



**MÁSTER UNIVERSITARIO EN
INGENIERÍA INDUSTRIAL**

TRABAJO FIN DE MÁSTER

***FÓRMULA INGENIERIL PARA EL
CÁLCULO DEL PAR DE FRICCIÓN EN
RODAMIENTOS DE VUELCO EN VACÍO Y
BAJO CARGA AXIAL***

Alumno/Alumna

Goikolea

Ibarguengoitia

Eneko

Director/Directora

Heras Miguel Iker

Departamento

Ingeniería mecánica

Curso académico

2018-2019

Bilbao, 10-06-2019

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	3
LABURPENA	3
ABSTRACT	4
1. INTRODUCCIÓN	6
2. CONTEXTO	7
3. OBJETIVOS Y ALCANCE	10
4. BENEFICIOS DEL PROYECTO	11
5. ESTADO DEL ARTE	12
6. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS	15
6.1. Selección del software	15
6.2. Selección del error a minimizar	16
7. METODOLOGÍA	17
7.1. Programa para el cálculo del par: BA-Tool	17
7.2. Programa para obtener la función objetivo	19
8. DESARROLLO DEL TRABAJO	23
8.1. Caso de funcionamiento en vacío y con precarga	24
8.1.1. Planteamiento de la forma funcional	26
8.1.2. Validación de la fórmula	33
8.2. Caso de carga axial sin precarga	34
8.2.1. Planteamiento de la forma funcional para el ángulo de contacto	36
8.2.2. Validación de la fórmula para el ángulo de contacto	44
8.2.3. Planteamiento de la forma funcional	45
8.2.4. Validación de la fórmula	50
9. RESULTADOS: GUÍA DE DISEÑO	53
10. DIAGRAMA DE GANTT	55
11. PRESUPUESTO	57
12. CONCLUSIONES	58
REFERENCIAS	60
ANEXOS	62
ANEXO I: Script	62
ANEXO II: Resultados para el caso de precarga de las bolas	74

ANEXO III: Variación de los coeficientes con el Dw - Ángulo	78
ANEXO IV: Variación de los coeficientes con el Dw – Par	79
ANEXO V: Resultados para el caso de carga axial	80
ANEXO VI: Valores aleatorios empleados en la validación	87

RESUMEN

Entre los diversos campos de investigación en los que participa el grupo de Análisis y Diseño Mecánico (ADM) de la Escuela de Ingenieros de Bilbao, se encuentra el campo de rodamientos de vuelco. Para este tipo de rodamiento, son diversas las áreas que se han estudiado, entre las que se encuentran el estudio del par de fricción, rigidez, influencia de los errores de fabricación etc.

Este proyecto, forma parte de los diversos estudios que se han realizado en dicho grupo. Como resultado del mismo, se han obtenido unas fórmulas ingenieriles de sencilla aplicación para el cálculo del par de fricción en rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto. Los resultados se presentan en forma de guía práctica para que los analistas y diseñadores que contemplen estos componentes en sus cálculos estructurales puedan utilizar las fórmulas propuestas, en el rango de funcionamiento adecuado y conociendo las limitaciones (errores máximos) de la formulación en cada caso.

Palabras clave: rodamientos de vuelco, par de fricción, fórmula ingenieril

LABURPENA

Bilboko Injeniaritza Eskolako ADM taldeak lantzen dituen hainbat ikerketa arloen artean, iraultze errodamenduen gaineko ikerketak aurki daitezke. Horietan, errodamenduen marruskadura momentua, zurruntasuna eta pisten fabrikazio akatsen eragina aurki daitezke besteak beste.

Proiektu hau, ikerketa horien parte da. Bertan, erabilgarritasun handi eta errazeko hainbat formula aurkezten dira, zeintzuekin lau kontaktu puntuko iraultze errodamenduetan ematen den marruskadura momentua kalkula daitekeen. Emaitzak, gidaliburu bezala aurkezten dira zeini esker, elementu hauen kalkulu estrukturala burutzeaz arduratzen diren analistek, jarraian aurkeztuko diren formulak erabili ahal ditzaten beraien funtzionamendu eremu egokian eta haien mugak jakinez.

Hitz gakoak: iraultze errodamenduak, marruskadura momentua, formula

ABSTRACT

The ADM group of the Faculty of Engineering of Bilbao performs some researches about slewing bearings. In these, parameters as friction torque, bearing stiffness, contact angle variation and the effect of ring fabrication error have been studied.

This project is presented as a part of these researches where some engineering formulas have been obtained, enabling the easy calculation of the friction torque in four contact point slewing bearing. Results are presented as a guide that can be used by analysts who have to perform structural analysis in these components, in their appropriate range of use and knowing beforehand their limitations.

Key words: slewing bearings, friction torque, engineering formula

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Capacidad de energía eólica (Fuente: WindEurope).....	7
Ilustración 2: Tipos de rodamientos de vuelco. (Fuente: SKF [1]).	8
Ilustración 3: Rodamientos de vuelco en un aerogenerador.....	9
Ilustración 4: Modelización del contacto mediante muelles.	12
Ilustración 5: Modelización del contacto en el BIME.	13
Ilustración 6: Modelo BA-Tool.....	13
Ilustración 7: Parámetros geométricos estándar (Fuente: Tesis Heras [9])......	14
Ilustración 8: Sistemas de coordenadas y GDL.	18
Ilustración 9: Comparativa modelos huella de contacto (Fuente [10]).	19
Ilustración 10: Diferencia bloque 1 y bloque 2.	23
Ilustración 11: Comparación de par con y sin precarga.....	23
Ilustración 12: Valores escogidos para los parámetros geométricos (Fuente: Tesis Heras [9]).	25
Ilustración 13: Resultados BA-Tool.	28
Ilustración 14: Representación de $f(\alpha)$	30
Ilustración 15: Representación de $f(\alpha)$ por cada conformidad.	31
Ilustración 16: Valores aleatorios.....	34
Ilustración 17: Representación de $f(\alpha_0, s, F_a)$	37
Ilustración 18: Aproximación de $g(\alpha_0)$	37
Ilustración 19: Representación de $h(s, F_a)$	38
Ilustración 20: Aproximación de $i(s)$	39
Ilustración 21: Aproximación de $i(s) - 2$	39
Ilustración 22: Representación de $j(F_a)$	40
Ilustración 23: Representación de $j(F_a) - 2$	41
Ilustración 24: Aproximación de $j(s)$	42
Ilustración 25: Valores aleatorios.....	44
Ilustración 26: Aproximación para D_w	47
Ilustración 27: Distribución de errores.....	48
Ilustración 28: Valores aleatorios.....	51
Ilustración 29: Diagrama de Gantt.	56

1. INTRODUCCIÓN

Los rodamientos de vuelco tienen diversas aplicaciones entre las que destaca su uso en eólica. A medida que aumenta la generación de energía eólica, aumentan las inversiones realizadas en aerogeneradores, lo cual lleva a que sean cuestión de actualidad en el campo de la investigación. El par de fricción, la rigidez y la capacidad de carga suelen ser algunos de los objetivos en los trabajos de investigación mencionados previamente.

En este proyecto, se realizará el estudio del par de fricción en los rodamientos de vuelco. Es importante destacar que el par de fricción es un parámetro importante en este tipo de rodamientos dado que se emplean como unión entre las palas de los aerogeneradores y el buje, así como entre góndola y torre. Por ello, resulta importante conocer dicho par para poder diseñar, por ejemplo, los motores encargados de orientar dichas palas y góndolas.

Para ello, se partirá de un modelo matemático desarrollado por el grupo de investigación ADM de la Escuela de Ingenieros de Bilbao en el software Matlab. Este modelo, denominado BA-Tool, que parte de las especificaciones geométricas del rodamiento, obtiene la aportación de cada bola al par de fricción global. Así pues, se partirá de los resultados proporcionados por dicho modelo y se aproximarán funcionalmente obteniendo así unas fórmulas que relacionen el par de fricción del rodamiento con los parámetros geométricos y las cargas aplicadas.

El estudio del par de fricción se realizará para los casos en los que el rodamiento está libre de fuerzas exteriores, es decir, sometido únicamente a la precarga de las bolas y cuando está sometido a una fuerza aplicada exterior axial. Tras obtener la aproximación funcional del modelo, se compararán los resultados analizando el error cometido e indicando el rango de validez de dichas aproximaciones.

De esta manera, se pretende plantear un sencillo método que pueda resultar útil a la hora de realizar un diseño inicial del aerogenerador, seleccionar o diseñar un rodamiento, o cualquier componente contiguo a un rodamiento como puede ser, por ejemplo, un motor eléctrico.

2. CONTEXTO

Existen diversos sistemas que permiten realizar la unión entre un eje fijo y otro con movimiento de rotación. Entre ellos, se pueden encontrar los cojinetes magnéticos e hidrostáticos, guías hidrostáticas y de contacto, rodamientos etc. Estos últimos, poseen ciertas características que, en ocasiones, las hacen ser las más adecuadas para determinadas aplicaciones. Entre estas ventajas, encontramos la capacidad de soportar cargas axiales, la constancia del par de fricción, menor desprendimiento de calor, menor longitud y la capacidad de poder emplear el mantenimiento preventivo gracias al ruido que emiten los rodamientos antes de fallar. Sin embargo, poseen también una serie de inconvenientes como el mal comportamiento que representan frente a polvos metálicos, la poca resistencia frente a impactos y fatiga superficial.

El grupo de investigación Análisis y Diseño Mecánico (ADM) de la Escuela de Ingeniería de Bilbao, ha realizado diversos estudios en el campo de Ingeniería. Entre ellos, se encuentran la tribología, fatiga, fractura, biomecánica, análisis por elementos finitos, dinámica vibratoria etc.

Uno de los sectores en los que ha trabajado dicho grupo, es el sector de la energía eólica. En este, se han realizado estudios sobre los rodamientos de vuelco que se utilizan en las uniones de las palas con el buje y la góndola con la torre de los aerogeneradores. Estos rodamientos, se diseñan para soportar cargas axiales, radiales y momentos de vuelco que se generan en las palas (o la góndola) como consecuencia de la gravedad, fuerza del viento e inercia de las palas. Se puede observar, que aquellos que se unen a las palas, soportarán una carga radial y un momento de vuelco a causa de la fuerza ejercida por el viento y el peso propio de la pala, así como una considerable fuerza axial a causa de la fuerza centrífuga; los que se unen a la góndola en cambio, soportarán una carga axial debido al peso del mismo, una fuerza radial a causa del viento y un momento de vuelco como combinación de las dos acciones previas.

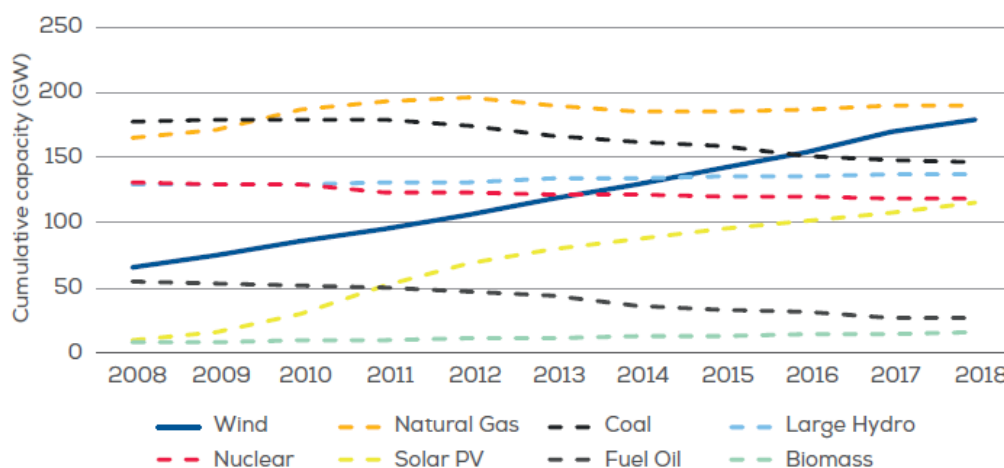


Ilustración 1: Capacidad de energía eólica (Fuente: WindEurope).

Tal y como se observa en la ilustración anterior, la capacidad eólica instalada en Europa ha aumentado considerablemente en los últimos diez años. A medida que aumenta la potencia

instalada, aumentan las inversiones realizadas en los aerogeneradores y sus respectivos componentes, como son, los rodamientos de vuelco. Sin embargo, es importante destacar que el campo de aplicación de este tipo de rodamientos no solo se limita a los aerogeneradores; sino que también son frecuentemente utilizados en máquinas tuneladoras, grúas, excavadoras, vehículos forestales, boyas offshore, turbinas de marea...

Los rodamientos de vuelco, suelen estar compuestos de un anillo interior y de otro exterior, uno de los cuales, suele tener un engranaje para la transmisión. Además, suelen disponer de una serie de agujeros para poder realizar las conexiones con los elementos adyacentes mediante uniones atornilladas. En las pistas, se disponen una serie de elementos rodantes con sus correspondientes jaulas o separadores de tal forma que permitan la absorción de cargas en cualquier dirección. Entre las características mecánicas, predominan la alta capacidad de transmitir cargas, la alta esbeltez, bajo par de fricción, la vida útil y la posibilidad de realizar tratamientos superficiales para prevenir la fatiga superficial o la corrosión. Existen proveedores como SKF [1] que en su gama de productos se encuentran rodamientos cuyo diámetro exterior varía desde 0.1 a 18 m. Asimismo, existen diversos tipos de diseño de los mismos cada cual posee sus características propias:

- Rodamientos de cuatro puntos de contacto: en general, es el que representa la mejor relación economía- capacidad de carga.
- Ocho puntos de contacto: la capacidad de carga se ve incrementada en un 80% respecto de los anteriores.
- Rodamientos de rodillos cilíndricos cruzados: alta rigidez y par de fricción constante.
- Rodamientos de rodillos de triple fila: máxima capacidad para un diámetro dado.
- Rodillos "wire": 60% más ligeros en comparación a rodamientos de las mismas dimensiones.

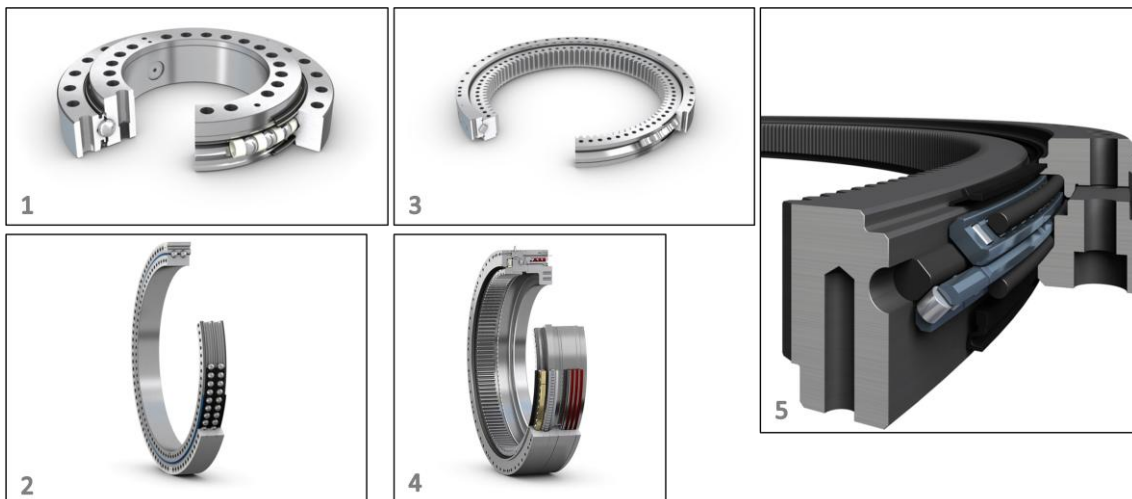


Ilustración 2: Tipos de rodamientos de vuelco. (Fuente: SKF [1]).

El grupo ADM tiene una línea de investigación enfocada al estudio de rodamientos de vuelco, a través de la cual mantiene una relación de colaboración con la empresa Iraundi S.A. En los estudios realizados, se han analizado la influencia de la flexibilidad de los anillos y de los fallos de fabricación de las pistas en el par de fricción, la rigidez (axial, radial y de momento), la

influencia de cargas externas en el par de fricción, el contacto bola- pista etc. Más allá de lo que es el propio rodamiento, también se han realizado cálculos correspondientes a las uniones mediante tornillos, diseño del piñón y corona para la transmisión de potencia.

Siguiendo por este hilo, mediante este proyecto se desea dar un paso más allá a la hora de modelar los rodamientos. Lo que este proyecto plantea es la obtención de fórmulas sencillas de aplicación directa para el cálculo del par de fricción para los casos de funcionamiento en vacío y bajo carga axial. Además, este trabajo será un precedente para más adelante estudiar los casos de carga radial y de momento, así como los casos de carga combinada.

Es importante destacar, que la precarga de las bolas aporta una mayor rigidez del rodamiento, así como la eliminación de las vibraciones entre otras cosas. Sin embargo, como contrapartida el par de fricción resultante es mayor.



Ilustración 3: Rodamientos de vuelco en un aerogenerador.

3. OBJETIVOS Y ALCANCE

En este proyecto, se seguirá la línea de investigación de los rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto en la que trabaja, entre otras, el grupo ADM de la Escuela de Ingeniería de Bilbao. Concretamente, se estudiará el par de fricción resultante que se obtiene en dichos rodamientos cuando están sujetos a cargas externas.

El objetivo central del proyecto, consiste en obtener una manera de poder calcular el par de fricción de una forma rápida, precisa y eficaz sin tener que hacer uso de complejos modelos matemáticos ni tener que emplear software de pago.

Los objetivos secundarios que surgen a partir del anterior son:

- a. Obtener una fórmula ingenieril que permita obtener el par de fricción, a partir de los parámetros característicos de los rodamientos, originado por la precarga de las bolas que contiene.
- b. Obtener una serie de fórmulas ingenieriles que permitan obtener el par de fricción, a partir de los parámetros característicos de los rodamientos y la carga externa axial a la que está sometido.

Para poder cumplir estos objetivos, es necesario hacer uso de un modelo matemático (BA-Tool) que ha sido desarrollado por el grupo de investigación. Este modelo, desarrollado en el software Matlab, parte de los parámetros característicos de un rodamiento como son la conformidad, el ángulo de contacto, diámetro de bola, número de bolas y diámetro nominal del rodamiento; y obtiene, entre otras cosas, el par de fricción resultante en el rodamiento.

Los resultados del modelo anterior, se aproximarán funcionalmente empleando un software libre, Octave, obteniendo la forma funcional más apta y los coeficientes correspondientes a dichas formas funcionales de tal forma que se minimice el error. Así, se obtendrán una serie de fórmulas ingenieriles que abarquen todo el rango de diseños estándar de los principales fabricantes de rodamientos de vuelco.

Una vez obtenidas las formulas ingenieriles, se compararán los resultados que proporcionan dichas aproximaciones con los del modelo de partida de tal forma que se pueda realizar un estudio del error.

En lo que respecta al alcance del proyecto, se obtendrán unas fórmulas ingenieriles que permitan calcular el par de fricción para el caso de precarga de las bolas (funcionamiento en vacío) y de fuerza exterior axial (sin precarga). Para ello, se considerará que los anillos de los rodamientos son totalmente rígidos. Esto último, se debe a que el considerar la flexibilidad de los anillos, afecta a la rigidez global del rodamiento, pero prácticamente nada a la distribución de carga, y por lo tanto tampoco al par de fricción.

Como resultado, quedará abierto como línea de investigación futura, obtener nuevas aproximaciones para los casos de carga radial, momento de vuelco, combinación de cargas y finalmente, la consideración de la flexibilidad de los anillos (el cual en base a lo mencionado anteriormente, no afectará mucho).

4. BENEFICIOS DEL PROYECTO

Tal y como indica WindEurope en [2], la industria de la energía eólica invirtió 65 mil millones de euros en Europa en 2018. Dentro del cual se incluyen inversiones en nuevos activos, transacciones de refinanciamiento, fusiones y adquisiciones a nivel de proyectos y corporativos. El 40% de dichas inversiones (26,700M€) fueron destinadas a financiar nuevos parques eólicos, lo cual supuso un aumento de 12.5 GW en onshore y 4.2 GW en offshore.

Actualmente, según [3], la capacidad de energía eólica instalada en Europa asciende a 170 GW en onshore y 19 GW en offshore. Lo cual se traduce en 18.8% de la capacidad eléctrica instalada. Entre los 28 países que forman la unión europea, Alemania es el país con más potencia eólica instalada. Seguido por España, Reino Unido y Francia.

Ante esto, la energía eólica, representó en 2018 la mejor oportunidad de inversión en el sector eléctrico, representando más del 60% de las inversiones de nueva generación eléctrica. Esto hace que dicha tecnología sea vista como líder en la transición de combustibles fósiles y tradicionales a nuevas formas de generación eléctrica.

Las fuentes convencionales de generación eléctrica como son el combustible, el petróleo y el carbón; desmantelaron más potencia que la que instalaron. Nuevas instalaciones de gas natural y carbón, alcanzaron un bajo récord de tan solo 0.9 GW de adiciones.

Ante esta situación de aumentos en inversiones de parques eólicos y el aumento de la competitividad entre las empresas que eso conlleva, resulta muy interesante disponer de sencillas herramientas para poder conocer el comportamiento de cada componente de los aerogeneradores.

En este proyecto, se presenta una sencilla herramienta para poder realizar estimaciones en el par de fricción. Esto, puede resultar muy atractivo para los propios fabricantes de rodamientos, para los suministradores de maquinaria adyacente como pueden ser los fabricantes de los motores eléctricos encargados de la orientación de palas y góndola, o para cualquiera que tenga que realizar una selección entre los diversos diseños existentes de los rodamientos de cuatro puntos de contacto.

En lo que respecta a las ventajas económicas del proyecto, se encuentra el coste cero que supone el uso de una serie de fórmulas. Al contrario que sucede con los modelos complejos, tanto matemáticos como de elementos finitos, que requieren en general de software de pago, lo que se presenta aquí no tiene ningún tipo coste.

Respecto a las ventajas técnicas, predomina el ahorro de tiempo y esfuerzo en comparación a tener que crear modelos de elementos finitos o similares, debido a que las fórmulas dan resultados instantáneos del par y por lo tanto permiten hacer muchos cálculos y optimizaciones en las fases preliminares del diseño. Ante la tendencia actual de construir aerogeneradores de cada vez mayor tamaño para extraer la mayor cantidad de energía posible, resulta muy útil de cara a poder realizar estimaciones iniciales y poder realizar los prediseños iniciales en el menor tiempo posible.

5. ESTADO DEL ARTE

Debido al bajo régimen de giro de los rodamientos de vuelco, la tendencia ha sido utilizar la hipótesis de cargas estáticas a la hora de seleccionar el rodamiento. Obteniendo la distribución de presiones en las bolas para una determinada carga en el rodamiento, se detectaba cuál era la bola más cargada. Para dicha bola, se obtenía la presión máxima y se comparaba esta con el valor máximo según norma [4] de 4200MPa elásticamente calculados, valor a partir del cual se demuestra experimentalmente que se dará una deformación plástica de una diezmilésima parte el diámetro de la bola. Sin embargo, existen una serie de factores que no son contemplados: la precarga de las bolas, la variación del ángulo de contacto, la fricción, la conformidad...

En 2008, Daidie [5] modelizó el contacto entre bola y pista como mecanismo de un par de muelles no lineales que unían los centros de curvatura de las pistas correspondientes a una misma diagonal. Las huellas de contacto de las pistas las rigidizaba mediante elementos cáscara infinitamente rígidas, de tal forma que unía el centro de cada pista con la huella correspondiente. La no linealidad de los muelles, se basa en un comportamiento de contacto Hertziano, además de que el muelle trabaja a tracción cuando su diagonal se ve sometida a contacto. Cuando no existe contacto, el muelle no trabaja. Este mecanismo se lo aplicó a un modelo de EF, donde eliminaba las bolas.

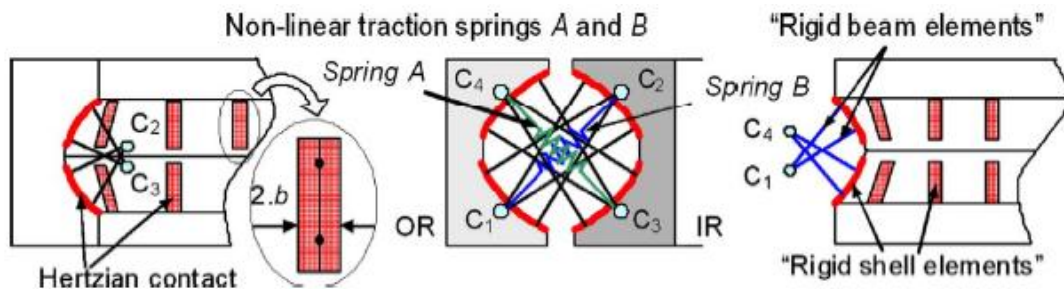


Ilustración 4: Modelización del contacto mediante muelles.

En 2010, Olave [6] determinó la distribución de carga considerando la flexibilidad de los anillos. Para ello, la flexibilidad se obtenía mediante unas matrices de rigidez condensadas a los puntos de contacto. Gracias a esto, se veía que el valor del elemento más cargado era diferente en función de la forma de la estructura. Es decir, que la distribución de carga variaba en comparación a la que tendría suponiendo una rigidez infinita.

En 2017, Heras [7] desarrolló un nuevo modelo analítico, llamado BIME, que permitía obtener la distribución de carga en las bolas para carga en vacío para rodamientos cuyas pistas presentaban errores de fabricación. Para ello, se consideró que los anillos del rodamiento eran totalmente rígidos, y que las bolas se comportaban como los muelles no lineales de Daidie. Para obtener la distribución de cargas, se obtiene la posición de equilibrio del anillo interior (el móvil) respecto al exterior (fijo). Esto, se consigue minimizando la energía potencial elástica, es decir, la energía potencial resultante de todos los muelles.

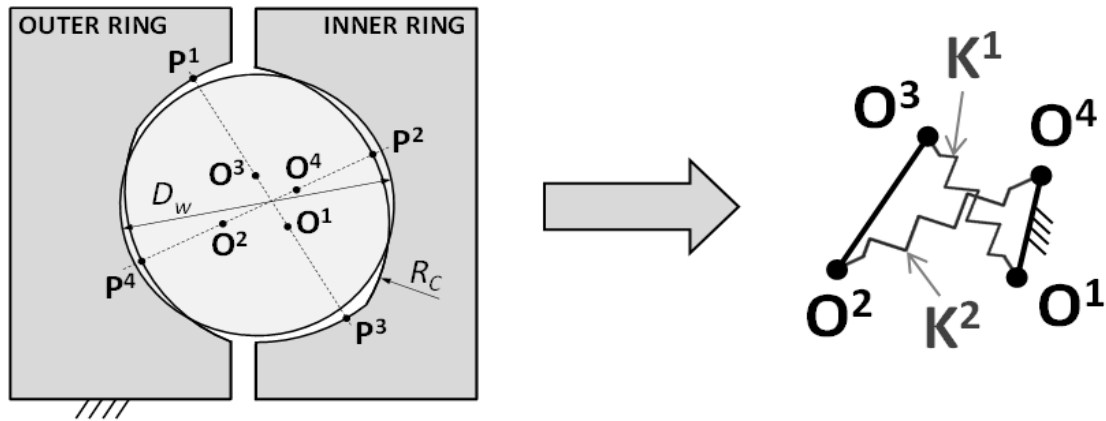


Ilustración 5: Modelización del contacto en el BIME.

El mismo año, Eneko Goikolea [8] desarrolló aún más el modelo anterior, introduciendo la flexibilidad de los anillos en el mismo. Para ello, se les dotaba de unos grados de libertad (axial y radial) extra a los centros de curvatura de las pistas, permitiendo así que los anillos exterior e interior se deformasen. Las matrices de rigidez de los anillos, se le importaban al modelo mediante unos archivos (.txt) que se obtenían mediante elementos finitos, donde dichas matrices se calculaban aplicando la técnica de condensación estática de Guyan. De esta manera, se obtenía la distribución de cargas para el rodamiento considerando la elasticidad de los anillos.

Por otro lado, Heras [9] desarrolló un modelo analítico, llamado FRANC, para poder calcular el par de fricción en un contacto bola pista partiendo de la fuerza y ángulo de contacto. En este, es posible considerar la adhesión y deslizamientos en la huella del contacto, o simplemente considerar deslizamiento puro. Las adhesiones que se producen en la huella del contacto entre bola y pista, y la influencia de las mismas en el par de fricción fueron evaluadas por Heras [10] en 2016. Hasta el momento, se había considerado que en el contacto se producía deslizamiento puro.

En 2018, el grupo ADM desarrolló un modelo matemático llamado BA-Tool, que combina los dos modelos anteriores (BIME y FRANC). Mediante este modelo, es posible calcular el par de fricción en el rodamiento, partiendo de los parámetros característicos de los rodamientos. Permitiendo así realizar el cálculo del mismo, considerando o no la flexibilidad de los anillos.

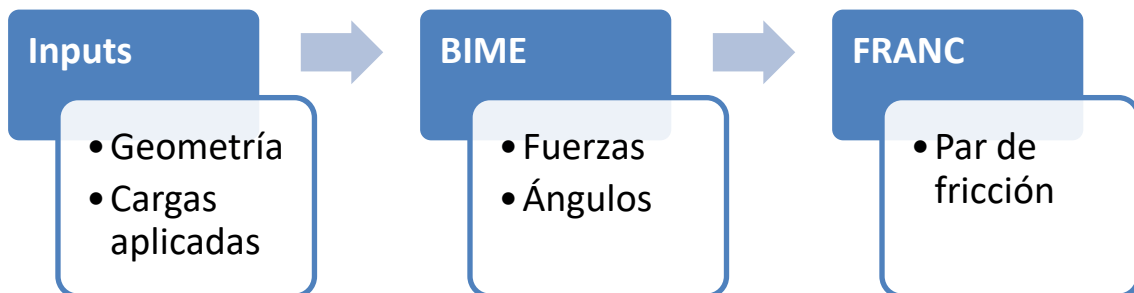


Ilustración 6: Modelo BA-Tool.

En desarrollos subsiguientes del BIME realizados por Eneko Goikolea, se ha incluido la posibilidad de realizar el cálculo de la distribución de carga en las bolas cuando el rodamiento está sujeto a cargas externas. Para ello, es necesario incluir en la minimización de la energía potencial, la resta del trabajo realizado por las fuerzas.

En este proyecto, se plantea obtener una serie de fórmulas ingenieriles que permitan calcular el par de fricción para cualquier rodamiento cuyos parámetros característicos estén dentro de la zona de diseño estándar. Para ello, se considerará que los anillos son totalmente rígidos, dado que tal y como se ha mencionado anteriormente, la flexibilidad apenas influye en los resultados del par, y se empleará el BA-Tool para poder obtener los resultados para cada uno de los rodamientos a estudiar.

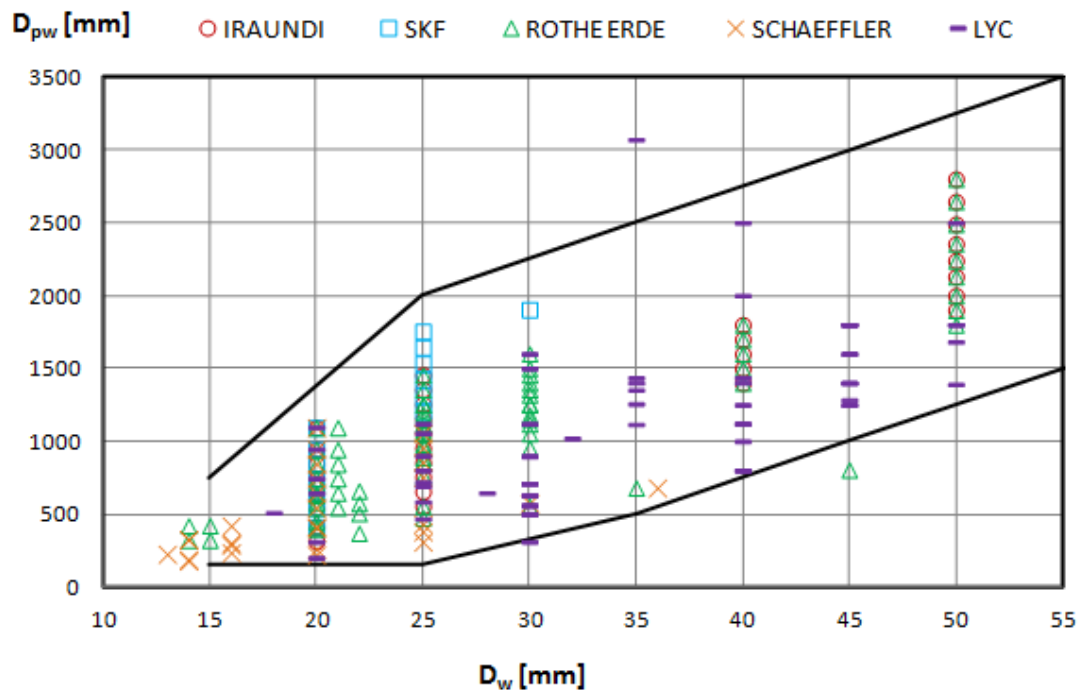


Ilustración 7: Parámetros geométricos estándar (Fuente: Tesis Heras [9]).

Para poder aproximar funcionalmente los resultados del BA-Tool, se partirá del script programado por Xabier Benito [11] y se le realizarán las modificaciones pertinentes para poder minimizar el error y obtener así, los coeficientes de la forma funcional más apta para cada caso.

6. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS

Tal y como se ha explicado en el apartado “objetivos y alcance”, el objetivo de este proyecto es obtener una serie de fórmulas ingenieriles que permitan obtener el par de fricción para unos determinados rodamientos.

En este apartado, se analizarán las posibles alternativas para obtener dichas fórmulas. Para ello, el primer paso consiste en la selección del software a utilizar. El siguiente paso, consistirá en la selección del tipo de error a minimizar.

6.1. Selección del software

Para obtener las formulas mencionadas anteriormente, será necesario emplear el modelo de partida, lo cual permitirá obtener los resultados para los casos a estudiar, y poder realizar las aproximaciones funcionales. Para obtener dichas aproximaciones, se plantearán unas formas funcionales y se tratará de minimizar el error.

Dependiendo del error que se esté minimizando, se dispondrá tanto de unas ecuaciones lineales como de unas no lineales. Además, hay que tener presente que las formas funcionales planteadas, dependerán de al menos cuatro o cinco parámetros. Debido a esto, se descartará la posibilidad de poder emplear programas como Microsoft® Excel™ como programa principal, que pese a ser útiles para trabajar con datos experimentales, no son aptas para realizar la aproximación funcional necesaria este caso (debido a la cantidad de parámetros dependientes). Sin embargo, sí que se empleará el mismo como herramienta auxiliar.

Ante las necesidades del proyecto, resulta muy interesante hacer uso de algún software como Octave o Matlab, los cuales están orientados al análisis numérico. Gracias a la capacidad de que disponen estos para poder realizar bucles, establecer condiciones lógicas y poder resolver ecuaciones lineales como no lineales; se convierten en las más aptas para este caso.

Analizando las diferencias entre ellas, cabe destacar que la sintaxis es muy similar, de forma que un script programado en uno de ellos, puede ser trasladado al otro realizando unas pequeñas modificaciones. Sin embargo, Octave cuenta con la gran ventaja de que, al ser un software libre, el coste de utilizar el mismo se ve reducido a cero. Es por ello por lo que, en la medida de lo posible, se predominará el uso del mismo frente al Matlab.

Es importante señalar, que el modelo de partida está desarrollado en Matlab debido a las mejores prestaciones que ofrece esta ante las necesidades del modelo (véase análisis de alternativas en [8]). Es por ello, por lo que en este proyecto se hace necesario el uso del mismo.

A pesar de lo anterior, todos los cálculos que no requieran del uso de dicho modelo se realizarán en Octave, permitiendo así reducir el coste del proyecto en lo que respecta al uso de licencias al máximo.

6.2. Selección del error a minimizar

Son diversos los tipos de errores que se pueden analizar al comparar los resultados que proporciona una aproximación frente a las originales. Ejemplo de ello son, por ejemplo, el error absoluto y el relativo. Como no es lo mismo la información que proporciona un tipo de error u otro, se deberá de seleccionar cuál va a ser el error a estudiar.

Lo primero y más importante, consiste en seleccionar cuál va a ser el error que se va a minimizar. Es decir, para obtener los coeficientes de una forma funcional dada, se creará una función de error que incluya las diferencias entre los valores a aproximar y los aproximados, siendo esta función de error la que se va a minimizar. Para ello, se plantearán los más típicos y se analizará qué es lo que penaliza cada uno de ellos cuando son objetos de una minimización:

- Error cuadrático: $Err = (My_{BA-Tool} - My_{Aprox})^2$
- Error cuadrático relativo: $Err = \frac{(My_{BA-Tool} - My_{Aprox})^2}{(My_{BA-Tool})^2}$
- Error absoluto: $Err = |My_{BA-Tool} - My_{Aprox}|$
- Error relativo: $Err = \frac{My_{BA-Tool} - My_{Aprox}}{My_{BA-Tool}}$

Resulta evidente que, para el caso de la minimización, se debe emplear un error relativo puesto que el rango de pares de fricción con el que se va a trabajar, es muy amplio. Si se utilizase un error absoluto, los valores más altos se aproximarían muy bien, pero los bajos no. Como el objetivo es obtener unas fórmulas que sean válidas en todo el rango, se descarta el utilizar el error absoluto. Dentro de los errores relativos, se optará por emplear el error cuadrático relativo dado que este presenta mejores condiciones para favorecer la convergencia de la minimización del error.

Lo segundo, consiste en seleccionar qué errores se van a analizar una vez se obtengan los resultados para estudiar la validez de los mismos.

- Error absoluto promedio: mediante este tipo de error, se obtiene la diferencia media entre los valores en cada caso.
- Error absoluto máximo: se obtiene el valor máximo absoluto del error cometido.
- Error relativo promedio: se obtiene información sobre el porcentaje error que se comete de media en cada caso.
- Error relativo máximo: indica el porcentaje máximo de error que se ha cometido en todos los casos estudiados.

A la hora de analizar los resultados obtenidos y decidir la validez de los resultados, se centrará la atención especialmente en los errores relativos dado que son los que más información aportan. Sin embargo, el error absoluto resultará interesante a la hora de acotar los resultados, dado que es posible que para valores muy bajos de carga el error relativo sea muy alto pero que el valor del par sea tan bajo que dichos puntos puedan ser despreciados.

7. METODOLOGÍA

Tal y como se ha mencionado anteriormente, el objetivo de este proyecto consiste en aproximar funcionalmente los resultados obtenidos mediante el modelo analítico BA-Tool. Dichos resultados, se obtendrán para una serie de rodamientos cuando están sujetos a precarga de las bolas y a carga axial. Para ello, el proceso a seguir será el siguiente:

1. Obtener los resultados del par de fricción para los casos de interés con el BA-Tool.
2. Obtener la forma funcional que mejor se adapta a los resultados.
 - a. Para el caso de precarga en las bolas.
 - b. Para el caso de carga axial.
3. Obtener los coeficientes de dichas formas funcionales.
4. Realizar el estudio del error.
5. Acotar el rango de validez de las fórmulas obtenidas.

En este apartado, se explicará brevemente el BA-Tool y posteriormente, el script utilizado en Octave para realizar la minimización del error y obtener así los coeficientes correspondientes a las formas funcionales.

7.1. Programa para el cálculo del par: BA-Tool

Como se ha indicado en el apartado “estado del arte”, este modelo desarrollado en el software Matlab consta de dos bloques: BIME y FRANC. El primero de ellos, parte de los parámetros característicos del rodamiento para obtener la distribución de carga en las bolas (fuerzas y ángulos de contacto). El segundo, parte de los resultados obtenidos por el anterior, dando como resultado el par de fricción.

BIME

Como datos de partida, se debe deben de introducir los valores de los parámetros característicos del rodamiento: el diámetro nominal del rodamiento (D_{pw}), el diámetro de las bolas (D_w), la precarga de las bolas (δ_p), el ángulo de contacto inicial (α), la conformidad (s) y el número de bolas (N).

El modelo, parte de la fórmula de Hertz para un contacto bola pista: $Q = K \delta^{3/2}$ e integrándolo, obtiene la ecuación de la energía potencial para cada contacto bola-pista. Las rigideces K de los muelles que modelizan las bolas, vienen dadas por las aproximaciones funcionales obtenidas por Houpert [12].

Al considerarse anillos rígidos, estos no tienen capacidad de deformarse nada más que en la zona del contacto. Esto, implica que, si el anillo exterior se considera fijo, la posición de equilibrio del anillo interior depende únicamente de cinco grados de libertad que tendría un sistema de coordenadas pegado a dicho anillo [Ilustración 7].

Para obtener la distribución de carga en las bolas, el modelo obtiene previamente la posición de equilibrio del anillo interior por medio de minimizar la energía potencial elástica. Nótese que, en caso de geometría nominal, el sistema móvil coincide con el fijo del anillo exterior.

$$E_p = \frac{2}{5} \times \sum_{b=1}^B \left(K_{Tot}^{1b} \times (\delta^{1b})^{5/2} + K_{Tot}^{2b} \times (\delta^{2b})^{5/2} \right)$$

Una vez se encuentra en equilibrio (tras el ensamblaje de los anillos y las bolas), se le pueden aplicar cargas externas o imponer desplazamientos. Para obtener la distribución de carga final, el modelo obtiene la nueva posición de equilibrio del anillo interior por medio de minimizar la energía potencial resultante (la elástica menos el trabajo realizado por las fuerzas externas).

$$E_p = \frac{2}{5} \times \sum_{b=1}^B \left(K_{Tot}^{1b} \times (\delta^{1b})^{5/2} + K_{Tot}^{2b} \times (\delta^{2b})^{5/2} \right) - \left(F_{ax} \times (Z_{final} - Z_{eq}) + F_{rad} \times (X_{final} - X_{eq}) + M_t \times (\beta_{final} - \beta_{eq}) \right)$$

Una vez de haber determinado la posición final del anillo interior, se calculan las interferencias producidas en el contacto bola-pista y con este, las fuerzas de contacto (empleando la fórmula de Hertz anterior).

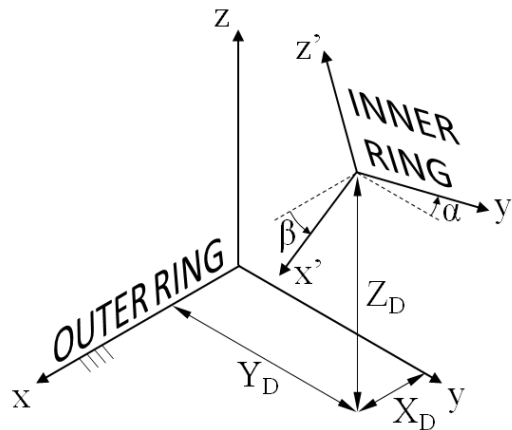


Ilustración 8: Sistemas de coordenadas y GDL.

FRANC

Este modelo, parte de la distribución de cargas obtenida en el apartado anterior y obtiene el valor del par de fricción resultante.

Para ello, el modelo analiza en cada bola si hay dos puntos de contacto, o cuatro en base a la cinemática. Esto, detectar la condición de cinemática, favorece posteriormente en la convergencia.

Basándose en el algoritmo FASTSIM de Kalker [13], el programa calcula los esfuerzos de cortadura en el contacto tanto para el caso del deslizamiento como para el caso de adhesión. El comportamiento en el contacto, viene dado por el caso que presente el esfuerzo cortante mínimo.

Con este esfuerzo cortante mínimo y la geometría, el programa calcula el par de fricción aportado por cada bola. Sumando todos los valores, se obtiene el par total resultante.

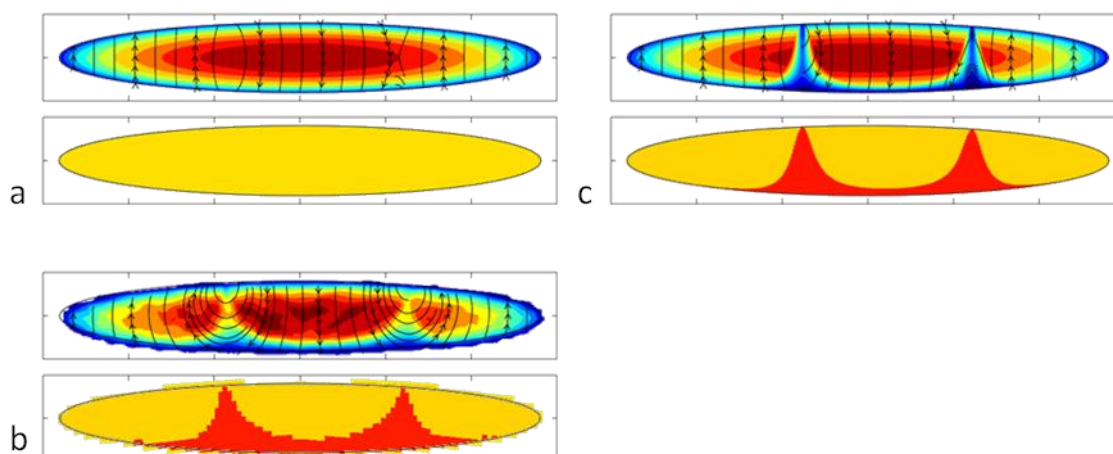


Ilustración 9: Comparativa modelos huella de contacto (Fuente [10]).

Estudio de una huella de contacto, tensiones tangenciales y estado del contacto (zonas en adherencia en rojo): a) suponiendo deslizamiento puro (modelo de Leblanc-Nelias); b) modelo FRANC; c) modelo de EF de gran detalle (submodelado).

7.2. Programa para obtener la función objetivo

En este apartado se procederá a explicar el programa utilizado para obtener los coeficientes de las formas funcionales planteadas. Para ello, se partirá del script planteado por Xabier Benito en [11] y se le aplicarán las modificaciones pertinentes de cara a adaptarlo a las necesidades actuales. Además, se tratará de optimizar el programa de cara a que el tiempo de minimización se vea reducido, evitando ciclos innecesarios.

Véase, que cada vez que varía el número de parámetros de los que depende la función objetivo, es necesario modificar el script, modificando el tamaño de las matrices interiores, el formato de entrada de datos, las subfunciones... Es por ello, por lo que el script que se va a explicar a continuación, corresponde al caso del rodamiento sometido a carga axial, empleado para obtener la fórmula general.

El programa, cuenta con cuatro módulos principales: Inputs, DOE data, Functional approach y Error display. A continuación, se explicarán dichos módulos. El script, se encuentra en el apartado ANEXO I.

Apartado 1: Inputs

En este apartado se introducen las formas funcionales deseadas, las opciones del algoritmo a utilizar y las condiciones iniciales de los coeficientes a aproximar, así como los valores límites de los mismos.

Obsérvese que la función objetivo a lograr se define en las líneas 35- 40, de forma que las funciones definidas en las líneas 16- 33 son funciones de las que depende la objetivo.

Apartado 2: DOE data

En este apartado, se procede a ordenar los datos leídos en el apartado anterior de tal forma que se forme una matriz ordenada para poder manipularla de una forma sencilla posteriormente. En esta matriz, todas las columnas excepto la última contienen los diversos parámetros de los que depende la función objetivo. La última columna en cambio, contiene los valores del par de fricción que se obtienen mediante BA-Tool para cada combinación de los parámetros anteriores. En las filas de la matriz, se disponen todas las combinaciones de las variables.

Obsérvese que en las líneas 116- 117, se calcula la fuerza axial a introducir. Esto, se debe a que la fuerza axial se introduce como porcentaje de la capacidad axial del rodamiento. Es por ello, por lo que es necesario calcular la capacidad del rodamiento para cada combinación de D_w , s , α y D_{pw} . Esto, se explicará con más detalle en los apartados subsiguientes.

Apartado 3: Functional approach

Este, es el apartado central del programa en el que se define la función que se va a minimizar (la función de error) y se ejecuta la minimización.

En las líneas 145- 146, se define dicha función. Tal y como se ha explicado en el apartado “análisis de alternativas”, la función a minimizar va a ser el error cuadrático relativo entre los resultados del BA-Tool y los de la función objetivo.

En las líneas 159- 160, se llama al minimizador SQP (sequential quadratic programming method) introduciendo como inputs la función del error (f_error), los coeficientes iniciales de la función objetivo ($coef_ini$), los límites superiores e inferiores de dichos coeficientes (UB, LB), la tolerancia y el número máximo de iteraciones.

Apartado 4: Error display

En este apartado, se llama a las subfunciones que calculan los diferentes tipos de errores para analizar la validez del resultado obtenido, así como a la subfunción que representa gráficamente la comparación entre los resultados obtenidos respecto de los resultados de partida.

Subfunción 1: error absoluto max

En esta subfunción, como su propio nombre indica, se calcula el error absoluto máximo. Para ello, se parte de la función objetivo definido en el apartado 1 (Inputs) y de la matriz generada en el apartado 2 (DOE data). Introduciendo en dicha función los valores correspondientes a cada combinación de los parámetros (columnas 1 al 5 de la tabla), se obtiene el resultado aproximado. Dicho resultado debe de ser comparado con el valor real, el cual se obtiene de la última columna de la tabla, para poder obtener el error absoluto para cada fila (para cada combinación de los parámetros).

Una vez de disponer los errores, absolutos para cada combinación, se selecciona el más alto de todos.

Como puede verse en la fila 30, el error absoluto está sujeto a la condición de que el par sea mayor que 200 Nm. Esto, se debe a que como se ha mencionado anteriormente, este script corresponde al caso de carga axial, fórmula general, el cual está acotado de 200 Nm al valor máximo.

Subfunción 2: error absoluto promedio

En esta, se calcula el error absoluto promedio. Para ello, tal y como se ha mencionado en el apartado anterior, se calcula el par aproximado para cada combinación de los parámetros de los cuales depende la función objetivo (cada combinación corresponde a una fila de la tabla). Dicho resultado, se compara con la última columna de la tabla para obtener el error absoluto.

Una vez de haber obtenido el error para cada combinación, estos se suman y se dividen entre el número de casos para obtener el valor promedio.

Al igual que en el apartado anterior, está condicionado a que el par sea superior a 200 Nm, en el caso de ser inferior, no cuenta para la contribución global.

Subfunción 3: error cuadrático relativo

Para obtener el error cuadrático relativo, al igual que en los apartados anteriores, primero se obtiene el par aproximado para cada combinación de parámetros. Este, se compara con el resultado real obteniendo así el error.

Una vez de haber obtenido el error para cada combinación, se suman para obtener el valor resultante.

Al igual que en los apartados anteriores, está condicionado a que el par sea superior a 200 Nm, en el caso de ser inferior, no cuenta para la contribución global.

Subfunción 4: error relativo max

Para obtener el error relativo máximo, al igual que en los apartados anteriores, primero se obtiene el par aproximado para cada combinación de parámetros. Este, se compara con el resultado real obteniendo así el error.

Una vez de haber obtenido el error para cada combinación, se selecciona el valor más alto de todos.

Al igual que en los apartados anteriores, está condicionado a que el par sea superior a 200 Nm, en el caso de ser inferior, no cuenta para la contribución global.

Subfunción 5: error relativo promedio

Para obtener el error relativo promedio, al igual que en los apartados anteriores, primero se obtiene el par aproximado para cada combinación de parámetros. Este, se compara con el resultado real obteniendo así el error.

Una vez de haber obtenido el error para cada combinación, se suman para obtener el valor resultante.

Al igual que en los apartados anteriores, está condicionado a que el par sea superior a 200 Nm, en el caso de ser inferior, no cuenta para la contribución global.

Subfunción 5: mostrar calidad ajuste

En esta subfunción, se obtienen las representaciones gráficas de los resultados (real vs aproximada). Esto, se consigue dibujando una gráfica para cada una de las 14 combinaciones de Dw-Dpw del DOE.

En cada una de las gráficas, el eje X corresponde al ángulo de contacto inicial y el eje Y al valor del par de fricción. Cada una de las líneas, corresponde a un valor del porcentaje de la capacidad axial (cada punto tendrá su fuerza axial dentro de una misma línea) y cada punto, a un valor de la conformidad.

8. DESARROLLO DEL TRABAJO

La solución que se ha planteado en este proyecto, está dividida en dos bloques. El primero de ellos, corresponde al caso en el que el rodamiento está libre de cargas exteriores, de tal forma que el par de fricción es resultado de la precarga de las bolas. Se dice que la bola está precargada, cuando el diámetro de la misma es mayor que la nominal que le correspondería. Véase que si la bola tuviese el diámetro nominal y las pistas no tuviesen fallos de fabricación, el par de fricción sería nulo. El segundo de los bloques, correspondería al caso en el que el rodamiento está sujeto exclusivamente a una carga axial exterior (sin precarga de bolas).

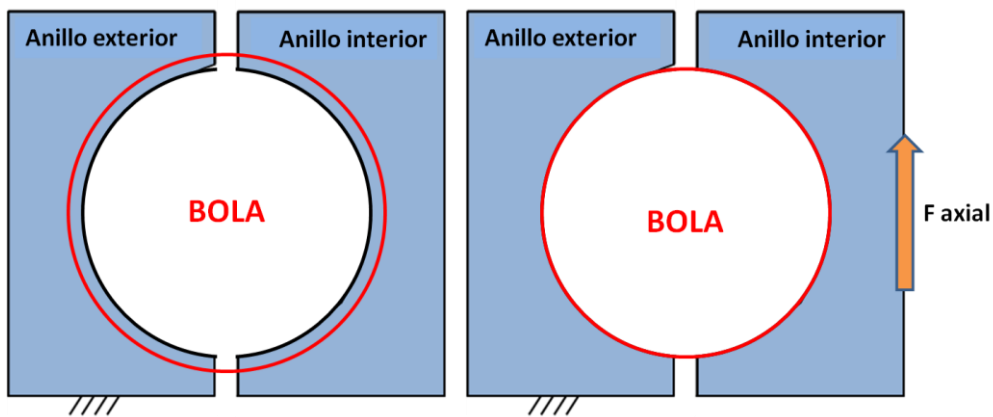


Ilustración 10: Diferencia bloque 1 y bloque 2.

La división del caso de precarga y el caso axial, se justifica debido a que, tal y como se puede ver en la siguiente imagen, el caso de la precarga afecta solo cuando las cargas axiales son muy bajas. En esta situación, el contacto bola-pista está definida mediante cuatro puntos (uno por cada pista).

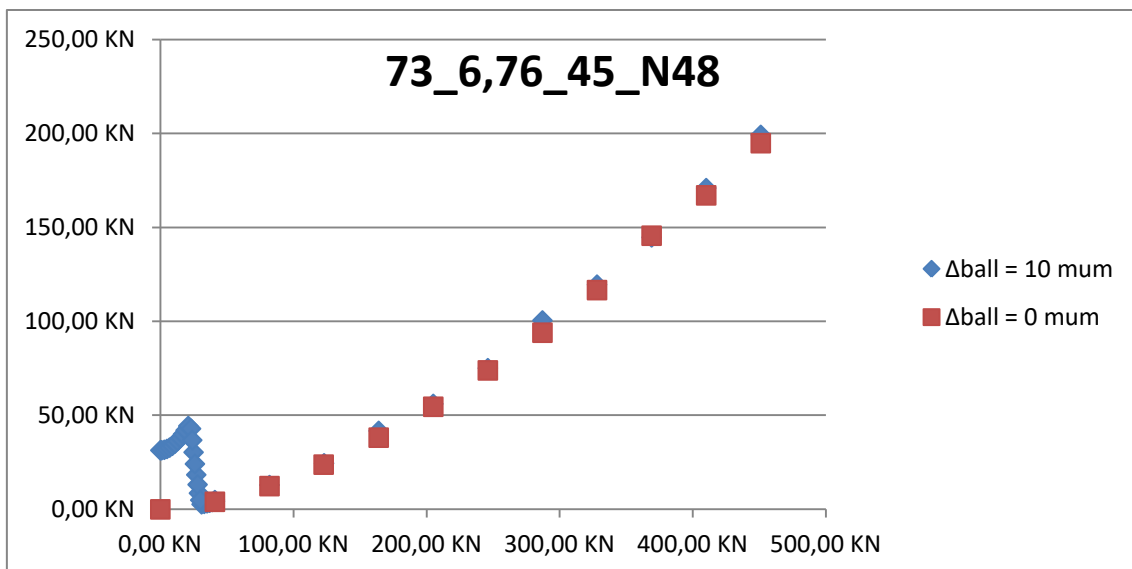


Ilustración 11: Comparación de par con y sin precarga.

Partiendo de esta situación previa, a medida que se introduce una carga axial en el rodamiento, aumenta la transmisión de carga mediante una de las diagonales (contacto bola-pistas en una misma diagonal) y disminuye la transmisión por la otra.

Cuando dicha carga axial alcanza un determinado valor, el contacto bola-pista pasa de cuatro a dos puntos de contacto. Esto último, implica que el par de fricción cae bruscamente y sigue la misma tendencia que tendría al estar sometido únicamente a carga axial.

En los estudios experimentales realizados en la referencia [9], se observa que la influencia de la precarga solo afecta a casos bajos de carga en comparación con la capacidad axial de los rodamientos. Además, tal y como se puede observar, cuando el contacto pasa de cuatro a dos puntos de contacto, los valores del par de fricción resultan iguales a los que se obtiene cuando el rodamiento está sujeto a carga axial exclusivamente.

A continuación, se procederá a explicar en detalle el procedimiento seguido para obtener las fórmulas ingenieriles objetivo para cada uno de los bloques mencionados anteriormente.

8.1. Caso de funcionamiento en vacío y con precarga

En este bloque, se estudiará el caso en el que el rodamiento está sujeto a precarga de las bolas. Esta precarga, suele variar frecuentemente entre 10 μm y 90 μm por lo que la formula objetivo, deberá ser válida para dicho rango.

En el mercado se comercializan una multitud de rodamientos de tal forma que cada uno de ellos, posee características de diseño propias. Cada fabricante de rodamientos, emplea unos parámetros de diseño propios, que en base a estudios propios y conocimiento de las características que se consiguen gracias a dichos parámetros, determinan el uso de los mismos. Sin embargo, existen una serie de parámetros llamados parámetros característicos del rodamiento, que frecuentemente suelen estar dentro de un rango específico.

Los parámetros característicos mencionados anteriormente, son:

- El ángulo de contacto bola-pista inicial: " α_0 ".
- La conformidad del contacto: " s ".
- La precarga de las bolas: " δ_p ".
- El diámetro nominal del rodamiento: " D_{pw} ".
- El diámetro de las bolas: " D_w ".

Para poder satisfacer el objetivo de este apartado y poder obtener una fórmula ingenieril útil que permita obtener el valor del par de fricción para cualquier rodamiento estándar, es necesario tener en cuenta todos parámetros que definan un rodamiento estándar. Es decir, es necesario que la formula recoja todas las características representativas de las mismas.

En la siguiente tabla, se puede observar el rango considerado para los primeros tres parámetros mencionados anteriormente:

Tabla 1: rango considerado para parámetros – 1

Variable	Inicio rango	Final rango	Incremento
α_0 [deg]	25	65	5
δ_p [mm]	0.01	0.09	0.01
s [-]	0.91	0.99	0.01

Es decir, para el estudio se considerarán todos los diferentes rodamientos que estén definidos por cualquier combinación posible de los parámetros anteriores.

Para definir el rango a tener en cuenta para los últimos dos parámetros, es necesario tener en cuenta que existe una dependencia entre el diámetro de la bola y el diámetro nominal del rodamiento. Es decir, para los diferentes valores de diámetro nominal del rodamiento, varía el rango de los diámetros de bola a utilizar.

Tal y como se puede observar en la siguiente imagen, los valores utilizados para “Dpw” y “Dw” están delimitados por las líneas de contorno, de tal forma que según varía el valor de “Dw” desde 15 mm a 55 mm, varía el rango de “Dpw”. Por ello, tal y como se realizó en [9], se considerarán una serie de catorce puntos de los cuales algunos forman la envolvente exterior y otros están convenientemente espaciados en el interior.

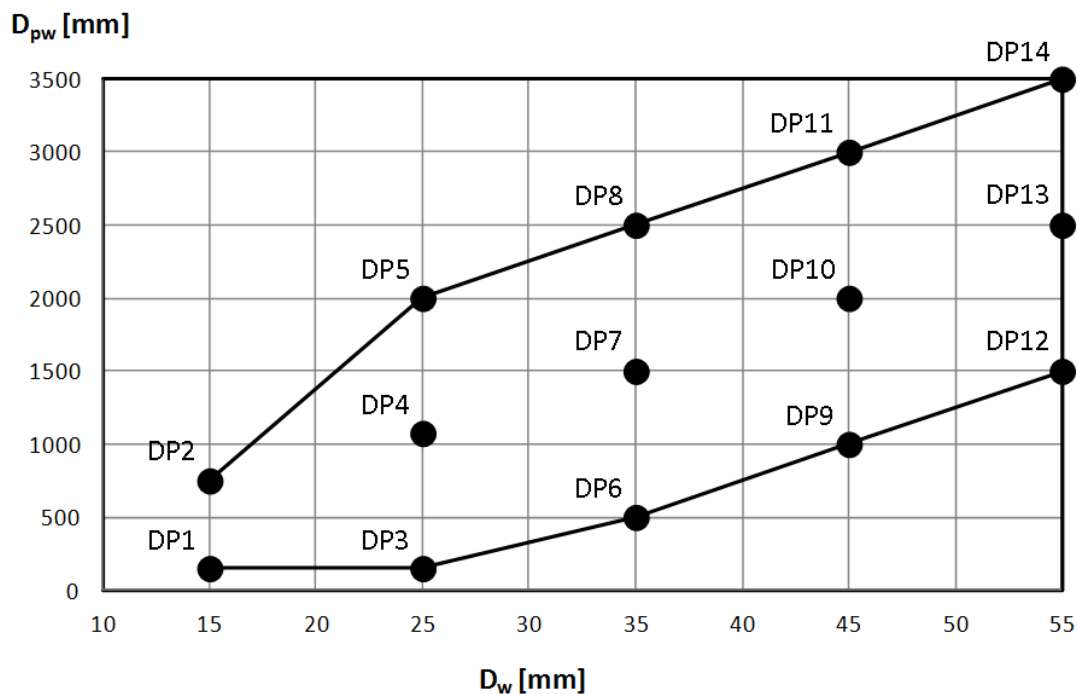


Ilustración 12: Valores escogidos para los parámetros geométricos (Fuente: Tesis Heras [9]).

Así pues, los valores a considerar para estos parámetros, serán:

Tabla 2: rango considerado para parámetros - 2

Variable	Valores													
D_w [mm]	15	15	25	25	25	35	35	35	45	45	45	55	55	55
D_{pw} [m]	0.2	0.75	0.2	1.0	2.0	0.5	1.5	2.5	1.0	2.0	3.0	1.5	2.5	3.5

Mediante estos parámetros característicos, se estudiarán 10,206 (9x9x9x14) rodamientos para satisfacer el objetivo anterior.

En lo que respecta al procedimiento a seguir, se debe señalar que para obtener una fórmula ingenieril que calcule el par de fricción para todos estos casos mencionados anteriormente, es necesario obtener la forma funcional. Dicha forma funcional, deberá de tener en cuenta cada uno de los cinco parámetros característicos que se han mencionado anteriormente, siendo estos, los inputs de la misma. Es decir:

$$M_y = f(\alpha_0, s, \delta_p, \mu, D_w, D_{pw})$$

Para ello, se partirá por considerar un caso particular de la geometría del rodamiento. Es decir, se seleccionará uno que esté centrado en la zona delimitada anterior: $D_{pw} = 1000$ mm y $D_w = 30$ mm. De esta manera, se conseguirá pasar de un problema de cinco variables, a uno de tan solo tres variables. Posteriormente, una vez de haber obtenido la forma funcional para estos parámetros, se deberá extender la fórmula de tal forma que incluya todos los casos de diámetro de bola y diámetro nominal del rodamiento (en el caso de ser necesario).

Se plantearán diversas formas funcionales y se realizará la minimización del error cuadrático para cada uno de ellos. De esta forma, se buscarán los coeficientes que mejor se adapten a dichas formas funcionales. Para ello, se hará uso del script descrito en el punto anterior (o uno muy similar).

Finalmente, tras obtener la fórmula ingenieril que tenga en cuenta todos los rodamientos considerados para el estudio, se deberá validar dicha fórmula. Para ello, será necesario realizar un estudio de la variación del error para diferentes posibles combinaciones aleatorias que puedan darse dentro del rango mencionado anteriormente (sin tener en cuenta el intervalo ni los puntos considerados).

8.1.1. Planteamiento de la forma funcional

Para obtener la forma funcional que mejor se adapta a los resultados obtenidos mediante el BA-Tool, se partirá de un estudio previo realizado en el departamento mediante elementos finitos. En él, se observa que el diámetro nominal del rodamiento (D_{pw}) afecta de una forma lineal en el par de fricción, así como el coeficiente de fricción (μ). Además, se puede observar también que el diámetro de la bola no afecta apenas en el resultado.

Partiendo de esto anterior, se puede plantear una forma funcional tal que simplifique el problema considerablemente:

$$M_y = \mu \times D_{pw} \times f(\alpha_0, s, \delta_p)$$

Para obtener la influencia de la precarga, se basará en la teoría de Hertz [14], donde la interferencia de un contacto tiene influencia potencial en la fuerza del contacto:

$$Q = K \times \delta^{3/2}$$

Como la precarga se define como la diferencia entre el tamaño real de la bola y el tamaño nominal que tendría la bola, implica que, al considerar anillos rígidos, la precarga es igual al doble de la interferencia entre bola y pista. Suponiendo deslizamiento entre bola y pista, la fuerza del contacto multiplicado por el coeficiente de fricción y la distancia hasta el centro del contacto, darían como resultado una estimación del par de fricción. Por ello, se planteará que la precarga afecta de una forma potencial al par. De este modo, la forma funcional tomaría la forma:

$$M_y = \mu \times D_{pw} \times \delta_p^{c1} \times f(\alpha_0, s)$$

Basándose ahora en las aproximaciones funcionales para la rigidez del contacto de Houpert [12] y seleccionando el rango $0.89 < s < 0.99$, la rigidez viene dada por:

$$K = 1.8586 \times (1 - s)^{0.2414} \times \left(\frac{1 - \nu^2}{E}\right)^{2/3} \times \left(\frac{2}{D_w}\right)^{1/3}$$

Al igual que en el caso anterior, suponiendo deslizamiento entre bola y pista, la fuerza del contacto multiplicado por el coeficiente de fricción y la distancia hasta el centro del contacto, resultaría una estimación del par de fricción. Basándose en ello, se planteará que la resta entre el valor uno y la conformidad afecta de una forma potencial al par. De este modo, la forma funcional tomaría la forma:

$$M_y = \mu \times D_{pw} \times \frac{\delta_p^{c1}}{(1 - s)^{c2}} \times f(\alpha_0)$$

Para poder estudiar la influencia del ángulo de contacto inicial en el par, al no disponer de fuentes mediante los cuales obtener el efecto del mismo, se procederá a representar los resultados del par de fricción obtenidos mediante el BA-Tool respecto del ángulo. El objetivo, es poder plantear posibles formas funcionales para $f(\alpha_0)$.

En el siguiente grupo de imágenes, se puede observar la representación del par de fricción respecto del ángulo de contacto inicial. Cada una de las gráficas, corresponde a un caso de conformidad (del 0.91 al 0.99) mientras que cada línea dentro de una misma gráfica corresponde a un caso de precarga (del 0.01 al 0.09).

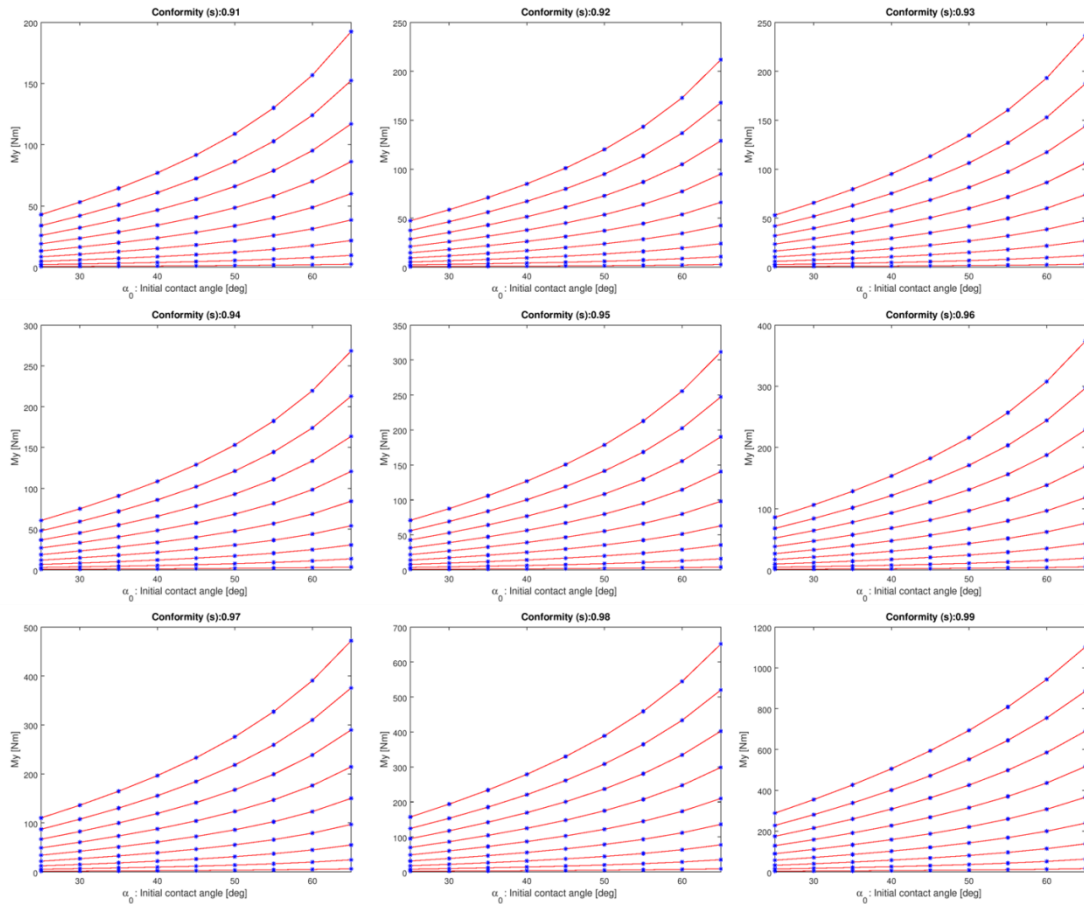


Ilustración 13: Resultados BA-Tool.

Las tendencias de gráficas anteriores, llevan a concluir la posible influencia exponencial o potencial del ángulo de contacto inicial. Ante esta situación, se ha decidido estudiar ambos planteamientos:

Propuesta 1: Exponencial

$$M_y = \mu \times D_{pw} \times \frac{\delta_p^{C1}}{(1-s)^{C2}} \times e^{(C3 \alpha_0 + C4)}$$

Propuesta 2: Potencial

$$M_y = \mu \times D_{pw} \times \frac{\delta_p^{C1}}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times (\alpha_0 + C4)^{C5}$$

Es importante señalar que el objetivo es tanto obtener una formula ingenieril que permita aproximar el par con el mínimo error posible, como obtener una formula sencilla y con el menor número de coeficientes posible. Es por ello por lo que, a la hora de seleccionar una propuesta u otra, se tomará la decisión en base a los dos criterios previos.

Cabe destacar también que, para cada una de las propuestas anteriores, se han realizado iteraciones previas con menos coeficientes. Sin embargo, los resultados obtenidos han sido escasos y es por ello por lo que no se van a contemplar en este documento.

Tabla 3: Coeficientes propuesta 1

Propuesta 1				
C1	C2	C3	C4	
1.99	0.8545	2.083	1.001	
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.25	2.01 Nm	125.15 Nm	1.37 %	11.35 %

Tabla 4: Coeficientes propuesta 2

Propuesta 2				
C1	C2	C3	C4	C5
1.991	0.855	0.2194	1.57	4.874
Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.38	2.23 Nm	86.74 Nm	1.76 %	7.86 %

Observando los resultados obtenidos, resulta evidente que la segunda propuesta resulta ser una mejor aproximación dado que el error relativo máximo es bastante inferior al de la propuesta uno. Sin embargo, es importante destacar que esto se debe en parte gracias a disponer de un coeficiente más que la primera propuesta.

Si se observan los coeficientes obtenidos, se puede ver que los coeficientes C1 y C2 no varían. Esto anterior, indica que la forma funcional planteada tanto para la precarga como para la conformidad, es apropiada. Como contrapartida, parece ser que la fuente de error proviene de la forma funcional planteada para el ángulo de contacto.

A continuación, se procederá a representar el " $f(\alpha_0)$ " respecto del ángulo de contacto para poder identificar dicha fuente de error. Para ello, se despejará de la ecuación anterior:

$$f(\alpha_0) = M_y \times \frac{(1-s)^{c2}}{\delta_p^{c1}} \times \frac{1}{\mu \times D_{pw}}$$

Para los coeficientes C1 y C2, se emplearán los valores 2 y 0.85.

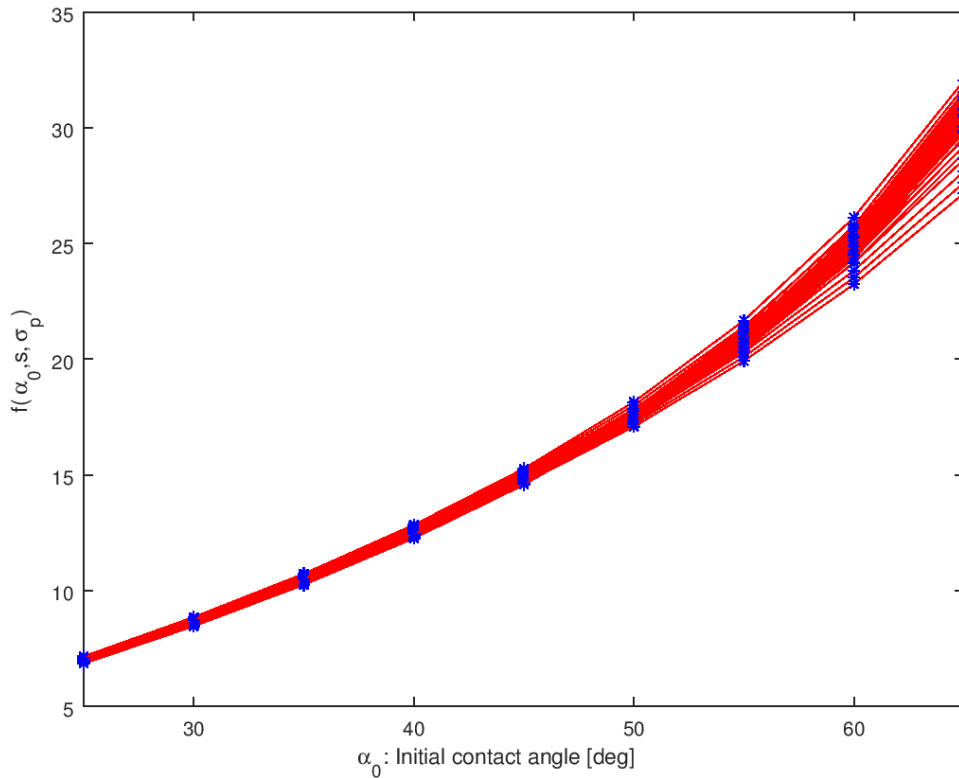


Ilustración 14: Representación de $f(\alpha)$.

En la imagen anterior, se han representado todos los casos a estudiar de tal forma que cada línea corresponde a un caso de conformidad y precarga. Como se puede ver en la misma, " $f(\alpha_0)$ " no depende únicamente del ángulo de contacto, sino que está afectado también por la precarga o por la conformidad. En caso contrario, la banda debería de ser una línea (o una banda muy estrecha).

Para poder identificar cuál o cuáles son los parámetros adicionales de los que depende, se procederá a representar dicha función para cada uno de los casos de las distintas conformidades. Cada figura, por lo tanto, representa un caso de conformidad y cada línea un caso de precarga.

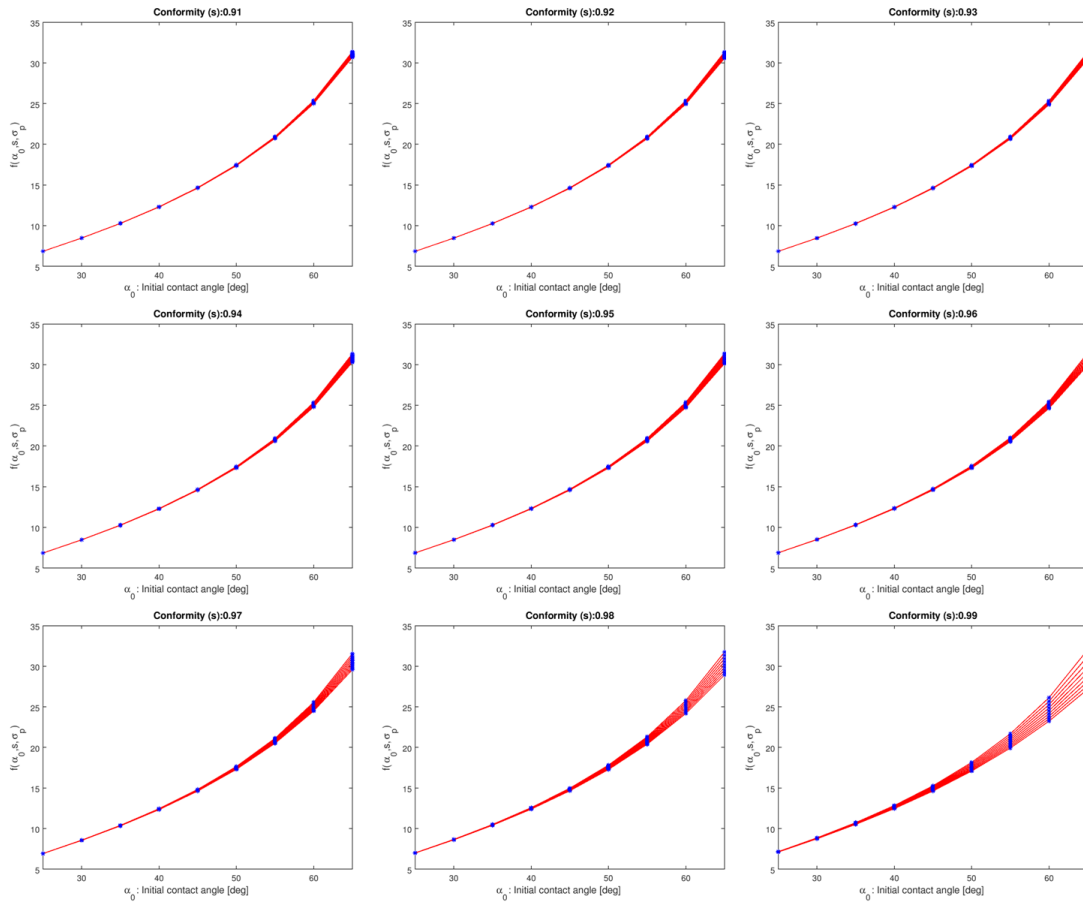


Ilustración 15: Representación de $f(\alpha)$ por cada conformidad.

Basándose en la imagen anterior, todo lleva a indicar que las formas funcionales planteadas no consiguen adaptarse bien a los ángulos de contacto más altos y sobre todo, en los dos últimos casos de conformidad.

Revisando el rango planteado para el ángulo de contacto inicial y para la conformidad, se observa que el caso de conformidad 0.99, así como los ángulos de contacto 25° y 65°, son muy poco frecuentes. Debido a esto, se ha decidido acotar el rango de trabajo de tal forma que el nuevo rango sea:

Tabla 5: nuevo rango considerado para parámetros - 1

Variable	Inicio rango	Final rango	Incremento
α_0 [deg]	30	60	5
δ_p [mm]	0.01	0.09	0.01
s [-]	0.91	0.98	0.01

El siguiente paso, consiste en volver a obtener los coeficientes para las aproximaciones anteriores, estudiar el error y seleccionar la más apropiada.

Aproximación para el rango acotado:

Tabla 6: Coeficientes propuesta 1 - Acotado

Propuesta 1			
C1	C2	C3	C4
1.9944	0.8559	2.0437	1.0428

Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.029	0.54 Nm	18.67 Nm	0.61 %	3.43 %

Tabla 7: Coeficientes propuesta 2 - Acotado

Propuesta 2				
C1	C2	C3	C4	C5
1.9944	0.8559	0.2351	1.5708	4.7939

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.073	0.76 Nm	11.70 Nm	0.98 %	3.39 %

Ante igualdad práctica de precisión, se opta por seleccionar la propuesta uno debido a su simplicidad.

Extensión para toda la zona estándar:

Una vez de haber obtenido la fórmula para el caso particular de $D_{pw} = 1000$ mm y $D_w = 30$ mm, el siguiente paso consiste en extenderla de tal forma que sea válida dentro de la zona de valores estándar definido anteriormente.

Partiendo de los estudios previos realizados mediante elementos finitos, se ha planteado que la influencia del diámetro nominal del rodamiento, así como la influencia del coeficiente de fricción es lineal. Al observarse que el diámetro nominal de la bola apenas influye en el par, no se ha introducido como parámetro en la forma funcional.

Para poder extrapolar dicha fórmula al rango completo y que este contemple todos los casos de “Dpw” y “Dw”, el único parámetro que resta por introducir es el número de bolas “N”.

Al tratarse de una geometría nominal del rodamiento (sin fallos de fabricación) y una distribución igual de precarga para todas las bolas, la aportación de cada una de ellas al par resultante debería de ser la misma. Es por ello por lo se planteará que la influencia del número de bolas es lineal:

$$M_y = \mu \times D_{pw} \times \frac{\delta_p^{C1}}{(1-s)^{C2}} \times e^{(C3 \alpha_0)} \times C4 \times N$$

Una vez de haber planteado la forma funcional, se procede a obtener el valor de los coeficientes:

Tabla 8: Fórmula ingenieril para el caso de precarga de las bolas

$M_y = \mu \times D_{pw} \times \frac{\delta_p^{C1}}{(1-s)^{C2}} \times e^{(C3 \alpha_0)} \times C4 \times N$				
C1	C2	C3	C4	
1.9944	0.8559	2.0437	0.02728	
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.029	0.54 Nm	18.67 Nm	0.61 %	3.43 %

Para ver la representación gráfica de la comparativa entre los resultados obtenidos mediante el BA-Tool y mediante la fórmula ingenieril obtenida, consúltese el apartado ANEXO II.

8.1.2. Validación de la fórmula

El último paso para terminar con el primer bloque de la solución, consiste en estudiar el error para casos aleatorios de valores y combinaciones de los parámetros característicos. Para ello, se emplearán 3000 casos aleatorios que estén dentro de los límites máximos y mínimos de cada parámetro.

Obsérvese que los valores de “Dpw” dependen de los valores de “Dw”. Para resolver este problema, el rango de “Dw” se dividirá en tres zonas y dependiendo del valor aleatorio del mismo, el límite superior e inferior de “Dpw” vendrá determinado por una curva u otra.

Tabla 9: Errores obtenidos en la validación

Validación en el DOE. Nº de elementos: 3000				
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.0045	0.53 Nm	15.84 Nm	0.50 %	4.95 %

Se observa que el error obtenido es aceptable por lo que se acepta la validez de la fórmula para todo el rango considerado anteriormente.

En las siguientes imágenes, se muestran los valores aleatorios que se han tomado para la validación.

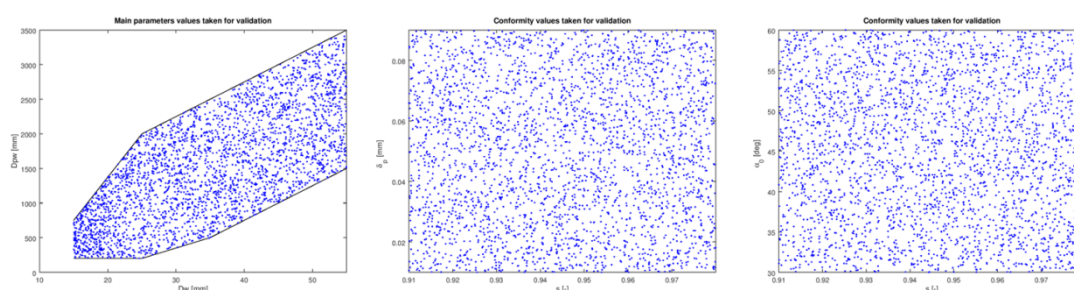


Ilustración 16: Valores aleatorios.

Como bien se puede observar, se ha cubierto todo el rango de interés mediante los valores aleatorios. Al no observarse ninguna zona de concentración de los mismos, se confirma la validez del resultado.

8.2. Caso de carga axial sin precarga

En este segundo bloque, se estudiará el caso en el que el rodamiento está sujeto a carga axial externa. Dicha carga axial, variará desde el valor nulo hasta la capacidad de carga axial “Ca₀” máxima. Este último valor, se calculará aproximadamente mediante la siguiente fórmula cuya forma está basada en las expresiones de Houpert [12] para la rigidez normal del contacto:

$$F_{ax}^{MAX} = Q^{MAX} \times \sin \alpha_0 \times N = \left(P^{MAX} \times \frac{D_w^{2/3}}{(1805 \times (1 - s)^{0.2117})} \right)^3 \times \sin(\alpha_0) \times N$$

Siendo el valor de la presión máxima 4200 MPa, según normativa [4].

Obsérvese que los parámetros “s”, “α₀” y “D_w” aparecen como variables en la fórmula anterior, lo cual implica que la capacidad será diferente para cada rodamiento a estudiar. Al ser diferente la capacidad para cada rodamiento, también lo serán por lo tanto los valores de carga axial empleados.

Al igual que en el bloque anterior, ante la diversidad de rodamientos que se pueden encontrar en el mercado, en este estudio se tendrán en cuenta diferentes rodamientos en base a sus parámetros característicos. Dichos parámetros serán:

- El ángulo de contacto bola-pista inicial: " α_0 ".
- La conformidad del contacto: " s ".
- La fuerza axial: " F_a ".
- El diámetro nominal del rodamiento: " D_{pw} ".
- El diámetro de las bolas: " D_w ".

Al igual que en el apartado anterior, se definirá un rango de valores a emplear para el estudio de cada parámetro. Para ello, se definirá una tabla indicando el comienzo, final y el incremento de los tres primeros.

Tabla 10: Rango considerado para parámetros - 3

Variable	Inicio rango	Final rango	Incremento
α_0 [deg]	25	65	5
F_a [%]	0	100	12.5
s [-]	0.91	0.99	0.01

Obsérvese que los valores de la carga axial a emplear se dan como porcentajes de la capacidad axial.

Para definir el rango a tener en cuenta para los últimos dos parámetros, es necesario tener en cuenta que existe una dependencia entre el diámetro de la bola y el diámetro nominal del rodamiento. Es decir, para los diferentes valores de diámetro nominal del rodamiento, varía el rango de los diámetros de bola a utilizar. Al igual que en el apartado anterior, se emplearán los valores de la tabla 2.

Mediante estos parámetros característicos, se estudiarán 10,206 (9x9x9x14) rodamientos para satisfacer el objetivo anterior.

En lo que respecta al procedimiento a seguir, se debe señalar que para obtener una fórmula ingenieril que calcule el par de fricción para todos estos casos mencionados anteriormente, es necesario obtener la forma funcional. Dicha forma funcional, deberá de tener en cuenta cada uno de los cinco parámetros característicos que se han mencionado anteriormente, siendo estos, los inputs de la misma. Es decir:

$$M_y = f(\alpha_0, s, F_a, \mu, D_w, D_{pw})$$

A diferencia del bloque anterior, en este existen dos contrapartidas. La primera, consiste en que no se dispone de ninguna iteración previa para conocer el efecto del diámetro de la bola ni del diámetro nominal del rodamiento. Para solucionarlo, se partirá por considerar un caso particular de la geometría del rodamiento. Es decir, se seleccionará uno que esté centrado en

la zona delimitada anterior: $D_{pw} = 1000$ mm y $D_w = 30$ mm. De esta manera, se conseguirá pasar de un problema de cinco variables, a uno de tan solo tres variables. Posteriormente, una vez de haber obtenido la forma funcional para estos parámetros, se deberá extender la fórmula de tal forma que incluya todos los casos de diámetro de bola y diámetro nominal del rodamiento. La segunda, consiste en que, a diferencia del caso anterior, en este el ángulo de contacto varía significativamente al someter al rodamiento a carga axial. Para solucionarlo, será necesario obtener una fórmula ingenieril previa que permita calcular el ángulo de contacto final en cada caso de carga axial.

Para obtener las fórmulas ingenieriles tanto para el ángulo como para el par, se plantearán diversas formas funcionales y se realizará la minimización del error cuadrático para cada uno de ellos. De esta forma, se buscarán los coeficientes que mejor se adapten a dichas formas funcionales. Para ello, se hará uso del script descrito en el punto anterior (o uno muy similar).

Finalmente, tras obtener la fórmulas ingenieriles que tenga en cuenta todos los rodamientos considerados para el estudio, se deberá validar dicha fórmula. Para ello, será necesario realizar un estudio de la variación del error para diferentes posibles combinaciones aleatorias que puedan darse dentro del rango mencionado anteriormente (sin tener en cuenta el intervalo ni los puntos considerados).

8.2.1. Planteamiento de la forma funcional para el ángulo de contacto

Tal y como se ha mencionado anteriormente, a diferencia de lo que sucedía en el caso de precarga de las bolas, el ángulo de contacto varía significativamente con las fuerzas externas aplicadas en el rodamiento. Por ello, para obtener el par de fricción en cada caso, es necesario conocer previamente el ángulo de contacto.

El primer paso para obtener la forma funcional del ángulo de contacto, consiste en separar los casos en los que la fuerza axial es superior a cero, y los que no. Obsérvese que en los casos en los que la fuerza axial es nula, el ángulo de contacto final será igual que el inicial. Para ello, se definirá una función tipo:

$$\alpha_f = \alpha_0 + f(\alpha_0, s, F_a)$$

Una vez de haber contemplado los casos en los que la carga externa es nula, se procederá a evaluar la influencia de los parámetros. Al contrario que en el caso anterior, al no disponer de referencias previas para poder obtener la forma funcional de $f(\alpha_0, s, F_a)$, se procederá a representarlo respecto a cada uno de los parámetros dependientes.

Por cuestiones de simplicidad, para obtener la forma funcional, en vez de emplear la capacidad axial en cada caso de “s” y “ α_0 ”, se calculará la capacidad axial para un caso intermedio ($s = 0.95$ y $\alpha_0 = 45^\circ$) y se empleará el mismo para todos los rodamientos: $Ca_0 = 6320$ KN. Más en adelante, para obtener los coeficientes finales se emplearán las capacidades correspondientes de cara a obtener los resultados lo más preciso posible.

Dependencia respecto del ángulo de contacto inicial:

El objetivo ahora es encontrar una función $g(\alpha_0)$ que satisfaga la siguiente ecuación. Para evitar llenar el documento de imágenes, se representarán únicamente dos casos de conformidad que son suficientes para identificar la dependencia.

$$\alpha_f = \alpha_0 + g(\alpha_0) \times h(s, F_a)$$

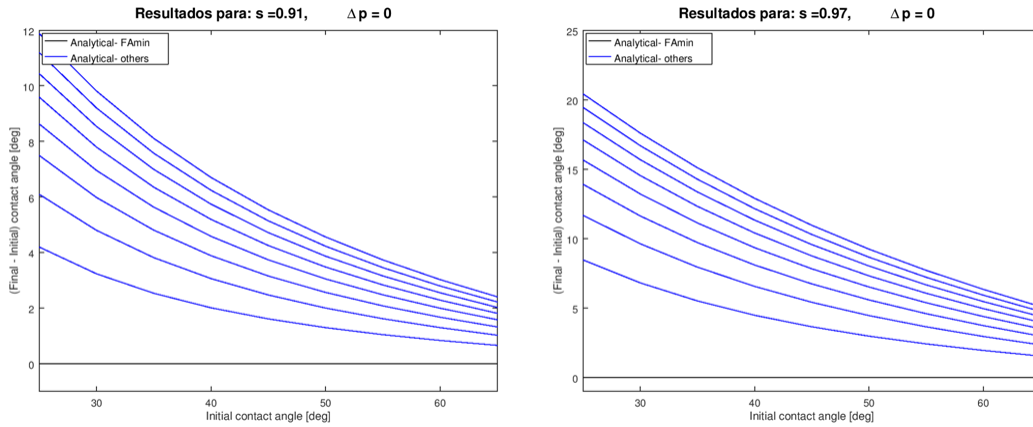


Ilustración 17: Representación de $f(\alpha_0, s, F_a)$.

Basándose en la tendencia decreciente de la curva, resulta evidente que requiere de una aproximación exponencial o potencial. Para seleccionar uno de los dos, se procederá a escoger una de las curvas y mediante Excel, ver cuál de las dos es la más apropiada. Para ello, se ha seleccionado el caso ($s = 0.91$ y $F_{ax} = 0.12 C_{a0}$).

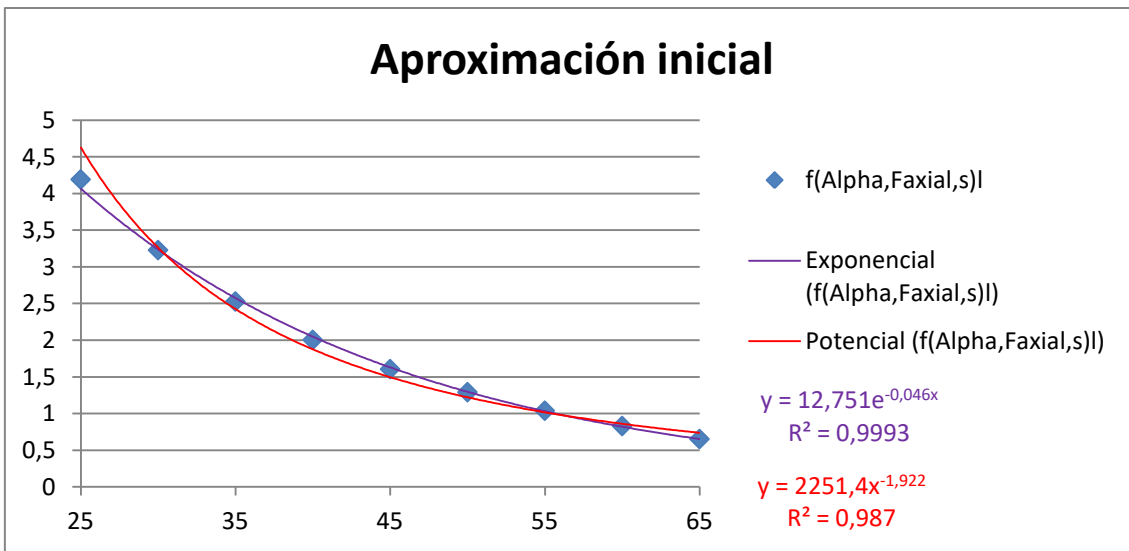


Ilustración 18: Aproximación de $g(\alpha_0)$.

Repetiendo el cálculo para diferentes casos de conformidad y carga axial, se concluye que la forma funcional que mejor se adapta a la tendencia es la exponencial, por lo que la función adquiere la forma:

$$\alpha_f = \alpha_0 + e^{c1 \alpha_0} \times h(s, F_a)$$

Dependencia respecto de la conformidad:

Al igual que en el apartado anterior, el objetivo es buscar una función $i(s)$ que satisfaga:

$$\alpha_f = \alpha_0 + e^{C1 \alpha_0} \times i(s) \times j(F_a)$$

Para obtener la siguiente banda, se ha empleado el valor medio de C1 que se obtiene empleando todos los valores del mismo para todos los casos de conformidad y carga axial.

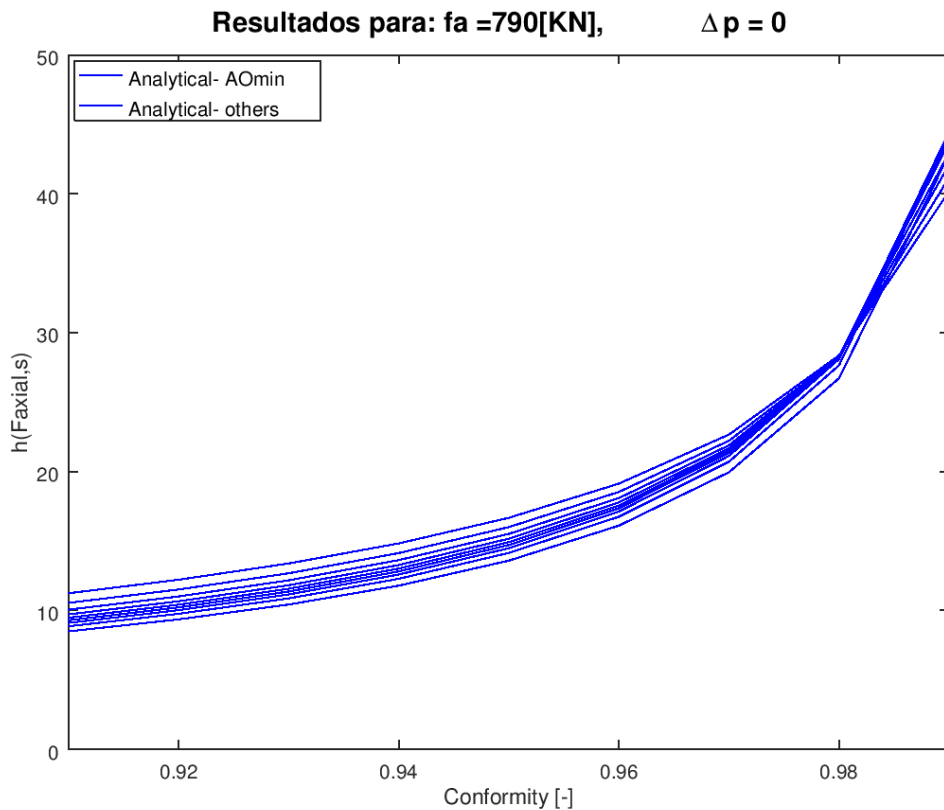


Ilustración 19: Representación de $h(s, F_a)$.

Basándose una vez más en la tendencia creciente de la curva, resulta evidente que requiere de una aproximación exponencial o potencial. Para seleccionar la más apropiada de las dos, se procederá a calcular la media de las curvas para cada uno de los casos de conformidad y mediante Excel, ver cuál de las dos es la más apropiada.

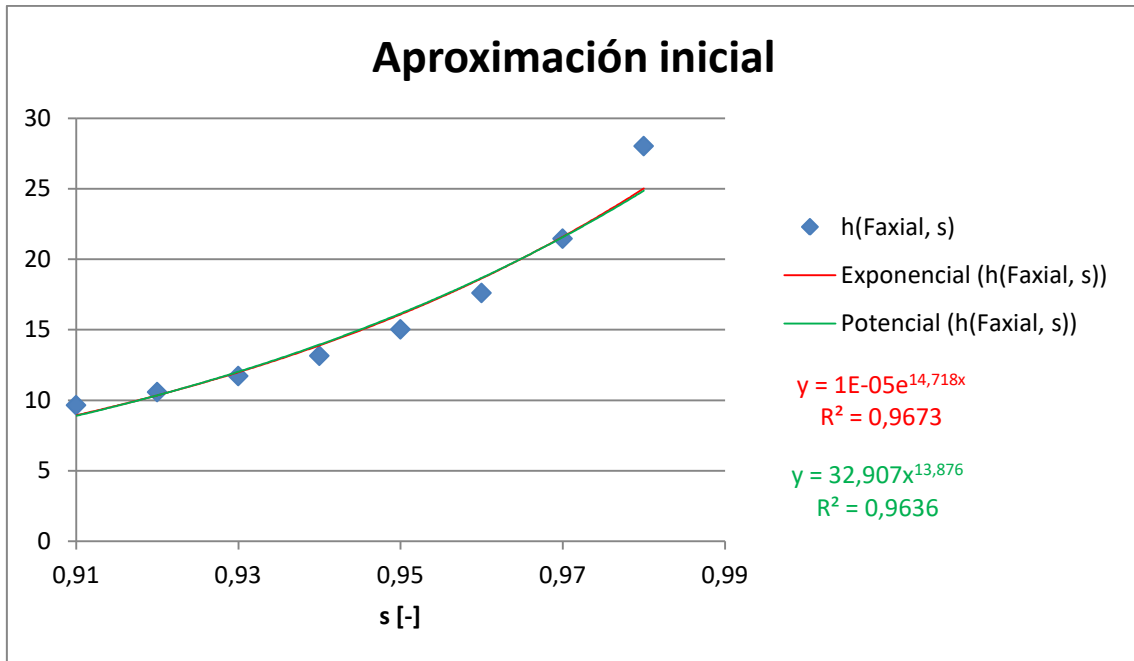


Ilustración 20: Aproximación de i(s).

Sin embargo, ninguna de las dos parece adaptarse bien a la tendencia. Otra alternativa:

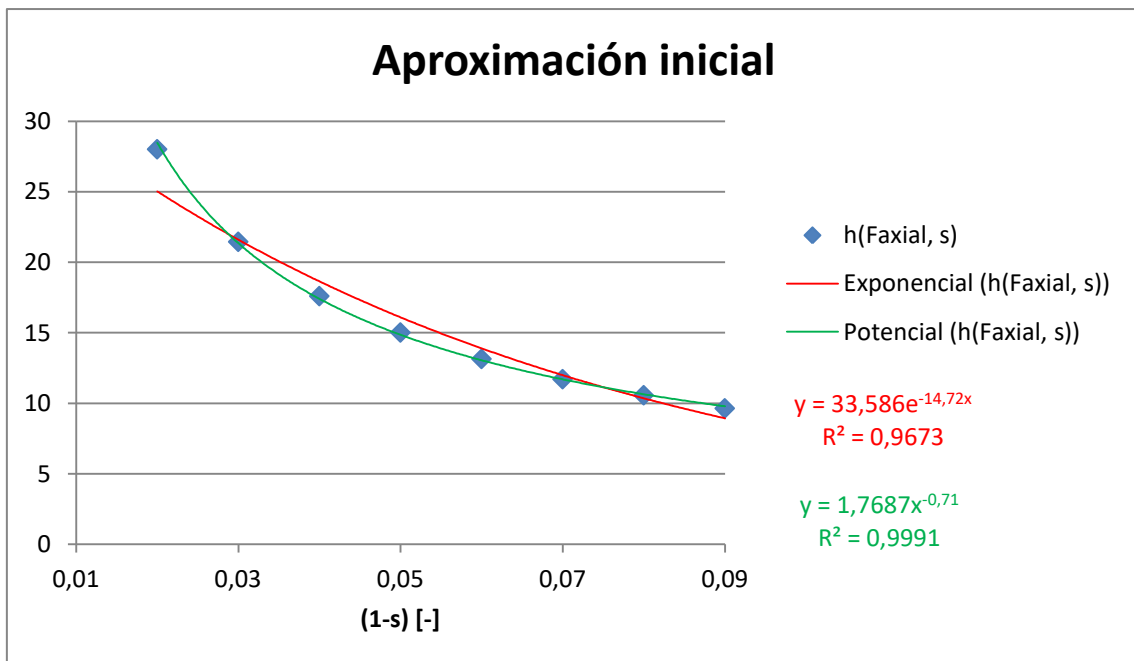


Ilustración 21: Aproximación de i(s) – 2.

Se concluye por lo tanto que la forma funcional que mejor se adapta a la tendencia es la potencial respecto a la resta de uno menos la conformidad, por lo que la función adquiere la forma:

$$\alpha_f = \alpha_0 + \frac{e^{C1 \alpha_0}}{(1 - s)^{C2}} \times j(F_a)$$

Dependencia respecto de la carga axial:

Para terminar, el último paso consiste en buscar una función $j(s)$ que satisfaga la ecuación anterior. Para ello, se volverá a repetir el procedimiento anterior, representándolo inicialmente respecto a la fuerza axial obteniendo la banda representada en la siguiente imagen. En ella, se puede observar que para los casos de carga elevados existen una serie de curvas que se alejan de la zona de concentración de las mismas.

Una vez más, para poder representar dicha banda, se emplearán los valores medios de C1 y C2.

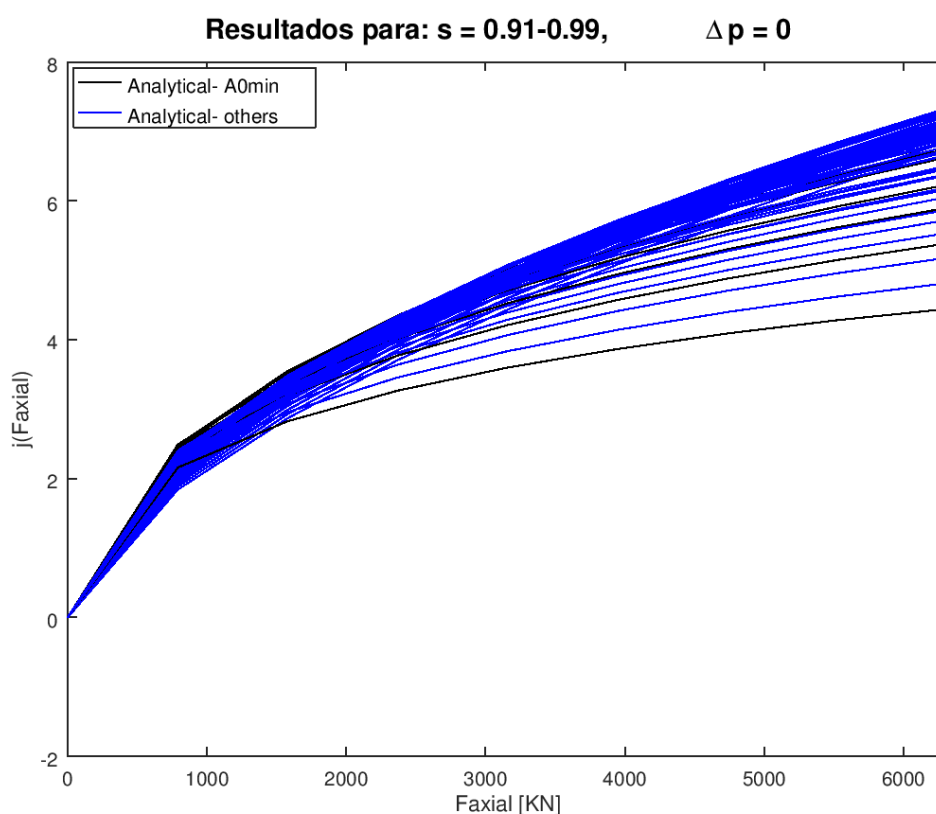


Ilustración 22: Representación de $j(F_a)$.

Uno de los factores por lo que existen curvas que difieren de la media, se debe a que existen casos que no consiguen seguir la tendencia. Para ello, se va a proponer la misma acotación que se ha propuesto para el caso de la precarga de las bolas en la Tabla-5. Es decir, se van a quitar los valores extremos del ángulo de contacto inicial (25° y 65°) así como el caso de la conformidad ($s = 0.99$). Representado una vez más la banda anterior sin tener en cuenta los casos acotados:

Aproximación para el rango acotado:

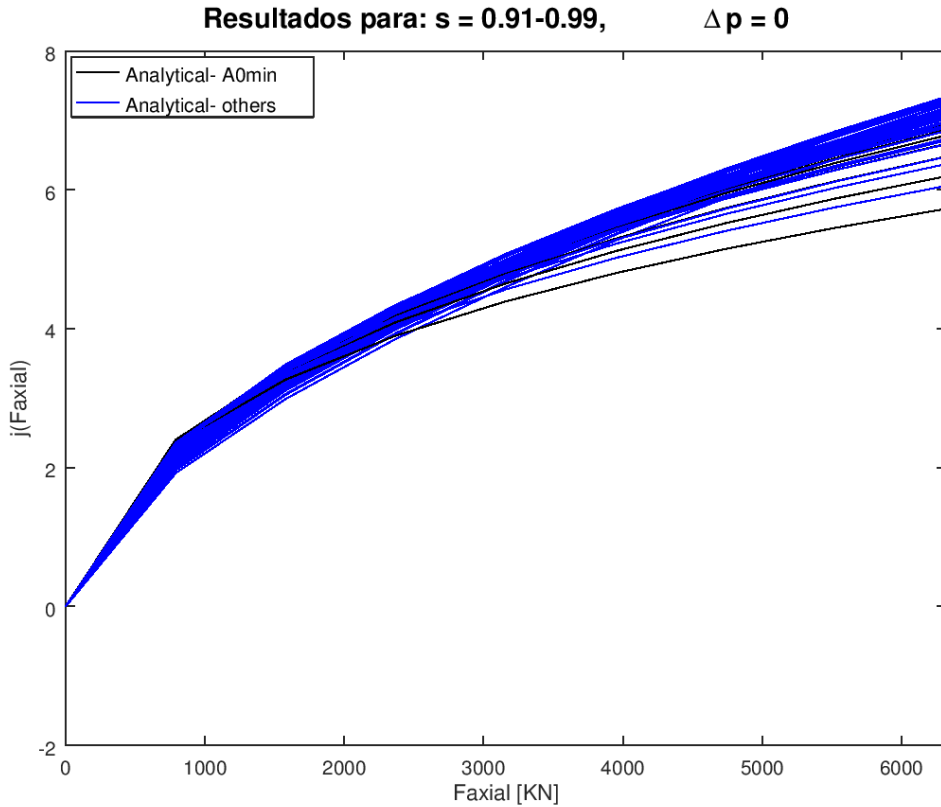


Ilustración 23: Representación de $j(F_a) - 2$.

Se observa que la banda se ha vuelto mucho más estrecha. Aun así, existen una serie de curvas que siguen difiriendo de la media. Esto, se debe a que para representar $j(s)$ se han empleado la media de los valores para los coeficientes C1 y C2 (incluyendo los casos que han sido acotados). Además, recuérdese que dichos coeficientes empleados son la media de los valores minimizados para cada caso. Para obtener los valores definitivos, se deben de minimizar todos los casos a la vez. Sin embargo, como hasta ahora el objetivo ha sido obtener las formas funcionales, los coeficientes definitivos serán obtenidos más adelante.

Tampoco se debe de perder de vista el hecho de que el valor máximo de la fuerza axial que se está empleando para cada caso de ángulo de contacto, no es su capacidad axial, sino que es la capacidad de un rodamiento específico ($s = 0.95$ y $\alpha_0 = 45^\circ$), de tal forma que existirán ciertos casos en los que la carga sea excesiva.

Por todos los factores mencionados anteriormente, se justifica la existencia de dicha discrepancia entre la media y alguna de las otras curvas.

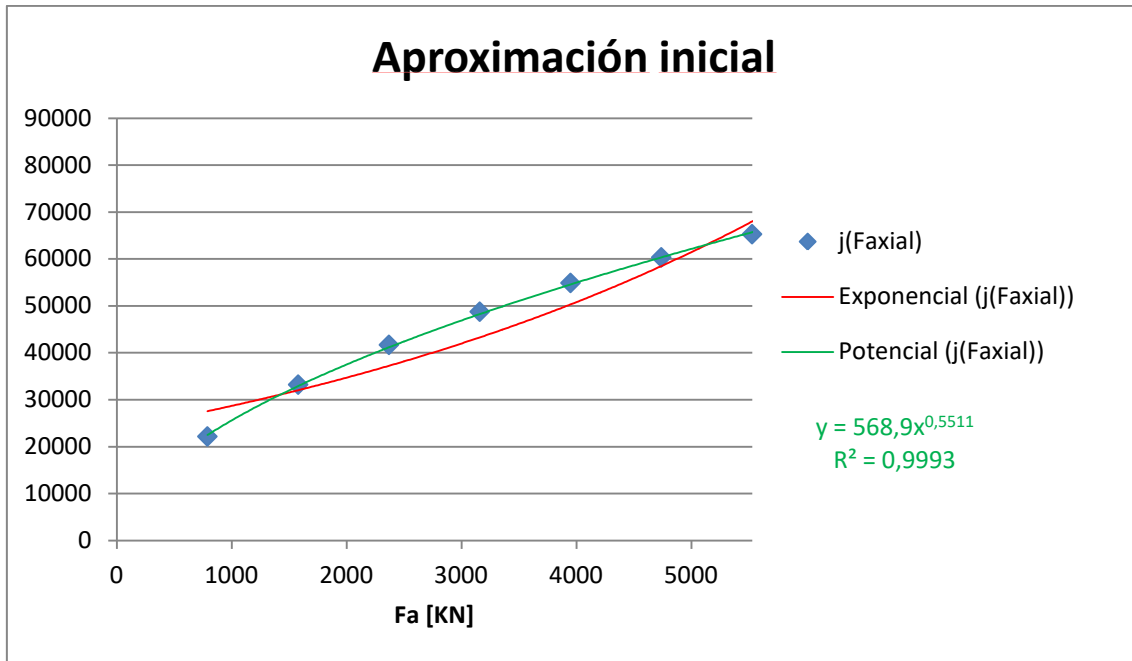


Ilustración 24: Aproximación de j(s).

Tal y como se puede observar en la gráfica anterior, la única forma funcional que tiene sentido para la función, es la potencial. Por lo tanto, la forma funcional a minimizar será:

$$\alpha_f = \alpha_0 + C1 \times \frac{e^{C2 \alpha_0}}{(1 - s)^{C3}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{C4}$$

Véase que se ha introducido el número de bolas dividiendo a la carga axial. Esto, se debe a que el ángulo de contacto dependerá de la fuerza axial en el contacto, es decir, de la fuerza axial en la bola. Al ser una geometría sin fallos de fabricación y carga axial, todas las bolas soportarán la misma proporción de la resultante axial, es decir, la resultante entre el número de bolas.

Una vez de haber obtenido la forma funcional, el siguiente paso consiste en obtener los valores de los coeficientes. Para ello, se procederá a minimizar el error cuadrático relativo para todos los casos de ángulo de contacto inicial, conformidad y carga axial (rango acotado).

Tabla 11: Coeficientes propuesta - Acotado

$\alpha_f = \alpha_0 + C1 \times \frac{e^{C2 \alpha_0}}{(1 - s)^{C3}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{C4}$				
C1	C2	C3	C4	
5.5251 E-4	-2.0672	0.5726	0.4932	
Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.013	0.18 [deg]	2.01 [deg]	0.36 %	3.94 %

NOTA: pese a haber representado el error absoluto en grados (para hacerlo más visual), todos los ángulos en la formula están en radianes.

Extensión para toda la zona estándar:

Una vez de haber obtenido la fórmula para el caso particular de $D_{pw} = 1000$ mm y $D_w = 30$ mm, el siguiente paso consiste en extenderla de tal forma que sea válida dentro de la zona de valores estándar definido anteriormente.

Para poder identificar la influencia del diámetro de la bola y del diámetro nominal del rodamiento, al no disponer de referencias una vez más, se ha decidido realizar la minimización para diferentes combinaciones de las mismas. Es decir, se han seleccionado diferentes puntos de la Ilustración 11 y realizar la minimización para estas, observando cómo varían los coeficientes e identificando cuál o cuáles de los parámetros afectan.

Tal y como se puede ver en ANEXO III, los coeficientes varían según varía el diámetro de la bola, pero no lo hacen cuando varía el diámetro nominal del rodamiento. En base a ello, se ha propuesto la forma funcional:

$$\alpha_f = \alpha_0 + C1 \times \frac{e^{C2 \alpha_0}}{(1 - s)^{C3}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{C4} \times \frac{1}{D_w^{C5}}$$

Una vez de haber planteado la forma funcional, se procede a obtener el valor de los coeficientes definitivos. Para ello, para cada combinación de “s”, “ α_0 ” y “ D_w ” se calculará el valor de la capacidad axial, de tal forma que la fuerza se pueda introducir como porcentaje de la misma en cada caso. Es por ello por lo que en comparación al error relativo de la tabla anterior, en este se vaya a obtener un valor inferior a pesar de estar incluyendo parámetros adicionales.

Tabla 12: Fórmula ingenieril para el ángulo de contacto final

$\alpha_f = \alpha_0 + C1 \times \frac{e^{C2 \alpha_0}}{(1 - s)^{C3}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{C4} \times \frac{1}{D_w^{C5}}$				
C1	C2	C3	C4	C5
1.6464 E-2	-1.9941	0.5710	0.4677	0.9353
Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.067	0.22 [deg]	1.53 [deg]	0.45 %	2.95 %

Tal y como se ha comentado anteriormente, el error relativo obtenido es inferior respecto de la tabla anterior al dejar de introducir capacidades excesivas a rodamientos con peor resistencia a carga axial.

8.2.2. Validación de la fórmula para el ángulo de contacto

El último paso para terminar con el primer apartado del segundo bloque de la solución, consiste en estudiar el error para casos aleatorios de valores y combinaciones de los parámetros característicos. Para ello, se emplearán 3000 casos aleatorios que estén dentro de los límites máximos y mínimos de cada parámetro.

Obsérvese que una vez más, los valores de “Dpw” dependen de los valores de “Dw”. Para resolver este problema, el rango de “Dw” se dividirá en tres zonas y dependiendo del valor aleatorio del mismo, el límite superior e inferior de “Dpw” vendrá determinado por una curva u otra.

Tabla 13: Errores obtenidos en la validación

Validación en el DOE. Nº de elementos: 3000				
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.0042	0.27 Nm	0.63 Nm	0.56 %	1.48 %

Se observa que el error obtenido es aceptable por lo que se acepta la validez de la fórmula para todo el rango considerado anteriormente.

En las siguientes imágenes, se muestran los valores aleatorios que se han tomado para la validación.

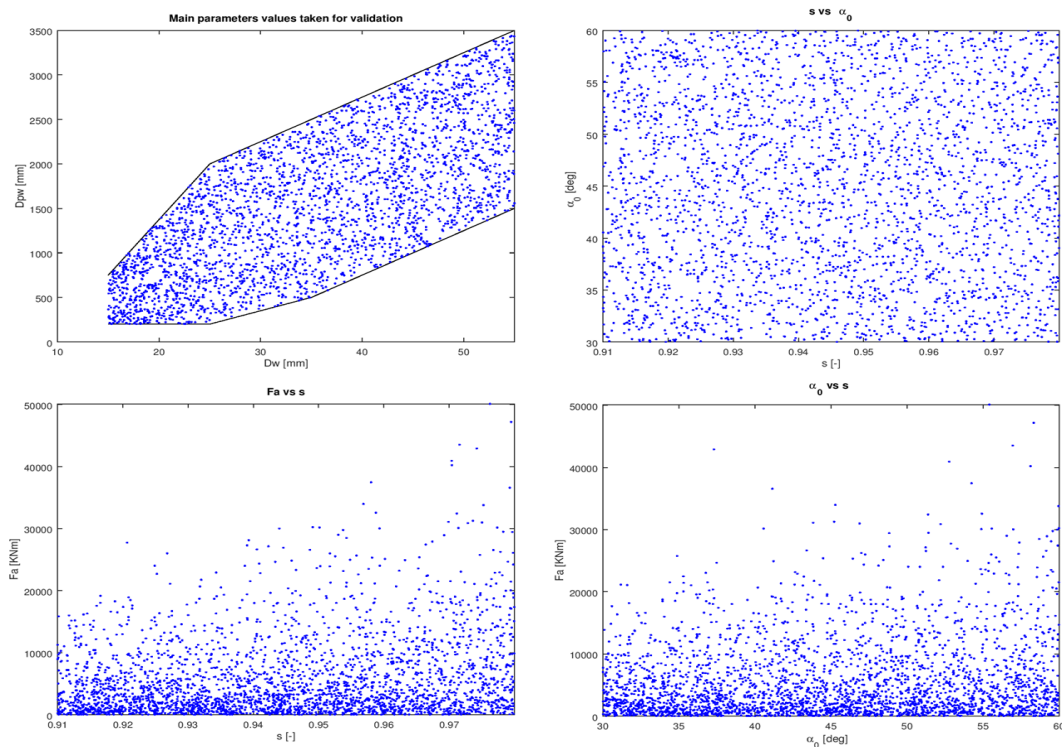


Ilustración 25: Valores aleatorios.

Como bien se puede observar, se ha cubierto todo el rango de interés mediante los valores aleatorios. Al no observarse ninguna zona de concentración en las primeras dos gráficas, se confirma la validez del resultado.

En las siguientes dos gráficas, se puede observar fácilmente como aumenta la capacidad axial a medida que aumenta tanto el ángulo de contacto inicial como la conformidad.

8.2.3. Planteamiento de la forma funcional

Una vez de disponer de una aproximación funcional para poder obtener el ángulo de contacto final para el caso de carga axial, se puede obtener la fórmula ingenieril que resta. Recuérdese, que en este segundo bloque, el objetivo es obtener una aproximación funcional del par de fricción para carga axial. Es decir:

$$M_y = f(\alpha_f, s, F_a, \mu, D_w, D_{pw})$$

Para obtener la forma funcional, se hará uso tanto de referencias como del equilibrio de fuerzas en el anillo interior. El primer paso, consistiría en partir por suponer que tanto los anillos como las bolas son sólidos rígidos sin deformación alguna, de tal forma que el equilibrio de fuerzas quedaría de manera aproximada:

$$M_y = F_{roz} \times \frac{D_{pw}}{2} \times N = (\mu \times Q) \times \frac{D_{pw}}{2} \times N$$

Donde F_{roz} es la fuerza de rozamiento que se genera en el contacto de dos superficies bajo una fuerza normal Q y un coeficiente de rozamiento μ .

Para un rodamiento sometido a carga axial cuyas pistas no presentan errores de fabricación, la distribución de carga es igual en todas las bolas. De esta forma, la contribución de cada bola a la resultante axial es la misma.

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right) \times \frac{D_{pw}}{2} \times N$$

Sin embargo, resulta evidente la necesidad de considerar las deformaciones locales que se producen en el contacto bola-pista. Por lo tanto, es necesario incluir el efecto de la conformidad. Para ello, en un segundo paso, tal y como se ha realizado en el apartado de la precarga de las bolas, en base a la aproximación funcional de Houpert, se introducirá dividiendo la resta de uno menos "s" elevado a una potencia. De esta forma, a forma funcional más simple a minimizar sería:

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times D_{pw} \times N$$

Al igual que se ha realizado en todos los apartados anteriores, de cara a simplificar el problema se partirá por considerar un único caso de diámetro de bola y diámetro nominal del

rodamiento ($D_w = 30$ y $D_{pw} = 1000$). Posteriormente, tras obtener una buena aproximación para este caso, se extenderá la fórmula de forma que sea válida para todo el rango.

En lo que respecta al rango, al haberse considerado el acotado para la obtención del ángulo de contacto final, es necesario considerar el mismo para cualquier otra aproximación que emplee dicha fórmula.

Tabla 14: Coeficientes propuesta - Acotado

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times D_{pw} \times N$$

C1	C2	C3
1.6705	0.8596	4.4195 E-10

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.10	0.50 Nm	17.20 Nm	1.02 %	8.65 %

Extensión para toda la zona estándar:

Una vez de haber obtenido la fórmula para el caso particular de $D_{pw} = 1000$ mm y $D_w = 30$ mm, el siguiente paso consiste en extenderla de tal forma que sea válida dentro de la zona de valores estándar definido anteriormente.

Para ello, al tener una forma funcional que ya incluye la influencia del diámetro nominal del rodamiento, el primer paso consiste en detectar si resulta necesario introducir algún posible efecto del diámetro de la bola. Esto anterior, se logrará por medio de realizar la minimización para cada valor de diámetro de bola mostrado en la Ilustración 11, es decir, $D_w = 15, 25, 35, 45$ y 55 mm.

De los resultados que se obtienen para las minimizaciones anteriores, véase ANEXO IV, es posible sacar dos conclusiones. El primero, consiste en que alguno de los coeficientes varía significativamente con el diámetro de la bola, por lo que es necesario incluirla en la forma funcional. El segundo, consiste en que para el caso de $D_w = 25$ mm, existe un error relativo máximo excesivo, por lo que resulta necesario estudiar el origen de dicha fuente de error.

Para incluir el efecto del diámetro de la bola, se representarán cada uno de los coeficientes anteriores respecto del mismo:

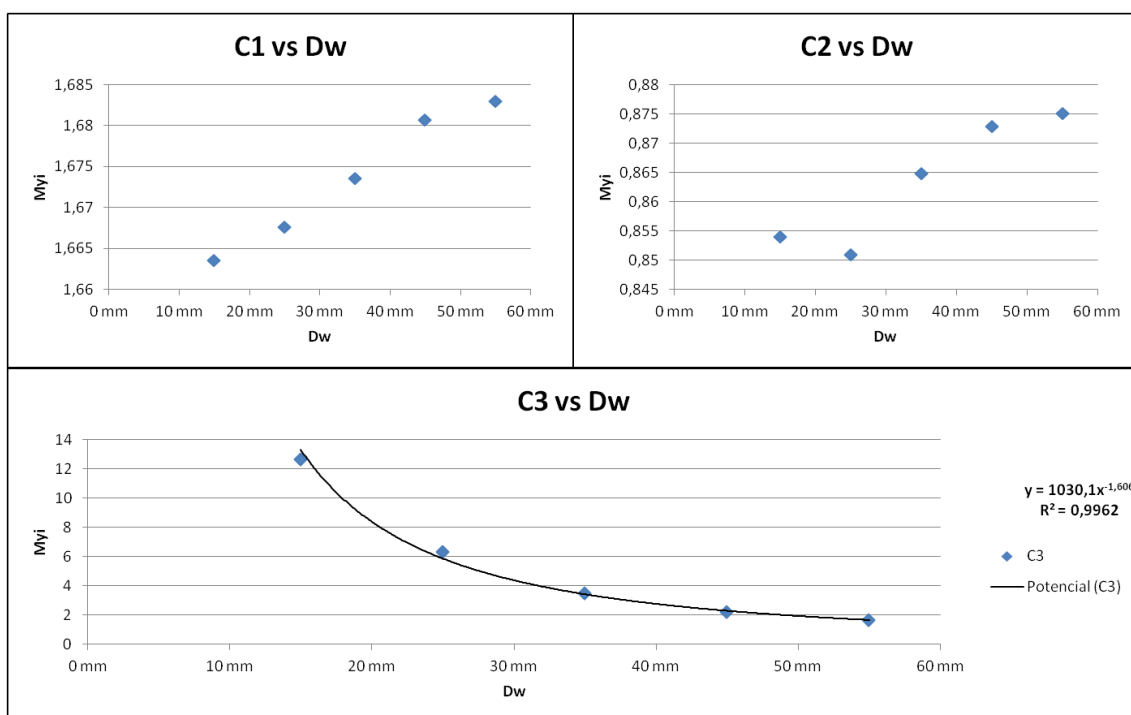


Ilustración 26: Aproximación para Dw.

Tal y observa en la imagen anterior, el coeficiente C3 varía considerablemente y además, sigue la tendencia potencial del diámetro de la bola. Obsérvese que esto corresponde con la influencia planteada por Houpert para la rigidez de un contacto bola-pista deformable. Por lo tanto, la forma funcional a emplear será:

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{C4}} \times N$$

Empleando la función anterior, se obtendrán los coeficientes para todo el rango objetivo:

Tabla 15: Coeficientes propuesta - Acotado - Expandido

$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{C4}} \times N$				
C1	C2	C3	C4	
1.6746	0.8644	0.4858 E-7	1.3907	
Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
8.17	5.75 Nm	425.33 Nm	4.81 %	53.65 %

El error relativo máximo obtenido es excesivo, por lo que se procederá a estudiar cuáles son los casos que presentan mayor error. Para ello, se dividirá el error relativo en tres zonas (inferior al 10 %, entre 10 % y 20 %, mayor que 20 %) y se mostrará cómo se distribuye para los diferentes parámetros.

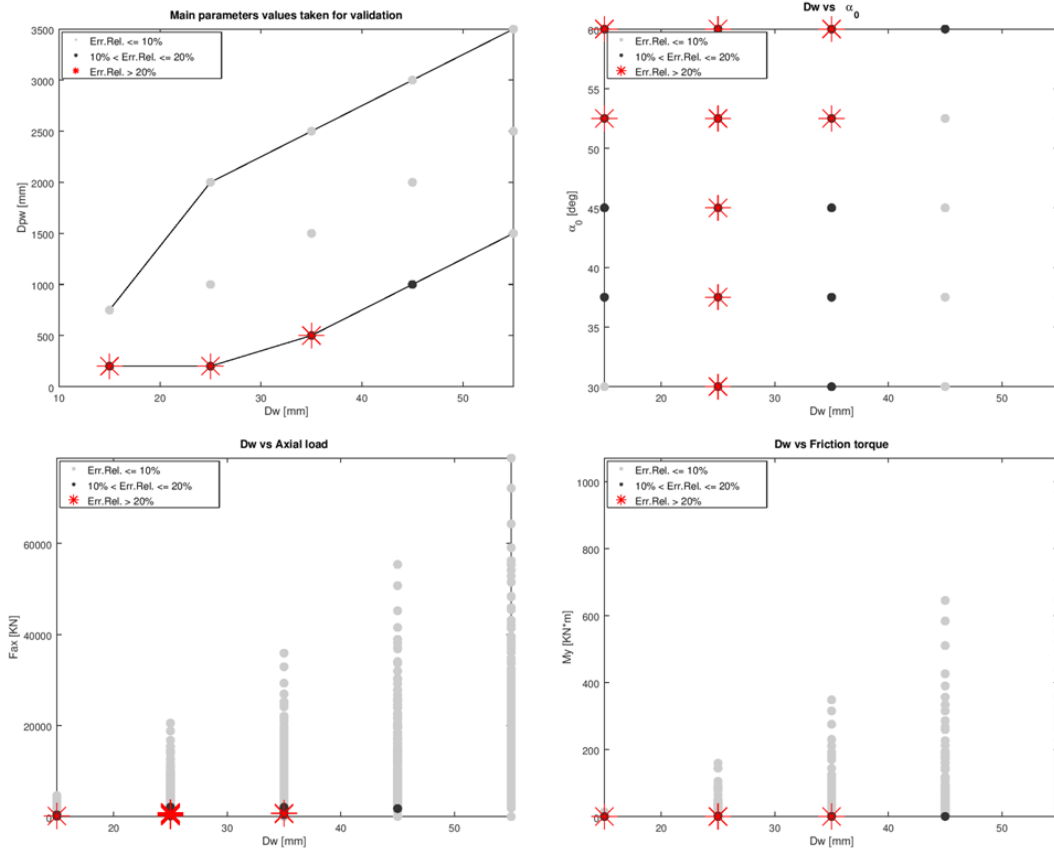


Ilustración 27: Distribución de errores.

Como se puede observar, el error es máximo para los casos en los que la carga axial es mínima. Para bajas cargas, el par resultante obtenido es también reducido. Recuérdese que tal y como se ha mencionado anteriormente, para bajos casos de carga, en caso de existir precarga de las bolas, se produce un contacto bola-pista de cuatro puntos, obteniendo así valores de par de fricción mucho más elevados de los que se obtienen frente a considerar únicamente la carga axial. Por lo tanto, se procederá a acotar el rango de validez de la fórmula a obtener.

Para acotar el rango de validez, se seleccionará el par máximo obtenido para los casos en los que el error relativo es superior al 20 % (puntos rojos en la imagen anterior). Este valor, al ser 184 Nm, se definirá un límite inferior de 200 Nm al rango de aplicación.

Al haber seleccionado un límite inferior, existirán casos que no participarán en la minimización, por lo que el valor de los coeficientes obtenidos variarán. Así pues, los nuevos coeficientes a emplear:

Tabla 16: Fórmula ingenieril para el caso de carga axial - General

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{C4}} \times N$$

C1	C2	C3	C4
1.6908	0.8761	0.3788 E-7	1.3843

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
1.63	985.73 Nm	52492 Nm	2.66 %	19.92 %

Como es evidente, el error relativo máximo ahora es inferior al 20 %. Sin embargo, este error sigue siendo excesivo aún así. Es importante destacar, que el rango de par de fricción que cubre esta fórmula varía desde 200 Nm hasta 1.07 MNm.

Ante la extensión del rango del par obtenido, se procederá a dividir dicho rango en trozos de tal forma que se disponga de unas fórmulas específicas con mayor precisión para cada trozo de ellos. De este modo, se dispondrá de una fórmula general (la anterior) para obtener el valor aproximado en una primera iteración. En base al valor obtenido, se procederá a seleccionar la fórmula específica correspondiente mediante la cual se obtendrá un valor más preciso.

Rango 1: 200 < My < 1000 [Nm]

Tabla 17: Fórmula ingenieril para el caso de carga axial – Específico 1

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{C4}} \times N$$

C1	C2	C3	C4
1.7014	0.8541	0.4107 E-7	1.3986

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.81	32.01 Nm	110.59 Nm	5.83 %	12.83 %

Como se puede observar, el error relativo cometido ha sido reducido a un valor aceptable del mismo.

Rango 2: $1000 < My < 10000$ [Nm]

Tabla 18: Fórmula ingenieril para el caso de carga axial – Específico 2

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{C4}} \times N$$

C1	C2	C3	C4
1.7035	0.8809	0.3081 E-7	1.3674

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.27	77.10 Nm	424.65 Nm	1.81 %	10.00 %

Rango 3: $10000 < My$ [Nm]

Tabla 19: Fórmula ingenieril para el caso de carga axial – Específico 3

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{C1} \times \frac{1}{(1-s)^{C2}} \times C3 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{C4}} \times N$$

C1	C2	C3	C4
1.7193	0.8850	0.3093 E-7	1.4290

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.19	1295 Nm	30446 Nm	1.47 %	5.27 %

Para ver la representación gráfica de la comparativa entre los resultados obtenidos mediante el BA-Tool y mediante la fórmula ingenieril obtenida, consúltese el apartado ANEXO V.

8.2.4. Validación de la fórmula

El último paso para terminar con el último bloque de la solución, consiste en estudiar el error para casos aleatorios de valores y combinaciones de los parámetros característicos. Para ello, se emplearán 10000 casos aleatorios que estén dentro de los límites máximos y mínimos de cada parámetro.

Al igual que hasta ahora, el rango de “Dw” se dividirá en tres zonas y dependiendo del valor aleatorio del mismo, el límite superior e inferior de “Dpw” vendrá determinado por una curva u otra.

Fórmula general

Al disponer de un límite inferior, se lanzarán 10000 casos aleatorios de los cuales posteriormente se seleccionarán aquellos casos en los que el par obtenido esté por encima de dicho límite para estudiar el error.

Tabla 20: Errores obtenidos en la validación - General

Validación en el DOE. Nº de elementos: 8577				
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.067	318.75 Nm	10961 Nm	2.03 %	18.27 %

Se observa que el error obtenido es aceptable por lo que se acepta la validez de la fórmula para todo el rango considerado anteriormente.

En las siguientes imágenes, se muestran los valores aleatorios que se han tomado para la validación.

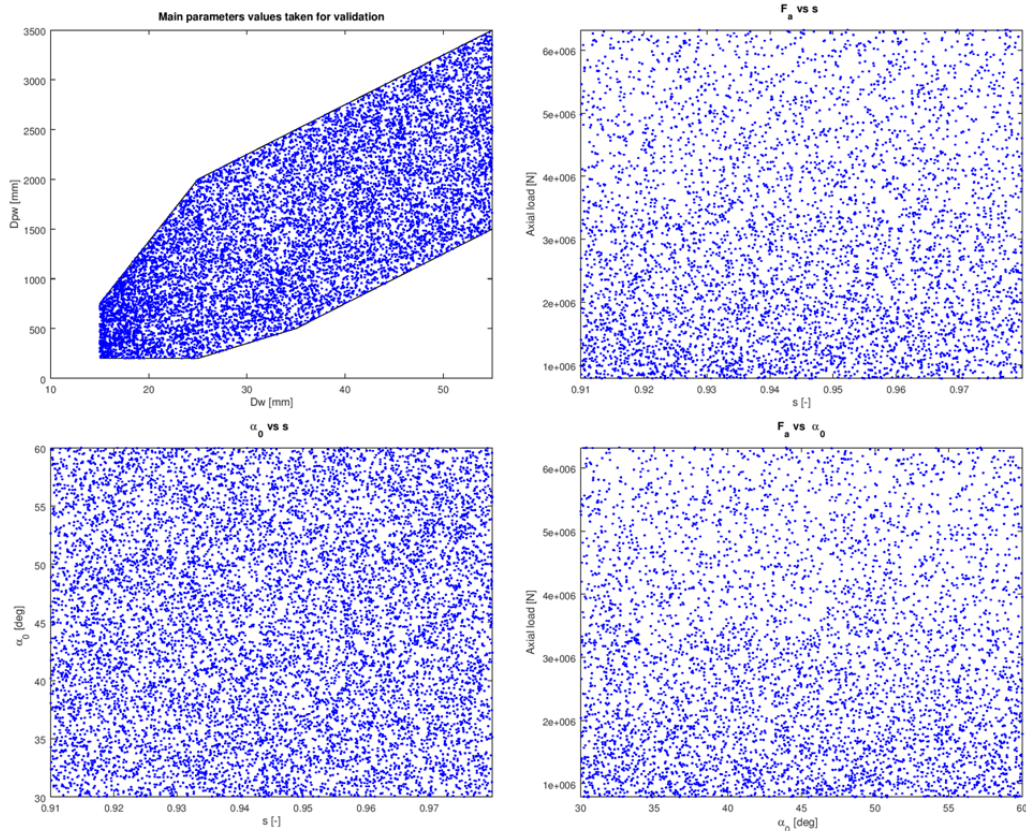


Ilustración 28: Valores aleatorios.

Fórmula específica - 1

Al disponer de un límite inferior y superior, se lanzarán 10000 casos aleatorios de los cuales posteriormente se seleccionarán aquellos casos en los que el par obtenido esté dentro de dichos límites para estudiar el error.

Tabla 21: Errores obtenidos en la validación – Específico - 1

Validación en el DOE. Nº de elementos: 1652				
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.42	32.67 Nm	114.51 Nm	5.73 %	11.94 %

Fórmula específica - 2

Al igual que en el apartado anterior, se lanzarán 10000 casos aleatorios de los cuales posteriormente se seleccionarán aquellos casos en los que el par obtenido esté dentro de dichos límites.

Tabla 22: Errores obtenidos en la validación – Específico - 2

Validación en el DOE. Nº de elementos: 3981				
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.036	69.94 Nm	552.26 Nm	1.53 %	7.19 %

Fórmula específica - 3

Al igual que en el apartado anterior, se lanzarán 10000 casos aleatorios.

Tabla 23: Errores obtenidos en la validación – Específico - 3

Validación en el DOE. Nº de elementos: 2912				
Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.023	570.09 Nm	7210 Nm	1.28 %	4.26 %

Como bien se puede observar, se ha cubierto todo el rango de interés mediante los valores aleatorios. Se confirma la validez del resultado. Para ver los valores aleatorios tomados, véase ANEXO VI.

9. RESULTADOS: GUÍA DE DISEÑO

A continuación, se procederá a recoger las fórmulas anteriores de tal forma que puedan ser identificadas rápidamente cuando sea necesario y le sea útil al diseñador de rodamientos o cualquier analista que quiera incluir este tipo de rodamientos en sus cálculos estructurales de manera simplificada. El rango de uso:

- Ángulo de contacto bola-pista inicial: $30 < \alpha_0$ [deg] < 60
- Conformidad del contacto: $0.91 < s$ [-] < 0.98
- Precarga de las bolas: $0.01 < \delta_p$ [mm] < 0.09
- Fuerza axial: $0 < F_a$ [% C_{a0}] < 100
- Diámetro nominal del rodamiento: " D_{pw} " Véase Ilustración 6
- Diámetro de las bolas: " D_w " Véase Ilustración 6

Caso de precarga de las bolas:

A continuación se presenta la fórmula a emplear para realizar el cálculo del par de fricción en un rodamiento sujeto a carga en vacío (sometido exclusivamente a precarga).

$$M_y = \mu \times D_{pw} \times \frac{\delta_p^{1.9944}}{(1-s)^{0.8559}} \times e^{(2.0437 \alpha_0)} \times 0.02728 \times N$$

Err Cuad	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.029	0.54 Nm	18.67 Nm	0.61 %	3.43 %

Caso de carga axial:

Para realizar el cálculo del par en un rodamiento sujeto a carga axial (sin precarga) es necesario calcular previamente el ángulo de contacto final. Posteriormente, se presenta una fórmula general para realizar una primera estimación del par y con ello, identificar el rango en el que se sitúa dicho valor. Una vez de haber determinado el valor inicial, se seleccionará la fórmula específica a emplear, el cuál proporcionará un resultado más preciso y por lo tanto, con un error inferior (acotado por el valor máximo del mismo).

Ángulo de contacto instantáneo:

$$\alpha_f = \alpha_0 + 1.6464E - 2 \times \frac{e^{-1.9941 \alpha_0}}{(1-s)^{0.5710}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{0.4677} \times \frac{1}{D_w^{0.9353}}$$

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.067	0.22 [deg]	1.53 [deg]	0.45 %	2.95 %

Fórmula general (200 < My [Nm]):

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{1.6908} \times \frac{1}{(1-s)^{0.8761}} \times 0.3788 E - 7 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{1.3843}} \times N$$

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
1.63	985.73 Nm	52492 Nm	2.66 %	19.92 %

Fórmula específica 1 (200 < My < 1000 [Nm]):

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{1.7014} \times \frac{1}{(1-s)^{0.8541}} \times 0.4107 E - 7 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{1.3986}} \times N$$

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.81	32.01 Nm	110.59 Nm	5.83 %	12.83 %

Fórmula específica 2 (1000 < My < 10000 [Nm]):

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{1.7035} \times \frac{1}{(1-s)^{0.8809}} \times 0.3081 E - 7 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{1.3674}} \times N$$

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.27	77.10 Nm	424.65 Nm	1.81 %	10.00 %

Fórmula específica 3 (10000 < My [Nm]):

$$M_y = \mu \times \left(\frac{F_a}{N \times \sin(\alpha_f)} \right)^{1.7193} \times \frac{1}{(1-s)^{0.8850}} \times 0.3093 E - 7 \times \frac{D_{pw}}{D_w^{1.4290}} \times N$$

Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.19	1295 Nm	30446 Nm	1.47 %	5.27 %

10. DIAGRAMA DE GANTT

En este apartado, se muestra la planificación realizada para la ejecución del proyecto. Para ello, se ha realizado un diagrama de Gantt, empleando el programa Microsoft Project, en el que se muestran las tareas a realizar, así como la fecha de comienzo, duración y número de horas requeridas para cada una de ellas.

El proyecto, comenzará el día 4 de octubre del 2018 (junto con el comienzo del curso de segundo de máster) y se espera que esté finalizado para el día 14 de mayo del 2019. La duración del mismo, por lo tanto, para un calendario estándar, es de 183 días en los cuales se meterán dos horas diarias. El número de horas trabajadas, suman un total de 401 h para el ingeniero junior y 33 h para el ingeniero sénior (director del proyecto).

Tal y como se puede observar en el Gantt, el proyecto se subdivide en cuatro grandes núcleos: el trabajo previo, la preparación del script y obtención de los datos de partida, el desarrollo y finalmente, la documentación del mismo. En lo que respecta al trabajo previo, se dedicará un tiempo razonable a la comprensión de los modelos de partida, es decir, a los predecesores BA-Tool y el programa para la minimización. Posteriormente, el programa que se empleará para obtener las formas funcionales, deberá de ser convenientemente modificado y optimizado, de tal forma que se adapte a las necesidades actuales del proyecto. Tras ello, vendrán las tareas centrales del proyecto, es decir, obtener las aproximaciones funcionales para el caso de precarga de las bolas y para carga axial. Finalmente, se procederá a la documentación del mismo y a la preparación de la presentación.

En lo que se refiere a las tareas, se han definido dos hitos para las fechas 17/12/2018 y 05/03/2019. Estos, han sido definidos tras las dos tareas de más peso del proyecto para evitar que este no se alargue en exceso. Dichos hitos, se han definido para las validaciones de las dos fórmulas ingenieriles objetivo.

Para evaluar el progreso del proyecto, se ha establecido una serie de reuniones periódicas con el director del mismo. Estas reuniones, se darán todos los lunes y la duración de las mismas será de dos horas.

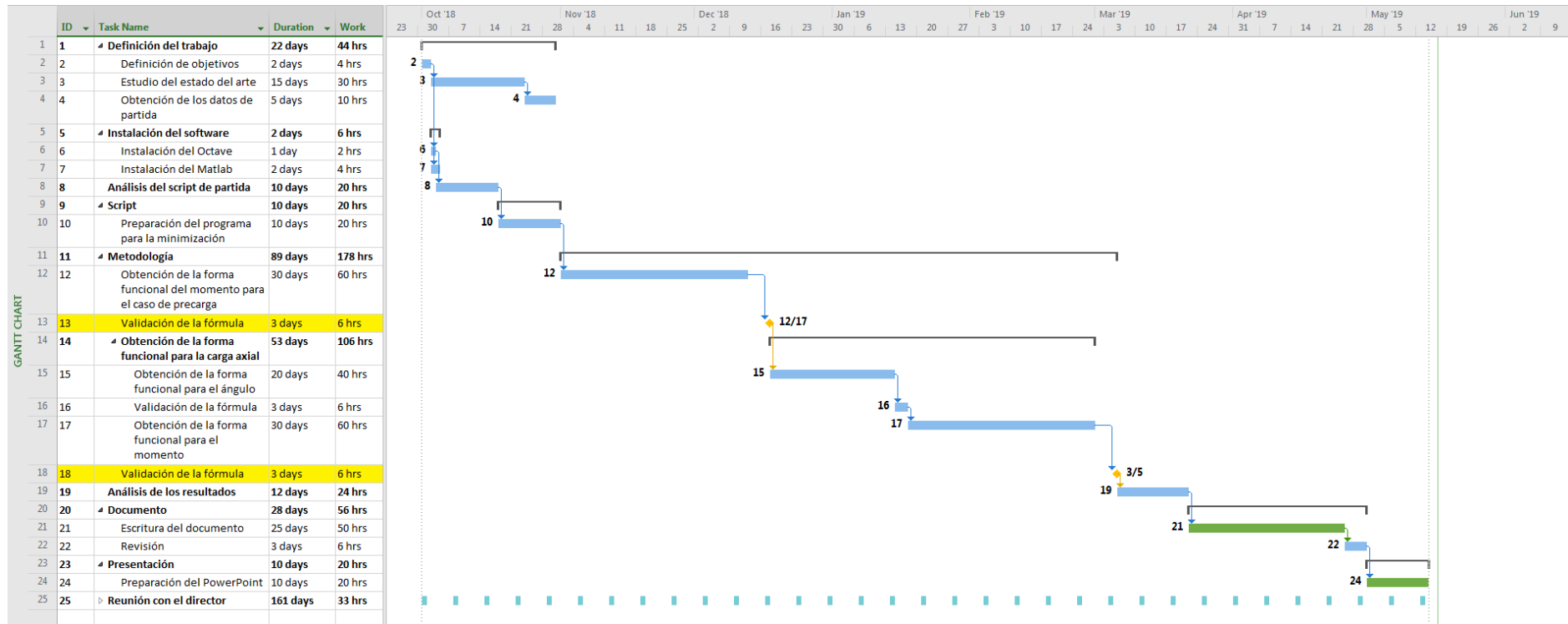


Ilustración 29: Diagrama de Gantt.

11. PRESUPUESTO

El presupuesto cuenta con tres apartados principales: horas internas, amortizaciones y gastos. En lo que respecta a las horas internas, se dividirán las horas trabajadas por el ingeniero junior, de las horas trabajadas por el ingeniero sénior o director del proyecto. Las horas del ingeniero junior, serán aquellas horas medidas por el autor en el proyecto, y las horas del ingeniero sénior, aquellas horas medidas por el director del proyecto en las reuniones periódicas.

Tabla 24: Presupuesto

Concepto	Unidad	Cantidad	Coste unitario	Coste
Horas internas				
Ingeniero superior	[h]	33	30,00 €	990,00 €
Ingeniero técnico	[h]	401	20,00 €	8.020,00 €
Amortizaciones				
Ordenador	[h]	401	0,30 €	120,30 €
Office 365	[h]	170	0,02 €	3,40 €
Octave	[h]	210	- €	- €
Matlab	[h]	10	0,25 €	2,50 €
Gastos				
Material de oficina			10,00 €	10,00 €
Electricidad	Kwh	120,3	15,00 €	1.804,50 €
			Total:	10.950,70 €

Tal y como se puede ver en la tabla, el coste de las horas internas constituye el 82 % del coste total del proyecto.

En lo que respecta a las amortizaciones de los programas, al haber empleado un software libre para realizar las aproximaciones funcionales (la parte central del proyecto), el coste correspondiente es muy reducido. De este modo, las amortizaciones constituyen el 1 % del coste total.

12. CONCLUSIONES

Tras el estudio realizado en este proyecto, se pueden extraer las tres siguientes conclusiones principales:

- El par de fricción varía significativamente con los parámetros característicos del rodamiento cuando este está sujeto tanto a la precarga de las bolas, como a carga axial.
- El ángulo de contacto varía significativamente con la carga axial, de tal forma que es necesario obtener previamente una fórmula ingenieril para la misma.
- Se han conseguido satisfacer exitosamente los objetivos planteados para este proyecto, obteniendo una serie de fórmulas ingenieriles para los casos de precarga y carga axial.

A continuación, se procederá a analizar en mayor profundidad cada uno de los puntos mencionados anteriormente.

El primero de ellos indica que cuando el rodamiento está sujeto tanto a la precarga de las bolas como a carga axial, existe una serie de parámetros que pueden hacer variar significativamente los valores del par de fricción. Estos parámetros son: la conformidad, el ángulo de contacto inicial, el diámetro del rodamiento y el diámetro de las bolas.

Para el caso de la precarga, si se observan los resultados representados gráficamente en el apartado ANEXO II o las formas funcionales planteadas, se aprecia que el par de fricción aumenta exponencialmente con el ángulo de contacto inicial. Algo similar sucede con la conformidad del contacto, que cuanto mayor es el mismo, el par crece potencialmente.

Para el caso de la carga axial, existe una diferencia significativa. A medida que aumenta el ángulo de contacto inicial, disminuye el par de fricción. Esto, puede resultar incoherente si se observan los resultados mostrados en el apartado ANEXO V, donde se puede ver que las curvas representadas tienen una tendencia creciente. Para comprender esto anterior, recuérdese que los valores de la carga axial se introducen como porcentaje de la capacidad axial, la cual aumenta con el ángulo de contacto. Así pues, para un mismo caso de conformidad y porcentaje de la capacidad, el valor del par es superior cuanto mayor es el ángulo de contacto. Sin embargo, si se introdujese la misma carga axial, el resultado sería inferior cuanto mayor es el ángulo. Esto se debe a que cuanto mayor es el ángulo inicial de contacto, menor es la fuerza en el contacto para una misma carga axial. El efecto de la conformidad, es el mismo que en el caso anterior.

El efecto del diámetro nominal del rodamiento, es lineal en ambos casos. El diámetro de la bola, solo afecta bajo carga axial.

Este primer punto, puede resultar importante a la hora de realizar la selección de un rodamiento para una aplicación determinada. De tal forma que para igualdad de condiciones, puede resultar más útil seleccionar un rodamiento que de un menor par, lo cual llevaría a tener un menor requerimiento potencia útil para realizar el giro entre los dos ejes.

Tal y como se ha mencionado en el segundo punto, debido al considerable aumento del ángulo de contacto cuando el rodamiento está sujeto a carga axial, es necesario realizar una aproximación previa del ángulo de contacto antes de aproximar el par.

Finalmente, cabe destacar que se ha conseguido satisfacer los objetivos planteados, obteniendo así una serie de fórmulas ingenieriles que permitan obtener el valor del par de fricción para los dos casos de interés. Estas fórmulas, suponen una alternativa rápida, sencilla de usar y eficaz para obtener el valor del par, sin tener que recurrir a construir complejos modelos de elementos finitos o modelos analíticos como el BA-Tool. Lo anterior, conlleva a una considerable reducción de coste, tiempo y esfuerzo; así como la posibilidad de hacer más cálculos en el mismo tiempo, lo que permite procesos de optimización más eficientes. Mencionar también que permite realizar cálculos (individuales) aproximados rápidos, para estimaciones o prediseños.

En lo que respecta al trabajo futuro que queda por realizar, este proyecto abre un camino a futuras aproximaciones funcionales que contemplen los casos de carga que no se han estudiado en este. Dichos casos de carga, serían el caso de carga radial y el del momento de vuelco, así como las posibles combinaciones que puedan nacer de las tres cargas correspondientes y la precarga. Es importante destacar que, para estos casos de carga que restan por calcular, será necesario obtener previamente la distribución de carga en las bolas. A diferencia del caso de precarga o carga axial, en los cuales la distribución de carga es uniforme en las bolas, para los casos que restan será necesario calcularlo.

Por otra parte, una vez de obtener las aproximaciones para todos los casos de carga que restan, quedaría también considerar la flexibilidad de los anillos. Para este proyecto, se ha considerado que los anillos son totalmente rígidos, con lo que se han obtenido los resultados del par mediante el BA-Tool. Recuérdese que esto no debería afectar de manera importante, de manera que lo que se haría en próximos pasos sería realizar un número limitado de cálculos con anillos flexibles para comprobar que efectivamente la desviación respecto del caso con anillos rígidos es despreciable (y de no ser así, se podría cuantificar el desvío y tal vez considerar un coeficiente corrector).

REFERENCIAS

[1]: <https://www.skf.com>

[2]: Wind Europe. Financing and investment trends. April 2019.

[3]: Wind Europe. Wind energy in Europe in 2018. February 2019.

[4]: ISO 76:2006. Rolling bearings - Static load ratings.

[5]. Daidié. 3D simplified finite elements analysis of load and contact angle in a slewing ball bearing, 2008.

[6]. M. Olave, X. Sagartzazu, J. Damian, A. Serna. Design of four contact-point slewing bearing with a new load distribution procedure to account for structural stiffness. Journal of Mechanical Design, February 2010.

[7]. Heras, J. Aguirrebeitia, M. Abasolo, Friction torque in four contact point slewing bearings: Effect of manufacturing errors and ring stiffness, Mechanism and Machine Theory. 112 (2017) 145–154.

[8]: E. Goikolea. Eraztunen malgutasunak eta pisten akatsek errodamenduetako bolen prekarigen banaketan izango duten eragina. 2016-2017 ikasturtea.

[9]: I. Heras. Four-point contact slewing bearings for wind turbines: advances in structural modelling and friction torque calculation. February 2018.

[10]. Heras, J. Aguirrebeitia, M. Abasolo. Par de fricción en rodamientos de vuelco de cuatro puntos de contacto: estudio de las limitaciones de las formulaciones actuales mediante elementos finitos. XXI congreso nacional de ingeniería mecánica, Elche, Noviembre 2016.

[11]. X. Benito. Propuesta de fórmula analítica de cálculo del par de fricción en rodamientos de vuelco precargados para energía eólica. Curso 2015-2016.

[12]: L. Houpert, An Engineering Approach to Hertzian Contact Elasticity — Part I, Trans. ASME. 123 (2001). doi:10.1115/1.1308043.

[13]: J.J. Kalker, A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact, Veh. Syst. Dyn. 11 (1982) 1–13. doi:10.1080/00423118208968684.

[14]: T.A. Harris, M.N. Kotzalas, Essential Concepts of Bearing Technology, 2006.

ANEXOS

ANEXO I: Script

Programa principal

```

1
2 clear all;
3 clc
4
5 format short g;
6
7 tic()
8
9 %%
10 %-----
11 % INPUTS %
12 %-----
13
14 open('BAToolResults.mat');
15
16 % Número de bolas
17 numB = @(Dpw,Dw) fix(180./asind(Dw./Dpw));
18
19 % Carga máxima por bola
20 Q_MAX = @(Pmax,Dw,s) (Pmax.*Dw.^(2/3)./(1805*(1-s).^0.2117)).^3;
21     % donde Pmax [MPa], Dw [mm] y s [-]
22
23 % Capacidad axial
24 F_MAX = @(Pmax,Dw,s,ao,Dpw) ...
25     (Q_MAX(Pmax,Dw,s).*sind(ao).*numB(Dpw,Dw));
26     % donde ao [DEG]
27
28 % Función del ángulo de contacto final. Input en GRADOS Output en
29 RADIANES.
30 alpha = @(ao,s,fa,Dpw,Dw) (ao + 1.6464e-2*exp(-1.9941*ao) ...
31     .* (fa./numB(Dpw,Dw)).^0.46767 ...
32     ./ (1-s).^0.57096/Dw^0.93533);
33     % en RADIANES todo
34
35 % Función de aproximación
36 func = @(ao,s,fa,Dpw,Dw,coef)
37     (fa./ (numB(Dpw,Dw)*sin(alpha(ao,s,fa,Dpw,Dw))))).^coef(1) ...
38     / (1-s)^coef(2) ...
39     *coef(3)*1e-8 ...
40     *(Dpw)/(Dw)^coef(4)*numB(Dpw,Dw);
41

```



```
42 % Número de coeficientes
43
44 CoefN = 4;
45
46 % RESTRICCIÓN del error absoluto maximo
47
48 Err_rel_max_rest = [];
49
50 % Algoritmo a emplear (1 = sqp | 2 = powell | 3 = de_min | 4 = ga)
51
52 algorithm = 1;
53
54 % Desea mostrar informacion sobre el algoritmo al finalizar?
55     % (0 = no | 1 = si)
56
57 info_alg = 1;
58
59 % Desea mostrar los errores cometidos al finalizar?
60     % (0 = no | 1 = si)
61
62 info_err = 1;
63
64 % Desea plotear resultados del ajuste?
65     % (0 = no | 1 = si)
66
67 plots = 1;
68
69 % Control del algoritmo de minimización
70
71 % Si se ha elegido sqp, introducir: Tol, p0, MaxIter, LB, UB
72
73 Tol = [1e-5];
74
75 coef_ini = [ 1.67 0.86 1 1.6 ];
76
77 MaxIter = [150];
78
79 LB = [ -10 -10 -150 -10 ];
80 UB = [ +10 +10 +150 +10 ];
81
82 %-----
83 % DOE data %
84 %-----
85
86 % Ángulo de contacto
87 ao_min = 30;
88 ao_max = 60;
89 % Conformidad
90 s_min = 0.91;
91 s_max = 0.98;
92
```

```

93 % Cargar resultados del DOE
94 Ang_ini_vec;
95 s_vec;
96 F_axial_vec_ini;
97 Dw_vec;
98 Dpw_vec;
99 Delta_p_vec;
100 Torque_vec(isnan(Torque_vec)) = ...
101     zeros(size(find(isnan(Torque_vec))));
102
103 % Matriz de experimentos MatOfExp: (DP x 4) -> ((DP)x(ao,s,dp,My))
104 MatOfExp = zeros(Levels*Levels*Levels*14,6);
105 i = 1;
106 for ao = 1:1:Levels
107     Ang_ini = Ang_ini_vec(ao)*pi/180; % [rad]
108     for so = 1:1:Levels
109         s = s_vec(so);
110         for dp = 1:1:1
111             Delta_p = Delta_p_vec(dp);
112             for diam = 1:1:14
113                 Dw = Dw_vec(diam);
114                 Dpw = Dpw_vec(diam);
115                 for fa = 1:1:Levels
116                     F_axial = ...
117                     F_axial_vec_ini(fa)*F_MAX(4200,Dw,s,Ang_ini*180/pi,Dpw);
118                     % ANG en DEG
119
120                     MatOfExp(i,1) = Ang_ini_vec(ao); %DEG
121                     MatOfExp(i,2) = s_vec(so);
122                     MatOfExp(i,3) = Dw_vec(diam);
123                     MatOfExp(i,4) = Dpw_vec(diam);
124                     MatOfExp(i,5) = F_axial;
125                     MatOfExp(i,6) = Torque_vec(i) ...
126                                 *numB(Dpw_vec(diam),Dw_vec(diam));
127
128                     i = i + 1;
129                 end
130             end
131         end
132     end
133 end
134
135 %-----
136 % Functional approach %
137 %-----
138
139 %% SQP %%
140 if algorithm == 1
141
142     disp('Algoritmo utilizado: SQP ');
143

```

```

144 % Función a minimizar (error cuadrado relativo)
145 f_error = @(coef)error_cuadratico_relativo ...
146     (MatOfExp,func,coef,Levels);
147
148 % Error absoluto máximo que se quiere restringir
149 if length(Err_rel_max_rest)==1
150     H = @(coef)h_error_restr ...
151         (Err_rel_max_rest,MatOfExp,func,coef,Levels);
152 else
153     H = [];
154 end
155
156 % Minimización
157 % El error máximo restringido es una condición de contorno para
158 % la función error (función a minimizar)
159 [coef_fin, err_min, info, iter, nf] = ...
160     sqp (coef_ini, f_error,[],H,LB,UB, MaxIter, Tol);
161
162 % Resultado
163 disp('Vector de coeficientes obtenido:');
164 disp(num2str(coef_fin));
165
166 % Información
167 if info_alg == 1
168     disp('');
169     disp('Informacion sobre el algoritmo:');
170     info
171     iter
172     nf
173 end
174
175 end
176
177 %-----
178 % Error display %
179 %-----
180
181 if info_err == 1
182
183     % Error cuadrático relativo
184     disp('Error cuadrático relativo (minimizado): ');
185     ErrCuadRel = error_cuadratico_relativo ...
186         (MatOfExp,func,coef_fin,Levels);
187     disp(ErrCuadRel);
188
189     % Error absoluto promedio
190     disp('Error absoluto promedio: ');
191     ErrAbsProm = error_absoluto_promedio ...
192         (MatOfExp,func,coef_fin,Levels);
193     disp(ErrAbsProm);
194

```

```

195 % Error absoluto máximo
196 disp('Error absoluto máximo: ');
197 ErrAbsMax = error_absoluto_max ...
198     (MatOfExp,func,coef_fin,Levels);
199 disp(ErrAbsMax);
200
201 % Error relativo promedio
202 disp('Error relativo promedio (%): ');
203 ErrRelProm = error_relativo_promedio ...
204     (MatOfExp,func,coef_fin,Levels);
205 disp(ErrRelProm);
206
207 % Error relativo máximo
208 disp('Error relativo máximo (%): ');
209 ErrRelMax = error_relativo_max ...
210     (MatOfExp,func,coef_fin,Levels);
211 disp(ErrRelMax);
212
213 end
214
215 if plots == 1
216     mostrar_calidad_ajuste ...
217         (MatOfExp,func,coef_fin,Levels,Dw_vec,Dpw_vec);
218 end
219
220 Elapsed_Time = toc();
221 save('AproxResults.mat')
222
223

```

Subprograma error absoluto máximo

```

1 %-----
2 %-----
3 % Functions definition
4 %-----
5 %-----
6
7 %% Error absoluto máximo
8 function [Err] = error_absoluto_max (MatOfExp,func,coef,Levels);
9
10 % Valor inicial
11 i = 1;
12 Err = 0;
13 % Cálculo del error
14 for ao = 1:Levels
15     for so = 1:Levels
16         for diam = 1:14
17             for fa =1:Levels
18                 Ang_ini = MatOfExp(i,1)*pi/180; % RAD
19                 s_ini   = MatOfExp(i,2);

```

```

20         Dw      = MatOfExp(i,3);
21         Dpw     = MatOfExp(i,4);
22         F_axial = MatOfExp(i,5);
23         % Valor obtenido
24         My_func = func(Ang_ini,s_ini,F_axial,Dpw,Dw,coef);
25         % Valor real
26         My_exp = MatOfExp(i,6);
27         % Error absoluto
28         error = abs(My_func - My_exp);
29         % Selección del error más alto
30         if (error > Err)&&(My_exp > 200)
31             % Si el error es mayor que el guardado anteriormente,
32             % se sustituye.
33             Err = error;
34         end
35
36         i = i + 1;
37     end
38 end
39 end
40 end
41 Err;
42
43 End
44
45

```

Subprograma error absoluto promedio

```

1  %-----
2  %-----
3  % Functions definition
4  %-----
5  %-----
6
7  %% Error absoluto promedio
8  function [Err] = error_absoluto_promedio ...
9      (MatOfExp,func,coef,Levels);
10
11  % Valor inicial
12  i = 1;
13  a = 1;
14  Err = 0;
15  % Cálculo del error
16  for ao = 1:Levels
17      for so = 1:Levels
18          for diam = 1:14
19              for fa =1:Levels
20                  Ang_ini = MatOfExp(i,1)*pi/180; % RAD
21                  s_ini   = MatOfExp(i,2);
22                  Dw      = MatOfExp(i,3);

```

```

23         Dpw      = MatOfExp(i,4);
24         F_axial = MatOfExp(i,5);
25         % Valor obtenido
26         My_func = func(Ang_ini,s_ini,F_axial,Dpw,Dw,coef);
27         % Valor real
28         My_exp = MatOfExp(i,6);
29         % Error absoluto
30         error = abs(My_func - My_exp);
31         % Sumatorio del error
32         if (My_exp > 200)
33             Err = Err + error;
34             a = a + 1;
35         elseif (My_exp == 0)
36             a = a;
37         end
38
39         i = i + 1;
40     end
41 end
42 end
43 end
44 Err = Err/(a-1);
45 Err;
46
47 end
48
49

```

Subprograma error cuadrático relativo

```

1  %-----
2  %-----
3  % Functions definition
4  %-----
5  %-----
6
7  %% Error cuadrático relativo (el que se minimiza)
8  function [Err] = error_cuadratico_relativo ...
9      (MatOfExp,func,coef,Levels);
10
11     % Valor inicial
12     i = 1;
13     Err = 0;
14     % Cálculo del error
15     for ao = 1:Levels
16         for so = 1:Levels
17             for diam = 1:14
18                 for fa =1:Levels
19                     Ang_ini = MatOfExp(i,1)*pi/180; % RAD
20                     s_ini   = MatOfExp(i,2);
21                     Dw      = MatOfExp(i,3);

```

```

22         Dpw      = MatOfExp(i,4);
23         F_axial  = MatOfExp(i,5);
24         % Valor obtenido
25         My_func  = func(Ang_ini,s_ini,F_axial,Dpw,Dw,coef);
26         % Valor real
27         My_exp   = MatOfExp(i,6);
28         % Sumatorio del error al cuadrado relativo
29         if (My_exp > 200)                                %%
30             Err = Err + ((My_func - My_exp)^2)/My_exp^2 ;
31         end
32
33         i = i + 1;
34     end
35 end
36 end
37 end
38 Err;
39
40 end
41
42

```

Subprograma error relativo máximo

```

1  %-----
2  %-----
3  % Functions definition
4  %-----
5  %-----
6
7  %% Error relativo máximo
8  function [Err] = error_relativo_max (MatOfExp,func,coef,Levels);
9
10     % Valor inicial
11     i = 1;
12     Err = 0;
13     % Cálculo del error
14     for ao = 1:Levels
15         for so = 1:Levels
16             for diam = 1:14
17                 for fa = 1:Levels
18                     Ang_ini = MatOfExp(i,1)*pi/180; % RAD
19                     s_ini   = MatOfExp(i,2);
20                     Dw      = MatOfExp(i,3);
21                     Dpw     = MatOfExp(i,4);
22                     F_axial = MatOfExp(i,5);
23                     % Valor obtenido
24                     My_func = func(Ang_ini,s_ini,F_axial,Dpw,Dw,coef);
25                     % Valor real
26                     My_exp  = MatOfExp(i,6);
27                     % Error relativo

```

```

28         if (My_exp > 200)
29             error = abs((My_func - My_exp)/My_exp);
30         else
31             error = 0;
32         end
33         % Selección del error más alto
34         if error > Err
35             % Si el error es mayor que el guardado anteriormente,
36             % se sustituye.
37             Err = error;
38         end
39         i = i + 1;
40     end
41 end
42 end
43 end
44 Err = Err*100;
45 Err;
46
47 end
48
49

```

Subprograma error relativo promedio

```

1  %-----
2  %-----
3  % Functions definition
4  %-----
5  %-----
6
7  %% Error relativo promedio
8  function [Err] = error_relativo_promedio ...
9      (MatOfExp, func, coef, Levels);
10
11  % Valor inicial
12  i = 1;
13  a = 1;
14  Err = 0;
15  % Cálculo del error
16  for ao = 1:Levels
17      for so = 1:Levels
18          for diam = 1:14
19              for fa = 1:Levels
20                  Ang_ini = MatOfExp(i,1)*pi/180; % RAD
21                  s_ini   = MatOfExp(i,2);
22                  Dw      = MatOfExp(i,3);
23                  Dpw     = MatOfExp(i,4);
24                  F_axial = MatOfExp(i,5);
25                  % Valor obtenido
26                  My_func = func(Ang_ini,s_ini,F_axial,Dpw,Dw,coef);

```



```

27         % Valor real
28         My_exp = MatOfExp(i,6);
29         % Error relativo
30         if (My_exp > 200)
31             error = abs((My_func - My_exp)/My_exp);
32             % Sumatorio del error
33             Err = Err + error;
34             a = a + 1;
35         elseif (My_exp == 0)
36             a = a;
37         end
38
39         i = i + 1;
40     end
41 end
42 end
43 end
44 Err = Err*100/(a-1);
45 Err;
46
47 end
48
49

```

Subprograma error relativo restringido

```

1
2 %-----
3 %-----
4 % Functions definition
5 %-----
6 %-----
7
8 %% Error cuadrático restringido
9 function [h] = h_error_restr ...
10     (Err_rel_max_rest,MatOfExp,func,coef,Levels);
11
12 % El valor restringido es el del error absoluto máximo entre el
13 % valor real y el aproximado. Por ello,
14 % como se está minimizando el error relativo mínimo, hay que
15 % dividirlo por el valor real. Así pues,
16 % solo faltaría multiplicarlo por todos los puntos analizados
17 % para obtener el error total.
18 Err_max_rel = error_relativo_max(MatOfExp,func,coef,Levels);
19
20 h = +Err_rel_max_rest - Err_max_rel; % Si error mayor que el
21 % restringido, h<0
22 end
23
24

```

Subprograma mostrar calidad del ajuste

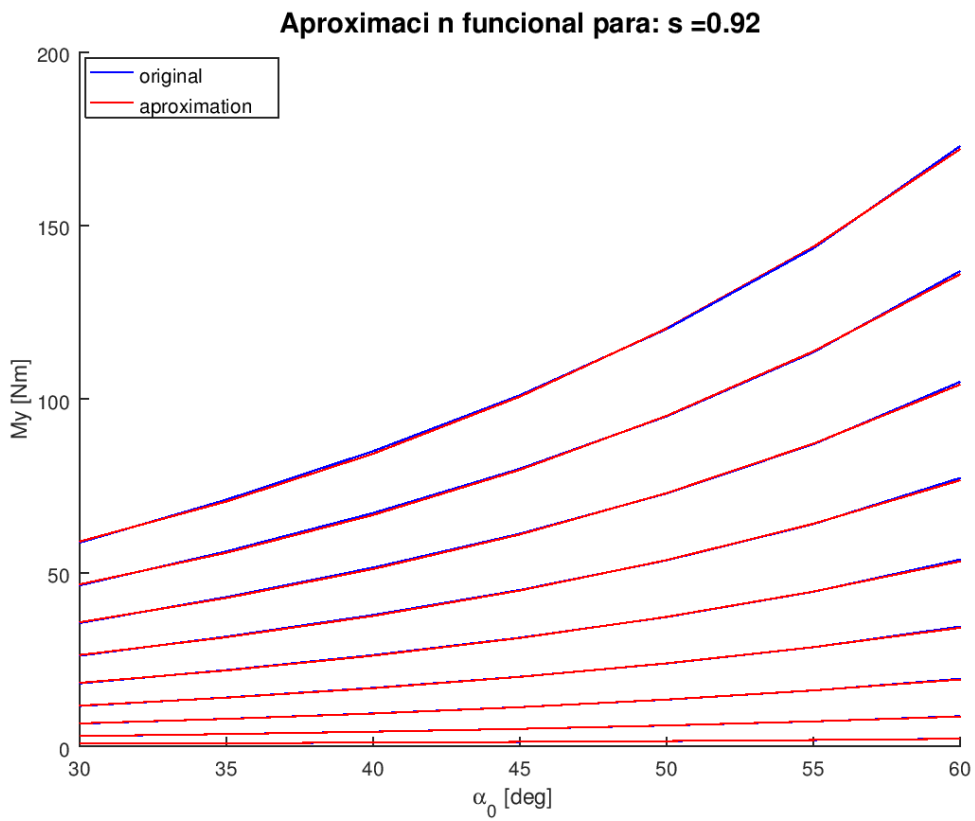
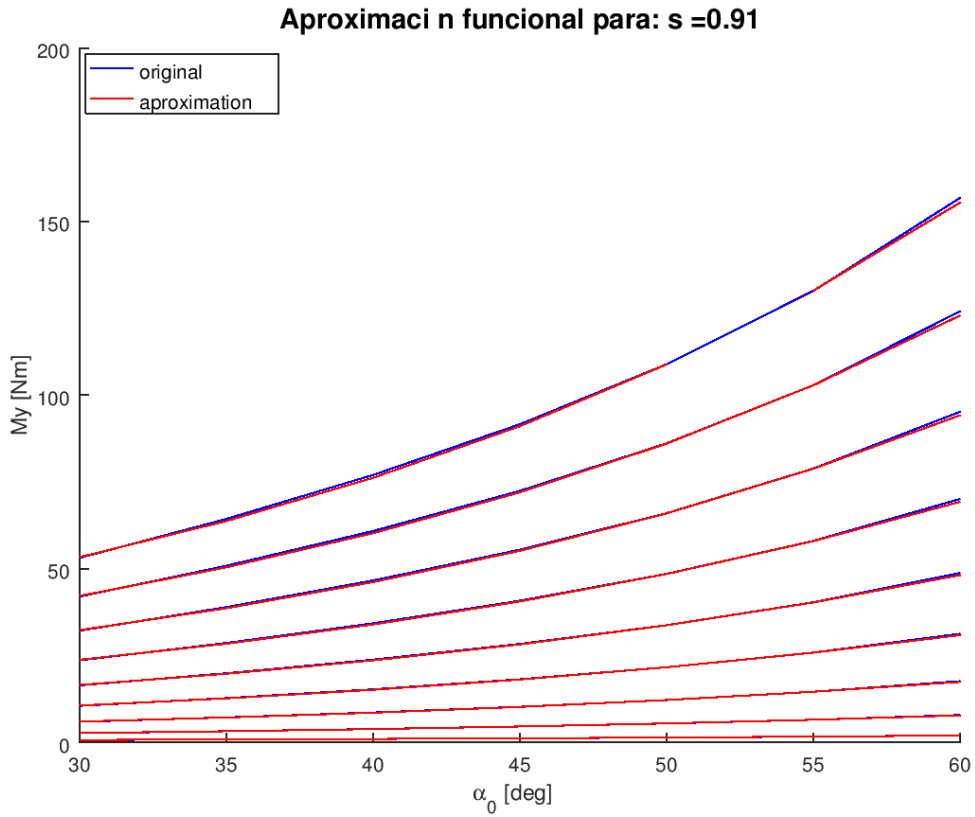
```

1
2 %-----
3 %-----
4 % Functions definition
5 %-----
6 %-----
7
8 %% Comparación de los resultados aproximados y los del BA-Tool
9 function mostrar_calidad_ajuste ...
10     (MatOfExp,func,coef_fin,Levels,dw_vec,dpw_vec);
11
12 % Número de bolas
13 numB = @(Dpw,Dw) fix(180./asind(Dw./Dpw));
14 % Carga máxima por bola
15 Q_MAX = @(Pmax,Dw,s) (Pmax.*Dw.^(2/3)./(1805*(1-s).^0.2117)).^3;
16 % Capacidad axial
17 F_MAX = @(Pmax,Dw,s,ao,Dpw) ...
18     (Q_MAX(Pmax,Dw,s).*sind(ao).*numB(Dpw,Dw));
19
20 ao_vec = [min(MatOfExp(:,1)):(max(MatOfExp(:,1))- ...
21     min(MatOfExp(:,1)))/(Levels-1):max(MatOfExp(:,1))];
22 s_vec = [min(MatOfExp(:,2)):(max(MatOfExp(:,2))- ...
23     min(MatOfExp(:,2)))/(Levels-1):max(MatOfExp(:,2))];
24 dw_vec;
25 dpw_vec;
26 F_axial_vec_ini = [0 0.25 0.5 0.75 1];
27
28 for diam = 1:14
29     % New figure
30     Screen = [0,25, 1200, 650]; % Half screen
31     figure('Name',strcat('Dw:',num2str(dw_vec(diam)),'_Dpw:' ...
32         ,num2str(dpw_vec(diam))),'Position',Screen);
33     for s = 1:Levels
34         for fa = 1:Levels
35             fa_vec = ...
36                 F_axial_vec_ini(fa) ...
37                 *F_MAX(4200,dw_vec(diam),s_vec(s),ao_vec,dpw_vec ...
38                     (diam));
39             hold on
40             % ANALY
41             % Valores que están dentro de la acotación
42             s_in = MatOfExp(:,2) == s_vec(s);
43             dw_in = MatOfExp(:,3) == dw_vec(diam);
44             dpw_in = MatOfExp(:,4) == dpw_vec(diam);
45             for i = 1:Levels
46                 fa_mat(:,i) = round(MatOfExp(:,5)*1000)/1000 ...
47                     == round(fa_vec(i)*1000)/1000;
48                 fa_in = sum(fa_mat)';
49             end
50             positions = s_in & dw_in & dpw_in & fa_in;
51             plot (ao_vec,MatOfExp(positions,6),'b');
52             hold on
53             % Aproximation

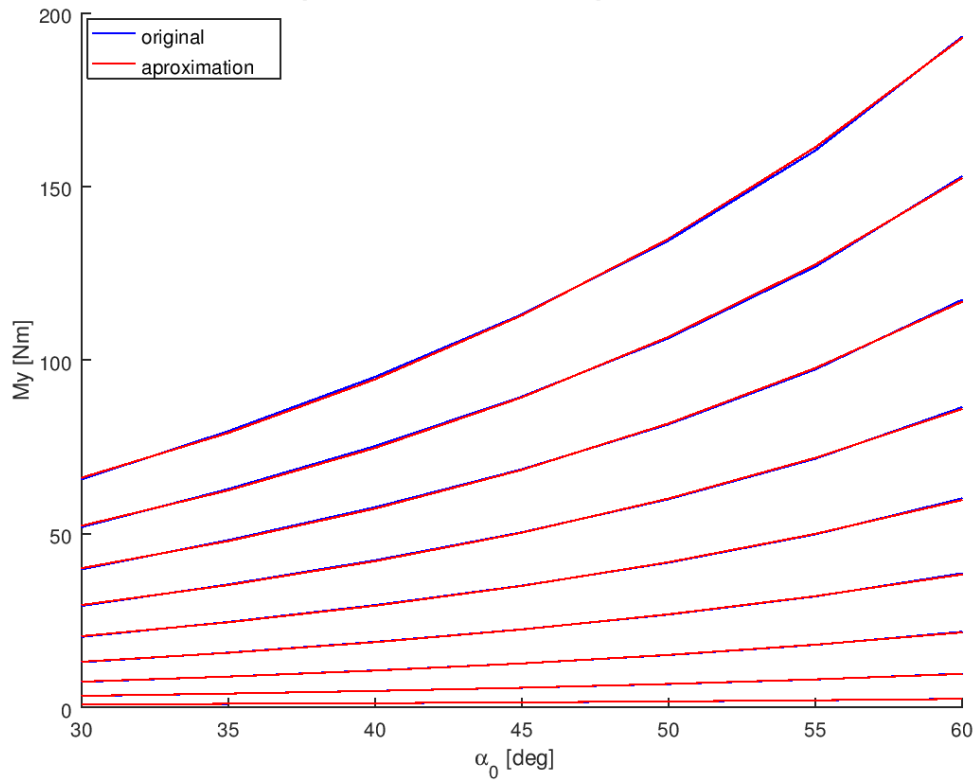
```

```
54         My_aprox = func(ao_vec*pi/180,s_vec(s) ...
55                       ,MatOfExp(positions,5)',dpw_vec(diam) ...
56                       ,dw_vec(diam),coef_fin);
57         plot(ao_vec,My_aprox,'r');
58         hold off
59     end
60 end
61 tit = strcat('Dw: ',num2str(dw_vec(diam)) ...
62            ,'[mm] & Dpw: ',num2str(dpw_vec(diam)),'[mm]');
63 title(tit, 'FontSize',14,'FontWeight','bold')
64 legend ('original','aproximation','location', 'northwest')
65 xlabel ('\alpha_0 [deg]')
66 ylabel ('My [Nm]')
67 axis([30 60 0 Inf])
68 end
69 end
```

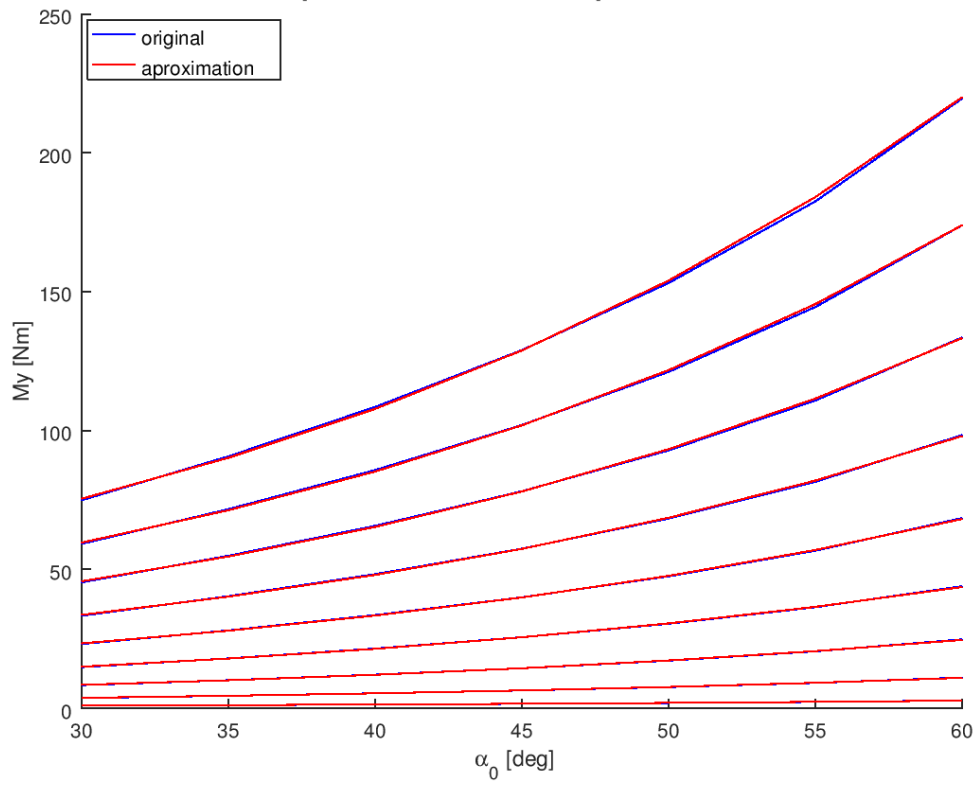
ANEXO II: Resultados para el caso de precarga de las bolas



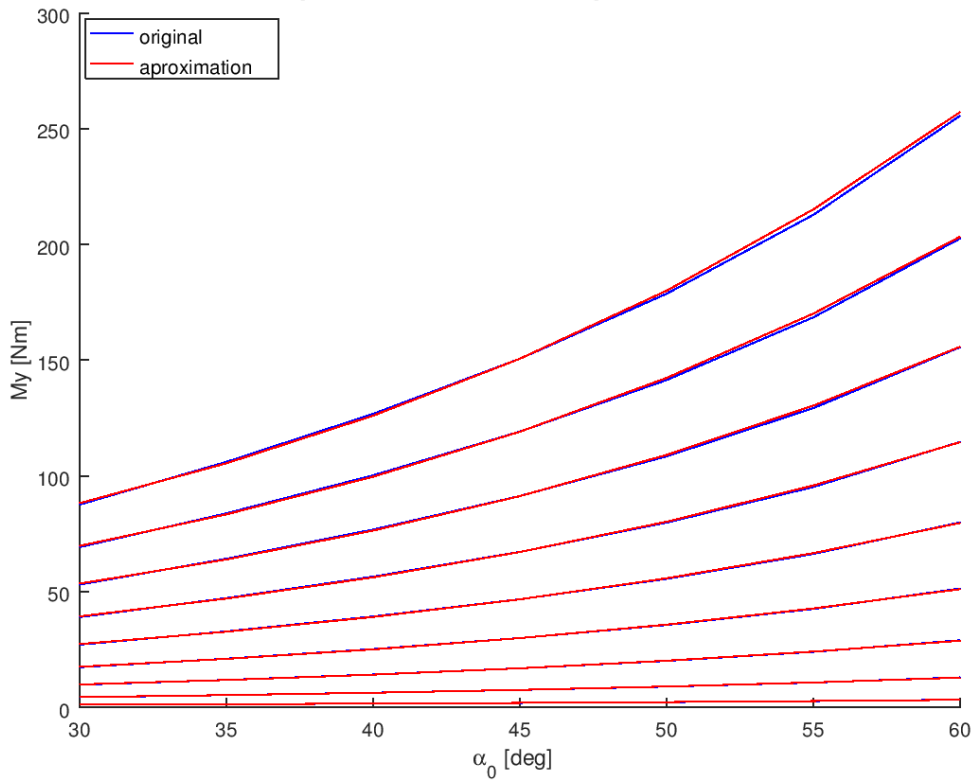
Aproximaci n funcional para: $s = 0.93$



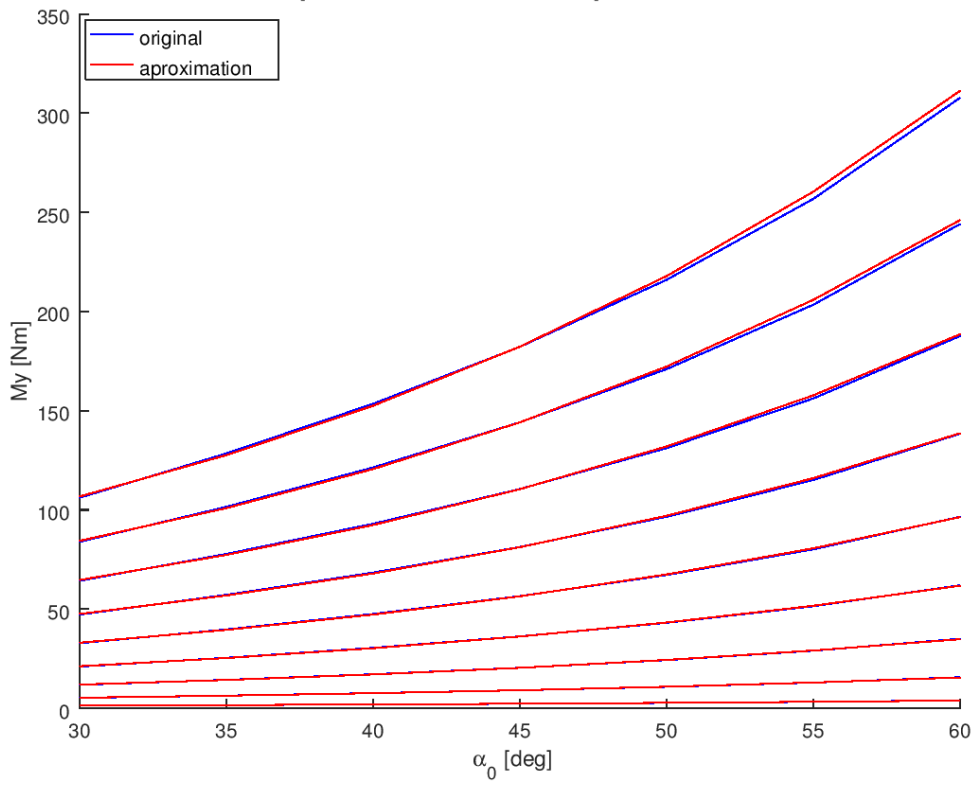
Aproximaci n funcional para: $s = 0.94$

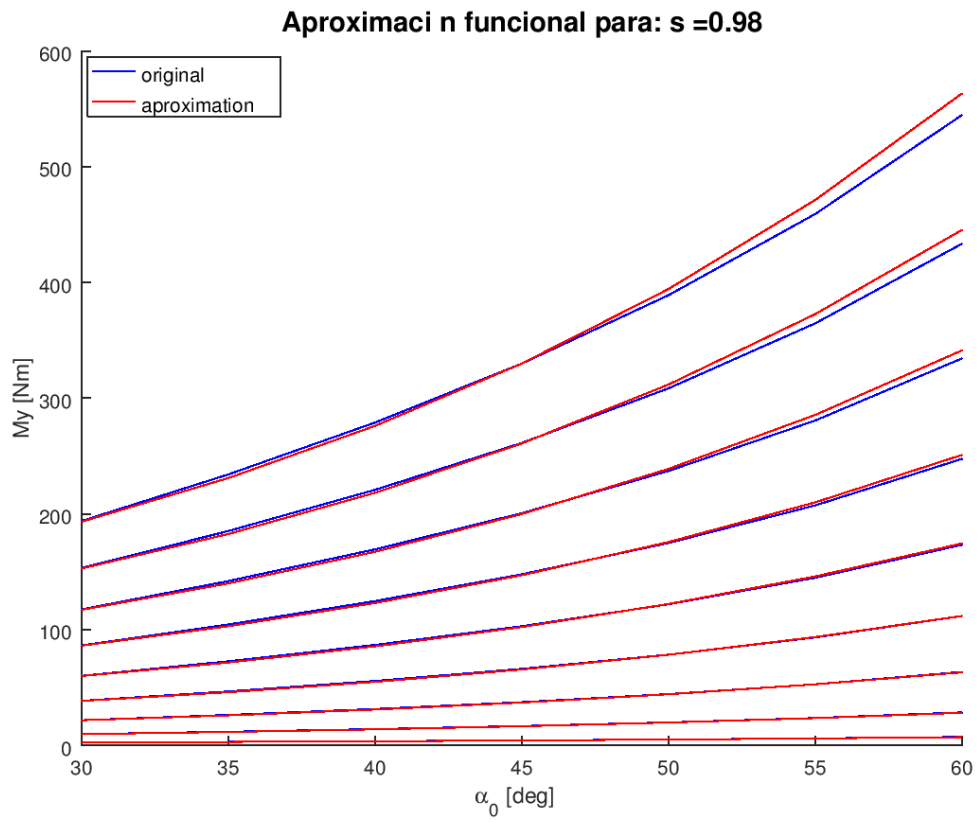
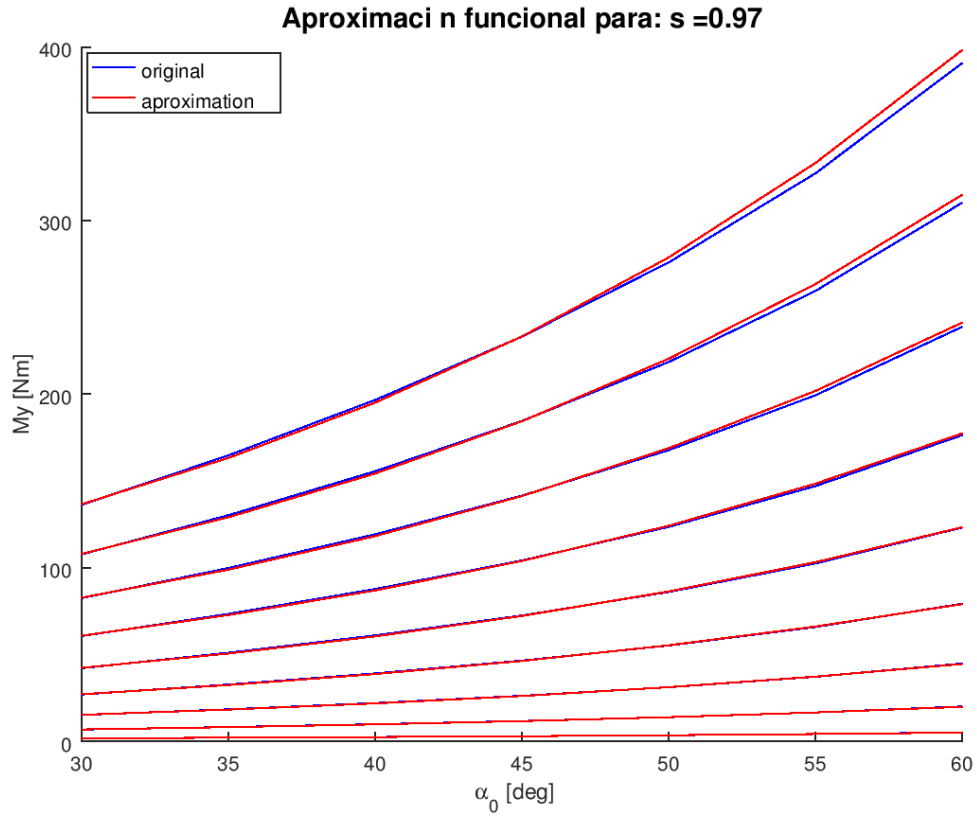


Aproximaci n funcional para: $s = 0.95$



Aproximaci n funcional para: $s = 0.96$





ANEXO III: Variación de los coeficientes con el Dw - ÁnguloCaso Dw = 15 mm y Dpw = 200 mm

$$\alpha_f = \alpha_0 + C1 \times \frac{e^{C2 \alpha_0}}{(1-s)^{C3}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{C4}$$

C1	C2	C3	C4	
10.7958 E-4	-2.0535	0.5759	0.4918	
Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.024	0.21 [deg]	2.28 [deg]	0.42 %	4.40 %

Caso Dw = 15 mm y Dpw = 750 mm

$$\alpha_f = \alpha_0 + C1 \times \frac{e^{C2 \alpha_0}}{(1-s)^{C3}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{C4}$$

C1	C2	C3	C4	
10.7958 E-4	-2.0535	0.5759	0.4918	
Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.024	0.21 [deg]	2.28 [deg]	0.42 %	4.40 %

Caso Dw = 30 mm y Dpw = 1000 mm

$$\alpha_f = \alpha_0 + C1 \times \frac{e^{C2 \alpha_0}}{(1-s)^{C3}} \times \left(\frac{F_a}{N}\right)^{C4}$$

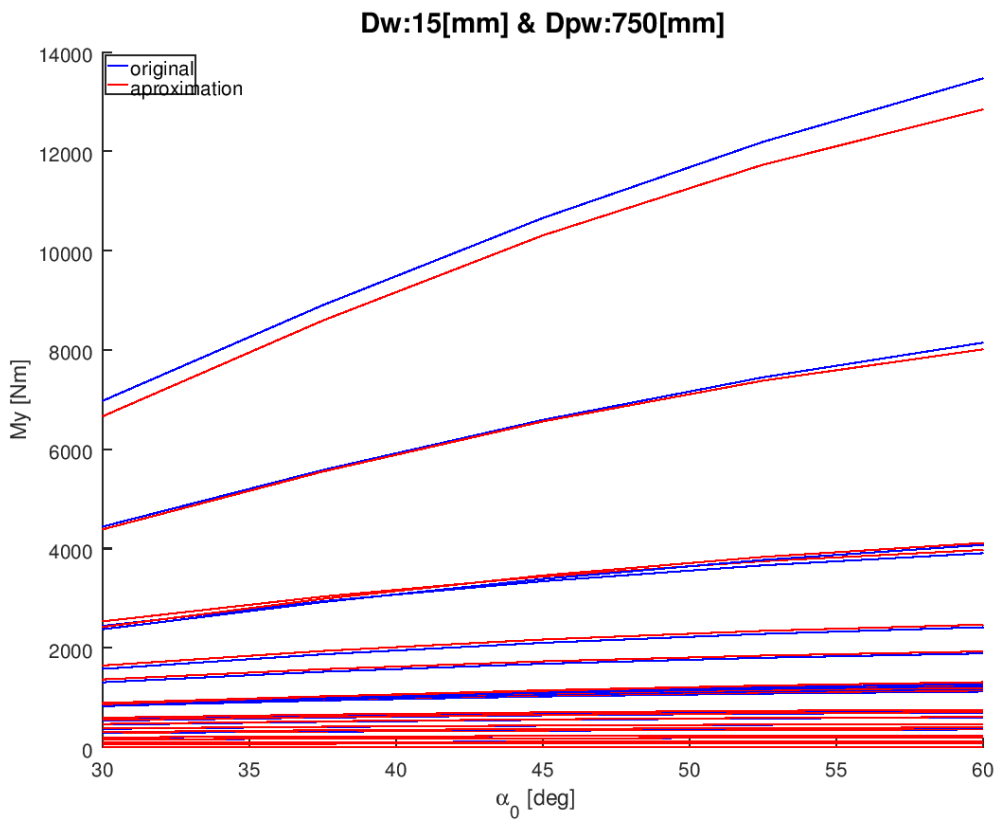
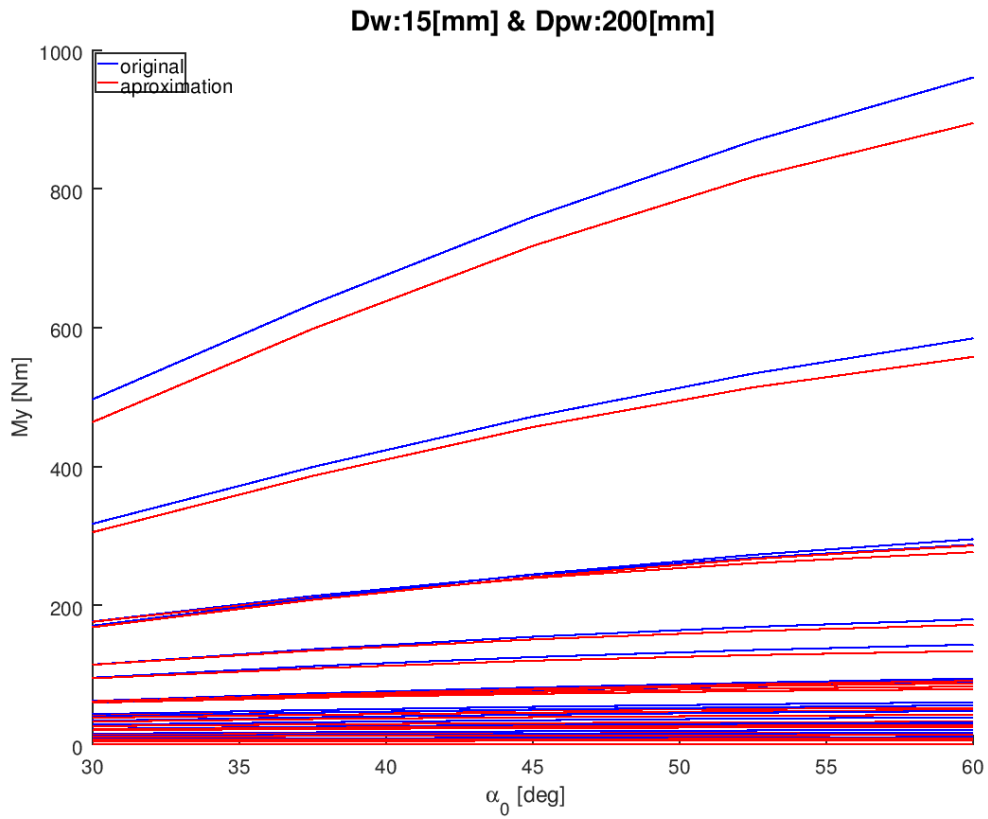
C1	C2	C3	C4	
5.5251 E-4	-2.0672	0.5726	0.4932	
Err Cuadr	Err Abs Prom	Err Abs Max	Err Rel Prom	Err Rel Max
0.013	0.18 [deg]	2.01 [deg]	0.36 %	3.94 %

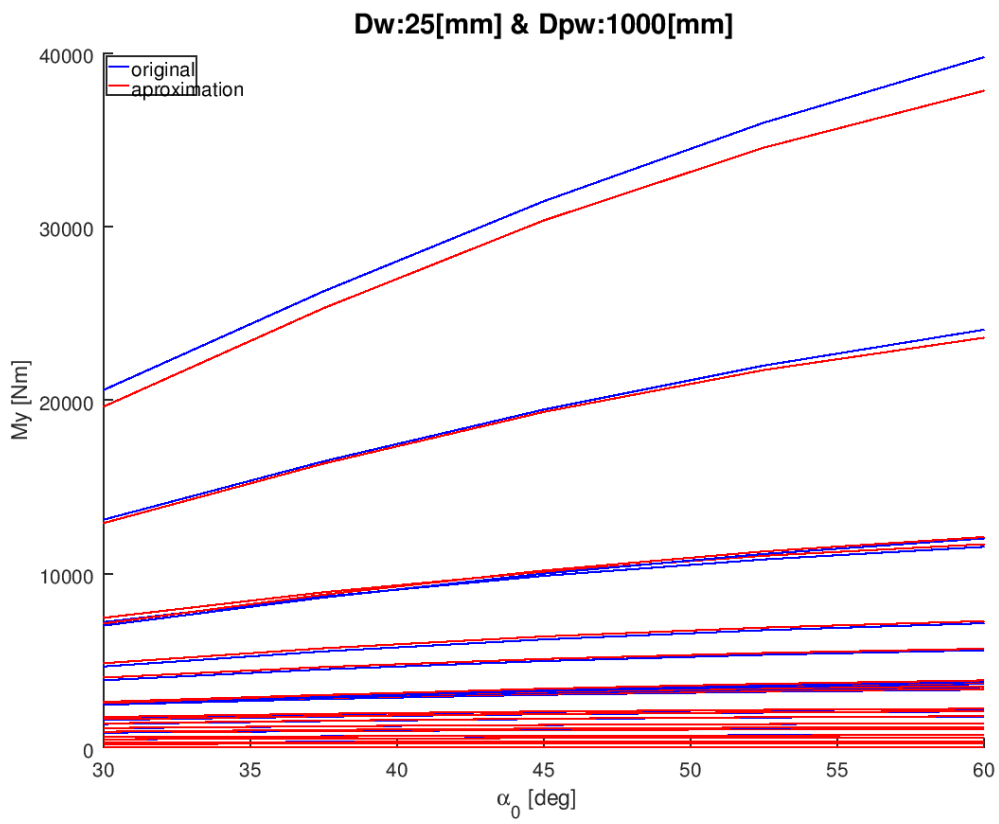
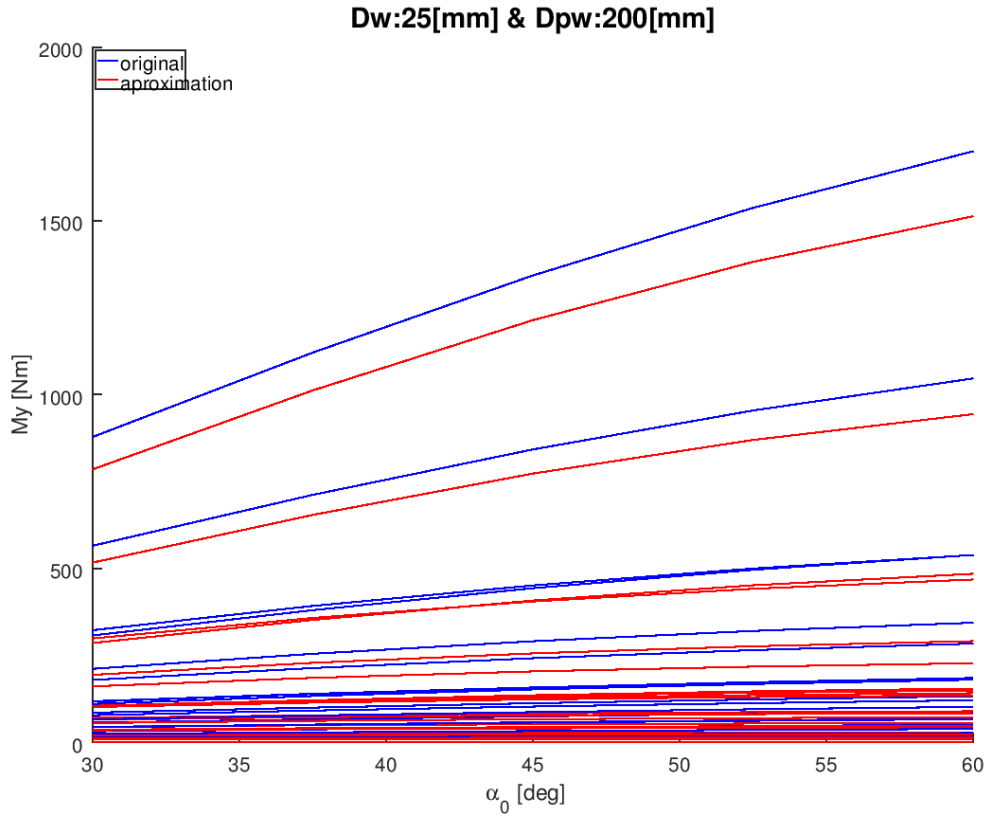
ANEXO IV: Variación de los coeficientes con el Dw - Par

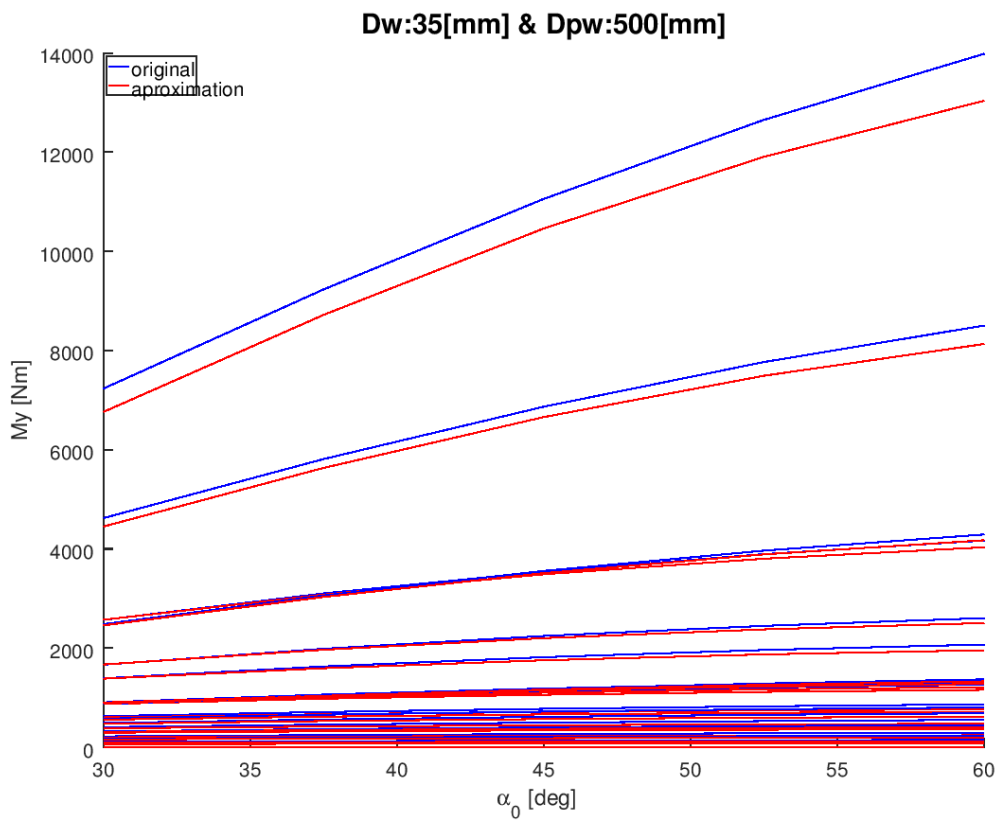
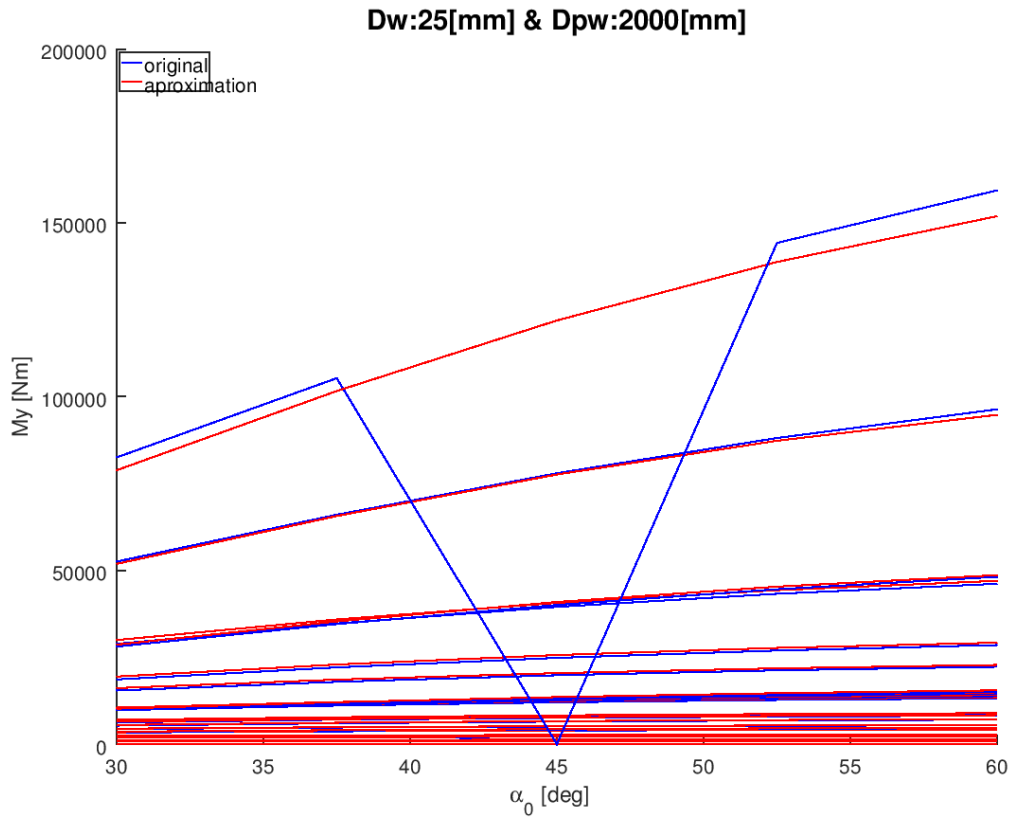
Dw	C1	C2	C3
15 mm	1,66353	0,853963	12,643
25 mm	1,6676	0,85088	6,3149
35 mm	1,6736	0,86475	3,4924
45 mm	1,6807	0,87283	2,2072
55 mm	1,683	0,87511	1,616

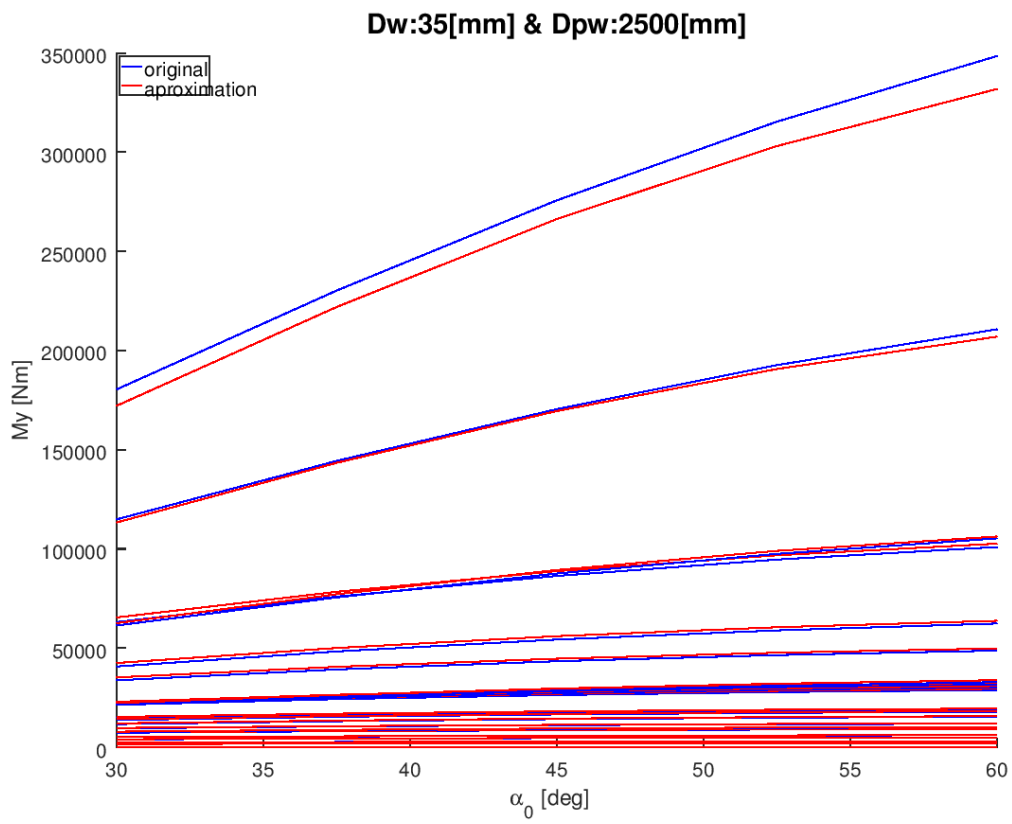
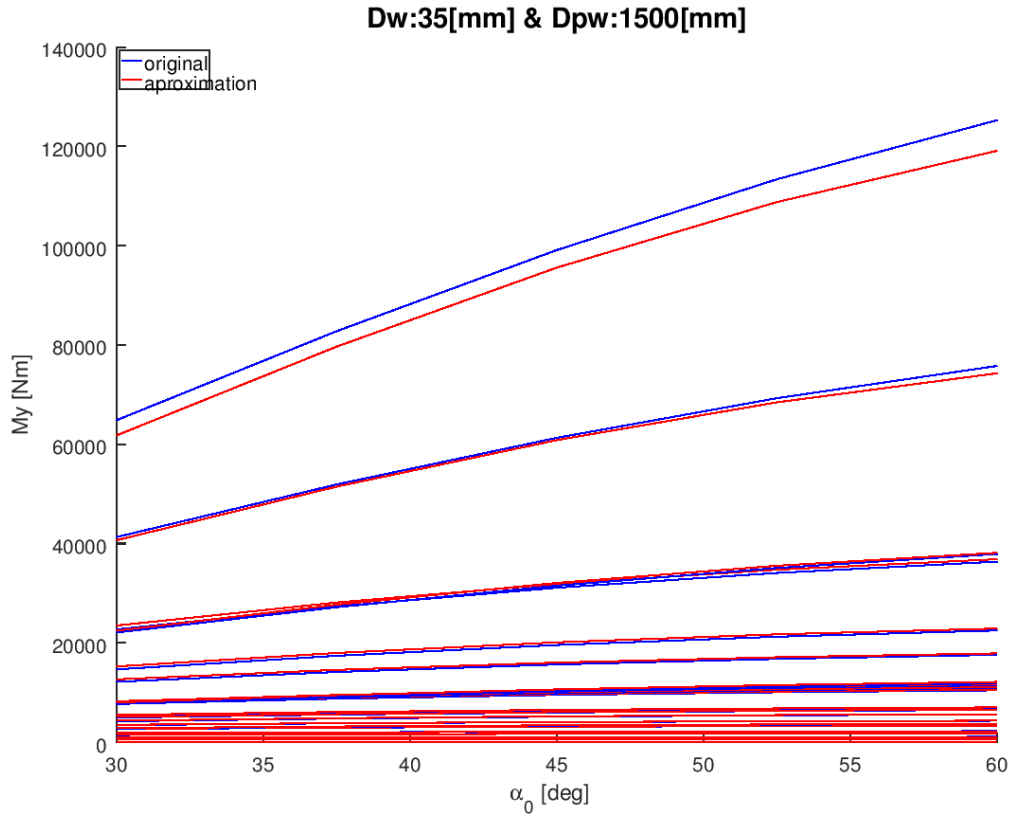
Err. Cuad. Rel.	Err. Abs. Prom.	Err. Abs. Max.	Err. Rel. Prom.	Err. Rel. Max
0,92898	0,25004 Nm	5,6046 Nm	5,604 %	26,215 %
5,612	3,0237 Nm	29,838 Nm	10,672 %	51,885 %
0,92101	3,6019 Nm	98,038 Nm	4,332 %	25,771 %
0,2566	6,5035 Nm	195,32 Nm	2,243 %	12,608 %
0,17387	11,44 Nm	338,12 Nm	1,840 %	8,851 %

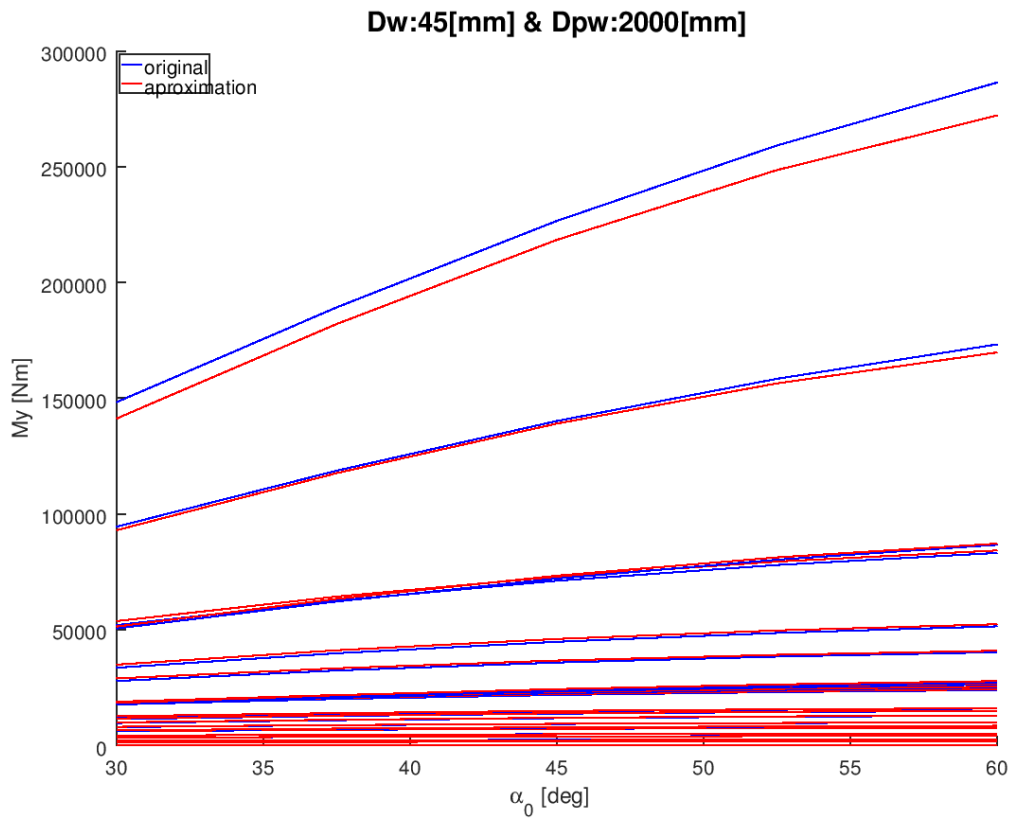
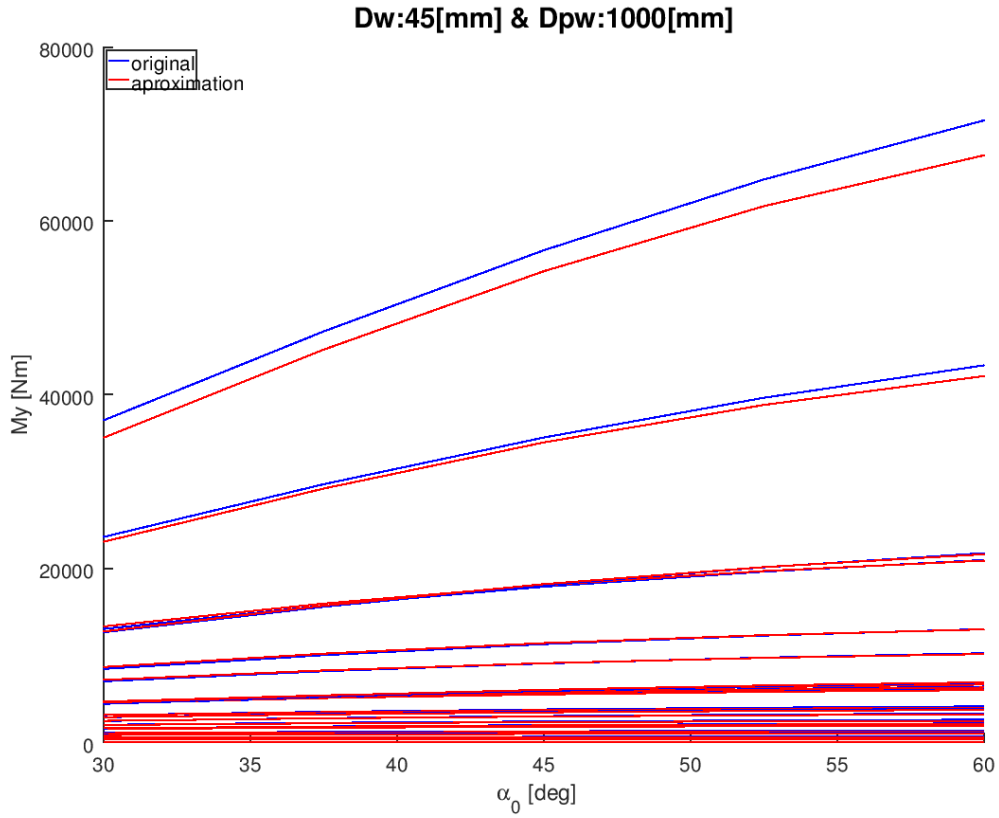
ANEXO V: Resultados para el caso de carga axial

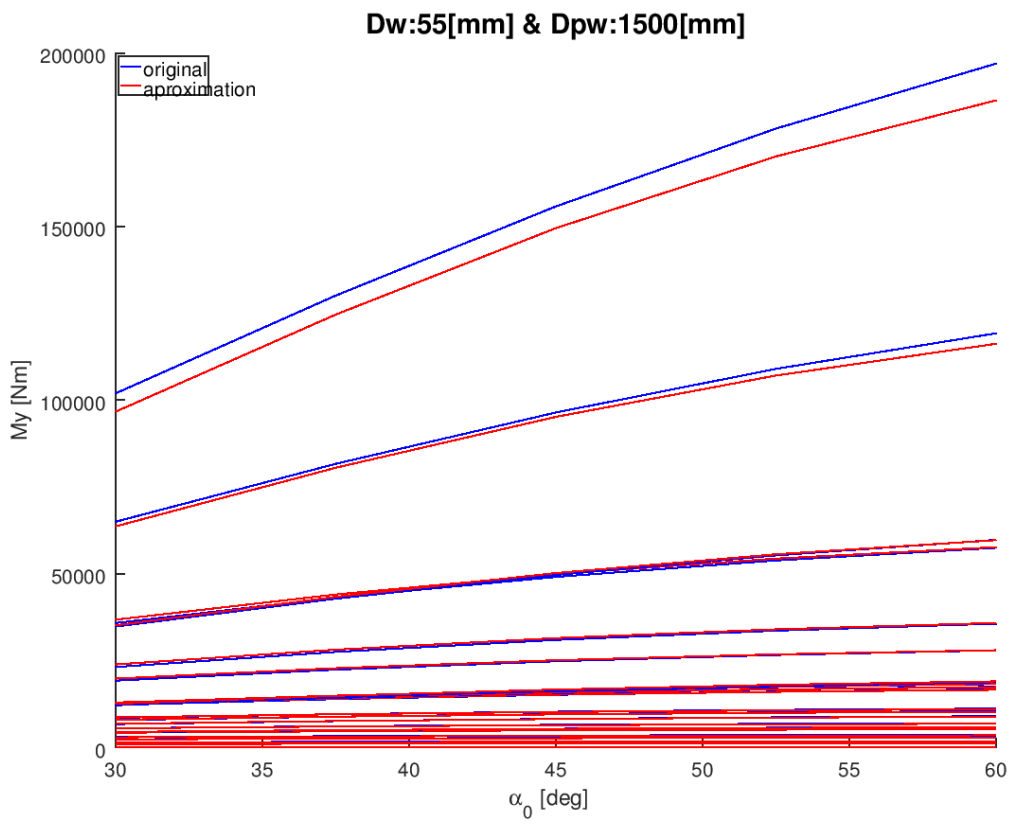
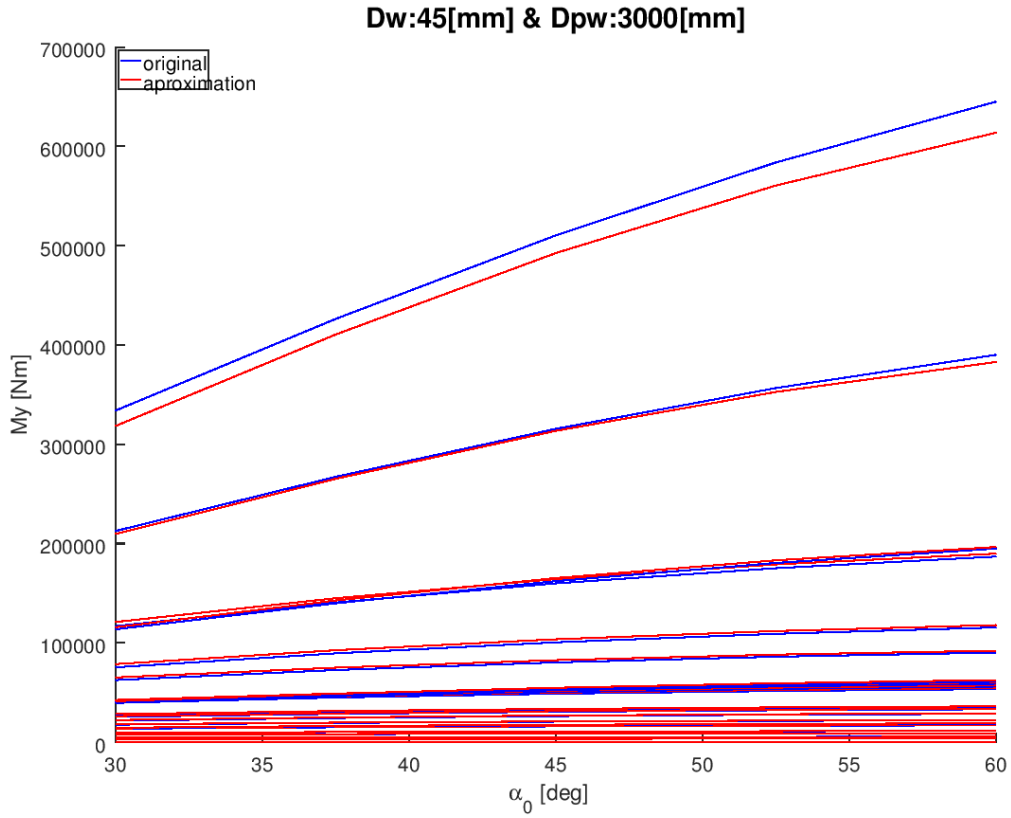


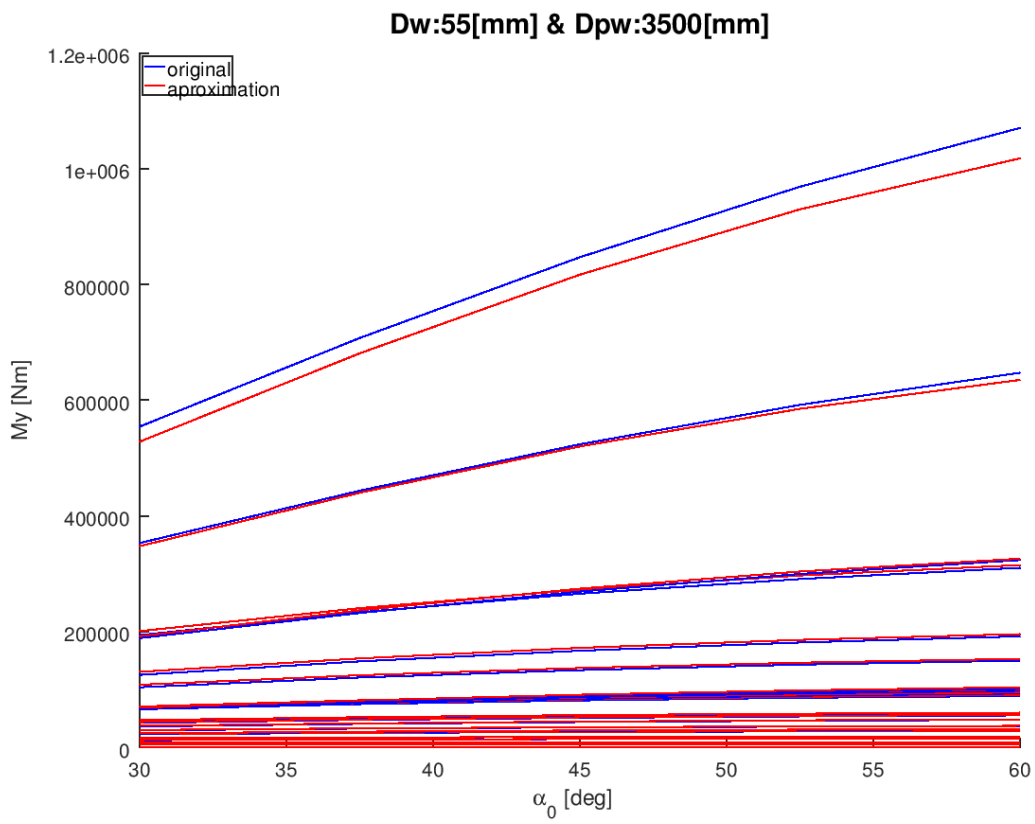
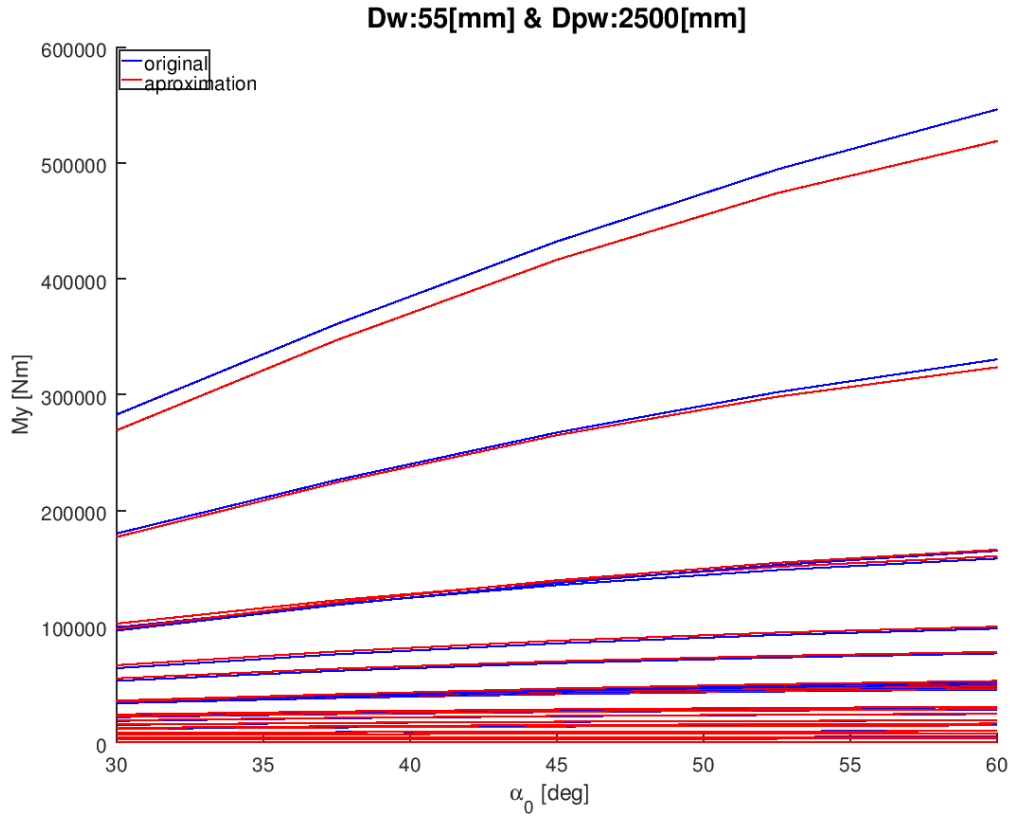






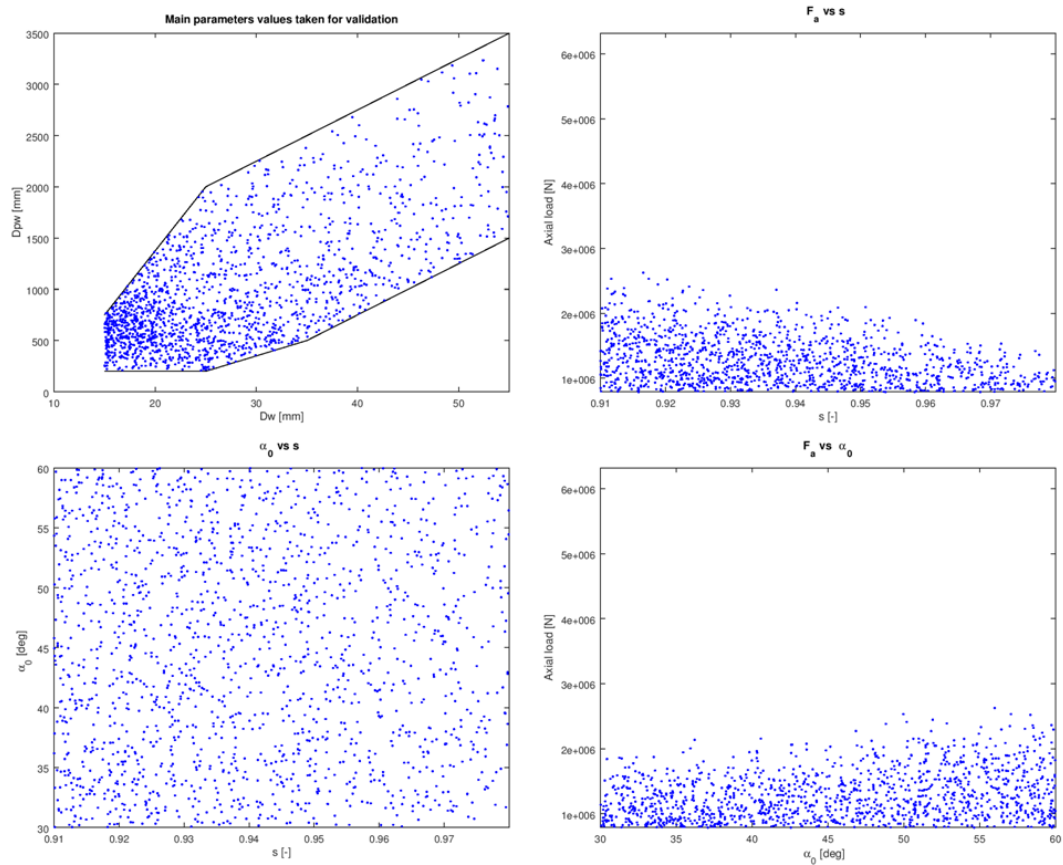




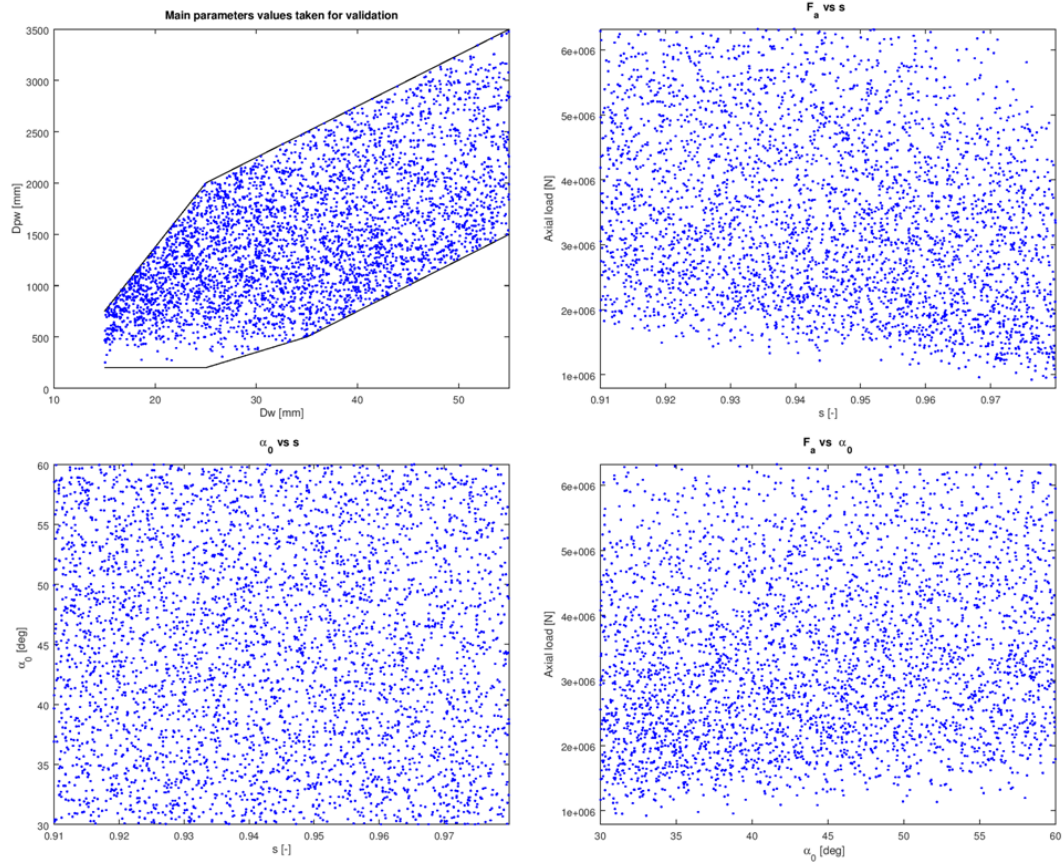


ANEXO VI: Valores aleatorios empleados en la validación

Rango 1: $200 < My < 1000$



Rango 2: $1000 < My < 10000$



Rango 3: 10000 < My

