MATERIAL DOCENTE

ESTADÍSTICA APLICADA A LA EMPRESA

Ejercicios de estadística aplicados a la Responsabilidad Social y Ética

Coordinador: Asier Arcos Alonso

Autoría:

Asier Arcos Alonso, David Vaquero, Marcos Fuente, Álvaro Pérez de Colosía, Asier Barroso, Nerea Torrente, Azúl Basterra, Ainara Herrero, Rosa López, Mario Martínez de Mena, Judith Esgueva Marín, Andrea Vinagre Calvente, Karina Rajapova, Ekaterina Oses Ansotegui, Mercedes Molinos, Olatz Diez y Mario Valdés.

Título: “Estadística Aplicada a la Empresa”

Ejercicios de estadística aplicados a la Responsabilidad Social y Ética

CONTENIDOS:

- *Titulación: Grado de Administración y Gestión de empresas.*
- *Duración de la formación online: 16 semanas*
- *Dedicación total: 120*
- *Idioma del curso: castellano / euskera*
- *Coordinador del equipo docente: Profesor de la asignatura*

Coordinador: Asier Arcos Alonso

Autoría:
Asier Arcos Alonso, David Vaquero, Marcos Fuente, Álvaro Pérez de Colosía, Asier Barroso, Nerea Torrente, Azúl Basterra, Ainara Herrero, Rosa López, Mario Martínez de Mena, Judith Esgueva Marín, Andrea Vinagre Calvente, Karina Rajapova, Ekaterina Oses Ansotegui, Mercedes Molinos, Olatz Diez y Mario Valdés.

Título: “*Estadística Aplicada a la Empresa*”

Ejercicios de estadística aplicados a la Responsabilidad Social y Ética

1. Presentación

El objetivo de esta asignatura es que el alumnado conozca los aspectos fundamentales de la Inferencia Estadística y su aplicación al análisis empresarial.

Se trata de una asignatura eminentemente práctica, que combina la explicación teórica de los aspectos fundamentales con el análisis práctico y la resolución de problemas a partir de ejercicios de diversas complejidad, según se avanza en los contenidos de la asignatura. Esta asignatura ahonda en las competencias adquiridas en la asignatura que se imparte en el primer cuatrimestre de este segundo curso, Estadística y análisis de datos. Asimismo, para su desarrollo es preciso que el alumnado maneje los conceptos y procesos estudiados en las asignaturas de primer curso Matemáticas I y Matemáticas II

El curso, está dirigido al alumnado de 2 grado de Economía y Empresa. La finalidad de esta asignatura es que el alumnado adquiera las destrezas necesarias para la comprensión sobre aspectos estadísticos inferenciales facilitando un espacio de aprendizaje flexible y adaptado a las necesidades espaciales y tiempos del alumnado.

En el presente material docente se presenta un compendio de ejercicios prácticos que tratan de transversalizar elementos de Responsabilidad Social y Ética, contempladas como Competencia Transversal (CT) de grado definidas en el Plan de Estudios.

Se trata de ejercicios referentes a los temas 1,2,3 y 4 de la asignatura. Estos corresponden a la primera parte de la asignatura, que Módulo 1 Herramientas y recursos para la inferencia estadística. Distribuciones y estimación de parámetros, que son los siguientes:

Tema 1: Introducción. Utilización de la estadística en las decisiones empresariales

Tema 2. Distribuciones de Poisson y binomial

Tema 3. Distribuciones Normal, Gamma, Chi-cuadrado, F de Snedecor y t de Student.

Tema 4. Estimación de parámetros. Propiedades de los estimadores.

A fin de transversalizar en los ejercicios valores y principios de solidaridad, cooperación, intercambio, equidad y medioambiente se han propuesto 4 temáticas que han sido abordadas en los ejercicios:

1. ONG-s
2. Comercio justo
3. Medioambiente y Sostenibilidad
4. Economía Social y Solidaria

Se presentan un total de 27 ejercicios. 18 tratan la temática del Comercio Justo y Economía Social y Solidaria, otros 9 sobre ONG-s y por último, otros 9 sobre Sostenibilidad y medioambiente.

2. Competencias

Las competencias específicas de esta asignatura son:

1. C1: conocer las diferentes distribuciones de probabilidad, así como la teoría y práctica de la estimación de parámetros;
2. C2: aplicar la metodología estadística adecuada para el diseño de pruebas estadísticas y contraste de hipótesis; y
3. C3: conocimiento básico de las diferentes técnicas de muestreo.

Si bien la mayor parte de las Competencias Transversales (CT) de grado definidas en el Plan de Estudios se desarrollarán en mayor o menor grado en esta asignatura, aquellas en las que se realizará un énfasis especial, y para las que se han diseñado diferentes actividades de aprendizaje son las siguientes:

1. CT3: Comunicación escrita
2. CT6.- Búsqueda y Gestión de la información (nivel 1)
3. CT7.- Capacidad de análisis y síntesis (nivel 1)
4. CT10.- Responsabilidad social y ética (nivel 1)

Los ejercicios que se presentan responden a la necesidad de ahondar en la CT-10.

3. Objetivos de aprendizaje

El curso está diseñado para que las personas que lo superen alcancen los siguientes objetivos de aprendizaje:

1. Interpretar los conceptos básicos de la Inferencia estadística.
2. Distinguir las diferentes herramientas estadísticas y saber cuándo y cómo aplicarlas.
3. Relacionar los diferentes conceptos y herramientas que se dan en la asignatura.
4. Relacionar y ser capaces transversalizar conceptos de Responsabilidad Social y Ética a la asignatura y a su aplicación real.

4. Contenidos

Los contenidos didácticos presentados en este trabajo se distribuyen de la siguiente manera::

Módulo 1 Herramientas y recursos para la inferencia estadística. Distribuciones y estimación de parámetros.

- Tema 1: Introducción. Utilización de la estadística en las decisiones empresariales

- Tema 2. Distribuciones de Poisson y binomial
  - 2.1. Distribución binaria y binomial.
  - 2.2. Definición y propiedades de la distribución de Poisson

- Tema 3. Distribuciones Normal, Gamma, Chi-cuadrado, F de Snedecor y t de Student.
  - 3.1. Distribución normal. Convergencia de la distribución binomial a la de Poisson y a la Normal. Convergencia de la distribución de Poisson a la Normal.
  - 3.2. Distribución Gamma y exponencial.
  - 3.3. Distribución $\chi 2$ de Pearson.
  - 3.4. Distribución F de Snedecor.
  - 3.5. Distribución t de Student.

- Tema 4. Estimación de parámetros. Propiedades de los estimadores.
  - 4.1. Introducción.
  - 4.2. Muestra, estimador, estimación y distribución muestral
  - 4.3. Estimación de parámetros
  - 4.4. Estimación por punto:
  - 4.4.1 Estimador de Máxima Verosimilitud
  - 4.4.2 Estimador por los Momentos
  - 4.5. Estimación por Intervalos de Confianza
  - 4.6. Propiedades de los estimadores
  - 6.3. Muestreo estratificado.

5. Ejercicios y resultados.

Tema 1 y 2:

Organizaciones No Gubernamentales:

Ejercicio 1

EJERCICIO BINOMIAL

ENUNCIADO

La Organización No Gubernamental, Save The Children, trabaja para que ser menor de edad no sea ser menor en derechos, tanto dentro como fuera de nuestra frontera. Esta ONG hace de su nombre un lema para garantizar el bienestar y el futuro de millones de niños.

Así el anuncio UnforgottenChild de la ONG SaveTheChildren sobre la desaparición de niños refugiados que llegan a Europa, dio una cifra alarmante, "al menos 10.000 niños refugiados habían desaparecido en Europa. Esto supone que cada hora desaparece un niño refugiado". El anuncio, ¿y si te pasara a ti?, ha causado gran expectación entre la población alavesa, tanto es el punto que hasta el 40% de la población lo ha compartido en sus redes sociales. En un grupo de cinco amigos, calcular las siguientes probabilidades:

a) Que hayan compartido el anuncio dos personas.

b) Que como máximo lo hayan compartido cuatro personas.

SOLUCIÓN

a) P(2) =P(0)+P(1)+P(2)= F(2)=0,0778+0,2592+0,3456= **0,6826.**

- Es decir, hay una probabilidad del 68,26% de que en un grupo de cinco amigos, dos de ellos hayan compartido el anuncio de Save The Children sobre la desaparición de niños refugiados al llegar a Europa.
-

b) P(<=4)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=F(4)=0,0778+0,2592+0,3456+0,2304+0,0768=**0,9898.**

- Es decir, hay una probabilidad del 98,98% de que en un grupo de cinco amigos, como máximo cuatro de ellos hayan compartido el anuncio de Save The Children sobre la desaparición de niños refugiados al llegar a Europa.

Ejercicio 2

EJERCICIO POISSON

ENUNCIADO

En Unicef, llevan más de 70 años trabajando en la defensa de los derechos de todos los niños y niñas del mundo para que tengan una vida saludable, vayan al colegio y estén protegidos de la violencia y la explotación. Son el Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia y no trabajan solos, sino que lo hacen con la ayuda de gobiernos, otras ONGS, madre y padres, profesores/as, empresas y personas interesadas en conseguir un mundo mejor para la infancia, con cambios reales en la vida de los niños en todas partes y para ello centran sus estrategias, programas y acciones en cuatro áreas clave:

1. La supervivencia de los derechos de los niños a crecer sanos.
2. La educación para garantizar este derecho en todo el mundo.
3. La protección e inclusión social, "al proteger a los niños más vulnerables hoy, podemos ayudar a romper las cadenas de la pobreza de mañana". Muchos niños y niñas del mundo están expuestos a distintas formas de explotación, abuso, violencia o exclusión y necesitan protección.
4. La acción en emergencias, ya que los niños y niñas son los más vulnerables en situaciones de emergencia, tanto en desastres naturales como en conflictos armados o en crisis sanitarias.

Por todo esto Unicef es la ONG que más donaciones de más de mil euros recibe a lo largo del día, en concreto, recibe seis donaciones de más de mil euros cada día. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que Unicef reciba en un día cinco donaciones de más de mil euros.

b) Probabilidad de que Unicef reciba doce donaciones de más de mil euros o más en dos días.

SOLUCIÓN

Para empezar, tenemos que decir que en principio este ejercicio sigue una distribución Poisson de landa = 6.

a) Con landa igual a 6 realizamos la siguiente operación = P(5)= F(5)-F(4)=0,4457-0,2851=**0,1606**, es decir, un 16,05%. Recordemos que como en la tabla de Poisson las probabilidades vienen acumuladas, para calcular la probabilidad es un número concreto hay que restar su probabilidad menos la anterior.

b) Como en este caso, las donaciones que recibe UNICEF son en dos días, la landa cambia, y se multiplica por dos, es decir 6 x 2= 12, esta es nuestra nueva landa. Esta es la landa que usaremos para este apartado: P(x mayor o igual que 12)= 1- F(12)= 1- 0,5760=

0,424. Es decir, existe un 42,4% de probabilidad de que UNICEF en dos días reciba doce donaciones o más de más de mil euros.

Ejercicio 3

CONVERGENCIA DE BINOMIAL A POISSON

ENUNCIADO

La coordinadora ONGS para el desarrollo en España está formada por unas 300 organizaciones dedicadas a la cooperación internacional y a la ayuda humanitaria. Tienen un código de conducta de obligado cumplimiento para todas las organizaciones miembro y su misión es fortalecer una cooperación actuando de manera conjunta. El objetivo de esta coordinadora es fomentar el trabajo en red, defender la política pública de cooperación, fortalecer las iniciativas de sus miembros dándoles apoyo y asistencia, ofrecer análisis e información y propuestas para la construcción de un mundo junto, igualitario y sostenible.

La probabilidad de que cualquier persona del territorio español done un euro a alguna de las 300 Organizaciones No Gubernamentales es de 0,001.

A) ¿Cuál es la probabilidad de que donen un euro dos personas?

B) ¿Cuál es la probabilidad de que donen un euro más de cinco personas?

SOLUCIÓN

Tenemos una binomial de parámetro n =300 y p = 0,001. Como n es mayor o igual a 30, la probabilidad es menos o igual a 0,1 y n x p es menor que 18, esta binomial converge a una Poisson de parámetro landa = n x p, es decir 300 x 0,001= 3. Por lo que nuestro nuevo parámetro landa es igual a 3.

a) P(=2)= F(2)-F(1)= 0,4232-0,1991= **0,2241.** La probabilidad de que dos personas donen un euro a alguna ONG de la coordinadora es del 22,41%.

b) P (más o mayor de 5)=1-P(menor o igual que 5)= 1-F(5)= 1- 0,9161= **0,0839.** Es decir la probabilidad de que donen más de cinco personas es pequeña, concretamente, del 8,39%.

Sostenibilidad y medioambiente:

Ejercicio 1

ENUNCIADO

Con el objetivo de realizar una gestión eficiente de los recursos humanos y materiales las empresas y organizaciones integran la responsabilidad social empresarial, preocupándose especialmente estos últimos años por la incorporación de modelos de gestión medioambiental. Las empresas para destacar su eficiencia ambiental pueden implantar un sistema de gestión ambiental ISO 14001 y conseguir un certificado, lo cual podría suponer una ventaja competitiva y una mejor imagen frente al público. Es un certificado complicado de obtener así que cada mes sólo se certifican 1 de cada 2000 empresas. Si analizamos 6000 empresas:

SOLUCIÓN

$x \in b$ (6000, 0,0005)

a) Determinar el número esperado de empresas certificadas en 1 mes.

μ =np = 6000*0,0005= 3 empresas.

b) Probabilidad de que 5 empresas lo consigan en un mes.

Convergencia de distribución binomial a distribución de Poisson.

$x \in \lambda$ = np= 3.

P (x=5) = F(5) - F(4) = 0,9161 - 0,8153 = **0,1008**

Hay una probabilidad del 10,08% de que 5 empresas consigan el certificado.

c) Indique la probabilidad de al menos 10 empresas sean certificadas cada mes.

$P(x \geq 10) = 1 - P(x<10) = 1 - P(x \leq 9) = 1 - F(9) = 1 - 0,9989 =$ **0,0011**

Ejercicio 2

ENUNCIADO

La producción de smartphones tiene un elevado coste social y ambiental. En unos años se estima que la huella ecológica de los teléfonos móviles alcanzará un 24%. Se estima que solo se reciclan adecuadamente un 10% de los teléfonos. Si queremos realizar un estudio en nuestra clase con 150 personas.

SOLUCIÓN

a) Cuál es el número esperado de estudiantes que reciclan.

Estamos ante una distribución binomial:

x∈b(150, 0,1), como n es demasiado grande hacemos una convergencia a la distribución de Poisson.

x∈ λ = np= 15

La media en la distribución de Poisson es la propia Lambda.

λ = 15, es decir, 15 estudiantes reciclan de media.

b) Indique la probabilidad de que 30 compañeros reciclen adecuadamente.

P(x=30) = F(30) - F(29) = 0,9998 - 0,9996= **0,0002 , 0,02% reciclan adecuadamente.**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el mas de 20 reciclen adecuadamente?

P (x>20) = 1 - P(x≤9) = 1 - F(9) = 1- 0,9170 = **0,083, un 8,3%.**

Ejercicio 3

ENUNCIADO

Las pilas contienen metales pesados y compuestos químicos, muchos de ellos perjudiciales para el medio ambiente. Por eso es muy importante no tirarlas a la basura y llevarlas a un punto de recogida o a un centro de reciclado. Sin embargo en una localidad muy pequeña se sabe que 60 de cada 1000 personas recicla las pilas adecuadamente, es decir, las lleva a un punto de recogida, si se toma una muestra de 100 personas.

SOLUCIÓN

Calcular:

a) La probabilidad de que ninguna persona de las recicle adecuadamente. x ∈b (100, 0,06) → n ≥ 30 y p ≤ 0,1 → converge a una Poisson x ∈P (λ = 6) P(x=0) = **0,0025**

b) La probabilidad de que más de 15 personas sí lo hagan.

x (100, 0,04) → n 30 y p 0,1 → converge a una ∈ ≥ ≤ Poisson x ∈P (λ =4)

$P(x<5) = P(x \leq 4) =$ **0,6288**

c) La probabilidad de que menos de 5 personas no reciclen.

$P(x \geq 15) = 1 - P(x \leq 14) = 1 - F(14) = 1 - 0{,}9986 =$ **0,0014**

Comercio justo y Economía Social y Solidaria

Ejercicio 1

<u>(“BINOMIAL” → TEMA 2)</u>

Cáritas está lanzando una campaña de captación telefónica de socios en Araba y en Bizkaia. Por cada llamada que se realiza la probabilidad de hacerse socio es de un 50%.

a) Tomando una muestra aleatoria de 5 personas en Araba, calcular la probabilidad de que más de 3 personas se hagan socias.
b) Si tomamos 5 personas de Araba y 10 de Bizkaia, hallar la probabilidad de que más de 7 personas se hagan socias

-

a)

XA ∈ b (5;0,5)

P(X >3) = 1-[p(0)+p(1)+p(2)+p(3)] = 1-(0,0313+0,1563+0,3125+0,3125) **= 0,1874**

b)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{XA} \in \mathbf{b}\ (5;0,5) \\ \mathbf{XB} \in \mathbf{b}\ (10;0,5) \end{array}\right\} \qquad \mathbf{y = XA + XB}$$

$$\Downarrow$$

Y ∈ b (15;0,5)

P(y >7) = P(8)+P(9)+P(10)+P(11)+P(12)+P(13)+P(14)+P(15) **=**

= 0,1964+0,1527+0,0916+0,0417+0,0139+0,0032+0,0005+0,0000 **= 0,5**

Ejercicio 2

<u>(“CONVERGENCIA DE BINOMIAL A POISSON” → TEMA 2)</u>

La tienda Veraluna, especializada en moda sostenible e inspirada en la naturaleza, recibe una media de 5 encargos telefónicos al día.

a) Hallar la probabilidad de que en un día reciba menos de 11 encargos.
b) Calcular la probabilidad de que en tres días reciba entre 9 y 13 encargos.

-

a)

λ=5
P(x < 11) = P(x ≤ 10) = **0,9863**

b)

X ∈ P(5+5+5) = P(15) = λ=15
P(9 ≤ x ≤ 13) = P(x ≤ 13) - P(x < [illegible]) = 0,3632 - 0,0374 = **0,3258**

Ejercicio 3

<u>(“CONVERGENCIA DE BINOMIAL A POISSON” → TEMA 2)</u>

La organización Oxfam recibe aportaciones dinerarias para fabricar vacunas contra el SIDA para los países más subdesarrollados. En estos países se reciben 100 vacunas al mes. Por cada 100 vacunas, 5 tienen algún tipo de imperfección.

a) Calcular la probabilidad de que en un mes no haya ninguna vacuna defectuosa.
b) Hallar la probabilidad de que en 3 meses haya a lo sumo 3 vacunas en mal estado.

a)

n=100
p=5/100 **λ=n*p=100*5/100=5** **X ∈ b (100;0,5)**
P(x=0) = F(0) = **0,0067**

b)

X ∈ b (5+5+5) = P(15 = λ=15
1 mes = **λ=5**
3 meses = **λ=15**
P(x ≤ 3) = F(3) = 0,0002

Ejercicio 4

El jefe de compras de "Medicusmundi", asociación dedicada a la venta de productos de comercio justo, quiere contribuir a la mayor utilización de materiales reciclados en la industria textil. Para ello, a partir de ahora decide comprar pijamas de algodón ecológico a la Cooperativa "The Rajlakshmi Cotton Mills" que produce respetando el medio ambiente y utilizando materia prima ecológica.

Al contratar un nuevo proveedor, el jefe de compras quiere asegurarse de reducir la probabilidad de aceptar pijamas hechos con más de un 20% de material no reciclado. Se acuerda extraer 20 modelos diferentes de pijamas de cada lote recibido. En caso de hallar más de 4 modelos que no cumplan las condiciones preestablecidas, se rechazará el lote.

a) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote cuya proporción de materiales no reciclados sea mayor de 20%?

Solución:
$X \in b\ (20; 0{,}2)$
$P(x>4) = 1 - P(x\leq 4) = 1 - (0{,}0115 + 0{,}0576 + 0{,}1369 + 0{,}2054 + 0{,}2182) = \mathbf{0{,}3704}$

• Hay un 37,04% de probabilidad de aceptar un lote con más de 20 % de materiales no reciclados.

b) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote cuya proporción de materiales no reciclados es del 30%?
Solución:
$X \in b\ (20; 0{,}3)$
$P(x\leq 4) = 0{,}0008 + 0{,}0068 + 0{,}0278 + 0{,}0716 + 0{,}1304 = \mathbf{0{,}2374}$

• Hay un 23,74% de probabilidad de aceptar un lote con 30 % de materiales no reciclados.

Ejercicio 5:

Starbucks, la cadena internacional de café, preocupada por el escaso conocimiento de sus clientes sobre los grandes beneficios de los productos del comercio justo, decide emitir en las pantallas de sus establecimientos un corto sobre el cultivo sostenible de café en África, producido además sin recurrir a la explotación laboral infantil.

El promedio de clientes que atiende un establecimiento de Starbucks en una hora es de 72. Calcular la probabilidad de que más de 10 clientes vieran el documental, teniendo en cuenta que este se emite una vez por hora y su duración es de 5 minutos. El proceso es estable y los sucesos aparecen aleatoriamente de forma independiente.

Solución:
$X \in P\ (72)$
En 60 minutos $\lambda = 72$
En 5 minutos $\lambda = 72/12 = 6$
$P(x>10) = 1 - F\ (10) = 1 - 0{,}9574 = \mathbf{0{,}0426}$

• Hay un 4,26% de probabilidad de que más de 10 clientes vieran el documental.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 7 clientes vieran este documental?

Solución:
$X \in P\ (72)$
En 60 minutos $\lambda = 72$
En 5 minutos $\lambda = 72/12 = 6$
$P(x \leq 7) = F\ (7) =$ **0,7440**

• Hay un 74,4% de probabilidad de que a lo sumo 7 clientes vieran el documental.

Ejercicio 6:

La ONG "Setem" decide comercializar en su tienda de Vitoria durante los meses de verano los helados de la marca "Ben & Jerry's", elaborados con la leche que proviene de las granjas locales ecológicas y así contribuir al desarrollo de la España rural y el bienestar animal.

Según el contrato firmado, "Setem" distribuirá 300 tarrinas de helado cada mes. Sin embargo, sólo 2 de cada 100 tarrinas son producidas íntegramente con la leche ecológica.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que "Setem" venda al menos una tarrina elaborada íntegramente con la leche ecológica al mes?

Solución:
$X \in b\ (300;\ 0{,}02)$, $n \geq 30$, $n \times p < 18$
Entonces $X \in b\ (300;\ 0{,}02) \rightarrow P\ (300 \times 0{,}02) \rightarrow P\ (6)$
$P(x \geq 1) = 1 - F\ (0) = 1 - 0{,}0025 =$ **0,9975**

• Hay un 99,75% de probabilidad de vender al menos una tarrina ecológica al mes.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se venda 5 helados fabricados íntegramente con leche ecológica en 2 meses?

Solución:
$X \in b\ (300;\ 0{,}02)$, en 2 meses $X \in b\ (600;\ 0{,}02)$
$X \in b\ (600;\ 0{,}02)$, $n \geq 30$, $n \times p < 18$
Entonces $\rightarrow X \in b\ (600;\ 0{,}02) \rightarrow P\ (600 \times 0{,}02) \rightarrow P\ (12)$
$P(x=5) = F\ (5) - F\ (4) = 0{,}0203 - 0{,}0076 =$ **0,0127**
• Hay un 1,27% de probabilidad de vender 5 tarrinas ecológicas en 2 meses.

Tema 3:

Organizaciones No Gubernamentales:

Ejercicio 1:

EJERCICIO NORMAL

ENUNCIADO

En Dolo, en el sureste de Etiopía, la sequía y la inflación han dejado a más de un millón de personas de la zona sin acceso a alimentos, obligándolas a depender de las escasas raciones de comida distribuidas por el Programa Mundial de Alimentos. Para ver el tiempo que transcurre desde que una Organización No Gubernamental, que actúa bajo el programa, recibe los alimentos para ayudar a los niños de Etiopía hasta que llegan concretamente a estos, sigue una distribución normal, de media 15 y varianza 9. Calcular la probabilidad de que los alimentos tarden en llegar: Menos de dieciséis días y entre diecisiete y veinte días.

SOLUCIÓN

a) Menos de dieciséis días (P<16). En primer lugar, como el enunciado nos da la varianza, hacemos la raíz cuadrada, que es necesario para posteriormente realizar la tipificación. Por tanto, tenemos una distribución normal de media 15, y desviación típica 3. X=N(15,3). Como nos pide menos de 16, y estos datos no salen en las tablas, tipificamos con la formula, que es el valor menos la media entre la desviación típica, en este caso 16-15= 1/3=0,33, y con este valor ya podemos realizar el ejercicio. Tenemos ahora el nuevo valor para buscar en las tablas, es decir, P(Z<=0,33), como no sale el 0,33 en las tablas, tabulamos, es decir cogemos el 0,32 y el 0,34 y lo dividimos entre dos, es decir: P(Z<=0,33)= F(0,33)= F(0,32)+F(0,34)/2= 0,6255+0,6331/2= **0,6293.**
   - Este resultado nos indica que para abastecer de alimentos a los niños de la zona de Dolo en Etiopía y que estos alimentos lleguen en menos de dieciséis días, hay una probabilidad del 62,93%.
   -
   -

b) Entre diecisiete y veinte días P(17<x<20). En este caso tenemos que realizar lo mismo, pero esta vez en dos ocasiones, tipificamos con el diecisiete y con el veinte. En primer lugar, con el 17 quedaría de la siguiente manera: 17-15/3= 0,66, y haríamos lo mismo con el 20: 20-15/3=1,66. Tenemos una nueva variable (0,66<z<1,66). Por lo tanto, primero restamos la mayor a la otra, es decir: P(0,66<z<1,66) = P (1,66) – P (0,66)= F(1,66)-F(0,66)= 0,9515-0,7454= **0,2061.**
   - Este resultado indica que hay un 20,61% de probabilidad donde las Organizaciones no Gubernamentales tarden entre diecisiete y veinte días en repartir la comida en Etiopía.

Ejercicio 2:

CONVERGENCIA BINOMIAL A NORMAL

ENUNCIADO

Farmamundi, la ONG del medicamento, aboga por impulsar el uso racional de fármacos en el tercer mundo, ya que el medicamento es algo más que un principio activo. Si en un país desarrollado es importante una adecuada información, en los países en vías de desarrollo es más importante si cabe. Todo ello exige un trabajo en equipo con la creación de Centros de Información del Medicamento que proporcionen la adecuada atención farmacéutica.

Si el 20% de los medicamentos que la ONGs destinan a los países necesitados no tienen la adecuada información y tenemos un lote de 200 medicamentos ¿Cuál es la probabilidad de que 50 de estos se prescriban con la adecuada atención farmacéutica?

SOLUCIÓN

-Es una distribución binomial, los medicamentos pueden estar con la información adecuada o sin ella.

-Datos: $p=0,2$ $q=1-p=0,8$ $n=200$

$B(n,p)$ $B(200;0,2)$

-La n es grande y la probabilidad pequeña así que podemos hacer la aproximación de la binomial a la normal. Comprobamos que $n>30$ y $0,1<p<0,9$

-Calculamos la media y la desviación típica de la distribución normal.

$\mu=n\cdot p$ $\mu=200\cdot 0,2=40$

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$ $\sigma=\sqrt{200\cdot 0,2\cdot 0,8}=5,65$

-x es B (200;0,2) corrección x´ es N(40;5,65) si tipificamos z es N(0,1)

$P\,(x<50) = p\,(x' \leq 49,5) = p\,(z \leq \frac{49,5-40}{5,65}) = p\,(z \leq 1,68) = \mathbf{0,9535}$

Es decir, la probabilidad de que se prescriban 50 medicamentos con la adecuada atención farmacéutica es del 95,35%.

Ejercicio 3:

CONVERGENCIA DE POISSON A NORMAL

ENUNCIADO

Médicos Sin Fronteras es una organización de acción médico-humanitaria. Asisten a personas amenazadas por conflictos armados, violencia, epidemias o enfermedades olvidadas, desastres naturales y exclusión de la atención médica.

Gracias a la independencia financiera que les otorgan sus cinco millones de socios, ellos deciden a quién y cómo atienden ya que su único interés es superar un periodo crítico de las poblaciones a las que van. Subrayan que no aspiran a transformar la sociedad, su interés se centra en las personas no en los Estados por eso sus intervenciones son limitadas en el tiempo.

Con todo esto las solicitudes de ayuda diarias que recibe esta ONG son de 9. Sin embargo Médicos Sin Frontera solo puede asistir las ayudas a 16 solicitudes diarias. Si la variable solicitudes diarias sigue una distribución de Poisson.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día la ONG no pueda asistir a todos los solicitantes?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en dos días Médicos Sin Fronteras deje de asistir a 2 solicitantes únicamente?

SOLUCIÓN

-Es una distribución Poisson

-Datos: x=solicitudes diarias y=solicitudes en dos días

a) x-P(λ=9)

P(x>16)= 1-P(x≤16)= 1- 0,9889= **0,0111** La probabilidad de que Médicos Sin Fronteras no pueda asistir a todos los solicitantes en un día es del 1,1%

b)y-P(λ=18) Como landa es ≥ que 18 la distribución Poisson converge en una Normal, N(λ,λ), es decir, N(18,18).

P(y=34)= P(33,5<y<34,5) = $P(z\leq\frac{33,5-18}{4,24}) - P(z\leq\frac{34,5-18}{4,24})$= P(z<3,89)- P(z<3,65)= 1- 0,9999= **0,0001**

Es decir, la probabilidad de que en dos días la ONG deje de asistir a 2 solicitantes únicamente es del 0,01%.

Sostenibilidad y medioambiente:

Ejercicio 1:

Un ayuntamiento ha instaurado un plan de transición a las energías limpias. Debido a la creciente concienciación sobre las energías renovables, cada vez más personas deciden instalar paneles solares en sus hogares para autoconsumo. Se estima que en dicha población un 30% de los hogares han instalado paneles solares para la generación de energía eléctrica.
Se quiere realizar un estudio en un barrio con 200 hogares.

a) Indique la probabilidad de que al menos 50 hogares tienen instalados paneles solares.
Estamos ante una distribución binomial:
$x \in b\ (200,\ 0{,}3)$
Para aproximar a la distribución normal tiene que cumplirse el teorema de Moivre-Laplace, que indica lo siguiente:
$\{n>10,\ np>5 \text{ y } nq>5\}$
Cómo cumplimos con esas condiciones procedemos a realizar la aproximación a una distribución normal.
Aproximación de una distribución binomial a una distribución normal.
$Y \sim N\ (\mu=np,\ \sigma^2=npq)$
$Y \sim N\ (60,\ 42)$
Como estamos aproximando una variable discreta a una distribución continua,
aplicaremos la corrección de Yates.

$P\ (y \geq 50) = P\ (y \geq 49{,}5)$ (Corrección de Yates) $= 1 - P\ (y \leq 49{,}5) = 1 - F(49{,}5) =$

$1 - \Phi(49{,}50\text{-}60/\sqrt{42}\ ) = 1 - \Phi\ (\text{-}1{,}62) = 1\text{-}\ [1\text{-}\ \Phi\ (1{,}62)] = 1\text{-}\ (1\text{-}0.9474) =$ **$0{,}9474$**

Existe una probabilidad del 94,74 %.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 40 hogares tienen instalados paneles solares?

$P\ (y=40) = P\ (39{,}5 \leq y \leq 40{,}5)$ (Corrección de Yates) $= F(40{,}5) - F(39{,}5) =$
$\Phi\ (40{,}5\text{-}60/\sqrt{42}\ ) - \Phi\ (39{,}5\text{-}60/\sqrt{42}\ ) = \Phi\ (\text{-}3) - \Phi\ (\text{-}3{,}16) = 1\text{-}\ \Phi\ (3) - [1\text{-}\ \Phi\ (3{,}16)] = 1 - 0{,}9987$ $-\ (1\text{-}0{,}9992) = 0{,}0005.$
Es decir, una probabilidad del **0,5%**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 150 hogares no tengan instalados paneles solares?

Utilizaremos la distribución binomial, pero cambiando las probabilidades.
$x \in b\ (200,\ 0{,}7)$
$Y \sim N\ (140,\ 42)$
$P\ (y=150) = P\ (149{,}5 \leq y \leq 150{,}5) = F(150{,}5) - F(149{,}5) = \Phi\ (150{,}5 - 140$
$/\sqrt{42}) - \Phi\ (149{,}5 - 140/\sqrt{42}) = \Phi\ (1{,}62) - \Phi\ (1{,}46) = 0{,}9474 - 0{,}9279 =$ **0.0195**

Ejercicio 2:

La media de basura reciclada de un pueblo formado por 500 habitantes es de 70kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los kilos de basura reciclada se distribuyen normalmente, hallar cuántos habitantes reciclan:

a) Entre 60 y 75 kilos

p (60 ≤ x ≤ 75) = (60−70/3≤ z ≤ 75−70/3)=p(-3.33<z 1.67)=p(z 1.67)-[1-p (z 3.33)]=0.9525-(1-0.9996)= 0.9521*500= 476

b) Más de 90 kilos

p(x>90)= p(z>90−70/3)=p(z>6.67)= 1-p (3 z<6.67)=1-1=0*500= 0

c) Menos de 64 kilos

p(< 64)= p(z<64−70/3)=p(z<-2)=1-p(z≤2)=1-0.7772=0.02128*500= 11

d) Igual a 64 kilos

p(x=64)= p=(z= 64−70/3)=p(z=-2)=0*500= 0

Comercio justo y Economía Social y Solidaria

Ejercicio 1:

La tienda “Bide Bidean”, especializada en venta de productos de “Comercio Justo” y gestionada por Egibide y Cáritas instala 5 puestos en el mercado de la Almendra. El objetivo de los puestos instalados es el de recaudar fondos para combatir la hambruna en Malawi, vendiendo los productos sostenibles y elaborados respetando los derechos humanos primordiales. En dichos puestos se vende arroz, quinoa y patatas fritas entre otros, producidos por las cooperativas que se rigen por los principios de la equidad de género.

El número de personas que visitan los puestos siguen una distribución de Poisson y son mutuamente independientes, con medias 250, 60, 80, 130, 180.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en 3 días que dura el mercado el número de personas que visitan los puestos de “Bide Bidean” sea mayor de 2.150?

Solución:

P (250), P (60), P (80), P (130) y P (180) → X ∈ P (250+60+80+130+180) → X ∈ P (700)

P (700), en 3 días→ P (700×3)→ P (2.100)

n≥18, entonces P (2.100) →X ∈ N (2.100; 2.100)

P(x>2150) = 1- F (2150) → aplicamos la corrección de Yates

Entonces, 1- P (Z≤ (2150,5-2.100) /√2100) =1-P (Z≤1,102) =1- 0,8643 = 0,1357

• Hay un 13,57% de probabilidad de que en 3 días el número de personas que visiten los puestos de “Bide Bidean” sea mayor de 2.150.

Ejercicio 2

La facultad de Economía y Empresa de Vitoria, en su afán por cumplir los objetivos del plan de desarrollo sostenible, quiere incluir cláusulas sociales en los contratos con sus proveedores. La facultad pretende sustituir el material de oficina que utiliza en la actualidad por otro más sostenible, empezando por cambiar el papel. Para ello, contacta con la plataforma "Madera Justa" que produce folios de madera proveniente de bosques gestionados de forma sostenible.

Teniendo en cuenta que la demanda de la facultad es de 9.100 Kg. y que la plataforma "Madera Justa" dispone de 1.000 máquinas, cuya producción sigue una distribución de media 9 y desviación típica 2, calcular la probabilidad de que la capacidad productiva de la plataforma sea suficiente para satisfacer la demanda de la facultad.

Solución:
$X \in$ Distribución desconocida $(9;4) \rightarrow$ aplicamos teorema central del límite

Entonces, $X \in$ Distribución desconocida $(9;4) \rightarrow X \in N\ (9\times1000;\ 4\times1000) \rightarrow X \in N\ (9.000;\ 4.000)$

$P(X\geq9.100) = 1\text{-}F\ (9.100) = 1\text{-}P\ (Z\leq (9.100\text{-}9.000) / \sqrt{4.000}) = 1\text{-}P\ (Z\leq1{,}58) = 1\text{-}0{,}9430 = \mathbf{0{,}057}$

• Hay un 5,7% de probabilidad de que la capacidad productiva de la plataforma "Madera Justa" sea suficiente para satisfacer la demanda de la facultad.

Ejercicio 3:

El distribuidor de productos de Comercio Justo "Ideas" quiere aumentar las ventas de chocolates de su proveedor "Alter Trade Corporation" de Filipinas como parte de la ayuda a las víctimas del tifón "Haiyan". La corporación Alter Trade basa su producción en la agricultura orgánica, utilizando las formas del riego que permiten ahorrar más de 20 % del agua, que escasea tras el tifón.

Tras realizar la promoción del producto, ofreciendo descuentos de hasta 10%, ha conseguido aumentar la probabilidad de venta por cliente a un 0,4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en 20 días haya vendido más de 320 tabletas de chocolate, teniendo en cuenta que cada día atiende a 35 clientes?

Solución:

$X \in b\ (35;0{,}4)$, en 20 días $X \in b\ (35\times20;\ 0{,}4) \rightarrow X \in b\ (700;0{,}4)$

$X \in b\ (700;0{,}4)$; $n\geq30$ y $0{,}1 < p < 0{,}9$

Entonces, $X \in b\ (700;0{,}4) \rightarrow N\ (700\times0{,}4;700\times0{,}4\times0{,}6) \rightarrow N\ (280;168)$

$P\ (x>320) = 1\text{-}\ F\ (320) \rightarrow$aplicamos la corrección de Yates

Entonces, $1\text{-}\ P\ (Z\leq (320{,}5\text{-}280) /\sqrt{168}) = 1\text{-}P\ (Z\leq3{,}12) = 1\text{-}0{,}9991 = 0{,}0009$

• Hay un 0,09% de probabilidad de vender más de 320 tabletas de chocolate en 20 días.

Ejercicio 4

La empresa SOFÁ Precio S.C. especializada en el comercio al por menor de muebles, utiliza una media de 12 metros cuadrados de tela y una desviación típica de 1 metro cuadrado.

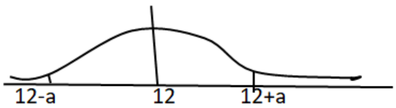
a) Calcular el porcentaje de muebles que utilizan menos de 10 metros cuadrados de tela.
b) Calcular el porcentaje de muebles que utilizan entre 14 y 16 metros cuadrados.
c) Calcular el intervalo centrado en la media, con una probabilidad de 0,90.

$\mu = 12$ $\quad\quad$ $\sigma^2=1$ $\quad\quad$ N (12; 1)

a) $P(x <10) = P\left(z < \frac{10-12}{1}\right) = \phi\left(\frac{10-12}{1}\right) = \phi(-2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0{,}9773 = 0{,}0227 \text{ X } 100 = 2'27\ \%$

b) $P(14 \leq x \leq 16) = P(x \leq 16) - P(x < 14) = \phi\left(\frac{16-12}{1}\right) - \phi\left(\frac{14-12}{1}\right) = \phi(4) - \phi(2) = 1 - 0{,}9773 = 0{,}0227 \text{ X } 100 = 2'27\%$

c)



$P(12-a \leq x \leq 12+a) = 0{,}90 \longrightarrow P(x \leq 12+a) - P(x < 12-a) = 0{,}90 \longrightarrow \phi\left(\frac{12+a-12}{1}\right) - \phi\left(\frac{12-a-12}{1}\right) = 0{,}90$

$\phi(a) - \phi(-a) = 0{,}90 \longrightarrow \phi(a) - [1 - \phi(a)] = 0{,}90 \longrightarrow \phi(a) - 1 + \phi(a) = 0{,}90 \longrightarrow 2\phi(a) = 1{,}90$

$\phi(a) = \frac{1{,}9}{2} \longrightarrow \phi(a) = 0{,}95 \longrightarrow a = 1{,}64$

El intervalo es : $[12 - 1{,}64 ; 12 + 1{,}64] \longrightarrow [10{,}36 ; 13{,}64]$

Ejercicio 5:

Un 70% de los productos de los que comercializa Azucarera S.A. son importados. Teniendo una muestra de 100 yogures naturales.

a) Calcular la probabilidad de que más de 60 sean importados

$X \in b(100 ; 0{,}7) \longrightarrow N(np, npq)$

$$\begin{cases} n>30 \\ 0{,}1 < p < 0{,}9 \\ np > 4 \\ nq > 4 \end{cases}$$

$X \approx N(100 \times 0{,}7 ; 100 \times 0{,}7 \times 0{,}3) \longrightarrow X \approx N(70; 21)$

a) $P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) = 1 - F(60{,}5) = 1 - \phi\left(\frac{60{,}5-70}{\sqrt{21}}\right) = 1 - \phi(-2{,}07) = 1 - [1 - \phi(2{,}07)] = 1 - 1 + \phi(2{,}07) =$

$\phi(2{,}07) = \frac{0{,}9803 + 0{,}9812}{2} \longrightarrow \phi(2{,}07) = 0{,}9875$

Ejercicio 6:

La empresa Lush Cosmetics se dedica a elaborar a mano todos sus productos de belleza. Tienen 3 tiendas en España, situadas en Bilbao, Santander y Madrid. El número de clientes que acceden a estas tiendas siguen una distribución de Poisson y son independientes entre sí. Las medias de clientes que acuden a estos establecimientos son: 100 en Bilbao, 200 en Santander y 400 en Madrid.

a) Calcular la distribución del total de clientes que acceden día a día a Lush.
b) Calcular la probabilidad de que en 30 días el número de clientes que han visitado cualquiera de las tres tiendas sea superior a 21111.

X1 = P(λ_1 = 100)
X_2= P (λ_2 = 200)
X_3 = P (λ_3 = 400)

a) Z = X_1+X_2+X_3 $\longrightarrow$ Z ϵ P (λ_1+λ_2 + λ_3) $\longrightarrow$ Z ϵ P = P (700)

Z= total de personas que asistan a uno de los tres centros de lush

b) Y ϵ P (30 x 700) = Y ϵ P (21000)

$\lambda \geq 18$ $\longrightarrow$ Y es una distribución normalizada donde la media es 21000 y la varianza 21000

Y $\rightarrow$ N (21000; 21000)

P (Y > 21111) = 1-P (Y < 21111,5) = 1- ϕ ($\frac{21111{,}5-21000}{\sqrt{21000}}$) = 1 - ϕ (0,7) = 1- $\frac{0{,}7764+0{,}7823}{2}$ = 0,22065

Tema 4:

Organizaciones No Gubernamentales:

Ejercicio 1:

EJERCICIO MÁXIMA VEROSIMILITUD (1)

ENUNCIADO

El acceso a agua potable en África subsahariana, la región con la cobertura más baja en 1990, se ha incrementado a razón de 50.000 personas diarias desde el año 2000. Sin embargo, a esta región corresponden más de dos de cada cinco personas que carecen de acceso a nivel mundial; es decir, 325 millones

Médicos sin Fronteras ha realizado un estudio a 42 niños de una escuela de Costa de Marfil y ha llegado a las siguientes conclusiones: 20 de ellos no tienen acceso a agua potable, 12 tienen acceso a agua en malas condiciones y 6 tienen acceso a agua en buen estado.

A través del método de Máxima Verosimilitud, estimar las proporciones de niños sin acceso a agua potable, con acceso, pero en malas condiciones y con acceso a agua en buen estado.

SOLUCIÓN

CASO	PROBABILIDAD
A	p
B	q
C	1-p-q

- Función de verosimilitud

- $L(p,q) = P(24A, 12B, 6C) = P(24A) * P(12B) * P(6C)$
- $L(p*q) = p^{24} * q^{12} * (1\text{-}p\text{-}q)^6$

- Aplicar logaritmo neperiano

- $\ln L(p,q) = \ln [p^{24} * q^{12} * (1\text{-}pq)^6]$
- $\ln L(p,q) = \ln p^{24} + \ln q^{12} + \ln (1\text{-}p\text{-}q)^6$
- $\ln L(p,q) = 24 \ln p + 12 \ln q + 6 \ln (1\text{-}p\text{-}q)$

- <u>Derivar parcialmente</u>

- Respecto a p $\rightarrow$ d ln L / dp = $24 * (1/p) + 6 * (-1/1\text{-}p\text{-}q) = (24/p) - (6/1\text{-}p\text{-}q)$
- Respecto a q $\rightarrow$ d ln L / dq = $12 * (1/q) + 6 * (-1/1\text{-}p\text{-}q) = (12/q) - (6/1\text{-}p\text{-}q)$

- <u>Igualar las derivadas</u>

- $(24/p) - (6/1\text{-}p\text{-}q) = 0 \rightarrow (24/p) = (6/1\text{-}p\text{-}q)$ $(24/p) = (12/q) \rightarrow 20q = 12p$
- $(12/q) - (6/1\text{-}p\text{-}q) = 0 \rightarrow (12/q) = (6/1\text{-}p\text{-}q)$ $\rightarrow 24/12 * q = p \rightarrow 2q = p$

- <u>Despejamos en la segunda ecuación</u>

- $(12/q) - (6/1\text{-}p\text{-}q) = 0 \rightarrow (12/q) = (6/1\text{-}3q) \rightarrow 12(1\text{-}3q) = 12 - 36q = 3q \rightarrow 12 = 39q \rightarrow q = 12/39 = 4/13$
- $P = 2q \rightarrow 8/13$

- **P(no potable) = 8/13**
- **P(agua en malas condiciones) = 4/13**
- **P(agua sana) = 1/13**

Ejercicio 2:

EJERCICIO MÁXIMA VEROSIMILITUD (2)

<u>ENUNCIADO</u>

WWF es una de las mayores organizaciones conservacionistas independientes del mundo. Esta ONG pretende parar la degradación del ambiente natural del planeta. Cuenta con 5 millones de miembros y una red mundial de 27 organizaciones nacionales, que llegan a trabajar en más de 100 países. La sede principal se encuentra en Suiza y la dirección de América en Estados Unidos.

El profundo proceso de transformación al que los seres humanos están sometiendo al Planeta está provocando lo que **los expertos han definido como la sexta extinción masiva de especies**. Al igual que en las 5 anteriores (la última y más conocida fue la de los **dinosaurios**), este proceso se caracteriza por u**na tasa de desaparición de especies mucho más rápida de lo habitual.**

WWF ha realizado una investigación en la zona amazónica para observar los animales que están en peligro de extinción. La muestra ha sido de 35 animales y la conclusión ha sido la siguiente: 20 están en peligro de extinción, 5 especies han desaparecido totalmente y 10 no corren peligro.

SOLUCIÓN

CASO	PROBABILIDAD
A	p
B	q
C	1-p-q

- Función de verosimilitud

- L(p,q) = P(20A, 5B, 10C) = P(20A) * P(5B) * P(10C)
- L(p*q) = p^{20}* q^{5}* $(1\text{-}p\text{-}q)^{10}$

- Aplicar logaritmo neperiano

- ln L(p,q) = ln [p^{20} * q^{5} * $(1\text{-}pq)^{10}$]
- ln L(p,q) = ln p^{20} + ln q^{5}+ ln $(1\text{-}p\text{-}q)^{10}$
- ln L(p,q) = 20 ln p + 5 ln q + 10 ln (1-p-q)

- Derivar parcialmente

- Respecto a p → d ln L / dp = 20 * (1/p) + 10 * (-1/1-p-q) = (20/p) – (10/1-p-q)
- Respecto a q → d ln L / dq = 5 * (1/q) + 10 * (-1/1-p-q) = (5/q) – (10/1-p-q)

- Igualar las derivadas

- (20/p) – (10/1-p-q) = 0 → (20/p) = (10/1-p-q)(20/p) = (5/q) → 20q = 5p
- (5/q) – (10/1-p-q) = 0 → (5/q) = (10/1-p-q) → 20/5* q = p → 5q = p

- Despejamos en la segunda ecuación

- (5/q) - (10/1-p-q) = 0 →(5/q) = (10/1-p-q)→(5/q) = (10/1-6q) → 5(1-6q) = 10q → 5 – 30q = 10q → 5 = 40q → q= 1/8
- p = 5q → 5/8

- **P(peligro de extinción) = 5/8**
- **P(desaparición total) = 1/8**
- **P(no corren peligro) = 2/8**

Ejercicio 3:

EJERCICIO DE LOS MOMENTOS

ENUNCIADO

La ONG "Acción Contra el Hambre" es experta en ayuda humanitaria y responde rápidamente ante emergencias. Reparten agua y alimentos a miles de personas que no pueden acceder a ello. Su prioridad es salvar vidas, por ello, ante una emergencia lo más importante es garantizar la protección y seguridad de los niños y niñas afectados. Ayudan en Europa, África, Latinoamérica, Oriente Próximo y Asia.

Para ello, durante un mes, han enviado 11 camiones con ayuda humanitaria a Kenia, con el fin de prevenir la desnutrición aguda.

La distribución de probabilidad X, número de camiones con ayuda humanitaria que entran en Kenia, es la siguiente:

P(2) = 6-k/8; P(4) = k/8; P(5) = 2k/8

Durante 30 días: entran 2 camiones en los 12 primeros días, 4 camiones los 8 siguiente y 5 camiones los 10 días restantes.

En base a esta muestra aleatoria simple, estime el parámetro k por el método de los momentos.

SOLUCIÓN

- Muestra: 2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,4,4,4,4,4,4,4,4,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8

1) **Distribución de probabilidad:**

X	2	4	5
P	7-k/8	k/8	2k/8

- X_1 = E[x] = 2*(7-k/8) + 4*(k/8) + 5*(2k/8) = 14-2k/8 + 4k/8 + 10k/8 = 14+12k/8

2) (2*12 + 4*8 + 5*10) / 8 = 106/8 = 53/4
3) $x_1 = a_1 \rightarrow$ 14+12k/8 = 53/4$\rightarrow$**k=7'67**

Sostenibilidad y medioambiente:

Ejercicio 1:

Al extraer 15 árboles de diferentes bosques del País Vasco para la fabricación de una mesa de madera, 10 de ellos han sido pinos, ¿cuál es la procedencia de la muestra?¿Y en el caso de 13 secuoyas?

BOSQUE 1	**BOSQUE 2**	**BOSQUE 3**
10 pinos 25 secuoyas	30 pinos 8 secuoyas	15 pinos 11 secuoyas

Aunque la muestra pueda proceder de cualquiera de los tres bosques, el método de la máxima verosimilitud nos dice que será del Bosque 2, porque es lo más verosímil o probable que ocurra, ya que la cantidad de pinos en el Bosque 2 es 30, mientras que el del Bosque 1 y Bosque 3 es de 10 y 15 respectivamente. En el caso de las secuoyas el razonamiento sería el mismo, lo más probable que ocurra es que provengan del Bosque 1 puesto que la cantidad de secuoyas en este es mayor, con una cantidad de 25.

Ejercicio 2:

Amsterdam es una ciudad en la que la población hace uso de la bicicleta como vehículo principal, el uso de este tipo de transporte sigue la siguiente variable binaria:
- x= 0, 1
- P(x)= ¼, 3/4

a) Calcular su media y su varianza de producción
b) Calcular la distribución en el muestreo de f (muestras posibles con sus probabilidades, media y varianza), para n=2 y n=4. Representa gráficamente dichas distribuciones. Establecer las relaciones con los parámetros poblacionales.

a)

$E(x) = Mx = \sum_{xi} f(xi) =$ **3/4**

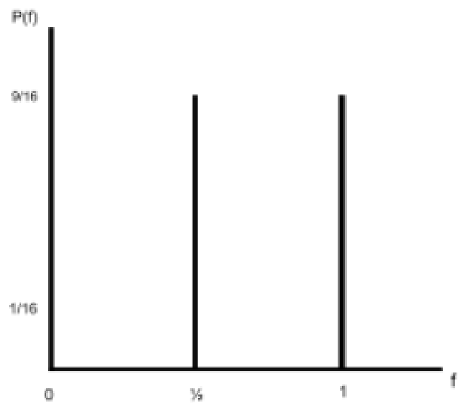
Varianza = $\sum_{xi}^{2} pi - \mu = \sum (xi-\mu)^2 * p(xi) = E(xi-mx)^2 * p(xi) =$

$(0-\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4} + (1-\frac{3}{4})^2 \times \frac{3}{4} = 3/16 =$ **0,1874**

b)

Muestra	Frecuencia f=z/n =(x+y)/n	Probabilidad
(0,0)	(0+0)/2 = 0	¼ x ¼ = 1/16
(0,1)	(0+1) = ½	¼ x ¾ = 3/16
(1,0)	(1+0) = ½	¾ x ¼ = 3/16
(1,1)	(1+1) = 1	¾ x ¾ = 9/16

f	P(x)
0	1/16
½	3/8
1	9/16



$E(f) = (0 \times 1/16) + (1/2 \times 3/8) + (1 \times 9/16) =$ **3/4**

$\sigma(f)^2 = (0 - \frac{3}{4})^2 \times 1/16 + (\frac{1}{2} - \frac{3}{4})^2 \times 3/8 + (1 - \frac{3}{4})^2 \times 9/16 =$ **3/32**

Ejercicio 3:

Se sabe que la distribución de probabilidad X, número de envases biodegradables que importa la empresa francesa "DeltaPack" al País Vasco en un día es la siguiente:

$P(1)= \frac{1-K}{7}$; $P(3)= \frac{2-K}{7}$; $P(3)= \frac{K}{7}$

Se contabilizan las demandas de entradas recibidas en 7 días elegidos al azar, obteniéndose los siguientes resultados: en dos días la demanda es 1, en tres días tres demandas, y en los últimos dos días hubo tres demandas.

En base a esta muestra aleatoria simple, estime el parámetro K por el método de los momentos y por el método de la máxima verosimilitud.

<u>Método de los momentos</u>

Se contabilizan las demandas de entrada al País Vasco recibidas en siete días:

Muestra 2,2,4,4,4,3,3, ⇨ En 2 días= 1 demandas

En 3 días= 3 demandas n=7

En 2 días= 3 demandas

Estimar el parámetro ´´ k´´

$\alpha 1 = a1 \rightarrow \alpha = 1$

$\alpha 1 = \varepsilon(x) = 1^* \left(\frac{1-K}{7}\right) + 3^* \left(\frac{2-K}{7}\right) + 3 \left(\frac{K}{7}\right)$

$= \frac{1-K}{7} + \frac{6-K}{7} + \frac{3K}{7} = \frac{3K+7}{7}$

$a\,1=2^*1+3^*3+2^*3= 17 \mapsto \frac{17}{7}$

$\alpha 1 = a1 \rightarrow \frac{3K+7}{7} = \frac{17}{7} \rightarrow \hat{}K_{MM}= \frac{10}{3}$

Estimar ´´ k´´ por el método de la máxima verosimilitud

$MV=L \left(\frac{1-K}{7}\right)^3 \left(\frac{2-K}{7}\right)^2 \left(\frac{K}{7}\right)^2$

$\ln L= 3\ln(1-K)-3\ln 7 +2\ln(2-K) -2LN7+2LNk-2\ln 7$

$$\frac{\varrho lnL}{\varrho k} = \frac{-3}{1-K} - \frac{2}{2-K} + \frac{2}{k} = 0$$

$$7K^{2} - 14K + 4 = 0$$

$$KMV = \frac{7+\sqrt{21}}{7} = 1.65$$

Comercio justo y Economía Social y Solidaria

Ejercicio 1:

“Oxfam Intermon” quiere introducir una nueva línea de cosmética procedente de la agricultura ecológica en sus tiendas físicas. Con la elaboración de este producto se impulsa el acceso de las mujeres de Burkina Faso al mercado laboral, así como la sostenibilidad medioambiental. Antes de comercializar el producto, Oxfam realiza un estudio sobre la viabilidad del proyecto, tomando una muestra aleatoria simple de 40 personas entre los clientes de sus diversas tiendas.
Así, 28 personas están dispuestos a adquirir el producto, independientemente de su precio, para favorecer la inclusión de las mujeres al mercado laboral y erradicar la pobreza. Otras 8 personas están dudando y los 4 restantes no comprarían el producto.
a) Estimar la proporción de las personas que comprarían el producto, dudosas y las que no comprarían el producto según el método de máxima verosimilitud.

Solución:

Personas	**Probabilidad**
Comprarían (C)	P
Dudosos (D)	Q
No comprarían (N)	1-P-Q

1) Función de verosimilitud

L (p, q) = P (28C; 8D; 4N) = P(28C) $*P(8D)*P(4N)$
L (p, q) = $P28*Q8*(1-P-Q)4$

2) Aplicamos los logaritmos neperianos

ln L (p, q) = ln $[P28*Q8*(1-P-Q)4]$
ln L (p, q) = ln $P28$+ ln $Q8$+ ln $(1-P-Q)4$

ln L (p, q) = 28ln$P$+ 8ln$Q$ + 4ln$(1-P-Q)$

3) Derivamos
$\partial \ln L(p,q) \partial P = 28p+4*(-1)(1-p-q)=28p-4(1-p-q)$
$\partial \ln L(p,q) \partial Q = 8q+4*(-1)(1-p-q)=8q-4(1-p-q)$
4) Igualamos a 0 y resolvemos la ecuación

$28p=4(1- P - Q)$ $28p= 8q \rightarrow 28Q = 8P \rightarrow P = 72Q$ $8q=4(1-P-Q)$
$8q=4(1-72Q-Q) \rightarrow 8*(1-92Q)=4Q \rightarrow 8 - 36Q = 4Q \rightarrow 8 = 40Q \rightarrow Q = 210$
$\hat{Q}MV = 210$
$P = 72Q \rightarrow P = 72 \times 210$
$\hat{P}MV = 710$

$\check{Z}MV$ = (1- 15 - 710) = 110
• La proporción de las personas que comprarían el producto es de 710 , dudosos 210 y los que no comprarían es de 110

Ejercicio 2:

Entre los 50 alumnos del grupo 016 de la facultad de la economía y empresa de Vitoria, 16 alumnos manifiestan estar concienciados con el consumo responsable y con el beneficio que aporta el comercio justo a la sociedad. Se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 3.
a) Calcular las muestras posibles con sus probabilidades

Solución: x	0	1
P(x)	34/50	16/50

Muestra	Frecuencia	Probabilidad
(0,0,0)	0+0+03=0	34/50*34/50*34/50= 4913/15625
(0,0,1)	0+0+13=13	34/50*34/50*16/50= 231215625
(0,1,0)	0+1+03=13	3450*1650*3450=2312/15625
(1,0,0)	1+0+03=13	1650*3450*3450=231215625
(1,1,0)	1+1+03=23	16/50*16/50*34/50= 1088/15625
(1,0,1)	1+0+13=23	16/50*34/50*16/50= 1088/15625
(0,1,1)	0+1+13=23	34/50*16/50*16/50= 1088/15625
(1,1,1)	1+1+13=1	16/50*16/50*16/50= 5121/5625

b) Calcular la distribución de la proporción muestral de los alumnos concienciados con el consumo responsable, su media y su varianza.

f	P(f)
0	$\frac{4913}{15625}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{6936}{15625}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{3264}{15625}$
1	$\frac{512}{15625}$

$$E(f) = 0 * \frac{4913}{15625} + \frac{1}{3} * \frac{6936}{15625} + \frac{2}{3} * \frac{3264}{15625} + 1 * \frac{512}{15625} = \frac{16}{50}$$

$$\sigma^2 = \frac{\frac{16}{50} * \frac{34}{50}}{3} = \frac{136}{1875}$$

Ejercicio 3:

Las mujeres de Manikhar, una pequeña población en medio de arrozales, en el sudeste de Bangladesh han tenido una iniciativa para acabar con su exclusión laboral y deciden elaborar cestas ecológicas, hechas con hoja de palma. Dichas cestas se venden en España en diversos establecimientos del comercio justo y su demanda tiene la siguiente distribución de probabilidad de X:

$$P(2) = \frac{2-K}{10}, P(3) = \frac{1-K}{10}, P(5) = \frac{7k}{10}$$

Se contabilizan las demandas de las cestas en 10 días elegidos al azar, obteniéndose los siguientes resultados: en 4 de ellos se venden 2 cestas, en otros 2 se venden 3, y en otros 4 días se venden 5.

a) Estimar el parámetro K por el método de los momentos y por el método de máxima verosimilitud, en base a esta muestra aleatoria simple.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\text{En 4 días: 2 demandas}\\ \text{En 2 días: 3 demandas}\\ \text{En 4 días: 5 demandas}\end{array}\right\} \quad 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5 \qquad n=10$$

Método de los momentos:

$$a_1 = \frac{4*2+2*3+4*5}{10} = \frac{34}{10}$$

$$x_1 = E(x) = 2 * \frac{2-K}{10} + 3 * \frac{1-K}{10} + 5 * \frac{7K}{10} = \frac{4-2k}{10} + \frac{3-3K}{10} + \frac{35K}{10} = \frac{4-2K+3-3K+35K}{10} = \frac{7+30k}{10}$$

$$x_1 = a_1$$

$$\frac{7+30k}{10} = \frac{34}{10} \longrightarrow (7+30k) * 10 = (34 * 10)$$

$$\widehat{K} = \frac{9}{10}$$

Método de máxima verosimilitud:

1) **Función de verosimilitud**

$L(K) = P(2)^4 * P(3)^2 * P(5)^4$

$L(K) = \left(\frac{2-K}{10}\right)^4 * \left(\frac{1-K}{10}\right)^2 * \left(\frac{7K}{10}\right)^4$

2) **Aplicamos los logaritmos neperianos**

$Ln\ L(K) = ln\left[\left(\frac{2-K}{10}\right)^4 * \left(\frac{1-K}{10}\right)^2 * \left(\frac{7K}{10}\right)^4\right]$

$Ln\ L(K) = ln\left(\frac{2-K}{10}\right)^4 + ln\left(\frac{1-K}{10}\right)^2 + ln\left(\frac{7K}{10}\right)^4$

$Ln\ L(K) = 4ln\left(\frac{2-K}{10}\right) + 2ln\left(\frac{1-K}{10}\right) + 4ln\left(\frac{7K}{10}\right)$

$Ln\ L(K) = [4ln\ (2-k) - 4ln10] + [2ln\ (1-k) - 2ln10] + [4ln\ (7k) - 4ln10]$

3) **Derivamos e igualamos a 0**

$$\frac{\partial ln\ L(K)}{\partial K} = \frac{-4}{2-k} + \frac{-2}{1-k} + \frac{28}{7k}$$

$$\frac{-4}{2-k} - \frac{2}{1-k} + \frac{4}{k} = 0 \longrightarrow \hat{k}_{MV} = 0{,}5527864$$

Ejercicio 4:

En el mundo millones de mujeres sufren todo tipo de agresiones, tanto verbales como físicas. Son muchas organizaciones las que están luchando por acabar con esta situación y, entre ellos, se encuentra Setem Hego Haizea, organización dedicada a sensibilizar a la ciudadanía sobre las diversas desigualdades sociales existentes en la sociedad.

Dentro de la población mundial un 80% de las mujeres han sufrido algún tipo de agresión (verbal o física), mientras que el otro 20% restante no.

Teniendo en cuenta la siguiente variable binaria donde (0=mujeres que no han sufrido ninguna agresión) y (1= mujeres que han sufrido algún tipo de agresión), calcular:

a) La media y la varianza poblacional
b) La distribución en el muestreo de f (muestras posibles con sus probabilidades, media y varianza) para n=3. Es decir, se coge una muestra de tres personas del mundo. Representa gráficamente dichas distribuciones. Establecer la relación con los parámetros poblacionales.

x	0	1
P(x)	0,2	0,8

a) $E(x) = m_x = \xi xi\ p(xi) = \xi xi\ f(xi)$

- $E(x) = (0 \text{ x } 0{,}2) + (1 \text{ x } 0{,}8) = \frac{4}{5} = 0{,}8$
- $\sigma^2_x = \xi xi\ pi - \mu = \xi\ (xi - \mu)^2\ p\ (xi) = E\ (xi - m_x)^2\ (pxi) = pq$
- $\sigma^2_x = (0 - \frac{4}{5}) \text{ x } 0{,}2 + (1 - \frac{4}{5}) \text{ x } 0{,}8 = \frac{4}{25} = 0{,}16 = pq$
-

b) n=3

MUESTRAS	**FRECUENCIA f=z/n = X1+X2+X3/n**	**PROBABILIDAD**
(0,0,0)	$\frac{0+0+0}{3} = 0$	$0{,}2 \text{ x } 0{,}2 \text{ x } 0{,}2 = \frac{1}{125}$
(0,0,1)	$\frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3}$	$0{,}2 \text{ x } 0{,}2 \text{ x } 0{,}8 = \frac{4}{125}$
(0,1,0)	$\frac{0+1+0}{3} = \frac{1}{3}$	$0{,}2 \text{ x } 0{,}8 \text{ x } 0{,}2 = \frac{4}{125}$
(0,1,1)	$\frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$	$0{,}2 \text{ x } 0{,}8 \text{ x } 0{,}8 = \frac{16}{125}$
(1,0,0)	$\frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$	$0{,}8 \text{ x } 0{,}2 \text{ x } 0{,}2 = \frac{4}{125}$
(1,0,1)	$\frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$	$0{,}8 \text{ x } 0{,}2 \text{ x } 0{,}8 = \frac{16}{125}$
(1,1,0)	$\frac{1+1+0}{3} = \frac{2}{3}$	$0{,}8 \text{ x } 0{,}8 \text{ x } 0{,}2 = \frac{16}{125}$
(1,1,1)	$\frac{1+1+1}{3} = 1$	$0{,}8 \text{ x } 0{,}8 \text{ x } 0{,}8 = \frac{64}{125}$

De la columna de la distribución de la probabilidad hallamos la función de probabilidad.

f	**P(f)**
0	1/25
1/3	4/125 + 4/125 + 4/125 = 12/125

2/3	16/125+ 16/125+ 16/125 = 48/125
1	64/125

E (f)=ξxi pi (xi)= $(0 \text{ x } \frac{1}{125}) + (\frac{1}{3} \text{ x } \frac{12}{125}) + (\frac{2}{3} \text{ x } \frac{48}{125}) + (1 \text{ x } \frac{64}{125}) = \frac{4}{5} = 0{,}8 = \frac{nxp}{n} = p$

σ^2 (f)= Var (f)= $\xi xi^2 pi - \mu = \xi(xi - \mu)^2$ p (xi)= $(0-\frac{4}{5}) \text{ x } \frac{1}{125} + (\frac{1}{3}-\frac{4}{5}) \text{ x } \frac{12}{125} + (\frac{2}{3}-\frac{4}{5}) \text{ x } \frac{48}{125} + (1-\frac{4}{5})^2$ $\text{x } \frac{64}{125} = \frac{4}{75} = \frac{pxq}{n}$

Ejercicio 5:

Ekoizan es una empresa que elabora, produce y distribuye productos ecológicos certificados. Su objetivo es facilitar el acceso a los productos ecológicos y alimentación saludable a las personas. Su función de cuantía de distribución es la siguiente:

P (7) = $\frac{(8-\lambda+\sigma)}{16}$ P (3) = $\frac{(2+\sigma)}{16}$ P (4) = $\frac{(8-\lambda)}{16}$

Por el método de momentos, estimar λ y σ a partir de la m.a.s 7, 3, 4, 4, 7 ,4.

Tenemos que estimar 2 parámetros, el orden será de k=2 $\begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ \alpha_2 = a_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} = \frac{7 \, x \, 2+4 \, x \, 3+3x \, 1}{6} = \frac{29}{6} = 4{,}83 \\ a_2 = \frac{49 \, x \, 2+16 \, x \, 3+9 \, x \, 1}{6} = \frac{155}{6} = 25{,}83 \end{cases}$$

α_1= E(x)= $7 \text{ x } (\frac{8-\lambda+\sigma}{16}) + 3 (\frac{2+\sigma}{16}) + 4 (\frac{8-\lambda}{16}) = \frac{56-7\lambda+7\sigma+6+3\sigma+32-4\lambda}{16} = \frac{94-11\lambda+10\sigma}{16}$

α_2= $7^2(\frac{8-\lambda+\sigma}{16}) + 3^2 (\frac{2+\sigma}{16}) + 4^2(\frac{8-\lambda}{16}) = \frac{392-49\lambda+49\sigma+18+9\sigma+128-16\lambda}{16} = \frac{538-65\lambda+58\sigma}{16}$

$$\begin{matrix} \alpha_1 = a_1 \\ \alpha_2 = a_2 \end{matrix} \begin{cases} \frac{94-11\lambda+10\sigma}{16} = \frac{29}{6} \rightarrow \frac{94-11\lambda+10\sigma}{8} = \frac{29}{3} \\ \frac{538-65\lambda+58\sigma}{16} = \frac{155}{6} \rightarrow \frac{538-65\lambda+58\sigma}{8} = \frac{155}{3} \end{cases}$$

$3(94-11\lambda + 10\sigma) = 8 \times 29$

$3(538-65\lambda + 58\sigma) = 8 \times 155$

$$\begin{cases} 282 - 33\lambda + 30\sigma = 232 \\ 1614 - 195\lambda + 174\sigma = 1240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -33\lambda + 33\sigma = -50 \rightarrow 33\lambda = 30\sigma + 50 \rightarrow \lambda = \frac{30\sigma+50}{33} \\ -195\lambda + 174\sigma = -374 \rightarrow -195(\frac{30\sigma+50}{33}) + 174\sigma = -374 \rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{matrix} \sigma = -0{,}43 \\ \lambda = 1{,}52 \end{matrix}}$$

KIDENDA es una empresa de Bilbao donde únicamente venden productos relacionados con el comercio justo.

Sabiendo que la distribución de la probabilidad X es igual al número de artículos vendidos en un día.

La distribución de la probabilidad es:

P (4) = $\frac{(3+k)}{8}$

P (5) =$\frac{k}{8}$

P (6) = $\frac{(2-k)}{8}$

Se registran las demandas de venta que ha habido durante ocho días obteniendo una serie de resultados tal que:

Los cuatro primeros días se reciben cuatro demandas, en otro día se reciben cinco demandas y por último, en tres, se reciben seis demandas.

Hallar el parámetro K por el método de los momentos.

$\alpha_1 = a_1$

$\alpha_1 = E(x) = 4\left(\frac{3+k}{8}\right) + 5\left(\frac{k}{8}\right) + 6\left(\frac{2-k}{8}\right) = \frac{12+4k}{8} + \frac{5k}{8} + \frac{12-6k}{8} = \frac{24+3k}{8}$

$\alpha_1 = \frac{4 \, x \, 4 + 1 \, x \, 5 + 3 \, x \, 6}{8} = \frac{39}{8}$

$\alpha_1 = a_1 \rightarrow \frac{24 + 3k}{8} = \frac{39}{8}$

$24 + 3k = 39$

$3k = 15 \rightarrow \mathbf{k = 5}$

6. Bibliografía y fuentes de información

Bibliografía básica

Temas 1, 2, 3 y4

- Arteche, Josu et al. (2000): Ejercicios de Estadística II: Estadística Empresarial y para Economistas. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, Bilbao
- Fernández de Troconiz, Antonio (1993): Probabilidades, Estadística, Muestreo. Ed. Tebar Flores. García del Valle, Teresa y Martínez, Alberto (1996): Problemas de Estadística. Ed. UPV-EHU.
- Montiel, Ana María et al (2002): Elementos Básicos de Estadística Económica y Empresarial. Ed. Prentice Hall.
- Martín Pliego, F. Javier y Ruíz Maya, Luis. (2004): Estadística I: Probabilidad, 2ª Edición. AC, Madrid
- Montiel, Ana María et al (2002): Elementos Básicos de Estadística Económica y Empresarial. Ed. Prentice Hall.
- Pérez, César (2005): Muestreo Estadístico. Conceptos y problemas resueltos. Pearson Educación, Madrid.
- Ruíz Maya, Luis y Martín Pliego, F. Javier (2005): Fundamentos de Inferencia
- Estadística, 3ª Edición. AC, Madrid.