_2 - y_2^+ + y_2^- = 450000 \\ x_1 - x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1 - 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

L1

$$\begin{cases} \min y_1^- \\ 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$

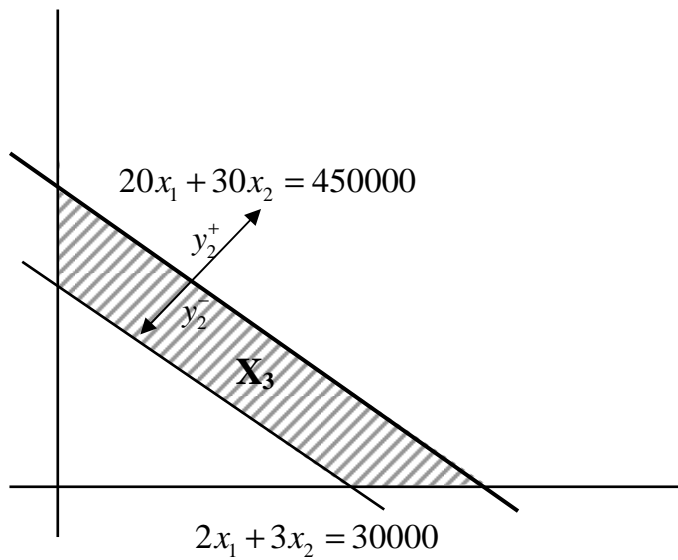


Soluzio hoberenak: \mathbf{X}_2

Balio hoberena: 0

L2

$$\begin{cases} \min y_2^+ \\ 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 \\ y_1^- = 0 \\ 20x_1 + 30x_2 - y_2^+ + y_2^- = 450000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i=1,2 \end{cases}$$

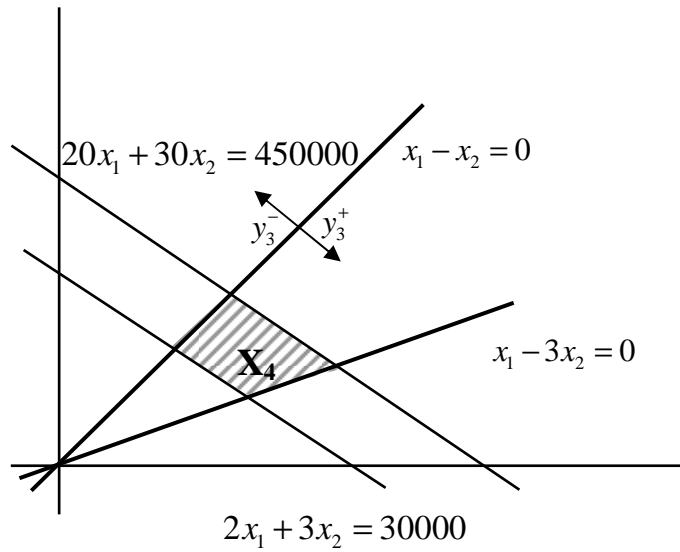


Soluzio hoberenak: \mathbf{X}_3

Balio hoberena: 0

L3

$$\begin{cases} \min(y_3^- + y_4^+) \\ 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 \\ y_1^- = 0 \\ 20x_1 + 30x_2 - y_2^+ + y_2^- = 450000 \\ y_2^+ = 0 \\ x_1 - x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1 - 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i=1, \dots, 4 \end{cases}$$

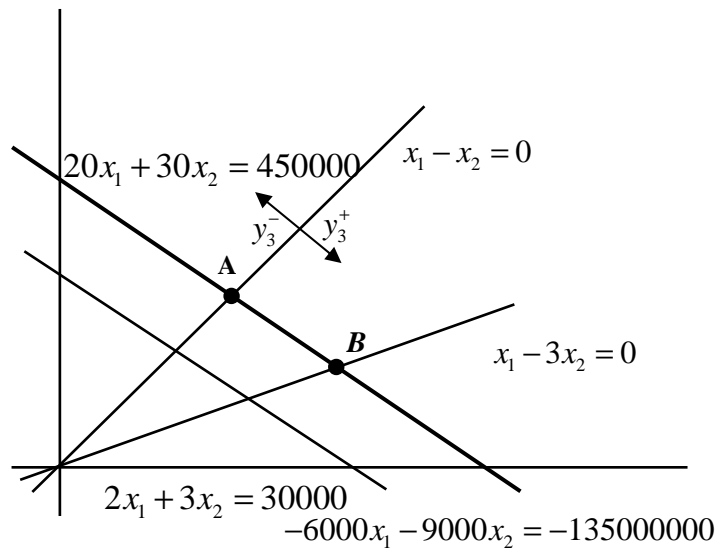


Soluzio hoberenak: X_4

Balio hoberena: 0

L4

$$\begin{cases} \min(-6000x_1 - 9000x_2) \\ 2x_1 + 3x_2 - y_1^+ + y_1^- = 30000 \\ y_1^- = 0 \\ 20x_1 + 30x_2 - y_2^+ + y_2^- = 450000 \\ y_2^+ = 0 \\ x_1 - x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1 - 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 0 \\ y_3^- + y_4^+ = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i=1, \dots, 4 \end{cases}$$



Soluzio hoberenak: $AB = (9000, 9000), (15000, 5000)$

Balio hoberena: 135000 €

3. Lokal bateko jabea alokatze kontratuen epeak aztertzen ari da. Taula honek itxarotako utilitatearen kalkulua jasotzen du, ehundaka eurotan, i urtearen hasieran alokatzen badu j urtearen hasieraraino.

$i \backslash j$	2	3	4	5
1	12	22	38	40
2	-	13	20	29
3	-	-	10	19
4	-	-	-	12

Jabeak, hurrengo lau urteetan, lokala noiz eta zenbat urtetako alokatuko duen erabaki nahi du, helburua itxarotako utilitate totala maximizatzea izanik.

EBAZPENA.

Urte horietan utilitatea maximizatzeko zenbat aldiz alokatuko duen lortzeko bide luzeenaren metodoa erabiliko dugu:

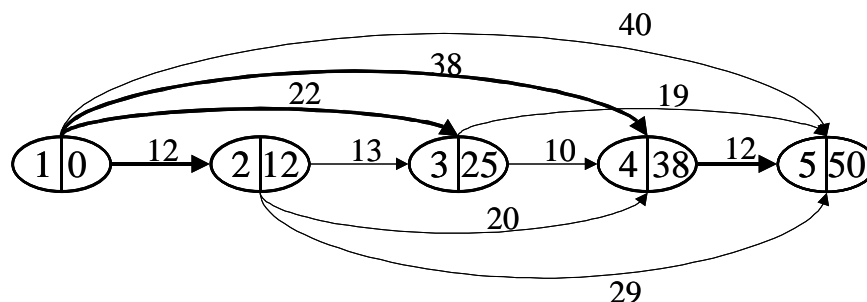
$$d(1) = 0$$

$$d(2) = d(1) + 12 = 12$$

$$d(3) = \max\{d(1) + d(1,3), d(2) + d(2,3)\} = \max\{0 + 22, 12 + 12\} = 25$$

$$d(4) = \max\{d(1) + d(1,4), d(2) + d(2,4), d(3) + d(3,4)\} = \max\{0 + 38, 12 + 20, 25 + 10\} = 38$$

$$d(5) = \max\{d(1) + d(1,5), d(2) + d(2,5), d(3) + d(3,5), d(4) + d(4,5)\} = \\ = \max\{0 + 40, 12 + 29, 25 + 19, 38 + 12\} = 50$$



Horrela, lortuko duen utilitate maximoa 5000 euro izango da eta hurrengo moduan alokatuko du lokala: lehenengo urtearen hasieratik laugarrenaren hasierara arte eta gero laugarrenaren hasieratik bukaeraraino.

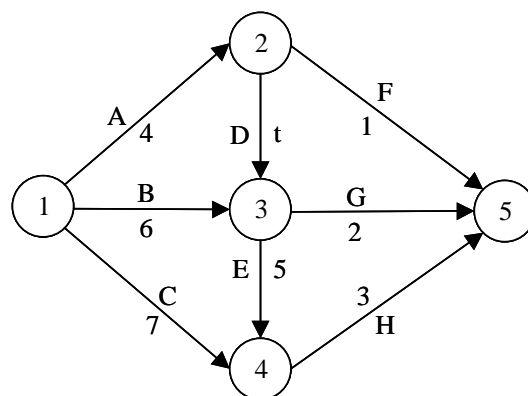
4. Taula honetan proiektua osatzen duten ekintzak, horien arteko aurre erlazioak eta iraupena jasotzen dira:

Ekintza	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	4 egun	-
B	6 egun	-
C	7 egun	-
D	t egun	A
E	5 egun	B, D
F	1 egun	A
G	2 egun	B, D
H	3 egun	C, E

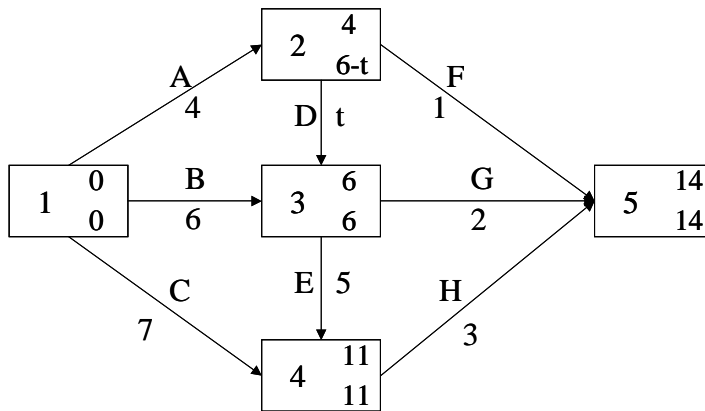
- a) Eraiki proiektua irudikatuko duen sarea.
- b) Zein izango da proiektuaren iraupena, D ekintzaren iraupena 2 egun baino txikiagoa bada? Eraiki proiektuaren ekintzen taula, ekintza kritikoak adieraziz.
- c) D ekintza $\frac{1}{2}$ egun arte atzera daiteke proiektuaren iraupena aldatu gabe. Zein da D ekintzaren iraupena?

EBAZPENA.

- a)



b)



Ekintzen taula:

Ekintza	(i,j)	t(i,j)	Q(j) BDB(i,j)	P(i) HDG(L,j)	M(i,j) Q(j) - P(i) - t(i,j)
A	(1,2)	4	6-t	0	2-t
B	(1,3)	6	6	0	0*
C	(1,4)	7	11	0	4
D	(2,3)	t	6	4	2-t
E	(3,4)	5	11	6	0*
F	(2,5)	1	14	4	9
G	(3,5)	2	14	6	6
H	(4,5)	3	14	11	0*

Ekintza kritikoak : B, E eta H

Proiektuaren aurreikusitako iraupena: 14 egun

c) $M(D) = M(2,3) = 2 - t = 0.5 \leftrightarrow t = 1.5$, hau da , D ekintzaren iraupena 1.5 egunekoa da.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL)

2007ko ekaina

1. P1, P2, P3 produktuak egiten dituen enpresari batek mozkinak maximizatzen dituen eguneko ekoizpena aurkitu nahi du. Lau makina ditu, eta horietako bitan prozesatzen dira produktuak, baina ez edozein bitan: A eta B-n, edo C eta D-n. A, B, C eta D makinak martxan jartzeko kostua 20, 25, 35 eta 15 m.u.-koa da, hurrenez hurren. P1 unitate bakoitzaren sarrera 5 m.u.-koa da, P2 bakoitzarena 5 m.u.-koa eta P3 bakoitzarena 10 m.u.-koa. Unitate bakoitzeko ordu kopurua makina bakoitzean taula honetan agertzen da:

	A makina	B makina	C makina	D makina
P1	1	1	2	1
P2	1	1	1	2
P3	2	1	1	1

Makina bakoitzak egunean erabil dezakeen ordu kopurua 190, 210, 170 eta 200 da, hurrenez hurren.

- a) Formula ezazu problema P.L.O. erabiliz, eguneko mozkin totala maximizatzeko.
- b) Formula ezazu problema P.L.O. erabiliz, baldintza hau eransten badiogu: P1 egiten bada, orduan gutxienez 10 unitate P1 egin behar dira, gehienez 20 unitate P2 eta gehienez 5 unitate P3.

EBAZPENA.

- a) Aldagaiak: x_i : P_i unitate kopurua, $i=1,2,3$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{A eta B makinak erabiltzen badira} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{C eta D makinak erabiltzen badira} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$$

Helburu funtzioa: $\max [5x_1 + 5x_2 + 10x_3 - [(20+25)y_1 + (35+15)y_2]]$

Murrizketak: $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 190 + M(1-y_1)$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 210 + M(1-y_1)$

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 170 + M(1-y_2)$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 200 + M(1-y_2)$

$y_1 + y_2 = 1$

$x_i \geq 0$ eta osoak, $i=1,2,3$

y_1 eta $y_2 = 0$ edo 1

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handian den.

b) Defini dezagun beste aldagai bat: $z = \begin{cases} 1 & P_1 \text{ egiten bada} \\ 0 & \text{bestela} \end{cases}$

Hiru murrizketa hauek erantsi beharko lirateke:

$10z \leq x_1 \leq Mz$

$x_2 \leq 20 + M(1-z)$

$x_3 \leq 5 + M(1-z)$

$z = 0$ edo 1; M nahi dugun bezain handia

2. Bidaia-agentzia bat bidai pakete bat prestatzen ari da C lekurako. Bi abiaburu aireportu daude eta ez dago hegaldi zuzenik. Tarteko konexioak 5 aireportutan egin daitezke. Konexioak egiteko nahiko denbora dagoen aireportuen arteko hegaldietarako, turista motako plaza kopurua hegaldi ezberdinentzako taula honetan agertzen da:

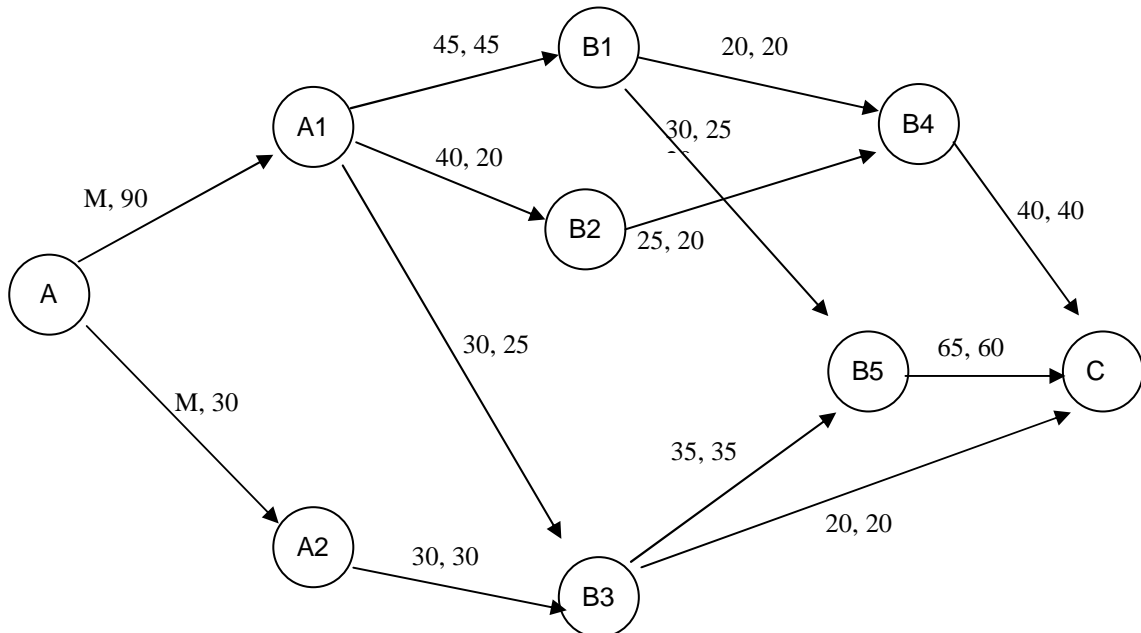
	B1	B2	B3	B4	B5	C
A1	45	40	30	-	-	-
A2	-	-	30	-	-	-
B1	-	-	-	20	30	-
B2	-	-	-	25	-	-
B3	-	-	-	-	35	20
B4	-	-	-	-	-	40
B5	-	-	-	-	-	65

- a) Eraiki dagokion sare bat.
- b) Taula honetan turistak C lekura bidaltzeko planifikazio bat adierazten da:
Zenbat turista joango lirateke C lekura?

	B1	B2	B3	B4	B5	C
A1	45	20	25	-	-	-
A2	-	-	30	-	-	-
B1	-	-	-	20	25	-
B2				20	-	-
B3	-	-	-	-	35	20
B4	-	-	-	-	-	40
B5	-	-	-	-	-	60

Aurreko plazak hartuak daudela kontuan izanik, zenbat turista gehiago bidal daiteke?

EBAZPENA.

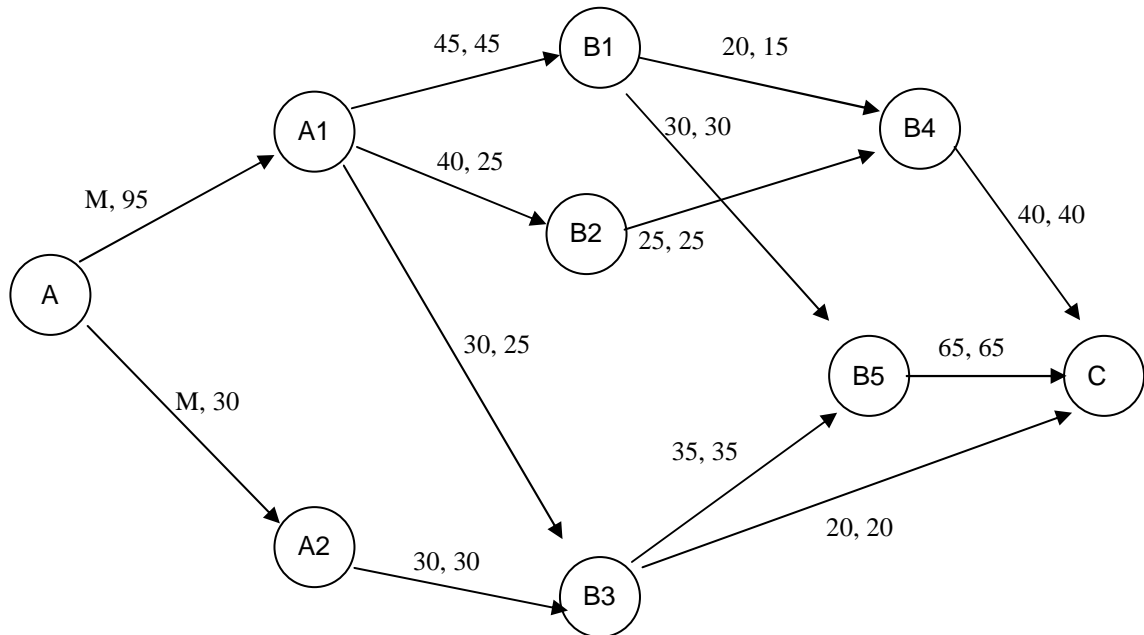


Planifikazio honekin, 120 turista joango lirateke C lekura (fluxua 120 baita)

Aurreko plazak hartuak daudela kontuan izanik, zenbat turista gehiago bidal daiteke? 5.

120 ez da fluxu maximoa, bide guztiak asetuak egon arren badagoelako kate ez asetu bat:

(A, A1, B2, B4, B1, B5, C). $\Delta = \min\{40-20, 25-20, 20, 30-25, 65-60\} = 5$: $F_{\max} = 125$.



3. Enpresa bateko Pertsonal-buruak bere sailean dauden hiru pertsonen oporrak banatu nahi ditu. Esleipen hobereena egiteko asmoarekin, ekain, uztail, abuztu eta irailko bakoitzaren lehentasunekin taula hau osatu du:

	Ekaina	Uztaila	Abuztua	Iraila
P1	5	4	9	--
P2	--	3	6	7
P3	7	5	5	6

Aurten, saileko oinarrizko beharrak bete ahal izateko, Pertsonal-buruak udako hilabeteetan beste sail batetik bere sailera laugarren pertsona bat ekartzea erabaki du.

a) Honako taula honek laugarren pertsonaren lehentasunak adierazten baditu,

	Ekaina	Uztaila	Abuztua
P4	6	--	9

aurkitu guztien lehentasunak hoberenatzen dituen esleipena, bi baldintza hauek kontutan izanik: lauen oporraldia ekainean, uztailean edo abuztuan bete behar da (bakoitzak hilabete osoa) eta hilabete guzti horietan gutxienez pertsona batek oporretan egon behar du.

- b) Laugarren pertsonaren lehentasun bakarra lau hilabetetik hirutan jarraian lan egitea bada, Pertsonal-buruari ez zaio gaizki iruditzen iraila ere sartzea bere planifikazioan. Honela, lauen oporraldia lau hilabeteetan bete behar bada, baina bakoitzarena hilabete desberdin batean, planteatu ezazu Hungariar Metodoa aplikatuko zeniokeen taula, helburua lauen lehentasun maila hoberenatzea izanik.

EBAZPENA.

a)

	E	E	U	U	A	A	
P1	-5	-5	-4	-4	-9	-9	+9
P2	M	M	-3	-3	-6	-6	+6
P3	-7	-7	-5	-5	-5	-5	+7
P4	-6	-6	M	M	-9	-9	+9
F	M	0	M	0	M	0	
F	M	0	M	0	M	0	

	E	E	U	U	A	A
P1	4	4	5	5	0	0
P2	M	M	3	3	0	0
P3	0	0	2	2	2	2
P4	3	3	M	M	0	0
F	M	0	M	0	M	0
F	M	0	M	0	M	0

-2

	E	E	U	U	A	A
P1	4	4	3	5	0	X
P2	M	M	1	3	X	0
P3	0	X	X	2	2	2
P4	3	3	M	M	X	X
F	M	0	M	0	M	X
F	M	0	M	X	M	X

	E	E	U	U	A	A
P1	3	3	2	4	X	0
P2	M	M	0	2	X	X
P3	0	X	X	2	3	3
P4	2	2	M	M	0	X
F	M	X	M	X	M	1
F	M	0	M	X	M	1

Esleipen hobereena: P1 → Abuztua

P2 → Uztailean

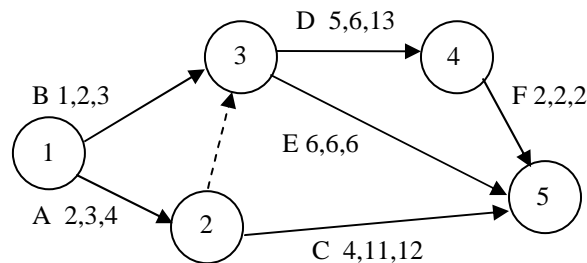
P3 → Ekaina

P4 → Abuztua

b)

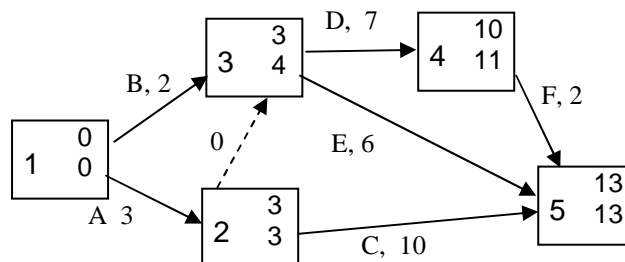
	E	U	A	I
P1	-5	-4	-9	M
P2	M	-3	-6	-7
P3	-7	-5	-5	-6
P4	0	M	M	0

4. Taula honetan adierazita daude proiektu baten ekintzak eta bakoitzaren iraupen baikorra, ezkorra eta modala (egunetan):



- a) Kalkulatu proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora, proiektuaren iraupenaren bariantza eta ekintza kritikoak. Ekintzen taula osatu.
- b) Erantzun galdera hauek (eta azaldu erantzunak):
 - i. Zenbat egunetan labur daiteke C ekintzaren batezbesteko iraupena, proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora kopuru berean laburtzeko?
 - ii. G ekintza berri bat eransten diogu, bere berehalako aurrekoa E delarik. Gehienez zenbat egunekoa izan behar da bere batezbesteko iraupena, (a) atalean kalkulaturako proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora ez aldatzeko?
 - iii. G ekintza berriaren berehalako aurrekoak E eta D badira, gehienez zenbat egunekoa izan behar da bere batezbesteko iraupena, (a) atalean kalkulaturako proiektuarentzako estimatutako batezbesteko iraupen denbora ez aldatzeko? Eraiki proiektu berri horri dagokion sare bat.

EBAZPENA.



a) Proiektuarentzako estimatutako batezbesteko iraupen denbora: 13 egun.

Ekintza kritikoak: (1,2) eta (2,5). Bide kritikoa: (1,2,5)

Bariantza: (1,2,5) bide kritikoan dauden ekintzen bariantzen batuketa:

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_C^2 = \left(\frac{4-2}{6}\right)^2 + \left(\frac{12-4}{6}\right)^2 = \frac{17}{9}$$

Ekintzen taula osatu:

	$\bar{t}(i,j)$	HDG(i,j)	BDB(i,j)	M(i,j)
(1,2)	3	0	3	0
(1,3)	2	0	4	2
(2,3)	0	3	4	1
(2,5)	10	3	13	0
(3,4)	7	3	11	1
(3,5)	6	3	13	4
(4,5)	2	10	13	1

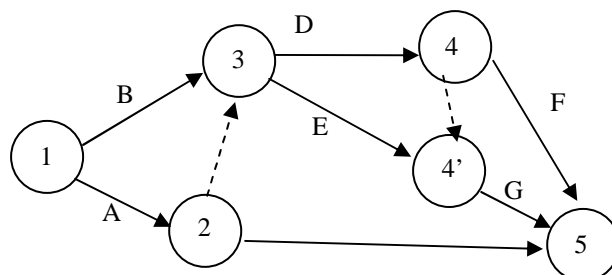
b) i) Zenbat egunetan labur daiteke C ekintzaren batezbesteko iraupena proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora kopuru berean laburtzeko?

Egun bat. Horrela, proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena ere egun batean atzeratuko da. C gehiago laburtuz gero ere proiektuak 12 egun iraungo du, (1,2,3,4,5) bide kritiko berria sortzen delako.

ii) G ekintza berri bat eransten diogu, bere berehalako aurrekoa E delarik. Gehienez zenbat egunekoa izan behar da bere batezbesteko iraupena (a) atalean kalkulaturako proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora ez aldatzeko?

Gehienez $M(E) = M(3,5) = 4$ egun irau dezake.

iii) G ekintza berriaren berehalako aurrekoak E eta D badira, gehienez zenbat egunekoa izan behar da bere batezbesteko iraupena (a) atalean kalkulaturako proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupen denbora ez aldatzeko? Eraiki proiektu berri horri dagokion sare bat.



Gehienez 3 egun: $HDG(G) = 10$ egunekoa da eta $BDB(G) = 13$ izatea nahi dugu.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2007ko iraila

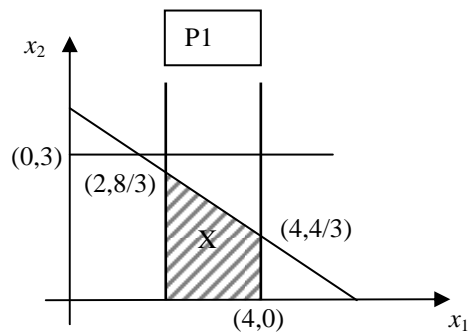
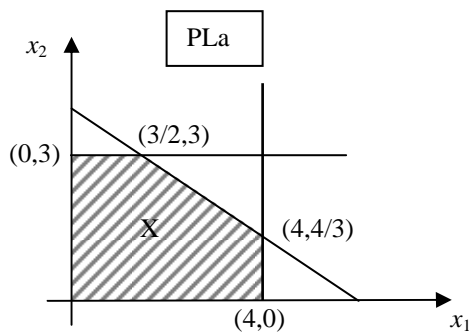
1. Demagun programazio lineal osoko problema hau:

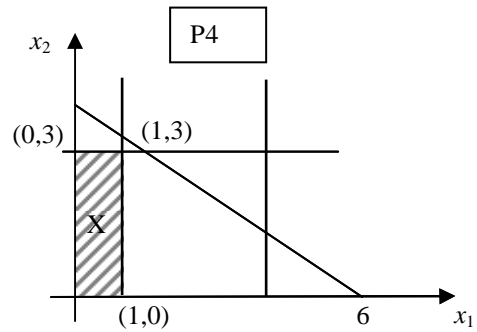
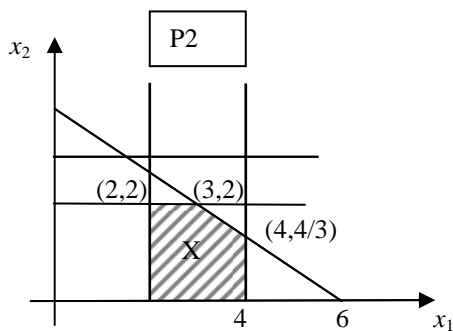
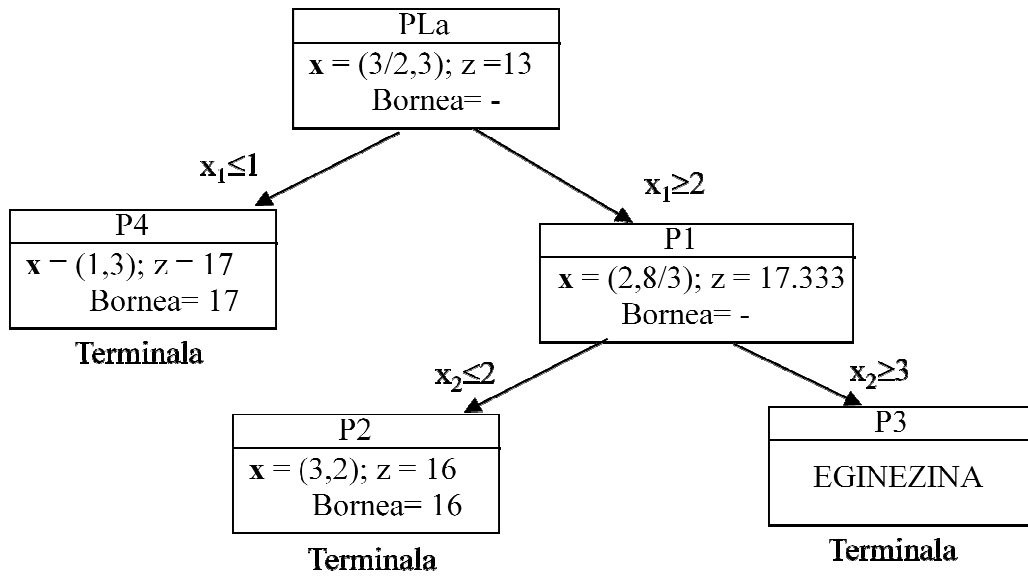
$$\begin{aligned} \max(2x_1 + 5x_2) \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \text{ eta osoak} \end{aligned}$$

- Ebatzi problema hori Adartze eta Bornatze metodoa erabiliz.
- Helburu funtzioko x_1 aldagaiaren koefizientea 2 izan beharrean $10/3$ bada, kalkulatu zein izango den problemaren soluzio berria.

EBAZPENA.

a)





Soluzioa: $\mathbf{x} = (1,3)$; $z = 17$.

b)

x_1 -en koefizientea 2 izan beharrean $10/3$ bada, orduan helburu funtzioaren malda $2/3$ da, $2x_1 + 3x_2 = 12$ zuzenaren moalda bera. Beraz, problema lasituaren soluzioa $\overline{(3/2, 3), (4, 4/3)}$ segmentua da, $z=20$ izanik. Gainera, $(3/2, 3)$ eta $(4, 4/3)$ puntuen artean, $2x_1 + 3x_2 = 12$ zuzenean soluzio oso bat badago: $(3, 2)$. Hori izango da PLO berriaren soluzioa, $z=20$ izanik.

2. Automobilgintza enpresa batek “lehen ekipoen” merkaturako produktu bat egiten du, bere mozkina unitate bakoitzeko k m.u.-koa izanik. Enpresa horrek produktu hori “ordezko piezen” merkatuan ere sartzea planteatzen ari da, hemen unitate bakoitzeko mozkina bikoizten delako. Eguneko ekoizpena 800 piezakoa da eta Enpresako Zuzendaritzak ez du kopuru hori handitzeko asmorik.

a) Gaur egungo bezeroak galtzeko beldurrez, gerentziak egunean gutxienez produkzio totalaren %75a “lehen ekipoen” merkaturako eta gutxienez 160 unitate “ordezko piezen” merkaturako izatea erabaki du.

Formulatu eta erabaki, problema lasaitua ebatziz, enpresak merkatu bakoitzean jarri behar duen kopurua bi helburu hauek betetzeko: mozkinak maximizatu eta “lehen ekipoen” merkatuan ahal den kopuru handiena jarri.

b) “Ordezko piezen” merkatuko bezero batek eguneko 180 piezako eskaera bidali dio Enpresako Zuzendaritzari eta hori ikusita Enpresako Gerentziak egoera birplantatzea erabaki du, helmuga eta helburu hauek jarriz, honako lehentasunekin:

1. lehentasuna: Egunean “lehen ekipoen” merkaturako jarritako unitate pieza kopurua produkzio totalaren %75 baino txikiagoa ez izatea.

2. lehentasuna: Egunean “ordezko piezen” merkaturako jarritako unitate pieza kopuruak bezero berriaren beharrak asetzea.

3. lehentasuna: Egunean “ordezko piezen” merkaturako jarritako unitate pieza kopurua produkzio totalaren %20 baino txikiagoa izatea.

4. lehentasuna: Mozkinak maximizatu.

Kalkula ezazu egunean merkatu bakoitzean jarri behar den kopurua, eta egin lortutako soluzioaren azterketa zehatza.

EBAZPENA.

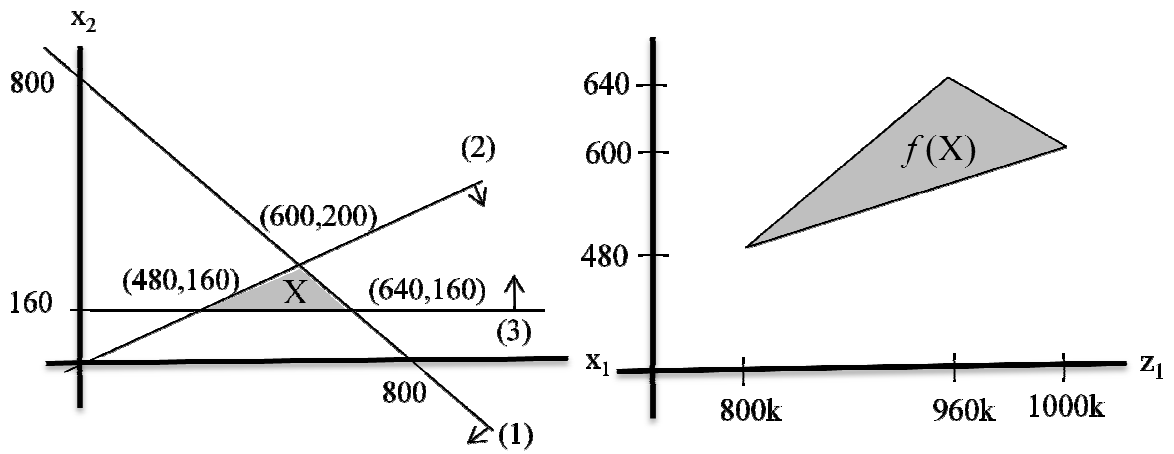
x_1 : Egunean merkatuan jartzen diren “lehen ekipo” unitateak

x_2 : Egunean merkatuan jartzen diren “ordezko pieza” unitateak

a)

$$\begin{aligned} \text{PLO} &\equiv \max(kx_1 + 2kx_2, x_1) \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 \geq 0.75(x_1 + x_2) \\ x_2 \geq 160 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{osoak} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PLa} &\equiv \max(kx_1 + 2kx_2, x_1) \\ &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 & (1) \\ x_1 \geq 0.75(x_1 + x_2) & (2) \\ x_2 \geq 160 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$$f(480,160) = (800k, 480)$$

$$f(600,200) = (1000k, 600)$$

$$f(640,160) = (960k, 640)$$

Soluzio eraginkorrak: $(600, 200), (640, 160)$.

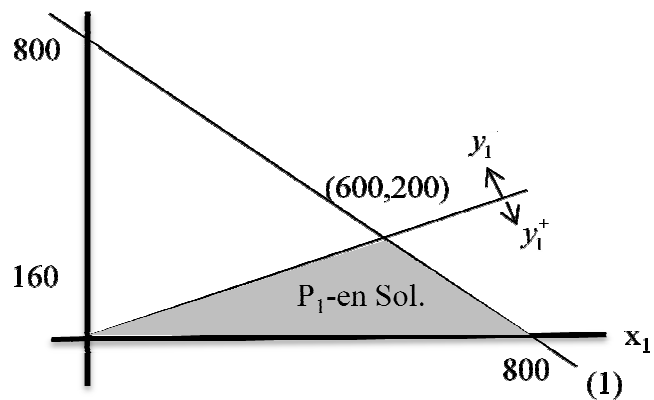
b)

$$\min L(y_1^-, y_2^-, y_3^+, -(kx_1 + 2kx_2))$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_2 - y_2^+ + y_2^- = 180 \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1, x_2, y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

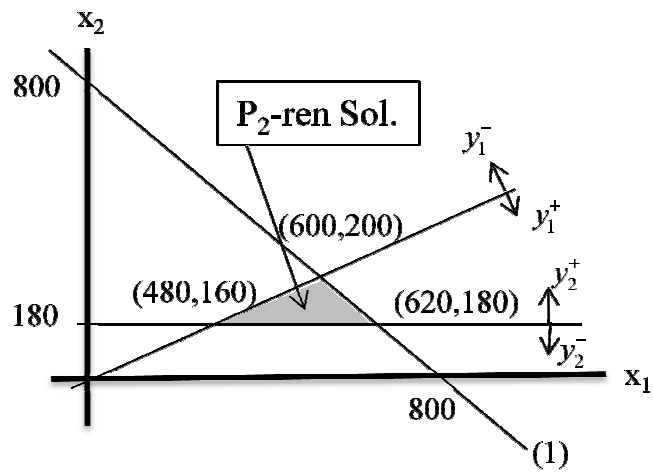
$$P_1 \equiv \min(y_1^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 & (1) \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$



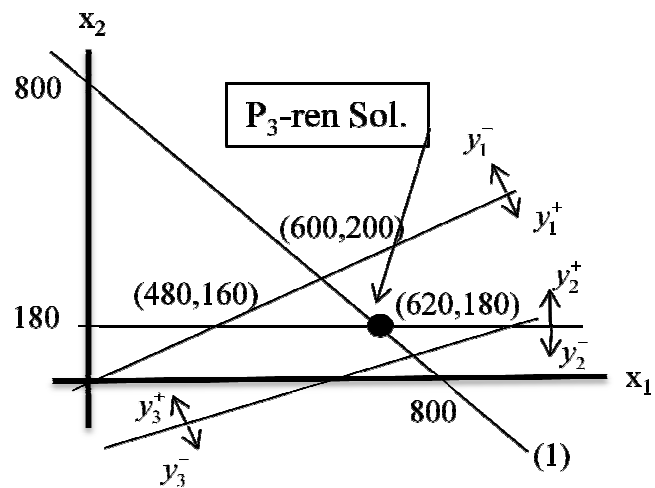
$$P_2 \equiv \min(y_2^-)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 & (1) \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_2 - y_2^+ + y_2^- = 180 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_2^+, y_2^- \geq 0; y_1^- = 0 \end{cases}$$



$$P_3 \equiv \min(y_3^+)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 800 \\ 0.25x_1 - 0.75x_2 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_2 - y_2^+ + y_2^- = 180 \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_2^+ \geq 0; y_1^- = y_2^- = 0 \\ y_3^+, y_3^- \geq 0 \end{cases}$$



$$P_4 \equiv \min(-(kx_1 + 2kx_2))$$

$$\begin{cases} x_1 = 620 \\ x_2 = 180 \end{cases}$$

Soluzio hoberena:

Egunean 620 “lehen ekipo” eta 180 “ordezko pieza” egin. Mozkinak: 980k m.u.

Bezere berriaren beharrak ase daitezke, 180 “ordezko pieza”, baina 3. helmuga ezin da ase.

3. Udaletxe batek erabaki behar du ura nola eraman D udal gordailutik 7 nekazal etxeetara, kostu minimoan (bidalketa ez da zertan era zuzenean egin behar). Ura eramateko lotura posibleak eta beraiei elkartutako kostuak taula honetan adierazita daude:

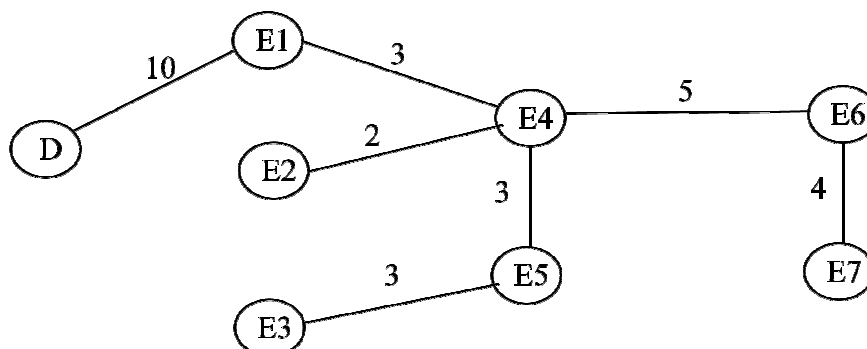
	D	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
D	-	10	12	14	-	-	-	-
E1		-	-	-	3	-	-	-
E2			-	-	2	4	-	-
E3				-	-	3	-	-
E4					-	3	5	6
E5						-	7	5
E6							-	4
E7								-

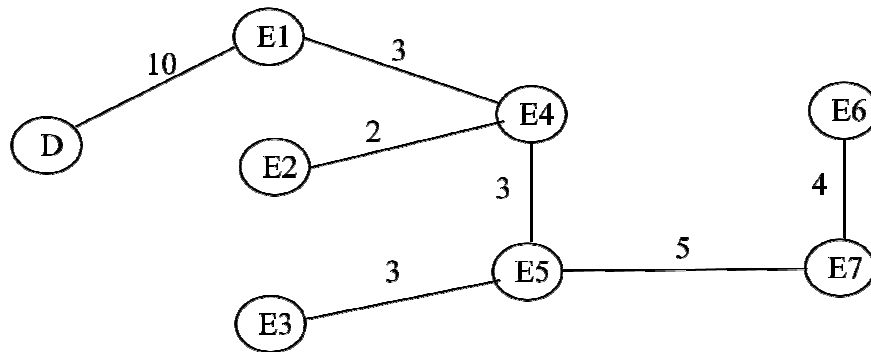
Adibidez, 2. etxetik 5. etxera ura eramateak 4 moneta unitateko kostua dauka.

- Kalkulatu loturak ezartzeko era posible guztiak, kostu totala minimoa izan dadin.
- 7 etxe izan beharrean 8 etxe baditugu, zenbat lotura beharko genituzke? Azaldu erantzuna.

EBAZPENA.

- Kostu minimoa: 30. Bi soluzio daude:





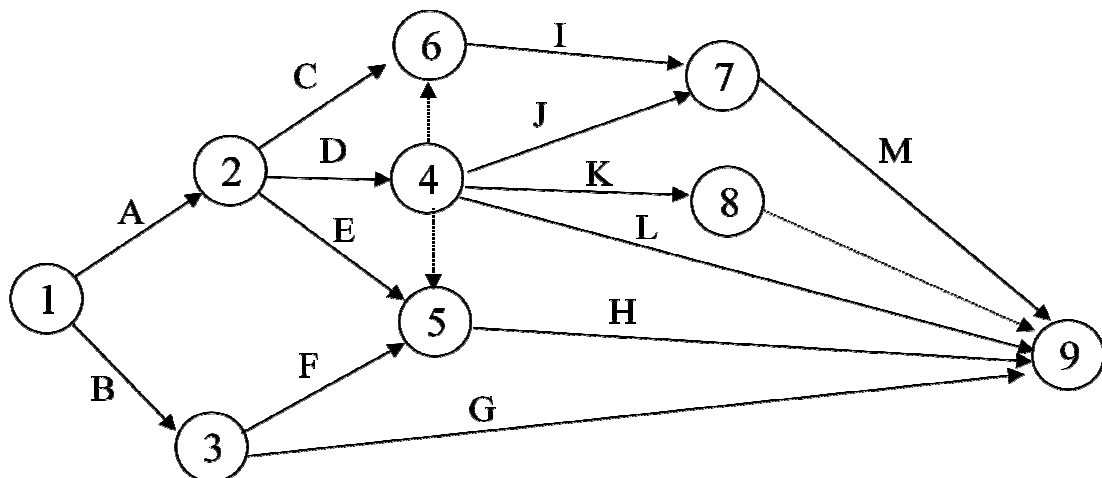
b) n korapilo baditugu hedadura zuhaitzak n-1 ertz izango dituela badakigu. Beraz, 7 etxe izan beharrean 8 baditugu, guztira (D udal gordailuarekin) 9 korapilo izango ditugu eta, ondorioz, 8 lotura.

4. Taula honetan proiektua osatzen duten ekintzak eta horien arteko aurre erlazioak jasotzen dira:

Ekintzak	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Berehalako aurrekoak	-	-	A	A	A	B	B	D, E, F	C, D	D	D	D	I, J

Eraiki proiektua irudikatuko duen sare bat.

EBAZPENA.



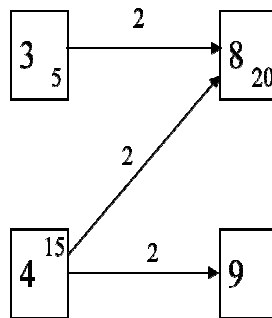
5. Izan bitez sare bateko hiru ekintza, (3, 8), (4, 8) eta (4, 9) arkuen bitartez adieraziak. Gainera, honako hau dakigu:

- Hiruen iraupena berdina da: bi aste.
- Proiektua ez bada atzeratu nahi, (4, 8) ekintza proiektua hasi eta 20. astean bukatua egon behar da.
- (4, 8) ekintza 3 aste atzera daiteke proiektua atzeratu gabe.

Erantzun bi galdera hauei (eta erantzunak azaldu):

- Zein dira (4,9) ekintzaren hasiera eta bukaera denbora goiztiarrenak?
- Zein dira (3,8) ekintzaren hasiera eta bukaera denbora berankorrenak?

EBAZPENA.



Badakigu:

$$t(3,8) = t(4,8) = t(4,9) = 2$$

$$BDB(4,8) = Q(8) = 20$$

$$M(4,8) = Q(8) - P(4) - t(4,8) = 20 - P(4) - 2 = 3.$$

$$\text{Beraz, } P(4) = 15.$$

- $HDG(4,9) = P(4) = 15$
 $BDG(4,9) = HDG(4,9) + t(4,9) = 15 + 2 = 17$
- $BDB(3,8) = Q(8) = 20$
 $HDB(3,8) = BDB(3,8) - t(3,8) = 20 - 2 = 18$

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2008ko ekaina

1. Enpresa batek bi produktu, A eta B, ekoizten ditu hiru makinetan, M_1 , M_2 eta M_3 . Prozesamendu denbora makina bakoitzean produktu unitate bakoitzeko, produktu bakoitzeko unitateko sarrerak eta makina bakoitzaren asteko erabilgarritasuna taula honetan jasotzen dira:

	A	B	Erabilgarritasuna asteko (orduak)
M_1	3	5	30
M_2	1	10	35
M_3	2	8	40
Unitateko Sarrerak (euroak)	1000	2000	

Enpresa M_1 makinaren asteko erabilgarritasuna 10 ordutan handitzea kontuan hartzen ari da edo/eta M_2 makinarena 15 ordutan handitzea edo/eta M_3 makinarena 20 ordutan handitzea, kostu hauekin, hurrenez hurren, 400 €, 600 € eta 500 €, δ stu totala 1200 € baino handiagoa izan gabe. M_2 makinaren erabilgarritasuna handitu daiteke solik M_1 makinarena handitzen bada. Formula ezazu problema programazio lineal osoko problema bezala, mozkina maximizatuz.

EBAZPENA.

x_1 = A produktutik astean ekoiztutako unitateak

x_2 = B produktutik astean ekoiztutako unitateak

$$y_i = \begin{cases} 1 & M_1 \text{ makinaren asteko erabilgarritasuna handitzen bada} \\ 0 & \text{Kontrako kasuan} \end{cases}$$

Eta horiekin problema hau formulatzen dugu:

$$\max(1000x_1 + 2000x_2 - 400y_1 - 600y_2 - 500y_3)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 30 + 10y_1 \\ x_1 + 10x_2 \leq 35 + 15y_2 \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 40 + 20y_3 \\ 400y_1 + 600y_2 + 500y_3 \leq 1200 \\ y_2 \leq y_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \\ y_i = 0 \text{ edo } 1 \text{ (} i=1,2,3) \end{cases}$$

2. Ebatzi

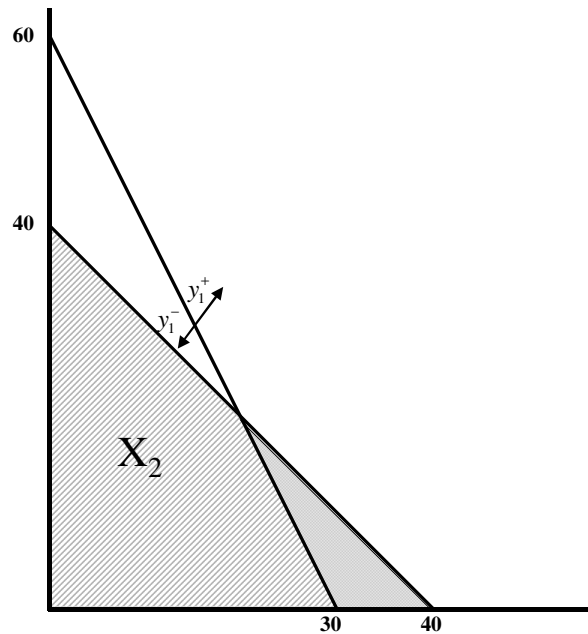
$$\begin{cases} \min L(y_1^+, y_2^-, y_3^+, y_4^-) \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 \\ 3x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 180 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0, (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

EBAZPENA.

L1: $\min(y_1^+)$

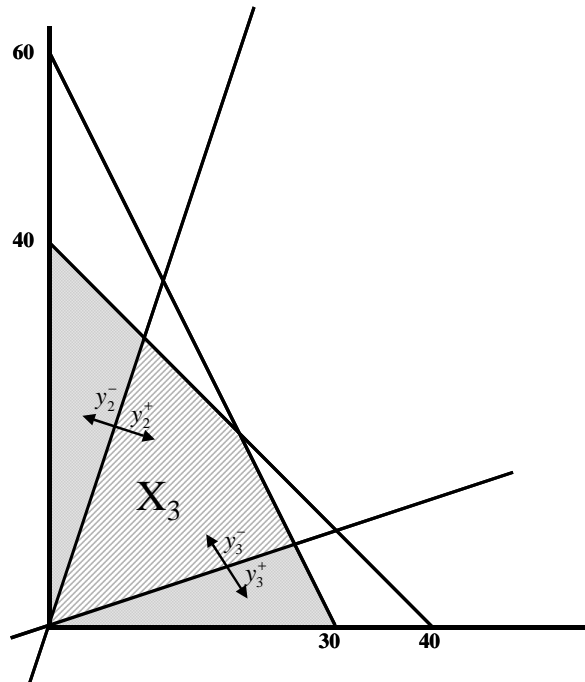
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$

Soluzio hoberena: X_2
 $y_1^+ = 0$



$$\begin{aligned}
 \text{L2: } & \min(y_2^- + y_3^+) \\
 & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 \\ y_1^+ = 0 \\ 3x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0, (i=1,2,3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

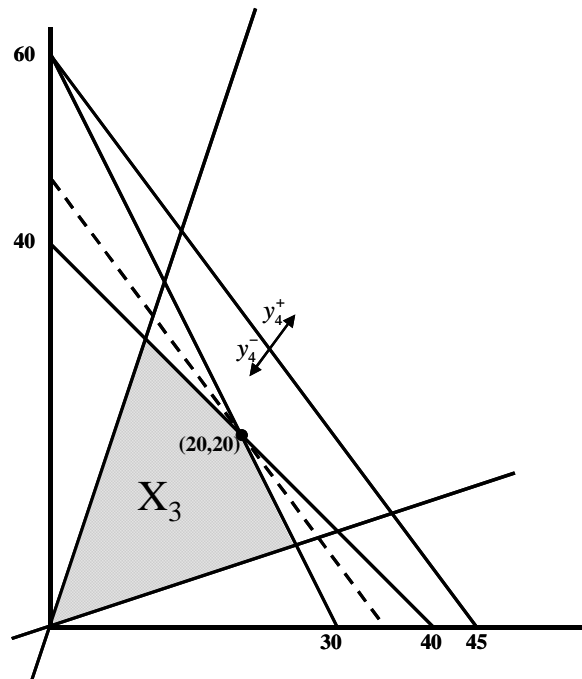
Soluzio hoberena: X_3
 $y_2^- + y_3^+ = 0$



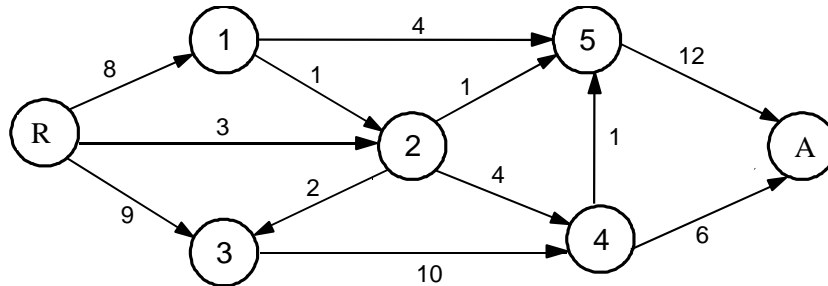
$$\begin{aligned}
 \text{L3: } & \min(y_4^-) \\
 & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 60 \\ y_1^+ = 0 \\ 3x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 3x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ y_2^- + y_3^+ = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - y_4^+ + y_4^- = 180 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0, (i=1,2,3,4) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Soluzio hoberena (20,20), hau da,

- $x_1 = 20$ eta $x_2 = 20$
- $y_1^+ = 0$ eta $y_1^- = 0$
- $y_2^+ = 40$ eta $y_2^- = 0$
- $y_3^+ = 0$ eta $y_3^- = 40$
- $y_4^+ = 0$ eta $y_4^- = 40$



3. Petrolio estatu-konpainia batek bere R birfindegitik A biltegi zentrura petrolioa garraitzeko sare hau dauka. Arku bakoitzaren balioak bertatik egunero bidal daitezkeen edukiera maximoa milaka litrotan adierazten du.



- a) Erabaki birfindegitik biltegi zentrura 60000 litro garraitzeko beharko den denbora, egunero bidal daitezkeen kantitate maximoa bidaltzen bada.
- b) (2,5) arkuaren edukiera 1etik 4ra handitzen bada, eta a) atalean lortutako garraio-banaketa kontuan hartuta, zenbatean gutxitzen da emandako denbora?

EBAZPENA.

- a) - (R,1,5,A) bidea $\Delta f = \min\{8, 4, 12\} = 4$ $V = 4$
 - (R,1,2,5,A) bidea $\Delta f = \min\{8-4, 1-0, 1-0, 12-4\} = 1$ $V = 5$
 - (R,2,4,5,A) bidea $\Delta f = \min\{3-0, 4-0, 1-0, 12-5\} = 1$ $V = 6$
 - (R,2,4,A) bidea $\Delta f = \min\{3-1, 4-1, 6-0\} = 2$ $V = 8$
 - (R,3,5,A) bidea $\Delta f = \min\{9-0, 10-0, 6-2\} = 4$ $V = 12$

Eguneroko fluxu maximoa 12000 litrokoa izanik, 5 egun behar izango dira 60000 litro garraitzeko.

b)

(R,3,4,2,5,A) katea $\Delta f = \min\{9-4, 10-4, 3, 4-1, 12-5\} = 3$ $V = 15$

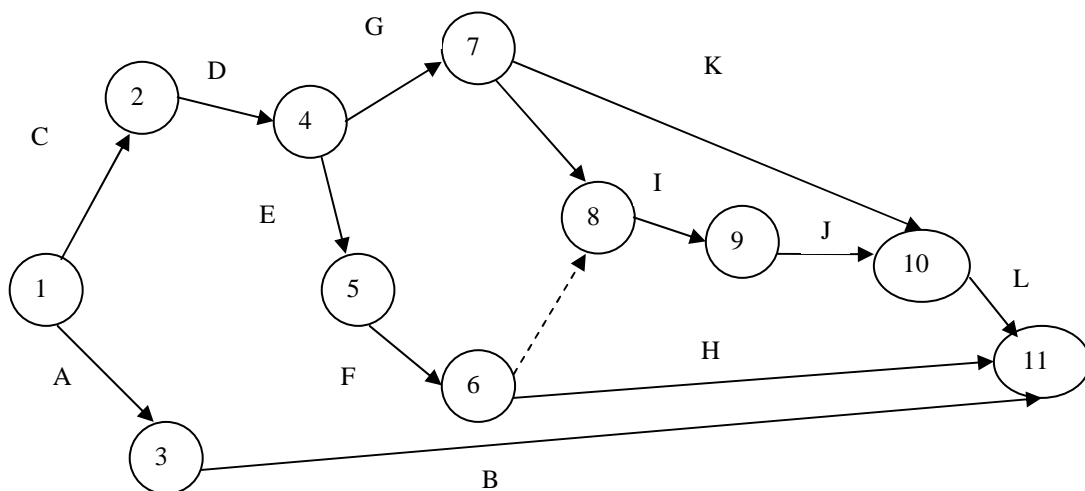
Eguneroko fluxu maximoa 15000 litrokoa da orain, beraz 4 egun behar ditugu 60000 litroak garraitzeko, hau da, a) atalean baino egun bat gutxiago.

4. Taula honetan enpresa baten urteko kontuen formulazioa egiteko behar diren ekintzak (euren iraupena egunetan eta aurre-erlazioak) jasotzen dira:

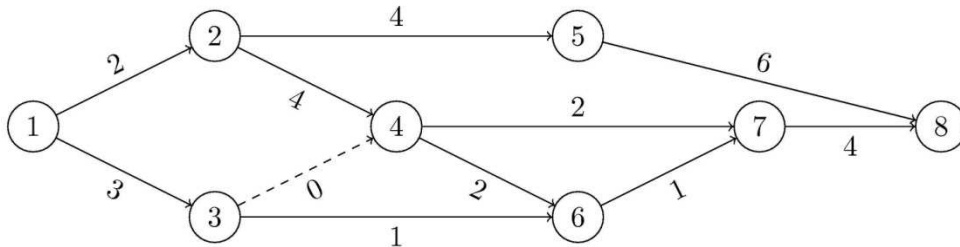
Ekintza	Deskripzioa	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	Inbentarioa (kontaketa fisikoa)	2	--
B	Inbentarioaren balorazioa (moneta funtzionalera itzulita)	1/4	A
C	Egiaztagiriak (fakturen identifikazioa)	2	--
D	Kontabilitate-erregistroa	1	C
E	Auditoretza I (saldo-egiaztapena)	1	D
F	Auditoretza II (erregistro-prozesuaren berrikuspena)	1/2	E
G	Kontu korrante zordunen zirkularizazioa	7	D
H	Kontu korrante aktiboen zirkularizazioa	5	F
I	Ondare-saldoaren azken egiaztapena	3	F eta G
J	Zenbaketen eta saldoen egiaztapen balantzea	1/2	I
K	Erregularizazioa (gastu eta sarreraren intsuldaketa eta kontabilitate-emaitzaren egiaztapena)	1/2	G
L	Azken balantzea	1/2	J eta K

Eraiki proiektu horri elkartutako sare bat.

EBAZPENA.

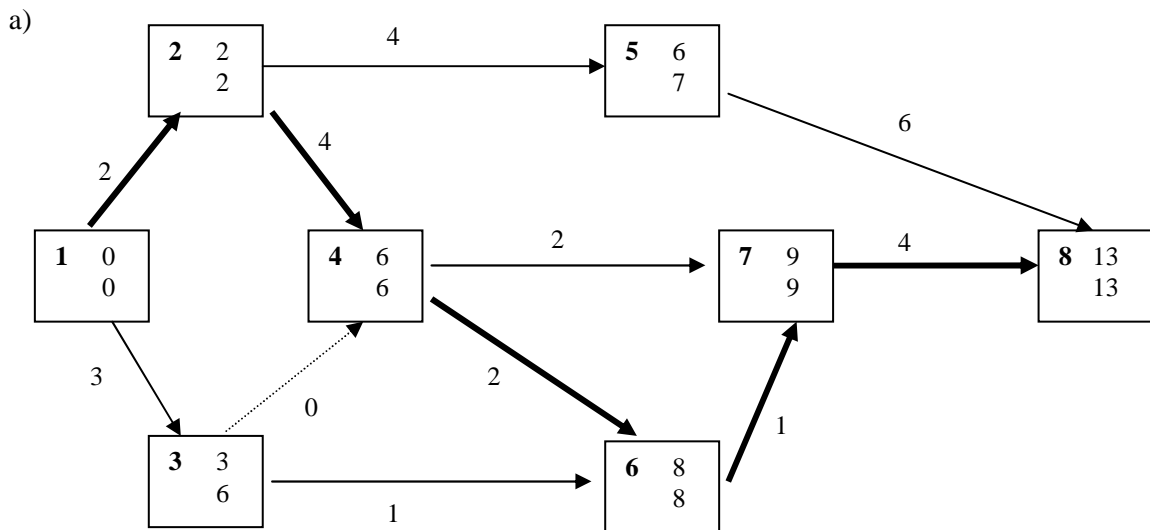


5. Sare honetan proiektu bat irudikatzen da. Arkuetan ekintza ezberdinen iraupena, egunetan, jasotzen da.



- a) Kalkulatu proiektuaren aurreikusitako iraupena eta bide kritikoa. Kalkulatu (4,7) eta (2,4) ekintzen marjinak.
- b) (2,4) ekintzaren iraupena 1 egun laburtzen bada, zer eragin edukiko luke proiektuaren aurreikusitako iraupenean? Eta bide kritikoa?
- c) (6,7) ekintzan aldaketa bat balego, eta bere iraupena 4 egunetakoa balitz, zein litzateke proiektuaren aurreikusitako iraupena? Eta zeintzuk lirateke ekintza kritikoak?

EBAZPENA.



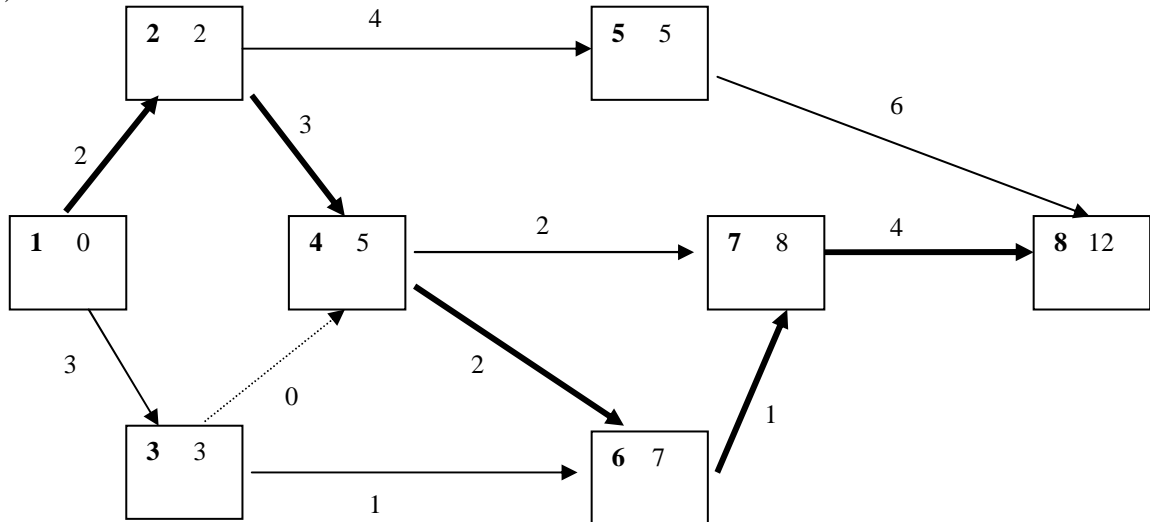
Proiektuaren aurreikusitako iraupena 13 egunekoa da.

Bide kritikoa: (1,2,4,6,7,8)

$$M(4,7) = BDB(4,7) - HDG(4,7) - t(4,7) = 9 - 6 - 2 = 1$$

$M(2,4) = 0$, (2,4) ekintza kritikoa baita.

b)



(2,4) ekintzaren iraupena egun 1 murriztean, proiektuaren aurreikusitako iraupena ere egun leian murriztuko da. Bide kritikoak: (1,2,4,6,7,8) eta (1,2,5,8).

- c) (6,7) ekintza kritikoa da. Bere iraupena 4 egunekoa balitz, 3 egun atzeratu litzateke, eta proiektuaren aurreikusitako iraupena ere 3 egun atzeratuko litzateke (16 eguneko iraupena hortaz). Bide kritikoa berbera da, eta beraz, ekintza kritikoak hauek dira: (1,2), (2,4), (4,6), (6,7) eta (7,8).

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) **2008ko iraila**

1. Enpresa baten inbertsio saileko administrazio kontseiluak 1000000 € ditu 7 fondo ezberdinetan inbertitzeko. Inbertitutako 1 €-en errentagarritasuna i fondoan, R_i da. Kontseiluak errendimendu totala maximizatu nahi du, baldintza hauek kontuan hartuta:

- 2 fondoan inbertituko da soilik 1 fondoan inbertitzen bada.
- 4 fondoko inbertsioa derrigorrean burutu behar da, 1 eta 3 fondoetan inbertsioak egiten badira.
- 1 edo 4 fondoetan inbertitzen bada, ez da inbertsiorik egingo 6 fondoan.
- Ez bada 2 fondoan ezta 5-ean ere inbertsiorik burutzen, orduan ez da 7 fondoan inbertsiorik egingo.
- Fondoren batean inbertitzen bada, fondo horretan inbertitutako kantitatea gutxienez 600 €-koa izan behar da.

a) Formula ezazu problema, programazio lineal osoko problema moduan.

b) Administrazio kontseiluak 200000 € gehiago erabli ditzake. Diru horrekin zer egin erabaki behar du: diru gehigarri guzti hori altxor-letretan inbertitu (horrek R errendimendu totala emango lioke), ala diru gehigarri hori hasierako kantitateari gehitu aurreko inbertsio fondoetan birbanatzeko. Egoera berri horretan errendimendu totala maximizatzen duen programazio lineal osoko problema formula ezazu.

EBAZPENA.

a) Aldagai hauek definituko ditugu:

$x_i = i$ fondoan inbertitutako euroak

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ fondoan inbertitzen bada} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

$i=1, \dots, 7$

Eta aldagai horiekin eredu hau idazten dugu:

$$\begin{aligned}
& \max(R_1x_1 + R_2x_2 + \dots + R_7x_7) \\
& x_1 + \dots + x_7 \leq 1000000 \\
& y_2 \leq y_1 \\
& y_4 \geq y_1 + y_3 - 1 \\
& y_6 \leq 1 - y_1 \\
& y_6 \leq 1 - y_4 \\
& y_2 + y_5 \geq y_7 \\
& 600y_i \leq x_i \leq My_i \quad i = 1, \dots, 7 \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7 \\
& y_i = 0, 1 \quad i = 1, \dots, 7
\end{aligned}$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

b) Egoera berri hau jasotzeko aldagai berri bat definituko dugu:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{altxor-letretan inbertitzen badu} \\ 0 & \text{kontrako kasuan} \end{cases}$$

Eta eredu hau da:

$$\begin{aligned}
& \max(R_1x_1 + R_2x_2 + \dots + R_7x_7 + Rz) \\
& x_1 + \dots + x_7 \leq 1000000 + 200000(1 - z) \\
& y_2 \leq y_1 \\
& y_4 \geq y_1 + y_3 - 1 \\
& y_6 \leq 1 - y_1 \\
& y_6 \leq 1 - y_4 \\
& y_2 + y_5 \geq y_7 \\
& 600y_i \leq x_i \leq My_i \quad i = 1, \dots, 7 \\
& x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 7 \\
& y_i = 0, 1 \quad i = 1, \dots, 7 \\
& z = 0, 1
\end{aligned}$$

non M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia den.

2. Udalerri bateko udaletxeak ikasle-egoitza bat eraikiko du. Bertan, logela txikiak eta handiak egingo dira, 2 eta 4 pertsonentzako edukierarekin, hurrenez hurren. Dauden beharrak kontuan hartuta, proiektua egingarria eta egokia izan dadin, gehienez 400 logela egongo dira guztira, eta logela txikiak gutxienez logela guztien %40 izan behar dute. Logela txiki bakoitzaren eraikuntza kostua 40000 €-koa da eta logela handiena 60000 €-koa. Eraikuntzaren kostua minimizatu eta egoitzaren ikasle-edukiera maximizatu nahi da.

a) Formulatu helburuanitzeko problema, eta aurkitu beraren soluzio eraginkor guztiak.

b) Jakinik logela txiki bakoitzak 22 m²-ko azalera duela, eta logela handi bakoitzak 28 m²-koa, aurreko bi helburuez gain eraikitako azalera ere minimizatu nahi bada, lortu helburuanitzeko problema berriaren 2 soluzio eraginkor.

EBAZPENA.

a) Aldagai hauek definituko ditugu:

$$x_1 = \text{logela txiki kopurua}$$

$$x_2 = \text{logela handi kopurua}$$

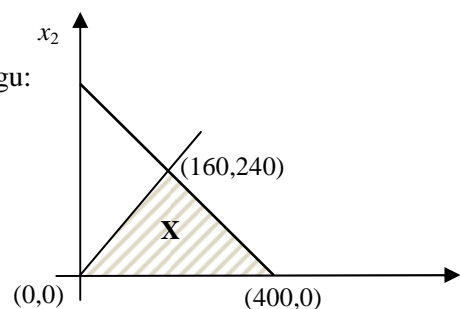
Eta aldagai horiekin honako eredu lasaitu hau idazten dugu:

$$\max(-40000x_1 - 60000x_2, 2x_1 + 4x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

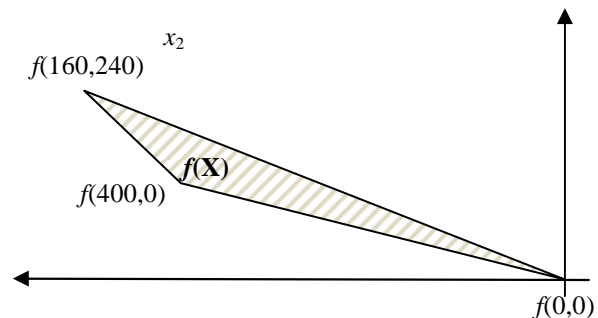
$$x_1 \geq 0,4(x_1 + x_2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Irudi multzoa $f(X)$

Erpinak	$f(x_1, x_2)$
(0,0)	(0,0)
(400, 0)	(-16000000,800)
(160,240)	(-20800000,1280)



Soluzio eraginkorrak: $\overline{(0,0)(160,240)}$

b) Eredu lasaitua:

$$\max(-40000x_1 - 60000x_2, 2x_1 + 4x_2, -22x_1 - 28x_2)$$

$$\mathbf{x} \in X$$

Erantzuna bi modutara emango dugu:

1. X multzoa trinkoa da eta aurreko atalean ikusten dugunez, (0,0) kostua minimizatzen duen soluzio hoberen bakarra da. Hortaz, soluzio eraginkor bat da problema berriaren ere (ezin dugu beste soluzio egingarri bat topatu kostua kaltetu gabe).

Modu berdinean, (160,240) ikasle kopurua maximizatzen duen soluzio hoberena bakarra da eta, horregatik, problema berriaren soluzio eraginkor bat izango da.

2. Eredu ponderatuak erabiliz (Zadeh-ren teorema)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ ponderazioak hartuta,}$$

$$\max(-40020x_1 - 60025x_2)$$

$$\mathbf{x} \in X$$

problema ponderatua dugu eta horren soluzio hoberena, (0,0), helburuanitzekoaren soluzio eraginkorra izango da.

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 1 \text{ eta } \lambda_2 = 100000 \text{ ponderazioak hartuta,}$$

$$\max(159978x_1 + 239972x_2)$$

$$\mathbf{x} \in X$$

problema ponderatua dugu eta horren soluzio hoberena, (160,240), helburuanitzekoaren soluzio eraginkorra izango da.

3. Enpresa batek bi hozkailu-kamioi ditu, K1 eta K2, 100 eta 60 tonako edukierakoak, hurrenez hurren. Enpresak bidaia bakar batean 4 zama garraiatu nahi ditu: A eta B, 40 tonakoa bakoitza, eta C eta D, 50 tonakoa bakoitza. Taula honek, zama bakoitzeko garraio-mozkinak jasotzen ditu, milaka eurotan:

	A	B	C	D
K1	10	10	8	8
K2	6	6	4	4

- a) Hungariar metodoaren bitartez, zehaztu mozkin totala maximizatzeko zein zama garraiatuko den bi kamioiak erabiltzen badira.
- b) Demagun enpresak 3. kamio bat ere baduela, K3, 150 tonako edukiera duena eta zama bakoitzeko 7000 euroko garraio mozkin duena. Jakinik K3 ez dela hozkailu-kamioia eta soilik A eta B zamek behar dutela hozkailu-kamioia, mozkin maximoa izan dadin, zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa (ebatzi gabe), 4 zama kamioiei esleitu nahi bazaizkie? Eta gainera, hiru kamioiak erabili beharko balira, zein taulari aplikatuko zenioke?

EBAZPENA.

a)

	A	B	C	D
K1	-10	-10	-8	-8
K1	-10	-10	-8	-8
K2	-6	-6	-4	-4
F	0	0	0	0

Ezingo dira 4 zamak eraman. Bi aukera daude, A,B,eta C zamak eramaten badira D eraman gabe uztea, edo bestela, A,B,eta D eramaten badira, C uztea eraman gabe. Edozein kasutan, mozkin maximoa 24000 eurokoa izango da.

Soluzioak:

K1→ A K1→ A K1→ A K1→ A K1→ B K1→ B
 K1→ B K1→ B K1→ C K1→ D K1→ C K1→ D
 K2→ C K2→ D K2→ B K2→ B K2→ A K2→ A

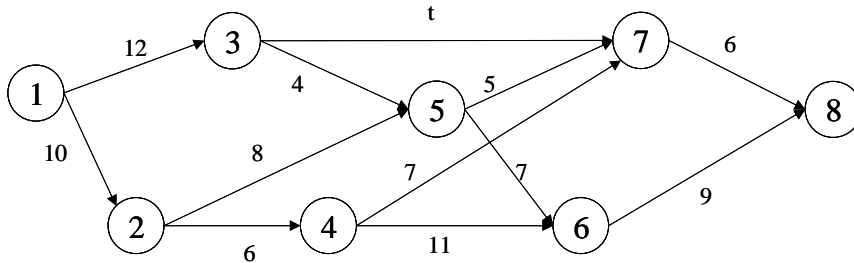
b)

	A	B	C	D	F
K1	-10	-10	-8	-8	0
K1	-10	-10	-8	-8	0
K2	-6	-6	-4	-4	0
K3	M	M	-7	-7	0
K3	M	M	-7	-7	0

Hiru kamioak erabili behar badira:

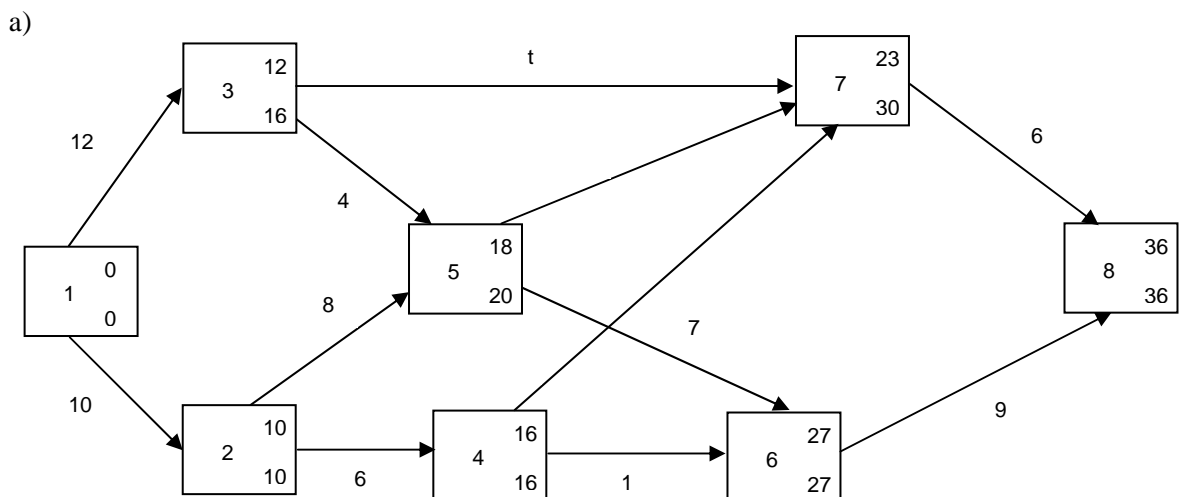
	A	B	C	D	F
K1	-10	-10	-8	-8	0
K1	-10	-10	-8	-8	0
K2	-6	-6	-4	-4	M
K3	M	M	-7	-7	0
K3	M	M	-7	-7	0

4. Sare honek proiektu bat irudikatzen du. Arku bakoitzak ekintza bat adierazten du, eta arkuei elkartutako balioek ekintzaren iraupena egunetan. (3,7) ekintzaren iraupena t da, $t \leq 10$ izanik,



- Eman proiektuaren aurreikusitako iraupena eta bide kritikoa.
- (3,5) eta (5,6) ekintzen hasiera denbora goiztiarra (HDG), bukaera denbora berankorra (BDB) eta marjinak kalkulatu.
- (4,6) ekintzaren iraupena 2 egunetan laburtzen bada, zenbatean laburtuko da proiektuaren aurreikusitako iraupena? Eta 4 egunetan murrizten bada?
- (5,7) ekintza 2 egun atzeratzeak ba al du eraginik proiektuaren ekintzen marjinean? Zein ekintzetan eta zenbat?
- (3,7) ekintzaren bukaera denbora goiztiarra 20 dela jakinik, zehaztu zein den (3,7) ekintzaren iraupena.

EBAZPENA.



Proiektuaren aurreikusitako iraupena: 36 egun

Bide kritikoa: (1,2,4,6,8)

$$\text{b) HDG}(3,5) = P(3) = 12$$

$$\text{HDG}(5,6) = P(5) = 18$$

$$\text{BDB}(3,5) = Q(5) = 20$$

$$\text{BDB}(5,6) = Q(6) = 27$$

$$\text{M}(3,5) = \text{BDB}(3,5) - \text{HDG}(3,5) - t(3,5) = 20 - 12 - 4 = 4$$

$$\text{M}(5,6) = \text{BDB}(5,6) - \text{HDG}(5,6) - t(5,6) = 27 - 18 - 7 = 2$$

c) (4,6) ekintzaren iraupena 2 egunetan murrizten bada, proiektuaren aurreikusitako iraupena ere 2 egunetan murriztuko da, hau da, 34 eguneko iraupena izango du. Bide kritikoak (1,2,4,6,8) eta (1,2,5,6,8) izango dira. Ostera, (4,6) ekintza 4 egunetan laburtzen bada, proiektuaren aurreikusitako iraupena 2 egunetan murriztuko da, hau da, 34 egun iraungo du. Kasu honetan bide kritiko bakarra legoke: (1,2,5,6,8)

d) (5,7) ekintza 2 egun atzeratzen bada, bere marjina ere bi egunetan murriztuko da. Gainera, atzerapen honek (7,8) ekintzaren hasiera denbora goiztiarrean eragina izango du, hau ere bi egun atzeratuz. Horrela, (7,8) ekintzaren marjina bi egunetan murriztuko da.

$$\text{e) BDG}(3,7) = \text{HDG}(3,7) + t(3,7) \Rightarrow 20 = 12 + t(3,7) \Rightarrow t(3,7) = 8$$

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2009ko ekaina

1. Baratze baten jabeak 100 hektareako lursoria du erabilgarri. Bertan, tomateak, piperrak, azenarioak, kipulak eta letxugak hazi nahi ditu. Baratze osoa lantzeko guztira duen ordu kopurua 300 da. Honako taula honetan, produktu bakoitza lantzeko beharrezkoa den hektareako ordu kopurua adierazten da.

	Tomateak	Piperrak	Azenarioak	Kipulak	Letxugak
Orduak/ha	5	4	5	2	3

Taula honetan, produktu bakoitzeko landatutako hektarea bakoitzari dagozkien hazi eta ongarrien kostua, eta produktu bakoitza landatzeak suposatzen dituen kostu finkoak adierazten dira.

	Tomateak	Piperrak	Azenarioak	Kipulak	Letxugak
Hazi eta ongarrien kostua (€/ha)	25	15	10	8	25
Landatze kostu finkoa (€)	100	120	100	80	150

Baratzaren arduradunak honako hau ezarri du:

- Gutxienez 3 produktu landatuko ditu eta gehienez 4.
 - Tomateak landatzen baditu, ez ditu kipulak landatuko.
 - Letxugak landatuko ditu soilik piperrak landatzen baditu.
- a) Plantea ezazu Programazio Lineal Osoko problema bezala, helburua kostuak minimizatzea dela jakinik.
- b) Enpresa, landatze-sistema berri bat ezartzea pentsatzen ari da. Sistema horrek, produktu bakoitzeko beharrezkoa den hektareako ordu kopurua murriztuko luke, taulan adierazten den bezala.

	Tomateak	Piperrak	Azenarioak	Kipulak	Letxugak
Orduak/ha	4	2	2	1	2

Sistema berri horren ezarpenak 1000 €-ko hasierako inbertsioa suposatuko luke. Plantea ezazu problema, 2 aukerak adieraziz: sistema berria ezarri edo lehengoarekin jarraitu.

EBAZPENA.

a) Aldagaia hauek definitzen dira:

 $x_i = i$ produktua landatutako hektarea kopurua

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ produktua hazten bada} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

 $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (non 1 tomateak diren, 2 piperrak, 3 azenarioak, 4 kipulak eta 5 letxugak)

$$\min(25x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 25x_5 + 100y_1 + 120y_2 + 100y_3 + 80y_4 + 150y_5)$$

$$\text{m.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 100 \equiv \sum_{i=1}^5 x_i \leq 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 300 \\ 3 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 4 \\ y_4 \leq 1 - y_1 \\ y_5 \leq y_2 \\ 0 \leq x_i \leq M \cdot y_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ y_i = 0 \text{ ó } 1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

 M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia izanik

b) Aldagai berri bat definitzen da:

$$z = \begin{cases} 1 & \text{landatze sistema berria ezartzen bada} \\ 0 & \text{beste kasuetan (oraingo landatze sistemarekin jarraitzen da)} \end{cases}$$

$$\min(25x_1 + 15x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 25x_5 + 100y_1 + 120y_2 + 100y_3 + 80y_4 + 150y_5 + 1000z)$$

$$\text{m.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 100 \equiv \sum_{i=1}^5 x_i \leq 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 300 + M \cdot z \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 2x_5 \leq 300 + M \cdot (1 - z) \\ 3 \leq y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 4 \\ y_4 \leq 1 - y_1 \\ y_5 \leq y_2 \\ 0 \leq x_i \leq M \cdot y_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ y_i = 0 \text{ ó } 1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ z = 0 \text{ ó } 1 \end{cases}$$

 M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia izanik

2. Pentsua lantzen duen enpresa batek C1 eta C2 osagaiak ekoizten ditu, A eta B lehengaiak erabiliz. C1 osagaiaren 1 tona ekoizteko A lehengaiaren 0.25 tona eta B-ren 0.75 tona behar dira, eta C2 osagaiaren 1 tona ekoizteko A-ren 0.5 tona eta B-ren 0.5 tona. C1 osagaiaren tona bakoitzeko mozkina 1 m.u-koa da eta C2-rena 2 m.u.

Astean erabilgarri duen A eta B osagaien kopurua 10 tona eta 18 tona dira, hurrenez hurren.

Europar Batasuneko pentsu landatze programara egokitzeko asmoarekin, enpresak helmuga eta helburu hauek ezarri ditu, lehentasun orden honekin:

1. lehentasuna: C2 osagaiarekin, gutxienez C1 osagaiarekin lortutako asteko mozkinak berdintzea.
2. lehentasuna: C1 osagaiaren asteko ekoizpena 16 tona baino txikiagoa ez izatea nahi du.
3. lehentasuna: C2-ren asteko ekoizpena minimizatu nahi du.

Erabaki zein den osagai bakoitzaren asteko ekoizpen hoberena. Helburu eta helmuga bakoitza grafikoki adieraziz eta ebatziz, lortutako emaitza interpreta ezazu.

EBAZPENA.

x_1 = ekoiztutako C1 osagaiaren tona kopurua asteko.

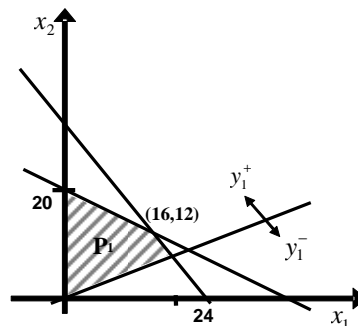
x_2 = ekoiztutako C2 osagaiaren tona kopurua asteko.

$$\min L(y_1^-, y_2^-, x_2)$$

$$m \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 10 \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \leq 18 \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_1 - y_2^+ + y_2^- = 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_i^+, y_i^- \geq 0 \quad \forall i=1,2 \end{cases}$$

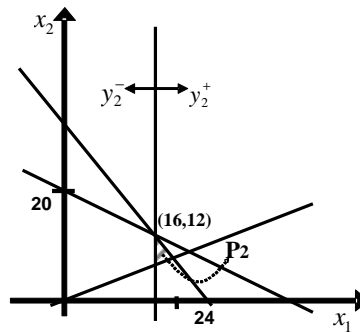
$$P_1 \equiv \min(y_1^-)$$

$$m \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 10 \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \leq 18 \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$



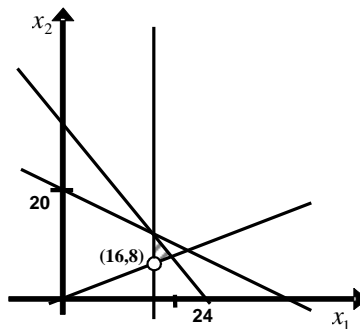
$$P_2 \equiv \min(y_2^-)$$

$$m. \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 10 \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \leq 18 \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_1 - y_2^+ + y_2^- = 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, y_1^+, y_2^+, y_2^- \geq 0 \end{cases}$$



$$P_3 \equiv \min(x_2)$$

$$m. \begin{cases} 0.25x_1 + 0.5x_2 \leq 10 \\ 0.75x_1 + 0.5x_2 \leq 18 \\ 2x_2 - x_1 - y_1^+ + y_1^- = 0 \\ x_1 - y_2^+ + y_2^- = 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_1^- = 0, y_2^- = 0, y_1^+, y_2^+ \geq 0 \end{cases}$$



Soluzio hoberena: asteko C1 osagaiaren 16 tona eta C2 osagaiaren 8 tona ekoiztuko dira, C2 osagaiarekin lortutako mozkinak C1 osagaiarekin lortutakoaren bikoitza izanik, C1 osagaiaren ekoizpena helmuga bezala finkatutako kantitate minimoa delarik, eta C2ren asteko ekoizpena minimizatzen delarik.

3. Publizitate enpresa bateko zuzendariak 4 bezero berriei (C1, C2, C3, C4) publizistak esleitu nahi dizkie. Bezero bakoitzari bere 3 publizista onenak (P1, P2, P3) esleitzearen kostuak, mila eurotan, taula honetan adierazten dira:

	P1	P2	P3
C1	4	6	8
C2	2	3	4
C3	4	8	5
C4	1	2	6

- a) Erabaki zeintzuk diren esleipen hoberen posibleak, publizista bakoitzak bezero bakar batekin lan egingo duela jakinik (3 publizista 4 bezeroetatik 3-ri esleituz).

b) Adieraz ezazu zein taulari aplikatu behar zaion Hungariar Metodoa baldintza hauek bete daitezzen: 4 bezeroak esleituko dira, jakinik 3 publizistek bezero bat baino gehiagorekin lan egiteko aukera dutela, eta denak (bai bezero zein publizistak) esleituta egon behar dutela.

EBAZPENA.

a) Hungariar metodoaren aplikazioa:

4	6	8	0
2	3	4	0
4	8	5	0
1	2	6	0
-1	-2	-4	

3	4	4	0	-1
1	1	0	0	-1
3	6	1	0	-1
0	0	2	0	+1

2	3	3	0	-1
1	1	0	1	-1
2	5	0	0	-1
0	0	2	1	
+1	+1			

1	2	3	0
0	3	5	1
1	4	0	6
0	0	3	2

- 1 soluzioa C₂ - P₁
 C₃ - P₃
 C₄ - P₂
 C₁ esleitu gabe
- 2 soluzioa C₂ - P₂
 C₃ - P₃
 C₄ - P₁
 C₁ esleitu gabe

Kostu minimoa: 9 mila euro.

b) Hungariar metodoa taula honi aplikatu behar zaio:

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₁	P ₂	P ₃
C ₁	4	6	8	4	6	8
C ₂	2	3	4	2	3	4
C ₃	4	8	5	4	8	5
C ₄	1	2	6	1	2	6
F	0	0	0	M	M	M
F	0	0	0	M	M	M

4. Enpresa batek bere eskeintza zabaldu nahi du merkatu berrietara irekitzeko, eta helburu horrekin, merkatu ikerketa bat burutzea eskatu dio marketin departamentuari. Marketin departamentuak burutu beharreko ekintzen zerrenda bat osatu du, horrekin batera ekintzen iraupena eta horien arteko erlazioak ezarri dituelarik. Hona hemen lortutako informazioa:

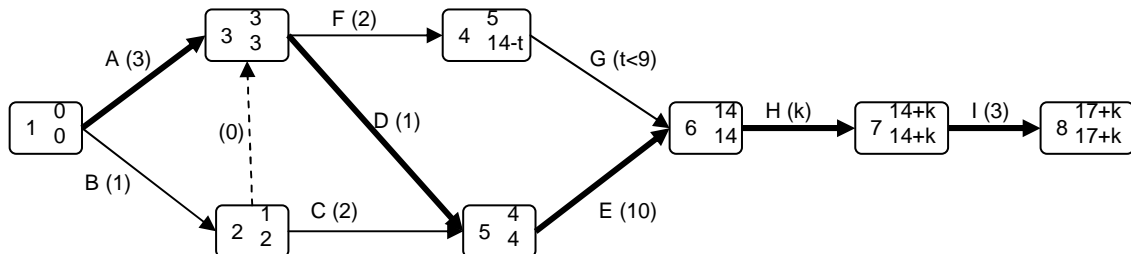
Ekintza	Arkua (i, j)	Deskribapena	Iraupena (egunetan)	Berehalako aurrekoa
A	(1, 3)	Bigarren mailako informazio bilketa eta analisia	3	-
B	(1, 2)	Helburu eta metodologiaren definizioa	1	-
C	(2, 5)	Lagina aukeratu eta bere tamaina zehaztu	2	B
D	(3, 5)	Galdeketaren zehazpena	1	A eta B
E	(5, 6)	Inkestak burutu eta informazioa kodifikatu	10	C eta D
F	(3, 4)	Elkarrizketa diseinatu eta elkarrizketarako	2	A eta B
G	(4, 6)	Elkarrizketak burutu	t	F
H	(6, 7)	Informazioaren analisi kualitatibo eta	k	E eta G
I	(7, 8)	Ikerketaren idazketa	3	H

G eta H ekintzen iraupenak t eta k aldagaien bidez adierazten dira, hurrenez hurren.

- a) Irudika ezazu proiektu horri elkartutako grafoa, ekintza fiktizioak gehituz beharrezkoa balitz, adierazitako berehalako aurreko erlazioak mantentzeko eta adierazitako arkuen numerazioa kontuan hartuz.
- b) t aldagaiaren balioa 9 baino txikiagoa dela jakinik:
 - i. Posible al da proiektuaren esperotako iraupena eta bide kritikoa kalkulatzeko, t eta k aldagaiek zein balio hartzen dituzten ezagutu gabe? Kalkula itzazu t eta k aldagaien menpe, beharrezkoa bada.
 - ii. Zein balio har ditzake k aldagaiak, proiektua 25 egun baino lehen burutu nahi bada?
 - iii. Proiektuaren esperotako iraupena ez atzeratzeko, F ekintza seigarren egunean bukatuta egon behar dela jakinik, zein da t -ren balioa? Lortutako balioa kontuan hartuta, zenbat egun atzera daiteke G ekintza proiektuaren esperotako iraupena ez atzeratzeko?

EBAZPENA.

a)



b)

- i) $t < 9$ bada, proiektuaren esperotako iraupena (p.e.i.) = $17 + k$ da eta bide kritikoa (1, 3, 5, 6, 7, 8). Hau da, ez dago t balioaren menpe, bai ordea k balioaren menpe, p.e.i. $17 + k$ izanik. Hau da, p.e.i. kalkulatzeko posible izango da k aldagaiaren balioen arabera. Gainera, bide kritikoa ez da t eta k balioen menpekota eta bide kritikoa (1, 3, 5, 6, 7, 8) da.

ii) $\text{p.e.i.} < 25 \Rightarrow 17 + k < 25 \Rightarrow k < 8$

Proiektua 25 egun baino lehen burutzeko k aldagaiaren balioa (H ekintzaren iraupena) 8 baino txikiagoa izan behar da.

iii) $\text{BDB}(3, 4) = 6 \Rightarrow \text{BDB}(3, 4) = \text{Q}(4) = \text{Q}(6) - t = 14 - t \Rightarrow 14 - t = 6 \Rightarrow t = 8$.

F ekintza beranduenez seigarren egunean bukatuta egon behar bada proiektuaren iraupena ez atzeratzeko, t -ren balioa 8 izan behar da (G ekintzaren iraupena 8 egunetakoa da).

$$t = 8 \text{ bada} \Rightarrow \text{M}(4, 6) = \text{BDB}(4, 6) - \text{HDG}(4, 6) - t(4, 6) = 14 - 5 - 8 = 1$$

p.e.i. ez atzeratzeko G ekintza gehienez egun 1 (G ekintzaren marjina) atzera daiteke.

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2009ko iraila

1. Demagun programazio lineal osoko problema hau:

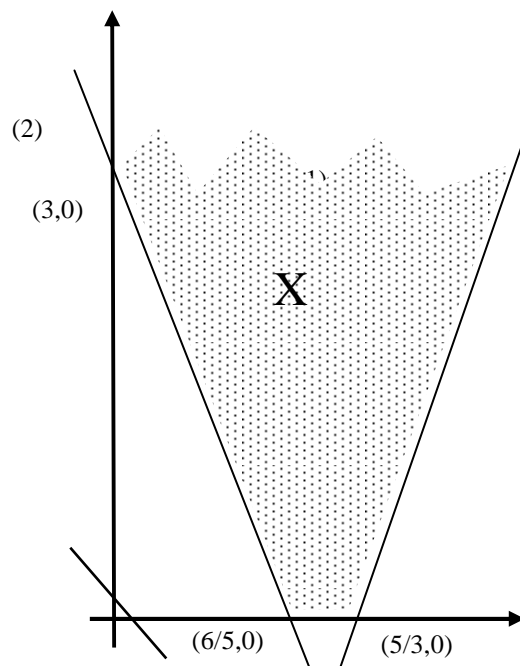
$$\begin{aligned} \min(x_1 + x_2) \\ 3x_1 - x_2 &\leq 5 \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \text{ eta osoak} \end{aligned}$$

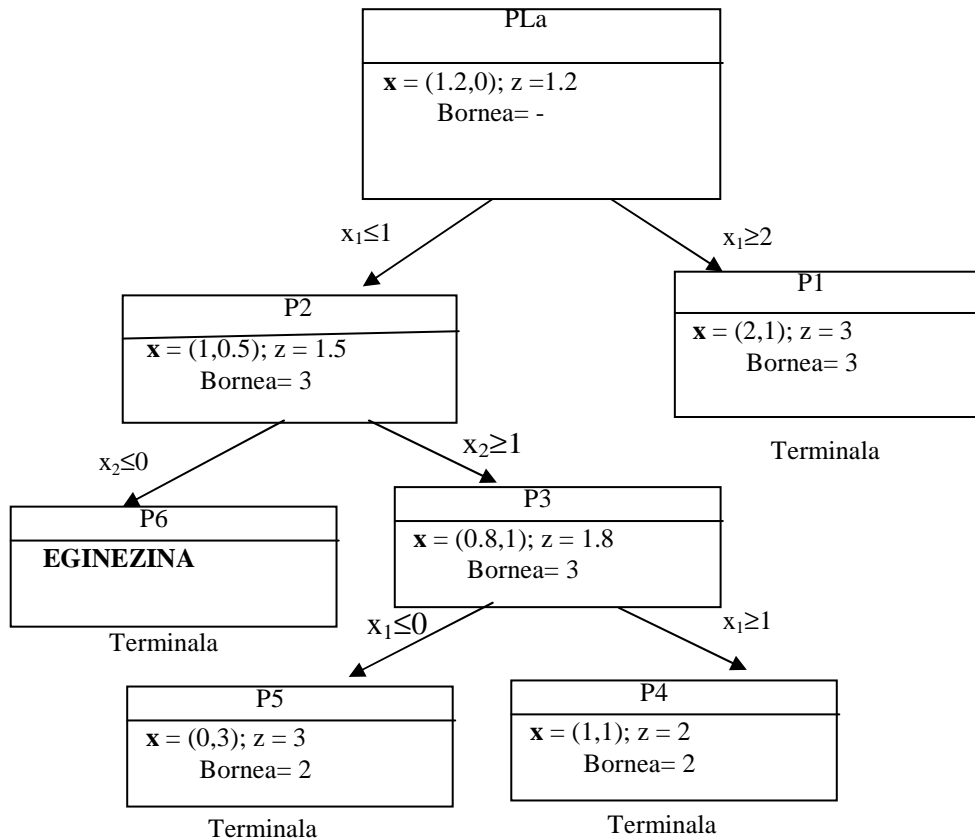
- a) Ebatzi problema, adartze eta bornatze metodoa erabiliz.
b) Helburu funtzioan x_1 aldagaiaren koefizientea 1 izan beharrean, $\lambda > 5/2$ beste edozein balio hartzen bada, kalkula ezazu problemaren soluzio hoberena.

EBAZPENA.

a)

$$\begin{cases} \min(x_1 + x_2) \\ 3x_1 - x_2 \leq 5 & (1) \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 6 & (2) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{cases}$$





Soluzioa: $x = (1, 1)$; $z = 2$.

b) (2) ekuazioaren malda $5/2$ denez, $\lambda > 5/2$ bada x_1 -en koefizientea, Problema lasituaren soluzioa

$x = (0, 3)$ da; $z = 3$ eta, ondorioz, PLO-k soluzio hori bera izango du.

2. Enpresa bateko Giza Baliabide Sailak Madrilen formakuntza topaketa bat antolatu nahi du Bilbo, Bartzelona, Sevilla, Valentzia eta Zaragozako delegazioetako langileentzat. Langileen formakuntza beharrak aztertu ondoren, aldi berean 3 mintegi, M1, M2 eta M3 antolatzea erabaki du. Bilboko delegazioak gehienez 7 langile eraman ditzake topaketa horretara, Bartzelonakoak 5, Sevillakoak 7, Valentziakoak 2 eta Zaragozakoak 6. Taula honek, mintegi bakoitzean gehienez parte har dezaketen langile kopurua adierazten du.

	Bilbo	Bartzelona	Sevilla	Valentzia	Zaragoza
M1	4	2	2	-	-
M2	1	3	2	2	3
M3	-	-	3	-	1

Mintegi bakoitza Madrilgo egoitzeko bilera gela batean egingo da, horietako gela bakoitzean gehienez 8 pertsona bil daitezkeelarik.

- a) Mintegietan parte hartuko duten langile kopurua maximizatu nahi bada, problema horri dagokion sarea irudikatu.
- b) Giza Baliabide Sailak honako langile hauen inskripzioa baieztatu du mintegi bakoitzean:

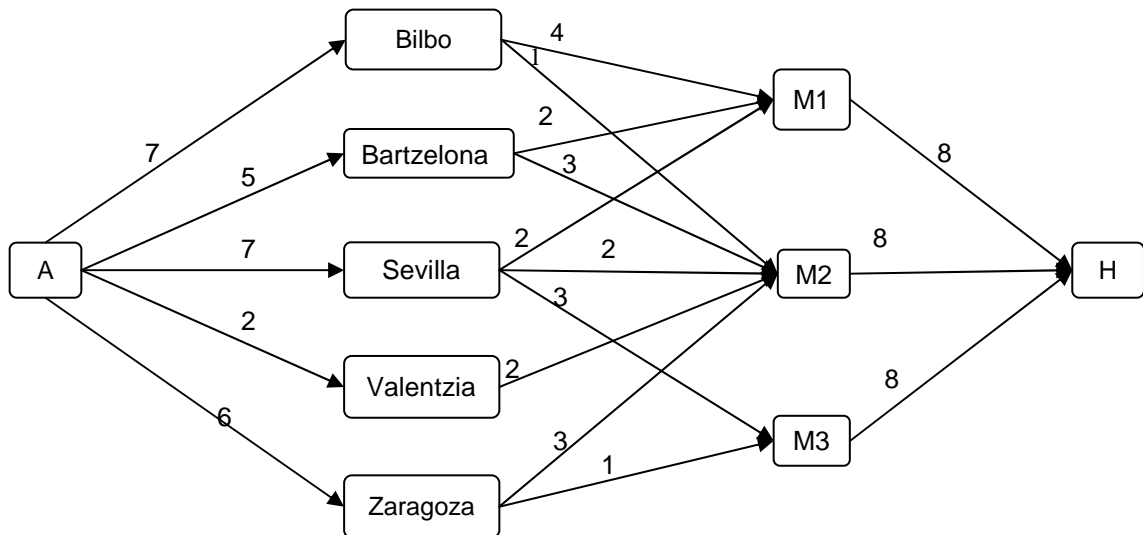
	Bilbo	Bartzelona	Sevilla	Valentzia	Zaragoza
M1	4	2	0	-	-
M2	1	3	2	2	0
M3	-	-	3	-	1

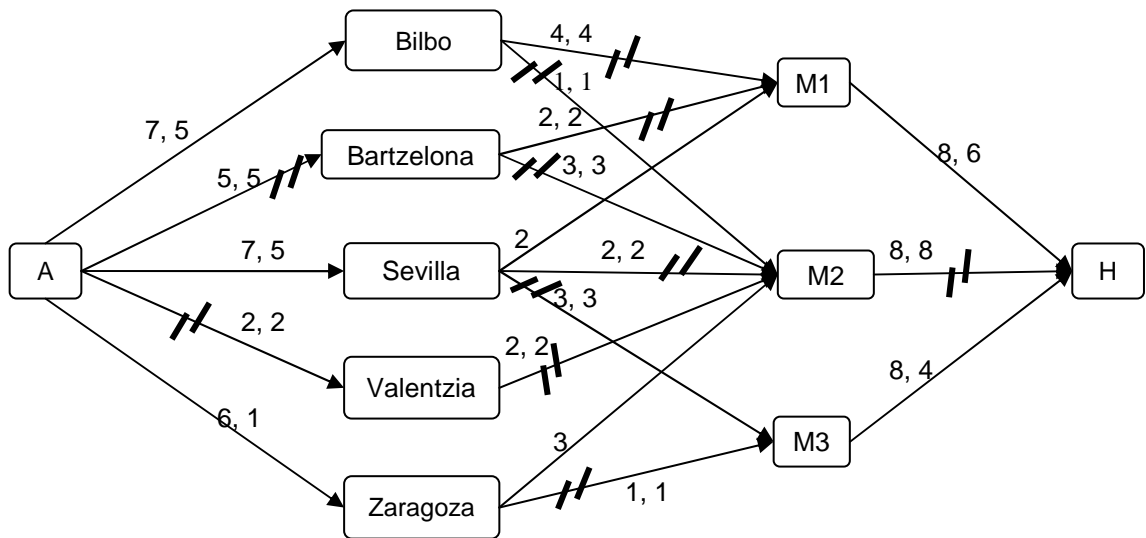
Mintegiren batean langile gehiago onartzea posible al litzateke? Zein izango litzateke mintegietan parte hartuko duen langile kopuru maximoa? (Erantzun arrazoituz)

- c) Valentziako delegazioak bere langileak M3 mintegira bidali baditzake, mintegietan parte hartuko duen langile kopuru maximoa aldatuko al da? (Erantzun arrazoituz)

EBAZPENA.

- a)





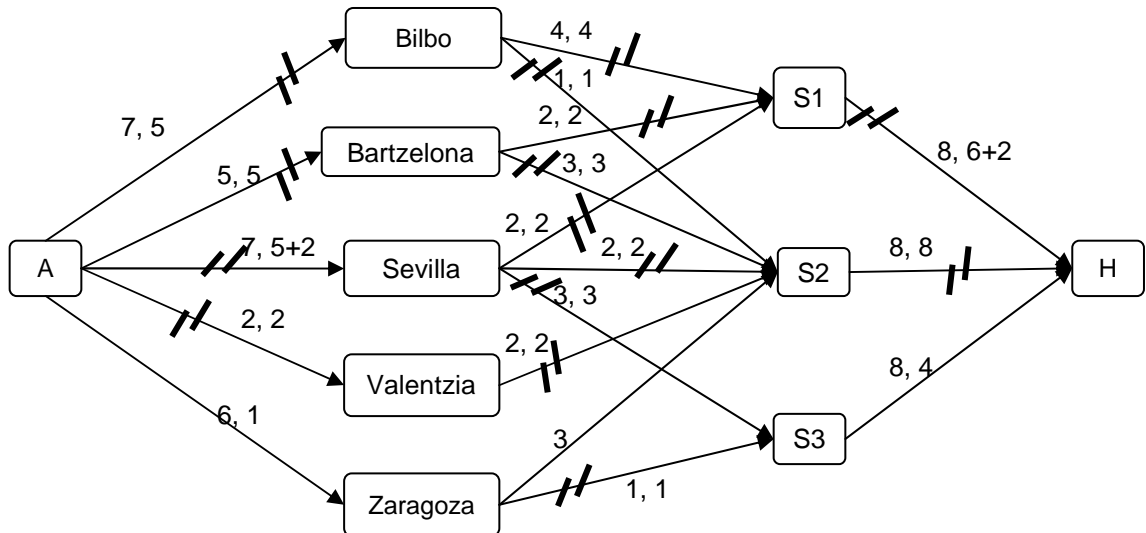
b) Grafoa ez dago asetua oraindik, kate ez asetua geratzen baitira.

Fluxuaren balioa: Abiaburutik irteten den fluxua: $5 + 5 + 5 + 2 + 1 = 18$

Helburura iristen den fluxua: $6 + 8 + 4 = 18$

Bide ez asetua:

- (A, Sevilla, M1, H) $\Delta f = \min(7-5, 2-0, 8-6) = 2$ $F = 18 + 2 = 20$

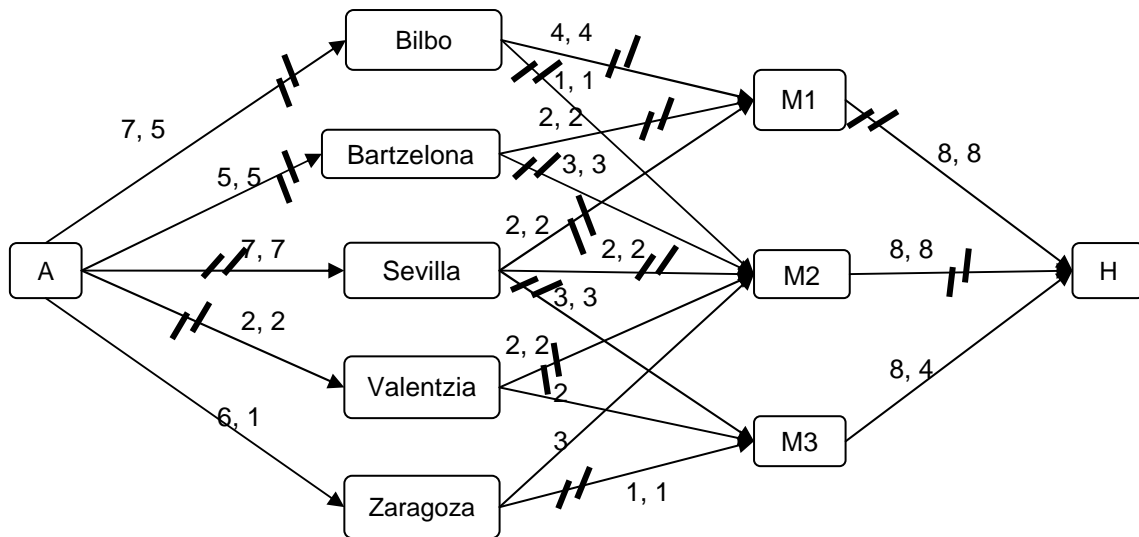


Ez dago bide edo kate ez aseturik, beraz grafoa asetua dago eta fluxu maximoa 20 da.

Sevillako 2 langile inskriba daitezke M1-en.

Mintegietan parte hartuko duten langileen kopuru maximoa 20 izango da, 8 M1 mintegian, 8 M2-n eta 4 M3-n.

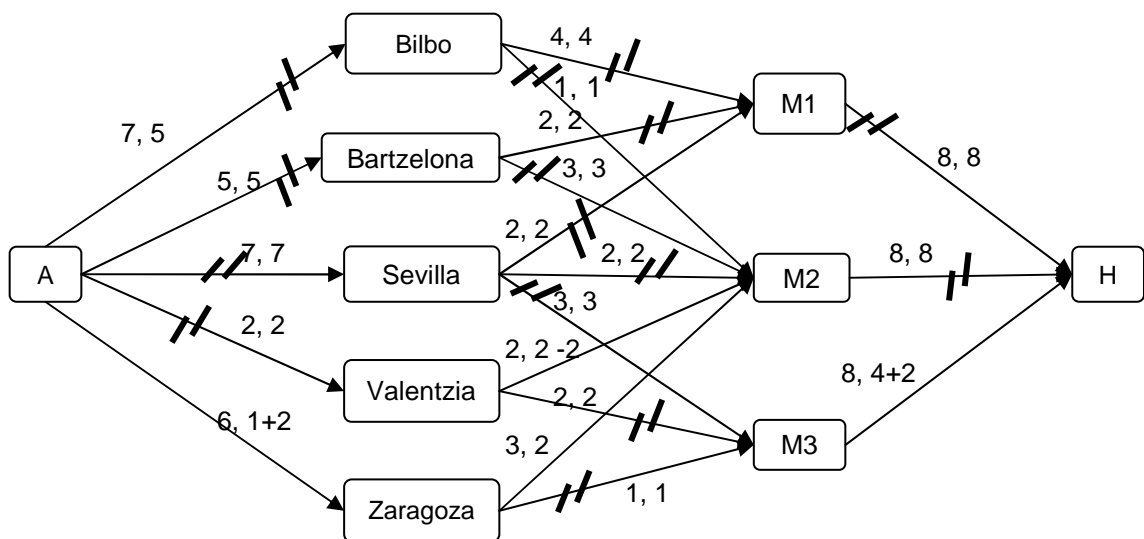
c) Edukiera 2 duen Valentziatik M3-ra doan arku berri bat sortzen dugu.



Orain badago kate ez asetu bat eta, ondorioz, fluxuaren balioa handitu daiteke:

Katea (A, Zaragoza, M2, Valentzia, M3, H).

$$\Delta f = \min(4-1, 3-0, 2, 2-0, 8-4) = 2 \quad F = 20 + 2 = 22$$



Orain bide eta kate guztiak asetuak daude eta fluxu maximoaren balioa 22 da.

Mintegietara joaten den langile kopuru maximoa 22 izango da, 8 M1-era, 8 M2-ra eta 6 M3-ra.

- Enpresa batek bi motako bonboiak ekoizten ditu, kalitate bikainekoak eta kalitate onekoak. Horiek ekoizteko kakaoa eta almendrak erabiltzen ditu, 48 kilo eta 4.5 kilo dituelarik erabilgarri astero, hurrenez hurren. Kalitate bikaineko bonboi kutxa bat ekoizteko 600 gr kakao eta 50 gr almendra behar dira, aldiz, kalitate oneko bonboi kutxa bat ekoizteko 400 gr kakao eta 50 gr almendra.

Kalitate bikaineko kutxa bakoitzagatik 70 €-ko mozkina eta kalitate oneko kutxa bakoitzagatik 40 €-ko mozkina lortzen bada, eta ekoizten den guztiasaltzeko arazorik ez dela jakinik,

- Adieraz ezazu, problema lasaitua ebatziz, enpresaren mozkinak eta salmentak maximizatuko dituen asteko bonboi kutxa ekoizpen eraginkorra.
- Salmenta bat 10 €-ko mozkinaren baliokide bada enpresarentzat, planteatu ezazu problema (eredua zehaztu).
- Kalitate bikaineko kutxa bat lortzeko 7 lan-ordu behar badira eta kalitate oneko kutxa bat lortzeko 4 lan ordu, adierazi bi asteko ekoizpen eraginkor, enpresaren irabaziak eta salmentak maximizatzen direlarik eta erabilitako lanorduak minimizatzen direlarik.

EBAZPENA.

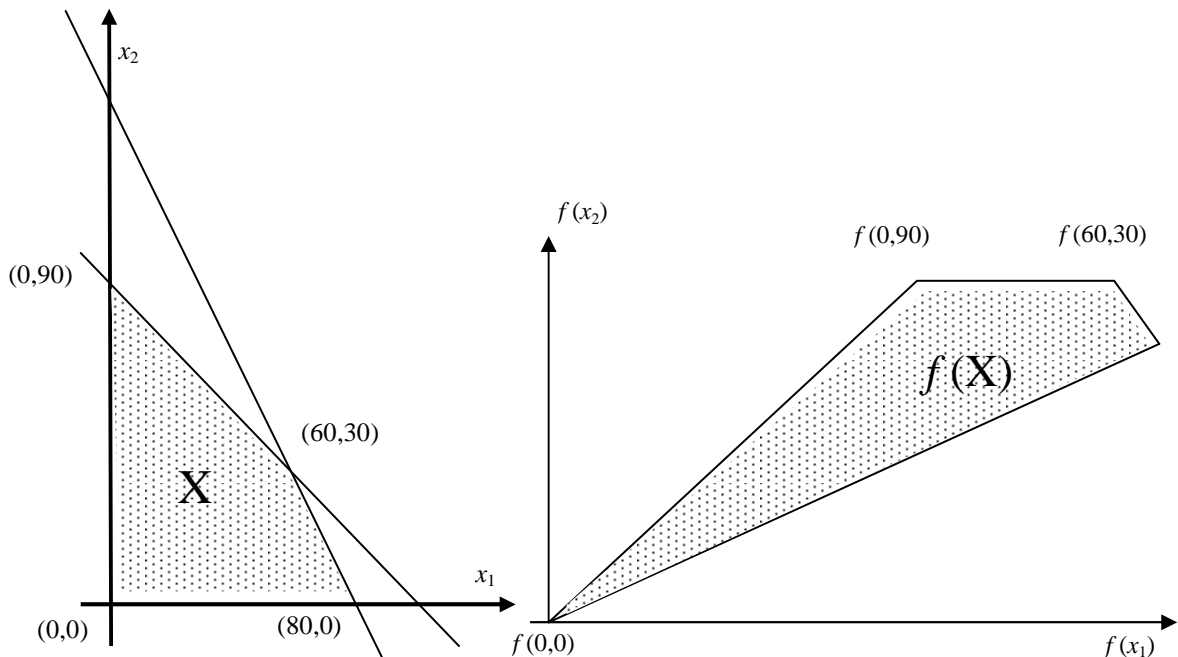
Demagun x_1 = Kalitate bikaineko bonboi kutxak

x_2 = Kalitate oneko bonboi kutxak

a) $\max(70x_1 + 40x_2, x_1 + x_2)$

$$\begin{cases} 600x_1 + 400x_2 \leq 48000 \\ 50x_1 + 50x_2 \leq 4500 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{cases}$$

$f(0,0) = (0,0)$; $f(80,0) = (5600,80)$; $f(0,90) = (3600,90)$; $f(60,30) = (54000,90)$;



Soluzio eraginkorrak: $\overline{(80,0), (60,30)}$.

b)

$$\max((70x_1 + 40x_2) + 10(x_1 + x_2))$$

$$(x_1, x_2) \in X$$

c)

$$\max(70x_1 + 40x_2, x_1 + x_2, -7x_1 - 4x_2)$$

$$(x_1, x_2) \in X$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$ hartuz, eredu honela geratuko da:

$$\max(x_1 + x_2)$$

$$(x_1, x_2) \in X$$

Bere soluzio hoberenak $(0, 90), (60, 30)$ dira, den denak hasierako ereduaren soluzio eraginkorrak.

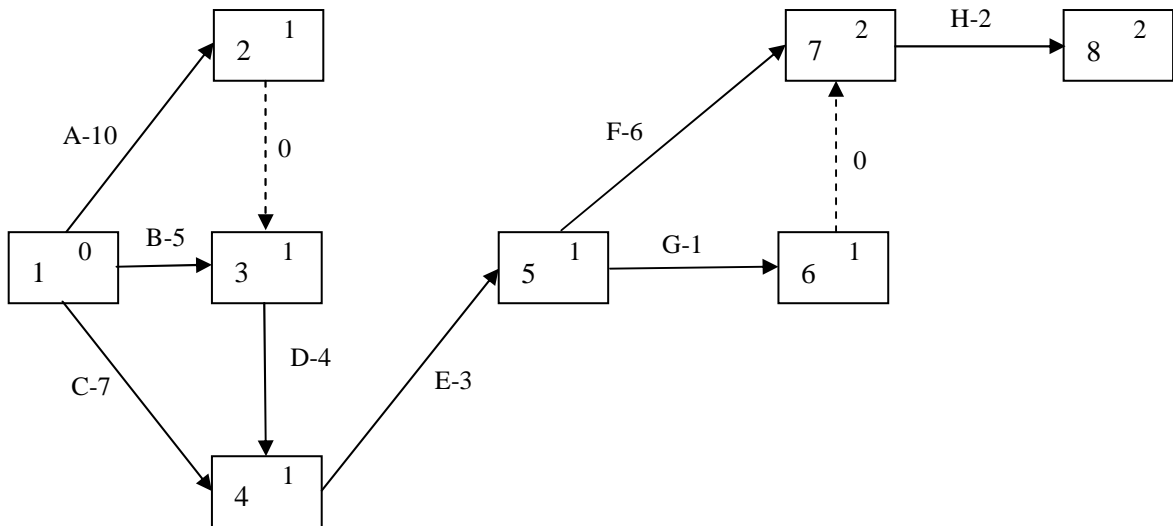
4. Led Zeppelin rock taldea bere agurreko diska prestatzen ari da. Taldeko managerra proiektu berri hori definitzen ari da, berau burutzeko beharrezkoak diren ekintzak, horien iraupenak (astetan) eta beraien arteko erlazioak zehaztuz. Taula honetan adierazten dira datuok:

Ekintza	Deskribapena	Iraupena	Berehalako aurrekoak
A	Abestien konposaketa	10	-
B	Ekoizpena	5	-
C	Azalaren diseinua	7	-
D	Diskaren grabazioa	4	A eta B
E	Fabrikazioa	3	C eta D
F	Promozioa	6	E
G	Abestien erregistroa	1	E
H	Banaketa	2	F eta G

- a) Irudika ezazu proiektu horri dagokion sarea, kalkula ezazu proiektuaren esperotako iraupena eta adieraz ezazu zein den bide kritikoa.
- b) Taldeko managerrak ekintza berri bat ezarri du diskaren arrakasta bermatzeko. Ekintza berri hori bideoklip baten grabaketa da, eta berau diskaren grabazioaren ondoren eta promozio fasearen aurretik egingo da. Bideokliparen grabazioak 5 aste iraungo du. Irudika ezazu proiektu horri dagokion sarea.

EBAZPENA.

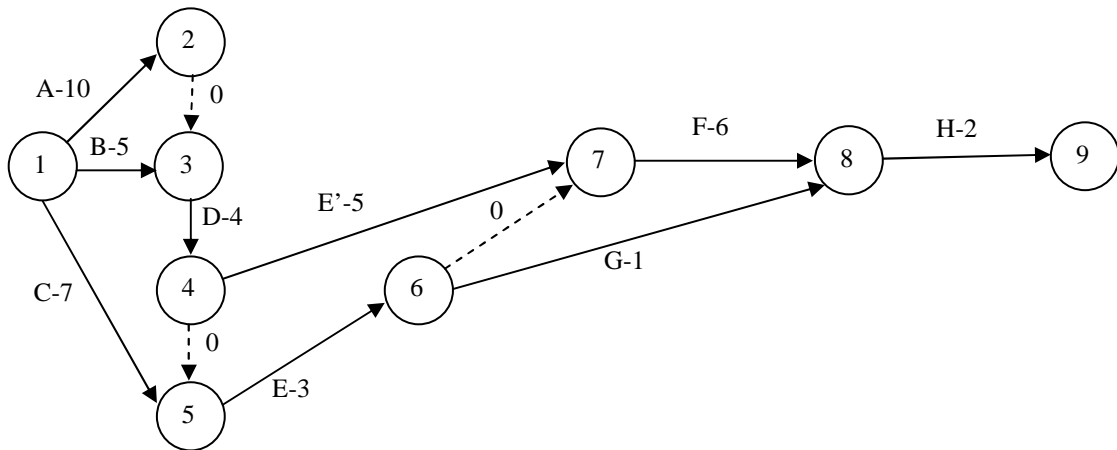
a)



Bide kritikoa: (1,2,3,4,5,7,8)

Proiektuaren iraupena 25 egunekoa da.

b)



IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2010eko ekaina

1. Konpainia batek lau produktu ekoizten ditu: P1, P2, P3 eta P4. Produktu bakoitza hiru ekoizpen solairuetatik pasatzen da: A solairua, B solairua eta C solairua. Solairu bakoitzak 10000 lan orduko gaitasuna du.

Honako taulan produktu bakoitzaren unitateko irabaziak eta solairu bakoitzean produktu bakoitzaren unitate bat egiteko beharrezkoak diren orduak adierazten dira.

Produktua	P1	P2	P3	P4
Unitateko irabaziak	6 €	7 €	8 €	9 €
A solairua	5 ordu	3 ordu	6 ordu	4 ordu
B solairua	4 ordu	6 ordu	3 ordu	5 ordu
C solairua	5 ordu	6 ordu	3 ordu	2 ordu

Produktu bakoitzaren ekoizpenerako kostu finakoak 2800, 4000, 3800 y 4100 € direla jakinik, enpresak gehienez horietako 3 produktu ekoiztea erabaki du. Gainera, honako hau erabaki du:

- P2 ekoiztuko da soilik P3 ekoizten bada.

- P4 ekoizten ez bada, orduan P1 eta P2 ekoiztu behar dira.

- a) Programazio lineal osoko problema bat planteatu, zein produktu ekoiztu behar den eta bakoitzetik zenbat unitate ekoiztu behar diren jakiteko, enpresaren helburua mozkinak maximizatzea delarik.
- b) Enpresak bi solairutan 1000 orduna gehituko ditu. Programazio lineal osoko problema bat planteatu, gehikuntza hori zein solairutan egingo den jakiteko.

EBAZPENA.

- a) Izan bitez aldagai hauek:

$x_i = P_i$ produktuaren unitate kopurua,

$$y_i = \begin{cases} 1 & i \text{ produktua ekoizten bada} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

$$\max [6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 - (2800y_1 + 4000y_2 + 3800y_3 + 4100y_4)]$$

$$\text{m.} \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 10000 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10000 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10000 \\ x_i \leq M y_i \quad (i=1,2,3,4) \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3 \\ y_3 \geq y_2 \\ \left. \begin{array}{l} y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_2 + y_4 \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y_1 + y_2 \geq 2(1 - y_4) \\ x_i \geq 0 \text{ eta osoak; } y_i = 0,1 \\ (i=1,2,3,4) \end{array} \right.$$

M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia izanik.

b)

$$\text{Biz: } z_j = \begin{cases} 1 & j \text{ solairuan 1000 ordu gehitzen badira} \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases} \quad (j = A, B, C).$$

$$\max [6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 - (2800y_1 + 4000y_2 + 3800y_3 + 4100y_4)]$$

$$\text{m.} \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 10000 + 1000 z_A \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10000 + 1000 z_B \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10000 + 1000 z_C \\ x_i \leq M y_i \quad (i=1,2,3,4) \\ z_A + z_B + z_C = 2 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3 \\ y_3 \geq y_2 \\ y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_2 + y_4 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \text{ eta osoak; } y_i = 0,1; z_j = 0,1 \\ (i=1,2,3,4) (j=A,B,C) \end{array} \right.$$

M zenbaki positibo bat eta nahi adina handia izanik.

2. Enpresa bat olibondoak eta ekiloreak hazteko 15 hektareatako lursail baten banaketa antolatzen ari da.

Olibondo landaketaren hektarea bakoitzak 10000 €-tako inbertsioa du eta ekilore landaketaren hektarea bakoitzak 5000 €-tako.

Kontseilu erregulatuak olioeko ekoizpenerako emandako gomendioak jarraituz, olibondo landaketaren zatiak 8 eta 12 hektarea artean egon behar du (biak barne) eta ekilore landaketaren zatiak 2 eta 6 hektarea artean (biak barne).

a) Enpresaren helburuak inbertsioa minimizatzea eta olibondo landaketaren hektareak maximizatzea dira.

Aurkitu grafikoki X soluzio egingarrien multzoa, irudikatu bere irudi multzoa, $f(X)$, eta aurkitu soluzio eraginkorrak.

b) Zerga arrazoiengatik, enpresak gutxienez 140000 € inbertitzeko helmuga ezartzea eta landatutako hektarea kopurua maximizatzea planteatu du, lehentasun orden horrekin.

Planteatu eta ebatzi problema berria.

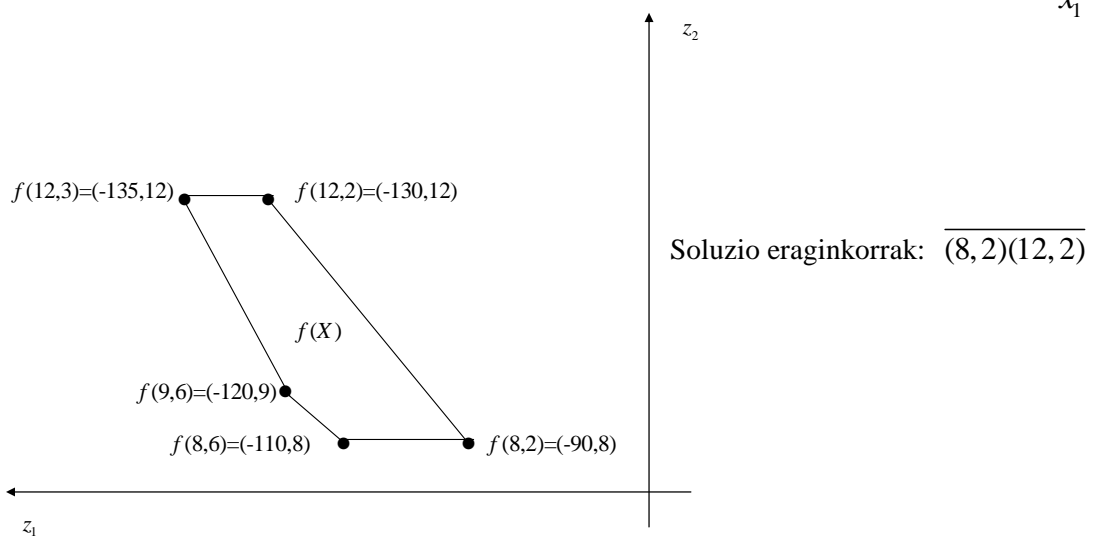
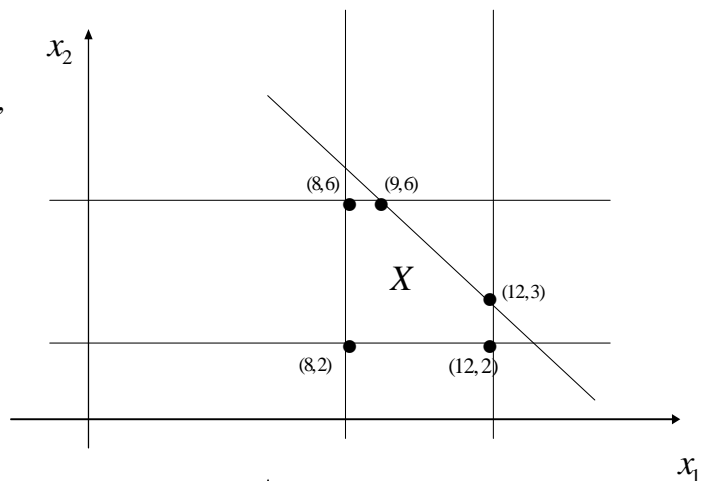
EBAZPENA.

a)

x_1 : olibondo landaketaren hektareak,
 x_2 : ekilore landaketaren hektareak.

$$\max(-10000x_1 - 5000x_2, x_1)$$

$$m. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 \\ 8 \leq x_1 \leq 12 \\ 2 \leq x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



b)

x_1 : olibondo landaketaren hektareak,

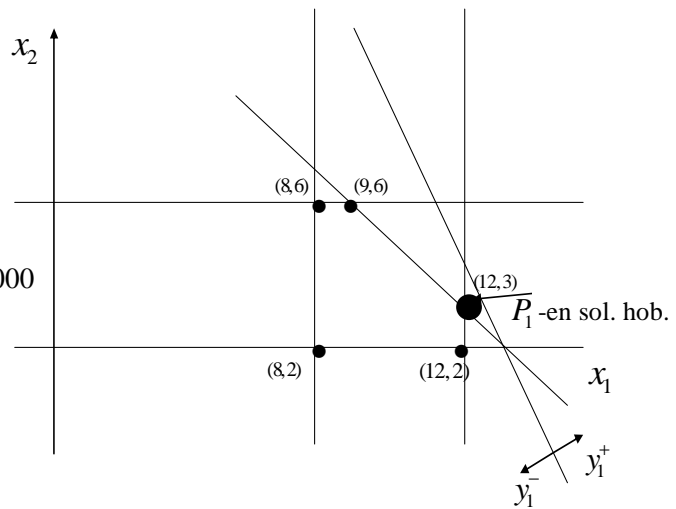
x_2 : ekilore landaketaren hektareak.

$$P \equiv \min L(y_1^-, -x_1 - x_2)$$

$$m. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 \\ 8 \leq x_1 \leq 12 \\ 2 \leq x_2 \leq 6 \\ 10000x_1 + 5000x_2 - y_1^+ + y_1^- = 140000 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$

Ebazten dugu $P_1 \equiv \min(y_1^-)$

$$m. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 \\ 8 \leq x_1 \leq 12 \\ 2 \leq x_2 \leq 6 \\ 10000x_1 + 5000x_2 - y_1^+ + y_1^- = 140000 \\ x_1, x_2, y_1^+, y_1^- \geq 0 \end{cases}$$



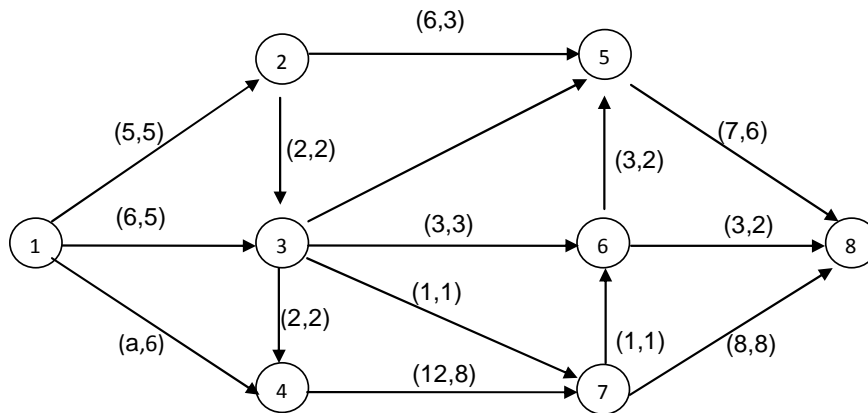
Ebazten dugu $P_2 \equiv \min(-x_1 - x_2)$

$$m. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 15 \\ 8 \leq x_1 \leq 12 \\ 2 \leq x_2 \leq 6 \\ 10000x_1 + 5000x_2 - y_1^+ + y_1^- = 140000 \\ y_1^+ = 0, y_1^- = 5000 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

P_1 problemaren soluzio hoberena puntu bakarria denez, puntu hori izango da P_2 problemaren soluzio hoberena eta beraz, baita ere, P problemarena.

Beraz, olibondo landaketaren zatiak 12 hektarea izango ditu eta ekilore landaketarenak 3 hektarea, guztira 15 hektarea landatzen direlarik eta 135000 €-tako inbertsioa eginik.

3. Demagun sare hau, bikote bakoitzaren lehenengo zenbakiak edukiera adierazten duelarik:



$a \geq 6$ izanik.

- a) (1,4) arkuaren edukiera 6 bada, sarean emandako esleipena fluxu bat al da? Fluxu maximo bat al da? (Arrazoituz erantzun galderak).
- b) Sarean emandako esleipenetik abiatuz, kalkulatu fluxu maximoaren balioa $a = 8$ denean.

EBAZPENA.

a) Sarean emandako esleipena fluxu bat da honako hauengatik:

- 1.- Arku bakoitzaren balioa zenbaki ez negatibo bat da eta ez du arkuaren edukiera gainditzen.
- 2.- Korapilo bakoitzarentzat, abiaburua eta helburua izan ezik, sartutako eta irtendako balioa berbera da:

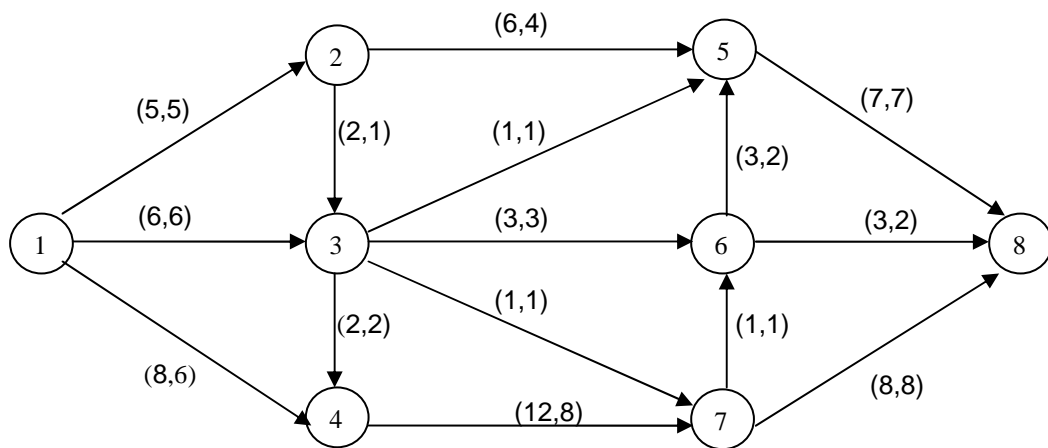
$$\begin{aligned}
 2 \text{ korapiloa: } & 5 = 2 + 3 \\
 3 \text{ korapiloa: } & 5 + 2 = 1 + 3 + 1 + 2 \\
 4 \text{ korapiloa: } & 6 + 2 = 8 \\
 5 \text{ korapiloa: } & 3 + 1 + 2 = 6 \\
 6 \text{ korapiloa: } & 3 + 1 = 2 + 2 \\
 7 \text{ korapiloa: } & 1 + 8 = 1 + 8
 \end{aligned}$$

Fluxu horrentzat, (1,3,2,5,8) katearen arku zuzenak asetu gabe daude eta alderantzizko arkuak fluxu ez nulua du, beraz, kate hori ez dago asetuta. Fluxuaren balioa

$$\Delta = \min\{6 - 5, 2, 6 - 3, 7 - 6\} = 1$$

kantitatean gehitu daiteke, eta ondorioz, fluxu hori ez da maximoa izango.

b) Aurreko ataleko (1,3,2,5,8) katea asetuko dugu orain. Horretarako, (1,3), (2,5) eta (5,8) arkuen fluxuaren balioei 1 balioa gehituko diegu eta (2,3) arkuaren fluxuaren balioari 1 balioa kenduko diogu:



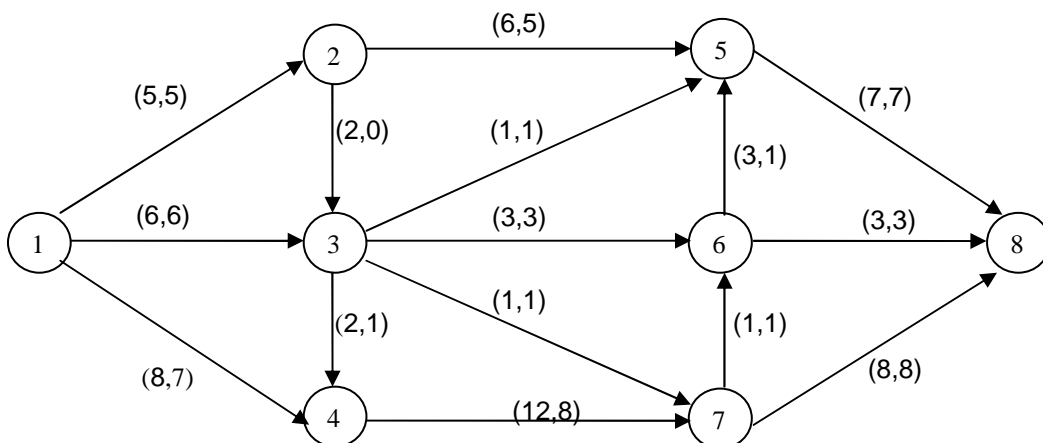
$$V = 16 + \Delta = 17.$$

Fluxu horrentzat, (1,4,3,2,5,6,8) katea asetu gabe dago. Fluxuaren balioa

$$\Delta = \min\{8-6, 2, 1, 6-4, 2, 3-2\} = 1$$

kantitatean gehitu daiteke.

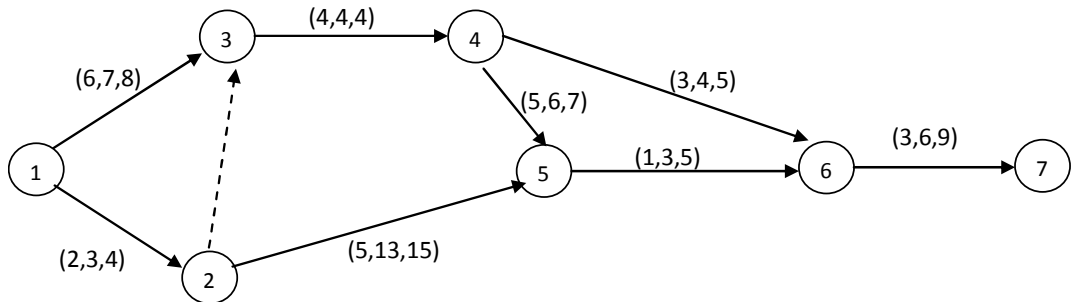
Kate hori asetuko dugu (1,4), (2,5) eta (6,8) arkuen fluxuaren balioei 1 gehituz eta (3,4), (2,3) eta (6,5) arkuen fluxuaren balioei 1 kenduz:



$$V = 17 + \Delta = 18.$$

Fluxu horrentzat kate guztiak asetuta daude (helburura heltzen diren arkuak asetuta daude), beraz fluxu hori maximoa izango da eta bere balioa 18 da.

4. Sare honetan proiektu bat osatzen duten ekintzen arteko aurre-erlazioak irudikatzen dira. Ekintza bakoitzarekin bere iraupen baikorra, probableena eta ezkorra (egunetan) agertzen dira.

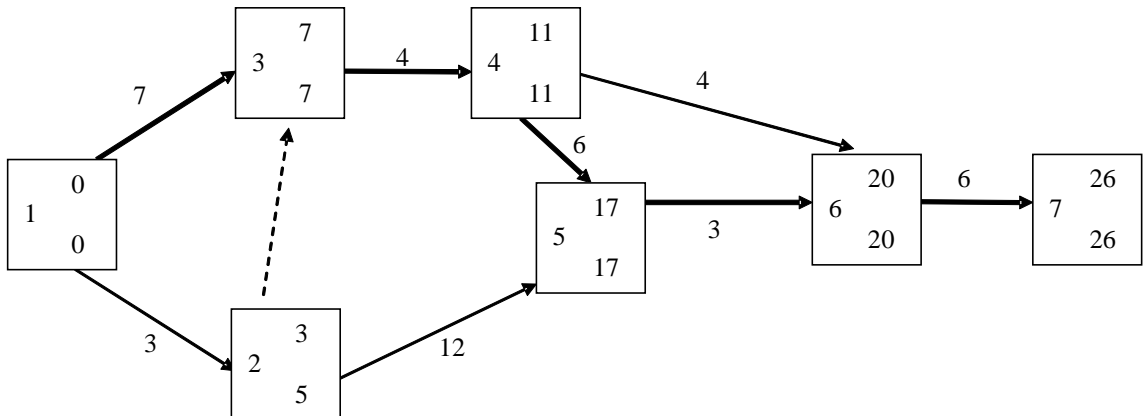


- a) Kalkulatu proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena, bide kritikoa eta iraupenaren bariantza. (1,2) eta (3,4) ekintzen marjinak kalkulatu.
- b) (2,4) arkuak ekintza berri bat sartzen da, beraren batezbesteko iraupena t delarik. Erantzun, arrazoituz, honako galdera hauek:
 - i) t -ren zein balioetarako ez da aldatuko proiektuaren batezbesteko iraupena?
 - ii) t -ren zein balioetarako utziko dio (3,4) ekintzak kritikoa izateari? Zein izango da beraren marjina?

EBAZPENA.

a) PERT metodoaren hipotesien arabera ekintza bakoitzaren batezbesteko iraupen denbora kalkulatzeko da:

$$\bar{t} = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6}$$



Proiektuaren estimatutako batezbesteko iraupena: 26 egun.

Bide kritikoa: (1,3,4,5,6,7).

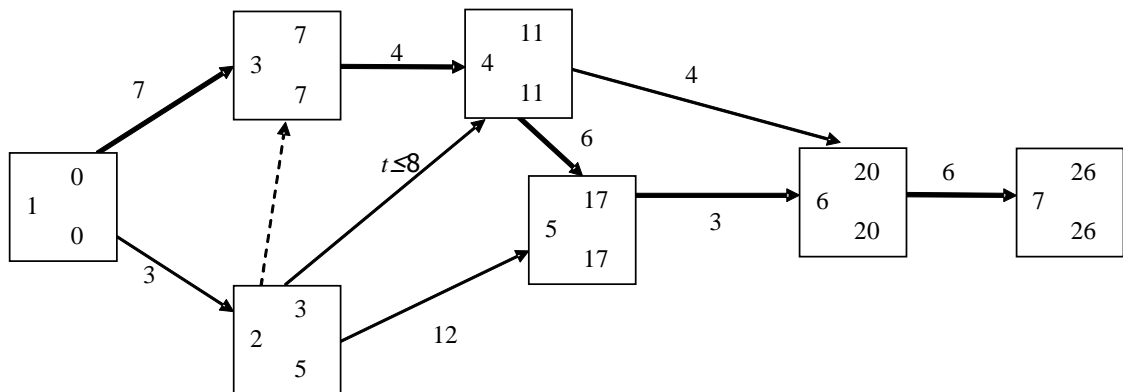
Iraupenaren bariantza: $\sigma_{(1,3)}^2 + \sigma_{(3,4)}^2 + \sigma_{(4,5)}^2 + \sigma_{(5,6)}^2 + \sigma_{(6,7)}^2 = 1.666$.

$M(1,2) = Q(1,2) - P(1,2) - \bar{t}(1,2) = 5 - 0 - 3 = 2$.

$M(3,4) = 0$, ekintza kritikoa delako.

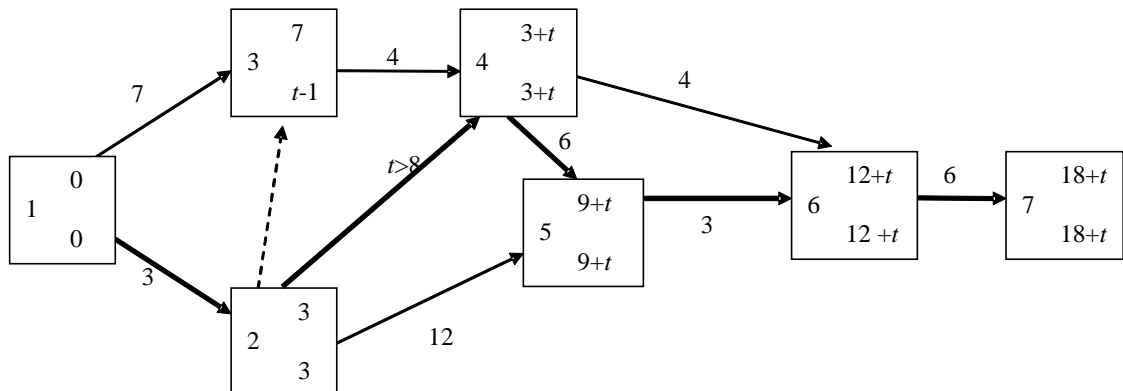
b)

i)



$t \leq 8$ bada, orduan $P(4) = 11$ eta proiektuaren batezbesteko iraupena ez da aldatzen. (1,3,4,5,6,7) bideak kritikoa izaten jarraitzen du.

$t > 8$ bada:



Orduan proiektuaren batezbesteko iraupena $18 + t > 26$ da.

ii) $t \leq 8$ bada, (1,3,4,5,6,7) bideak kritikoa izaten jarraitzen du eta, ondorioz, (3,4) ekintza kritikoa da.

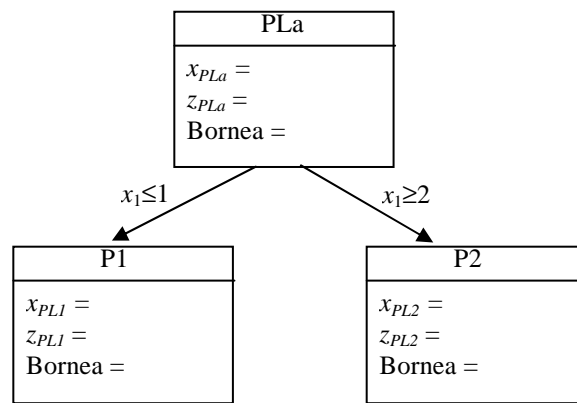
$t > 8$ bada, $(1,2,4,5,6,7)$ izango da bide kritikoa, beraz, $(3,4)$ ekintzak kritikoa izateari utziko dio. Bere marjina honakoa da:

$$M(3,4) = Q(4) - P(3) - \bar{t}(3,4) = 3 + t - 7 - 4 = t - 8.$$

IKERKUNTZA OPERATIBOA (3 EAZL) 2010eko iraila

1. Demagun PLOko problema hau:

$$\begin{aligned} &\max(3x_1+x_2) \\ &\begin{cases} 5x_1+2x_2 \leq 10 \\ 4x_1+x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ eta osoak} \end{cases} \end{aligned}$$

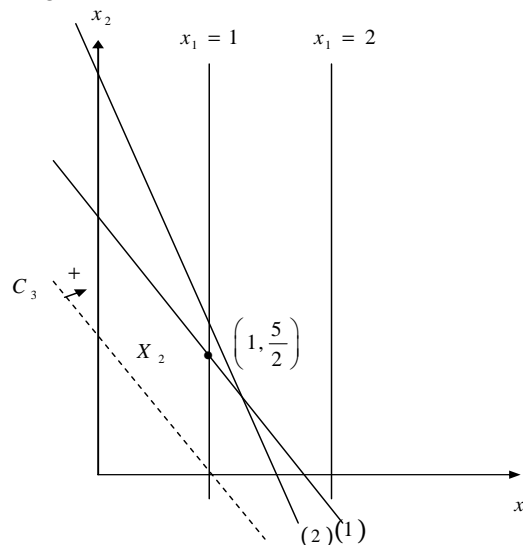


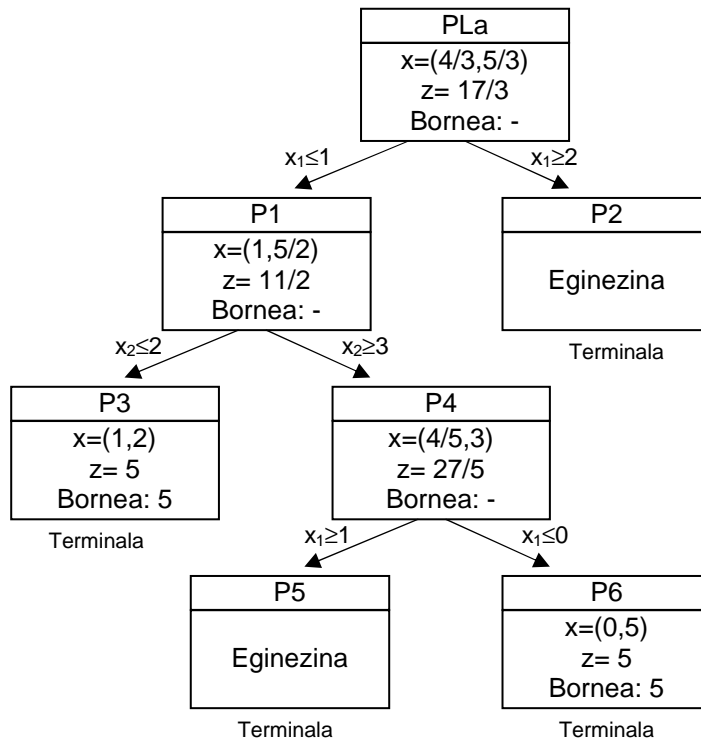
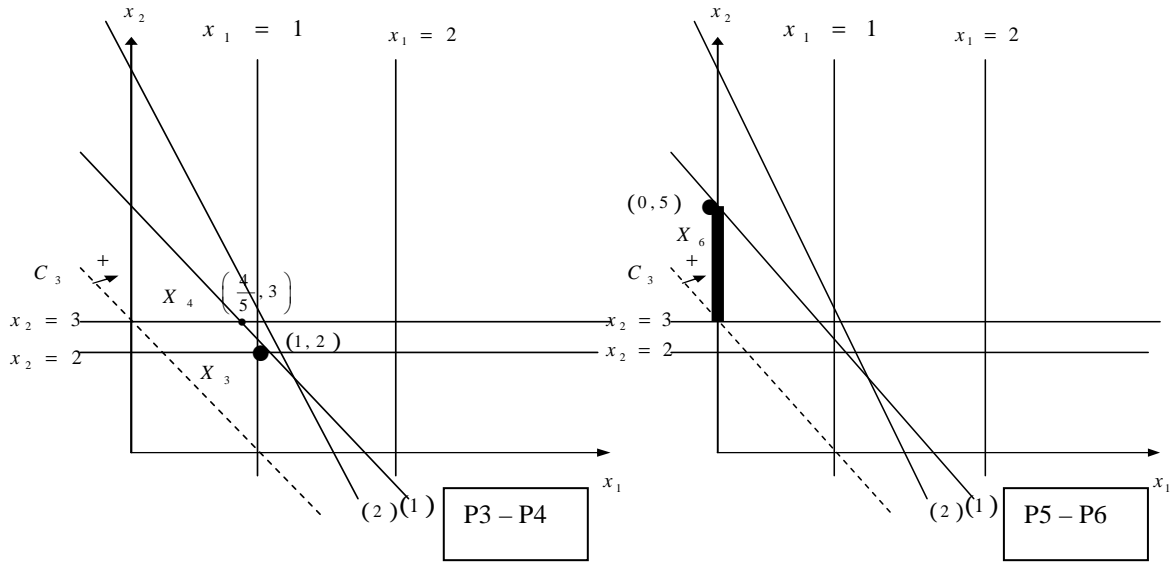
Aurreko problemari adartze eta bornatze metodoa aplikatuz, dagokion zuhaitzean falta diren datuak bete, eta jarraitu soluzio hoberena lortzeko, horrela behar baduzu.

EBAZPENA.

Problema lasaitua ebazten hasiko gara:

$$\begin{aligned} \text{PLa} &\equiv \max(3x_1+x_2) \\ X &= \begin{cases} 5x_1+2x_2 \leq 10 \text{ (1)} \\ 4x_1+x_2 \leq 7 \text{ (2)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$





Beraz, soluzio hoberenak (0,5) eta (1,2) puntuetan daude eta balio hoberena $z=5$ da.

2. Nekazaritza konpainia bat garia eta zekalea hazteko 1000 hektareetako lursailaren jabe da. Gari hazkuntzari eskainitako hektarea bakoitzeko, 150 m.u.-ko kostuarekin 2 tona gari lortzen du, eta zekaleari eskainitako hektarea bakoitzeko, berriz, 200 m.u.-ko kostuarekin 3 tona zekale lortzen du. Datorren denboraldian zereal bakoitzeko 2500 tonako eskaera bete behar du, baina eskaera osoa betetzeko beharko lukeen hainbeste lursail hektarearik ez daukanez, eskaera hori betetzeko falta zaion garia eta zekalea erosi beharko du, gari tona bakoitza 200 m.u.-tan eta zekale bakoitza 180 m.u.-tan.

- a) Formulatu, ebatzi gabe, erabakitzeke zenbat hektarea gari eta zekale hazi behar den eta zenbat tona erosi behar den kostu totalak minimizatzeko eta hazitako lursail hektareak maximizatzeko.
- b) Konpainiak helburuak malgutzea erabakitzen du. Kostu totalak 180000 m.u.-ak ez gainditzea eta hazitako lursail gutxienez 800 hektareatakoa izatea gustatuko litzaioke. Formulatu problema, ebatzi gabe, helmuga hauek kontutan hartuta, eta, gainera, hazitako lursail hektarea bakoitzaren falta kostu totalan m.u. bateko gehiegizkoaren bikoitza baloratzen bada.

EBAZPENA.

Izan bitez honako aldagai hauek:

x_G = Gariari eskainitako hektareak; x_Z = Zekaleari eskainitako hektareak;

y_G = Merkatuan erositako gari tonak;

y_Z = Merkatuan erositako zekale tonak;

a) $\max \left(-(150x_G + 200x_Z + 200y_G + 180y_Z), x_G + x_Z \right)$

$$\begin{cases} 2x_G + y_G = 2500 \\ 3x_Z + y_Z = 2500 \\ x_G + x_Z \leq 1000 \\ x_G \geq 0; x_Z \geq 0; y_G \geq 0; y_Z \geq 0 \end{cases}$$

b) $\min \left(y_1^+ + 2y_2^- \right)$

$$\begin{cases} 2x_G + y_G = 2500 \\ 3x_Z + y_Z = 2500 \\ x_G + x_Z \leq 1000 \\ 150x_G + 200x_Z + 200y_G + 180y_Z - y_1^+ + y_1^- = 180000 \\ x_G + x_Z - y_2^+ + y_2^- = 800 \\ x_G \geq 0; x_Z \geq 0; y_G \geq 0; y_Z \geq 0; y_1^+ \geq 0; y_1^- \geq 0; y_2^+ \geq 0; y_2^- \geq 0; \end{cases}$$

3. Demagun L1, L2, L3, eta L4 enpresa bateko langileak eta A, B, C eta D manufaturatutako lau lan produktu mota direla. Enpresako kalitate-kontrol sailak langile bakoitzak aipatutako produktu bakoitzean egindako batezbesteko okerrak biltzen ditu, taula honetan agertzen den moduan,

	A	B	C	D
L1	4	8	9	3
L2	9	1	6	4
L3	7	3	6	8
L4	6	5	7	—

non – gidoiak aztertzen ez dela adierazten duen.

Produktu bakoitza langile bakarrak egiten badu eta produktu guztiak egiten direla kontutan harturta,

- Langile bakoitzak produktu bakarra egiten badu, esleitu produktu bakoitza langile bakoitzari batezbesteko oker totalak minimizatzeko.
- Krisiaren eraginez, enpresak L4 langilea botatzea eta E produktua manufaturatzea erabaki du. E produktuari dagozkion batezbesteko okerrak taula honetan biltzen dira:

	E
L1	4
L2	9
L3	7

Batezbesteko oker totalak minimizatuko dituzten esleipen hoberenak lortu nahi baditugu, zein taulari aplikatuko zenioke hungariar metodoa bi egoera hauetan?

- Langile bakoitzak gutxienez produktu bat eta gehienez bi egin behar ditu.
- Langile bakoitzak gutxienez produktu bat eta gehienez bi egin behar ditu, baina, gainera, L1 eta L2-k produktu kopuru bera eginez.

EBAZPENA.

- Hungariar metodoa taula honi aplikatuz:

	A	B	C	D
L1	4	8	9	3
L2	9	1	6	4
L3	7	3	6	8
L4	6	5	7	M

4	8	9	3	-3
9	1	6	4	-1
7	3	6	8	-3
6	5	7	M	-5

↔

1	5	6	0
8	0	5	3
4	0	3	5
1	0	2	M

-1 -2

0	5	4	0	
7	0	3	3	-1
3	0	1	5	-1
0	0	0	M	

+1

0	6	4	0
6	0	2	2
2	0	0	4
0	1	0	M

Esleipen hobereena:

L1→D

L2→B

L3→C

L4→A

Batezbesteko oker total minimoa: 16.

b)

i) Hungariar metodoa taula honi aplikatuko genioke:

	A	B	C	D	E	Fiktizioa
L1	4	8	9	3	4	0
L1	4	8	9	3	4	0
L2	9	1	6	4	9	0
L2	9	1	6	4	9	0
L3	7	3	6	8	7	0
L3	7	3	6	8	7	0

ii) Hungariar metodoa taula honi aplikatuko genioke:

	A	B	C	D	E	Fiktizioa
L1	4	8	9	3	4	M
L1	4	8	9	3	4	M
L2	9	1	6	4	9	M
L2	9	1	6	4	9	M
L3	7	3	6	8	7	0
L3	7	3	6	8	7	0

Edo

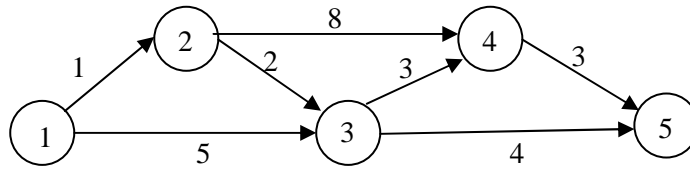
	A	B	C	D	E
L1	4	8	9	3	4
L1	4	8	9	3	4
L2	9	1	6	4	9
L2	9	1	6	4	9
L3	7	3	6	8	7

4. a) Taula honetan proiektua osatzen duten ekintzak, hauen arteko aurre erlazioak eta iraupenak jasotzen dira:

Ekintzak	Berehalako aurrekoak
A	---
B	---
C	A,B
D	A,B
E	D
F	B
G	F
H	E,G
I	E
J	H,I
K	H,I

Eraiki proiektua irudikatuko duen sarea.

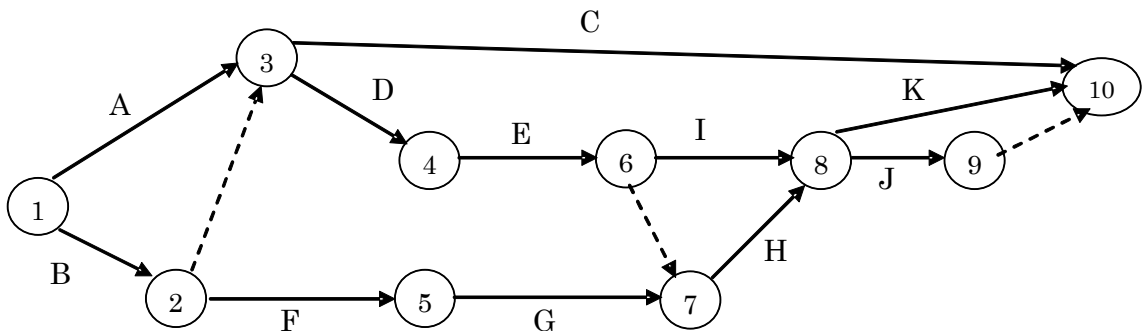
b) Grafo honetan proiektu bat jasotzen da, non arku bakoitzean ekintza bakoitzaren iraupena, egunetan, adierazten den:



- i. Kalkula ezazu: (3,4) ekintzaren hasiera denbora goiztiarrena, (2,3)-ren bukaera denbora berankorrena, (3,5)-en marjina eta beraren bukaera denbora goiztiarrena.
- ii. (2,3) ekintza t egun atzeratzen bada, erantzun, arrazoituz, hurrengo galderak:
 - a. Zein izan beharko da t-ren balioa (3,4)-ren hasiera denbora goiztiarrena aurreko atalean lortutako bera izaten jarraitzeko?
 - b. t-ren balioen arabera, zein da (3,4)-ren bukaera denbora berankorrena?

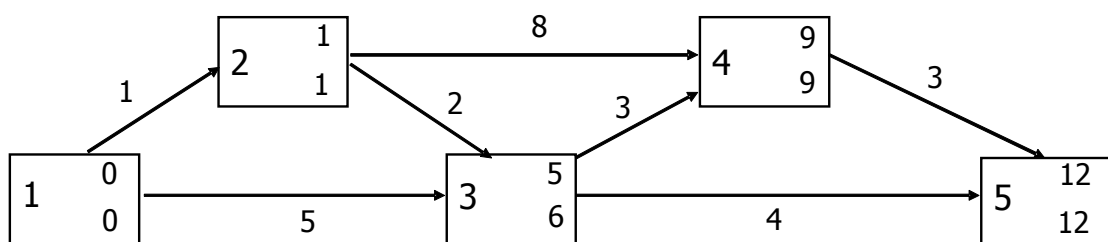
EBAZPENA.

a)



b)

Iraupena 12 egunekoa da. Bide kritikoa: (1,2,4,5):



i)

- $HDG(3,4) = P(3) = 5$
- $BDB(2,3) = Q(3) = 6$
- $M(3,5) = Q(5) - P(3) - t(3,5) = 3$
- $BDG(3,5) = HDG(3,5) + t(3,5) = 9$

ii)

a) $HDG(3,4) = P(3) = \max\{3 + t, 5\} = 5 \Leftrightarrow t \leq 2$

b) $BDB(3,4) = Q(4)$

$t \leq 2$ bada:

$$Q(4) = 9, \text{ beraz } BDB(3,4) = 9$$

$t > 2$ bada:

$$P(3) = 3 + t$$

$$P(4) = \max\{6 + t, 9\}$$

$$t \geq 3 \text{ bada: } P(4) = 6 + t$$

$$P(5) = 9 + t \quad \text{Proiektuaren iraupena}$$

$$Q(4) = 6 + t \quad \text{beraz } BDB(3,4) = 6 + t$$

$$t < 3 \text{ bada: } P(4) = 9$$

$$P(5) = 12 \quad \text{Proiektuaren iraupena.}$$

$$Q(4) = 9 \quad \text{beraz } BDB(3,4) = 9$$

Ondorioz:

$$t \geq 3 \text{ bada: } BDB(3,4) = 6 + t$$

$$t < 3 \text{ bada: } BDB(3,4) = 9$$