



ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA
INDUSTRIAL DE BILBAO



GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

TRABAJO FIN DE GRADO

2014 / 2015

*CARACTERIZACIÓN A IMPACTO DE CAUCHO RECICLADO MEDIANTE
ELEMENTOS FINITOS*

MEMORIA

DATOS DE LA ALUMNA O DEL ALUMNO

NOMBRE: ANE

APELLIDOS: ESCRIBANO CASTRO

FDO.:

FECHA: 10-02-2015

DATOS DEL DIRECTOR O DE LA DIRECTORA

NOMBRE: IRANTZU

APELLIDOS: URIARTE GALLASTEGI

DEPARTAMENTO: INGENIERÍA MECÁNICA

FDO.:

FECHA: 10-02-2015

A Steve, familia y amigos.

Índice general

Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Motivación y propósito	1
1.2. Objeto del Estudio	2
1.3. Estructura del Estudio.....	3
Capítulo 2. Trabajo previo relacionado.....	4
2.1. Caracterización hiperelástica.....	4
2.1.1. Funciones de energía elástica de deformación por unidad de Volumen W	9
2.2. Caracterización viscoelástica	12
2.2.1. VISCOELASTICIDAD LINEAL.....	12
2.2.2. VISCOELASTICIDAD NO LINEAL	19
Capítulo 3. Estudio de alternativas	22
Capítulo 4. Solución adoptada	24
4.1. Marco teórico.....	24
4.1.1. Algoritmo de optimización.....	25
4.1.2. Descripción del Algoritmo PSO	26
4.1.3. Tipos de Algoritmos de PSO	29
4.1.4. Coeficiente de determinación de R^2	30
4.1.5. Ajuste por Mínimos Cuadrados.....	33
4.1.6. Curve fitting para material hiperelástico	37
4.2. Marco metodológico	39
4.3. Técnicas y métodos.....	40
4.3.1. ANSYS	40
4.3.2. MATLAB	40
4.4. Procesamiento de datos	41

4.4.1. Hiperelasticidad	44
4.4.2. Viscoelasticidad	47
Capítulo 5. Resultados y conclusiones	50
5.1. Parte hiperelástica	50
5.1.1. Probetas grandes	50
5.1.2. Probetas pequeñas.....	58
5.2. Parte viscoelástica.....	65
5.2.1. Probetas grandes	65
5.2.2. Probetas pequeñas.....	66
Capítulo 6. Valoraciones de los resultados y posibles líneas futuras	67
Capítulo 7. Conclusiones generales	69
Referencias	70

Índice de tablas

Tabla 1: Relación de probetas grandes ensayadas (densidades comprendidas entre 0.7 y 1 g/cm ³ y velocidades de ensayo entre 0.004 y 4 m/s).	43
Tabla 2: Relación de probetas pequeñas ensayadas (densidades comprendidas entre 0.7 y 1 g/cm ³ y velocidades de ensayo entre 0.004 y 4 m/s).	43
Tabla 3: Constante hiperelástica para probetas grandes obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Neo-Hooke.	50
Tabla 4: Constantes hiperelásticas para probetas grandes obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Mooney-Rivlin.	51
Tabla 5: Constante hiperelástica para probetas grandes (modelo Neo-Hooke) obtenidas mediante Curve fitting.	56
Tabla 6: Constantes hiperelásticas para probetas grandes (modelo Mooney-Rivlin) obtenidas mediante Curve fitting.	56
Tabla 7: Constante hiperelástica para probetas pequeñas obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Neo-Hooke.	58
Tabla 8: Constantes hiperelásticas para probetas pequeñas obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Mooney-Rivlin.	58
Tabla 9: Constante hiperelástica para probetas pequeñas (modelo Neo-Hooke) obtenidas mediante Curve fitting	62
Tabla 10: Constantes hiperelásticas para probetas pequeñas (modelo Mooney-Rivlin) obtenidas mediante Curve fitting	63
Tabla 11: Constantes hiperelásticas para probetas pequeñas obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Mooney-Rivlin.	65
Tabla 12. Constantes viscoelásticas para densidades 0.7, 0.8, 0.9 y 1 g/cm ³ ajustadas para cada curva (probetas grandes)	65
Tabla 13. Constantes viscoelásticas para densidades 0.7, 0.9 y 1 g/cm ³ ajustadas para cada curva (probetas pequeñas).	66

Índice de figuras

Fig. 1. Modelo de Mooney-Rivlin para un vulcanizado de caucho natural.	10
Fig. 2. Comportamiento de un material viscoelástico en función de su deformación	12
Fig. 3. Modelo Maxwell.	14
Fig. 4. Respuesta tensional frente a entrada escalón de la deformación (modelo Maxwell).	14
Fig. 5. Modelo Zener	15
Fig. 6. Respuesta tensional frente a entrada escalón de la deformación (Modelo Zener).	16
Fig. 7. Modelo Kelvin-Voigt.	16
Fig. 8. Generalización de los modelos de Maxwell o Kelvin-Voigt.	17
Fig. 9. Representación gráfica de una partícula en un espacio de direcciones.	29
Fig. 10. Modelos de comunicación básico del PSO.	30
Fig. 11. Detalle de probeta de ensayo de caucho reciclado.	42
Fig.12. Representación del modelo Maxwell generalizado.	49
Fig. 13. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.73 g/cm^3 .	52
Fig. 14. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.82 g/cm^3 .	52
Fig. 15. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.83 g/cm^3 .	53
Fig. 16. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.92 g/cm^3 .	53
Fig. 17. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.93 g/cm^3 .	54

Fig. 18. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 1.01 g/cm ³ .	54
Fig. 19. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 1.03 g/cm ³ .	55
Fig. 20. Comparación ANSYS- MATLAB para caso de probeta grande y densidad 0.92 g/cm ³ .	57
Fig. 21. Comparación ANSYS- MATLAB para caso de probeta grande y densidad 1.01 g/cm ³ .	57
Fig. 22. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.68 g/cm ³ .	59
Fig. 23. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.71 g/cm ³ .	60
Fig. 24. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.89 g/cm ³ .	60
Fig. 25. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.91 g/cm ³ .	61
Fig. 26. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.97 g/cm ³ .	61
Fig. 27. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.99 g/cm ³ .	62
Fig. 28. Comparación ANSYS-MATLAB para caso de probeta pequeña y densidad 0.89 g/cm ³ .	64

Capítulo 1. Introducción

En este capítulo se realiza una introducción al Estudio de Fin de Grado presentado. Se explicará la estructura del documento, el problema abordado, la motivación y el propósito para desarrollarlo, así como la contribución realizada y el ámbito en el que se trabaja.

Este estudio se sitúa en el contexto de la tesis doctoral que lleva por título “Respuesta a impacto de un material fabricado con caucho reciclado de neumáticos”.

1.1. Motivación y propósito

Debido a sus propiedades únicas, los elastómeros son utilizados en múltiples aplicaciones ingenieriles. Entre ellos, cabe destacar el caucho, característico tanto por la hiperelasticidad como por la viscoelasticidad. Este estudio se centra en el caucho reciclado, el cual es un tipo de caucho comúnmente utilizado en aplicaciones técnicas, y se puede encontrar, por ejemplo, en los neumáticos de automóvil.

Teniendo en cuenta los aspectos medioambientales existentes, a los neumáticos de automóvil usados se les da una gran importancia, los cuales suponen un 70% del caucho utilizado en la industria [Waste Magazine]. Este material es difícil de gestionar y eliminar debido a las grandes cantidades de residuo que se generan. El presente trabajo es un estudio preliminar para una posible aplicación del caucho reciclado.

Se espera que, con la fabricación de dicho material, se pueda utilizar en el recubrimiento de los guardarraíles, con el fin de aumentar la seguridad para los motoristas.

Gracias a esta aplicación, se conseguiría dar uso a un material cuyo residuo es muy abundante y que no es medioambientalmente sostenible.

1.2. Objeto del Estudio

El propósito de este estudio es analizar el comportamiento de un caucho reciclado, con el fin de obtener, con ello, un modelo hiper-viscoelástico que caracterice al material.

Como referencia, se elige un modelo compuesto por:

- El modelo Mooney-Rivlin para la parte hiperelástica. Este modelo consta de 3 parámetros de material, los cuales se obtienen y comparan con el modelo de Neo-Hooke, el cual consta de un parámetro de material mediante el método comúnmente conocido como "Ajuste de Mínimos Cuadrados".
- El modelo Yang para la parte viscoelástica. Este modelo también consta de 3 parámetros de material.

Para su desarrollo, se utilizan dos tipos de probetas, de caucho reciclado con diferentes características:

- Densidades de valores: 0.7, 0.8, 0.9 y 1g/cm^3 .
- Dos tamaños diferentes: Uno de diámetro 30 mm y longitud 40 mm, y otro de diámetro 60 mm y longitud 70 mm.

En la parte hiperelástica, una vez obtenidos los parámetros de material mediante el método de ajuste de Mínimos Cuadrados, se procede a la obtención de dichos parámetros mediante una segunda vía: el método de Curve fitting a través del software de Elementos Finitos ANSYS. Con ello, se comprueba que los parámetros obtenidos son fiables.

1.3. Estructura del Estudio

Este documento está compuesto por 7 capítulos, siendo el primero de ellos una introducción general.

En el segundo se expone el trabajo previo realizado relacionado con la tarea de este proyecto, el cual ha servido de base y guía.

El tercer capítulo enuncia las posibles alternativas a utilizar en este estudio, y cuál de ellas ha sido elegida y por qué.

El cuarto capítulo contiene el desarrollo del proyecto, una presentación detallada de los datos utilizados y el trabajo realizado dividido en las fases de “Técnicas y métodos”, y “Procesamiento de datos”, tanto teóricamente como a nivel de experimentación.

En un quinto capítulo, se exponen los resultados obtenidos, así como un análisis de ellos.

En el sexto capítulo se exponen las conclusiones obtenidas de los resultados así como un posible trabajo futuro.

En el séptimo y último capítulo se presentan las valoraciones generales del estudio realizado.

Finalmente se incluye la bibliografía.

Capítulo 2. Trabajo previo relacionado

Tal y como se ha mencionado, este estudio se sitúa en el contexto de la tesis doctoral que lleva por título “Respuesta a impacto de un material fabricado con caucho reciclado de neumáticos”, y al igual que para este estudio, su fin es comprobar si es viable para poder darle uso a este material y colocarlo en los guardarraíles.

En él, se realizan ensayos de compresión a altas velocidades de deformación, obteniendo así unos datos experimentales.

Dichos datos se utilizan como base para obtener los parámetros que caractericen el modelo hiper-viscoelástico de caucho reciclado.

Este estudio realiza una revisión bibliográfica sobre los diferentes modelos estudiados como la parte viscoelástica o la parte hiperelástica.

2.1. Caracterización hiperelástica

Los materiales de carácter elástico presentan un comportamiento en el cual el ciclo carga-descarga tensión-deformación sigue siempre el mismo camino, esto es, la tensión es función de la deformación en ese instante.

Sin embargo, algunos materiales como los polímeros, neumáticos, gomas etc., pueden estar sometidos a grandes deformaciones sin presentar deformación permanente. Dichos materiales son clasificados como materiales hiperelásticos.

Hiperelasticidad es la capacidad de un material para experimentar grandes deformaciones (aproximadamente un 500% en tensión y un 90% a

compresiones elásticas debido a cargas pequeñas), sin perder sus propiedades originales [G. Liang y K. Chandrashekhara, 2008]. Un material hiperelástico se puede obtener a partir de la derivada de la energía de la deformación:

$$\sigma_{ij} = \partial U / \partial \epsilon_{ij}$$

Los materiales hiperelásticos presentan un comportamiento no-lineal, el cual significa que su rigidez, en lugar de ser constante, es función de la deformación. Las principales características de un material con un comportamiento no lineal son:

- Grandes deformaciones.
- No presenta deformaciones permanentes.
- El esfuerzo y la deformación no son proporcionales.

La caracterización hiperelástica comienza con la elección de la función de energía elástica de deformación, la cual poseen todos los materiales elásticos.

Para definir una función de energía elástica, existen dos puntos de vista distintos [Gil-Negrete, 2004]:

1.- Teoría cinética o estadística:

Para obtener las propiedades elásticas del caucho, utiliza modelos idealizados de la estructura del caucho vulcanizado y se basa en las observaciones de que la fuerza elástica del caucho proviene casi completamente del decrecimiento de la entropía al aumentar la extensión aplicada.

Los modelos que se basan en esta teoría son: Treloar (modelo Neo-Hooke), Arruda-Boyce.

2.- Teoría fenomenológica:

Se trata el problema desde el punto de vista de la mecánica del continuo. Los términos de las funciones de la energía de deformación se eligen porque se ajustan a diferentes curvas en lugar de por su interpretación molecular, como el caso anterior.

Se construye un marco matemático para caracterizar el comportamiento del caucho, por lo que no se tiene en cuenta la estructura microscópica o conceptos moleculares.

Los modelos que se basan en esta teoría son: Ogden, Mooney-Rivlin, Gent.

Estas teorías carecen de conexión física directa con el mecanismo de deformación. La técnica consiste en un ajuste de curvas a uno o varios modos de deformación para obtener el valor de las constantes que dependen del material y extrapolarlos a modos de deformación más complejos.

La energía elástica de deformación por unidad de volumen (W) depende de la deformación medida [Rivlin, 1990]:

$$W = W(B) \quad (1)$$

B : Tensor de deformaciones izquierdo de Cauchy-Green $\rightarrow B = F \cdot F^T$

F : Matriz de gradiente de deformación $\rightarrow F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

x_i : Componentes del vector desplazamiento en un sistema de referencia deformado para cada dirección.

X_i : Componentes del vector desplazamiento en un sistema de referencia sin deformar para cada dirección.

Gracias a las extensiones unitarias ($\lambda_i = \varepsilon_i + 1$) y las deformaciones principales, el estado de deformación quedará totalmente definido y la función energía de deformación se puede expresar como:

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, n_1, n_2, n_3)$$

Si el material se considera isótropo, no habrá dependencia direccional:

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Se pueden utilizar las invariantes de deformación en vez de las extensiones unitarias, y, como es un caso de material incompresible, no habrá dependencia del tercer invariante, el cual expresa el cambio de volumen, por lo tanto:

$$W = W(I_1, I_2)$$

I₁: Primer invariante (invariante lineal)

I₂: Segundo invariante (invariante cuadrático)

I₃: Tercer invariante (invariante volumétrico) Considerando las condiciones iniciales I₃=1.

Relacionando las configuraciones no deformada y deformada:

$$x_i = f(X_j) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1}{L_1} X_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 &= \frac{l_2}{L_2} X_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 &= \frac{l_3}{L_3} X_3 = \lambda_3 X_3 \end{aligned}$$

Si se sustituyen estos valores en el tensor de gradiente de deformación F se obtiene la siguiente matriz:

$$[F_{uniaxial}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Si se calcula el tensor de deformaciones izquierdo de Cauchy-Green B mediante la expresión (1):

$$[B] = [F][F]^T = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Así, los invariantes de deformación serán:

$$I_1 = \text{tr} (B) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr} (B)^2 - \text{tr} (B^2)] = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2$$

$$I_3 = \det (B) = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2$$

Como I₃=1 por ser considerado material incompresible:

$$\lambda_3 = 1 / (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \quad \rightarrow \quad \text{Se sustituye ese valor en } I_1 \text{ e } I_2.$$

Según [Rivlin, 1990], al ser material hiperelástico, isótropo e incomprensible, el tensor de tensiones de Cauchy se puede hallar mediante la siguiente expresión:

$$[\sigma] = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) [B] - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} [B]^2 + P[I] \quad (3)$$

Donde: W: función de densidad de energía de deformación

B: tensor de deformaciones

I_1, I_2 : invariantes de la deformación

Se obtienen las tensiones de Cauchy sustituyendo los valores de (2) en (3):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_1^2 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} ((\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \lambda_1^2 - \lambda_1^4) + P \\ \sigma_2 &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_2^2 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} ((\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \lambda_2^2 - \lambda_2^4) + P \\ \sigma_3 &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_3^2 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} ((\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \lambda_3^2 - \lambda_3^4) + P \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Las relaciones de Rivlin se obtienen eliminando las presiones desconocidas de la anterior expresión, quedando así las relaciones entre las tensiones unitarias λ_1, λ_2 y λ_3 , las tensiones principales referidas a las dimensiones deformadas σ_1, σ_2 y σ_3 , y las derivadas parciales de W respecto a las invariantes de deformación I_1 e I_2 .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_3^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\lambda_1^2 - \lambda_3^2} &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^2} &= 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Esta ecuación constitutiva depende completamente de la forma de W. Se verán a continuación algunas de las expresiones más conocidas de la W.

2.1.1. Funciones de energía elástica de deformación por unidad de Volumen W

Se han propuesto muchas formas diferentes de la función energía de deformación, de las cuales, muchas de ellas se ajustan a la determinación empírica de las propiedades elásticas de los vulcanizados de caucho. La elección de la función energía de deformación ha sido tomada por conveniencia, puesto que la más empleada en los programas de EF sea probablemente la formulada por Rivlin. Dicha función es:

$$W = \sum_{ijk=0}^n C_{ijk}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j(I_3 - 1)^k \quad (6)$$

I_1, I_2, I_3 : Invariantes del tensor de deformaciones de Cauchy-Green.

Como se ha mencionado antes, se puede considerar que el material es incompresible, por lo que $I_3=1$, con lo que la expresión anterior se reduce a:

$$W = \sum_{ij=0}^n C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (7)$$

Esta ecuación es una serie que habitualmente se trunca en los primeros términos. Considerando sólo el primer término se llega al **modelo de Neo-Hooke**:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad (8)$$

Sin embargo, si se consideran los dos primeros términos, se consigue llegar al **modelo material de Mooney-Rivlin**, el cual tiene como expresión:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (9)$$

A partir de varios modos de deformación (tracción y compresión uniaxial, tensión cortante simple) [Yeoh, 1990] obtuvo relaciones de tensión-deformación, y las comparó con las que predice el modelo de Mooney-Rivlin:

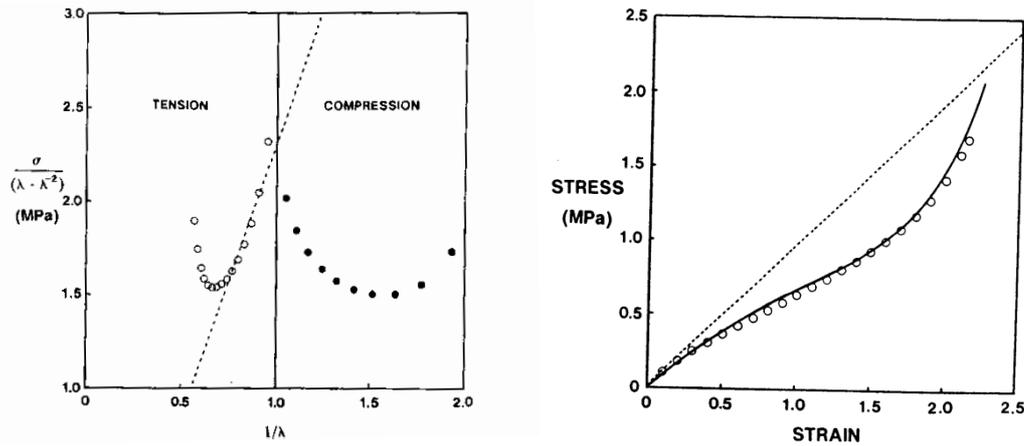


Fig. 1. Modelo de Mooney-Rivlin para un vulcanizado de caucho natural que contiene 70 phr de negro de carbono y 40 phr de negro de carbono, respectivamente. Las líneas discontinuas son la ecuación de Mooney-Rivlin ajustada a datos de tracción en la región aproximadamente lineal.

[Extraído de [Yeoh 1990], Fig. 1]

Tal y como se aprecia en las relaciones, los vulcanizados de caucho relleno de negro de carbono no obedecen completamente a la ecuación de Mooney-Rivlin. Sin embargo, esta ecuación es la ecuación más general para W en términos de las invariantes, y es un modelo que tradicionalmente ha sido uno de los más populares a la hora de caracterizar la elasticidad no lineal de un caucho.

Para funciones de energía de deformación más elevadas, se usa la siguiente aproximación, conocida como aproximación de deformación de tercer orden:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (10)$$

Esta función de energía de deformación de 5 constantes está incorporada en numerosos programas de Elementos Finitos.

Si se considera la aproximación de la deformación de tercer orden de la ecuación (10), se observa que la derivada de W respecto a I_2 viene dada por la **ecuación de Yeoh** [Gil-Negrete, 2004]:

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3) \quad (11)$$

Al ser $\partial W/\partial I_2$ nulo, C_{01} y C_{11} son también nulos, por lo que sustituyendo esto en la ecuación (10) nos queda:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (12)$$

Esta ecuación es una simple ecuación cúbica que podemos encontrar en la teoría fenomenológica de la elasticidad del caucho. Es inusual en el sentido de que no contiene el término $(I_2 - 3)$. Tiene la ventaja de ser obtenida fácilmente a partir de la aproximación de la deformación de tercer orden, y la podemos encontrar en varios programas de Elementos Finitos.

Además de estos modelos, se pueden encontrar otros que se ajusten a la hiperelásticidad. Algunos de ellos son [Gil-Negrete, 2004]:

Modelo de Ogden

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (13)$$

Siendo:

W: Energía de deformación

μ_i y α_i : Parámetros del material.

λ_i : Alargamientos principales.

Se pueden obtener el número de parámetros que se desee para ajustar el material. Sin embargo, se considera que 3 son suficientes para caracterizar caucho reciclado.

Modelo de Gent

$$W = \sum_{i=1}^n C_i (I_i - 3)^i \quad (14)$$

En este caso, la ecuación de la energía de deformación queda en función únicamente de I_1 .

Modelo de Arruda-Boyce

$$W = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) \quad (15)$$

Donde;

μ : Representa el modulo cortante inicial

λ_m : Representa la zona de bloqueo donde la curva de tensión-deformación del material se endurece significativamente.

2.2. Caracterización viscoelástica

Un material viscoelástico es un material que presenta tanto propiedades viscosas como elásticas, esto es, si a un sólido viscoelástico se le aplica una carga, éste recupera parte de la deformación aplicada.

Para deformaciones muy bajas, casi cercanas al equilibrio, existe una relación lineal entre esfuerzo y deformación, encontrándose en la zona denominada “viscoelasticidad lineal”. Para mayores deformaciones, dicha relación deja de ser lineal y se alcanza lo que se conoce como “viscoelasticidad no lineal”.

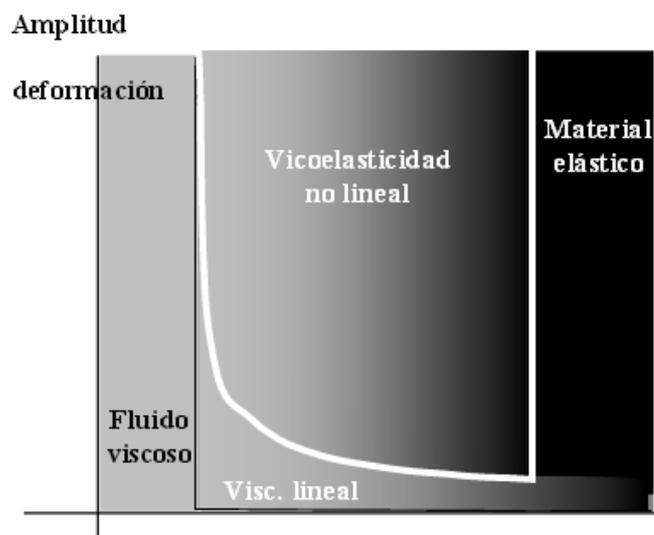


Fig. 2. Comportamiento de un material viscoelástico en función de su deformación.

2.2.1. VISCOELASTICIDAD LINEAL

El desarrollo de la teoría matemática de la viscoelasticidad lineal se basa en el principio de que la respuesta (deformación) a cualquier tiempo es directamente proporcional a su fuerza impulsora (esfuerzo). Las relaciones constitutivas vienen definidas en términos de funciones temporales de la tensión y la deformación, $\sigma(t)$ y $\epsilon(t)$, respectivamente (la respuesta es por tanto, dependiente del tiempo). Las ecuaciones constitutivas pueden definirse por medio de una integral o una ecuación diferencial.

El modelo viscoelástico lineal explica los fenómenos de relajación y *creep*. El término de *creep* se usa para definir la respuesta de deformación creciente frente a una tensión escalón, y el término de relajación define la respuesta de

deformación decreciente frente a una deformación escalón. La viscoelasticidad lineal tiene un rango de aplicación válido sólo para deformaciones muy pequeñas. Para el caso de un material perfectamente elástico tanto la función de *creep* como la de relajación son idénticamente nulas.

El comportamiento de un material viscoelástico lineal, aplicando el principio de superposición de Boltzman, se define gracias a la integral de convolución (o integral hereditaria). El modelo constitutivo se define mediante el módulo de relajación, o análogamente, mediante la *creep confidence*.

Una historia de deformaciones cualquiera $\varepsilon(t)$ puede descomponerse en la suma de un gran número de escalones de deformación, positivos y/o negativos. De aquí aparece la integral de convolución, la cual define la respuesta de tensión lineal viscoelástica para una historia de deformación arbitraria:

$$\sigma(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} E_R(t_2 - t) \frac{d\varepsilon}{dt} dt \quad (16)$$

MODELOS VISCOELÁSTICOS SIMPLES

Para ilustrar los modelos viscoelásticos se usan modelos reológicos, compuestos de muelles y amortiguadores. El comportamiento elástico es representado mediante muelles lineales, y el comportamiento viscoso mediante amortiguadores. La tensión en el muelle lineal es proporcional a la deformación $\sigma = E \cdot \varepsilon$ y la tensión del amortiguador es proporcional a la velocidad de deformación $\sigma = \mu \cdot \dot{\varepsilon}$, donde el punto denota la derivada en el tiempo, y μ es el coeficiente de viscosidad ($N s/m^2$).

A continuación se muestran los modelos más interesantes [Gil-Negrete, 2004]. Se trata de modelos unidimensionales. Para deformación cortante simple, como tensión se usa la tensión cortante (τ), y la deformación (γ) y el modulo de Young será sustituido por el módulo cortante $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

1) Modelo Maxwell

Está compuesto por un muelle, con rigidez constante E , y un amortiguador, con parámetro C , en serie; este amortiguador tiene un grado de libertad interno ε_1^v que representa la deformación a través del mismo.

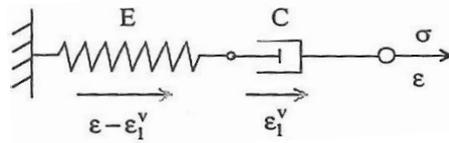


Fig. 3. Modelo Maxwell.

La tensión será la misma en ambos elementos:

$$\begin{aligned} \sigma^e &= E(\varepsilon - \varepsilon_1^v) \\ \sigma^v &= C \dot{\varepsilon}_1^v \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \sigma^e = \sigma^v$$

La ecuación diferencial que se obtiene de esta igualdad puede integrarse:

$$\begin{aligned} \sigma^e &= E(\varepsilon - \varepsilon_1^v) \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma}^e = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1^v) \quad \rightarrow \quad \sigma + \frac{C}{E} \dot{\sigma} = C \dot{\varepsilon} \\ \sigma^v &= C \dot{\varepsilon}_1^v \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_1^v = \frac{\sigma}{C} \end{aligned}$$

Si se aplica una entrada escalón de deformación ε_0 , la tensión se relaja (decae) siguiendo una ley exponencial hasta cero (el material se comporta más como un fluido, no queda tensión residual una vez se ha relajado completamente). La tensión instantánea σ_0 depende del valor de la rigidez del muelle: $\sigma_0 = E \varepsilon_0$

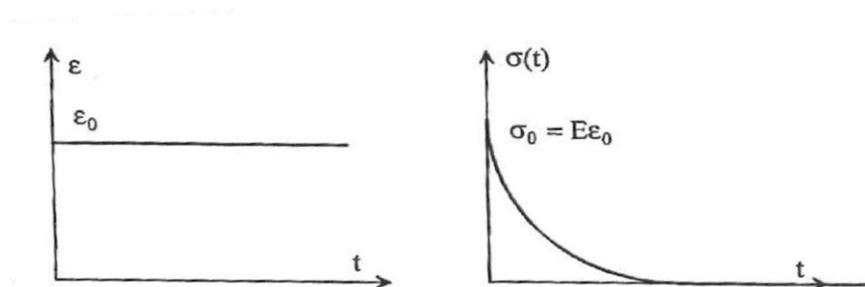


Fig. 4. Respuesta tensional frente a entrada escalón de la deformación (modelo Maxwell).

2) Modelo Zener

El modelo Maxwell no representa correctamente el comportamiento de un material sólido y, por consiguiente, a menudo se acopla en paralelo con otro muelle para formar un modelo más completo:

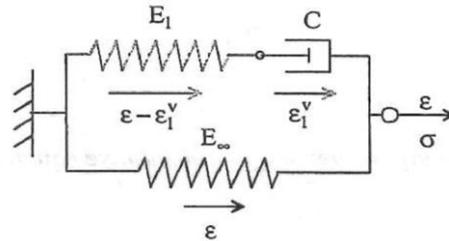


Fig. 5. Modelo Zener.

El efecto de este otro muelle conduce a un comportamiento más realista del material: cuando se aplica una entrada escalón de deformación la tensión no cae hasta cero, sino que llega a un valor linealmente proporcional a la rigidez del muelle que está en paralelo con el modelo Maxwell.

La tensión total será la suma de las tensiones en cada cadena del modelo:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_1(\varepsilon - \varepsilon_1^v) = C_1 \dot{\varepsilon}_1^v \\ \sigma_2 &= E_\infty \varepsilon \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = (E_1 + E_\infty)\varepsilon - E_1 \varepsilon_1^v$$

Donde ε_1^v se resuelve de la ecuación diferencial $E_1(\varepsilon - \varepsilon_1^v) = C_1 \dot{\varepsilon}_1^v$ (como en el caso anterior).

$$\sigma + \frac{C_1}{E_1} \dot{\sigma} = E_\infty \varepsilon + (E_1 + E_\infty) \frac{C_1}{E_1} \dot{\varepsilon}$$

Si se aplica una entrada escalón de deformación ε_0 y se resuelve la ecuación constitutiva, la tensión tendrá la forma:

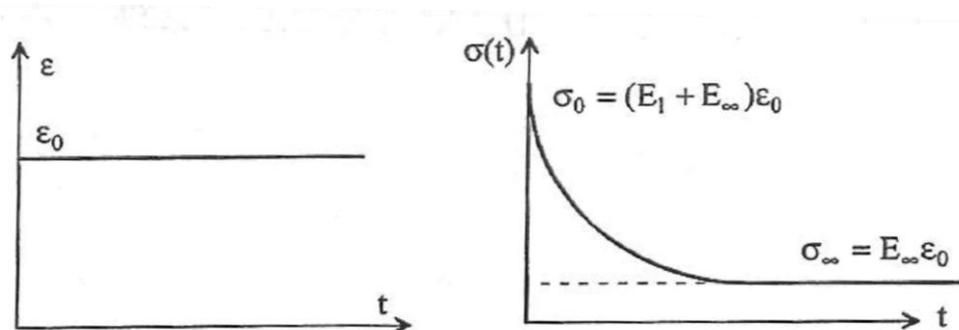


Fig. 6. Respuesta tensional frente a entrada escalón de la deformación (Modelo Zener).

La tensión instantánea dependerá de ambos muelles considerados en el modelo; se trata de la tensión que existiría si no se considerase ningún amortiguador en el modelo, esto es, si el sistema se comportase puramente elásticamente. Una vez el material se relaja, la tensión no se anula, sino que alcanza un valor dependiente del muelle adicional. Este resultado se ajusta mejor a lo que ocurre en realidad a los sólidos.

$$\sigma(t) = \varepsilon_0(E_\infty + E_1 e^{-t/\tau_R}) \quad \text{donde} \quad \tau_R = \frac{C_1}{E_1}$$

Módulo de relajación de Young: $E(t) = E_\infty + E_1 e^{-t/\tau_R}$

A τ_R se le denomina tiempo de relajación.

3) Modelo Kelvin-Voigt

Uno de los modelos más simples y populares que existen consiste en un muelle de rigidez E y un amortiguador de constante C en paralelo.

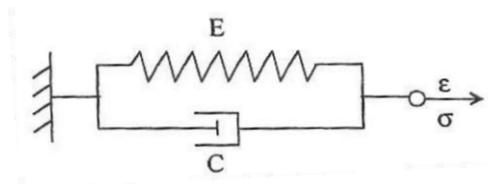


Fig. 7. Modelo Kelvin-Voigt.

$$\sigma_1 = E\varepsilon; \sigma_2 = C\dot{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \sigma = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon}$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

4) Modelos generalizados

Los modelos anteriores pueden generalizarse añadiendo más elementos en serie o en paralelo. Sus propiedades son cualitativamente similares a las del modelo Zener, pero proporcionan un mejor ajuste a los datos experimentales, incrementando el número de parámetros a ser ajustados como contrapartida.

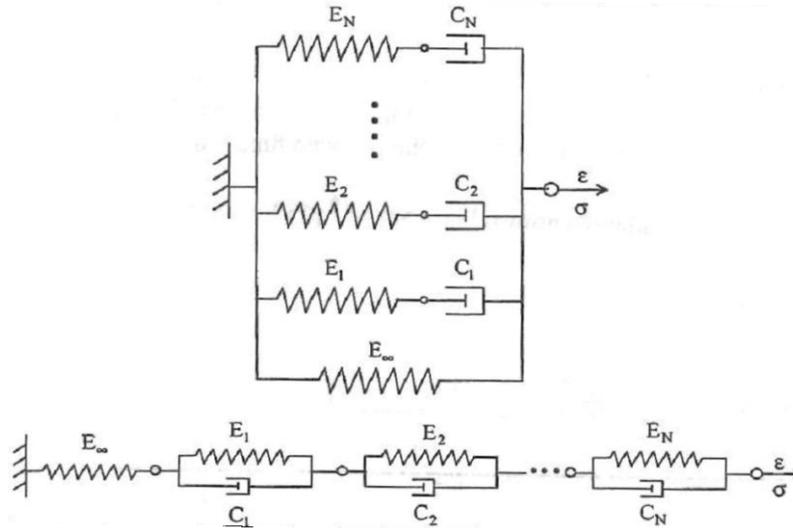


Fig. 8. Generalización de los modelos de Maxwell o Kelvin-Voigt.

De acuerdo con la expresión obtenida por Nashif, según [Gil-Negrete 2004], su ecuación diferencial constitutiva será una generalización de la de los modelos simples e incluirá derivadas adicionales de la tensión y de la deformación:

$$\sigma + \sum_{n=1}^N \alpha_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = E_{\infty} \varepsilon + E_{\infty} \sum_{m=1}^M \beta_m \frac{d^m \varepsilon}{dt^m}$$

donde:

$$\alpha_n = \tau_{Rn} = \frac{C_n}{E_n}$$

$$\beta_m = \alpha_m \left(1 + \frac{E_m}{E_{\infty}}\right)$$

Para una excitación armónica del tipo $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$ la respuesta del sistema será algo más complicada:

$$\sigma_0 = \frac{E_{\infty} \varepsilon_0 (1 + \sum_{m=1}^M \beta_m (j\omega)^m)}{(1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n (j\omega)^n)}$$

Expresión que puede escribirse como: $\sigma_0 = \varepsilon_0 (E_{stor} + jE_{loss})$. Estas E_{stor} y E_{loss} son ahora funciones de la frecuencia mucho más complicadas y podrán ser ajustadas mediante la elección de parámetros α_n y β_m adecuados (o lo que es lo mismo, valores adecuados de E_{∞} , E_i y C_i).

El modelo generalizado de Maxwell es más popular que el de Kelvin-Voigt. Está compuesto por N cadenas de Maxwell en paralelo, cada una asociada a una variable interna ε_i^v . La generalización del modelo de Zener conduce a:

$$\sigma(t) = \sigma_\infty + \sum_{i=1}^N \sigma_i^e = \sigma_\infty + \sum_{i=1}^N \sigma_i^v \quad \sigma_i^e = E_i(\varepsilon - \varepsilon_i^v)$$

$$\sigma_i^v = C_i \dot{\varepsilon}_i^v$$

Para cada cadena de Maxwell:

$$\sigma_i^e = \sigma_i^v \quad \rightarrow \quad E_i(\varepsilon - \varepsilon_i^v) = C_i \dot{\varepsilon}_i^v$$

$$\dot{\varepsilon}_i^v = \frac{1}{\tau_{Ri}} (\varepsilon - \varepsilon_i^v)$$

Siendo $\tau_{Ri} = \frac{C_i}{E_i}$, donde τ_{Ri} representa el tiempo de relajación asociado a cada mecanismo de disipación.

Si se considera un ensayo de relajación, donde la deformación es mantenida constante (ε_0), la tensión resultante en el modelo de Maxwell generalizado será la suma de las tensiones en cada elemento, más la tensión en el muelle de rigidez E_∞ :

$$\sigma(t) = \sigma_\infty + \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^N \varepsilon_0 E_i e^{-t/\tau_{Ri}} \quad (17)$$

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_{Ri}}$$

En la anterior ecuación, el módulo de relajación instantáneo corresponde a $E_\infty + \sum E_i$, mientras que el término estacionario es E_∞ .

Existe una variante de estos modelos reológicos donde el amortiguador se reemplaza por otro elemento llamado "pot". La base matemática para estos elementos se apoya en el cálculo fraccional, que requiere relativamente pocos parámetros para obtener una descripción precisa del comportamiento del material. En la viscoelasticidad clásica, que es la descrita arriba, se utilizan derivadas con números enteros en las ecuaciones constitutivas, mientras que

en el cálculo fraccional se utilizan derivadas de orden fraccional (no enteros), lo cual reduce el número de parámetros.

No obstante, en el presente estudio no se hará uso de dichas relaciones, debido a que en el programa de EF a utilizar (en un paso posterior) no están contempladas, con lo que se dificultaría considerablemente el problema al tener que crear subrutinas con las ecuaciones constitutivas en el programa. Se entiende que en una labor de investigación como ésta puede asumirse el coste computacional que supone el tener que ajustar un mayor número de parámetros, simplificando esta parte de la caracterización del material en cuanto a EF se refiere.

2.2.2. VISCOELASTICIDAD NO LINEAL

El comportamiento viscoelástico lineal está caracterizado por un material que está sujeto a deformaciones pequeñas o lentas. Las propiedades lineales son de gran interés porque están relacionadas con la estructura molecular. Sin embargo, la industria utiliza materiales viscoelásticos con deformaciones largas y rápidas y cuyo comportamiento es no lineal. [J. M. Dealy, 1975]

Cuando las funciones de creep y relajación de carga no se pueden separar, aparece la viscoelasticidad no lineal. Esto ocurre para distintos casos, siendo alguno de ellos:

- Si el material cambia sus propiedades durante la deformación.
- Si los tiempos de la deformación son lo suficientemente largos.
- Si interviene algún otro tipo de relajación.

Existen una gran variedad de modelos no lineales, los cuales son dependientes de unas pocas constantes características del material cuyos valores pueden ajustarse al resultado de los experimentos. [Aleksey D., 1996].

Para estos modelos, las constantes toman valores positivos y al no tener un significado teórico profundo, deben obtenerse por comparación con experimentos.

Para conseguir una expresión que represente la no linealidad del material, partimos de la integral de convolución:

$$\sigma(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} E_R(t_2 - t) \frac{d\varepsilon}{dt} dt \quad (18)$$

Donde $E(t)$ es el modulo de relajación de Maxwell:

$$E(t) = E e^{-Et/n}$$

Usando la aproximación $e^x \approx 1+x$ para pequeños valores de x , el valor de esta integral es: $\varepsilon(0) = E e^{-Et/n}$. Con ello, se puede expresar la integral de la siguiente manera:

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(0) + \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (19)$$

Con el valor 0 del límite inferior de la integral se refiere a un valor 0^+ , justo después de cualquier tensión inicial con valor superior a 0.

Integrando la expresión anterior y dejándola en función de ε , llegamos a la integral conocida como tercera integral hereditaria:

$$\sigma(t) = E(0)\varepsilon(t) - \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (20)$$

Siendo: $R(t) = -dE(t)/dt$

Los modelos viscoelásticos lineales pueden ser formulados de múltiples maneras para expresar los no lineales [P. Kelly, 2013]. Una de ellas puede ser generalizando la anterior expresión:

$$\sigma(t) = f_1(\varepsilon(t)) + \int_0^t R(t - \tau)f_2(\varepsilon(t))d\tau \quad (21)$$

Donde f_1 y f_2 son funciones no lineales del historial de deformación.

La función de relajación también puede estar en función de la deformación así como del tiempo:

$$\sigma(t) = f_1(\varepsilon(t)) + \int_0^t K(t - \tau, \varepsilon)f_2(\varepsilon(t))d\tau \quad (22)$$

Con esto, quedaría definida la integral de convolución con la no linealidad representada en ella.

Tal y como se ha mencionado antes, para ilustrar el comportamiento viscoelástico, se utilizan modelos reológicos, compuestos por muelles y amortiguadores.

Para el caso de la no linealidad, bastaría añadirles en paralelo elementos de fricción, de manera que dependan de la amplitud de la deformación.

Capítulo 3. Estudio de alternativas

El objetivo de este estudio, como ya se ha mencionado previamente, consiste en obtener unos parámetros que caractericen al material de caucho reciclado. Para la obtención de éstos parámetros, se puede optar por varias vías. A modo de resumen:

Para la parte hiperelástica:

- 1- Neo-Hooke: Ecuación constituida con un parámetro de material.
- 2- Mooney-Rivlin: Ecuación constituida, para este caso, de 3 parámetros de material.
- 3- Yeoh: Ecuación que solo depende de la invariante de deformación I_1 .
- 4- Ogden: Ecuación constituida por 3 parámetros de material. Es menos usado que Rivlin en los programas de EF.
- 5- Gent: Ecuación que constituye 2 parámetros de material. También depende sólo de la invariante de deformación I_1 .
- 6- Arruda-Boyce: Ecuación constituida por 5 parámetros de material.

Para la parte viscoelástica:

- Muelles y amortiguadores
 - 1- Modelo Maxwell: A frecuencias muy bajas el módulo complejo tiende a cero, mientras que el factor de pérdidas μ tiende a infinito.
 - 2- Modelo Zener: Más complejo. Similar a Maxwell pero añadiéndole otro muelle en paralelo.
 - 3- Modelo Kelvin-Voigt: Uno de los modelos más simples y populares.
 - 4- Modelos generalizados: Son los modelos anteriores pero añadiendo más elementos en serie o paralelo.

- Integral de convolución
- 5- Modelo de Yang: Se basa en el modelo de Maxwell generalizado pero utilizando la integral de convolución.

Una vez conocidos los tipos de modelos que se pueden usar, se decide hacer los ensayos para los siguientes casos:

Parte hiperelástica:

- Neo-Hooke. Se obtiene un parámetro de material para la parte hiperelástica. Se analiza si un modelo tan simple puede adaptarse bien al caso estudiado.
- Mooney-Rivlin de 3 parámetros para la parte hiperelástica. Se decide utilizar este modelo debido a su sencillez y a su gran uso en los programas de Elementos Finitos.

Con estos dos modelos, se hace una comparación y se examina cual es el que de menos error y si sería suficiente con 1 parámetro de material para caracterizar el material que se estudia.

Parte viscoelástica:

- Yang para la parte viscoelástica. Este modelo también cuenta con 3 parámetros de material. Se ha elegido debido a su sencillez y a su aplicación para el caso unidimensional.

Capítulo 4. Solución adoptada

Teniendo en cuenta los modelos que se van a usar, se utilizan dos herramientas de cálculo para su uso y obtención de parámetros. Estas herramientas son:

MATLAB

Se utiliza esta herramienta para la obtención de parámetros tanto para la parte hiperelástica como para la viscoelástica. Para la primera se desarrolla un modelo matemático basado en Mínimos Cuadrados. Para la segunda se crea un Algoritmo de Optimización.

ANSYS

Mediante éste programa de Elementos Finitos, se obtendrán los parámetros para la parte hiperelástica que caractericen el material gracias al método del Curve Fitting, o lo que es lo mismo, un ajuste de curvas. Una vez obtenidos, se hará una comparación con los obtenidos mediante MATLAB.

4.1. Marco teórico

Se tiene un material que es caracterizado por dos vías: parte hiperelástica y parte viscoelástica. Se comienza explicando el método de actuación para la parte viscoelástica, es decir, el Algoritmo de Optimización.

4.1.1. Algoritmo de optimización

La Inteligencia de Enjambre de partículas “Swarm Intelligence” (SI), es una metáfora de comportamiento computacional que se usa para la solución de problemas distribuidos, inspirado en el comportamiento de sistemas naturales tales como las abejas, hormigas, termitas, bancos de peces etc.

Para este estudio, se va a utilizar un Algoritmo de optimización por nube de partículas “Particle Swarm Optimization” (PSO), el cual es un subconjunto de la Inteligencia de enjambre. El PSO es una técnica informática que proporciona un modelo basado en las poblaciones y está inspirado en el comportamiento social del vuelo de las bandadas de aves o el movimiento de los bancos de peces. El PSO fue originalmente desarrollado por el psicólogo sociólogo James Kennedy y por el ingeniero electrónico Russell Eberhart en 1995, cuyo fin inicialmente era desarrollar métodos de conducta sociales con un enfoque conocido como “metáfora social”, la cual se puede resumir de la siguiente forma [Kennedy, Eberhart y Shi, 2001]: los individuos que conviven en una sociedad tienen una opinión que es parte de un “conjunto de creencias” (el espacio de búsqueda) compartido por todos los posibles individuos. Cada individuo puede modificar su propia opinión basándose en tres principios:

- Su conocimiento sobre el entorno o ADAPTACIÓN.
- Experiencias anteriores del individuo o MEMORIA DEL INDIVIDUO.
- Experiencias anteriores de los individuos del vecindario o MEMORIA DEL VECINDARIO.

Los individuos en la población adaptan o modifican sus opiniones a las de aquellos con más éxito de su entorno. Con el tiempo, los individuos de un entorno adoptan un conjunto de creencias estrechamente relacionado.

El funcionamiento básico en el que se basa el PSO simula el comportamiento del vuelo de las bandadas de aves en busca de comida. La estrategia más lógica a utilizar es seguir al ave que se encuentre más cerca del alimento. PSO emula este escenario para resolver problemas de optimización. Cada solución (partícula) es un “ave” en el espacio de búsqueda, el cual se encuentra siempre en continuo movimiento y nunca muere.

La nube de partículas es un sistema multi-agente, es decir, las partículas son agentes simples que se mueven por el espacio de búsqueda, guardan y comunican la mejor solución que han encontrado.

Un algoritmo PSO trabaja con una población (nube) de soluciones candidatas (partículas), las cuales se desplazan a lo largo del espacio de búsqueda conforme a ciertas reglas matemáticas. El movimiento de cada partícula depende de su mejor posición obtenida, así como de la mejor posición global hallada en todo el espacio de búsqueda. Conforme se van encontrando nuevas y mejores posiciones, éstas pasan a orientar los movimientos de las partículas. El proceso se repite con el objetivo, no garantizado, de hallar en algún movimiento una solución lo suficientemente satisfactoria.

Las principales características de un algoritmo PSO son [Kennedy y Eberhart, 1995]:

- Es una técnica estocástica referida en fases (inicialización y transformación).
- Las partículas son agentes de búsqueda que modifican su dirección en función de las partículas de su vecindario.
- La búsqueda persigue siempre la solución más óptima, y se basa exclusivamente en los valores de la función objetivo.
- Suele tener una convergencia rápida a buenas soluciones.
- El PSO almacena la historia de cada agente, esto es, que la partícula decide su nueva dirección en función de la mejor posición por la que pasó anteriormente.
- El PSO no crea nuevas partículas durante su ejecución.
- Trabaja con la información del problema codificada.

4.1.2. Descripción del Algoritmo PSO

Un algoritmo PSO es un proceso estocástico, es decir, relativo al azar, e iterativo. La posición de cada partícula representa una solución potencial al problema que se está resolviendo. Una partícula, por lo general, está compuesta por tres vectores (su posición), y dos valores de aptitud (también denominado como *fitness*) [Gomes Gonzales, 2008].

- El vector $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$, almacena la posición actual de la partida en el espacio de búsqueda.
- El vector $mejorp_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$, almacena la posición de la mejor solución que la partícula ha encontrado hasta ese momento.
- El vector velocidad $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$, almacena el gradiente, es decir, la dirección según la cual se moverá la partícula.
- El valor de aptitud $aptitud_{x_i}$, almacena el valor de adecuación de la solución actual correspondiente al vector x_i , es decir, almacena el valor de posición de costo.
- El valor de aptitud $aptitud_{mejorp_i}$, almacena el valor de adaptación de la mejor solución local encontrada hasta el momento, correspondiente al vector $mejorp_i$, o lo que es lo mismo, almacena la mejor posición global encontrada.

El proceso algorítmico sigue los siguientes pasos:

- 1- Se inicializa la nube generando las posiciones, bien de forma aleatoria, regular o combinación de ambas.
- 2- Se generan las velocidades aleatoriamente en el espacio de búsqueda, con cada componente en el intervalo $(-v_{max}, v_{max})$, siendo v_{max} la velocidad máxima que pueda tomar una partícula en cada movimiento. No conviene fijarlas a cero ya que no se obtienen buenos resultados. [Kennedy, Eberhart y Shi, 2001].

Las partículas se deben mover desde un proceso iterativo. Para que una partícula se mueva desde una posición del espacio de búsqueda hasta otra, basta con añadir al vector de posición x_i el vector velocidad v_i . Con ello, se obtiene un nuevo vector posición:

$$x_i \leftarrow x_i + v_i$$

- 3- Se calcula la aptitud de cada partícula y se actualizan los valores de $aptitud_{x_i}$ y $aptitud_{mejorp_i}$, conforme se van encontrando mejores valores de aptitudes. El vector velocidad de cada partícula es modificado en cada iteración utilizando la velocidad anterior, un componente *cognitivo* y un componente *social*.

4- El modelo matemático resultante viene definido por:

$$v_i^{k+1} = \Omega^k \cdot v_i^k + \varphi_1 \cdot rand_1 \cdot (mejorpos_i - x_i^k) + \varphi_2 \cdot rand_2 \cdot (mejorpos - x_i^k)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1}$$

Para $i = 1, 2, 3, \dots, P$

Donde:

- x_i^k : vector posición de la partícula i en la iteración k .
- v_i^k : vector velocidad de la partícula i en la iteración k .
- Ω^k : factor de inercia en la iteración k .
- φ_1, φ_2 : modelos que controlan los componentes cognitivo y social.
- $rand_1, rand_2$: números aleatorios entre 0 y 1.
- $mejorpos_i$: mejor posición encontrada por la partícula i hasta el momento que encuentra la mejor solución.
- $mejorpos$: posición de la partícula con la mejor solución de la nube de partículas.

El componente cognitivo está modelado por $\varphi_1 \cdot rand_1 \cdot (mejorpos_i - x_i^k)$, y representa la distancia que hay entre la posición actual, y la mejor conocida por esa partícula, es decir, la decisión que tomará la partícula influenciada por su propia experiencia.

El componente social está modelado por $\varphi_2 \cdot rand_2 \cdot (mejorpos - x_i^k)$, y representa la distancia existente entre la posición actual y la mejor posición del vecindario, o lo que es lo mismo, la decisión que tomará dicha partícula según la influencia que el resto de la nube influye sobre ella.

En la Figura 9 se muestra el movimiento de una partícula en el espacio de direcciones. Las flechas de línea discontinua representan la dirección de los vectores de velocidad actual:

- $v_{mejorpos}^k$: es la velocidad de la mejor posición tomada por la partícula.
- v_g^k : velocidad de la mejor partícula encontrada en la nube.
- v_k : velocidad actual de la partícula

La flecha de puntos representa la dirección de la velocidad de la partícula. La flecha de línea continua representa la dirección que toma la partícula para moverse desde la posición actual x^k hasta la nueva posición x^{k+1} .

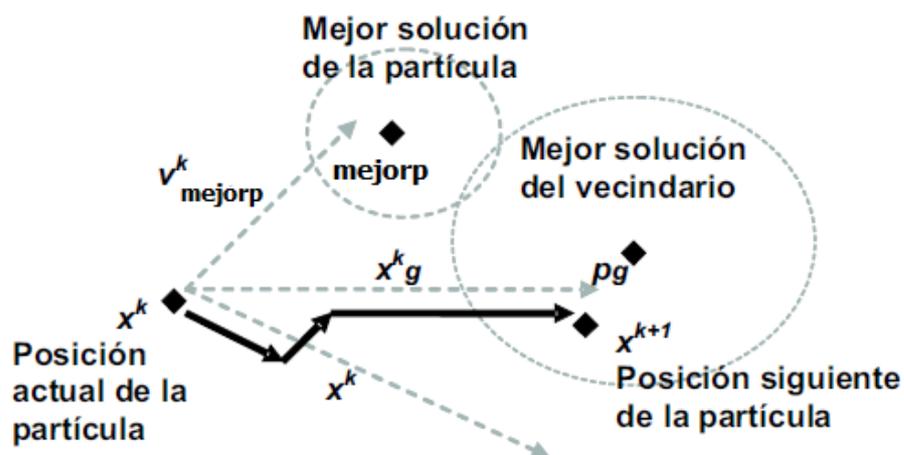


Fig. 9. Representación gráfica de una partícula en un espacio de direcciones.

4.1.3. Tipos de Algoritmos de PSO

Atendiendo a diversos factores de configuración, se pueden obtener distintos tipos de PSO [Kennedy, 1997]:

- 1- Según la importancia de los módulos cognitivo y social, identifica cuatro tipos de algoritmo:
 - 1.1- **Completo:** $\varphi_1, \varphi_2 > 0$. Tanto el componente cognitivo como el social intervienen en el movimiento.
 - 1.2- **Cognitivo:** $\varphi_1 > 0$ y $\varphi_2 = 0$. Sólo interviene el componente cognitivo en el movimiento.
 - 1.3- **Social:** $\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 > 0$. Sólo interviene el componente social en el movimiento.
 - 1.4- **Social exclusivo:** $\varphi_1 = 0, \varphi_2 > 0$ y $mejorp \neq x_i$. La posición de la partícula en sí no puede ser la mejor de su entorno.

- 2- Según el tipo de vecindario utilizado, es decir, la cantidad y posición de las partículas que intervienen en el cálculo de la distancia en la componente social:
 - 2.1- **PSO global:** Sólo existe un líder en la nube y las partículas se relacionan socialmente con todos los individuos de la nube debido a la influencia del líder global.

Cada partícula se comunica con todas las demás en la nube, pudiendo saber de esta forma, quién es la mejor de entre todas ellas.

- 2.2- **PSO local:** La nube se divide en un número n de vecindarios con igual número de individuos, en cada cual existe un líder local que influencia el vuelo de las partículas dentro de su propio vecindario. Aquí, a diferencia del PSO global, las partículas sólo se comunican con sus vecinas e ignoran las posiciones de las demás.

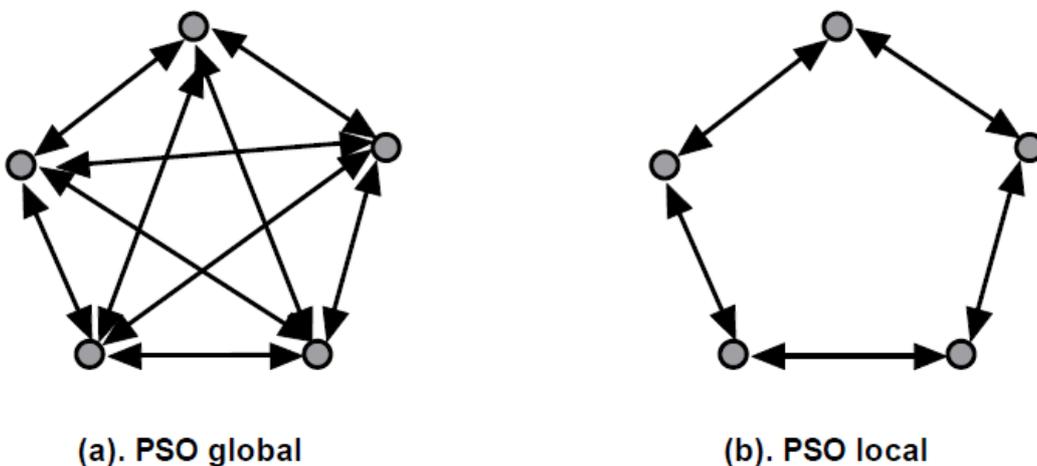


Fig. 10. Modelos de comunicación básico del PSO [Montes Efrén, 2007]

Para trabajar con el PSO, en éste estudio se usan los datos experimentales obtenidos previamente en trabajos anteriores. Debido al elevado número de datos que conlleva cada densidad (hasta 60000), aparecen desviaciones en cuanto a la obtención de gráficas. Por ello, para obtener la mejor solución, se decide utilizar el coeficiente de determinación R^2 .

A continuación, se exponen los métodos empleados para la obtención de parámetros de la parte hiperelástica: Mínimos cuadrados y Curve fitting.

4.1.4. Coeficiente de determinación de R^2

Una de las características de la realidad es la relación existente entre las distintas magnitudes que la definen. Con el análisis de la covariación entre

variables, una Y variable dependiente o endógena, y una o varias variables X, independientes o exógenas, se consigue obtener, para el caso de regresión lineal, una ecuación lineal (o conjunto de ecuaciones lineales) que exprese la relación entre la variable endógena X, y las variables exógenas X. Con esto, se pretende conseguir una línea media que sintetice la dependencia entre la variable Y y las X, con la doble finalidad de explicación o descripción causal de la variable dependiente y previsión de los valores futuros de Y para valores dados de X.

Para su explicación e interpretación, nos basamos en la hipótesis de que la mejor forma de describir la relación entre X e Y, es mediante una línea recta, por lo tanto partimos de la siguiente expresión:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \quad (23)$$

Donde;

u_i ; Componente estocástico.

β_1 y β_2 : Determinan la ecuación lineal concreta que expresa la relación de Y con X.

Se quiere obtener los valores numéricos de dichos parámetros:

$$\hat{Y}_1 = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i = b_1 + b_2 X_i$$

Para ello, se recurre al método de Mínimos Cuadrados [Novales, 1998], el cuál es un método de ajuste que intenta encontrar una función continua dentro de un conjunto de pares ordenados. Se obtiene un sistema de dos ecuaciones que permiten estimar los parámetros de la relación:

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i &= nb_1 + b_2 \sum_i X_i \\ \sum_i Y_i X_i &= b_1 \sum_i X_i + b_2 \sum_i X_i^2 \end{aligned}$$

El carácter de línea media que discurre entre las observaciones, el cual adquiere esta ecuación de regresión, trata de sintetizar dichas observaciones y obliga a que se acompañe de medidas de dispersión que permitan conocer el grado en el que la ecuación pueda sustituir a las observaciones de las que se obtuvo.

De esta forma, se puede definir una primera medida de la dispersión de las \hat{Y}_i observadas respecto a las medias Y_i , calculada como la suma media de desviaciones cuadráticas entre ambas variables:

$$S_e^2 = \frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} \quad (24)$$

Esta expresión recibe el nombre de varianza residual, ya que la diferencia $(Y_i - \hat{Y}_i)$ mide el error (e_i) que cometemos al sustituir el valor observado por el valor estimado o ajustado mediante la regresión. A este error se le conoce como residuo.

Valores elevados de esta varianza indican que los residuos son grandes, por lo que la línea de regresión estimada se aleja mucho de los valores observados y, por tanto, la ecuación es poco representativa. Cuando los residuos son pequeños, dicha representatividad es elevada.

Por definición, se trata de una cantidad positiva que está acotada superiormente por el valor de la varianza de la variable observada:

$$0 \leq S_e^2 \leq S_Y^2$$

La cota superior es fácil de demostrar [Lopez Urquía y Casa Arrutia, 1969] gracias a que en el modelo de regresión lineal se verifica la siguiente relación entre varianzas:

$$S_y^2 = S_R^2 + S_e^2 \quad (25)$$

Donde;

$$S_R^2 = \frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{n} \quad (26)$$

Se trata de la varianza explicada por la regresión. A partir de ella, se puede definir una medida de dispersión relativa para la ecuación de regresión si se compara con la varianza total de Y. Así, mediante la siguiente expresión, se puede definir lo que se conoce como coeficiente de determinación lineal:

$$R^2 = \frac{S_R^2}{S_Y^2} \quad (27)$$

También se puede definir las relaciones anteriores mediante suma de cuadrados, por lo que:

$$STC = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (28)$$

Esta expresión, conocida como Suma Total de Cuadrados, representa la variación total de los valores reales de Y respecto de su media muestral.

$$SEC = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (29)$$

Es la variación de los valores estimados de Y alrededor de su media, la cual se denomina Suma de Cuadrados debida a la Regresión. Y por último:

$$SRC = \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum e_i^2 \quad (30)$$

Es la variación residual de los valores de Y alrededor de la recta de regresión, y que se conoce como Suma de Residuos al Cuadrado. Gracias a estas expresiones, se puede definir el coeficiente R^2 como:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} \quad (31)$$

Sus valores están comprendidos entre: $0 \leq R^2 \leq 1$

- Si $R^2 = 1 \rightarrow$ Ajuste lineal perfecto, ya que $STC=SEC$. La variación total de la variable Y es explicada por el modelo de regresión.
- Si $R^2 = 0 \rightarrow$ No representatividad del modelo lineal, ya que $SEC=0$, con lo que el modelo no explica nada de la variación total de la variable Y.

R^2 es una medida adimensional, de fácil cálculo e interpretación, gracias a su recorrido acotado entre 0 y 1, lo que conduce a una profusa utilización del mismo.

4.1.5. Ajuste por Mínimos Cuadrados

Para obtener las estimaciones de los coeficientes, el método de Mínimos Cuadrados minimiza el sumando de cuadrados residuales. El residual para el i -ésimo punto de datos r_i está definido como la diferencia entre el valor de respuesta y_i observado y el valor de respuesta \hat{Y}_i ajustado, y se identifica como el valor asociado a los datos.

$$r_i = y_i - \hat{y}_i$$

Siendo,

r_i : Valor residual

y_i : Dato

\hat{y}_i : Valor ajustado

El sumando de cuadrados residuales viene dado por la siguiente expresión:

$$S = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (32)$$

Donde n es el número de puntos de datos asociados en el ajuste y S es el error estimado de la suma de cuadrados.

Ajuste de Mínimos Cuadrados lineal

Un modelo lineal se define como una ecuación cuyos coeficientes son lineales. Para ilustrar el proceso de ajuste de mínimos cuadrados lineal, se tiene n puntos de datos que pueden ser modelados por un polinomio de primer grado.

$$y = p_1x + p_2$$

Para resolver esta ecuación teniendo p_1 y p_2 como coeficientes desconocidos, se escribe S como un sistema de n ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si n es mayor que el número de incógnitas, entonces el sistema de ecuaciones se considera sobredeterminado.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - (p_1x_i + p_2))^2 \quad (33)$$

Debido a que el proceso de ajuste por Mínimos Cuadrados minimiza el sumando de cuadrados residuales, los coeficientes se determinan mediante la derivada de S respecto a cada parámetro, igualando el resultado a cero.

$$\frac{\partial S}{\partial p_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (p_1x_i + p_2)) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_2} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - (p_1x_i + p_2)) = 0$$

Las estimaciones de los parámetros reales generalmente suelen estar expresados por b. Sustituyendo b_1 y b_2 para p_1 y p_2 las ecuaciones anteriores quedan:

$$\sum_{i=1}^n x_i(y_i - (b_1x_i + b_2)) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (b_1x_i + b_2)) = 0$$

Con esto, las ecuaciones normales se definen como:

$$b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$b_1 \sum x_i + n b_2 = \sum y_i$$

Resolviendo para b_1 :

$$b_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (34)$$

Y, resolviendo para b_2 , y utilizando la expresión anterior:

$$b_2 = \frac{1}{n} (\sum y_i - b_1 \sum x_i) \quad (35)$$

De forma matricial, los modelos lineales vienen dados con la siguiente fórmula:

$$y = X \cdot \beta + \varepsilon \quad (36)$$

Donde,

y : es un vector de n hasta 1 de respuestas.

β : es un vector de m hasta 1 de coeficientes.

X : es la matriz de diseño del modelo $n \times m$.

ε : es un vector de n a 1 del error.

Para el polinomio de primer grado, las n ecuaciones con dos incógnitas se expresan en términos de y , X y β como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

La solución de Mínimos Cuadrados para el problema es un vector b , que estima el vector de coeficientes β desconocido. Las ecuaciones normales vienen dadas por:

$$(X^T \cdot X) b = X^T \cdot y$$

Donde X^T es la traspuesta de la matriz de diseño X . Resolviendo para b :

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} X^T y \quad (37)$$

Se puede volver a meter b en la fórmula para la obtención de los valores de respuesta previstos, \hat{y} .

$$\hat{y} = X \cdot b = H \cdot y \quad (38)$$

Siendo;

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T$$

El sombrero (circunflejo) sobre la letra define una estimación de un parámetro o una predicción de un modelo. A la matriz de proyección H se le denomina matriz sombrero porque pone el sombrero sobre la letra y .

Los valores residuales vienen dados por:

$$r = y - \hat{y} = (1 - H)y \quad (39)$$

Ajuste por Mínimos Cuadrados no lineal

Un modelo no lineal es definido por una ecuación cuyos coeficientes no son lineales.

De forma matricial, los modelos no lineales vienen dados de la siguiente manera:

$$y = f(X, \beta) + \varepsilon \quad (40)$$

Donde,

y : es un vector de n hasta 1 de respuestas.

f : es una función que depende de X y β .

β : es un vector de m hasta 1 de coeficientes.

X : es la matriz de diseño del modelo $n \times m$.

ε : es un vector de n a 1 del error.

Los modelos no lineales son más difíciles de ajustar que los lineales debido a que los coeficientes no pueden ser estimados utilizando técnicas matriciales sencillas. En lugar de ellos, se deben realizar los siguientes pasos:

- Empezar con una estimación inicial para cada coeficiente.
- Hacer la curva ajustada para el conjunto actual de coeficientes. El valor ajustado de \hat{y} viene dado por:

$$\hat{y} = f(X, b)$$

E implica el valor del Jacobiano de $f(X, b)$, que se define como una matriz de derivadas parciales tomadas con respecto a los componentes.

- Ajustar los coeficientes y determinar si el ajuste mejora. La dirección y la magnitud del ajuste dependen del algoritmo de ajuste.
- Iterar el proceso hasta que el ajuste alcance los criterios de convergencia especificados.

4.1.6. Curve fitting para material hiperelástico

Las constantes hiperelásticas en la función de densidad de energía-deformación de un material determinan su respuesta mecánica. Con el fin de obtener resultados válidos durante un análisis hiperelástico, es necesario evaluar con precisión las constantes de los materiales que están siendo

examinados. Éstas constantes de material se derivan generalmente de un material a partir de datos experimentales de tensión-deformación.

Para el análisis de éste método, se elige el sistema de coordenadas para coincidir con las direcciones principales de deformación. Por lo tanto, el tensor derecho de Cauchy-Green se puede escribir de forma matricial como:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

Donde;

$\lambda_i = 1 + \varepsilon_i$; Relación de deformaciones principal en la i-ésima dirección.

ε_i = Valor principal del tensor de deformación ingenieril en la i-ésima dirección.

Las invariantes principales de C_{ij} son:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1 \text{ (Material incompresible)}$$

Por último, en términos del tensor de tensiones izquierdo de Cauchy, los componentes de la tensión de Cauchy para un material volumétricamente delimitado puede expresarse como:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + dev \left[2 \frac{\partial W}{\partial I_1} b_{ij} - 2I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} b_{ij}^{-1} \right]$$

Siendo;

p = Presión

$b_{ij} = F_{ij} F_{jk}$ = Tensor de deformación izquierdo de Cauchy

Existen varios casos en función del ensayo a realizar (Uniaxial, Biaxial, Planar...). Para el caso estudiado, la tensión va en una dirección. Por ello, debido a la tensión uniaxial, los alargamientos principales vienen dados por:

λ_1 = Alargamiento en la dirección de la carga.

$\lambda_2 = \lambda_3$ = Alargamientos en las direcciones donde la carga no está aplicada

Debido a la incompresibilidad: $\lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1^{-1}$

Por lo tanto: $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$

Para tensión uniaxial, las invariantes vienen dadas de la siguiente manera:

$$I_1 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1}$$

$$I_2 = 2\lambda_1 + \lambda_1^{-2}$$

Sustituyendo los valores principales de la relación de deformación de la tensión uniaxial, se obtienen las siguientes tensiones para las direcciones 1 y 2:

$$\sigma_{11} = -p + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_1^2 - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \lambda_1^{-2}$$

$$\sigma_{22} = -p + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_1^{-1} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \lambda_1 = 0$$

Despejando p y sustituyéndola en la ecuación anterior, se obtiene la tensión principal para la tensión uniaxial:

$$\sigma_{11} = 2(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}) \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (41)$$

4.2. Marco metodológico

El objeto de este estudio es obtener los parámetros que caractericen el material a analizar, en este caso, caucho reciclado, y con ello, poder estudiar su comportamiento.

Para la obtención de parámetros hiperelásticos se utilizan dos vías:

- MATLAB: Mediante el Ajuste de Mínimos Cuadrados
- ANSYS: Mediante el Curve Fitting.

Como datos, se utilizan los obtenidos experimentalmente en trabajos previos. Se decide utilizar ambas vías a modo de comprobación y verificación de que los datos obtenidos sean correctos y fiables.

Para el caso viscoelástico, debido a su complejidad, se obtendrán los resultados únicamente mediante el algoritmo PSO, gracias al programa MATLAB.

4.3. Técnicas y métodos

4.3.1. ANSYS

ANSYS Inc, es un software de simulación ingenieril. Está desarrollado para funcionar bajo la teoría del elemento finito para estructuras y volúmenes finitos para fluidos.

ANSYS desarrolla, comercializa y presta soporte a la ingeniería a través de software de simulación para predecir cómo funcionará y reaccionará determinado producto bajo un entorno real.

En este estudio se trabaja con ANSYS Mechanical APDL (ANSYS Parametric Design Language). Es un lenguaje que se suele utilizar para automatizar tareas comunes o para construir un modelo en términos de parámetros (variables).

El uso de ANSYS para la parte hiperelástica se centra en el Curve Fitting. El Curve Fitting hiperelástico es una herramienta para estimar las constantes de un material a través de datos experimentales y compararlos con modelos de material hiperelásticos. Las curvas de tensión que se obtienen pueden ser transformadas a cualquier modelo hiperelástico que contenga ANSYS. Estos modelos son: Mooney-Rivlin, Ogden, Neo-Hookeano, Polinomial, Arruda-Boyce, Gent y Yeoh.

Para su comparación con los datos experimentales que se poseen, se decide utilizar dos modelos: el modelo Neo-Hookeano debido a su simpleza, y el modelo hiperelástico Mooney-Rivlin, debido a sus características y por ser universalmente el modelo más utilizado.

4.3.2. MATLAB

MATLAB[®] es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación. Mediante MATLAB, es posible analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos o aplicaciones. El lenguaje, las herramientas y las funciones matemáticas incorporadas permiten explorar diversos enfoques y llegar a una solución antes que con hojas de

cálculo o lenguajes de programación tradicionales, como pueden ser C/C++ o Java.

MATLAB se puede utilizar en una gran variedad de aplicaciones, tales como procesamiento de señales y comunicaciones, procesamiento de imagen y vídeo, sistemas de control, pruebas y medidas, finanzas computacionales y biología computacional.

Para este estudio, se utiliza MATLAB tanto para la parte hiperelástica como para la parte viscoelástica, basándose esta última en el ya mencionado Algoritmo de optimización PSO. Gracias a él, se obtienen los parámetros que caracterizan el material.

4.4. Procesamiento de datos

Se dispone de una serie de datos hallados en trabajos previos experimentales. Dichos datos se han obtenido mediante ensayos de compresión a alta velocidad de deformación realizados sobre probetas cilíndricas.

En total, se ha dispuesto de un total de 28 probetas, utilizando dos para cada densidad, excepto para la de mayor densidad, para la cual sólo se dispone de una. Se distinguen dos tipos de probetas, de caucho reciclado con diferentes características:

- Densidades de valores: 0.7, 0.8, 0.9 y 1g/cm^3 .
- Dos tamaños diferentes: Uno de diámetro 30 mm y longitud 40 mm, y otro de diámetro 60 mm y longitud 70 mm.

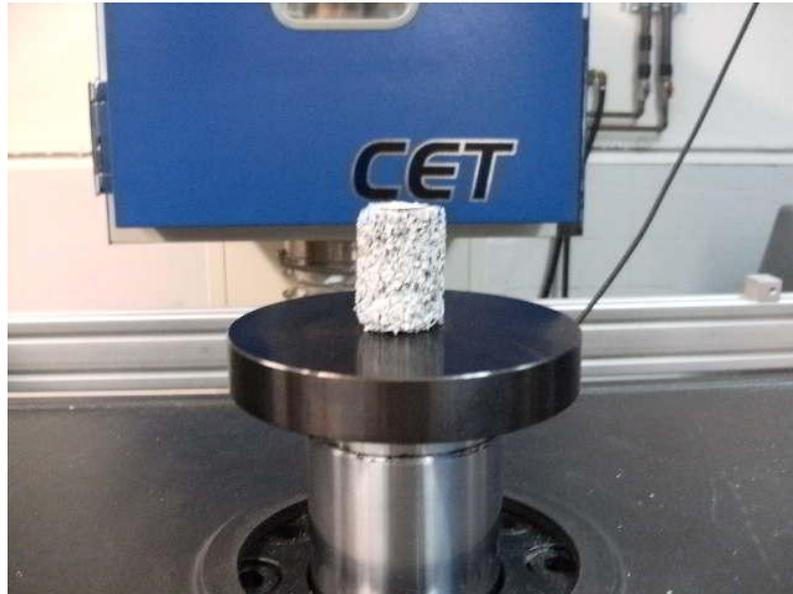


Fig. 11. Detalle de probeta de ensayo de caucho reciclado.

Para los ensayos de compresión a alta velocidad se ha utilizado una máquina MTS 819.10 con un actuador que proporciona hasta 40 kN y carrera de hasta 350 mm.

Cada ensayo se ha realizado a cuatro velocidades de deformación diferentes, correspondientes a las siguientes:

- $\dot{\epsilon} = \frac{v}{L} = \frac{0.004 \text{ m/s}}{0.070 \text{ m}} = 0.057 \text{ s}^{-1}$ (Velocidad = 0.004 m/s)
- $\dot{\epsilon} = \frac{v}{L} = \frac{0.04 \text{ m/s}}{0.070 \text{ m}} = 0.57 \text{ s}^{-1}$ (Velocidad = 0.04 m/s)
- $\dot{\epsilon} = \frac{v}{L} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{0.070 \text{ m}} = 5.71 \text{ s}^{-1}$ (Velocidad = 0.4 m/s)
- $\dot{\epsilon} = \frac{v}{L} = \frac{4 \text{ m/s}}{0.070 \text{ m}} = 57.14 \text{ s}^{-1}$ (Velocidad = 4m/s)

A continuación, se detallan mediante dos tablas, un resumen de los ensayos realizados:

PROBETAS GRANDES											
d=0.7 g/cm ³			d= 0.8 g/cm ³			d=0.9 g/cm ³			d=1 g/cm ³		
0.004	m/s	0.73B	0.004	m/s	0.82A	0.004	m/s	0.92A	0.004	m/s	1.01A
				m/s	0.83A		m/s	0.93A		m/s	1.03A
0.04	m/s	0.72A	0.04	m/s	0.83A	0.04	m/s	0.92A	0.04	m/s	1A
	m/s	0.72B		m/s	0.83B		m/s	0.92B		m/s	1.01A
0.4	m/s	0.72A	0.4	m/s	0.82A	0.4	m/s	0.93A	0.4	m/s	1.02A
	m/s	0.73A		m/s	0.83A		m/s	0.93B		m/s	1.03A
4	m/s	0.73A	4	m/s	0.83A	4	m/s	0.93A	4	m/s	1.02A

Tabla 1. Relación de probetas grandes ensayadas (densidades comprendidas entre 0.7 y 1 g/cm³ y velocidades de ensayo entre 0.004 y 4 m/s).

PROBETAS PEQUEÑAS									
d=0.7 g/cm ³			d=0.9 g/cm ³			d=1 g/cm ³			
0.004	m/s	0.68A	0.004	m/s	0.89A	0.004	m/s	0.97A	
	m/s	0.71A		m/s	0.91A			0.99A	
0.04	m/s	0.72A	0.04	m/s	0.90A	0.04		1A	
	m/s	0.72B		m/s	0.91A			1.03A	
0.4	m/s	0.72A	0.4	m/s	0.90A	0.4		1.01A	
	m/s	0.72B		m/s	0.91A			1.02A	
			4	m/s	0.92A	4		0.99A	

Tabla 2. Relación de probetas pequeñas ensayadas (densidades comprendidas entre 0.7 y 1 g/cm³ y velocidades de ensayo entre 0.004 y 4 m/s).

4.4.1. Hiperelasticidad

En esta parte, se utilizan sólo los resultados de la velocidad más baja, ya que son considerados los ensayos cuasiestáticos. Se considera un caso de tracción unidimensional, en la dirección del eje X. Se denomina λ al alargamiento en dicha dirección. Por lo tanto, los alargamientos principales son:

$$\lambda_1 = \lambda,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$$

A continuación, para la obtención de las invariantes, se exponen el gradiente de deformación resultante F, y el tensor de deformación de Cauchy-Green B

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}$$

$$B = F \cdot F^T = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

Los invariantes son, por tanto:

$$I_1 = \text{tr}(B) = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [I_1^2 - \text{tr}(B^2)] = \lambda^{-2} + 2\lambda$$

$$I_3 = 1 \text{ (Considerado material incompresible)}$$

Recordando las expresiones (3) y (6),

$$\sigma = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) [B] - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} [B]^2 + P[I]$$

$$W = \sum_{ijk=0}^n C_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 3)^k$$

Para la parte hiperelástica, se consideran dos modelos para su caracterización:

1. Modelo Neo-Hookeano

La función de densidad de energía de deformación de Neo-Hooke para un material incompresible es:

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (42)$$

Donde,

C_1 : Constante del material

I_1 : Primer invariante del tensor deformación derecho de Cauchy-Green

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

Siendo λ_i las tensiones principales.

En términos de alargamiento, la diferencia de tensiones de Cauchy para un material hiperelástico incompresible viene dado por:

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \quad (43)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} \quad (44)$$

Como se trata de un material incompresible:

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$$

Derivando respecto a los alargamientos:

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 2C_1\lambda_1; \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 2C_1\lambda_2; \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = 2C_1\lambda_3$$

Bajo extensión uniaxial, sabemos que:

$$\lambda_1 = \lambda$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Por lo tanto, sustituyendo los valores de las derivadas y los alargamientos:

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = 2C_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0 \text{ (Por ser uniaxial)}$$

Asumiendo que no hay tracción a los lados, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$:

$$\sigma_{11} = 2C_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

Con las expresiones anteriores, se llega a la ecuación que se ajusta a los valores experimentales para este modelo cuasiestático. Con ella, se obtiene el parámetro C_1 :

$$\sigma_{11}^e = 2C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (45)$$

2. Modelo de Mooney-Rivlin

Por ser más completo y no exceder su complejidad, se decide usar el modelo Mooney-Rivlin de 3 parámetros.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$$

Teniendo en cuenta que los ensayos realizados son de compresión, en la expresión (3) se tomará $-P[I]$ y suponiendo 1 como la dirección de carga:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^e &= 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda^2 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \lambda^2 - \lambda^4) - P \\ \sigma_{22}^e &= 0 = \sigma_{33}^e \end{aligned}$$

Se deriva W respecto a los invariantes y sustituyendo, queda:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^e &= 2[C_{10} + C_{11}(I_2 - 3)]\lambda^2 + 2[C_{01} + C_{11}(I_1 - 3)](I_1 \lambda^2 - \lambda^4) - P \\ &= 2\lambda^2 C_{10} + 4\lambda C_{01} + C_{11}[2\lambda^2(I_2 - 3) + 4\lambda(I_1 - 3)] - P \end{aligned}$$

Para eliminar P de esa expresión se utiliza $\sigma_{22}^e = 0$.

$$P = 2\lambda^{-1}C_{10} + 2\lambda^{-1}(I_2 - 3)C_{11} + 2(I_1\lambda^{-1} - \lambda^{-2})C_{01} + 2(I_1 - 3)(I_1\lambda^{-1} - \lambda^{-2})C_{11}$$

Desarrollando las expresiones anteriores en función del alargamiento se llega a la ecuación que se ajustará con los valores experimentales de los ensayos cuasi-estáticos. Con ella, se obtienen los 3 parámetros que se buscan C_{10} , C_{01} y C_{11} .

$$\sigma_{11}^e = 2(\lambda^2 - \lambda^{-1})C_{10} + 2(\lambda - \lambda^{-2})C_{01} + 6(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + \lambda^{-1} + \lambda^{-2} - \lambda^{-3})C_{11} \quad (46)$$

Se procede a la obtención de las constantes hiperelásticas C_{10} , C_{01} y C_{11} , primero para probetas grandes, y seguido para las probetas pequeñas. Se utilizan para ellos, dos vías:

- 1- Ajuste por mínimos cuadrados, mediante el Software MATLAB.

- 2- Herramienta Curve Fitting en el software de Elementos Finitos ANSYS. Para ellos, nos basamos en el modelo de Mooney Rivlin de 3 parámetros y en el modelo de Neo-Hooke de 1 parámetro de material.

4.4.2. Viscoelasticidad

Los materiales viscoelásticos dependen de la historia de la deformación o de la velocidad de deformación, es decir, de su historia previa. Según [Yang 200], se puede expresar la relación constitutiva para un material homogéneo, isótropo e incompresible como:

$$\sigma^v = -P^v + F(t) \cdot \Omega_{\tau=-\infty}^t \{C(\tau)\} \cdot F^T(t) \quad (47)$$

siendo:

σ^v : tensor de tensiones de Cauchy.

P^v : presión para un material viscoelástico.

Ω : matriz funcional que describe el efecto de la historia previa de la deformación sobre la tensión.

Una de las numerosas aproximaciones propuestas para representar la funcional Ω para sólidos es la del estudio de [Yang 2000], en el cual se considera que se puede modelizar el comportamiento de un material viscoelástico con deformación finita con pocos parámetros.

Se considera Ω de la siguiente forma:

$$\Omega_{\tau=-\infty}^t \{C(\tau)\} = \int_{-\infty}^t \phi(I_1, I_2) m(t - \tau) \dot{E}(\tau) d\tau \quad (48)$$

Siendo:

\dot{E} : Velocidad de deformación: $\dot{E} = \frac{1}{2}(\dot{F}^T \cdot F + F^T \cdot \dot{F})$

$m(t)$: función de relajación decreciente con el t; en general, se suele considerar compuesta por una serie exponencial (llamada Prony):

$$m(t - \tau) = \sum_{i=1}^N \exp\left(-\frac{t - \tau}{\theta_i}\right)$$

donde θ_i es el tiempo de relajación.

$\phi(\tau)$: función para poder minimizar el número de parámetros de $m(t)$, (aquí, $N=1$):

$$\phi(\tau) = C_2 + C_3(I_2'(\tau) - 3)$$

I_2' es el 2º invariante de $C(\tau)$; que es igual que I_2 del caso hiperelástico.

Se considera que el punto inicial del tiempo es el inicio de la carga. En el tiempo $t > 0$ y para $\tau < 0$ la historia previa de la deformación se ignora; con ello, los límites de integración pasan a ser $[0, t]$ y para $N=1$, la expresión (48) queda:

$$\Omega_{\tau=-\infty}^t \{C(\tau)\} = \int_0^t [C_2 + C_3(I_2(\tau) - 3)] \exp\left(-\frac{t-\tau}{c_4}\right) \dot{E}(\tau) d\tau \quad (49)$$

Sustituyendo la ecuación (48) en la ecuación (46), se llega a la expresión del modelo viscoelástico siguiente, para un material incompresible:

$$\sigma^v = -P^v + F(t) \cdot \left[\int_0^t [C_2 + C_3(I_2(\tau) - 3)] \exp\left(-\frac{t-\tau}{c_4}\right) \dot{E}(\tau) d\tau \right] \cdot F^T(t) \quad (50)$$

Teniendo en cuenta que se utilizarán resultados de ensayos de carga dinámica uniaxial para hallar los valores de los parámetros C_2 , C_3 y C_4 que caracterizan la respuesta viscoelástica a altas velocidades de deformación, si en (50) se sustituye la velocidad de deformación $\dot{E}_{11} = \lambda \dot{\lambda}$ se llega a la relación tensión-deformación en la dirección de carga:

$$\sigma_{11}^v = -P^v + \lambda^2 \int_0^t \lambda [C_2 + C_3(I_2(\tau) - 3)] \exp\left(-\frac{t-\tau}{c_4}\right) \dot{\lambda} d\tau \quad (51)$$

Sabiendo que $\sigma_{22} = 0$, se puede determinar el valor de P^v :

$$P^v = -\frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_0^t \lambda^{-2} [C_2 + C_3(I_2(\tau) - 3)] \exp\left(-\frac{t-\tau}{c_4}\right) \dot{\lambda} d\tau \quad (52)$$

Finalmente, sustituyendo (50) en (51):

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^v &= \lambda^2 \int_0^t \lambda [C_2 + C_3(I_2(\tau) - 3)] \exp\left(-\frac{t-\tau}{c_4}\right) \dot{\lambda} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_0^t \lambda^{-2} [C_2 + C_3(I_2(\tau) - 3)] \exp\left(-\frac{t-\tau}{c_4}\right) \dot{\lambda} d\tau \end{aligned} \quad (53)$$

Básicamente, la ecuación (48) describe un comportamiento viscoelástico análogo al modelo de Maxwell generalizado expuesto previamente (Fig. 8),

donde el módulo no-lineal del muelle y la viscosidad η del amortiguador dependen de la deformación.

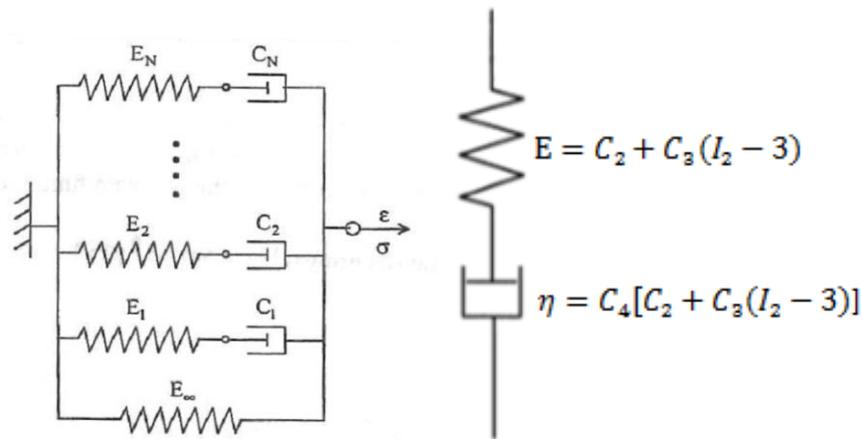


Fig.12. Representación del modelo Maxwell generalizado.

La velocidad de deformación \dot{E} es la suma de las velocidades de deformación del muelle y el amortiguador del modelo Maxwell generalizado:

$$\dot{E} = \dot{E}_E + \dot{E}_\eta .$$

En el caso estudiado, se ha tomado $N=1$ (48), ya que uno de los objetivos es el formular un modelo material con el número mínimo de parámetros a ajustar, de una manera que no comprometa significativamente la correlación con el comportamiento de dicho material. Por lo tanto, recordando la expresión (17):

$$\sigma(t) = E_{\infty}\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^N \varepsilon_0 E_i e^{-t/\tau_{Ri}}$$

Gracias a las constantes halladas en la caracterización hiperelástica (C_{01} , C_{10} , C_{11}), la parte elástica ya estaría definida. La parte viscoelástica vendría definida por el segundo termino de esta expresión. Con ello, para $N=1$, y con la ecuación (48), se define E como:

$$E = C_2 + C_3(I_2 - 3)$$

C_4 es el tiempo de relajación del modelo, siendo $C_4 = \frac{\eta}{E}$, donde η es la constante viscoelástica.

Capítulo 5. Resultados y conclusiones

5.1. Parte hiperelástica

Este apartado se divide en dos subapartados: probetas grandes y probetas pequeñas. Dentro de estos subapartados se realizan tres tipos de ensayos:

- Ajuste por Mínimos Cuadrados para Neo-Hooke.
- Ajuste por Mínimos Cuadrados para Mooney-Rivlin de 3 parámetros.
- Ajuste por Curve Fitting mediante ANSYS.

Se muestra una comparación de cuál de ellos es más aproximado a los datos experimentales. Para una comparación más exhaustiva de los resultados y poder observar mejor las gráficas, véase los anexos donde aparece un resumen de todas ellas.

5.1.1. Probetas grandes

Ajuste Mínimos Cuadrados

a) Neo Hooke

PROBETAS GRANDES							
	$d = 0.7$ g/cm^3	$d = 0.8 g/cm^3$		$d = 0.9 g/cm^3$		$d = 1 g/cm^3$	
Pa	0.73	0.82A	0.83A	0.92A	0.93A	1.01A	1.03A
C₁₀	2.4421e+05	2.3920e+05	2.2625e+05	4.6515e+05	4.4623e+05	3.8515e+05	5.7061e+05

Tabla 3: Constante hiperelástica para probetas grandes obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Neo-Hooke.

En la tabla se puede observar como el parámetro obtenido para el modelo a caracterizar sigue un mismo rango y signo para todos los posibles casos de las probetas pequeñas, teniendo todos ellos, el mismo exponente, siendo el valor más pequeño el de la densidad de 0.83 ($2,26 \cdot 10^5$ Pa) y el mayor el de la densidad de 1.03 ($5,71 \cdot 10^5$ Pa).

b) Mooney Rivlin

PROBETAS GRANDES							
	d = 0.7 g/cm ³	d = 0.8 g/cm ³		d = 0.9 g/cm ³		d = 1 g/cm ³	
	0.73B	0.82A	0.83A	0.92A	0.93A	1.01A	1.03A
C₁₀ (Pa)	1.21E+06	1.15E+06	5.93E+05	2.71E+06	2.65E+06	1.05E+06	2.61E+06
C₀₁ (Pa)	-5.96E+05	-5.40E+05	-1.27E+05	-1.49E+06	-1.46E+06	-	-1.20E+06
						2.24E+05	
C₁₁ (Pa)	7.66E+04	6.67E+04	1.29E+03	2.21E+05	2.17E+05	3.22E+03	1.42E+05

Tabla 4: Constantes hiperelásticas para probetas grandes obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Mooney-Rivlin.

Al observar estos resultados, se puede apreciar como todos ellos siguen el mismo patrón, siendo todos ellos positivos para los valores de C₁₀ y C₁₁, mientras que para el parámetro de C₀₁ son de valor negativo.

También se observa como todos los valores oscilan en torno a un mismo rango. Sin embargo, se aprecia un descenso de valores en el caso de 0.83A y 1.01A. Si analizamos estas excepciones, su error podría deberse al método matemático utilizado en el ajuste. Ocurre lo mismo para el modelo de Neo Hooke.

Se aprecia que, para los valores de C₁₀, a excepción del caso 0.83A, oscilan entre $1,05 \cdot 10^6$ y $2,71 \cdot 10^6$ Pa, siendo un rango muy pequeño, y sin seguir un orden concreto.

Para el caso de C₀₁, se observa que el rango de valores es bastante más amplio, entre $-1,49 \cdot 10^6$ y $-1,27 \cdot 10^5$ Pa. Curiosamente, para estos valores negativos, el caso de 0.83A no se aleja tanto de los demás valores, acercándose mucho al caso de 1.01A. Sin embargo, cabe mencionar que no deja de ser el valor más elevado de la serie.

Por último, los valores de C_{11} se observa que su variación todavía es mayor, siendo entre $1,29 \cdot 10^3$ y $2,21 \cdot 10^5$ Pa, siendo el menor de los casos el de 0.83A y siguiéndole el también mencionado 1.01A.

Se muestran a continuación, las comparaciones realizadas para cada densidad y cada modelo, pudiendo observar cuál de los dos se acerca más a los ensayos obtenidos experimentalmente:

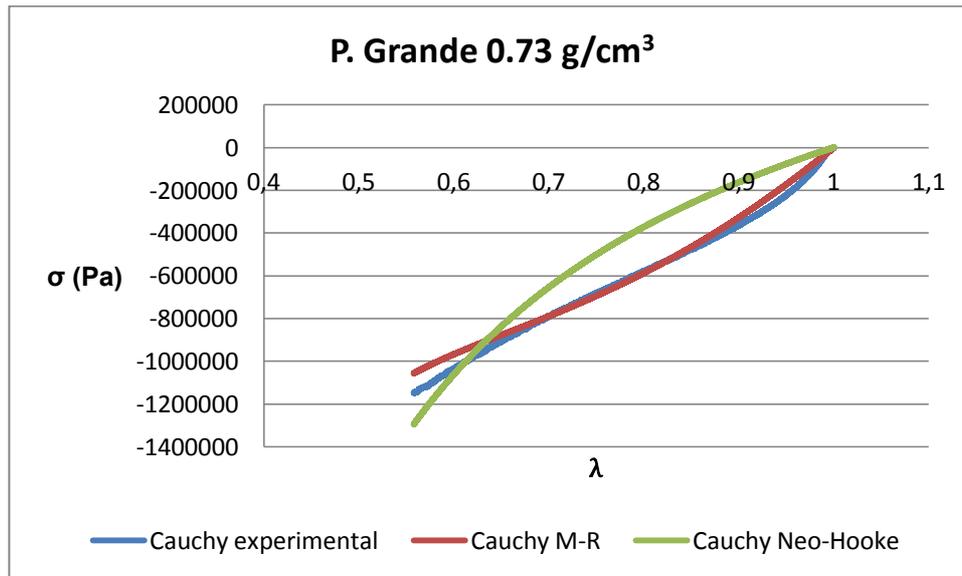


Fig. 13. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.73 g/cm^3 .

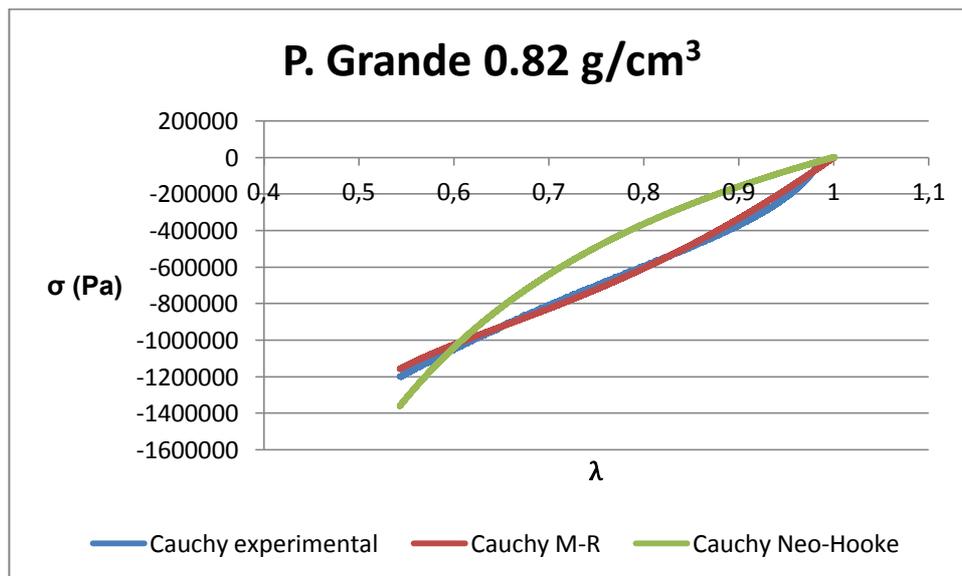


Fig. 14. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.82 g/cm^3 .

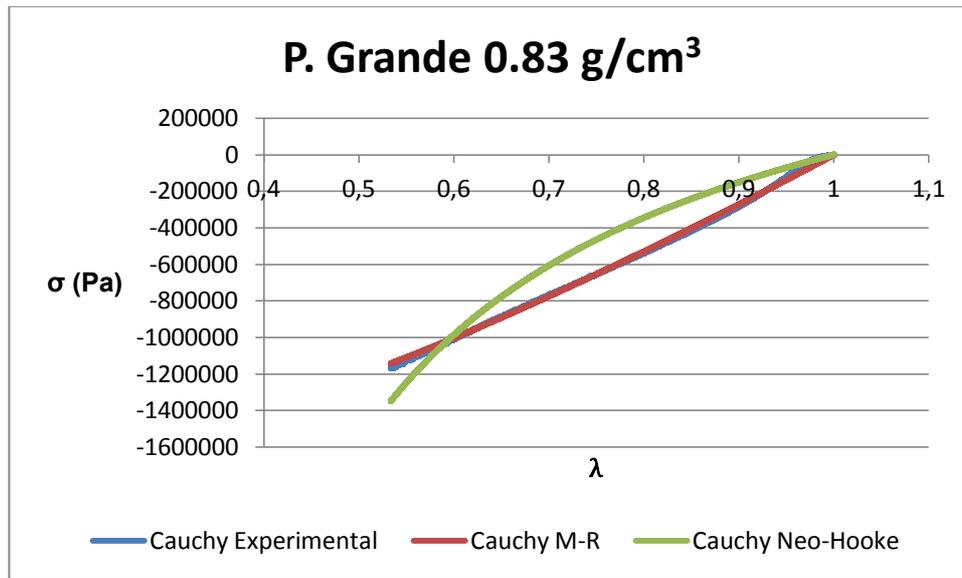


Fig. 15. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.83 g/cm³.

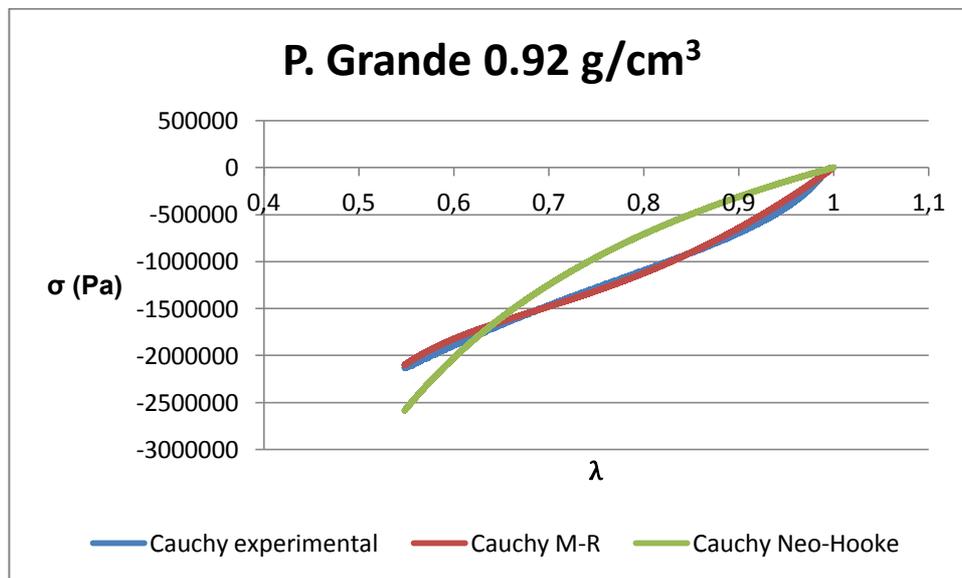


Fig. 16. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.92 g/cm³.

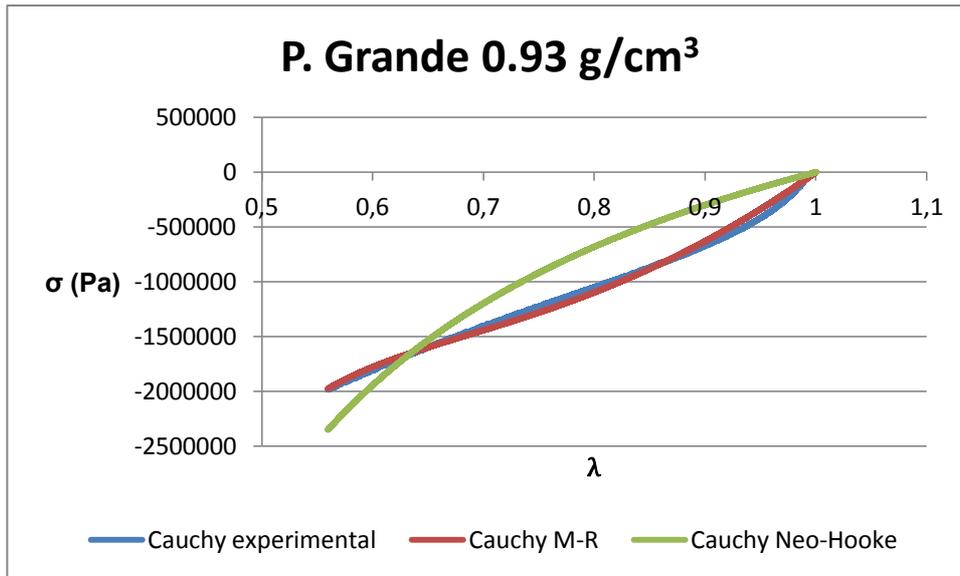


Fig. 17. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 0.93 g/cm³.

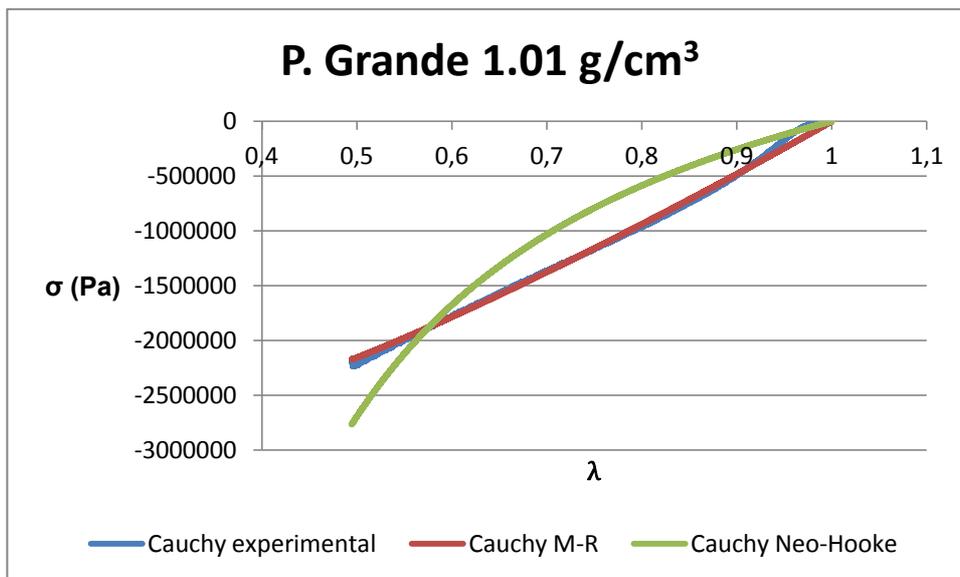


Fig. 18. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 1.01 g/cm³.

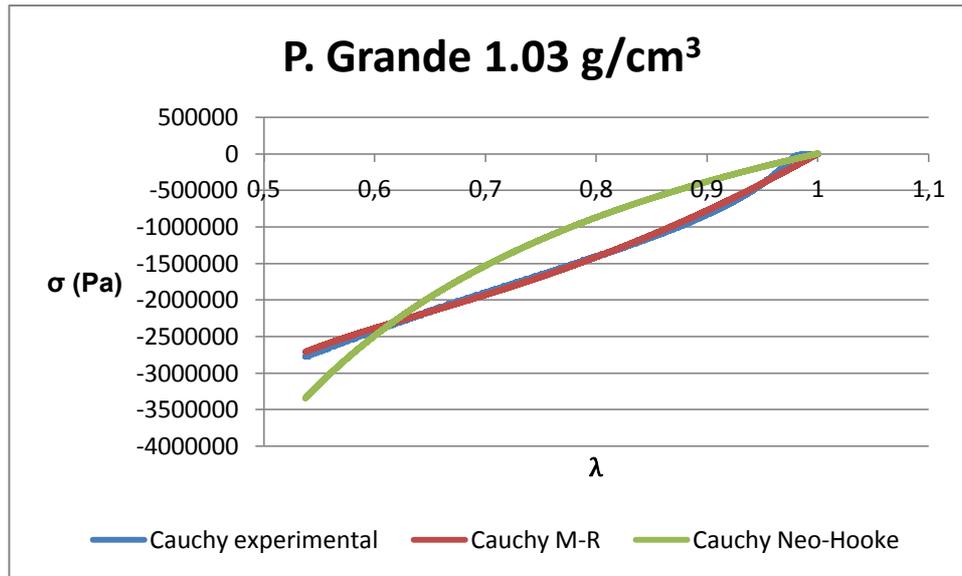


Fig. 19. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta grande de densidad 1.03 g/cm³.

El modelo Neo-Hookeano es uno de los modelos de energía de deformación más simples. Consta de un solo parámetro y proporciona un modelo matemáticamente constituyente y fiable para el comportamiento de deformación no lineal de caucho.

Por otro lado, el modelo de Mooney-Rivlin, el cual consta para nuestro caso de 3 parámetros de material, es en cierto modo, una mejora del modelo Neo-Hookeano. Esto es, para ajustar mejor el modelo a los datos, Rivlin introdujo en su fórmula una dependencia de la función de energía de deformación para el primer y el segundo invariante.

Todo esto mencionado se puede apreciar en las gráficas mostradas anteriormente. Si se observan estas gráficas, se puede comprobar que el modelo de Mooney-Rivlin se ajusta muchísimo mejor que el modelo de Neo-Hooke. Éste último llega en ocasiones a alejarse demasiado de la curva de los datos experimentales.

Curve fitting

En las siguientes tablas se exponen los resultados obtenidos para la obtención de parámetros mediante el segundo método empleado: el Curve fitting. El programa empleado para ello ha sido ANSYS:

a) Neo-Hooke

PROBETAS GRANDES							
	d = 0.7 g/cm ³	d = 0.8 g/cm ³		d = 0.9 g/cm ³		d = 1 g/cm ³	
Pa	0.73	0.82A	0.83A	0.92A	0.93A	1.01A	1.03A
C₁₀	8.7392e+05	8.3983e+05	5.7422e+05	1.5855e+06	1.5930e+06	6.6721e+05	4.3279e+05

Tabla 5: Constante hiperelástica para probetas grandes (modelo Neo-Hooke) obtenidas mediante Curve fitting.

Al analizar éstos resultados, se ve que, a excepción de la densidad 0.9, el resto de los valores de los parámetros son de valores similares y con el mismo signo para todos ellos. Comparándolos con los obtenidos mediante el ajuste de Mínimos Cuadrados, se puede apreciar que con éste segundo método los valores dan ligeramente más elevados. A pesar de que en el caso de la densidad de 0.9, el valor exponencial crece más, la diferencia respecto a los demás casos no es muy grande.

b) Mooney-Rivlin

PROBETAS GRANDES							
	d = 0.7 g/cm ³	d = 0.8 g/cm ³		d = 0.9 g/cm ³		d = 1 g/cm ³	
	0.73	0.82A	0.83A	0.92A	0.93A	1.01A	1.03A
C₁₀ (Pa)	1.37E+06	1.33E+06	6.97E05	2.91E+06	2.79E+06	1.21E+06	3.03E+06
C₀₁ (Pa)	-7.28E+05	-6.89E+05	-2.09E+05	-1,66E+06	-1.59E+06	-3.5E+05	-1.54E+06
C₁₁ (Pa)	1.04E+05	9.51E+04	1.58E+04	2.59E+05	2.46E+05	2.41E+04	2.08E+05

Tabla 6: Constantes hiperelásticas para probetas grandes (modelo Mooney-Rivlin) obtenidas mediante Curve fitting.

Para comprobar cuál de los dos métodos empleados para la obtención de parámetros (Mínimos Cuadrados mediante MATLAB y Curve fitting con ANSYS), se expone a continuación una gráfica a modo de ejemplo para las probetas grandes. Para el caso de probetas grandes y densidad 0.92 y 1.01:

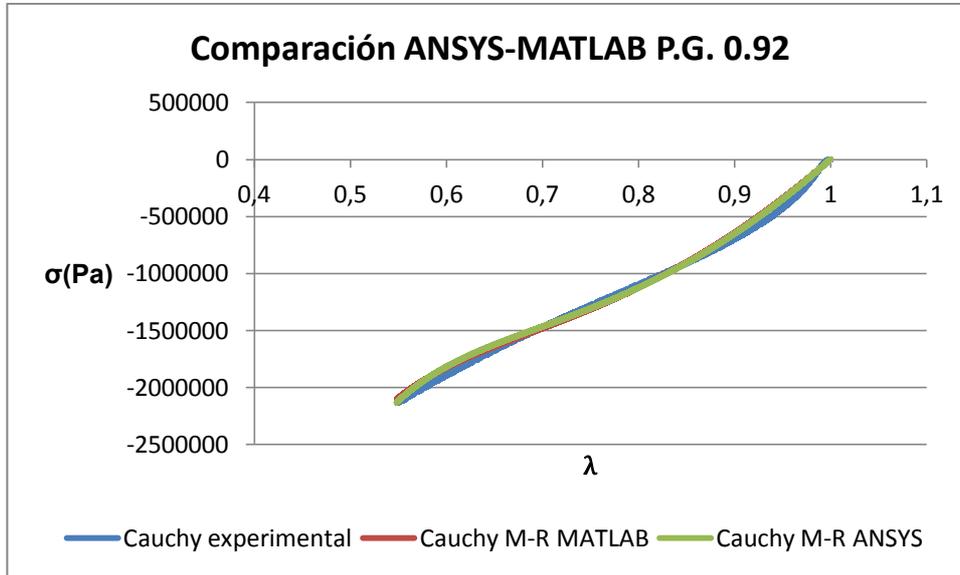


Fig. 20. Comparación ANSYS- MATLAB para caso de probeta grande y densidad 0.92 g/cm³.

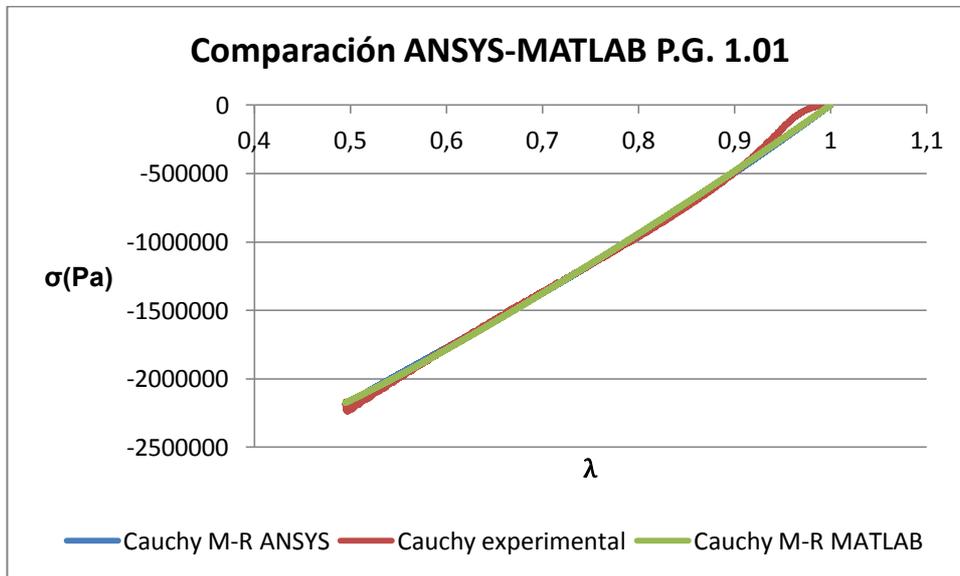


Fig. 21. Comparación ANSYS-MATLAB para caso de probeta grande y densidad 1.01 g/cm³.

Apenas se aprecia bien en las gráficas, pero con la ayuda de las tablas se puede comprobar cómo los valores obtenidos mediante ANSYS son ligeramente más elevados que los obtenidos mediante MATLAB, en

comparación con los datos experimentales que se poseen. También se observa en las tablas como los valores coinciden en magnitud y signo. Donde más se nota el incremento de valor es para el parámetro C_{11} .

5.1.2. Probetas pequeñas

Ajuste Mínimos Cuadrados:

a) Neo-Hooke

PROBETAS PEQUEÑAS						
	$d = 0.7 \text{ g/cm}^3$		$d = 0.9 \text{ g/cm}^3$		$d = 1 \text{ g/cm}^3$	
Pa	0.68	0.71	0.89A	0.91A	0.97A	0.99A
C₁₀	1.5115e+05	1.6934e+05	2.7681e+05	3.4536e+05	3.0254e+05	4.4347e+05

Tabla 7: Constante hiperelástica para probetas pequeñas obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Neo-Hooke.

Se observa como todos los valores son de magnitud y signo similar, siendo valores más elevados conforme aumenta la densidad. Se observa que el más elevado es el de la densidad de 0.99 ($4,43 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) y el más pequeño es para la densidad de 0.68 ($1,51 \cdot 10^5 \text{ Pa}$).

b) Mooney-Rivlin

PROBETAS PEQUEÑAS						
	$d = 0.7 \text{ g/cm}^3$		$d = 0.9 \text{ g/cm}^3$		$d = 1 \text{ g/cm}^3$	
	0.68A	0.71A	0.89A	0.91A	0.97A	0.99A
C₁₀ (Pa)	6.07E+05	7.16E+05	9.43E+05	1.4E+06	5.87E+05	1.58E+06
C₀₁ (Pa)	-2.75E+05	-3.35E+05	-2.56E+05	-5.87E+05	7.13E+04	-6.54E+05
C₁₁ (Pa)	4.19E+04	5.01E+04	1.2E+04	6.88E+04	-3.09E+04	8.39E+04

Tabla 8: Constantes hiperelásticas para probetas pequeñas obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Mooney-Rivlin.

Al analizar estos resultados, se aprecia claramente una diferencia en cuanto a valores para el caso de 0.97A, llegando incluso a haber una diferencia de signos. Más adelante se analiza si este error se repite.

Dejando este caso aparte, se aprecia que para la constante C_{10} , sus valores oscilan entre $5,87 \cdot 10^5$ y $1,4 \cdot 10^6$ Pa, mientras que para C_{01} apenas varía, ya que sus valores oscilan entre $-6,54 \cdot 10^5$ y $-2,56 \cdot 10^5$ Pa, siendo todos ellos de la misma magnitud, a excepción del caso 0.97A. Para la constante C_{11} , los valores tampoco varían notablemente, siendo éstos entre $1,2 \cdot 10^4$ y $8,39 \cdot 10^4$ Pa.

Cabe mencionar, que para el caso de las probetas pequeñas, debido a un fallo en la obtención de los resultados experimentales, no se han podido obtener resultados de las constantes para la densidad de 0.8g/cm^3 .

Al igual que para las probetas grandes, se muestran a continuación las gráficas dónde se comparan cual de los dos modelos se ajusta mejor a los datos experimentales.

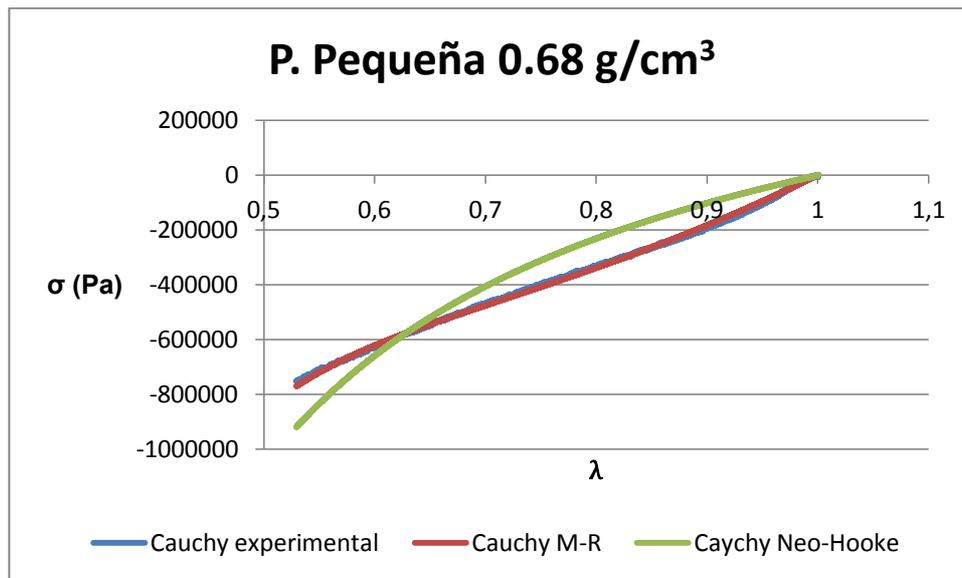


Fig. 22. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.68g/cm^3 .

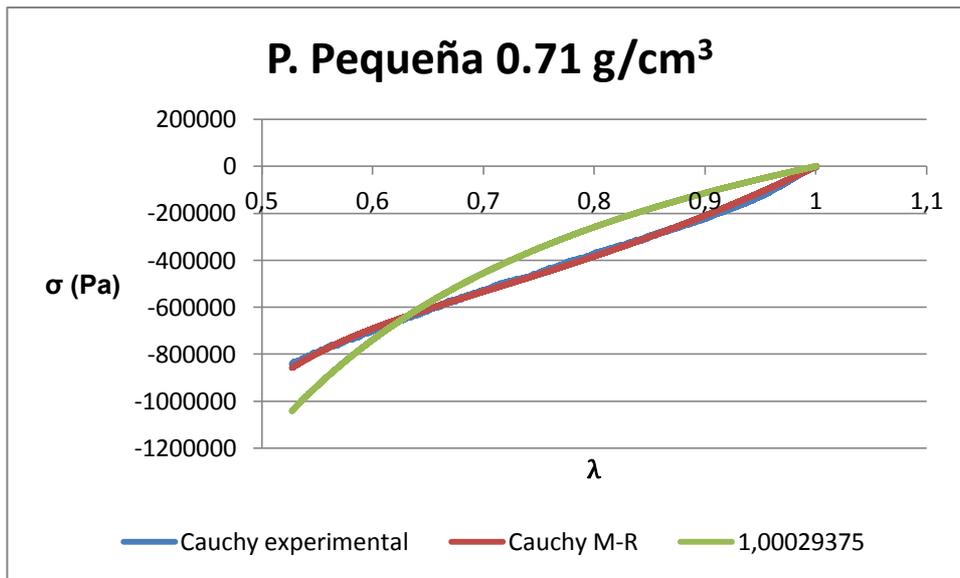


Fig. 23. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.71 g/cm³.

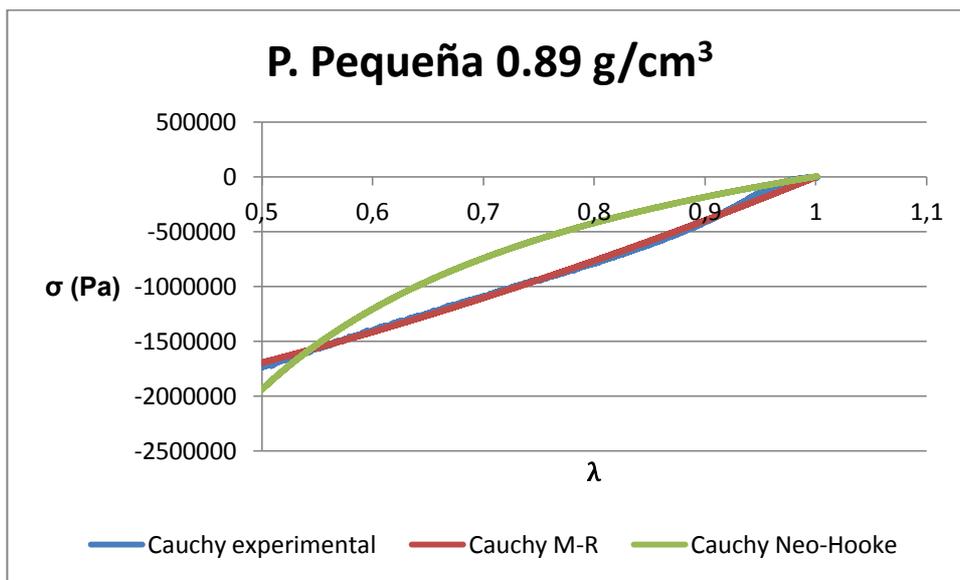


Fig. 24. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.89 g/cm³.

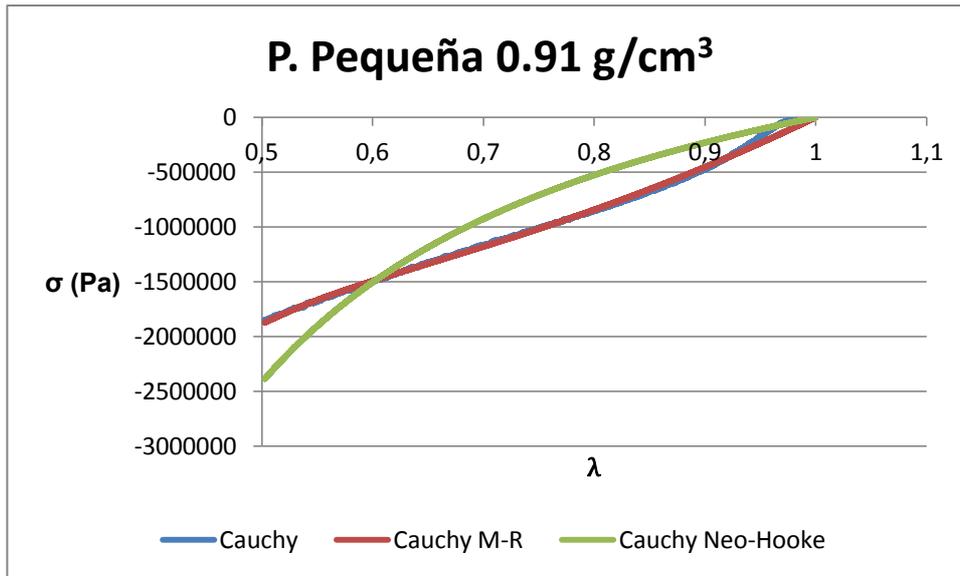


Fig. 25. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.91 g/cm³.

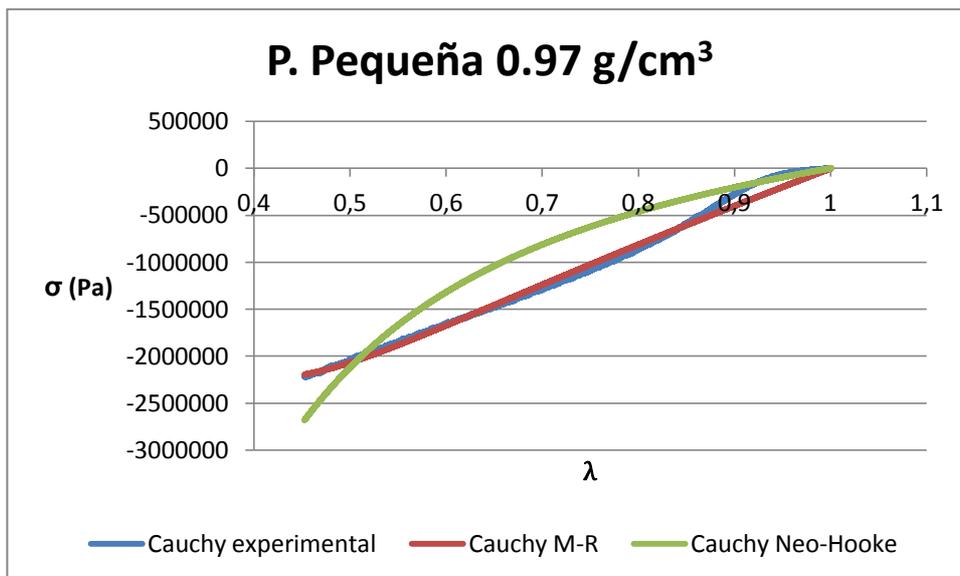


Fig. 26. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.97 g/cm³.

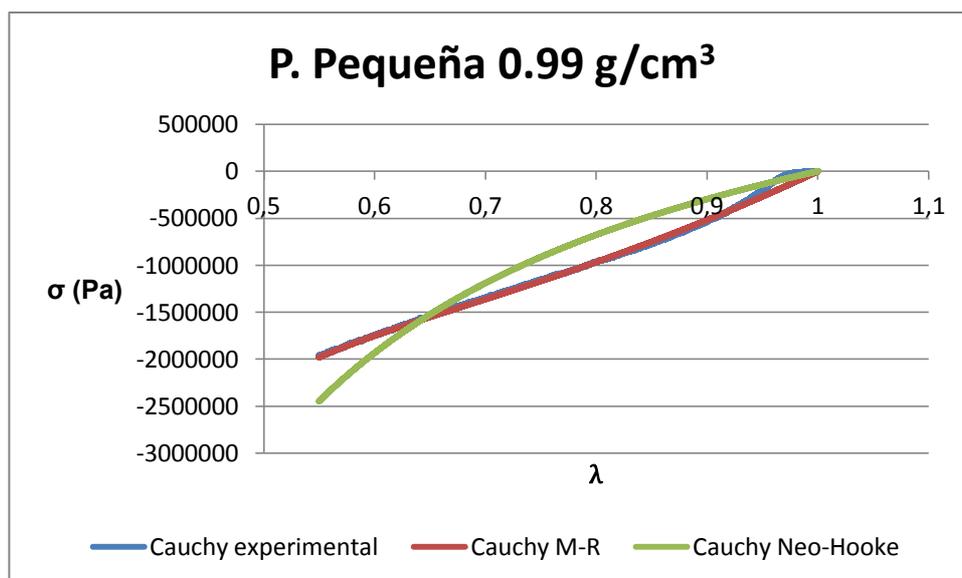


Fig. 27. Comparativa resultados reales vs ajustes (Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) para probeta pequeña de densidad 0.99 g/cm³.

Al igual que para las probetas grandes, se comprueba observando las gráficas como el ajuste realizado con el modelo de Neo-Hooke se aleja bastante de los datos experimentales, y como el de Mooney-Rivlin encaja y se acerca bastante a lo deseado.

Por ello, para caracterizar el modelo de caucho reciclado, se elige el modelo de Mooney-Rivlin de 3 parámetros por ser el que mejor se ajusta a los datos experimentales que se tienen.

Curve fitting:

a) Neo Hooke

PROBETAS PEQUEÑAS						
	d = 0.7 g/cm ³		d = 0.9 g/cm ³		d = 1 g/cm ³	
Pa	0.68	0.71	0.89A	0.91A	0.97A	0.99A
C₁₀	5.1704e+05	5.6107e+05	9.0608e+05	8.9022e+05	6.8448e+05	7.8624e+05

Tabla 9: Constante hiperelástica para probetas pequeñas (modelo Neo-Hooke) obtenidas mediante Curve fitting.

Se ve como sucede lo mismo en este caso: los resultados obtenidos son de magnitud y signos similares. Si se comparan con los obtenidos mediante el ajuste de Mínimos Cuadrados, se ve cómo son de magnitudes similares, a excepción de que éstos últimos son ligeramente más elevados que los obtenidos mediante el otro modelo. Ocurría lo mismo para las probetas grandes.

Con ello, se da por validos y fiables los parámetros obtenidos para el modelo de Neo-Hooke.

b) Mooney-Rivlin

PROBETAS PEQUEÑAS						
	d = 0.7 g/cm ³		d = 0.9 g/cm ³		d = 1 g/cm ³	
	0.68A	0.71A	0.89A	0.91A	0.97A	0.99A
C₁₀ (Pa)	6.11E+05	5.92E+05	1.1E+06	1.42E+06	1.31E+05	1.28E+06
C₀₁ (Pa)	-2.75E+05	-2.24E+05	-3.78E+05	-5.91E+05	4.21E+05	-3.87E+05
C₁₁ (Pa)	3.82E+04	1.93E+04	3.02E+04	6.1E+04	-8.19E+04	9.96E+03

Tabla 10: Constantes hiperelásticas para probetas pequeñas (modelo Mooney-Rivlin) obtenidas mediante Curve fitting.

Tal y como se ha hecho con las probetas grandes, se expone a continuación un ejemplo para poder observar mejor la diferencia entre ambos métodos (ANSYS Y MATLAB), y saber cuál de ambos se ajusta mejor a los datos que se poseen. Para el caso de probetas pequeñas y densidad 0.89 g/cm³:

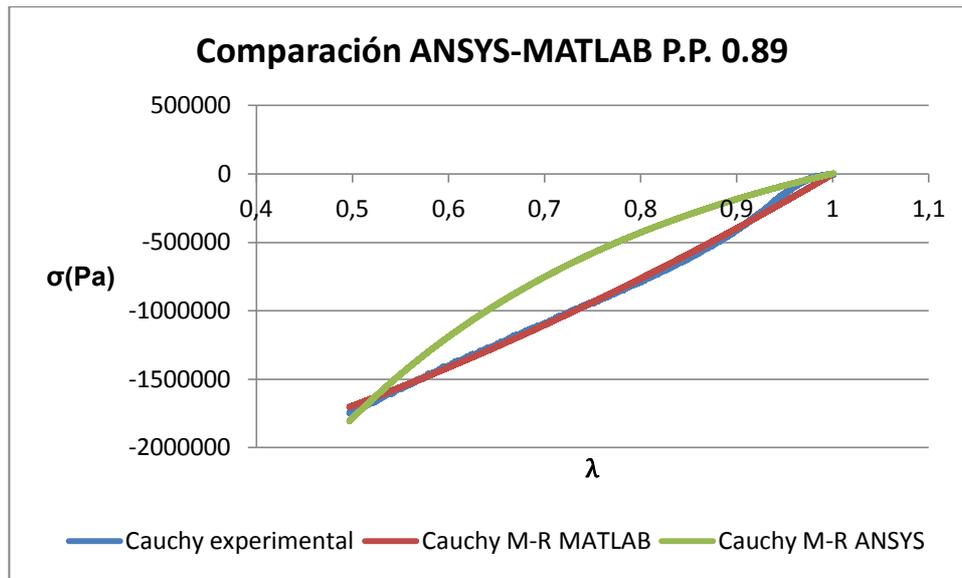


Fig. 28. Comparación ANSYS-MATLAB para caso de probeta pequeña y densidad 0.89 g/cm^3 .

En este caso, se aprecia notablemente como para ANSYS, sus valores se alejan bastante de los datos experimentales, mientras que los hallados mediante MATLAB quedan prácticamente similares. Por ello y por la comprobación de valores en tablas se define el método de ajuste de Mínimos Cuadrados mediante MATLAB como un método más fiable que el del ANSYS.

Observando las tablas, se ve como todos los valores coinciden en signo y magnitud, incluido el del caso de 0.97, en el cual se produce un cambio de signos. Al haber obtenido los parámetros mediante dos métodos diferentes y haber obtenido el mismo fallo, podría decirse que el error viene de los datos experimentales de los que se dispone. Para poder analizar mejor este caso, se vuelve a exponer la tabla para las probetas pequeñas obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados (modelo Mooney Rivlin):

PROBETAS PEQUEÑAS						
	$d = 0.7 \text{ g/cm}^3$		$d = 0.9 \text{ g/cm}^3$		$d = 1 \text{ g/cm}^3$	
	0.68A	0.71A	0.89A	0.91A	0.97A	0.99A
C_{10} (Pa)	6.07E+05	7.16E+05	9.43E+05	1.4E+06	5.87E+05	1.58E+06
C_{01} (Pa)	-2.75E+05	-3.35E+05	-2.56E+05	-5.87E+05	7.13E+04	-6.54E+05
C_{11} (Pa)	4.19E+04	5.01E+04	1.2E+04	6.88E+04	-3.09E+04	8.39E+04

Tabla 11: Constantes hiperelásticas para probetas pequeñas obtenidas mediante ajuste de Mínimos Cuadrados para modelo Mooney-Rivlin.

Para todos los demás casos, viendo como son similares a los obtenidos mediante Mínimos Cuadrados, se da por válidos y fiables las constantes hiperelásticas para el modelo de Mooney Rivlin.

5.2. Parte viscoelástica

5.2.1. Probetas grandes

(Pa)	<u>0.7 g/cm³</u>	<u>0.8 g/cm³</u>	<u>0.9 g/cm³</u>	<u>1 g/cm³</u>
C_2	1,3798E+07	1,003E+06	7,5131E+05	2,5179E+06
C_3	5,858E+05	-2,8045E+05	-2,8765E+05	-1,6613E+06
C_4	0.0007	0.7003	0,6286	0,0329

Tabla 12. Constantes viscoelásticas para densidades 0.7, 0.8, 0.9 y 1 g/cm³ ajustadas para cada curva (probetas grandes)

Si se analizan un poco estos resultados, se observa como todos coinciden en exponente y signo excepto para el caso de la densidad de 0.7 g/cm³. Para éste caso el valor de C_3 , a pesar de dar un valor de magnitud similar a los de las otras densidades, su signo es positivo, siendo el de los demás negativos.

5.2.2. Probetas pequeñas

(Pa)	<u>0.7 g/cm³</u>	<u>0.9 g/cm³</u>	<u>1 g/cm³</u>
C₂	8.5767·10 ⁵	3.0373·10 ⁶	1.4193·10 ⁶
C₃	-6.3112·10 ⁵	-1.1968·10 ⁶	-9.3064·10 ⁶
C₄	0.4599	0.0013	0.2155

Tabla 13. Constantes viscoelásticas para densidades 0.7, 0.9 y 1 g/cm³ ajustadas para cada curva (probetas pequeñas).

Para el caso viscoelástico de las probetas pequeñas, en cambio, se observa cómo todos los resultados han dado en torno a una misma magnitud y mismo signo, siendo positivos todos los de C₂ y C₄, y negativos los valores de C₃. Se aprecian variaciones en cuánto a cuál es más elevado dependiendo de qué parámetro se analice. Sin embargo, coincide que tanto para C₂ como para C₄, el caso más elevado es el de la densidad de 0.7.

Al igual que para la hiperelásticidad en las probetas pequeñas, no se han podido realizar los ensayos para la densidad de 0.8 g/cm³ debido a un fallo en la obtención de los datos experimentales.

Capítulo 6. Valoraciones de los resultados y posibles líneas futuras

En este estudio se han obtenido resultados para las cuatro densidades dadas (0.7, 0.8, 0.9 y 1 g/cm³), para probetas grandes, y para tres densidades (0.7, 0.9 y 1 g/cm³) para probetas pequeñas.

Una vez se hayan obtenido las ecuaciones constitutivas del material, con sus parámetros, para todas las densidades, tanto para probetas grandes como para pequeñas, se propone utilizar dichas ecuaciones como entrada en una simulación de ensayo de caída de peso, con el fin de evaluar la correcta caracterización. Dado que el objetivo es validar el modelo que se cree, posteriormente se contrastarán los resultados obtenidos con los resultados de los ensayos reales.

A lo largo de este estudio se han presentado varios problemas:

- Por una parte, observando las gráficas que se obtienen para los ensayos viscoelásticos (en el Anexo 2 se pueden encontrar), se observa cómo a pesar de haber aplicado un filtro para los datos experimentales de los que se disponía, aparece un rizado en la señal de salida para las velocidades más altas de ensayo (4 m/s). Es necesario estudiar este rizado para poder llegar a filtrarlo bien.
- A la hora de realizar el ajuste para las constantes hiperelásticas utilizando el método de Mooney-Rivlin, se han observado desviaciones de los valores previstos, con cambios en cuanto al signo, sin que puedan justificarse (P_0.004_0.97). Esto puede deberse a errores

cometidos en el propio ensayo de obtención de datos experimentales, o incluso en el proceso de fabricación de las probetas.

- Para el caso del ajuste viscoelástico, aparece un caso (Probetas grandes con densidad 0.7), en el que también se produce un cambio de signo. Debido a que el algoritmo empleado presenta una gran fiabilidad, se considera que este fallo puede deberse más a errores en cuanto a la obtención de los datos experimentales.
- Han aparecido problemas a la hora de ajustar mediante la técnica del Curve fitting de Elementos Finitos el modelo de Mooney-Rivlin para la parte hiperelástica, tanto para las probetas grandes como las pequeñas. Debido a que no se hizo acondicionamiento mecánico en el ensayo a la hora de obtener los datos experimentales, ha sido necesario prescindir de los valores iniciales de los que se disponía.

Resulta necesario estudiar con mayor detalle la influencia del factor tamaño en las ecuaciones constitutivas del modelo. Hasta el momento, no se ha profundizado lo suficiente como para obtener teorías concluyentes al respecto.

Una línea de investigación posterior contempla simular el ensayo de una barrera de protección de motoristas con un dummy utilizando el modelo de material corregido con la modelización de la máquina. Esta simulación se contrastará con ensayos reales. De este modo, se diseñará un material con una composición y densidad que satisfaga los requisitos técnicos como para poder usarlo en los guardarraíles.

Capítulo 7. Conclusiones generales

En este estudio se ha propuesto obtener un modelo que caracterice el comportamiento hiperelástico y viscoelástico frente a grandes deformaciones de un caucho reciclado incompresible a altas velocidades de deformación.

Para la respuesta hiperelástica, lo que interesa es obtener una función de densidad de deformación con una respuesta estable, precisa y que se base en procedimientos de caracterización simples. Se quiere conseguir una relación constitutiva que posea simplicidad matemática y con un número limitado de parámetros. Se han propuesto dos modelos: el Neo-Hookeano y el de Mooney-Rivlin. Tras las debidas comprobaciones se elige el modelo de Mooney-Rivlin de 3 parámetros para caracterizar la parte hiperelástica del modelo que se tiene.

Se observa que, a la hora de obtener unos valores que se aproximen lo máximo posible a los datos experimentales que se tienen, se consigue mejor respuesta utilizando el método de ajuste de Mínimos Cuadrados mediante el programa MATLAB que el de Curve fitting mediante ANSYS.

En cuanto a la caracterización viscoelástica, se ha utilizado el modelo propuesto por Yang, el cual se basa en el modelo de Maxwell generalizado. Este modelo, proporciona un mejor ajuste de los datos experimentales que otros modelos clásicos, aunque es debido al incremento de parámetros en el ajuste. Para este estudio se ha utilizado el modelo de 3 parámetros.

Posteriormente, se pretende contrastar este modelo con un ensayo de caída de peso para poder utilizar el modelo en cualquier caso tridimensional, partiendo del caso unidimensional del ensayo de compresión.

Referencias

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Aleksey D. Drozdov, *Finite Elasticity and viscoelasticity: A course in the Nonlinear Mechanics of Solids*, 1996.
- [2] Bernstein, B., Kearsley, E. A. and Zapas, L. J., *A study of stress relaxation with finites strain*, Transactions of the Society of Rheology, Vol.7, pp. 391-410, 1963
- [3] Drapaca, C. S., Sivaloganathan, S. and Tenti, G., *Non-linear constitutive laws in viscoelasticity*, Mathematics and Mechanics of Solids, Vol.12, pp. 475-501, 2007.
- [4] G. Liang, K. Chandrasshekhara, *Neural network based constitutive model for elastomeric foams*, Elsevier, Engineering Structures 30, 2002-201 1, 2008.
- [5] Gómez Gonzales, Manuel. *Sistema de Generación Eléctrica con pila de combustible de óxido sólido alimentado con residuos forestales y su optimización mediante algoritmos basados en nubes de partículas*. UNED, Facultad E.T.S.I. Industrial, pp. 51-55, 2008.
- [6] J. Kennedy. *The particle Swarm: Social Adaptation of Knowledge*. IEEE International Conference on Evolutionary Computation, pp 303-308, 1997.
- [7] J. Kennedy, R. Eberhart. *Particle Swarm Optimization*. In proceedings of the IEEE International Conference of Neural Networks, vol. 4, pp. 1942-1948, Perth, Australia, 1995.

-
- [8] J. Kennedy, R. Eberhart, y Y. Shi. *Swarm Intelligence*, San Francisco, Morgan Kaufman Publishers, 2001.
- [9] J. M. Dealy, *Nonlinear viscoelasticity*, Rheology- Vol. 1, McGill University, Montreal, 1975.
- [10] P. Kelly, *Solid Mechanics, Part 1: An Introduction to Solid Mechanics*, pp. 301-313, Auckland, 2013.
- [11] L.M. Yang, V.P.W. Shim and C.T. Lim, *A visco-hyperelastic approach to modeling the constitutive behavior of rubber*, I.J. of Impact Engineering, vol. 24, pp. 545-560, 2000.
- [12] López Uquía, J., y Casa Aruta, E., *Estadística intermedia*, Vicens-Vives, Madrid, 1969.
- [13] Mezura Montes Efrén, Comparación de variantes de PSO en Optimización Global de Restricciones. 2º Coloquio Internacional. Tendencias actuales de Cómputo e Informática en México. Universidad Tecnológica de Netzahualcóyotl, 2007.
- [14] Nere Gil-Negrete, *On the modeling and dynamic stiffness prediction of rubber isolators*, PhD Thesis, Universidad de Navarra, 2004.
- [15] Novales, A., *Econometría Mc. Graw-Hill*, pp. 61-70, Madrid, 1998.
- [16] O.H. Yeoh, *Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates*, *Rubber Chemistry and Technology*, vol.63, pp. 792-805, 1990.
- [17] R.S. Rivlin, *The elasticity of rubber*, *Rubber Chemistry and Technology*, vol.65, pp. G51-G66, 1992.
- [18] Tanner RI. *From A to (BK)Z in constitutive relations*. *J Rheol*, vol.32, pp. 673-702, 1988.
- [19] Wineman, A., *Nonlinear Viscoelastic Solids- A Review*, University of Michigan, 2008.

HERRAMIENTAS

[20] ANSYS Release 14.5. *Documentation for Ansys: Theory Reference*.

[21] MATLAB R2014b. *Documentation and Help*

PÁGINAS WEB

[22] Waste Magazine: Neumáticos. <http://waste.ideal.es/neumaticos.htm>
[Consulta: 29 de enero de 2015].