



FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

TESIS:

**ROBOTS DE ESTRUCTURA FLEXIBLE:  
ANÁLISIS MODELADO Y DISEÑO DE  
CONTROLADORES**

Tesis escrito por Unai Escribano

---

Director de tesis:  
Pablo González

Co-Director de tesis:  
Carlos Cartelli



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>V</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>VII</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Tema de estudio . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Motivación . . . . .	4
1.4. Definición del problema . . . . .	4
1.5. Organización de la tesis . . . . .	5
<b>2. Modelización Dinámica de estructuras flexibles</b>	<b>7</b>
2.1. Elasticidad en las articulaciones . . . . .	7
2.1.1. Modelización de sistemas con articulaciones elásticas y eslabones rígidos . . . . .	8
2.1.2. Caso de estudio . . . . .	11
2.2. Elasticidad en los eslabones . . . . .	14
2.2.1. Métodos de modelización . . . . .	15
2.2.2. Obtención de los mode shape . . . . .	16
2.2.2.1. Teoría de vigas . . . . .	16
2.2.2.2. Condiciones de contorno . . . . .	18
2.2.3. Descripción cinemática . . . . .	22
2.2.4. Formulación de la dinámica . . . . .	24
2.2.5. Obtención del modelo dinámico . . . . .	27
2.2.6. Caso de estudio . . . . .	31
2.3. Sistema compuesto por articulaciones elásticas y eslabones fle- xibles . . . . .	37

<b>3. Estrategias de control</b>	<b>38</b>
3.1. Articulaciones elásticas	39
3.1.1. Estrategias de medición	39
3.1.2. Actuadores	40
3.1.3. Estrategia PD	40
3.1.3.1. Realimentación de variables del eje	40
3.1.3.2. Realimentación mixta	45
3.1.3.3. Realimentación de variables del motor	48
3.1.3.4. Diseño de las ganancias	50
3.1.4. Estrategia PD con compensación de gravedad	57
3.1.4.1. PD con compensación gravedad offline	58
3.1.4.2. PD con compensación de gravedad online	61
3.1.5. Estrategia PD + fullstate - feedback	66
3.1.6. Estrategias basadas en la dinámica inversa	74
3.1.7. Comparación de las estrategias implementadas	79
3.2. Eslabones flexibles	82
3.2.1. Estrategia PD	82
3.2.1.1. Elección de las ganancias	83
3.2.1.2. Evaluación del controlador	83
3.2.2. PD+ Compensación gravedad	85
3.2.3. Estrategia PD +FF	95
3.2.4. Comparación de las estrategias implementadas	97
3.3. Articulaciones elásticas y eslabones flexibles	100
3.3.1. Cálculo de las ganancias	100
3.3.2. Estrategia PD+ G	101
3.3.3. Estrategia PD+FF	103
3.3.4. Comparación de todas las estrategias	105
<b>4. Conclusiones</b>	<b>108</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>

# Índice de figuras

2.1.	Diagrama de bloques para un sistema de articulaciones elásticas.	11
2.2.	Señal Bang-Bang de 0.3Nm . . . . .	13
2.3.	Evolución de la posición angular de los ejes de un péndulo doble con articulaciones elásticas, sometido a una señal Bang- Bang . . . . .	14
2.4.	Barras de Euler-Bernoulli y Timoshenko . . . . .	17
2.5.	Cadena cinemática de eslabones elásticos. . . . .	22
2.6.	Función de modo normalizada sin carga para el primer eslabón.	33
2.7.	Función de modo normalizada sin carga para el segundo eslabón.	34
2.8.	Función de modo normalizada con carga para el primer eslabón.	34
2.9.	Función de modo normalizada con carga para el segundo eslabón.	35
3.1.	Planta y controlador para el caso control PD realimentado con variables del eje . . . . .	41
3.2.	Diagrama de Bode para $\theta/\tau$ del modelo de estudio . . . . .	42
3.3.	Respuesta del eje 1 ante una entrada senoidal de torque . . . . .	43
3.4.	Diagrama de Bode identificado para $\theta_1/\tau_1$ considerando el eje 2 bloqueado . . . . .	43
3.5.	Espacio de raíces de la función de transferencia $s.\theta(s)/\tau(s)$ , para el modelo de estudio . . . . .	44
3.6.	Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimen- tando con variables del eslabón . . . . .	44
3.7.	Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimen- tando con variables del eslabón . . . . .	45
3.8.	Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimen- tando con parámetros mixtos siendo $0 < K_P < K_e R$ . . . . .	46
3.9.	Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimen- tando con parámetros mixtos siendo $0 < K_P < K_e R$ . . . . .	47
3.10.	Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimen- tando con parámetros mixtos siendo $K_P > K_e R$ . . . . .	47

3.11. Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimentando con parámetros mixtos siendo $K_P > K_e R$ .	48
3.12. Lugar de las raíces considerando realimentación de variables del motor	49
3.13. Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimentando con variables del motor.	50
3.14. Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimentando con variables del motor.	50
3.15. Diagrama de Bode de la función de transferencia de la posición del motor referida al torque motor	51
3.16. Diagrama de Bode de amplitud identificado para $\theta_{m1}(s)/\tau_1(s)$ considerando el eje 2 bloqueado	52
3.17. Respuesta en el tiempo del eje 1 variando $\omega_n$	53
3.18. Respuesta en el tiempo del eje 2 variando $\omega_n$	53
3.19. Plano de polos y ceros variando $\omega_n$	54
3.20. Detalle de la ubicación de los polos y ceros de lazo cerrado variando $\omega_n$ .	54
3.21. Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste $\xi = 1$ y $\omega_n = \omega_e/20$ para el eje 1, para los casos de juntas rígidas y flexibles	55
3.22. Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste $\xi = 1$ y $\omega_n = \omega_e/20$ para el eje 2, para los casos de juntas rígidas y flexibles	56
3.23. Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste $\xi = 1$ y $\omega_n = \omega_e/20$ para la posición del motor 1, para los casos de juntas rígidas y flexibles	56
3.24. Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste $\xi = 1$ y $\omega_n = \omega_e/20$ para la posición del motor 2, para los casos de juntas rígidas y flexibles	57
3.25. Respuesta temporal de la posición del eje 1 para una estrategia de control PD+G <i>offline</i>	60
3.26. Respuesta temporal de la posición del eje 2 para una estrategia de control PD+G <i>offline</i>	61
3.27. Diagrama de bloques del controlador PD, PD+G <i>offline</i> y PD+G <i>online</i>	63
3.28. Comparación seguimiento de trayectoria para el eje 1 con estrategias PD+G <i>offline</i> y PD+G <i>online</i>	64
3.29. Comparación seguimiento de trayectoria para el eje 2 con estrategias PD+G <i>offline</i> y PD+G <i>online</i>	64
3.30. Errores de seguimiento de trayectoria con estrategias PD+G <i>offline</i> y PD+G <i>online</i>	65

3.31. Comparación Torques del eje 1 en seguimiento de trayectoria con estrategias PD+G <i>offline</i> y PD+G <i>online</i> . . . . .	65
3.32. Comparación Torques del eje 2 en seguimiento de trayectoria con estrategias PD+G <i>offline</i> y PD+G <i>online</i> . . . . .	66
3.33. Diagrama de bloques del péndulo doble controlado por un PD+G con realimentación del torque . . . . .	67
3.34. Respuesta temporal del eje 1 para una estrategia de control PD+G con realimentación del torque . . . . .	69
3.35. Respuesta temporal del eje 2 para una estrategia de control PD+G con realimentación del torque . . . . .	69
3.36. Comparación de la estrategia PD+G <i>online</i> y realimentación completa ( <i>fullstate</i> ) en seguimiento de trayectoria para el eje 1	70
3.37. Comparación de la estrategia PD+G <i>online</i> y realimentación completa ( <i>fullstate</i> ) en seguimiento de trayectoria para el eje 2	70
3.38. Comparación de la estrategia PD+G y <i>fullstate</i> para regulación en el eje 1 considerando $\omega_n = \omega_e/2$ . . . . .	71
3.39. Comparación de la estrategia PD+G y <i>fullstate</i> para regulación en el eje 2 considerando $\omega_n = \omega_e/2$ . . . . .	72
3.40. Comparación de la estrategia PD+G y <i>fullstate</i> para seguimiento de trayectoria en el eje 1 considerando $\omega_n = \omega_e/2$ . . . . .	72
3.41. Comparación de la estrategia PD+G y <i>fullstate</i> para seguimiento de trayectoria en el eje 2 considerando $\omega_n = \omega_e/2$ . . . . .	73
3.42. Torques de los motores para la estrategia PD+G en seguimiento de trayectoria . . . . .	73
3.43. Torques de los motores para la estrategia <i>fullstate</i> en seguimiento de trayectoria . . . . .	74
3.44. Respuesta temporal del eje 1 para PD+FF . . . . .	77
3.45. Respuesta temporal del eje 2 para PD+FF . . . . .	77
3.46. Evolución temporal de los torques motor del para PD+FF . . . . .	78
3.47. Efecto en la respuesta temporal de la variación de ganancia para el control PD+FF . . . . .	79
3.48. Efecto en la fuerza de control de la variación de ganancia para el control PD+FF . . . . .	79
3.49. Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble para diferentes estrategias. . . . .	80
3.50. Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble para diferentes estrategias. . . . .	80
3.51. Comparación de la respuesta en el tiempo del torque motor del eje 1 del péndulo doble para diferentes estrategias. . . . .	81
3.52. Comparación de la respuesta en el tiempo del torque motor del eje 2 del péndulo doble para diferentes estrategias. . . . .	81

3.53. Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD. . . . .	84
3.54. Seguimiento de posición del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD. . . . .	84
3.55. Variación de las deltas en el tiempo para una estrategia PD. . . . .	85
3.56. Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G . . . . .	86
3.57. Seguimiento de posición del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G . . . . .	86
3.58. Variación de las deltas en el tiempo para una estrategia PD+G. . . . .	87
3.59. Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) . . . . .	88
3.60. Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) . . . . .	89
3.61. Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) . . . . .	89
3.62. Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) . . . . .	90
3.63. Variación de los delta para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) en seguimiento de trayectoria. . . . .	90
3.64. Efecto en el seguimiento de la trayectoria de los ejes por la variación del ajuste del control para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) . . . . .	91
3.65. Efecto en las vibraciones de los eslabones por la variación del ajuste del control para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) . . . . .	92
3.66. Comparación de los torques para distintos ajuste del control para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) . . . . .	92
3.67. Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) con ganancia calculada a $\omega_n = 2\omega_e$ . . . . .	93
3.68. Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) con ganancia calculada a $\omega_n = 2\omega_e$ . . . . .	94
3.69. Vibraciones resultantes para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) en seguimiento de trayectoria e con ganancia calculada a $\omega_n = 2\omega_e$ . . . . .	94
3.70. Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+FF . . . . .	96
3.71. Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+FF . . . . .	96
3.72. Vibraciones de los eslabones para una estrategia PD+FF en seguimiento de trayectoria . . . . .	97
3.73. Comparación del seguimiento de la trayectoria del eje 1 . . . . .	97



3.74. Comparación del seguimiento de la trayectoria del eje 2 . . . . .	98
3.75. Comparación de las vibraciones de los eslabones para distintas técnicas de control . . . . .	98
3.76. Comparación de los torques aplicados en las distintas técnicas de control . . . . .	99
3.77. Comparación de la respuesta temporal del eje 1 del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias. . . . .	101
3.78. Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+G	102
3.79. Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+G	102
3.80. Variación en el tiempo de los torques de un sistema completamente flexible con una estrategia PD+G . . . . .	103
3.81. Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+FF	104
3.82. Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+FF	104
3.83. Variación temporal los torques de un sistema completamente flexible con una estrategia PD+FF . . . . .	105
3.84. Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias. . . . .	105
3.85. Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias. . . . .	106
3.86. Comparación de los torques del primer motor del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias. . . . .	106



# Índice de cuadros

2.1. Parámetros del modelo de estudio . . . . .	12
2.2. Parámetro del modelo de estudio con eslabones elásticos . . . . .	32
3.1. Parámetros del generador de trayectoria joint . . . . .	39
3.2. Tabla de Routh . . . . .	46



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Tema de estudio

Las plantas industriales de producción actuales se han vuelto cada vez más adaptables, bien porque los productos se actualizan más frecuentemente, o bien para obtener una personalización a requerimiento de la demanda del consumidor. Consecuentemente, las líneas de producción requieren cambios rápidos, simples y económicos, para minimizar retrasos de producción o incremento de costos que se trasladarían al producto final [1]. Es ahí donde la robótica industrial aventaja a otras formas de automatización, porque precisamente los robots tienen la capacidad de adaptarse a modificaciones de las tareas que ejecutan, realizando cambios únicamente en su programación [2].

De la misma manera, en los últimos años los robots se han integrado en aplicaciones que incluyen fusión de capacidades de sensado para facilitar la adaptabilidad. Los sensores dotan de cierta inteligencia al robot, para que esa adaptación a los cambios en su entorno de trabajo sea total o parcialmente automática. Si bien la integración de sensado en nuevas aplicaciones era baja a comienzos del milenio [3], esa tendencia se ha revertido en la actualidad por las mejoras de prestaciones y reducción de precios de los sensores, hasta casi no haber nuevas aplicaciones robotizadas sin algún tipo de sensado incorporado [4].

La adaptabilidad requerida para la producción también hace necesaria la incorporación de robots a instalaciones para trabajo conjunto con personas, y eso ha obligado a modificar el diseño de los robots para garantizar que la interacción sea segura. La necesidad de trabajo colaborativo humanos-robot introdujo el modelo de robots colaborativos o cobots industriales.

Los cobots se diseñan con diversas características técnicas en busca de asegurar que los riesgos en el contacto directo con humanos o con objetos que

lo rodean sean mínimos. Entre esas características se encuentran la construcción con materiales ligeros, bordes redondeados, pieles y sensores adicionales, de cierta manera cualidades que limitan los riesgos en caso de contacto. El uso de materiales ligeros y deformables para la construcción de la estructura del cobot implica que la masa en movimiento es menor (que en el caso de robots) y que existe acomodamiento pasivo. Por consiguiente las posibles consecuencias de un choque son menores y la interacción humano-máquina es también más segura [5]. Asimismo, al poseer eslabones ligeros, se requiere menor consumo y actuadores más pequeños. Esta liviandad contribuye a que los cobots puedan ser fácilmente reubicados dentro de la planta industrial de acuerdo a la aplicación a realizar, y liberar el espacio cuando no sean usados.

Por otro lado, los cobots han incorporado técnicas de programación sencillas que pueden ser realizadas sin recurrir a expertos, con programación por enseñanza o demostración- moviendo al robot manualmente- o mediante interfaces gráficas intuitivas [6] [7]. Además los cobots se pueden usar para automatizar partes de una línea de producción con cambios mínimos en el resto de la línea, proporcionando a los fabricantes pequeños y medianos, un punto de entrada económicamente viable para la automatización robótica [5]. Todos estos factores mencionados redundan en que la robotización industrial utilizando cobots sea, en general, más económica.

## 1.2. Antecedentes

La comercialización del primer cobot de estas características se produjo en el año 2008 a manos de la compañía danesa Universal Robots. La respuesta de los principales fabricantes de robots industriales no se hizo esperar, con el lanzamiento de sus propios robots ligeros. Así ABB con su cobot YuMi, Fanuc con el CR35iA, KUKA con su LBR iiwa se introdujeron en el mercado [8].

Este mercado a sus principios se dividió en dos corrientes. Unas empresas apostaron por la inclusión de actuadores elásticos, permitiéndoles lanzar un robot considerablemente más barato y más seguro pero notablemente menos preciso, por la sobre elasticidad estructural introducida, como sería el caso de los cobots Baxter y el Sawyer de Rethink Robotics. Otros en cambio prevalecieron la precisión a los costes comercializando cobots con actuadores rígidos on sensores externos y motores más potentes (ej. Universal Robots). La industria finalmente se decantó por la precisión y potencia, llevando a Rethink Robotics a la quiebra en 2018.

El estudio de las deformaciones en los eslabones y articulaciones en cambio, se remonta más allá del lanzamiento de los primeros cobots. Ya en 1974 W.J. Book analizaba este efecto en diversos artículos publicados en IEEE.

No obstante los tradicionales robots industriales que se empleaban por aquel entonces eran lo suficientemente rígidos y esbeltos como para despreciar la elasticidad y simplificar el modelo dinámico.

No solo Book ha sido responsable y pionero en el análisis de las deformaciones. Diversos autores de renombre como Siciliano o De Luca han hecho su aporte introduciendo diferentes hipótesis y simplificaciones en aras de resolver este problema.

Todos ellos han tenido como objetivo desarrollar un modelo dinámico lo más realista posible junto a una estrategia de control que mejor se adaptase al sistema, minimizando los efectos negativos introducidos por la flexibilidad estructural y así poder aprovechar sus ventajas permitiendo el diseño de robots utilizables en ámbitos tan importantes como son la medicina o la ingeniería aeroespacial [9] [10] [11].

En cuanto a los estudios de técnicas de modelado empleadas hasta la fecha para los robots de estructura flexible se puede hablar de dos corrientes: modelos con la elasticidad concentrada en las articulaciones y modelos con la elasticidad concentrada en los eslabones.

Para el primer caso, la mayoría de los autores opta por la caracterización mediante resortes torsionales [19]. Para el segundo, en cambio, se tienen diferentes enfoques dependiendo de la teoría de vigas empleada [13] y de las condiciones de contorno consideradas [14]. Estos enfoques hacen que la modelización de un robot como sistema rígido y uno considerado como flexible no sean iguales, necesitando el doble de las coordenadas generalizadas para el caso de articulaciones elásticas y más del doble (dependiendo de la técnica empleada o modos considerados) para el caso de eslabones flexibles.

En cuanto al control de posición le concierne, un modelo más detallado implica que se aumenta el número de parámetros a considerar y con ello la posible complejidad del sistema. Los fabricantes de cobots emplean controladores realimentados por datos de posición, velocidad y de torque -tanto del motor como del eslabón- [19] por ejemplo, pero no detallan demasiados aspectos internos del controlador para evaluar sus prestaciones.

El avance tecnológico también ha contribuido en la mejora de estrategias de control. Los estudios más recientes centran su fuerza en sensores modernos e inclusión de términos que van más allá de la posición y de la velocidad. La aceleración y la deformación medidas por acelerómetros y los “strain gauges” se emplean directamente para realimentar el sistema [15][16].

### 1.3. Motivación

Si bien el mercado de los cobots aún se encuentra en sus principios y tanto los usuarios finales como los integradores aún están ganando experiencia en aspectos a mejorar, tanto en el diseño como en la implementación de aplicaciones que requieren de la colaboración robot-humano, esta rama de la robótica ya se ha hecho con el 4% de la demanda anual de robots industriales [5] y Universal Robots (uno de los principales fabricantes de cobots) prevé un crecimiento anual de ventas del 50% hasta representar el 34% del mercado del sector para 2022 [17]. Ejemplo de ello son los más de 30 proveedores que comercializan 80 modelos de cobot diferentes, entre los que se encuentran los big-four de la robótica.

Otro factor clave en este crecimiento proviene de las cualidades físicas y ventajas que los mismos cobots ofrecen. El empleo de materiales más ligeros ha acarreado consigo disminuir costos de todo tipo. El más visible podría considerarse el ahorro de materiales. Aun así, el empleo de actuadores más pequeños o un menor consumo de energía también son producto de esta ligereza. No menos importante encontramos la seguridad ligada a los cobots, rebajando los daños debido a los golpes, choques u otro tipo de accidentes.

Esta seguridad ha permitido instalar cobots sin obligación de utilizar jaulas, posibilitando el trabajo codo a codo entre operarios y máquinas. Sumándole la facilidad de reubicación y la fácil programación sin necesidad de emplear operarios externos, la flexibilidad de las plantas se ha visto notablemente beneficiada.

Todos estos aspectos son indispensables en la inminente puesta en escena de la industria 4.0, la cuarta revolución industrial, focalizada en el empleo de la inteligencia artificial y en la cual la colaboración entre robots y humanos va a jugar un papel más que notable.

Aun así, actualmente cuando el trabajo a realizar exige rapidez y exactitud, cualquier aplicación colaborativa se vuelve económicamente inviable, haciendo que las empresas sigan apostando por los tradicionales robots industriales [5].

Por todo lo mencionado está claro que todas las investigaciones acerca de mejorar la precisión y rendimiento de los cobots serán de suma importancia convirtiendo éste en un tema más que interesante.

### 1.4. Definición del problema

En los robots de estructura flexible el diseño y modelado de los cobot no es totalmente equivalente a los robots industriales convencionales (a los que



se los asume rígidos para el modelado y diseño) [18].

En los robots de estructura flexible las deformaciones elásticas se traducen en vibraciones de la herramienta [19] que aun y siendo de bajas amplitudes pueden impedir un resultado exitoso de ciertas tareas (tal es el caso por ejemplo cuando la tarea requiere control de fuerzas de contacto [20]). Por lo tanto, el modelado tradicional que asume una estructura rígida no es aplicable en forma directa. En estos casos se requiere contemplar la influencia de las deformaciones pasivas y las intencionales que ocasionan las vibraciones en la posición del efector final. Se trata en cualquier caso de obtener un modelo más completo y más realista que el obtenido con un modelo rígido.

Por el lado del control de posición y trayectoria de los cobots actuales, basta comparar sus especificaciones contra las de los robots convencionales, para notar que aún no obtienen similares prestaciones de velocidad, exactitud y repetibilidad.

No obstante, estos últimos años han salido a la luz noticias que confirmaban el empleo de cobots para realizar tareas tan precisas como es la soldadura. SnapWeld Collaborative Robotic Welding de Universal Robots fue presentado en Fabtech 2017 como el primer sistema de soldadura para robots colaborativos.

Se trata de un cobot asistido donde el robot es capaz de realizar una soldadura de puntos empleando los puntos de inicio, de fin, así con el número y longitud de la puntada de soldadura enseñados por el operario, reduciendo el tiempo de la programación robótica de horas a minutos.

Pero, ¿Es realmente factible lograr tal precisión y eliminar las vibraciones de una maquina con semejantes características? Y si fuese así ¿Cuáles son las estrategias de control empleadas por los fabricantes de los cobots o las que mejor solventan el problema de la flexibilidad y mejor eliminan las vibraciones?

## 1.5. Organización de la tesis

Mediante este trabajo se realizará un análisis exhaustivo de las deformaciones elásticas en los eslabones y en las articulaciones de los robots colaborativos para poder observar sus efectos en el comportamiento y la precisión de dicho robot.

Se partirá de la descripción cinemática del cobot para después y tras modelarlo dinámicamente desarrollar un simulador. La modelización se llevará a cabo teniendo en cuenta tanto la deformación en los eslabones como la elasticidad en las articulaciones y el modelo dinámico utilizado será no recursivo y expresado de forma explícita.

Finalmente, con el simulador implementado se realizarán diferentes simulaciones para analizar el comportamiento del sistema ante diferentes estrategias de control, indicando las ventajas y desventajas de cada uno. Dichas simulaciones se realizarán en un movimiento estándar midiendo las deformaciones y las frecuencias elásticas.

Por tanto y para trabajar progresivamente se iniciará con la modelización de un péndulo doble invertido de articulaciones flexibles. Para ello se obtendrá el modelo dinámico apoyándose en las ecuaciones de Euler-Lagrange, considerando que la elasticidad articular es comparable a la de un resorte torsional.

Por segundo, se modelizarán los eslabones flexibles de un sistema donde las articulaciones se considerarán rígidas. Se analizarán el método de modos y el de elementos finitos, y las teorías de vigas de Euler Bernoulli y Timoshenko [13]. Las condiciones de contorno elegidas por diferentes autores también serán discutidas.

Para terminar con la modelización ambos casos se sobrepondrán para formar un sistema biarticulado de articulaciones elásticas y eslabones flexibles.

Tras modelizar el sistema se analizarán diferentes estrategias de control. Se partirá de un control sencillo, como es el proporcional derivativo, PD, para el caso de un sistema de articulaciones elásticas y eslabones rígidos, comprobando la estabilidad asintótica haciendo uso de las teorías de Lyapunov y La Salle. Diferentes fuentes de realimentación como son las posiciones y velocidades del eslabón y del motor serán analizados y por consiguiente su estabilidad y/o inestabilidad. Un control más completo será obtenido al incluir un término para compensar el efecto de la gravedad.

Dos métodos basados en la inversión dinámica también serán analizados posteriormente para finalmente incluir la estrategia de diseño de control lineal y comprobar la mejora en el seguimiento de trayectoria.

Tras comprobar el correcto funcionamiento del mencionado controlador, se analizará el segundo caso, sistema compuesto por eslabones flexibles y articulaciones rígidas. El control de sistemas de eslabones flexibles y articulaciones rígidas implementado será el estudiado por Siciliano en [15].

Finalmente, echando mano de los resultados obtenidos para los casos de articulaciones elásticas y eslabones flexibles tratará de analizar el efecto de ambos sobre un mismo sistema.

## Capítulo 2

# Modelización Dinámica de estructuras flexibles

En este capítulo se introducirá la metodología seguida para hallar el modelo dinámico de un sistema compuesto por elementos flexibles. Los parámetros empleados serán los utilizados por Siciliano y de Luca en [29] con el fin de obtener resultados verificables, aunque se introducirán algunas variaciones para así poder resaltar el efecto de la elasticidad. El modelo obtenido será sometido a diferentes simulaciones para ensayar las distintas estrategias de control destacando las que mejor se adaptan a las especificaciones y particularidades de estos sistemas. Para ello, primeramente se comenzará modelizando la elasticidad en las articulaciones para continuar con la caracterización de las deflexiones en los eslabones. Tras entrelazar los resultados obtenidos en ambas modelizaciones se llegará al modelo del péndulo doble compuesto por dos articulaciones elásticas y dos eslabones deformables. El modelo será preliminar siendo caracterizados dos de los seis eslabones que cuentan los cobots de *Universal Robots*. Aun así, la mayor parte de la deformación recaerá en los dos eslabones más esbeltos por lo que el modelo empleado será suficiente para obtener una aproximación realista.

### 2.1. Elasticidad en las articulaciones

Dado un sistema compuesto por articulaciones y eslabones rígidos, el motor encargado de provocar los movimientos de los ejes, mueve al eslabón en la misma magnitud del giro de su rotor, es decir  $\theta_m = \theta$ . Si a estos motores se les incluye una reducción con el fin de ajustar la velocidad a un rango acorde, multiplicar el torque disponible y disminuir los efectos inerciales que provocan en las articulaciones ajenas,  $\theta_m = N\theta$  siendo  $N$  el factor de reducción. Debido

## 8CAPÍTULO 2. MODELIZACIÓN DINÁMICA DE ESTRUCTURAS FLEXIBLES

a esta relación que existe entre las coordenadas del eje y del motor, bastará con definir tantas coordenadas generalizadas como articulaciones existan para establecer el estado del sistema en el espacio de configuraciones.

$$\mathbf{q} = (\theta_m)$$

Siendo  $\mathbf{q}$  el vector encargado de agrupar las coordenadas generalizadas. Este es el caso que presentan los robots industriales tradicionales.

Si se incluye elasticidad a las articulaciones, la relación entre el movimiento de los motores y eslabones no es directa, existiendo un retraso en el movimiento de los eslabones, teniendo que definirse una coordenada generalizada más para establecer su posición en el espacio de configuraciones,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_m \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

siendo  $\theta_m$  y  $\theta$  en 2.1.1, el vector de las coordenadas generalizadas asociadas al actuador y al eslabón. Esta elasticidad se puede caracterizar mediante un resorte torsional de constante elástica  $K_e$  el cual almacenará energía potencial causando efectos elásticos y haciendo aparecer vibraciones o efectos oscilatorios [19].

### 2.1.1. Modelización de sistemas con articulaciones elásticas y eslabones rígidos

La caracterización de estos sistemas se puede realizar empleando tanto las ecuaciones de *Newton-Euler* como el método de *Lagrange-Euler*.

En la formulación de *Newton-Euler*, las ecuaciones de movimiento son derivadas a partir de la Segunda Ley de Newton, la cual relaciona la fuerza y el momento, así como el torque y el momento angular. En la formulación de *Lagrange-Euler* en cambio, se puede describir el comportamiento de un sistema dinámico en términos del trabajo y la energía almacenados en el sistema, eliminando la necesidad de representar las fuerzas de vínculo que son restricciones que aparecen al emplear el primer método y así facilitando la derivación de las ecuaciones dinámicas. En sistemas sencillos esta diferencia no es notoria, pero al incluir las deflexiones en las articulaciones y en los eslabones, se prefiere optar por el método de *Lagrange-Euler*, según se observa en la mayoría de los trabajos publicados.

Recordando la expresión del Lagrangiano,  $\mathcal{L} = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q})$ , se comienza por calcular la energía cinética del sistema  $K$  y luego la energía potencial  $U$ .

En la expresión de la energía cinética y la potencial aparecerán componentes pertenecientes a los eslabones y a los actuadores, de tal manera que,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) &= U_{\text{eslabon}} + U_{\text{actuador}} \\ K(\mathbf{q}) &= K_{\text{eslabon}} + K_{\text{actuador}} \end{aligned}$$

Al plantear la energía potencial, se distinguen diferentes fuentes para cada componente.

$$\begin{aligned} U_{\text{eslabon}} &= U_{\text{grav,eslabon}}(\boldsymbol{\theta}) \\ U_{\text{actuador}} &= U_{\text{grav,actuador}}(\boldsymbol{\theta}) + U_{\text{elas,actuador}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_m) \end{aligned}$$

donde se aprecia que el nuevo término incluido por la elasticidad en el sistema, que representa la energía potencial elástica.

$$U_{\text{elas,actuador}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - R\boldsymbol{\theta}_m)^T K_e(\boldsymbol{\theta} - R\boldsymbol{\theta}_m) \quad (2.1.2)$$

En la ec. 2.1.2 aparece la interacción entre las dos coordenadas generalizadas las cuales deberán estar expresadas o bien referidas a la entrada del reductor o a la salida del mismo. Trabajando con las magnitudes calculadas a la salida del reductor, es decir al eje del eslabón,  $\boldsymbol{\theta}_m$  es multiplicada por la inversa de  $N$ , que resulta ser la relación de transmisión denominado como  $R$  (ec. 2.1.2).

Los demás componentes de la energía potencial, los términos gravitacionales, se calculan de la misma manera que para los robots rígidos [2], aunque en función de  $\boldsymbol{\theta}$  en lugar de  $\boldsymbol{\theta}_m$ , y son incorporados al vector de fuerzas gravitacionales  $\mathbf{G}$ . De igual forma ocurre con los componentes de la energía cinética de los eslabones cuya dependencia es de  $\boldsymbol{\theta}$ .

Procediendo a su cálculo

$$K_{\text{eslabon}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^T M_L(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.1.3)$$

Donde  $M_L(\boldsymbol{\theta})$  es la matriz de inercia o de energía cinética del eslabón. En este punto se aclara que se asume que el centro de masa de los actuadores coincide con su eje de giro consiguiendo que la matriz de inercia y el término de la gravedad de los actuadores sean independientes de las posiciones angulares del motor. Esta asunción es válida en sistemas donde el motor es coaxial al reductor que en su salida articula el eslabón siguiente de la cadena.

Calculando entonces la energía cinética de los actuadores,

$$K_{\text{actuador}} = \sum_{i=1}^{N_{ax}} T_{\text{actuador}_i} = \sum_{i=1}^{N_{ax}} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T I_{ri} \boldsymbol{\omega}_{ri} \right) \quad (2.1.4)$$

donde el término  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad lineal del centro de masa del actuador  $i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$  su velocidad angular expresado en su eje de giro e  $I_{ri}$  su tensor de inercia.

Considerando que el actuador se sitúa sobre el eje de giro, el primer término de la ec. 2.1.4 puede ser sumado a  $M_L(\boldsymbol{\theta})$  de la ec. 2.1.3. Además, estableciendo relación entre la velocidad del eslabón y la velocidad angular de los actuadores mediante el Jacobiano de velocidades [2], el segundo término de 2.1.4 sirve para calcular la matriz de inercia de los actuadores, denominada como  $J_m$ .

Sin embargo, por el principio de conservación del momento angular, se produce una interacción entre el giro del motor y el giro que se induce en el brazo, apareciendo en el modelo un término antisimétrico en la matriz de inercia que acopla  $M_L(\boldsymbol{\theta})$  con  $J_m$ . Como este nuevo término depende de la relación entre las magnitudes de momento angular del rotor del motor y del eslabón, resulta desestimable cuanto menos inercia tenga el primero respecto del segundo, siendo un supuesto que se verifica ampliamente en los servomotores asincrónicos de alterna utilizados en robótica.

Así se expresan las ecuaciones dinámicas del sistema de la siguiente manera [21]:

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) - R\boldsymbol{\tau}_J &= \mathbf{0} \\ J_m\ddot{\boldsymbol{\theta}}_m + R\boldsymbol{\tau}_J &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

siendo  $C(\dot{\boldsymbol{\theta}})$ , la matriz compuesta por componentes centrífugos y de Coriolis,  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$  el vector de fuerzas generalizadas gravitacionales y  $M(\boldsymbol{\theta})$  la matriz de inercia formada sumando a  $M_L$  el efecto de las masas de los actuadores que están situados sobre el eje. El modelo así obtenido corresponde a la dinámica inversa, y si bien está planteado en término de sumas de vectores y multiplicaciones de matrices, los componentes de ellos presentan dependencias no lineales con las posiciones y velocidades generalizadas.

El único acoplamiento entre eslabón y articulación (ec.2.1.5) resultan los torques elásticos dados por el vector  $\boldsymbol{\tau}_J$ , que se expresa como,

$$\boldsymbol{\tau}_J = K_e(R\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}) \quad (2.1.6)$$

expresión referida a la salida del reductor, es decir del lado del eslabón.

En el lado derecho de la ec. 2.1.5 figura el torque motor,  $\boldsymbol{\tau}$ , introducido por los motores y transmitido a los eslabones mediante el torque elástico.

En presencia de las fuerzas disipativas, la fricción viscosa en la transmisión y el amortiguamiento en los resortes, estos deberán ser representados mediante nuevos términos incluidos a la ec. 2.1.5,

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) - R\boldsymbol{\tau}_J &= \mathbf{0} \\ J_m\ddot{\boldsymbol{\theta}}_m + R\boldsymbol{\tau}_J + B_m\dot{\boldsymbol{\theta}}_m &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

siendo ec. 2.1.6 sustituido por

$$\boldsymbol{\tau}_J = K_e(R\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}) + B_e(R\dot{\boldsymbol{\theta}}_m - \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.1.8)$$

Los términos  $B_m$  y  $B_e$  de las ec. 2.1.7 y ec. 2.1.8 contienen respectivamente los coeficientes de disipación viscosa pertenecientes al motor y a los términos de amortiguamiento en los resortes elásticos.

### 2.1.2. Caso de estudio

Para analizar su efecto, un péndulo doble de articulaciones elásticas y eslabones rígidos ha sido modelizado empleando el entorno informático formado por Matlab y Simulink. Para poder trabajar con el modelo reducido y así desprejir el acoplamiento inercial se ha introducido un factor de reducción  $N$ .

Para resolver el sistema de ecuaciones dinámicas (ec. 2.1.7) se ha servido de las denominadas *S-Function*. Un bloque de Simulink compuesto por varias funciones que se van ejecutando repentinamente, tantas veces como el tiempo de muestreo definido y que habilitan poder trabajar con otros bloques del ámbito Simulink a la vez de poder ser programadas empleando un lenguaje de computación. Así se conseguido llevar adelante simulaciones de una manera más visual.

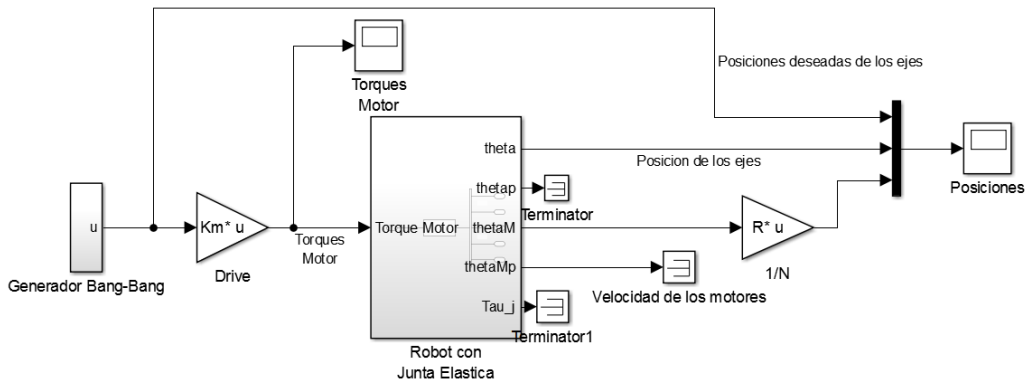


Figura 2.1: Diagrama de bloques para un sistema de articulaciones elásticas.

Como se puede observar en el diagrama de bloques de la fig. 2.1, el torque motor proveniente del drive se ha introducido directamente dentro del bloque

de la S-Function, siendo así el dato de entrada para la resolución de las ecuaciones dinámicas. Las funciones definidas dentro de éste han sido las siguientes:

- **calcDynMatrixDP**. Función para calcular las matrices dinámicas  $M$ ,  $C$  y el vector  $G$ .
- **mdlDerivatives**. Función interna perteneciente a las S-Function. Cada vez que se invoca devuelve los valores de todas las derivadas de las ecuaciones definidas por el modelo dinámico directo, pudiendo así resolver las ecuaciones dinámicas por integración numérica.

En los ensayos propuestos se trabaja sobre un plano vertical considerando los efectos introducidos por la gravedad (péndulo doble invertido). Se ha decidido despreciar los términos disipativos (la fricción viscosa a los dos lados de la transmisión y el amortiguamiento en los resortes) para así poder resaltar los efectos y limitaciones de trabajar con un sistema elástico. Los parámetros y magnitudes empleados aparecen listados en la siguiente tabla 2.1:

Parámetros Físicos	Valor
Densidad eslabón ( $\rho$ )	0.2 [Kg/m]
Longitud eslabón ( $l$ )	0.5 [m]
Masa eslabón ( $m$ )	0.1 [Kg]
Masa carga ( $m_p$ )	0.0 [Kg]
Masa motor ( $m_h$ )	0.0 [Kg]
Inercia eslabón ( $J_o$ )	0.0083 [Kgm <sup>2</sup> ]
Inercia motor ( $J_m$ )	0.01 [Kgm <sup>2</sup> ]
Inercia carga ( $J_p$ )	0.0 [Kgm <sup>2</sup> ]
Coefficiente viscoso motor ( $B_m$ )	0.03 [Nm/rads]
Amortiguamiento elástico ( $B_e$ )	0.0 [Nm/rad]
Constante elástica articulación ( $K_e$ )	160.0 [Nm/rad]
Relación de reducción (N)	10
Parametro del drive (Km)	1

Cuadro 2.1: Parámetros del modelo de estudio

Cabe aclarar que tanto en los dos eslabones como en ambos motor, se han empleado los mismos datos.

Antes de introducirle un controlador al sistema se ha analizado la respuesta a lazo abierto ante una señal *Bang – Bang* de  $\pm 0,3Nm$



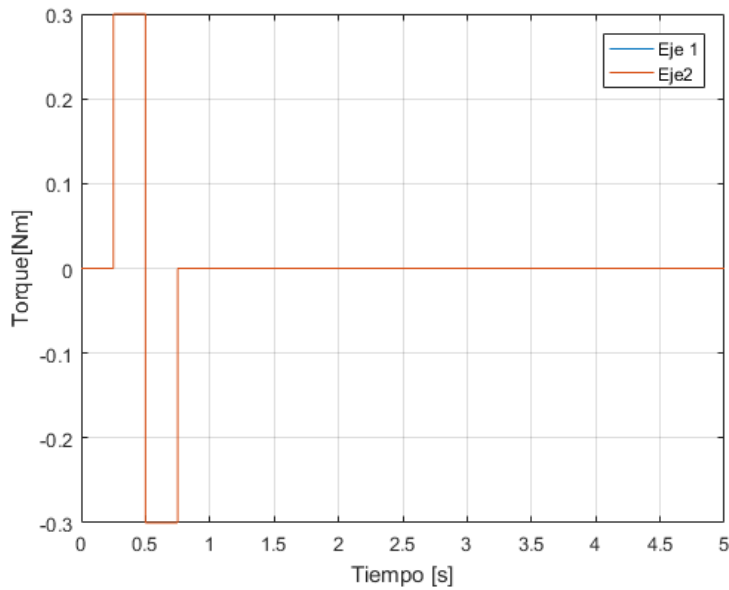


Figura 2.2: Señal Bang-Bang de 0.3Nm

La figura 2.3 muestra la respuesta de la posición del efector final obtenida ante la excitación Bang Bang de 0.3Nm (fig. 2.2). Este ensayo se realiza para tres diferentes constantes elásticas,  $K_e$ , de  $10[Nm/rad]$ ,  $50[Nm/rad]$  y  $160[Nm/rad]$ . Se comprueba que cuanto más se incrementa el valor de  $K_e$ , el sistema se vuelve más rígido, disminuyendo la amplitud del efecto oscilatorio. No obstante, cabe destacar que en la misma medida en que disminuye la amplitud, incrementa la frecuencia de oscilación, debido a la relación que existe entre la frecuencia natural del sistema y el valor de la constante elástica (ec. 2.1.9).

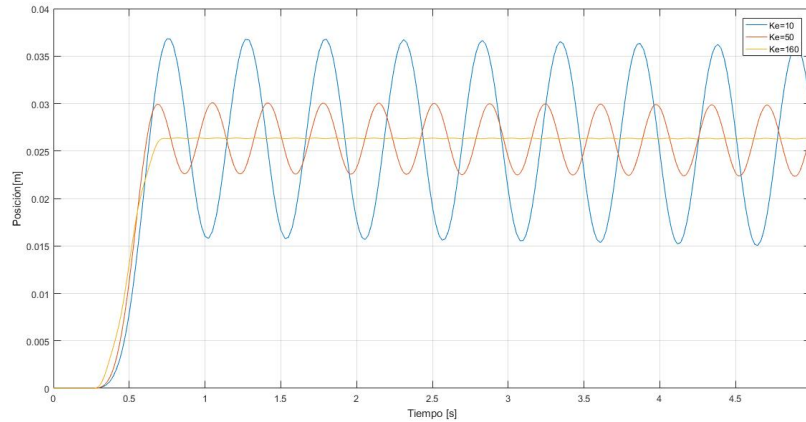


Figura 2.3: Evolución de la posición angular de los ejes de un péndulo doble con articulaciones elásticas, sometido a una señal Bang-Bang

$$\omega_e = \sqrt{\frac{K_e}{M}} \quad (2.1.9)$$

Dichas oscilaciones pueden ser inconvenientes a la hora de realizar trabajos que necesitan de una gran precisión, o bien ser inadmisibles para llevar adelante tareas con contacto mediante control de fuerzas. En el siguiente capítulo se exploran las técnicas de control que buscan reducir su efecto.

## 2.2. Elasticidad en los eslabones

Los efectos de las elasticidades no solo se presentan en las articulaciones, pudiendo ser notorios en los eslabones que conforman los sistemas robóticos. Históricamente los eslabones flexibles habían resultado un tema de interés cuando se trataban con manipuladores de extensas dimensiones; estos robots eran utilizados para manipulaciones en entornos hostiles o de difícil acceso como centrales nucleares, profundidades del océano o tareas espaciales. En la actualidad, y debido a la intrusión de los cobots en la industria, se ha cambiado la perspectiva del problema centrándose en el estudio de los casos en que las deformaciones son producto de la ligereza de los eslabones.

Con el objetivo de explotar todas las ventajas que ofrece el uso de los cobots, las vibraciones causadas por las deflexiones estructurales deben ser amortiguadas tanto por control activo como pasivo [22].

En este contexto, se trabaja para obtener las matrices dinámicas de manera simbólica. Con esto se consigue poder trabajar de una manera más ordenada debido a la complejidad que pueden llegar a tener estos sistemas

al incluirse el efecto elástico, ya que esto acarrea tener que trabajar, por lo menos, con el doble de coordenadas generalizadas. Además el poder realizar las sustituciones el momento oportuno ayudará a minimizar los errores que puedan llegarse a cometer.

En el próximo capítulo se explican los pasos seguidos en la obtención del modelo dinámico. Las hipótesis y simplificaciones tomadas son críticas en cuanto a exactitud del modelo concierne, por ello se enfatizan las decisiones que se han ido tomando.

Una vez modelado se analiza el sistema bajo diferentes parámetros de rigidez flexural ( $EI$ ), que es el parámetro que determina el nivel de flexibilidad siendo también clave en la obtención de la frecuencia elástica del sistema, y las vibraciones.

### 2.2.1. Métodos de modelización

El hecho de encontrarnos ante un sistema de infinitos grados de libertad, ha derivado en que haya más de una forma de modelizar el sistema de un eslabón flexible, y así resolver el problema. Entre todos los métodos estudiados y analizados en la bibliografía no hay un método que sobresalga de los demás presentando todas sus ventajas y desventajas según los parámetros geométricos o hipótesis con los que se trabaje y los que se analizarán a continuación.

La primera hipótesis concierne en definir el sistema como un modelo continuo o como un modelo de parámetros discretos [23].

Para trabajar con modelos continuos el sistema debe ser representado tanto en variables espaciales como en variables temporales. Esto conlleva a que las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de los sistemas continuos están descritas por ecuaciones en derivadas parciales (PDE). Para resolver estas ecuaciones es necesario definir tantas condiciones de contorno como incógnitas se tengan, siendo cuatro por eslabón para el caso de un eslabón flexible planar. Estas condiciones de contorno surgen de tomar diferentes consideraciones por lo que le incluirán dificultad e inexactitudes a la solución.

Uno de los métodos que emplea los modelos continuos es el método de modos asumidos. A pesar de trabajar con la resolución de ecuaciones diferenciales en el espacio continuo, el sistema se modeliza con una aproximación finita de grados de libertad convergiendo aun así a resultados precisos [24].

Por el contrario, en los sistemas de parámetros discretos se emplean entidades ideales como la masa puntual, carga concentrada en un punto del espacio, etc, para modelar matemáticamente fenómenos o sistemas reales [23]. El número de grados de libertad empleado también es finito pero muy elevado en cantidad respecto al anterior. Para ello, los modelos definidos mediante

parámetros discretos dividen cada eslabón en tantos elementos como grados de libertad se deseen tratar. Estos métodos, al contrario que los modelos continuos, se definen mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), las cuales dependen únicamente del tiempo y tienen la ventaja de no necesitar condiciones de contorno para su resolución.

Dentro de esta hipótesis existen dos métodos principales: el método de parámetros concentrados y el método de elementos finitos. Pese a que el método de parámetros concentrados es una propuesta sencilla, los resultados obtenidos mediante su aplicación demuestran que no es lo suficientemente preciso para manejar las no-linealidades y la complejidad de la dinámica de los manipuladores flexibles [25][26][27]. El método de elementos finitos en cambio, tiende a converger a la solución exacta cuando se aumenta el número de división del eslabón y con ello sus grados de libertad.

El caso del método de modos asumidos define el eslabón en su totalidad sin diferenciar las irregularidades geométricas, es decir, trata al eslabón como si de una varilla se tratase. Además, al estar compuesta por funciones trigonométricas el cálculo de las matrices de inercia y rigidez se hacen más complicadas. Cosa que no ocurre en el caso del método de elementos finitos, donde las funciones de modos son polinomiales. Aun así las respuesta obtenida por el método de elementos finitos esta retardada en el tiempo en comparación con el de modos asumidos debido a que la primera sobreestima ligeramente las frecuencias naturales originales del sistema [23].

Por lo tanto, considerando que se trabaja con un modelo similar a un cobot de UR donde la sección de los eslabones es constante y de geometría cilíndrica, se adopta el método de los modos asumidos.

No obstante, trabajar con este método exige considerar otras hipótesis que se analizan a continuación.

### 2.2.2. Obtención de los mode shape

Las fuerzas consideradas, las condiciones de contorno que se emplean o el número de modos utilizados en la aproximación, definen cuan exactos y representativos son los resultados.

#### 2.2.2.1. Teoría de vigas

Dos técnicas han sido empleadas en la bibliografía para determinar las deflexiones en las vigas. La de Timoshenko y la de Euler- Bernoulli.

La teoría de Euler-Bernoulli trabaja con las siguientes hipótesis [40]:

1. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje neutro de la viga.

2. El desplazamiento lateral es nulo.
3. Las deformaciones no lineales así como la fricción interna u otras perturbaciones externas son despreciables
4. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación

En cambio la teoría de vigas de Timoshenko mantiene las tres primeras hipótesis, pero no cumple con la cuarta debido a la consideración de las fuerzas cortantes pudiendo observar su efecto en la fig. 2.4 [12]

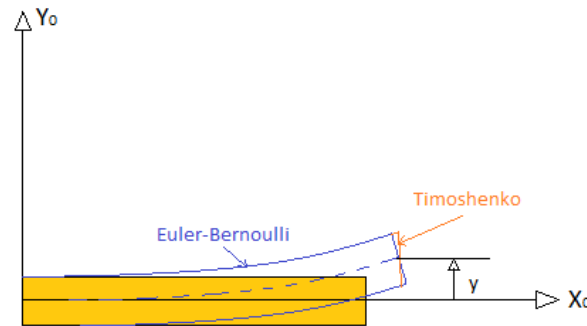


Figura 2.4: Barras de Euler-Bernoulli y Timoshenko

Cuando la longitud de la sección transversal de una viga es considerable comparando con su longitud, el efecto de la inercia de rotación y el de los esfuerzos cortantes se hacen perceptibles, afectando tanto a la energía potencial y cinética y a las frecuencias naturales del sistema, por lo que se hace necesario el uso de la teoría de vigas de Timoshenko.

En cuanto a los eslabones de un cobot concierne, su longitud es considerablemente grande comparando con la longitud transversal, por lo que se estipulan resultados parecidos empleando ambas teorías, siendo el de Euler-Bernoulli el más simple. Por lo que se trabaja con ésta.

Por lo tanto definiendo la ecuación diferencial dinámica de vigas de Euler-Bernoulli,

$$(EI)_i \frac{\partial^4 y_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \rho_i \frac{\partial^2 y_i(x_i, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.1)$$

Donde  $(EI)_i$  es la rigidez flexural del eslabón  $i$ ,  $\rho_i$  es la densidad lineal y  $y_i(x_i, t)$  la deformación, que como se observa depende tanto del tiempo como de la posición.

### 2.2.2.2. Condiciones de contorno

Al trabajar con el método de los modos asumidos y la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, es necesario decidir las condiciones de contorno a introducir para resolver la ecuación diferencial. Para los casos en los que la inercia del motor que se encuentra en la articulación es grande, y se trabaja con una carga pequeña, las condiciones que mejores resultados producirán serán las de una barra empotrada en la articulación y libre en el otro extremo [28].

$$\begin{aligned}y_i(0, t) &= 0 \\y_i'(0, t) &= 0 \\y_i''(l, t) &= 0 \\y_i'''(l, t) &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado, cuando se trabaja con motores con menor inercia y mayor carga el modelo se asemeja más a la de una barra biarticulada, y por tanto las condiciones de contorno son las siguientes:

$$\begin{aligned}y_i(0, t) &= 0 \\y_i''(0, t) &= 0 \\y_i(l, t) &= 0 \\y_i''(l, t) &= 0\end{aligned}$$

Aun así, el modelo más representativo [28] es la que trabaja con las condiciones de contorno de *masa*, es decir, el que considera la masa de los siguientes eslabones a pesar de la dificultad de cuantificar las inercias variables en el tiempo.

Las condiciones de contorno para la base siguen siendo las mismas

$$\begin{aligned}y_i(0, t) &= 0 \\y_i'(0, t) &= 0\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

con  $i = 1 \dots N_{ax}$  donde  $N_{ax}$  es la cantidad de eslabones libres que componen el mecanismo. Realizando el balance de momento y fuerza de cizallamiento para el otro extremo,

$$\begin{aligned}
(EI)_i \frac{\partial^2 y_i(x_{i,t})}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=l_i} &= -J_{Li} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial y_i(x_{i,t})}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} \right) - (MD)_i \frac{d^2}{dt^2} \left( y_i(x_{i,t}) \Big|_{x_i=l_i} \right) \\
(EI)_i \frac{\partial^3 y_i(x_{i,t})}{\partial x_i^3} \Big|_{x_i} &= M_{Li} \frac{d^2}{dt^2} \left( y_i(x_{i,t}) \Big|_{x_i=l_i} \right) + (MD)_i \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial y_i(x_{i,t})}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i} \right)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Donde  $M_{Li}$  y  $J_{Li}$  son la masa actual y la inercia al final del eslabón  $i$  pertenecientes tanto a los eslabones, actuadores o a la carga. Por otro lado,  $(MD)_i$  aporta el efecto de los subsiguientes eslabones multiplicando su masa por la distancia que hay entre su centro de masa y la terna de referencia, que está situado al final del eslabón  $i$ .

Por lo tanto para el caso del doble péndulo estos parámetros son definidos de la siguiente manera para el primer eslabón como,

$$\begin{aligned}
M_{L1} &= m_2 + m_{h2} + m_p \\
J_{L1} &= J_{o2} + J_{h2} + J_p + m_p l_2^2 \\
MD_1 &= (m_2 d_2 + m_p l_2) \cos(\theta_2) \\
&\quad - [(v_{21} + m_p \phi_{21,e}) \delta_{21} + (v_{22} + m_p \phi_{22,e}) \delta_{22}] \sin(\theta_2)
\end{aligned}$$

y para el segundo eslabón,

$$\begin{aligned}
M_{L2} &= m_p \\
J_{L2} &= J_p \\
MD_2 &= 0
\end{aligned}$$

donde  $m_i$  es la masa del eslabón  $i$ ,  $m_{hi}$  la masa del motor  $i$ ,  $m_p$  la masa de la carga,  $J_{oi}$  es la inercia del eslabón  $i$  calculada al centro de masa,  $J_{hi}$  la inercia del motor  $i$ ,  $J_p$  la inercia de la carga y  $v_{ij}$  el momento de deformación de orden 0 para el eslabón  $i$  y modo  $j$  [28].

La dependencia espacial de  $MD_i$ , hace que el cálculo exacto de las condiciones de contorno y por tanto de la función de modos sea dependiente de la configuración instantánea del robot. Esto obliga a recalcular la posición para cada instante aumentando la carga computacional y su consiguiente implementación al modelo.

A fin de simplificar el cálculo, una aproximación válida es la de computar la energía cinética correspondiente a la configuración sin deformar [30]. Para el caso particular donde  $\theta_2 = \pm\pi/2$ , se obtiene que  $MD_1 = 0$ .

La implementación del método de modos asumidos ofrece la ventaja de poder trabajar independientemente con las variables temporales y espaciales. Por lo tanto, separando los terminos relacionados con cada variable, la solución conjunta de la ec. 2.2.10, puede ser expresada como:

$$y_i(x_{i,t}) = \sum_{j=1}^{m_i} \phi_{ij}(x_i) \delta_{ij}(t) \quad (2.2.4)$$

donde  $\delta_{ij}(t)$  son las variables temporales asociadas a las funciones modales  $\phi_{ij}(x_i)$  del eslabón  $i$ . Este conjunto de  $\delta_{ij}(t)$  conforman las coordenadas generalizadas encargadas de definir la deflexión de los eslabones, definiéndose como

$$\delta_{ij}(t) = e^{j\omega_{ij}t} \quad (2.2.5)$$

mientras el vector característico espacial se expresa de la siguiente manera,

$$\phi_{ij}(x_i) = C_{1,ij} \sin(\beta_{ij}x_i) + C_{2,ij} \cos(\beta_{ij}x_i) + C_{3,ij} \sinh(\beta_{ij}x_i) + C_{4,ij} \cosh(\beta_{ij}x_i) \quad (2.2.6)$$

Los factores  $\omega_{ij}$  de la ec. 2.2.5 son las frecuencia naturales del eslabón  $i$  asociadas al modo  $j$ . Estos son calculados mediante los  $\beta_{ij}$  de la ec. 2.2.6 que a su vez se obtienen como  $\beta_{ij}^4 = \omega_{ij}^2 \rho_i / (EI)_i$ , observándose su dependencia en la rigidez flexural.

Aplicando las condiciones de contorno en el extremo empotrado,

$$\begin{aligned} C_{3,ij} &= -C_{1,ij} \\ C_{4,ij} &= -C_{2,ij} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Las condiciones de contorno de masa en el otro extremo conducen a un sistema homogéneo [29] de la ec. 2.2.8, donde las soluciones obtenidas en el extremo empotrado ec. 2.2.7 ya han sido sustituidos.

$$[F(\beta_{ij})] \begin{bmatrix} C_{1,ij} \\ C_{2,ij} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.8)$$

Este sistema a su vez sirve para establecer una relación entre  $C_{1,ij}$  y  $C_{2,ij}$ . Introduciendo la ec. 2.2.8 en la ec. 2.2.6



$$\begin{aligned}\phi_{ij}(x_i) = & C_{1,ij} (\sin(\beta_{ij}x_i) - \sinh(\beta_{ij}x_i)) \\ & + C_{1,ij}(S) (\cos(\beta_{ij}x_i) - \cosh(\beta_{ij}x_i))\end{aligned}\quad (2.2.9)$$

siendo el término  $S$  en la ec. 2.2.9

$$S = \frac{-\sin(\beta_{ij}l_i) - \sinh(\beta_{ij}l_i) - \frac{\beta_{ij}^3 J_{Li}}{\rho_i} \cos(\beta_{ij}l_i) + \frac{\beta_{ij}^3 J_{Li}}{\rho_i} \cosh(\beta_{ij}l_i)}{\cos(\beta_{ij}l_i) + \cosh(\beta_{ij}l_i) - \frac{\beta_{ij}^3 J_{Li}}{\rho_i} \sin(\beta_{ij}l_i) - \frac{\beta_{ij}^3 J_{Li}}{\rho_i} \sinh(\beta_{ij}l_i)}$$

Para obtener los valores de  $\beta$  se sirve de la ecuación de las frecuencias que surge de igualar a 0 el determinante de la matriz  $F(\beta_{ij})$  [29].

$$\begin{aligned}0 = & (1 + \cos(\beta_{ij}l_i) \cosh(\beta_{ij}l_i)) \\ & - \frac{\beta_{ij} M_{Li}}{\rho_i} (\sin(\beta_{ij}l_i) \cosh(\beta_{ij}l_i) - \cos(\beta_{ij}l_i) \sinh(\beta_{ij}l_i)) \\ & - \frac{\beta_{ij}^3 J_{Li}}{\rho_i} (\sin(\beta_{ij}l_i) \cosh(\beta_{ij}l_i) + \cos(\beta_{ij}l_i) \sinh(\beta_{ij}l_i)) \\ & + \frac{\beta_{ij}^4 J_{Li} M_{Li}}{\rho_i^2} (1 - \cos(\beta_{ij}l_i) \cosh(\beta_{ij}l_i))\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

Como se observa la ecuación de las frecuencias, ec. 2.2.10, depende explícitamente de los valores  $M_{Li}$ ,  $J_{Li}$  y  $(MD)_i$ . Las primeras raíces de esta ecuación facilitan valores positivos de  $\beta_{ij}$  que a su vez sirven para calcular el valor de las constantes  $C_{1,ij}$  y  $C_{2,ij}$ .

Siendo obtenidos todos los parámetros necesarios para la descripción de la deflexión, se procede a la ortonormalización de las funciones modales que acarrea poder simplificar los términos diagonales de la matriz de inercias [29]. Se fija entonces la siguiente condición,

$$\int_0^{l_i} \phi_i(x_i) \rho_i \phi_i(x_i) = m_i$$

Para tener una descripción precisa de las deflexiones del eslabón alcanza con considerar solo los primeros modos [31]. Dicha justificación viene determinada por el hecho que cuanto mayor es la frecuencia natural del modo, menor es su amplitud y por lo tanto menos significativo su aporte a la respuesta total. Por lo tanto se trabaja con los primeros dos modos.

### 2.2.3. Descripción cinemática

Se presenta el problema de la cinemática directa considerando el efecto de las deformaciones elásticas en el siguiente apartado. Para ello, según los resultados obtenidos en la sección anterior, se obtienen las matrices de roto-traslación para una cadena cinemática donde el número de ejes coincidirá con el número de eslabones móviles  $N_{ax}$

Las ternas empleadas para describir el movimiento del sistema, a diferencia de los mecanismos rígidos, son duplicadas. Esto se debe a la entrada de la deflexión ya que al deformarse el eslabón, la posición de una articulación situada al final de este eslabón ya no coincide con el eje  $x$  de la articulación que la precede, siendo coincidente al eje neutro en la articulación (siguiendo la convención de Denavit Hartenberg). Por lo tanto se necesitará de dos ternas, una para describir el cambio de posición debido al giro de la articulación y la segunda para describir el cambio de posición debido a la deflexión.

Se determina entonces una terna en la entrada del eslabón [32] con subíndice par, en el que el eje  $x$  coincide con el eje neutro del eslabón antes de la deflexión y otro en la salida con subíndice impar y con el eje  $x$  coincidente con el eje neutro tras la deflexión. Así, las ternas impares sirven para reproducir las variaciones producidas por las deflexiones mientras las ternas pares reflejan el movimiento del siguiente eslabón debido a la rotación. Cabe añadir que para ambas ternas el vector  $z$  coincide con el eje de giro. Ver fig. 2.5

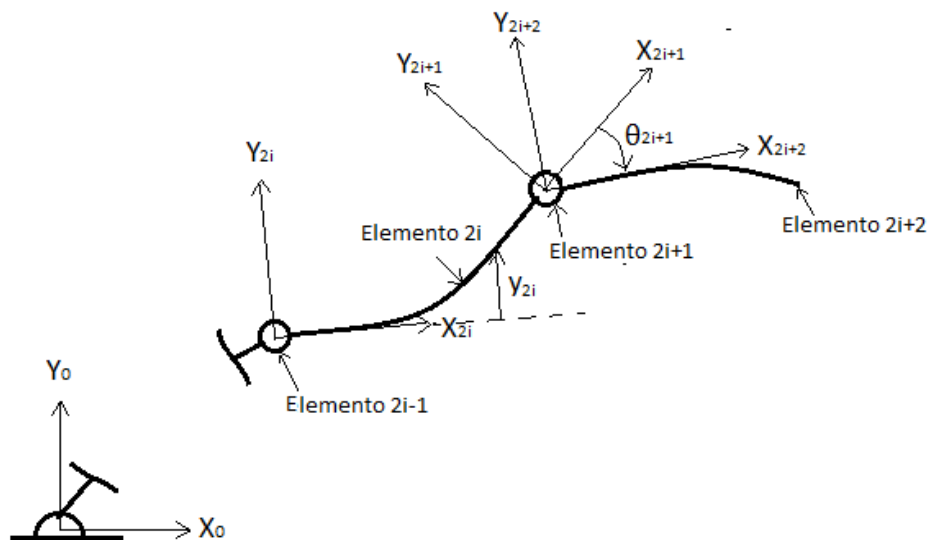


Figura 2.5: Cadena cinemática de eslabones elásticos.

Se redefine también el vector de coordenadas generalizado  $\mathbf{q}$ , para el caso de eslabones flexibles y articulaciones rígidas. Para este caso  $\boldsymbol{\theta}$  sigue usándose también para definir la coordenada generalizada asociada al giro de la articulación y siendo definida en términos del eslabón. No obstante a falta de flexibilidad en la articulación su relación con la coordenada generalizada del motor es directa,  $\boldsymbol{\theta}_m = N\boldsymbol{\theta}$ . Las coordenadas generalizadas asociadas a la deflexión del eslabón, son representados por  $\delta_{ij}$  siendo ésta la misma que se ha representado en ec. 2.2.5.

$$\mathbf{q} = [\theta_1 \quad \delta_{1,1} \quad \delta_{1,2} \quad \dots \quad \delta_{1,j} \quad \theta_2 \quad \delta_{2,1} \quad \delta_{2,2} \quad \dots \quad \delta_{2,j} \quad \dots \quad \theta_i \quad \delta_{i,1} \quad \delta_{i,2} \quad \dots \quad \delta_{i,j}]^T \quad (2.2.11)$$

donde  $i$  es está asociado a la articulación o eslabón móvil y  $j$  el índice asociado a la función de modo del eslabón de  $i$ .

Para facilitar la obtención de las matrices dinámicas a la hora de programar se redefinirán los parámetros de ec. 2.2.11 de la siguiente manera,

$$\mathbf{q} = [q_{1,1} \quad q_{2,1} \quad q_{2,2} \quad \dots \quad q_{2,j} \quad \dots \quad q_{i-1,1} \quad q_{i,1} \quad q_{i,2} \quad \dots \quad q_{i,j}]^T \quad (2.2.12)$$

donde para este caso se ha separado el sistema compuesto por la articulación y eslabón y se ha empleado un subíndice impar para referirse a las articulaciones y uno par para referirse a los eslabones, siendo ahora  $i$  el índice del número de elemento.

Por lo tanto si se define el vector de posición de un elemento diferencial en el eslabón  $i$ , por lo tanto par, respecto a la terna  $i$ , situada a la entrada del mencionado eslabón, obtendremos,

$${}^{2i}\mathbf{h}_{2i} = [\eta_{2i} \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T + \sum_{j=1}^{N_{mod}} q_{2i,j} [x_{2i,j} \quad y_{2i,j} \quad z_{2i,j} \quad 0]^T \quad (2.2.13)$$

Donde el primer término de 2.2.13 sirve para describir la posición del elemento diferencial en el caso de no haber ninguna flexibilidad, cuyo efecto es añadido por el segundo sumando. El elemento  $\eta_{2i}$  describe la longitud del eje neutro sin deformación. Por otro lado, el vector  $[x_{2i,j}, y_{2i,j}, z_{2i,j}, 0]^T$  esta compuesto por las funciones modales del elemento  $2i$  y el modo  $j$ , siendo  $N_{mod}$  el número de modos considerado mientras  $q_{i,j}$  es el vector compuesto por las coordenadas generalizadas asociadas a la deflexión como se ha introducido en ec. 2.2.12. Por lo tanto, si se define la terna situada en el segundo extremo del eslabón respecto al primero, sustituyendo  $\eta_{2i}$  por  $l_{2i}$  y expresándolo matricialmente resulta,

$$A_{2i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{N_{mod}} q_{2i,j} \begin{bmatrix} 0 & -y'_{ie} & x'_{ie} & x_{2i} \\ y'_{ie} & 0 & -z'_{ie} & y_{2i} \\ -x'_{ie} & z'_{ie} & 0 & z_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.14)$$

Donde  $A_{2i}$  es la matriz de roto traslación para el caso de índice par. Obsérvese que las rotaciones debida a la deflexiones del eslabón son descritas como las derivadas en el espacio de las funciones modales tras ser normalizadas [28].

Por otro lado, para describir la posición de la terna de entrada del eslabón respecto a la terna de salida del eslabón que la precede, solo deberán considerarse los giros en  $\boldsymbol{x}$  y en  $\boldsymbol{z}$  y desplazamientos en  $\boldsymbol{z}$ , siendo empleados los componentes de la matriz de roto traslación de un sistema rígido. Utilizando la notación de Denavit Hartenberg,  $\theta$  para definir los giros en el eje  $\boldsymbol{z}$  y  $\alpha$  para definir los giros en  $\boldsymbol{x}$ , la matriz de roto traslación para el caso de índice impar se expresa como,

$$A_{2i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2i-1}) & -\sin(\theta_{2i-1}) \cos(\alpha_{2i-1}) & \sin(\theta_{2i-1}) \sin(\alpha_{2i-1}) & 0 \\ \sin(\theta_{2i-1}) & \cos(\theta_{2i-1}) \cos(\alpha_{2i-1}) & -\cos(\theta_{2i-1}) \sin(\alpha_{2i-1}) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_{2i-1}) & \cos(\alpha_{2i-1}) & d_{2i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

Empleando las matrices obtenidas en ec. 2.2.14 y ec. 2.2.15 cualquier terna podrá definirse respecto a la terna 0 o de referencia según,

$${}^0W_{2i-1}(\eta) = A_1 A_2 \dots A_{2i-1} \quad (2.2.16)$$

#### 2.2.4. Formulación de la dinámica

Definida la cinemática, el siguiente paso consiste en obtener las ecuaciones dinámicas. Para ello se seguirá la formulación de Euler-Lagrange. Del mismo modo que en el caso de articulaciones flexibles, primero se calculan las energías potencial y cinética para luego resolver la ecuación de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_{p,r}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_{p,r}} + \frac{\partial U}{\partial q_{p,r}} = Q_{p,r}$$

donde

$$p = 1, \dots, 2N_{ax} \quad \begin{cases} r = & 1, \dots, N_{mod} & p \text{ par} \\ r = & 1 & p \text{ impar} \end{cases}$$

$K$  representa la energía cinética,  $U$  la energía potencial y  $Q_{p,r}$  un vector compuesto por las fuerzas generalizadas, es decir, los torques en los ejes.

Como ocurría en el caso de articulaciones flexibles, tanto la energía cinética como la energía potencial del sistema están compuestas por componentes pertenecientes a los eslabones y a los actuadores, de manera que,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) &= U_{\text{eslabon}} + U_{\text{actuador}} \\ K(\dot{\mathbf{q}}) &= K_{\text{eslabon}} + K_{\text{actuador}} \end{aligned}$$

observándose un cambio en el cálculo de la energía potencial, donde el componente elástico ahora aparece en el eslabón.

$$\begin{aligned} U_{\text{eslabon}} &= U_{\text{grav,eslabon}(q_{2i})} + U_{\text{elas,eslabon}(q_{2i})} \\ U_{\text{actuador}} &= U_{\text{grav,actuador}(q)} \end{aligned}$$

Para facilitar la comprensión del cambio introducido, primero se trabaja solo considerando la dinámica de los eslabones al que más tarde, se le añade la dinámica de los actuadores.

Comenzando por la energía potencial gravitacional del eslabón,

$$U_{\text{grav,eslabon}(q_{2i})} = \sum_{i=1}^{N_{ax}} \int_0^{l_{2i}} \mathbf{g}^T W_{2i-1} {}^{2i}h_{2i}(\eta) \rho(\eta) d\eta \quad (2.2.17)$$

se observa que esta expresión no varía respecto a la utilizado en un sistema compuesto por elementos rígidos [2], siendo las mismas componentes cinemáticas las que introducen el cambio, ec. 2.2.16 y ec. 2.2.13. Por otro lado la metodología seguida para situar los ejes hace que solo afecte en el eje y pudiéndose definir el vector  $\mathbf{g}$  de ec. 2.2.17 de la siguiente manera,

$$\mathbf{g}^T = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 0] = [0 \quad 9,81 \quad 0 \quad 0]$$

sustituyendo  ${}^i h_i$  obtenido en ec. 2.2.13 en la ec. 2.2.17

$$U_{\text{grav,eslabon}(q_{2i})} = \sum_{i=1}^{N_{ax}} \mathbf{g}^T W_{2i-1} \left[ mg_{2i} + \sum_{j=1}^{N_{mod}} q_{2i,j} m e_{2i,j} \right] \quad (2.2.18)$$

siendo  $mg_{2i}$  y  $m e_{2i,j}$  en 2.2.18,

$$\begin{aligned} mg_{2i} &= \int_0^{l_{2i}} [\eta_{2i} \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \rho(\eta) d\eta \\ m e_{2i,j} &= \int_0^{l_{2i}} [x_{2i,j} \quad y_{2i,j} \quad z_{2i,j} \quad 0]^T \rho(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

El segundo componente de la energía potencial es el introducido por la deflexión de los eslabones. Las diferentes deformaciones que un brazo robótico tiene en su movimiento son considerados para ello. Flexionado en los ejes  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ , calculada mediante sus respectivos componentes de momento de inercia,  $I_y, I_z$  y la extensión y torsión en el eje  $\mathbf{x}$ , calculados mediante la sección transversal del eslabón,  $A_x$  y la inercia de torsión,  $I_x$ .

$$U_{\text{elas,eslabon}(q_{2i})} = \sum_{i=1}^{N_{ax}} \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left\{ E \left[ (I_z)_{2i} \left( \frac{\partial^2 z_{2i}}{\partial \eta^2} \right)^2 + (I_y)_{2i} \left( \frac{\partial^2 y_{2i}}{\partial \eta^2} \right)^2 + (A_x)_{2i} \left( \frac{\partial x_{2i}}{\partial \eta} \right)^2 \right] + G(I_x)_{2i} \left( \frac{\partial(\theta_x)_{2i}}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\eta \quad (2.2.20)$$

Como ocurre con la energía potencial gravitacional, el cambio en el cálculo de la energía cinética también es introducido por el cambio de la descripción cinemática. Por ello se llega a la expresión introducida en la ec. 2.1.3. Aun así es interesante analizar las variaciones debidas a la deflexión. Procediendo a su cálculo,

$$K_{\text{eslabon}2i} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{2i}} \text{Tr} \{ \mathbf{v}_{2i} \mathbf{v}_{2i}^T \} \rho(\eta) d\eta \quad (2.2.21)$$

y expresando la ec. 2.2.21 en función de la derivada de la ec. 2.2.13 expresado en la terna de referencia, y por lo tanto siendo pre multiplicado por el respectivo matriz de roto traslación resulta

$$K_{\text{eslabon}i} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{2i}} \text{Tr} \{ {}^0 \dot{\mathbf{h}}_{2i} {}^0 \dot{\mathbf{h}}_{2i}^T \} \rho(\eta) d\eta \quad (2.2.22)$$

realizando la derivada,

$${}^0 \dot{\mathbf{h}}_{2i}(\eta) = \dot{W}_{2i-1} {}^i \mathbf{h}_{2i}(\eta) + W_{2i-1} {}^{2i} \dot{\mathbf{h}}_{2i}(\eta) \quad (2.2.23)$$

donde

$$\dot{W}_{2i-1} = \sum_{j=1}^{2i-1} \left[ A_1 A_2 \dots \left( \sum_{k=1}^{N_{mod}} \frac{\partial A_j}{\partial q_{j,k}} \right) \dots A_{2i-1} \right] \dot{q}_{j,k} = \sum_{j=1}^{2i-1} \sum_{k=1}^{n_j} \left( \frac{\partial W_{2i-1}}{\partial q_{j,k}} \right) \dot{q}_{j,k}$$

$${}^{2i} \dot{\mathbf{h}}_{2i} = \sum_{j=1}^{N_{mod}} \dot{q}_{2i,j} [x_{2i,j} \quad y_{2i,j} \quad z_{2i,j} \quad 0]^T$$

introduciendo estas dos expresiones en ec. 2.2.23 y ésta a su vez en ec. 2.2.22 se obtiene la expresión de la energía cinética.

### 2.2.5. Obtención del modelo dinámico

Para una correcta simulación o para realizar una síntesis de controladores, hay que obtener las ecuaciones dinámicas del modelo de manera no recursiva. Para ello los componentes dinámicos del sistema han de ser separados en términos, inerciales, de Coriolis, centrífugos, gravitacionales y términos de rigidez estructural.

La resolución de la ecuación de Lagrange deriva en,

$$[M(\mathbf{q})] \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + K\mathbf{q} = Q \quad (2.2.24)$$

Donde la  $M$  es la matriz de inercias,  $C$  está compuesto por términos centrífugos y de Coriolis,  $\mathbf{G}$  por gravitacionales y  $K$  por términos de rigidez estructural.

La dimensión de estas matrices y vectores es consecuencia de las coordenadas generalizadas y por tanto es función de la cantidad de eslabones y de los modos considerados.

Se comienza con el análisis de la matriz inercial, una matriz cuadrada y simétrica, cuya dimensión es la misma que la cantidad de coordenadas generalizadas,  $Dim(M) = N_{ax} + (N_{ax}N_{mod})$ .

Para referirse a cada componente de la matriz se definen los siguientes parámetros.

$$\begin{aligned} n_{fila} &= n_f = \sum_{i=1}^{p-1} n_i + r \\ n_{columna} &= n_c = \sum_{i=1}^{s-1} n_i + t \end{aligned}$$

siendo las coordenadas generalizadas definidas como  $q_{p,r}$  y  $q_{s,t}$ , donde  $p$  y  $s$  son los indicadores del elemento, y  $r$  y  $t$  los indicadores del segundo subíndice de la coordenada generalizada, 1 para  $p$  y  $s$  impar, y el modo considerado para  $p$  y  $s$  par. Por otro lado,  $n_i$  define el total de coordenadas generalizadas asociadas al elemento  $p$  y  $s$  siendo 1 para  $p$  y  $s$  impar, y el total de modos considerados para  $p$  y  $s$  par.

Por lo tanto la matriz  $M$  está compuesta por los siguientes elementos,

$$M(n_f, n_c) = m_{(n_f, n_c)}^{(1)} + m_{(n_f, n_c)}^{(2)} + m_{(n_f, n_c)}^{(3)} \quad (2.2.25)$$

$$m_{(n_f, n_c)}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_{ax}} Tr \left( \frac{\partial W_{2i-1}}{\partial q_{s,t}} \left[ C_i + \sum_{j=1}^{N_{mod}} [C_{i,j} + C_{i,j}^T] q_{2i,j} + \sum_{j=1}^{N_{mod}} \sum_{k=1}^{N_{mod}} C_{i,j,k} q_{2i,j} q_{2i,k} \right] \frac{\partial W_{2i-1}^T}{\partial q_{p,r}} \right)$$

$$m_{(n_f, n_c)}^{(2)} = Tr \left( \frac{\partial W_{s-1}}{\partial q_{p,r}} \left[ C_{s,t} + \sum_{K=1}^{n_s} C_{s,t,k} q_{s,k} \right] W_{s-1}^T \right)$$

$$m_{(n_f, n_c)}^{(3)} = \begin{cases} Tr (W_{p-1} C_{p,r,t} W_{p-1}^T); & s = p \\ 0 & s \neq p \end{cases}$$

Donde los componentes  $C_i$ ,  $C_{i,j}$  y  $C_{i,j,k}$  son nuevamente los definidos en [32]

$$\begin{aligned} C_{2i} &= \int_0^{l_{2i}} [\eta_{2i} \ 0 \ 0 \ 1]^T [\eta_{2i} \ 0 \ 0 \ 1] \rho(\eta) d\eta \\ C_{2i,j} &= \int_0^{l_{2i}} [\eta_{2i} \ 0 \ 0 \ 1]^T [x_{2i,j} \ y_{2i,j} \ z_{2i,j} \ 0] \rho(\eta) d\eta \\ C_{2i,j,k} &= \int_0^{l_{2i}} [x_{2i,k} \ y_{2i,k} \ z_{2i,k} \ 0]^T [x_{2i,j} \ y_{2i,j} \ z_{2i,j} \ 0] \rho(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Obsérvese que tanto las expresiones de ec. 2.2.19 y ec. 2.2.26 son integradas en el eje neutro del eslabón.

Para la construcción de la matriz  $C$ , se juntan los parámetros centrífugos con los de Coriolis obtenidos en la ec. 2.2.22. Expresándolo en función de 2.2.26

$$\begin{aligned} C(n_f, 1)(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^{2i-1} \sum_{u=1}^{2i-1} \sum_{t=1}^{n_s} \sum_{v=1}^{n_s} Tr (C^1) + \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^{2i-1} \sum_{t=1}^{n_s} Tr (C^2) \\ &+ \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=1}^{n_s} \sum_{u=1}^{p-1} \sum_{v=1}^{n_u} Tr (C^3) + \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=1}^{n_s} Tr (C^4) \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Donde



$$C^1 = \left( \frac{\partial^2 W_{2i-1}}{\partial q_{s,t} \partial q_{u,v}} \left[ C_{2i} + \sum_{j=1}^{N_{mod}} [C_{2i,j} + C_{2i,j}^T] q_{2i,j} + \sum_{j=1}^{N_{mod}} \sum_{k=1}^{N_{mod}} C_{2i,j,k} q_{2i,j} q_{2i,k} \right] \frac{\partial W_{2i-1}^T}{\partial q_{p,r}} \dot{q}_{s,t} \dot{q}_{u,v} \right)$$

$$C^2 = \left( \frac{\partial W_{2i-1}}{\partial q_{p,r}} \left[ 2 \sum_{j=1}^{N_{mod}} C_{2i,j} \dot{q}_{2i,j} + 2 \sum_{j=1}^{N_{mod}} \sum_{k=1}^{N_{mod}} C_{2i,j,k} q_{2i,k} \dot{q}_{2i,j} \right] \frac{\partial W_{2i-1}^T}{\partial q_{s,t}} \dot{q}_{s,t} \right)$$

$$C^3 = \left( \frac{\partial^2 W_{2i-1}}{\partial q_{s,t} \partial q_{u,v}} \left[ C_{p,r} + \sum_{K=1}^{n_p} C_{p,r,k} q_{p,k} \right] W_{p-1}^T \dot{q}_{s,t} \dot{q}_{u,v} \right)$$

$$C^4 = \left( \frac{\partial W_{p-1}}{\partial q_{s,t}} \left[ 2 \sum_{k=1}^{n_p} C_{p,r,k} \dot{q}_{p,k} \right] W_{p-1}^T \dot{q}_{s,t} \right)$$

Los elementos de la vector de gravedad se expresan de la siguiente manera,

$$\mathbf{G}(n_f, 1)(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N_{ax}} \mathbf{g}^T \frac{\partial W_{2i-1}}{\partial q_{p,r}} \left[ m g_{2i} + \sum_{j=1}^{N_{mod}} m e_{2i,j} q_{2i,j} \right] + \mathbf{g}^T W_{p-1} m e_{p,r} \quad (2.2.28)$$

Finalmente se presenta la matriz de rigidez estructural, cuyos parámetros son obtenidos de la expresión de energía potencial elástica.

Expresando ec. 2.2.20 de una manera compacta,

$$U_{\text{elas,eslabon}(\theta_i, \delta_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{ax}} \sum_{j=1}^{N_{mod}} \sum_{k=1}^{N_{mod}} k_{2i,j,k} q_{2i,j} q_{2i,k} \quad (2.2.29)$$

donde  $k_{i,j,k}$  de ec. 2.2.29 se puede representar en función de diferentes deformaciones sufridas por el eslabón,

$$\begin{aligned}
k_{2i,j,k} &= (k_x)_{2i,j,k} + (k_y)_{2i,j,k} + (k_z)_{2i,j,k} + (k_t)_{2i,j,k} \\
(k_x)_{2i,j,k} &= \int_0^{l_{2i}} E(A_x)_{2i} \left( \frac{\partial x_{2i,j}}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial x_{2i,k}}{\partial \eta} \right) d\eta \\
(k_y)_{2i,j,k} &= \int_0^{l_{2i}} E(I_y)_{2i} \left( \frac{\partial^2 y_{2i,j}}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 y_{2i,k}}{\partial \eta^2} \right) d\eta \\
(k_z)_{2i,j,k} &= \int_0^{l_{2i}} E(I_z)_{2i} \left( \frac{\partial^2 z_{2i,j}}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 z_{2i,k}}{\partial \eta^2} \right) d\eta \\
(k_t)_{2i,j,k} &= \int_0^{l_{2i}} G(I_x)_{2i} \left( \frac{\partial(\theta_x)_{2i,j}}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial(\theta_x)_{2i,k}}{\partial \eta} \right) d\eta
\end{aligned}$$

Una vez descrita la dinámica de los eslabones flexibles, se le incluye la dinámica de las articulaciones rígidas. Para ello se emplean la ec. 2.1.4 y la ec. 2.2.18 con los cambios necesarios.

Los cambios en la expresión de la energía potencial gravitacional acarrea la inclusión de la masa de los actuadores al final de cada eslabón. Esta masa estará distribuida sobre el eje principal del eslabón considerando una densidad por unidad de área tal y como se ha hecho para la masa del eslabón. Esto acarrea trabajar la suposición de que el actuador está situado al final del eslabón, coincidiendo el extremo de ambos de manera que ninguno sobresalga.

Así se debe modificar la ec. 2.2.19 y ec. 2.2.26 de tal manera que las integrales se realizan en dos pasos. La primera desde la entrada del eslabón hasta el comienzo del motor, donde solo la densidad del eslabón es considerada. La segunda desde el comienzo del motor hasta la salida del eslabón, y por tanto hasta el final del motor, donde a la densidad lineal del eslabón habrá que añadirle la densidad lineal de los motores.

Los cambios en el primer término de ec. 2.1.4 se incluyen con el cambio de la distribución de masa tal y como se acaba de explicar. El segundo término no sufre ninguna variación y acarrea la inclusión del término  $J_m$ . En este caso también los acoplamientos inerciales no afectan al sistema debido a la reducción en los actuadores.

Es fácil ver que la inclusión de la dinámica de los actuadores acarrea la inclusión de nuevas coordenadas generalizadas. No obstante, a falta de flexibilidad, las coordenadas generalizadas asociadas a  $\theta$  son las mismas, tras aplicársele la reducción, que las coordenadas asociadas a  $\theta_m$ . Por lo tanto reordenando el vector de las coordenadas generalizadas de tal manera que  $\theta$  sea el vector compuesto por los  $\theta_i$  de ec. 2.2.11, y por consiguiente las coordenadas generalizadas de las articulaciones y  $\delta$  esté compuesto por las

$\delta_{i,j}$  de la ecuación ec. 2.2.11, e incluyendo las matrices dinámicas obtenidas en ec. 2.2.25, ec. 2.2.27, ec. 2.2.28, ec. 2.2.29 en ec. 2.2.24

$$[\boldsymbol{\theta}^T \quad \boldsymbol{\delta}^T] = [(q_{1,j}, q_{3,j} \dots)^T \quad (q_{2,j}, q_{4,j} \dots)^T] \quad (2.2.30)$$

para que finalmente se exprese como,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R\boldsymbol{\tau}_{eje} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_r & m_{rf} \\ m_{rf} & m_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}) \\ C_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \\ G_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\tau} &= [J_m] \ddot{\boldsymbol{\theta}}_m + R\boldsymbol{\tau}_{eje} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Siendo  $\boldsymbol{\tau}_{eje}$  el torque transmitido desde el motor al eje a falta de elasticidad en la articulación.

### 2.2.6. Caso de estudio

Del mismo modo que en el caso de un sistema de articulaciones elásticas, el efecto de las deflexiones en los eslabones también se analizado sobre un péndulo doble. Para ello se han modelizado sus ecuaciones dinámicas en el entorno informático formado por Matlab y Simulink. Como se ha podido observar en la teoría, la obtención de las ecuaciones dinámicas lleva a realizar un número de trabajos previos que consisten en obtener los modos y las matrices de roto traslación. A causa de esto, la programación ha resultado mucho más compleja, por lo que es necesario profundizar la metodología seguida para su obtención y así facilitar el entendimiento. Primero pero, se presentará el modelo empleado.

Los parámetros y magnitudes empleados para la simulación aparecen listados en la tabla 2.2, válidos para ambos eslabones, y actuadores.

Las hipótesis y simplificaciones para el caso de estudio han sido los siguientes:

1. Las deformaciones se producen sobre el plano, es decir sobre el eje  $\mathbf{y}_i$
2. No se considera la torsión en  $\mathbf{x}_i$
3. La elongación en  $\mathbf{x}$  es desestimable
4. No se tienen deflexiones en  $\mathbf{z}_i$ .
5. Se asumen pequeñas deformaciones de manera que pueden aproximarse por  $\sin(\arctan(\frac{dy}{dx}|_{extremo})) = \frac{dy}{dx}|_{extremo}$

Parámetros Físicos	Valor
Densidad eslabon ( $\rho$ )	0.2 [Kg/m]
Longitud eslabón (l)	0.5 [m]
Masa eslabón (m)	0.1 [Kg]
Masa carga ( $m_p$ )	0.005 [Kg]
Masa motor ( $m_h$ )	1.0 [Kg]
Inercia eslabón ( $J_o$ )	0.0083 [Kgm <sup>2</sup> ]
Inercia motor ( $J_h$ )	0.1 [Kgm <sup>2</sup> ]
Inercia carga ( $J_p$ )	0.0 [Kgm <sup>2</sup> ]
Coefficiente viscoso motor ( $B_m$ )	0.03 [Nm/rads]
Rigidez flexural eslabón (EI)	10.0 [Nm <sup>2</sup> ]
Diametro motor ( $D_m$ )	0.1 [m]
Parametro del drive (Km)	1
Relación de reducción (N)	10

Cuadro 2.2: Parámetro del modelo de estudio con eslabones elásticos

Aunque todas las hipótesis se adecuen debidamente a la hora de extrapolar los resultados a un cobot, la cuarta suposición es débil ya que el cobot podrá sufrir deformaciones tanto en el eje  $y_i$  como en el eje  $z_i$ .

El diagrama de bloques en cambio, es el mismo que se ha presentado en la figura 2.1, con el único cambio de las funciones empleadas en el interior de la S-Function, que como bien se dijo antes es la encargada de la resolución de las ecuaciones dinámicas mediante su función interna `mdlDerivatives`.

En este caso, la S-function ha sido autogenerada. Esto quiere decir, que las matrices dinámicas han sido calculadas previamente de manera simbólica e introducidas como dato dentro de la S-Function, solo en función de las coordenadas generalizadas, evitando así formar las matrices dentro de la ejecución y ahorrar así un tiempo de computación considerable. Estas matrices dinámicas  $M$ ,  $C$ ,  $G$  y  $K$  han sido calculadas mediante tres scripts que se introducen a continuación.

1. `calcModeshapes`. Script que obtiene tanto las frecuencias naturales del sistema como las funciones modales normalizadas.

```

1 detF = vpa(simplify(det(F_sub)/beta(i,k)^5));
2 flag_root_not_found=1;
3 xseed=1;
4 while flag_root_not_found
5     aux=vpasolve(detF,beta(i,k),xseed);
6     if abs(aux-aux_ant)>1E-7
7         beta_val(i,k) = aux;
8         aux_ant=aux;
9         flag_root_not_found=0;
10    end

```

```

11 |         xseed=xseed+1;
12 |     end

```

En este fragmento de código se muestra el tipeo seguido para la consecución de las funciones de modo y las frecuencias naturales. Para ello se ha partido de la ecuación de frecuencias ec. 2.2.10. ésta ha sido obtenida de manera simbólica empleando las condiciones de contorno y de masa de una viga empotrada-libre, ec. 2.2.2 ec. 2.2.3 y se ha representado como  $F_{\text{sub}}$ .

Para extraer los valores de  $\beta_{ij}$  se resuelve el determinante siguiendo las siguientes consignas.

- $xseed$  es el número de referencia del cual parte el cálculo del determinante. Cada vez que se encuentra el valor buscado para  $\beta$  se incrementa en uno su valor. Esta manera de trabajar puede acarrear problemas cuando dos frecuencias naturales se encuentran entre dos números enteros consecutivos.
- cuando el valor encontrado para dos  $\beta$ s es similar ( $< 1E - 7$ ) se considera que el modo hallado es el mismo por lo que se ha descartado su valor.

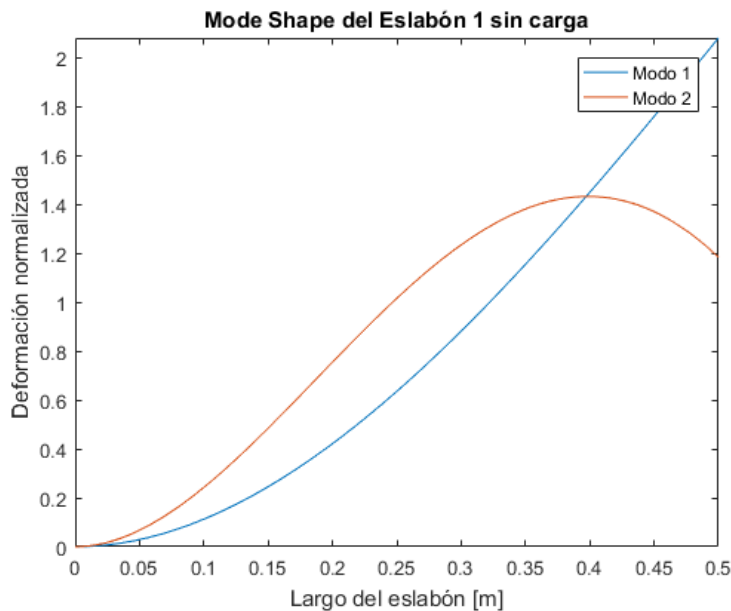


Figura 2.6: Función de modo normalizada sin carga para el primer eslabón.

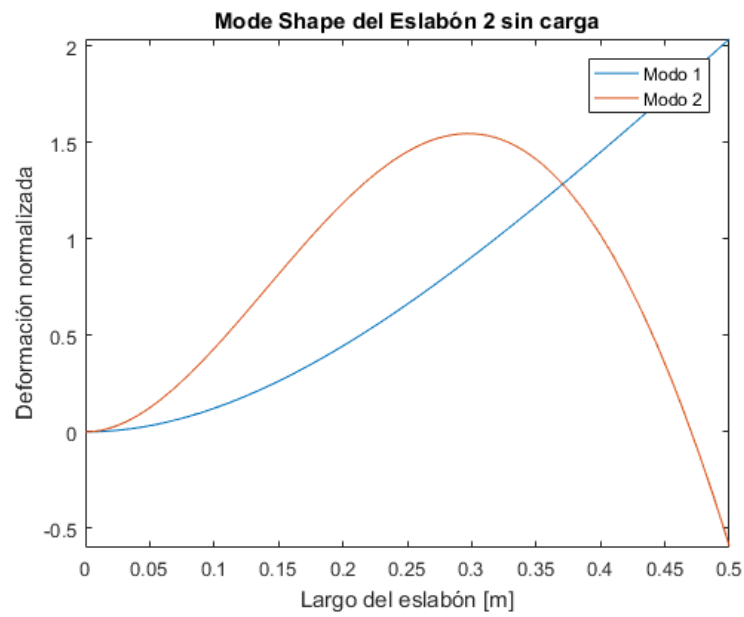


Figura 2.7: Función de modo normalizada sin carga para el segundo eslabón.

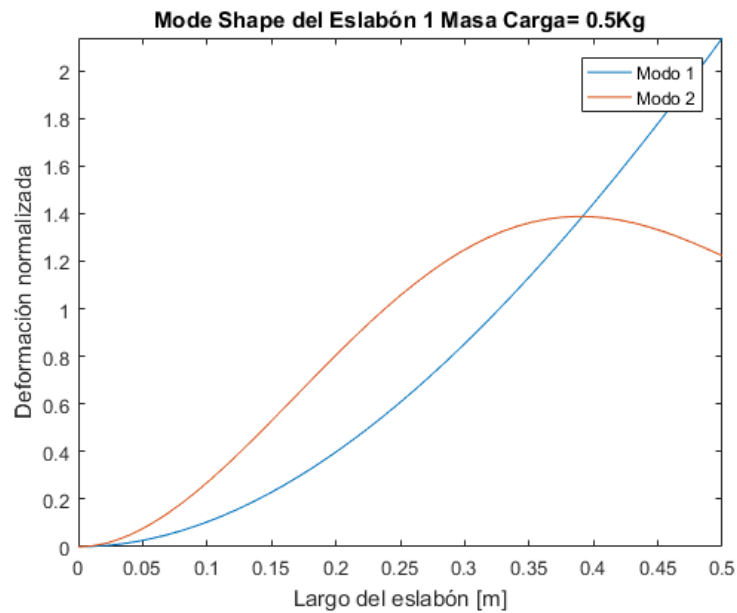


Figura 2.8: Función de modo normalizada con carga para el primer eslabón.

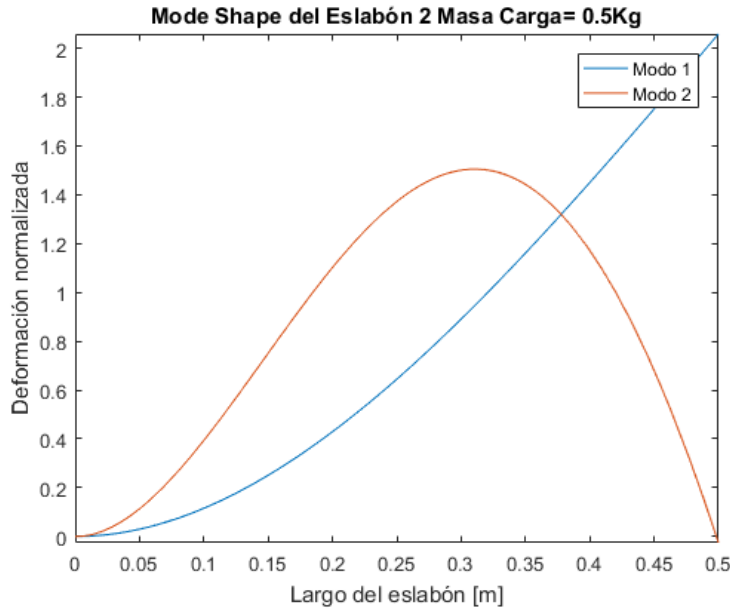


Figura 2.9: Función de modo normalizada con carga para el segundo eslabón.

En las figuras 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9 se muestran las funciones de modo normalizadas ( $\phi_{2i,j}(x_{2i})$ ) para el primer y segundo eslabón en condiciones de carga diferentes. Queda claro que el cambio en la carga influye en el desarrollo de la deformación.

2. `calcKinematics`. Este segundo script calcula las matrices de roto traslación de manera simbólica. Prosiguiendo la teoría, se han separado tanto el cálculo de las matrices de rototraslación para las ternas pertenecientes a las articulaciones, como para los eslabones.

En el cálculo de estas matrices, se han realizado algunas simplificaciones siguiendo las hipótesis realizadas para el caso de estudio.

Por lo tanto la ec. 2.2.14 queda como,

$$A_{2i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{2i} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{N_{mod}} q_{2i,j} \begin{bmatrix} 0 & -y'_{ie} & 0 & 0 \\ y'_{ie} & 0 & 0 & y_{2i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. `calcDynamics`. Script de cálculo de las matrices dinámicas de manera simbólica.

Para ello, antes se ha necesitado del cálculo de los parámetros dinámicos, ec. 2.2.19 y ec. 2.2.26 tras introducir el efecto del peso del motor.

Como en el fragmento de código se muestra, estas integrales se han realizado sobre el eje principal del eslabón, considerando una densidad por unidad de área, en vez de realizarse sobre el volumen del eslabón. Por consecuencia,

- Se suprime el efecto de todas las inercias propias del sólido salvo aquella que tiene efecto por la rotación en el eje  $z_{i-1}$
- No es posible modelizar excentricidades en el centro de masa respecto del eje  $y_i$ . Esto se debe a que la simplificación termina tratando al sólido como si fuera una barra producto de la extrusión de una figura.

La primera no ha representado ningún inconveniente sobre el modelo estudiado ya que se trabaja sobre un plano. Sin embargo para extrapolar los resultados a una estructura que permita recorrer todo el espacio (como la del UR) esta simplificación no podría ser sostenida.

Por otro lado, los eslabones de los cobots de UR, son totalmente cilíndricos. Esto le quita valor a la segunda consecuencia ya que al ser de sección constante, se consiguen buenos resultados integrando sobre el eje.

```

1 fprintf('Calculando parámetros dinámicos ...')
2 for i=1:N_axis-1
3     C2i{i} = double(int([xi 0 0 1]*[xi 0 0 1]*rho_val(i),xi,0,DH(i,1)
4     -motorD(i+1))+int([xi 0 0 1]*[xi 0 0 1]*((mhub_val(i)/motorD(i+1))
5     +rho_val(i)),xi,DH(i,1)-motorD(i+1),DH(i,1)));
6
7     mg2i{i} = double(int([xi 0 0 1]*rho_val(i),xi,0,DH(i,1)-motorD(i+1))
8     +int([xi 0 0 1]*((mhub_val(i)/motorD(i+1))+rho_val(i)),xi,DH(i,1)-
9     motorD(i+1),DH(i,1)));
10
11     for j=1:N_modes
12         % Recordar que se considera x2ij=z2ij=0
13         y2ij = fi(i,j);
14
15         C2ij{i,j} = double(int([xi 0 0 1]*[0 y2ij 0 0]*rho_val(i),xi,
16         0,DH(i,1)-motorD(i+1))+int([xi 0 0 1]*[0 y2ij 0 0]*((mhub_val(i)/
17         motorD(i+1))+rho_val(i)),xi,DH(i,1)-motorD(i+1),DH(i,1)));
18
19         me2ij{i,j} = double(int([0 y2ij 0 0]*rho_val(i),xi,0,DH(i,1)
20         -motorD(i+1))+int([0 y2ij 0 0]*((mhub_val(i)/motorD(i+1))
21         +rho_val(i)),xi,DH(i,1)-motorD(i+1),DH(i,1)));
22
23         for k=1:N_modes
24             y2ik = fi(i,k);
25
26             C2ijk{i,j,k} = double(int([0 y2ik 0 0]
27             *[0 y2ij 0 0]*rho_val(i),xi,0,DH(i,1)-motorD(i+1))
28             +int([0 y2ik 0 0]*[0 y2ij 0 0]
29             *((mhub_val(i)/motorD(i+1))+rho_val(i)),xi,DH(i,1)
30             -motorD(i+1),DH(i,1)));
31
32             kx2ijk = 0;
33
34             ky2ijk = EI_val(i)*int(diff(y2ij,xi,2)
35             *diff(y2ik,xi,2),xi,0,DH(i,1));
36

```



## 2.3. SISTEMA COMPUESTO POR ARTICULACIONES ELÁSTICAS Y ESLABONES FLEXIBLES

```
37         kz2ijk = 0;
38
39         aux_k2ijk = double(kx2ijk + ky2ijk + kz2ijk);
40
41         k2ijk{i,j,k} = (abs(aux_k2ijk)>tol)*aux_k2ijk;
42     end
43 end
44 end
45
46 fprintf('OK\n');
```

### 2.3. Sistema compuesto por articulaciones elásticas y eslabones flexibles

Tras modelizar tanto la flexibilidad en las articulaciones como la deflexión en los eslabones independientemente, las expresiones obtenidas en los dos sistemas se juntan para obtener un sistema completamente flexible.

Estos sistemas se complican notablemente debido a la multiplicación de las coordenadas generalizadas, tanto por la flexibilidad de los eslabones como por la flexibilidad de las articulaciones. Es por ello que pocos autores deciden optar por analizar un sistema de estas características.

Incluyendole 2.1.7 a 2.2.31 donde  $\tau_J$  es el definido en ec. 2.1.8

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R\tau_J \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_r & m_{rf} \\ m_{rf} & m_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1(\theta, \delta, \dot{\theta}, \dot{\delta}) \\ C_2(\theta, \delta, \dot{\theta}, \dot{\delta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(\theta, \delta) \\ G_2(\theta, \delta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \end{bmatrix} \\ \tau &= [J_m] \ddot{\theta}_m + [B_m] \dot{\theta}_m + R\tau_J \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Los mismos controladores aplicados en los dos casos anteriores serán implementados a este sistema en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Estrategias de control

Habiendo presentado en el capítulo precedente los diferentes métodos de modelización de los comportamientos elásticos, en éste se estudian algunas técnicas de control que buscan minimizar las vibraciones así como los errores de estado estacionario producto de los comportamientos elásticos.

Para ello se hace uso del modelo dinámico directo desarrollado en la programación del simulador. El desempeño de los controladores se evalúa entonces sobre el simulador.

Dos tipos de ensayos son de especial interés;

- los que nos permiten evaluar el comportamiento regulatorio del control, y
- los que nos muestran la capacidad de seguimiento de trayectorias en el espacio de los ejes.

Para el primero de ellos se analiza la respuesta ante referencias de tipo escalón. En todas las simulaciones se introduce un escalón en ambos ejes de una amplitud igual  $\pi/4$  radianes en  $t = 1s$  y  $t = T_{fin}/2$  respectivamente.

Para la evaluación del seguimiento a las trayectorias, se utiliza un generador de trayectoria de sexto orden programado en una S-Function con los parámetros definidos en la tabla 3.1.

En las primeras secciones se estudian las distintas técnicas aplicadas a sistemas donde la flexibilidad en las articulaciones es el efecto dominante. Luego se trabaja sobre aquellos mecanismos ligeros donde el efecto dominante se produce en los eslabones. Finalmente se abarca el caso en que ambos efectos son notorios.

Parámetros	Eje 1	Eje 2
Tiempo de muestreo ( $T_s$ ) [seg]	0.001	0.001
Tiempo de aceleración( $T_{acc}$ ) [seg]	0.1	0.1
velocidad máxima ( $v_{max}$ ) [rad/seg]	50	50
Posición inicial [rad]	0	0
Posición intermedia [rad]	$\pi/2$	$\pi/4$
Posición final [rad]	$\pi/4$	0

Cuadro 3.1: Parámetros del generador de trayectoria joint

### 3.1. Articulaciones elásticas

Se analizan distintas técnicas de control sobre mecanismos donde se puede explicar el comportamiento elástico como concentrado en las articulaciones. Se evalúan primero las técnicas más sencillas desarrolladas para robots de estructura rígida con el fin de establecer una base de comparación de las técnicas más complejas pensadas para disminuir los efectos de las elasticidades.

#### 3.1.1. Estrategias de medición

Una consecuencia que surge al considerar la elasticidad es la de incrementar el número de las coordenadas generalizadas para realizar la descripción. Es decir que se cuenta con un mayor número de variables de estado, y con ello se amplían las posibilidades para realizar la realimentación de control. Sin embargo, la acción de control sigue siendo una única por articulación/motor, su torque en el análisis sucesivo.

A diferencia de los robots rígidos en la que normalmente solo se cuenta con la presencia de un sensor de posición sobre el eje del motor, por ejemplo mediante un encoder o resolver, o bien de dos sensores, donde se complementa la lectura midiendo la velocidad con un tacogenerador [33], en este caso se puede completar la estrategia de medición relevando las variables de posición y velocidad del eje, recordando que difieren de las variables del motor como consecuencia de la elasticidad.

Otra posible configuración de sensores para el caso de la articulación elástica consiste en emplear los sensores de posición y velocidad sobre el motor y medir además los torques transmitidos mediante un sensor de torque en el eje. Algunas de las posibles combinaciones para realizar la realimentación son las siguientes [19]:

- Variables del eslabón: Posición del eslabón y velocidad del eslabón
- Variables mixtos: Posiciones de motor y velocidad del eje o viceversa.
- Variables del motor: Posición del motor y velocidad del motor

### 3.1.2. Actuadores

En lo sucesivo se asume que los actuadores son motores que entregan torque, sin limitación de amplitud ni de ancho de banda. Si bien esta asunción es poco realista tiene el propósito de simplificar el análisis de resultados iniciales.

### 3.1.3. Estrategia PD

Como el objetivo es controlar la posición del eje del robot, resulta intuitivo tomar la medición del correspondiente sensor y generar una fuerza de control dada por los motores que tienda a posicionar al mecanismo en el punto deseado. Sin embargo, considerando que cada eje de un robot rígido puede ser visto en su forma más simple como un sistema que tiene un integrador puro, la estrategia más sencilla a plantear es la proporcional y derivativa (PD).

#### 3.1.3.1. Realimentación de variables del eje

La ley de control PD con realimentación de variables del eje se puede expresar según la ec. 3.1.1, donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $K_d$  la ganancia derivativa y  $\theta^d$  es la entrada externa de referencia o *set point*. Si se asume además  $\dot{\theta}^d = 0$ ,

$$\tau = K_p (\theta^d - \theta) - K_d \dot{\theta} \quad (3.1.1)$$

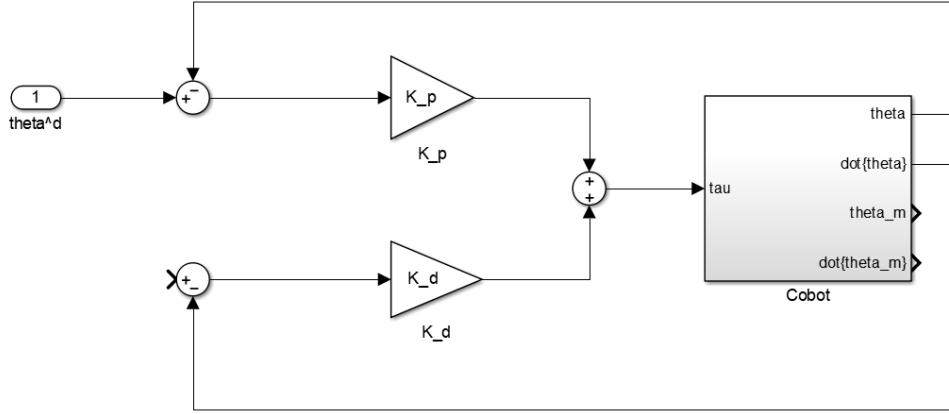


Figura 3.1: Planta y controlador para el caso control PD realimentado con variables del eje

La estabilidad del brazo junto con la ley de control propuesta puede evaluarse utilizando el segundo método de Lyapunov, ya que se trata de un sistema no lineal. Sin embargo, para estudiar la estabilidad local, y considerando que las reducciones  $N$  si son elevadas ayudan al desacoplamiento inercial de los ejes y además hacen prevalente el efecto de la inercia del motor sobre la del brazo, se puede entonces considerar un sistema simplificado 3.1.2. Es claro que la prueba de estabilidad sobre este no es concluyente sobre la estabilidad global del sistema no lineal.

$$\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{K_e N}{N^2 J_m M s^4 + M B_m N^2 s^3 + K_e (M + N^2 J_m) s^2 + K_e B_m N^2 s} \quad (3.1.2)$$

Como se asume desacoplamiento entre ejes, se estudia cada uno por separado presentando un comportamiento similar al de un péndulo simple con elasticidad en el eje donde la inercia del eslabón se reemplaza por el equivalente obtenido con  $\bar{M}_{i,i}$ , es decir el momento de inercia máximo del eje  $i$  considerando al resto bloqueado en la posición que lo maximiza. Por ejemplo para el primer eje del doble péndulo esta situación se da cuando el brazo está totalmente extendido.

Sustituyendo los valores de la tabla 2.1 en la transferencia de entrada a salida 3.1.2 se tiene 3.1.3

$$\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1600}{0,0416s^4 + 0,1248s^3 + 166,7s^2 + 480s} \quad (3.1.3)$$

El diagrama de Bode 3.2 muestra una frecuencia resonante que impide obtener un sistema de lazo cerrado con un control simple como un proporcional derivativo.

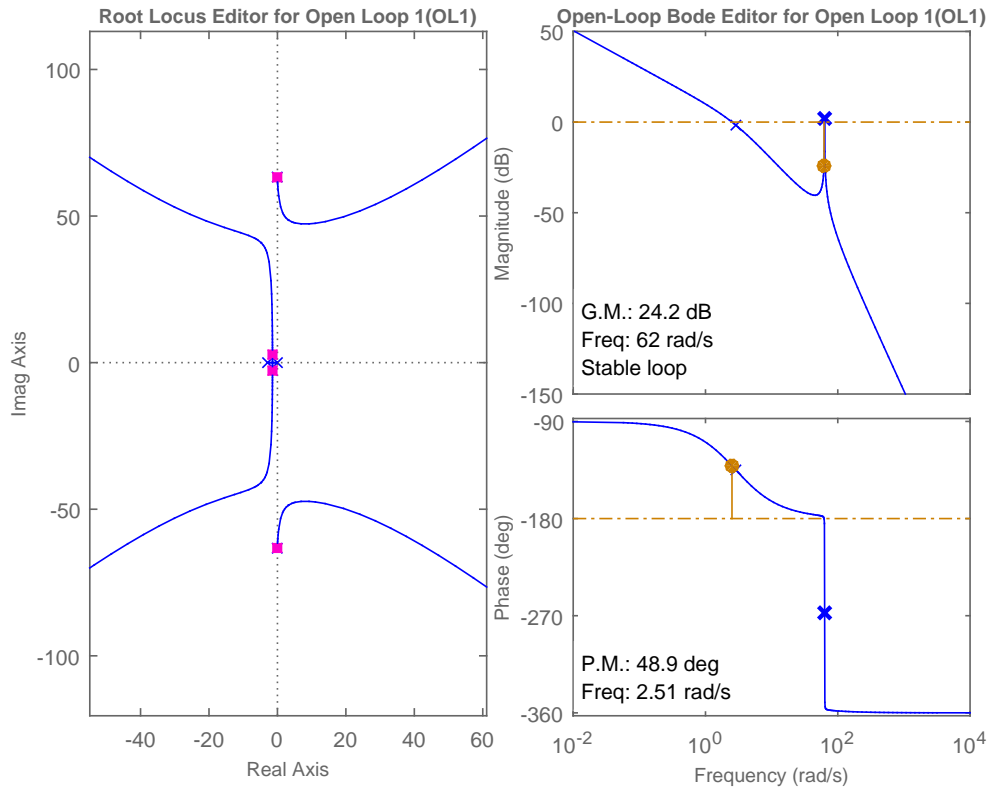


Figura 3.2: Diagrama de Bode para  $\theta/\tau$  del modelo de estudio

Se puede identificar también la respuesta en frecuencia sobre el modelo no-lineal mediante un ensayo en que se mide la salida ante entradas senoidales de frecuencia variable, que luego es correlacionada con un seno y un coseno sincronizados con la señal de entrada, para finalmente arrojar la amplitud y la fase una vez que el transitorio está extinguido. En la fig. 3.3 se muestra la respuesta del eje 1 a una frecuencia cercana a la de resonancia. Luego en la fig. 3.4 se muestra el diagrama de Bode de amplitud, resultando similar al obtenido por la aproximación lineal.

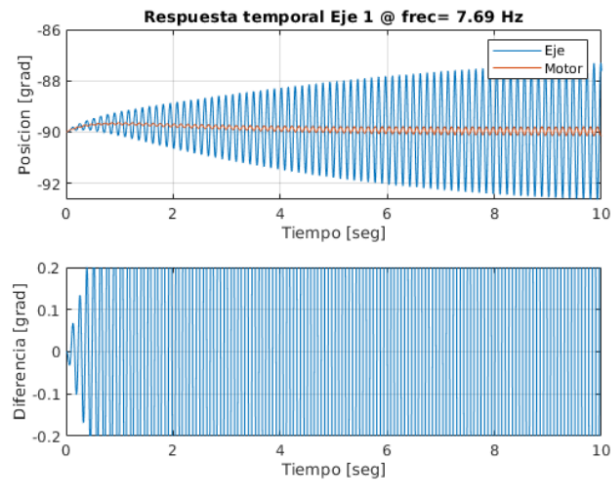


Figura 3.3: Respuesta del eje 1 ante una entrada senoidal de torque

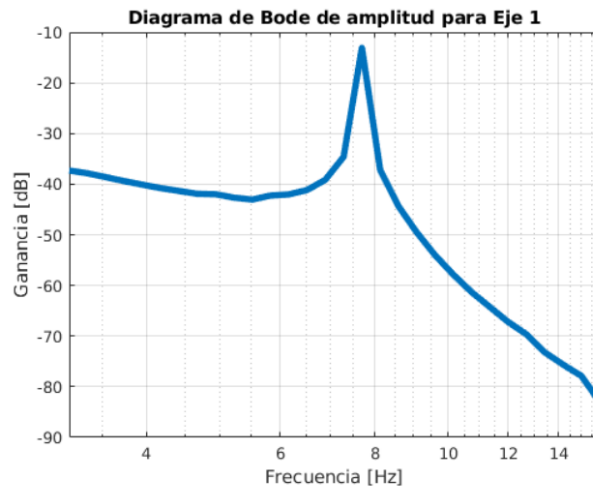


Figura 3.4: Diagrama de Bode identificado para  $\theta_1/\tau_1$  considerando el eje 2 bloqueado

Del análisis del espacio de las raíces se observa también en la Fig. 3.2, donde al realimentar con un control proporcional, los polos cercanos al eje  $j\omega$  avanzan al semiplano derecho. El efecto de sumar un control derivativo tampoco alcanza para estabilizar, según se observa en Fig.3.5.

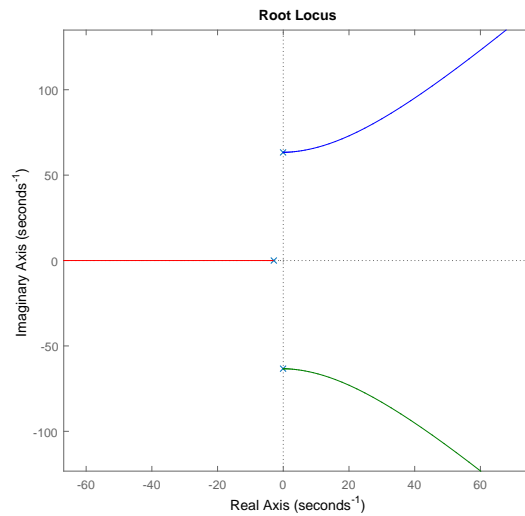


Figura 3.5: Espacio de raíces de la función de transferencia  $s.\theta(s)/\tau(s)$ , para el modelo de estudio

De esta manera se prueba que la ley de control propuesta, tomando la realimentación de las variables del eje, no logra estabilidad local en el modelo simplificado. En las figuras 3.6 y 3.7 se observa una simulación, considerando el modelo completo que incluye también la gravedad, donde se evidencia que el sistema es inestable ante una referencia escalón.

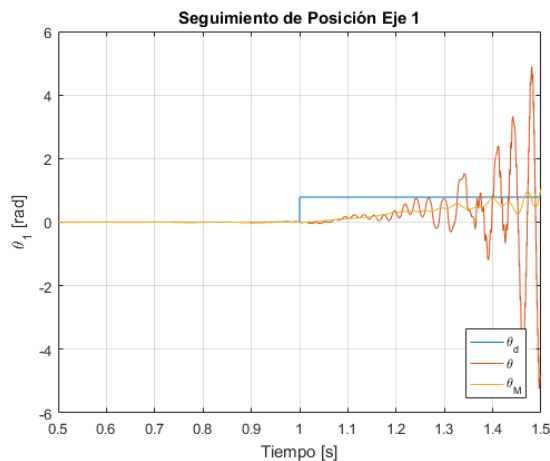


Figura 3.6: Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimentando con variables del eslabón



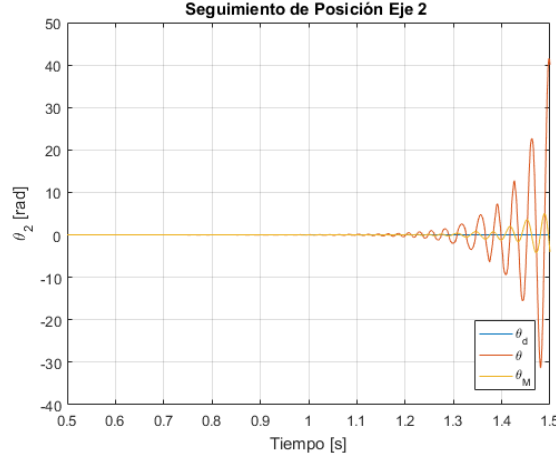


Figura 3.7: Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimentando con variables del eslabón

Así se concluye que el sistema no puede ser estabilizado realimentando las variables del eslabón.

### 3.1.3.2. Realimentación mixta

Una segunda estrategia de medición a considerar consiste en tomar la realimentación mixta:

- $\theta_m, \dot{\theta}$ : posición del eje motor y velocidad del eje del eslabón
- $\theta, \dot{\theta}_m$ : posición del eje del eslabón y velocidad del eje motor

En [19] se estudian ambos casos concluyendo que la primera estrategia es siempre inestable. A continuación se enfoca el análisis en la segunda, que se expresada según la ec. 3.1.4, donde  $R = N^{-1}$ .

$$\tau = K_p (\theta^d - \theta) + K_d R \dot{\theta}_m \quad (3.1.4)$$

Sin considerar los términos disipativos, que en todo caso ayudan a estabilizar al sistema, y luego de hallar la transferencia, la ecuación característica resulta según la eq. 3.1.3.2

$$J_m M s^4 + M K_d s^3 + K_e (R^2 M + J_M) s^2 + K_e K_d s + K_e R K_p = 0$$

Analizando la estabilidad mediante el método de Routh-Hurwitz, se tiene la tabla 3.2 y se llega a que el sistema linealizado es estable si,  $K_d > 0$  y  $0 < K_p < K_e R$

---

4	$J_m M$	$K_e(R^2 M + J_m)$	$K_e R K_p$
3	$K_d M$	$K_e K_d$	
2	$\frac{K_e R^2}{K_d}$	$K_e R K_p$	
1	$\frac{K_e R K_d - K_d K_p}{R}$	0	
0	$K_e R K_p$		

---

Cuadro 3.2: Tabla de Routh

En las figuras 3.8 y 3.9 se muestra la simulación sobre el sistema completo con un ajuste del control que cumple la condición de estabilidad para ambos ejes. Luego en las figuras 3.10 y 3.11 se observa el comportamiento inestable cuando se incrementa la ganancia proporcional por sobre la cota establecida, por ejemplo si se buscara aumentar (sobre esa cota) la ganancia para mejorar la respuesta al escalón.

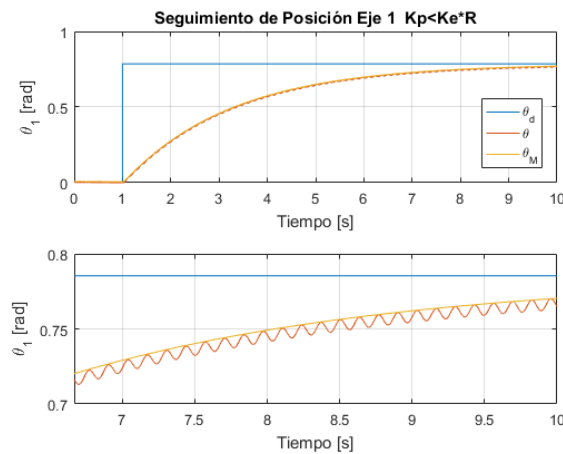


Figura 3.8: Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimentando con parámetros mixtos siendo  $0 < K_P < K_e R$ .

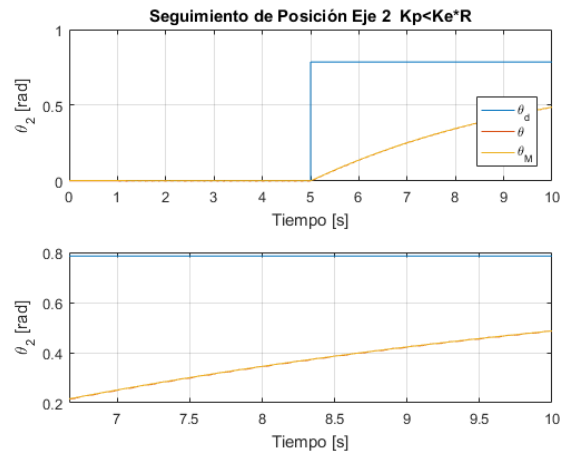


Figura 3.9: Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimentando con parámetros mixtos siendo  $0 < K_P < K_e R$ .

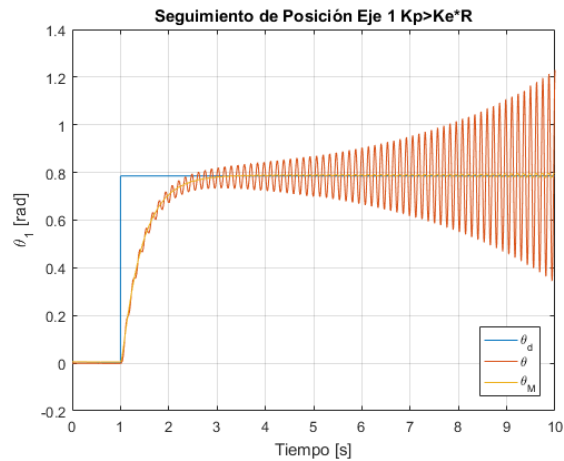


Figura 3.10: Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimentando con parámetros mixtos siendo  $K_P > K_e R$ .

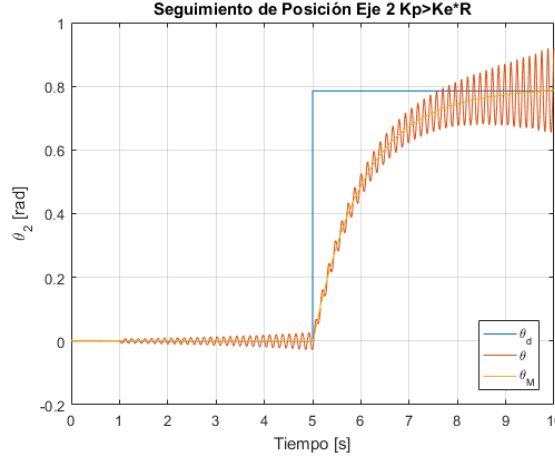


Figura 3.11: Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimentando con parámetros mixtos siendo  $K_P > K_e R$ .

Como conclusión la estrategia de medición y realimentación de estas variables mixtas resulta muy limitada ya que obliga a trabajar con ganancias proporcionales relativamente pequeñas, siendo muy lenta la respuesta obtenida.

### 3.1.3.3. Realimentación de variables del motor

Por último se analiza la realimentación del sistema empleando únicamente las mediciones de los sensores del motor. La ley de control se puede expresar según la ec. 3.1.5.

$$\tau = K_p (\theta_m^d - \theta_m) - K_d \dot{\theta}_m \quad (3.1.5)$$

Como la referencia para el control de los ejes del robot es  $\theta^d$  se plantea una relación aproximada para estimar la consigna  $\theta_m^d$  para la ley de control propuesta.

$$R\theta_m^d = \theta^d$$

Se puede probar la estabilidad del sistema no lineal completo considerando la ley de control expuesta siguiendo el segundo método de Lyapunov, aplicando adicionalmente el teorema de La Salle [19].

Definiendo una función de energía  $V$ , función de las variables generalizada  $\mathbf{q} = [\theta \ \theta_m]^T$  y sus derivadas, como suma de la energía cinética y potencial, se tiene la ec. 3.1.6.

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - R\boldsymbol{\theta}_m)^T K_e (\boldsymbol{\theta} - R\boldsymbol{\theta}_m) \\
& + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m^e)^T R^T K_p R (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m^e)
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Reemplazando las ecuaciones del sistema y la ley de control a evaluar en el cálculo de la derivada temporal de  $V$  y considerando además la propiedad de antisimetría de la matriz de Arimoto  $N = \dot{M} - 2C$ , se tiene en la ec 3.1.7 que  $\dot{V}$  es negativa si  $K_d$  es definida positiva. Por lo tanto alcanza con definir un término derivativo con ganancias positivas para que el sistema de lazo cerrado sea estable.

$$\dot{V} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}_m^T R^T K_d R \dot{\boldsymbol{\theta}}_m \leq 0 \tag{3.1.7}$$

Así se demuestra que la estrategia de realimentación de variables del motor estabiliza el sistema.

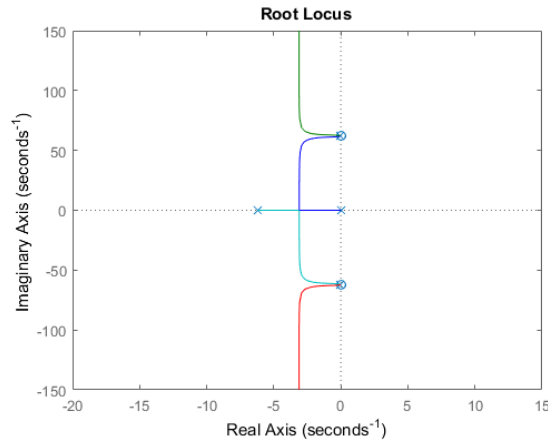


Figura 3.12: Lugar de las raíces considerando realimentación de variables del motor

Analizando el lugar de las raíces del sistema linealizado (fig. 3.12) para esta estrategia de medición, se puede observar que el sistema será siempre estable. La presencia de dos polos complejos cerca del eje imaginario confirma que habrá un efecto oscilatorio tal como se observa en las respuestas temporales (fig. 3.13 y 3.14) de la simulación del sistema no lineal, en el que no se han considerado los efectos gravitatorios (equivalente a montar el robot con los ejes de rotación alineados con la gravedad).

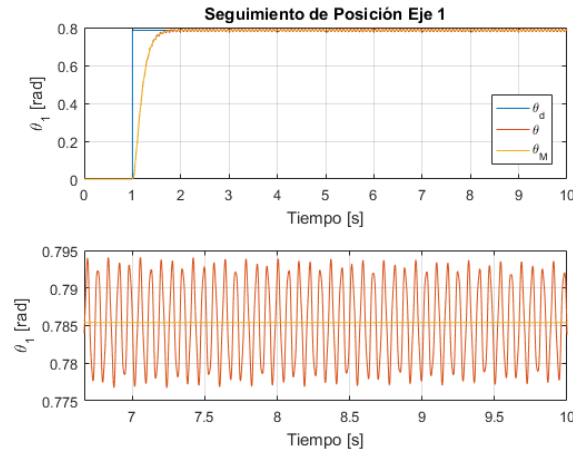


Figura 3.13: Respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble realimentando con variables del motor.

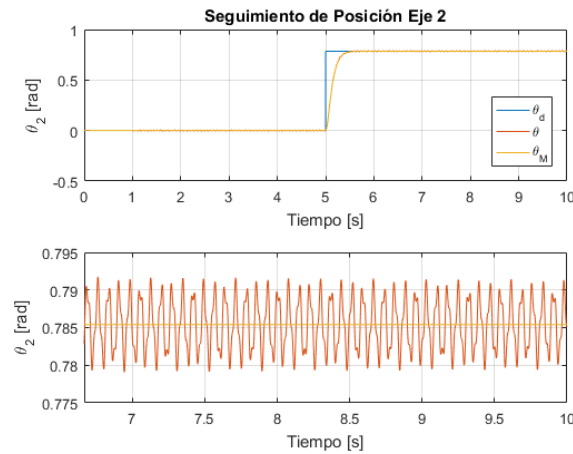


Figura 3.14: Respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble realimentando con variables del motor.

#### 3.1.3.4. Diseño de las ganancias

Para la elección de las ganancias  $K_p$  y  $K_d$  se realiza el cálculo con los mismos criterios habituales para la sintonización del control de manipuladores rígidos. Se parte entonces de igualar el polinomio canónico con factor de amortiguamiento unitario  $\xi = 1$  (para que la respuesta sea críticamente amortiguada) a la ecuación característica del sistema considerado rígido ( $K_e \rightarrow \infty$ ) linealizado y desacoplado controlado con la ley de la ec. 3.1.5 resulta la ec. 3.1.3.4.

$$\Omega(s) = (J_m N^2 + \bar{M})s^2 + K_m N K_d s + K_m K_p N = s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2$$

Igualando términos se tiene que las ganancias son:

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{J_m N^2 + \bar{M}}{K_m N} \omega_n^2 \\ K_d &= \frac{2\omega_n (J_m N^2 + \bar{M}) - B_m N^2}{K_m N} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

En el ajuste de la ganancia proporcional puede buscarse limitar la frecuencia natural  $\omega_n$  según la regla

$$\omega_n \leq \frac{\omega_e}{x} \quad (3.1.9)$$

Donde la frecuencia elástica  $\omega_e$  se puede obtener considerando un modelo sencillo compuesto por una masa con momento de inercia  $\bar{M}$  conectada por un resorte torsional de constante  $K_e$ , como  $\omega_e = \sqrt{K_e/\bar{M}}$ . Otra opción es hallar de la transferencia entre entrada y salida del sistema linealizado de lazo abierto, construir el diagrama de Bode y observar el valor de  $\omega_e$  en las frecuencias antirresonante y resonante que se pretenden evitar. Esta opción se muestra en la fig. 3.15. La respuesta en frecuencia también puede ser identificada sobre el modelo no lineal siguiendo un método similar al expuesto anteriormente en 3.1.3.1. El resultado se muestra en la fig 3.16.

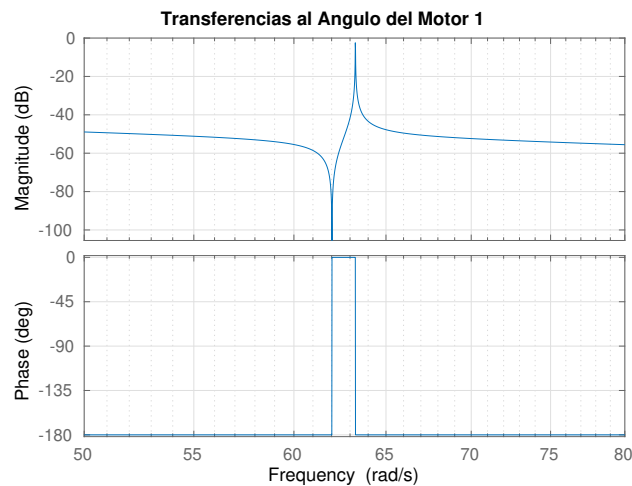


Figura 3.15: Diagrama de Bode de la función de transferencia de la posición del motor referida al torque motor

Esta respuesta en frecuencia también puede ser identificada sobre el modelo no lineal siguiendo un método similar al expuesto anteriormente. El resultado se muestra en la fig 3.16.

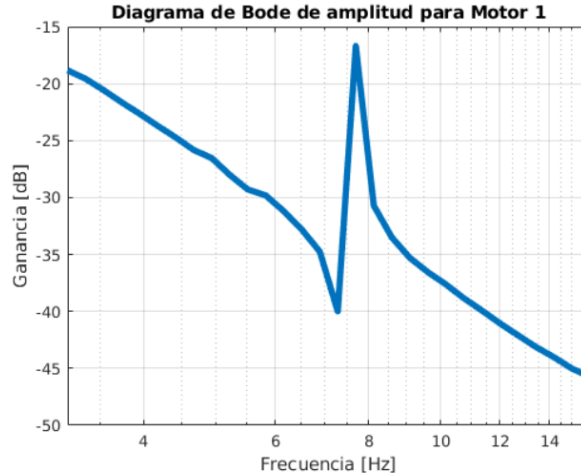


Figura 3.16: Diagrama de Bode de amplitud identificado para  $\theta_{m1}(s)/\tau_1(s)$  considerando el eje 2 bloqueado

En el ajuste de la ganancia proporcional se limita la frecuencia natural  $\omega_n$  según la ec. 3.1.10

$$\omega_n \leq \frac{\omega e}{x} \quad (3.1.10)$$

En las figuras 3.17 y 3.18 se puede observar la respuesta del sistema no lineal trabajando en lazo cerrado variando el valor de  $\omega_n$ .

En ellas se evidencia la relación de compromiso que hay entre la velocidad de respuesta del sistema y las oscilaciones que aparecen. Esta sencilla estrategia de control, con sus ganancias diseñadas para no excitar los modos elásticos, necesariamente tiene que tener una performance pobre dada por respuestas temporales lentas. Para mejorar la velocidad es necesario llegar a un compromiso con la tolerancia a las vibraciones.



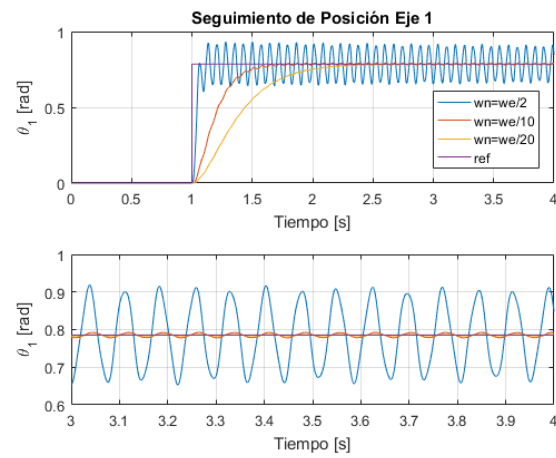


Figura 3.17: Respuesta en el tiempo del eje 1 variando  $\omega_n$

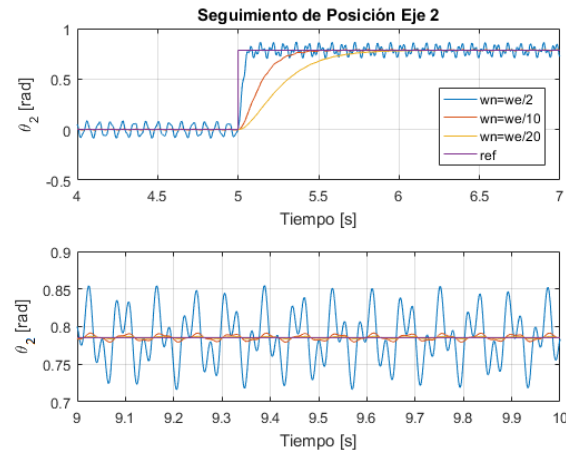


Figura 3.18: Respuesta en el tiempo del eje 2 variando  $\omega_n$

La misma conclusión se obtiene del diagrama de polos y ceros (figs. 3.19 y 3.20): cuanto mayor es  $\omega_n$  más lejos están los polos del eje  $j\omega$  haciendo el sistema más veloz, aunque perdiendo amortiguamiento.

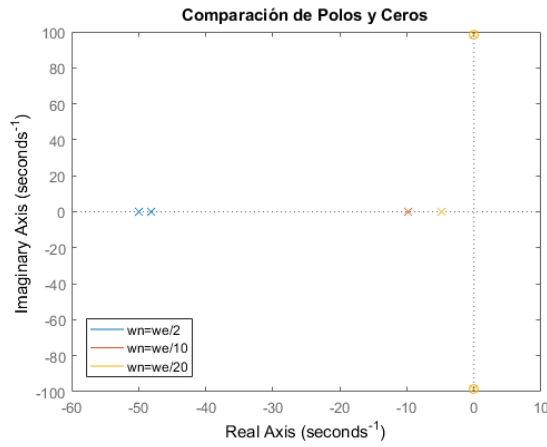


Figura 3.19: Plano de polos y ceros variando  $\omega_n$

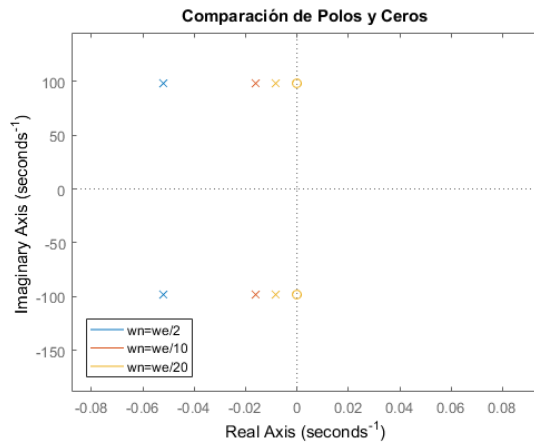


Figura 3.20: Detalle de la ubicación de los polos y ceros de lazo cerrado variando  $\omega_n$ .

Para el caso de estudio, las frecuencias elásticas para cada eslabón son las siguientes,

$$\begin{aligned}\omega_e|_{eje1} &= 9,9Hz \\ \omega_e|_{eje2} &= 22,1Hz\end{aligned}$$

Así para un ajuste conservativo se propone  $\omega_n = \omega_e/20$ , siendo las ganancias de control según la ec. 3.1.8,

$$K_p = \begin{bmatrix} 1,00 & 0 \\ 0 & 4,86 \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} 0,35 & 0 \\ 0 & 1,10 \end{bmatrix}$$

La respuesta temporal a la acción regulatoria correspondiente a este ajuste para un span dado por  $T_{fin} = 10\text{seg}$  se observa en las figs. 3.21 y 3.22. En el detalle de las subfiguras inferiores se grafica la condición de estado estacionario para cuando el transitorio debido al movimiento se ha extinguido, y se observa en ellas que las vibraciones no pueden ser atenuadas. Otro punto interesante a notar es que el valor promedio alcanzado por el eje dista del valor deseado y también que el valor final para el caso de juntas rígidas tiene una diferencia con la referencia; es decir que se tiene un sesgo producto del efecto de la gravedad que no puede ser compensado por este controlador porque si bien el sistema tiene un integrador puro en el camino directo, el efecto de la gravedad actúa como una perturbación a la entrada.

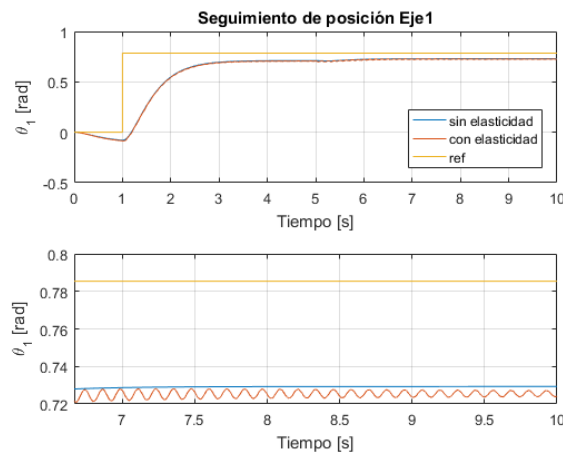


Figura 3.21: Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste  $\xi = 1$  y  $\omega_n = \omega_e/20$  para el eje 1, para los casos de juntas rígidas y flexibles

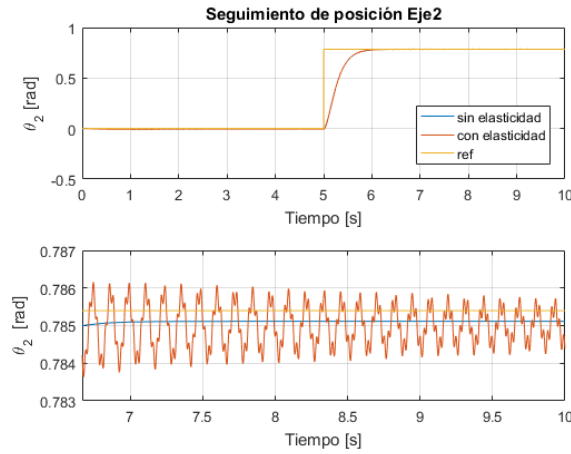


Figura 3.22: Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste  $\xi = 1$  y  $\omega_n = \omega_e/20$  para el eje 2, para los casos de juntas rígidas y flexibles

La respuesta de la posición del motor en función del tiempo se tiene en las fig. 3.23 y 3.24. Se nota que la oscilación del resorte torsional de la junta se transmite a la posición controlada del eje del motor. El valor medio al que tienden las posiciones del motor distan en la medida del torque que debe transmitirse por la junta elástica.

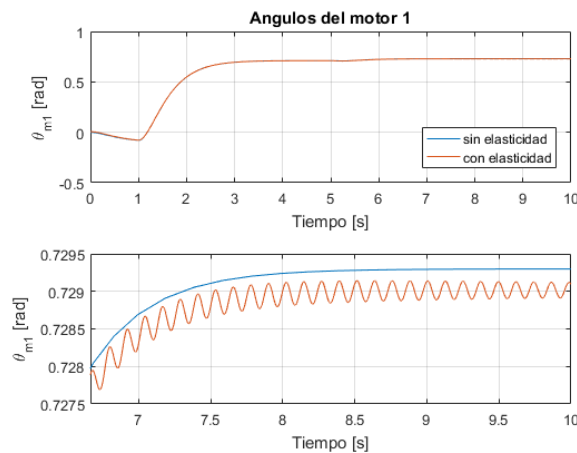


Figura 3.23: Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste  $\xi = 1$  y  $\omega_n = \omega_e/20$  para la posición del motor 1, para los casos de juntas rígidas y flexibles

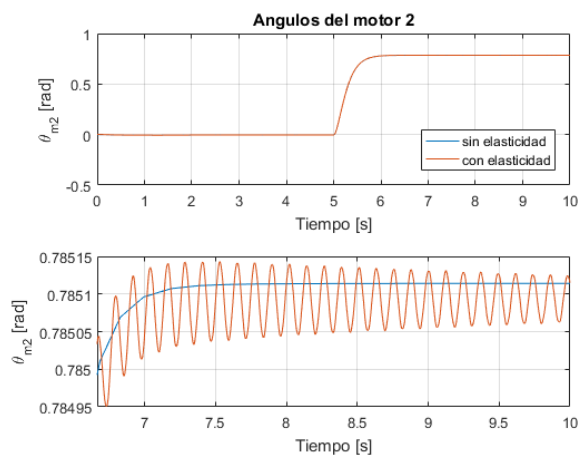


Figura 3.24: Respuesta temporal del sistema no lineal controlado por un PD con ajuste  $\xi = 1$  y  $\omega_n = \omega_e/20$  para la posición del motor 2, para los casos de juntas rígidas y flexibles

Las oscilaciones provocadas por las articulaciones flexibles son perceptibles tanto para el eje 1 como para el eje 2, y se verifica que sus frecuencias están en el orden de las calculadas para el sistema linealizado de lazo abierto. Se observa además un ligero acoplamiento de las dos oscilaciones para el eje 2. En cuanto a la amplitud, las vibraciones del eje 1 son mayores debido al mayor peso que debe soportar (masas sumadas del eslabón 1 y 2) en comparación con el eje 2 que solo sostiene el segundo eslabón.

Tal como se indicó previamente, se tiene un error de estado estacionario que se agrava para el caso de juntas flexibles, que es fácilmente distinguible en la respuesta del eje 1 (fig. 3.21).

### 3.1.4. Estrategia PD con compensación de gravedad

Para compensar el sesgo producido por el efecto gravitatorio visto en la sección anterior, se propone una ley de control que contemple este efecto mediante un bías que se puede ajustar (i) en forma estática de acuerdo a la posición final deseada o (ii) en forma dinámica a medida que se realiza el movimiento.

Este tipo de control regulatorio mejora el estado estacionario, aunque sigue estando basado en un lazo PD, por lo que no se esperan mejoras en la amortiguación de las vibraciones.

Denominamos a la primera estrategia de control de esta sección como *PD+G offline* en virtud de que el efecto compensatorio de la gravedad se puede calcular en forma *offline* al momento de establecer la referencia. El

bías se calcula entonces al comienzo del movimiento y se mantiene constante durante el mismo [34].

La segunda estrategia es denominada como *PD+G online* puesto que el cálculo de la compensación se realiza durante el movimiento actualizándose según las variables de posición de los ejes, para así contrarrestar el efecto de la gravedad no solo en la posición final sino también en el propio trayecto [35].

#### 3.1.4.1. PD con compensación gravedad offline

La ley de control se expresa con el agregado de la compensación constante  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d)$  según la ec. 3.1.11

$$\boldsymbol{\tau} = K_p R (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) - K_d R \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \quad (3.1.11)$$

donde las posiciones deseadas de los motores en función se calcula en función de las referencias para los ejes según la ec. 3.1.12, eliminando también el sesgo producido por la elasticidad.

$$R\boldsymbol{\theta}_m^d = \boldsymbol{\theta}^d + K_e^{-1} \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \quad (3.1.12)$$

Para estudiar el punto al que evoluciona el sistema con la ley de control propuesta (soluciones nulas) se plantean las ecuaciones de la dinámica (ec. 2.1.5) y del control (ec. 3.1.11) para el caso en que las aceleraciones y las velocidades se anulan (ec. 3.1.13).

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + K_e(\boldsymbol{\theta} - R\boldsymbol{\theta}_m) &= 0 \\ K_e(R\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}) &= K_p R(\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

En estado estacionario se espera que el torque transmitido a través de la junta elástica  $K_e(R\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}^d)$  sea suficiente para sostener el brazo en la posición deseada, es decir  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d)$ . Sumando entonces el término nulo  $K_e(R\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}^d) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d)$  a las ecs 3.1.13 se tiene la ec. 3.1.14.

$$\begin{aligned} K_e(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^d) - K_e R(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_m^d) &= \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \\ K_e(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^d) + (K_e + K_p)R(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_m^d) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Si se deja que el sistema evolucione con la nueva ley de control, una solución nula posible que se verifica en la ec. 3.1.14 está dada por  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^d$  y  $\boldsymbol{\theta}_m = \boldsymbol{\theta}_m^d$ . Sin embargo resulta determinante establecer una correspondencia entre ambas; es decir que la solución nula esté dada en forma unívoca

por  $[\boldsymbol{\theta}^d \ \boldsymbol{\theta}_m^d]^T$ , y que la posición de equilibrio en el espacio de los ejes se corresponda entonces con la del motor.

La ec. 3.1.14 puede escribirse en forma matricial según 3.1.15 donde la matriz  $A$  se define en la ec. 3.1.16

$$A \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^d \\ R(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_m^d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\boldsymbol{\theta}) - g(\boldsymbol{\theta}^d) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

$$A = \begin{bmatrix} K_e & -K_e \\ -K_e & K_e + K_p \end{bmatrix} \quad (3.1.16)$$

Una propiedad importante de las matrices que definen el modelo dinámico para mecanismos con juntas de revolución es que tanto el vector de torques dados por el peso propio  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$  como sus derivadas están acotadas. Por lo tanto se puede expresar la relación de la ec. 3.1.17.

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right\| \leq \alpha \quad (3.1.17)$$

Desarrollando la derivada como restas se puede escribir la desigualdad de la ec. 3.1.18

$$\|\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha \|\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\| \quad (3.1.18)$$

Aplicando de matrices inducida por vectores en la ec. 3.1.15 y reemplazando la desigualdad dada en la ec. 3.1.18 se tiene la ec. 3.1.19.

$$\|A\| \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^d \\ R(\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\theta}_m^d) \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} g(\boldsymbol{\theta}) - g(\boldsymbol{\theta}^d) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\| \leq \alpha \|\boldsymbol{\theta}^d - \boldsymbol{\theta}\| \quad (3.1.19)$$

Se asume que las elasticidades de las juntas  $K_e$  son mayores que  $\alpha$ , pues por el contrario el sistema sería tan flexible que no podría sostener determinadas posiciones en el espacio. Entonces se puede diseñar  $K_p$  para hacer que el mínimo valor singular de  $A$  sea mayor que  $\alpha$  consiguiéndose así en forma simultánea que  $\boldsymbol{\theta}$  tienda  $\boldsymbol{\theta}^d$  y  $\boldsymbol{\theta}_m$  tienda  $\boldsymbol{\theta}_m^d$ , probando que la solución nula es única.

La estabilidad asintótica del sistema controlado por la ley PD con compensación estática de gravedad se prueba [19] siguiendo el segundo método de Lyapunov. Para ello se construye una función candidata que depende del estado, definida positiva  $V_{PD+G}$  basada en la ec. 3.1.6 según la ec. 3.1.20.

$$\begin{aligned}
 V_{\text{PD+G}} &= V_{\text{PD}} + U_{\text{grav}}(\boldsymbol{\theta}) - U_{\text{grav}}(\boldsymbol{\theta}^d) - (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^d)^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\theta}^d) K_e^{-1} \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.1.20}$$

Para el modelo de estudio se encuentra que  $\alpha = 1,06$ , y según la ganancia obtenida para el caso  $\omega_n = \omega_e/20$  resulta  $\sigma_{\min}(A) = 0,5$ , incumpléndose así la condición dada para las soluciones nulas. Para solucionar este inconveniente se incrementa la ganancia  $K_p$  para que  $\omega_n = \omega_e/10$  resultando  $\sigma_{\min}(A) = 1,99$  con las ganancias:

$$\begin{aligned}
 K_p &= \begin{bmatrix} 4,01 & 0 \\ 0 & 19,44 \end{bmatrix} \\
 K_d &= \begin{bmatrix} 0,99 & 0 \\ 0 & 2,50 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En las figs. 3.25 y 3.26 se muestra la acción regulatoria sobre el sistema no lineal de la estrategia de control PD con compensación estática de peso propio siguiendo los mismos ensayos que en la sección anterior, observándose la disminución del error estacionario.

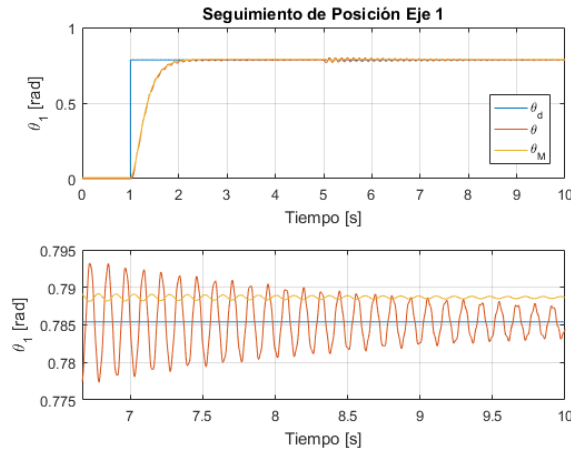


Figura 3.25: Respuesta temporal de la posición del eje 1 para una estrategia de control PD+G *offline*



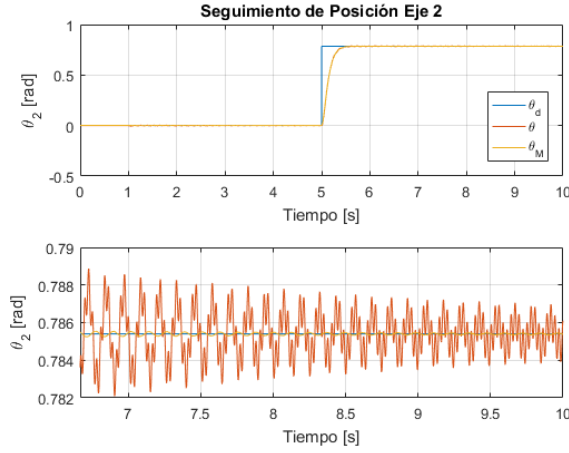


Figura 3.26: Respuesta temporal de la posición del eje 2 para una estrategia de control PD+G *offline*

Cabe destacar que esta estrategia de control esta basada en el conocimiento del término de la gravedad,  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d)$  que es alimentada como un término *feed forward* y el término de la rigidez de la articulación  $K_e$ , utilizado para calcular las referencias de posición de los motores. Las desviaciones en la estimación de estos términos afectan el rendimiento del controlador.

En particular debe tenerse en cuenta que el término de la gravedad  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d)$  depende de la proyección de  $\mathbf{G}$  sobre el plano de normal coincidente con la rotación del eje, por lo que será afectado por el montaje del robot respecto de la gravedad.

### 3.1.4.2. PD con compensación de gravedad online

La estrategia de control PD con compensación de gravedad calculada en forma estática vista en la sección anterior no solo ayuda a corregir el error de estado estacionario, sino también disminuye la acción de control calculada el función del error de seguimiento y en consecuencia las vibraciones son menores y se consigue un amortiguamiento de las mismas a través de la acción derivativa y los componentes disipativos.

La compensación *online* ayuda al controlador PD durante todo el movimiento pues aporta la acción necesaria para sostener el brazo en el punto de la trayectoria deseada en el instante de tiempo correspondiente, habilitando así el planteo de un control de seguimiento de trayectoria en vez de una simple acción regulatoria.

En la nueva ley de control, se debe conocer en todo momento el vector  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$ , que depende de la posición del eje. Para acceder a esta señal se puede

utilizar un sensor de posición en el eje o bien estimarla mediante las mediciones del sensor del motor (ec. 3.1.21), incluyendo entonces el modelo de elasticidad del eje [19]. Otra opción es utilizar directamente la lectura de posición del motor referida al eje por la matriz  $R$ , aunque si bien mejora el transitorio acarrea errores de estado estacionario.

$$\tilde{\theta} = R\theta_m - K_e^{-1}\mathbf{G}(\theta) \quad (3.1.21)$$

La ec. 3.1.21 plantea un inconveniente pues dice que es necesario conocer el valor de la posición para poder calcular su estimación. En este punto se redefine el estimador según dos opciones:

- plantear una ecuación en recurrencia del tipo  $\tilde{\theta}|_{i+1} = R\theta_m - K_e^{-1}\mathbf{G}(\tilde{\theta}|_i)$  que se prueba que rápidamente converge y es aplicable para obtener el resultado deseado durante el período de muestreo,
- o bien dejar constante el término de gravedad  $\tilde{\theta} = R\theta_m - K_e^{-1}\mathbf{G}(\theta^d)$ ; se asume que habrá un sesgo que no incidirá demasiado en el cálculo del término de compensación *feed forward*, y que finalmente para el estado estacionario la estimación converge al valor correcto. En las simulaciones se adopta esta estrategia.

La ley de control resulta entonces según la ec. 3.1.22 con la referencia del motor calculada según la ec. 3.1.12.

$$\tau = K_p R(\theta_m^d - \theta_m) - K_d R\dot{\theta}_m + \mathbf{G}(\tilde{\theta}) \quad (3.1.22)$$

En la posición de equilibrio se cumplen entonces las ecs. 3.1.23, y se muestra que el planteo converge al caso de compensación *offline*.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= R\theta_m^d - K_e^{-1}\mathbf{G}(\theta^d) = \theta^d \\ \tau &= \mathbf{G}(\theta^d) \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Para comprobar la estabilidad asintótica del sistema con juntas elásticas gobernado por la ley de control de la ec. 3.1.22 se propone una nueva función de Lyapunov [19], en la que la energía potencial para la posición deseada en este caso depende de  $\tilde{\theta}$ .

$$V_{\text{PD+GonLine}} = V_{\text{PD}} + U_{\text{grav}}(\theta) - U_{\text{grav}}(\tilde{\theta}) - \frac{1}{2}\mathbf{G}(\theta^d)^T K_e^{-1}\mathbf{G}(\theta^d) \geq 0 \quad (3.1.24)$$

Para analizar la mejora, se realiza una simulación según el controlador de la fig 3.27 de seguimiento de trayectoria y se compara su rendimiento con el obtenido con la estrategia de compensación *offline*.

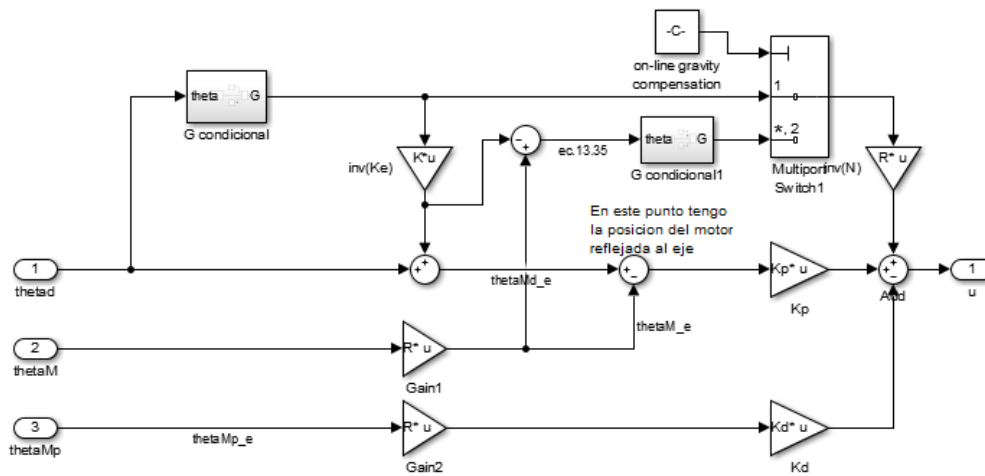


Figura 3.27: Diagrama de bloques del controlador PD, PD+G *offline* y PD+G *online*

Como se han conservado en las simulaciones las ganancias obtenidas para el caso regulatorio el seguimiento de la referencia (figs. 3.28 y 3.29) no es adecuado. Sin embargo alcanza para observar las mejoras que esta variación del método de compensación aporta. En la fig. 3.30 se observa que el error de seguimiento disminuye más en el primer eje con la compensación *online*, debido a que es el que mayor carga debe transportar. Luego los torques resultan levemente superiores (figs. 3.31 y 3.32) y muestran las principales diferencias en los transitorios que es donde la compensación *online* produce el mayor efecto. Nuevamente en el eje 1 es donde se puede apreciar mejor la diferencia.

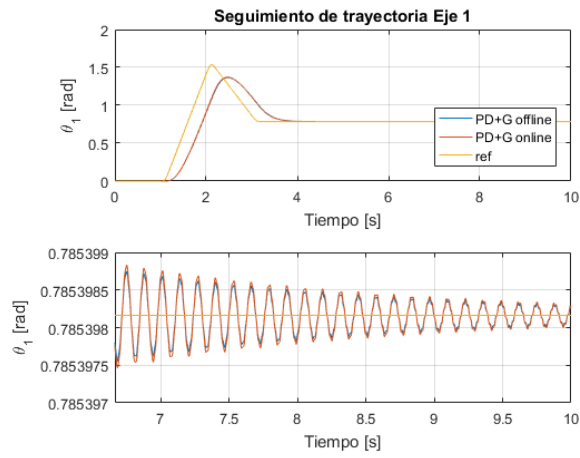


Figura 3.28: Comparación seguimiento de trayectoria para el eje 1 con estrategias PD+G *offline* y PD+G *online*

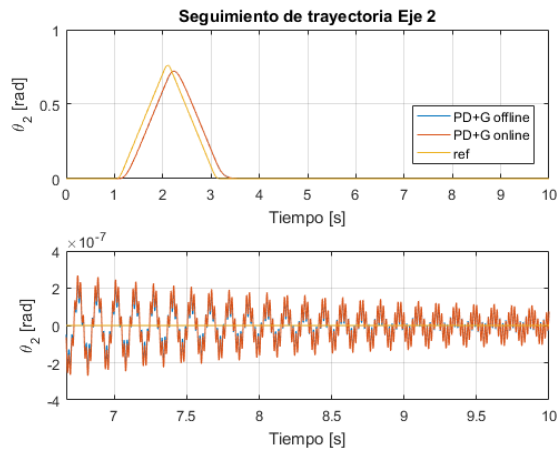


Figura 3.29: Comparación seguimiento de trayectoria para el eje 2 con estrategias PD+G *offline* y PD+G *online*

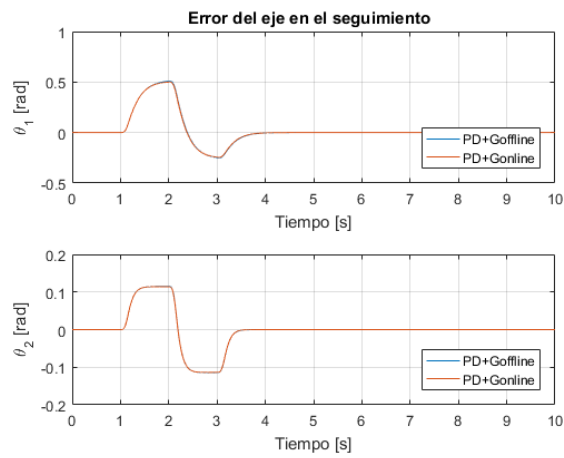


Figura 3.30: Errores de seguimiento de trayectoria con estrategias PD+G *offline* y PD+G *online*

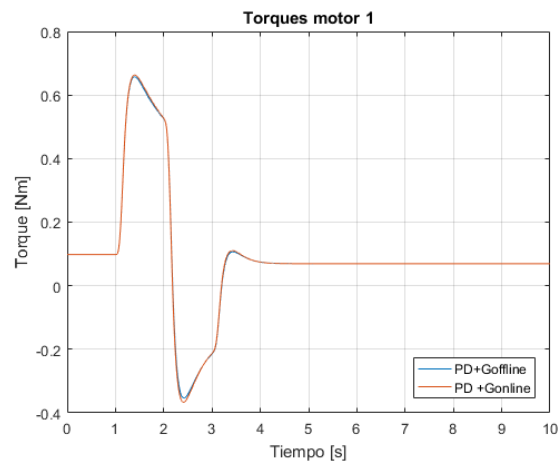


Figura 3.31: Comparación Torques del eje 1 en seguimiento de trayectoria con estrategias PD+G *offline* y PD+G *online*

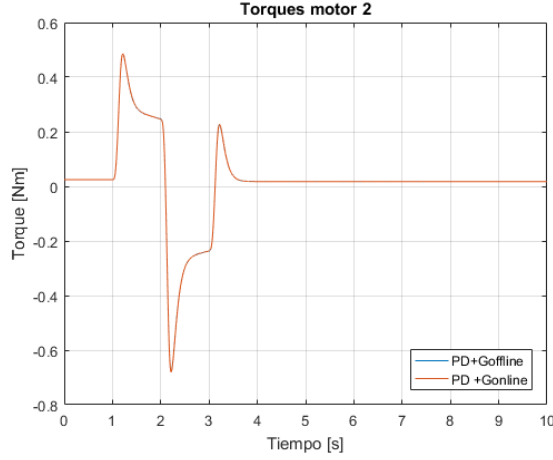


Figura 3.32: Comparación Torques del eje 2 en seguimiento de trayectoria con estrategias PD+G *offline* y PD+G *online*

A pesar de las leves mejoras de la compensación *online* en el transitorio, se observa que la amplitud de las vibraciones no disminuye.

En la estrategia presentada en esta sección se incorporó información de la planta a través de la inclusión del modelo del peso propio del manipulador ( $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$ ) y de la elasticidad de las juntas ( $K_e$ ). Es esperable que al sumar más información proveniente del modelo y de nuevas mediciones se logre mejorar también el tiempo respuesta y se atenúen mejor las vibraciones.

### 3.1.5. Estrategia PD + fullstate - feedback

Para mejorar la respuesta temporal se puede incorporar al control PD con compensación de gravedad, la medición de los torques transmitidos por la junta elástica [36]. La medición se realiza mediante sensores de tipo *strain gauges* situados en la articulación, que si son muestreados a una tasa mucho mayor que la del lazo de control, se puede obtener también su derivada con restas sucesivas. Entonces el torque elástico  $\boldsymbol{\tau}_e$  y su derivada  $\dot{\boldsymbol{\tau}}_e$  se suman a la ley de la ec. 3.1.11 para obtener la ec. 3.1.25 [37], donde las dos diferentes realimentaciones y sus respectivas ganancias de control son fácilmente reconocibles.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p R(\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) - K_d R\dot{\boldsymbol{\theta}}_m^d + K_t [\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) - \boldsymbol{\tau}_e] - K_s \dot{\boldsymbol{\tau}}_e + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \quad (3.1.25)$$

La ley de control puede entenderse como un lazo interno que realimenta el torque transmitido con el efecto de reducir el momento de inercia aparente

del motor y regular las vibraciones, seguido con uno externo del tipo PD con compensación de gravedad (fig. 3.33). Para implementar el lazo interno se calcula el torque motor en función de una nueva variable auxiliar  $\mathbf{u}$  definida según la ec. 3.1.26.

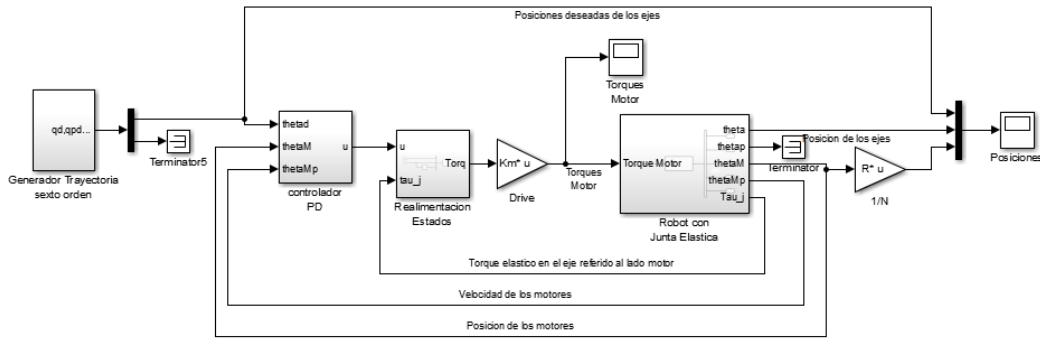


Figura 3.33: Diagrama de bloques del péndulo doble controlado por un PD+G con realimentación del torque

$$\boldsymbol{\tau}_m = J_m J_d^{-1} \mathbf{u} + (I - J_m J_d^{-1}) (R \boldsymbol{\tau}_e) \quad (3.1.26)$$

Reemplazando la ec. 3.1.26 en la del motor 2.1.7 se llega a una nueva ecuación del motor donde la inercia  $J_d$  puede ser elegida de menor magnitud que  $J_m$  aumentando de esta manera la frecuencia elástica del sistema  $\omega_e = \sqrt{K_e/J_d}$ .

$$\begin{aligned} J_m \ddot{\boldsymbol{\theta}} + R \boldsymbol{\tau}_e &= \boldsymbol{\tau}_m \\ J_m \ddot{\boldsymbol{\theta}} + R \boldsymbol{\tau}_e &= J_m J_d^{-1} \mathbf{u} + (I - J_m J_d^{-1}) (R \boldsymbol{\tau}_e) \\ J_d \ddot{\boldsymbol{\theta}} + J_d J_m^{-1} R \boldsymbol{\tau}_e &= \mathbf{u} + (J_d J_m^{-1} - I) (R \boldsymbol{\tau}_e) \\ J_d \ddot{\boldsymbol{\theta}} + R \boldsymbol{\tau}_e &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

La ec. 3.1.26 define un bloque que calcula el torque motor a partir de una nueva variable interna  $\mathbf{u}$  de manera que el motor sea visto desde  $\mathbf{u}$  como uno con la inercia modificada. Entonces aplicando la ley de control con compensación de gravedad sobre la nueva variable  $\mathbf{u}$  se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= K_p^{\text{ext}} R (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) - K_d^{\text{ext}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \\
\boldsymbol{\tau}_m &= J_m J_d^{-1} \left( K_p^{\text{ext}} R (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) - K_d^{\text{ext}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \right) + (I - J_m J_d^{-1}) (R \boldsymbol{\tau}_e) \\
\boldsymbol{\tau}_m &= (J_m J_d^{-1} K_p^{\text{ext}} R) (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) - J_m J_d^{-1} K_d^{\text{ext}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m + J_m J_d^{-1} \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \\
&\quad + (I - J_m J_d^{-1}) (R \boldsymbol{\tau}_e) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) \\
\boldsymbol{\tau}_m &= (J_m J_d^{-1} K_p^{\text{ext}} R) (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) - J_m J_d^{-1} K_d^{\text{ext}} \dot{\boldsymbol{\theta}}_m \\
&\quad + (J_m J_d^{-1} - I) (\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d) - R \boldsymbol{\tau}_e) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^d)
\end{aligned}$$

donde se reconoce la ley planteada en la ec. 3.1.25 con las ganancias dadas por

$$\begin{aligned}
K_p &= J_m J_d^{-1} K_p^{\text{ext}} \\
K_d &= J_m J_d^{-1} K_d^{\text{ext}} \\
K_t &= J_m J_d^{-1} - I \\
K_s &= (J_m J_d^{-1} - I) B_e K_e^{-1}
\end{aligned}$$

La ganancia  $K_s$  surge al plantear el amortiguamiento viscoso de la junta elástica, por lo que mediante su inclusión se puede graduar la atenuación de las vibraciones

En las figs. 3.34 y 3.35 se muestra la acción regulatoria del control, y se observa que las vibraciones son atenuadas rápidamente, teniendo un transitorio suave, error de estado estacionario nulo, y un buen rechazo de perturbación en el instante  $t = 5s$  dado por el movimiento del eje 2 transmitido al 1 por el acoplamiento dinámico.



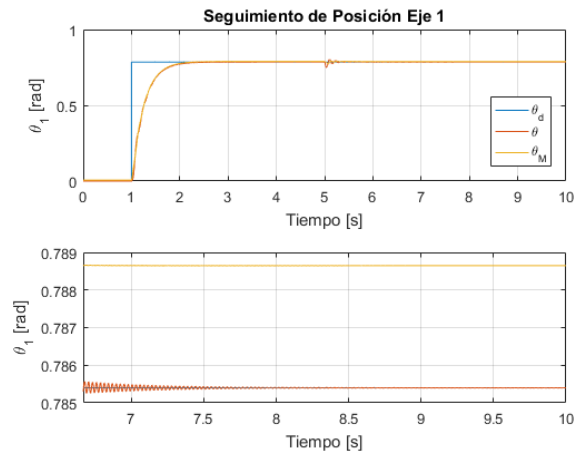


Figura 3.34: Respuesta temporal del eje 1 para una estrategia de control PD+G con realimentación del torque

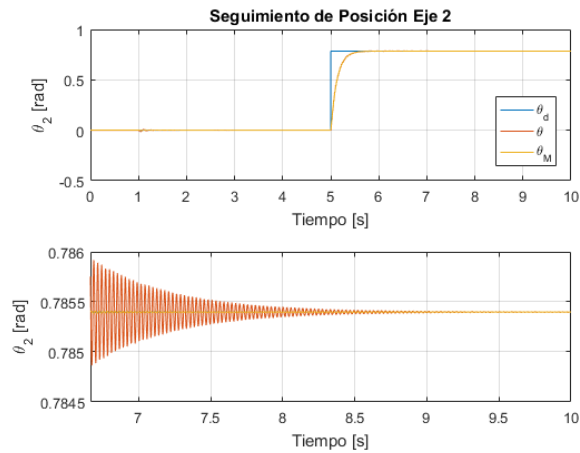


Figura 3.35: Respuesta temporal del eje 2 para una estrategia de control PD+G con realimentación del torque

Para el caso de seguimiento de trayectoria se realiza una simulación para comparar el rendimiento de los controladores propuestos. En las fig. 3.36 y 3.37 se observan las respuestas temporales. Las vibraciones para el caso de realimentación completa son prácticamente extinguidas respecto del controlador PD+G.

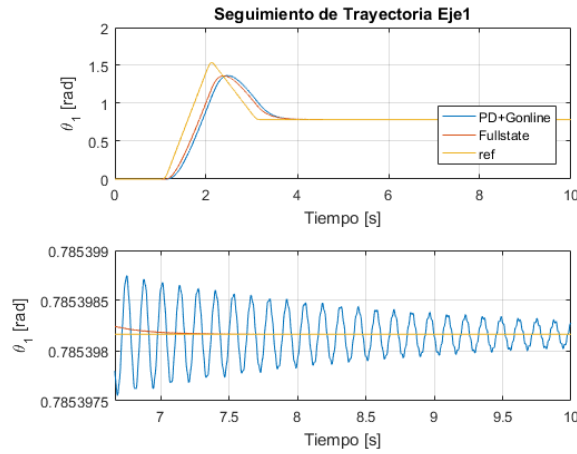


Figura 3.36: Comparación de la estrategia PD+G *online* y realimentación completa (*fullstate*) en seguimiento de trayectoria para el eje 1

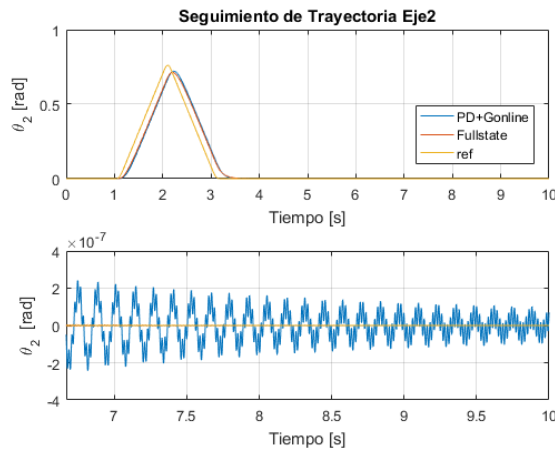


Figura 3.37: Comparación de la estrategia PD+G *online* y realimentación completa (*fullstate*) en seguimiento de trayectoria para el eje 2

Si bien las vibraciones se atenúan en distinta medida mediante las diferentes estrategias de control presentadas, se tiene un seguimiento pobre de la trayectoria. Para mejorar esta situación se observa que el sistema es tipo 1 (un integrador puro), por lo que permite seguimiento en estado estacionario al escalón con error nulo, aunque presenta error para el seguimiento de referencias tipo rampa, que es el caso habitual cuando se trabaja en el control de los ejes de un robot. Así se puede subir el orden del sistema de lazo cerrado incorporando un término integral en el control, aunque esta alternativa no

termina siendo muy beneficiosa porque el atraso de fase lleva rápidamente a la inestabilidad: en esta situación se tienen dos polos en cero y dos polos complejos conjugados muy cerca del eje  $j\omega$ .

Otra opción para mejorar el seguimiento consiste sencillamente en incrementar las ganancias. Se recuerda que se en este punto se está trabajando con una cota conservativa de  $\omega_n = \omega_e/10$  ajustada para tener una buena respuesta regulatoria y minimizar los efectos vibratorios. Por lo tanto incrementar la ganancia  $K_p$  mediante el rediseño del valor de  $\omega_n$  aumenta el riesgo de entrar en resonancia. La cota habitual utilizada en robótica fija  $\omega_n = \omega_e/2$ , resultando las siguientes ganancias

$$K_p = \begin{bmatrix} 100,15 & 0 \\ 0 & 485,93 \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} 6,16 & 0 \\ 0 & 13,70 \end{bmatrix}$$

Las respuestas regulatorias para este ajuste se muestran en las figs. 3.38 y 3.39, donde se observa que la referencia tipo escalón produce una acción de control tan violenta que trae aparejada una respuesta oscilatoria muy marcada. Se observa también que las vibraciones son similares al caso PD+G.

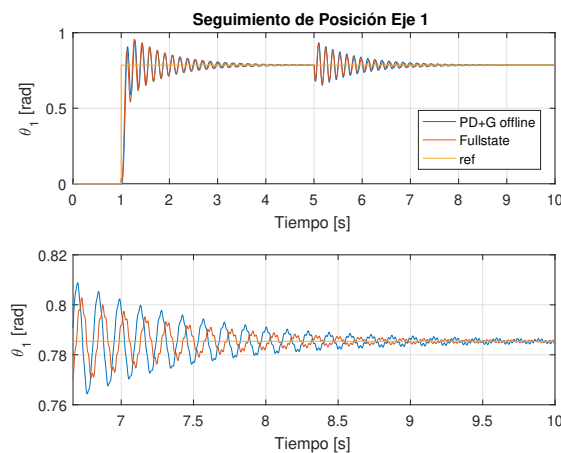


Figura 3.38: Comparación de la estrategia PD+G y *fullstate* para regulación en el eje 1 considerando  $\omega_n = \omega_e/2$

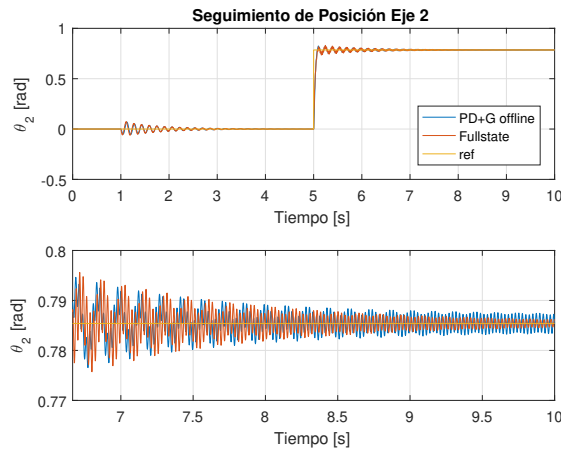


Figura 3.39: Comparación de la estrategia PD+G y *fullstate* para regulación en el eje 2 considerando  $\omega_n = \omega_e/2$

Por otro lado se obtienen las respuestas temporales para seguimiento de trayectoria mostradas en las figs. 3.40 y 3.41 en las que se observa un mejor seguimiento de la trayectoria aunque se han incrementado las amplitudes de las vibraciones con respecto a las figs. 3.36 y 3.37. Sin embargo las vibraciones aun siguen siendo menos notorias que en la estrategia PD+G, evidenciando que el método logra esa mejora al disminuir la inercia efectiva de los motores.

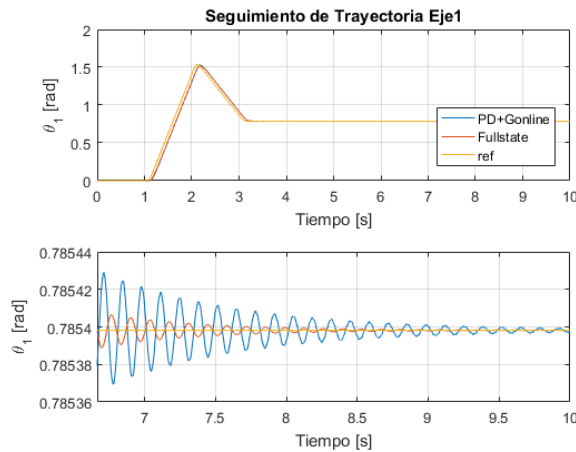


Figura 3.40: Comparación de la estrategia PD+G y *fullstate* para seguimiento de trayectoria en el eje 1 considerando  $\omega_n = \omega_e/2$

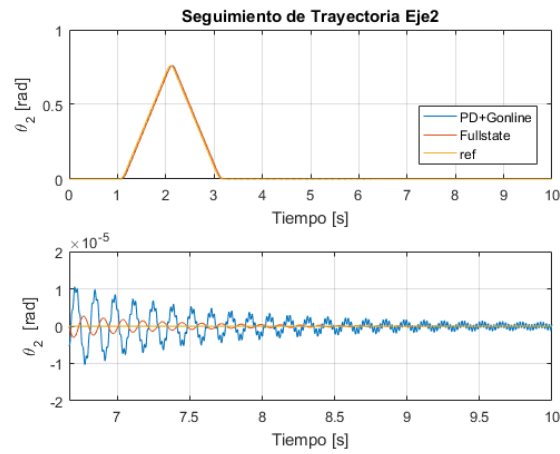


Figura 3.41: Comparación de la estrategia PD+G y *fullstate* para seguimiento de trayectoria en el eje 2 considerando  $\omega_n = \omega_e/2$

Analizando las curvas de torque entregado por los motores (figs. 3.42 y 3.43) se observa que los valores para la estrategia *fullstate* no solo son mayores sino también tienen componentes en frecuencias más elevadas, lo cual es esperable porque se usa al motor para reducir las vibraciones. La curva del control PD+G puede verse como una versión suavizada.

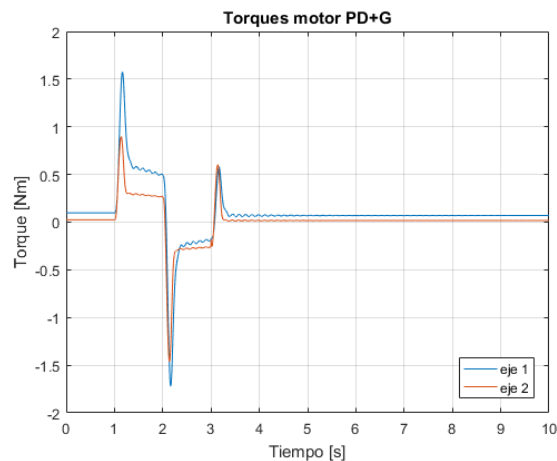


Figura 3.42: Torques de los motores para la estrategia PD+G en seguimiento de trayectoria

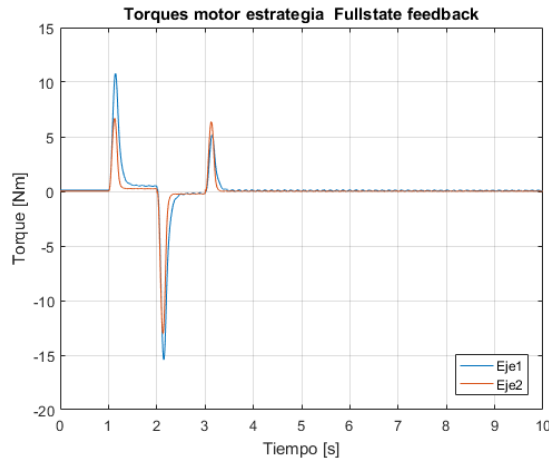


Figura 3.43: Torques de los motores para la estrategia *fullstate* en seguimiento de trayectoria

Otro aspecto a destacar es que los controladores propuestos presentan un retardo entre las curvas de trayectoria de referencia y las obtenidas, dado por el error de seguimiento a la rampa. Para mejorar este aspecto y buscar mayor atenuación de las vibraciones se puede seguir incorporando al control el conocimiento de la planta a través de su modelo mediante la técnica de inversión de la dinámica.

### 3.1.6. Estrategias basadas en la dinámica inversa

Una técnica habitual en el control de robots consiste en la linealización exacta de la planta por medio de la realimentación de las variables de posición y velocidad a través del modelo dinámico inverso, en lo que se conoce como torque computado [2]. El modelo equivalente luego de la linealización resulta en un conjunto de doble integradores, tantos como ejes se tiene. Finalmente el diseño del control es ajustar una ley sobre el sistema equivalente para que el error de seguimiento siga cierta dinámica.

La linealización consigue además el desacoplamiento inercial de los ejes pudiendo trabajar en el control de cada uno por separado.

Al pasar al caso con elasticidades en los ejes, la inversión no es directa, aunque puede llevarse adelante estimando las derivadas de mayor orden de la posición y expresando el modelo en función de ellas. Es decir que se necesita el conocimiento de  $\ddot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$ .

El cálculo de la ley de control por torque computado es muy complejo para llevar adelante en un período de muestreo y muy sensible a incertezas en el conocimiento de la planta. Otra opción es utilizar la dinámica inversa para

calcular el torque necesario instante a instante para recorrer una trayectoria. En este caso se plantearía utilizar la información del modelo en un camino *feed forward*, ya que se calcularía un torque de base en función de las coordenadas de la trayectoria deseada. Una ventaja interesante de este enfoque es que no es necesario estimar derivadas de alto orden de una variable medida (con el error que eso implica) ya que el generador de trayectorias puede proveer curvas analíticas de las referencias con derivadas continuas hasta el orden que se desee.

Otro aspecto notable es en cuanto a la estabilidad. La estrategia de torque computado provee una ley que estabiliza al sistema en forma global; la prueba consiste en encontrar un sistema de control estable para el sistema equivalente linealizado y desacoplado. La estrategia de inclusión del modelo inverso como un término *feed forward* provee el torque necesario para seguir la trayectoria, y luego las diferencias son corregidas por un lazo PD que actúa en función del error de seguimiento. Así el control por realimentación puede entenderse como trabajando sobre un sistema incremental. Luego el ajuste del control se realiza para conseguir estabilidad local alrededor de los correspondientes puntos de trabajo que terminan conformando la trayectoria.

Por lo tanto, para calcular el torque nominal en la trayectoria,  $\boldsymbol{\tau}^d$  se parte de la ecuación de la dinámica inversa del modelo reducido. No obstante analizando el sistema de ecuaciones del modelo reducido se observa que la asociación de un torque para  $\boldsymbol{\theta}^d$  no es inmediata, requiriendo la realización de algunos cálculos previos.

Agrupando los términos de Coriolis, fuerza centrípeta y peso propio en una nueva variable  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$  para simplificar la notación, la ecuación dinámica de los eslabones resulta:

$$M(\boldsymbol{\theta}^d)\ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + \mathbf{n}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d) + K_e\boldsymbol{\theta}^d = K_e R\boldsymbol{\theta}_m^d$$

Derivando respecto al tiempo obtendremos la expresión de la velocidad del motor,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_m^d$ .

$$M(\boldsymbol{\theta}^d)\dot{\ddot{\boldsymbol{\theta}}^d} + \dot{M}(\boldsymbol{\theta}^d)\ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + \dot{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d) + K_e\dot{\boldsymbol{\theta}}^d = K_e R\dot{\boldsymbol{\theta}}_m^d$$

Derivando otra vez respecto al tiempo aparece la aceleración del motor  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_m^d$ .

$$M(\boldsymbol{\theta}^d)\ddot{\ddot{\boldsymbol{\theta}}^d} + 2\dot{M}(\boldsymbol{\theta}^d)\dot{\ddot{\boldsymbol{\theta}}^d} + \ddot{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d) + \left[ \ddot{M}(\boldsymbol{\theta}^d) + K_e \right] \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d = K_e R\ddot{\boldsymbol{\theta}}_m^d \quad (3.1.27)$$

De la ecuación del motor se tiene

$$\boldsymbol{\tau}_m = J_m\ddot{\boldsymbol{\theta}}_m + R\boldsymbol{\tau}_e \quad (3.1.28)$$

Sustituyendo la aceleración de los motores (ec. 3.1.27) en la ec. 3.1.28 se tiene

$$J_m N K_e^{-1} \left\{ M(\boldsymbol{\theta}^d) \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + 2\dot{M}(\boldsymbol{\theta}^d) \dot{\boldsymbol{\theta}}^d + \ddot{n}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d) + \left[ \ddot{M}(\boldsymbol{\theta}^d) + K_e \right] \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d \right\} = \boldsymbol{\tau}_m^d - R \boldsymbol{\tau}_e$$

Despejando el torque motor  $\boldsymbol{\tau}_m$  y reemplazando la ecuación dinámica inversa del mecanismo  $\boldsymbol{\tau}_e = M\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{n}$  se llega a la expresión de la componente FF (ec. 3.1.29) donde se tiene por separado en el primer término el torque necesario para mover al robot considerando las juntas rígidas y en el segundo la componente adicional que surge de la elasticidad.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_m^d = R & \left[ M(\boldsymbol{\theta}^d) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d) \right] \\ & + J_m N K_e^{-1} \left\{ M(\boldsymbol{\theta}^d) \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + 2\dot{M}(\boldsymbol{\theta}^d) \dot{\boldsymbol{\theta}}^d + \ddot{n}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d) + \left[ \ddot{M}(\boldsymbol{\theta}^d) + K_e \right] \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d \right\} \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Para calcular la componente FF  $\boldsymbol{\tau}_m^d$ , es necesario obtener las primeras y segundas derivadas respecto al tiempo de las matrices de la dinámica. Como la matriz de energía cinética  $M = [m_{i,j}]$  depende del tiempo a través de  $\boldsymbol{\theta}$  la derivada se calcula por la regla de la cadena para cada elemento.

$$\dot{m}_{j,k}(\boldsymbol{\theta}^d) = \sum_{i=1}^{N_{axis}} \frac{\partial m_{j,k}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^d} \dot{\theta}_i^d$$

Luego la segunda derivada se obtiene derivando el producto.

$$\ddot{m}_{j,k}(\boldsymbol{\theta}^d) = \sum_{i=1}^{N_{axis}} \frac{\partial \dot{m}_{j,k}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^d} \dot{\theta}_i^d + \sum_{i=1}^{N_{axis}} \frac{\partial m_{j,k}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^d} \ddot{\theta}_i^d$$

La misma estructura se emplea para obtener la primera derivada  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d)$ .

Una alternativa para cerrar el lazo de control consiste en realimentar solo las variables del motor con una estrategia PD según la ec. 3.1.30, donde el último es el término *feed forward*.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p R (\boldsymbol{\theta}_m^d - \boldsymbol{\theta}_m) + K_d R (\dot{\boldsymbol{\theta}}_m^d - \dot{\boldsymbol{\theta}}_m) + N \boldsymbol{\tau}_m^d \quad (3.1.30)$$

Como el controlador de lazo cerrado tiene que corregir el error de seguimiento respecto del punto de trabajo, se encuentra entonces frente a un modelo incremental con las mismas características sobre los que se estuvieron trabajando previamente. Entonces resulta conveniente mantener el ajuste de las ganancias para poder comparar los rendimientos.



En las figs. 3.44 y 3.45 se muestra la evolución temporal para el seguimiento de referencias con el ajuste propuesto, y se nota la importante reducción en el error, debido a que el término FF corrige el atraso que se observaba con las estrategias previas.

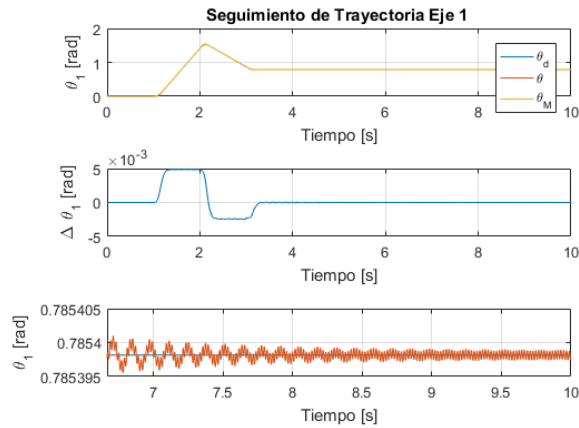


Figura 3.44: Respuesta temporal del eje 1 para PD+FF

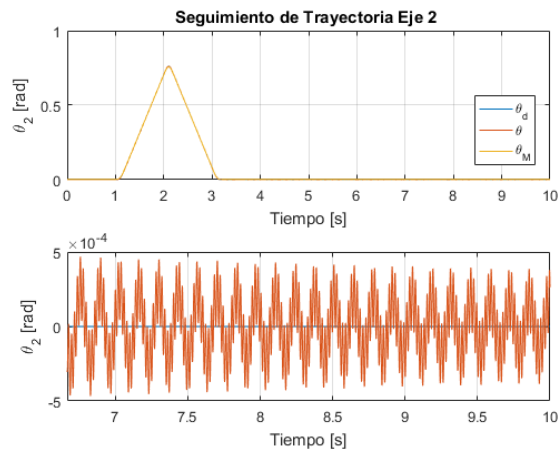


Figura 3.45: Respuesta temporal del eje 2 para PD+FF

Por otro lado, los torques motor provistos por esta estrategia muestran componentes de alta frecuencia (fig. 3.46).

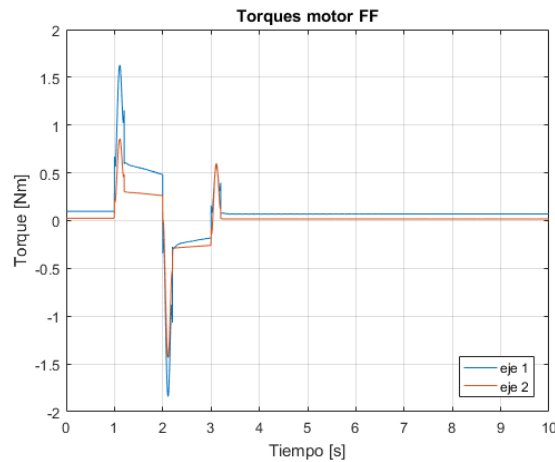


Figura 3.46: Evolución temporal de los torques motor del para PD+FF

Si se analizan las respuestas obtenidas se puede ver que la amplitud de las vibraciones es mínima en ambos ejes. Esto se debe principalmente a que la componente del torque calculada por el lazo es muy pequeña pues en todo momento el error de seguimiento es cercano a 0, y tanto la componente derivativa del controlador como los elementos disipativos se encargan de amortiguarlas.

El efecto de la variación de la ganancia, parametrizado a través de  $\omega_n$  puede observarse en las figs. 3.47 y 3.48. Si bien se aprecia una mejora en el seguimiento cuando se incrementan las ganancias, del mismo modo que ocurría con las demás estrategias, también se incrementan las vibraciones, siendo éste un límite impuesto por la constante elástica de la articulación.

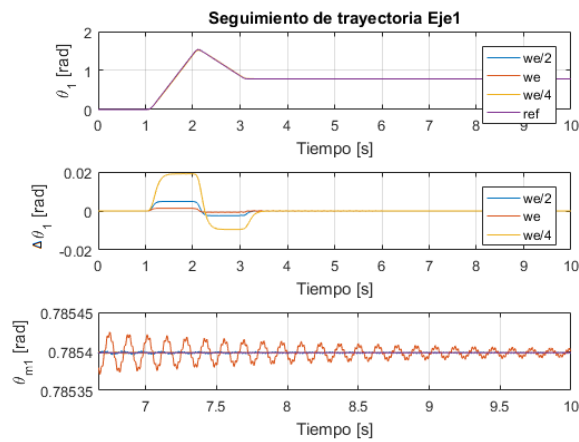


Figura 3.47: Efecto en la respuesta temporal de la variación de ganancia para el control PD+FF

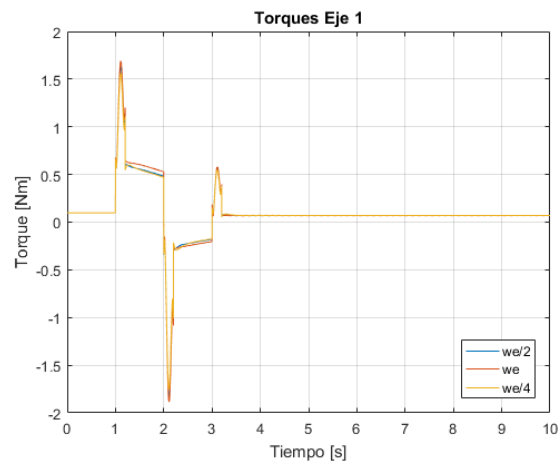


Figura 3.48: Efecto en la fuerza de control de la variación de ganancia para el control PD+FF

### 3.1.7. Comparación de las estrategias implementadas

En las figs. 3.49 y 3.50 se muestran las respuestas de los distintos controladores ajustados todos de la misma manera.

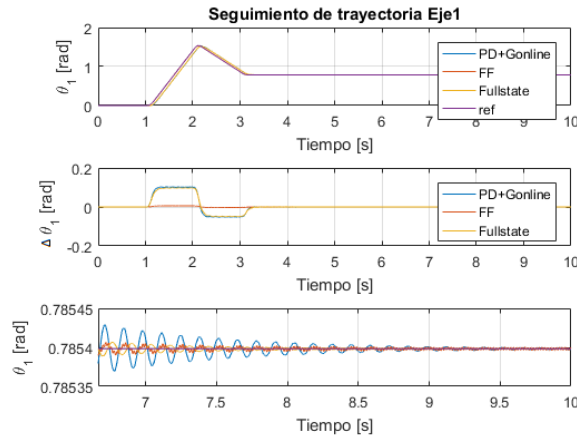


Figura 3.49: Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble para diferentes estrategias.

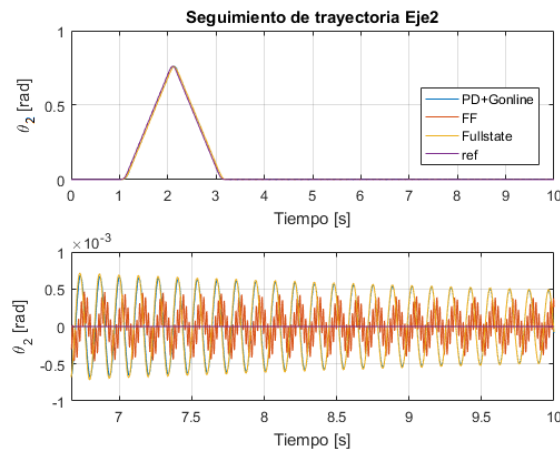


Figura 3.50: Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble para diferentes estrategias.

En las figs. 3.51 y 3.52 se muestran las fuerzas de control calculadas por las distintas estrategias. Se observa que las leyes de control más sofisticadas, que hace uso del modelo de la planta, generan torques con componentes de mayor frecuencia, con picos bien definidos. Es decir que la curva de torque para una estrategia PD aparece como una versión suavizada, de baja frecuencia, de aquellas generadas por las estrategias más complejas. Por lo tanto surge cuestionar la posibilidad de implementarlas teniendo en cuenta que los motores tienen un ancho de banda limitado.

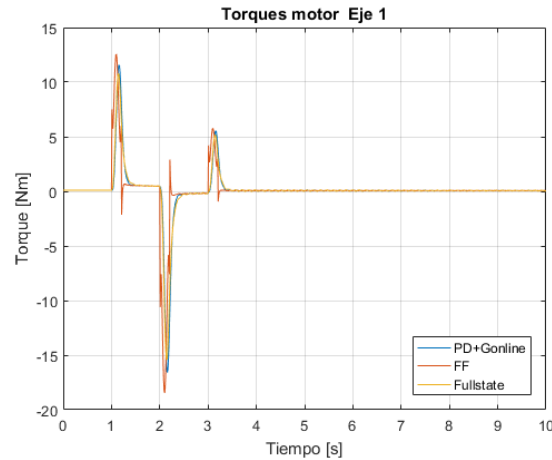


Figura 3.51: Comparación de la respuesta en el tiempo del torque motor del eje 1 del péndulo doble para diferentes estrategias.

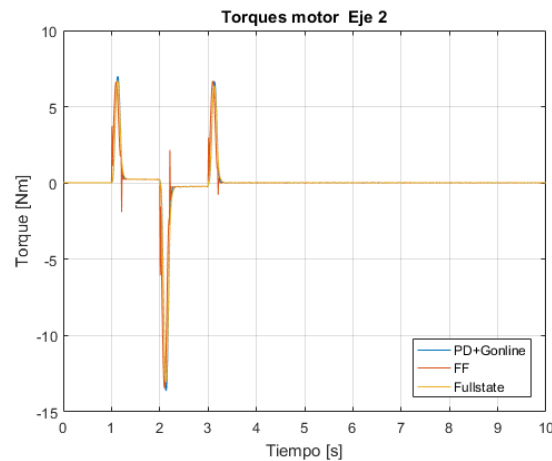


Figura 3.52: Comparación de la respuesta en el tiempo del torque motor del eje 2 del péndulo doble para diferentes estrategias.

Finalmente se puede concluir que los métodos PD+G y *fullstate feedback* tienen un retraso en el seguimiento que hace que no sean muy adecuadas para generar trayectorias en el espacio de los ejes y menos aún si lo que se pretende es realizar trayectorias cartesianas (en línea recta por ejemplo).

Por otro lado, el método FF obtiene buena respuesta de seguimiento y es la estrategia que mejor disipa las vibraciones. Aun así, cuenta con la desventaja de que su convergencia a la trayectoria deseada está solo garantizada localmente, es decir, los errores de seguimiento deben ser lo suficientemente

pequeños para garantizar su buen comportamiento. Además si se utilizara este método para realizar trayectorias cartesianas nos encontraríamos con el problema de tener que obtener hasta la cuarta derivada de  $\theta^d$  por derivación numérica resultando esta una aproximación inconveniente.

## 3.2. Eslabones flexibles

Luego de haber analizado las diferentes estrategias de control para el caso de las articulaciones elásticas, se hace lo propio con el mismo modelo mecánico donde las articulaciones son rígidas u los eslabones son flexibles.

El control de movimiento en sistemas de eslabones flexibles no solo debe afrontar los problemas de seguimiento de trayectoria o regulación de posición a los que se enfrentan los robots rígidos. Al igual que los sistemas que concentraban su flexibilidad en las articulaciones, éstos también deben suprimir en forma activa las vibraciones. Del mismo modo las dificultades son grandes debido a la no linealidad y al acoplamiento que presentan las ecuaciones 2.2.31 [38].

Para corregir las vibraciones se puede incorporar la medición de las deflexiones mediante *strain gauges* distribuidos en los eslabones. Por simplicidad de implementación, las estrategias planteadas hacen uso de la misma estructura de sensores presentada en la sección anterior. Entonces se reducen las vibraciones con la información proveniente de los sensores de posición y velocidad de los motores.

El trayecto propuesto parte del estudio de un control PD como base de comparación para ir complejizando luego la estrategia.

### 3.2.1. Estrategia PD

En ausencia de mediciones provenientes de la deflexión ( $\delta$ ), la ley de control se representa como

$$\tau = K_p(\theta^d - \theta) - K_d\dot{\theta} \quad (3.2.31)$$

siendo la misma expresión que la empleada en el caso de articulaciones flexibles (ec. 3.1.1). En este caso, al no contar con elasticidad en las articulaciones,  $\theta$  se relaciona con la variable del motor mediante la reducción  $R$  como  $\theta = R\theta_m$ .

### 3.2.1.1. Elección de las ganancias

El cálculo de las ganancias parte de la expresión 3.1.8. En este caso la frecuencia elástica del sistema está determinada por la flexibilidad de los eslabones siendo dominante la determinada por la frecuencia del primer modo,  $\beta_{i1}^4 = \omega_{i1}^2 \rho_i / (EI)_i$ .

Para el caso de estudio, y con el fin de incrementar el efecto de la flexibilidad de los eslabones, se supone que las masas de los motores son  $m_{m1} = m_{m2} = 1,0Kg$ . Así se hace más notoria la deflexión sufrida por los eslabones, y también se amplían las vibraciones.

Para el ajuste de la ganancia se limita  $\omega_n = \omega_e/3$  según [39]. Así las frecuencias elásticas para cada modo tienen los siguientes valores,

$$\begin{aligned}\omega_{e11} &= 8,703 \\ \omega_{e12} &= 204,431 \\ \omega_{e21} &= 43,281 \\ \omega_{e21} &= 316,208\end{aligned}$$

siendo el primer subíndice el indicador del eslabón y el segundo el indicador del modo. Como se observa la frecuencia del primer modo es la dominante y la que se considera para obtener la frecuencia elástica.

De acuerdo a esto las ganancias calculadas son:

$$\begin{aligned}K_p &= \begin{bmatrix} 8,5469 & 0 \\ 0 & 204,5877 \end{bmatrix} \\ K_d &= \begin{bmatrix} 5,6514 & 0 \\ 0 & 328,3478 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

### 3.2.1.2. Evaluación del controlador

El control más sencillo, ajustado de manera de excitar lo menos posible a los modos elásticos produce una respuesta oscilatoria. En la fig. 3.53 se observa el efecto de la falta de compensación de la gravedad en la caída del eslabón. Luego se recupera lentamente teniendo en la posición final una oscilación permanente. El segundo eje (fig. 3.54) permite un ajuste con mayor ganancia pues la frecuencia elástica es mucho mayor, haciendo que los transitorios sean más rápidos, aunque el efecto vibratorio sigue presente.

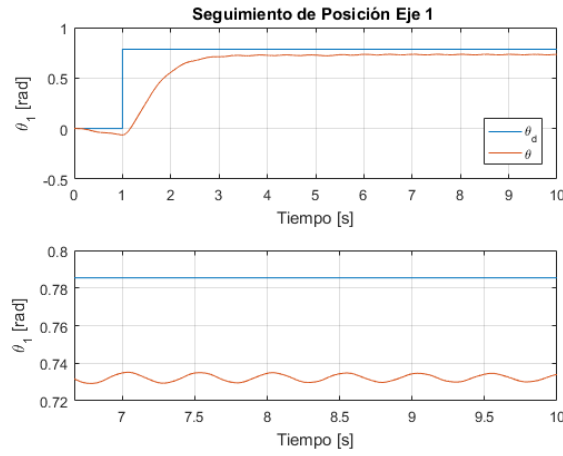


Figura 3.53: Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD.

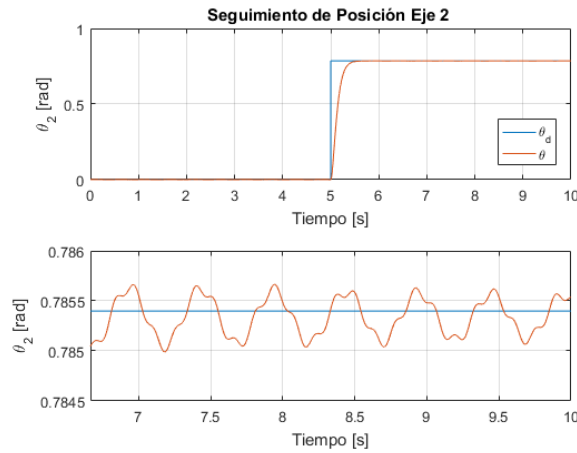


Figura 3.54: Seguimiento de posición del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD.

La evolución de las variables generalizadas de desplazamiento asociadas a los modos de vibración (fig. 3.55) muestran las frecuencias intervinientes en cada una de ellas. También se justifica el modelado de la deformación por la aproximación con 2 modos en virtud de las amplitudes de los mismos.

Se observa además que a partir del instante  $t = 5s$  cuando el segundo eje se pone en movimiento, que se induce una perturbación fácilmente distinguible en la curva  $\delta_{12}(t)$ .



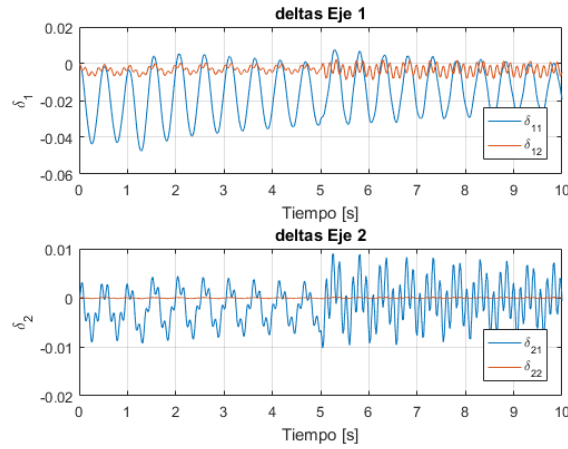


Figura 3.55: Variación de las deltas en el tiempo para una estrategia PD.

Al igual que en el caso de juntas elásticas, esta sencilla estrategia suma al error de seguimiento para el caso de un mecanismo rígido dado por el peso propio la deformación elástica producida en los eslabones. Por lo tanto el primer punto a compensar es el efecto gravitatorio.

### 3.2.2. PD+ Compensación gravedad

Si el eslabón es considerado lo suficientemente rígido, la ley de control dada en la ec. 3.2.31 puede ser mejorada con la inclusión de un término de compensación dependiente solo de  $\theta$ , según la ec. 3.2.32.

$$\tau = K_p(\theta^d - \theta) - K_d\dot{\theta} + \mathbf{G}(\theta^d) \quad (3.2.32)$$

En las figs. 3.56 y 3.57 se muestra que la compensación propuesta para el caso rígido mejora el valor medio alcanzado luego del transitorio del movimiento. Sin embargo las vibraciones transmitidas por las elasticidades hacia la posición de los ejes no pueden ser atenuadas. Más aún, se observa un sesgo entre el valor medio alcanzado y la referencia, producto de la deformación elástica.

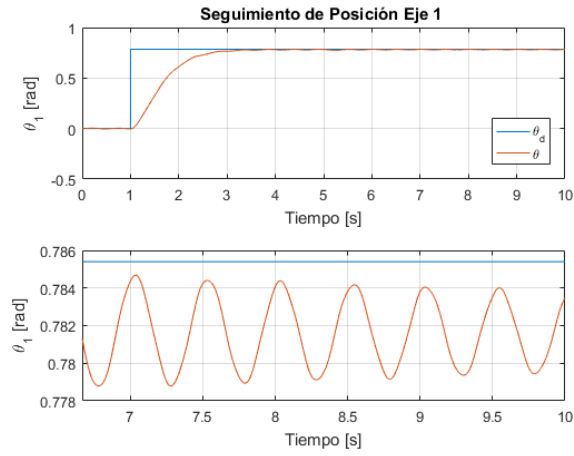


Figura 3.56: Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G

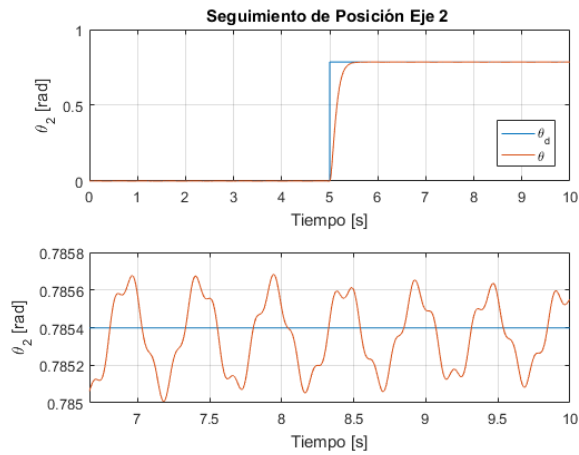


Figura 3.57: Seguimiento de posición del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G

La evolución de las variables generalizadas de deformación (fig. 3.58) para este caso presentan las mismas características que las obtenidas para el control PD más sencillo.

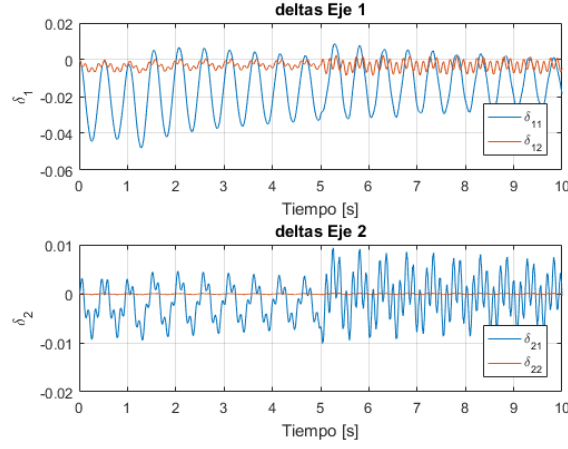


Figura 3.58: Variación de las deltas en el tiempo para una estrategia PD+G.

Para mejorar el seguimiento y eliminar el sesgo del valor medio en [39] se plantea una modificación a la ley de control (ec. 3.2.33) pensada para trabajar en ausencia de la medición de las deformaciones ( $\delta$ ) tal como se había propuesto en un principio.

$$\tau = K_p(\theta^d - \theta) - K_d\dot{\theta} + \mathbf{G}_\theta(\theta^d, \delta^d) \quad (3.2.33)$$

El vector de peso propio se define como,

$$\mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\theta(\theta, \delta) \\ \mathbf{G}_\delta(\theta) \end{bmatrix}$$

por lo que se puede despejar el valor de  $\delta^d$  según,

$$\delta^d = -K^{-1}\mathbf{G}_\delta(\theta^d) \quad (3.2.34)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de articulaciones flexibles (ec. 3.1.13), se observa que aquí las ecuaciones para el punto de de equilibrio son dependientes de la rigidez de los eslabones.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\delta(\theta) &= -K\delta \\ \mathbf{G}(\theta, \delta) &= K_p(\theta^d - \theta) + \mathbf{G}_\theta(\theta^d, \delta^d) \end{aligned}$$

Llevando esta expresión a la forma matricial se tiene

$$A \begin{bmatrix} \theta^d - \theta \\ \delta^d - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\theta(\theta, \delta) - \mathbf{G}_\theta(\theta^d, \delta^d) \\ \mathbf{G}_\delta(\theta) - \mathbf{G}_\delta(\theta^d) \end{bmatrix}$$

donde la matriz  $A$  queda definida por,

$$A(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

Definiendo la cota  $\alpha$  sobre la derivada de los términos de gravedad y sabiendo que la rigidez del sistema siempre será suficiente para sostener cualquier posición en el espacio, se busca  $K_p$  de manera que  $\sigma_{\min}(A) > \alpha$  para verificar la unicidad de la solución nula de la ecuación de estados de este sistema.

La estabilidad de la ley de control se prueba por el segundo método de Lyapunov, construyendo la función del estado definida positiva dada por la ec. 3.2.35.

$$V_{\text{efPD+G}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T J_m \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} (\mathbf{q}^d - \mathbf{q})^T K (\mathbf{q}^d - \mathbf{q}) + U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{q}^d) + (\mathbf{q}^d - \mathbf{q})^T \mathbf{G}(\mathbf{q}^d) \geq 0 \quad (3.2.35)$$

La simulación de esta ley modificada que anticipa la componente de peso propio de acuerdo al punto que se quiere alcanzar se observa en la figs. 3.59 y 3.60. Se consigue eliminar el sesgo del valor medio alcanzado luego del transitorio, aunque las oscilaciones continúan presentes.

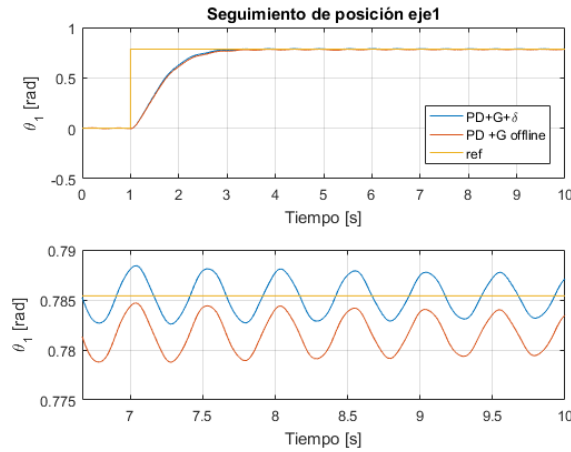


Figura 3.59: Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}$ )

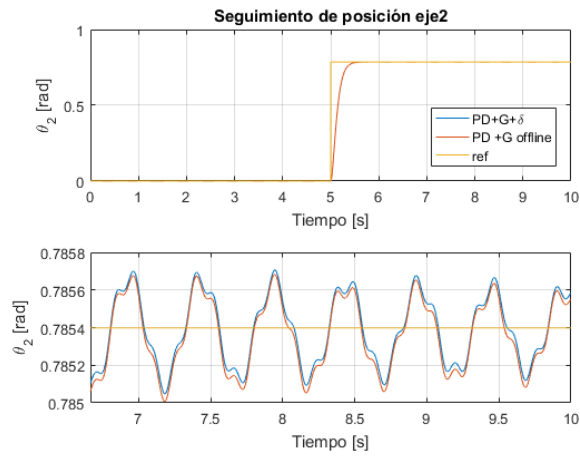


Figura 3.60: Seguimiento de posición del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia  $PD+G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})$

La capacidad de seguimiento de una trayectoria por parte de este controlador es evaluada con el ajuste actual y los resultados se muestran en las figs. 3.61 y 3.62.

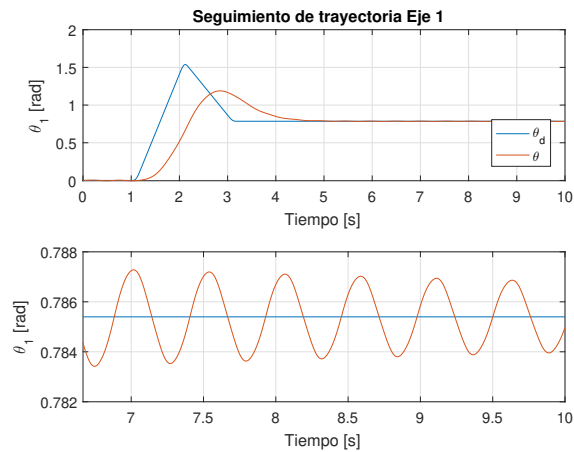


Figura 3.61: Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia  $PD+G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})$

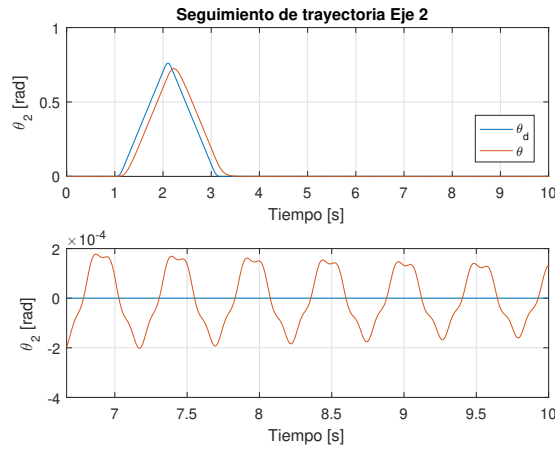


Figura 3.62: Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ )

La evolución de las variables generalizadas de deformación se observan en la fig. 3.63. La disminución en los valores que se consiguen para este caso de seguimiento de trayectoria se debe a que la curva de referencia es suave, por lo cual no se excitan en gran medida a los modos elásticos.

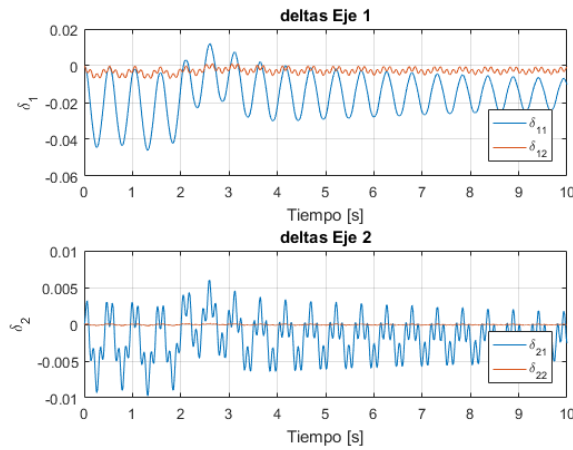


Figura 3.63: Variación de los delta para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) en seguimiento de trayectoria.

Del igual forma a cómo ocurre en el caso de juntas elásticas, las ganancias obtenidas para el control regulatorio no son adecuadas para garantizar un seguimiento, tal como se observa en la fig. 3.61. Para mejorar el seguimiento

se pueden recalcular las ganancias a partir de un parámetro  $\omega_n$  mayor, aunque se corre el riesgo de excitar las frecuencias de resonancia.

Debido a la baja frecuencia del primer modo del primer eslabón (asociado a  $\beta_{11}$ ), en este caso no se podrá garantizar un buen seguimiento sin desmejorar mucho la respuesta oscilatoria de las vibraciones.

Con el simulador se estudia el efecto de variar el parámetro de ajuste del control  $\omega_n$ . En las figs. 3.64 se observa el efecto de los distintos ajustes en el seguimiento de la trayectoria del eje 1, donde se nota la mejora del error, aunque las oscilaciones en los ejes no son extinguidas. Luego en la fig. 3.65 se observa cómo empeoran las vibraciones a medida que  $\omega_n$  aumenta, planteando así una solución de compromiso.

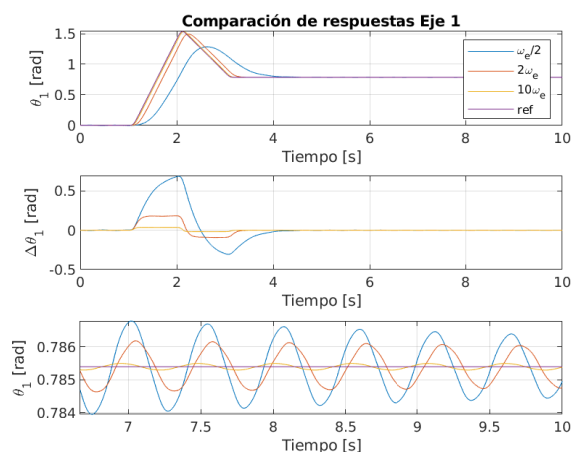


Figura 3.64: Efecto en el seguimiento de la trayectoria de los ejes por la variación del ajuste del control para una estrategia PD+G( $\theta$ ,  $\delta$ )

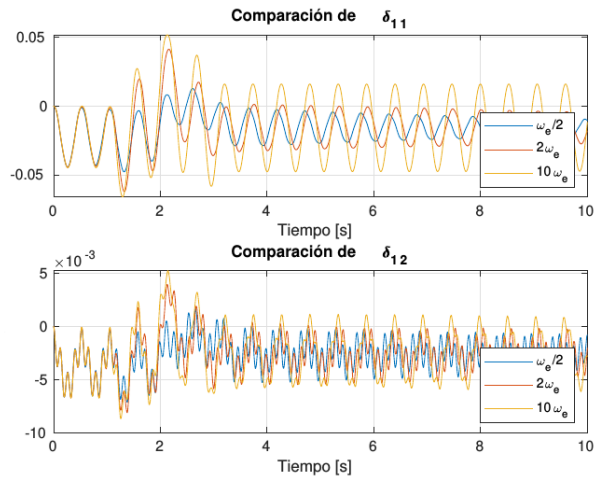


Figura 3.65: Efecto en las vibraciones de los eslabones por la variación del ajuste del control para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ )

El incremento de las ganancias es muy marcado en el ajuste para  $\omega_n = 10\omega_e$ , trayendo acciones de control muy grandes con picos marcados (fig. 3.66). Según 3.1.2, se considera que los actuadores pueden entregar cualquier torque solicitado sin restricción alguna.

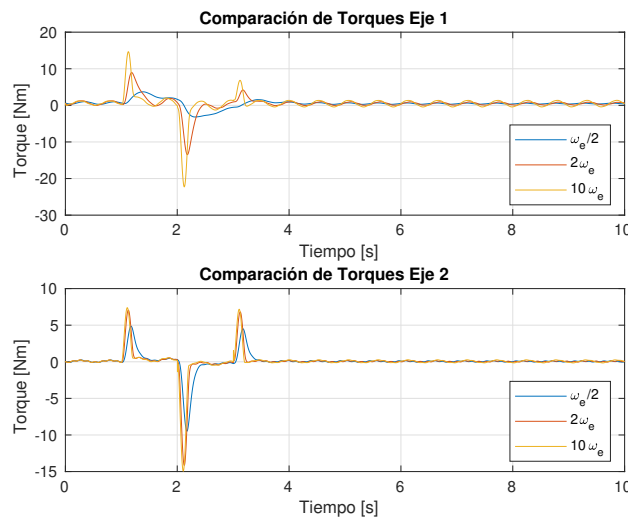


Figura 3.66: Comparación de los torques para distintos ajuste del control para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ )

Para garantizar el seguimiento manteniendo en un valor intermedio las vibraciones se opta las ganancias obtenidas al duplicar la frecuencia elásti-



ca, sin más opción que trabajar en la zona crítica. Calculando las nuevas ganancias para  $\omega_n = 2\omega_e$  se tiene,

$$K_p = \begin{bmatrix} 313,9 & 0 \\ 0 & 7514,7 \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} 35,7692 & 0 \\ 0 & 173,3231 \end{bmatrix}$$

La simulación para este nuevo ajuste se observa en las figs. 3.67 y 3.68, donde tiene una clara mejora del error de seguimiento aunque las vibraciones se duplican (comparar figs. 3.63 y 3.69).

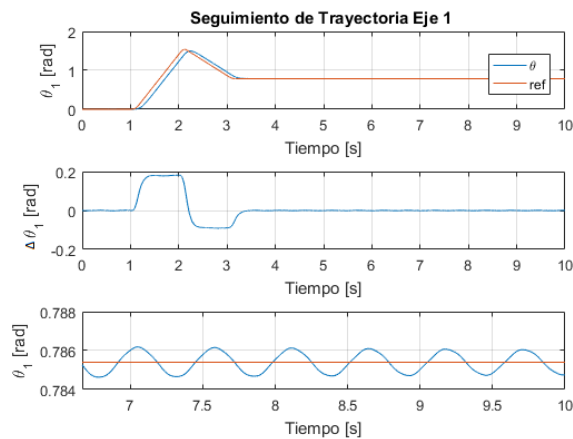


Figura 3.67: Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta$ ,  $\delta$ ) con ganancia calculada a  $\omega_n = 2\omega_e$

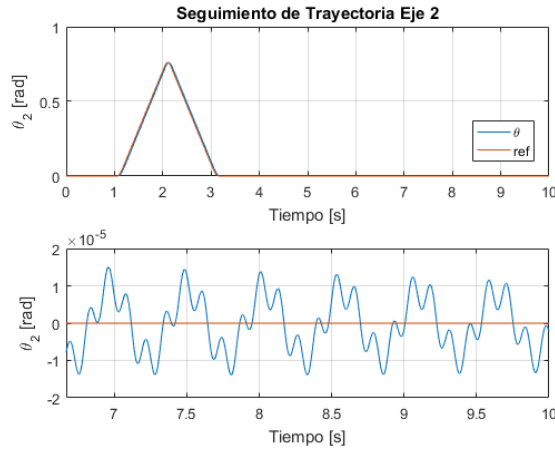


Figura 3.68: Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) con ganancia calculada a  $\omega_n = 2\omega_e$

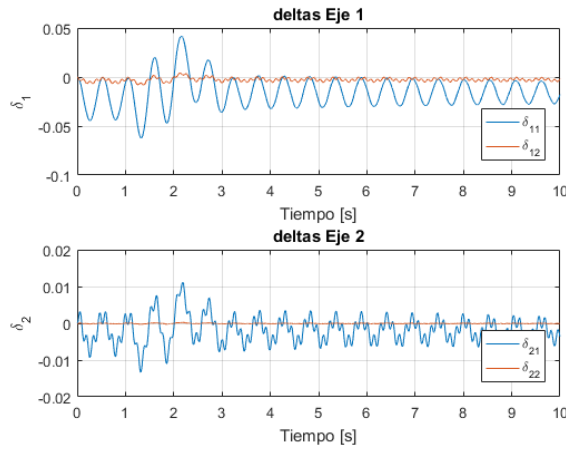


Figura 3.69: Vibraciones resultantes para una estrategia PD+G( $\theta, \delta$ ) en seguimiento de trayectoria e con ganancia calculada a  $\omega_n = 2\omega_e$

Analizando las figuras de las respuestas temporales del seguimiento de trayectoria de ambos ejes, se puede observar que es factible conseguir un buen seguimiento aunque no se pueden cancelar las vibraciones.

### 3.2.3. Estrategia PD +FF

Como se ha analizado en la sección 3.1.6, la estrategia de control con compensación en adelanto calcula el torque nominal para el punto de trabajo y se la añade al término calculado por el controlador PD que se encarga de corregir el error. El hecho de que cambien las ecuaciones dinámicas del sistema, lleva a recalcular el nuevo torque nominal convirtiendo la expresión 3.1.29 en 3.2.36.

$$\boldsymbol{\tau}^d = M(\boldsymbol{q}^d) + J_m N^2 \ddot{\boldsymbol{\theta}}^d + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\theta}^d, \dot{\boldsymbol{\theta}}^d) \quad (3.2.36)$$

El mejor seguimiento ofrecido por esta estrategia ayuda a limitar la frecuencia natural y así trabajar con  $\omega_n$  menores que la frecuencia elástica, alejándose de la posibilidad de entrar en resonancia y disminuyendo en consecuencia las vibraciones.

Limitando  $\omega_n = \omega_e/4$ , las ganancias calculadas resultan mucho menores a las obtenidas previamente y se detallan a continuación,

$$K_p = \begin{bmatrix} 4,9052 & 0 \\ 0 & 117,4172 \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} 4,2086 & 0 \\ 0 & 21,4029 \end{bmatrix}$$

La evolución temporal de la respuesta del brazo controlado por esta estrategia se muestra en las figs. 3.70 y 3.71, donde se observa un excelente desempeño en cuanto al seguimiento con errores en el orden de  $10^{-3} rad$  aunque también se nota la persistencia de las vibraciones.

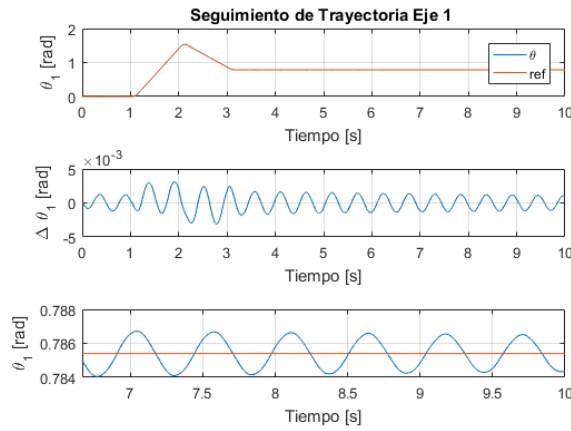


Figura 3.70: Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+FF

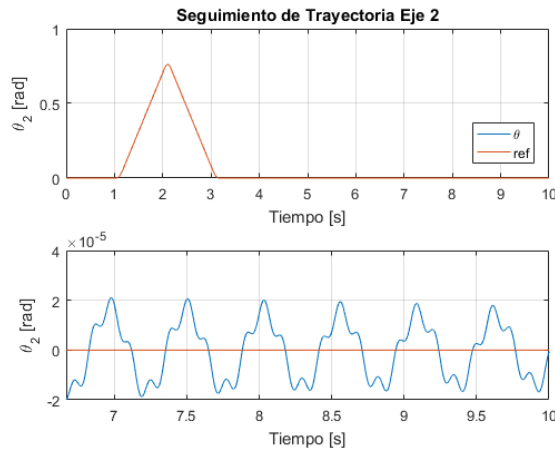


Figura 3.71: Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble con eslabones flexibles para una estrategia PD+FF

En la fig. 3.72 se muestran las oscilaciones a través de la variación temporal de las variables generalizadas asociadas a los modos ( $\delta_{ij}$ ), donde no se observan mejoras respecto al métodos que compensa la gravedad solamente (fig. 3.69) en cuanto a la amplitud y a la atenuación de las mismas. La única salvedad es que el método con compensación en adelante usando el modelo inverso permite trabajar con ganancias mucho menores logrando mejorar la performance general.

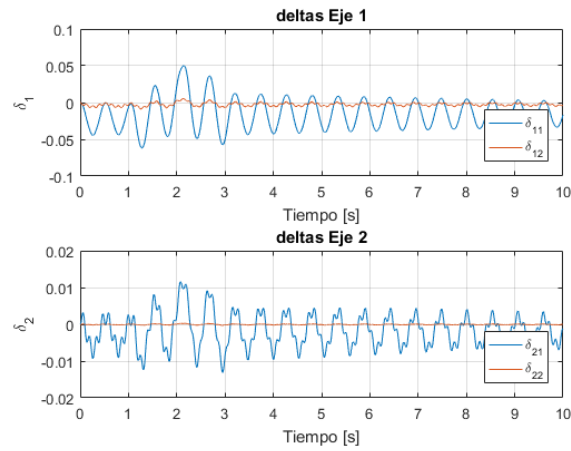


Figura 3.72: Vibraciones de los eslabones para una estrategia PD+FF en seguimiento de trayectoria

### 3.2.4. Comparación de las estrategias implementadas

En las figs. 3.73 y 3.74 se muestra la comparación entre distintas estrategias para los dos ejes. Se incluye también la técnica de torque computado, que si bien no se detalla sobre la implementación y consideraciones de ajuste y robustez, sirve de base de comparación mostrando un desempeño similar al control PD con alimentación en adelante usando el modelo inverso (PD+FF).

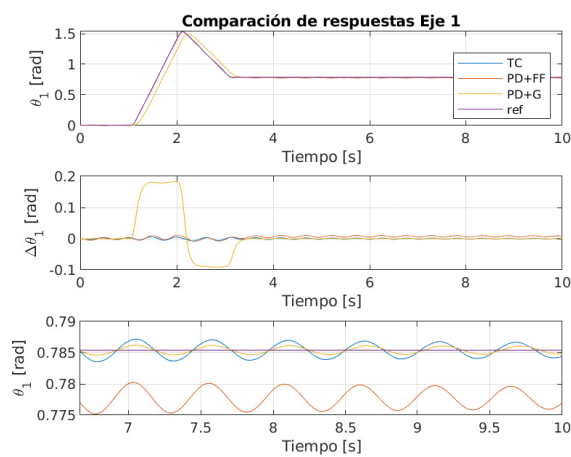


Figura 3.73: Comparación del seguimiento de la trayectoria del eje 1

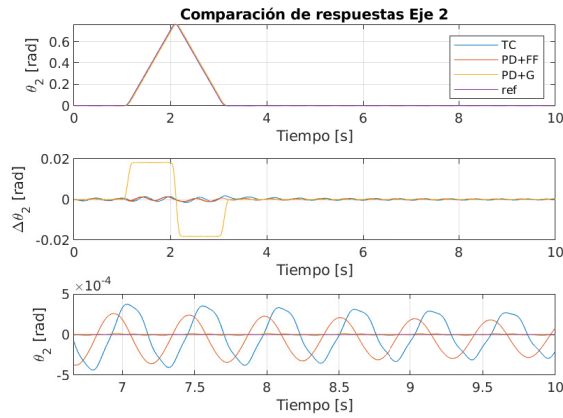


Figura 3.74: Comparación del seguimiento de la trayectoria del eje 2

En la fig. 3.75 se muestra la comparación de las vibraciones resultantes para cada estrategia de control, notándose un comportamiento similar.

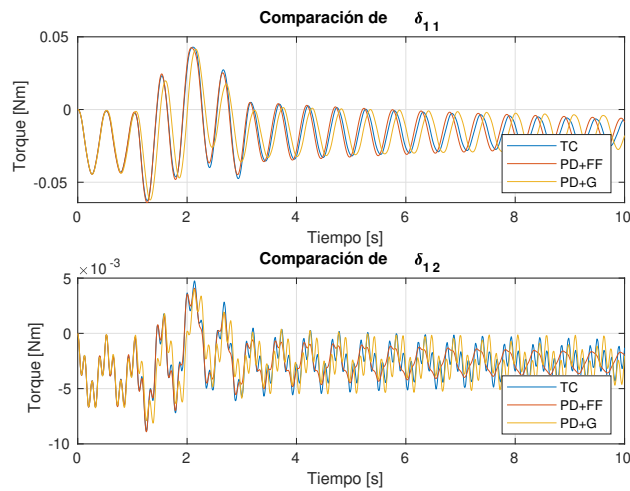


Figura 3.75: Comparación de las vibraciones de los eslabones para distintas técnicas de control

En la fig. 3.76 se presentan comparativamente los torques para las distintas técnicas implementadas. Se nota que la curva de torque del control PD+G, en una versión suavizada de PD+FF, habiendo pocas diferencias entre esta última y el control por torque computado.

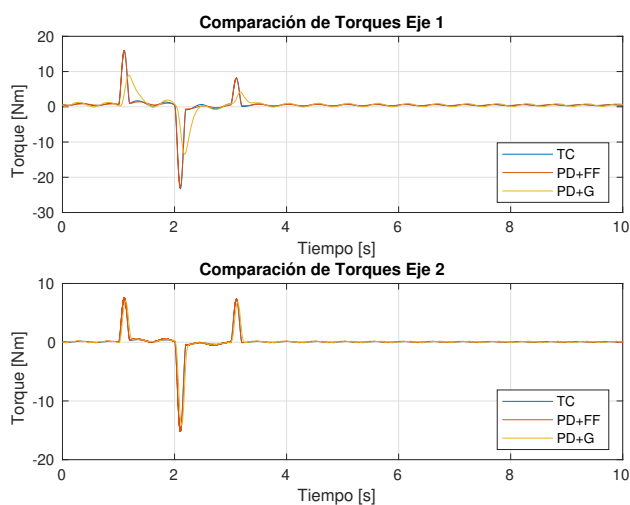


Figura 3.76: Comparación de los torques aplicados en las distintas técnicas de control

Como conclusión sobre el control de los manipuladores con eslabones flexibles, se encuentra que las técnicas que atenúan las vibraciones en el caso de junta elástica no proveen resultados satisfactorios aquí. Esta situación se da principalmente porque por un lado las vibraciones de los eslabones actúan a lazo abierto (no se realizan mediciones de  $\delta$ ) y entonces no son consideradas activamente para la reducción de las mismas, y por otro que en las estrategias presentadas que se contemplan el modelo, se lo hace en forma estática para calcular una compensación en adelante para el torque motor y corregir las desviaciones producidas al tener eslabones flexibles sometidos a fuerzas.

Es así que con estos esquemas de control y utilizando los sensores que habitualmente se encuentran en los brazos rígidos, se logran alcanzar los puntos objetivo, lo cual es muy significativo pues aporta en gran medida a la repetibilidad del manipulador. Sin embargo las vibraciones no se pueden cancelar en forma activa dependiendo en gran medida de la disipación de las mismas dada en el material.

Contrariamente a lo esperado, la estrategia de control por torque computado implementada tampoco consigue la cancelación de las vibraciones, resultando en un desempeño similar al del control por adelantado (PD+FF). Así, el hecho de no haber tenido éxito en cuanto a la atenuación de las vibraciones al reproducir las diferentes técnicas de control conocidas, da lugar a plantear un cuestionamiento sobre la controlabilidad del sistema, requiriendo este aspecto un análisis más detenido.

Finalmente la herramienta con la que se cuenta para minimizar el efecto

vibratorio, es hasta aquí sencillamente limitar la ganancia empobreciendo el seguimiento.

### 3.3. Articulaciones elásticas y eslabones flexibles

Tras analizar las diferentes técnicas de control en los dos modelos de deformación elástica introducidos y obtener las respectivas conclusiones, se propone considerar un sistema mecánico que incluya conjuntamente las dos elasticidades con el objetivo de evaluar el desempeño de las estrategias presentadas.

Los parámetros con los que se va a trabajar y sus respectivas magnitudes aparecen en la tabla 2.2.

#### 3.3.1. Cálculo de las ganancias

El primer desafío consiste en la elección de  $\omega_n$ . El hecho de trabajar con dos frecuencias elásticas diferentes, correspondientes unas a las juntas y las otras a los eslabones, lleva a tomar a una de ellas como la dominante para limitar luego el valor de  $\omega_n$ . De acuerdo a los parámetros considerados para el modelo de estudio las frecuencias elásticas más bajas se corresponden al fenómeno de la elasticidad de eslabones resultando sus valores :

$$\begin{aligned}\omega_{e1} &= 8,703 \\ \omega_{e2} &= 43,281\end{aligned}$$

Fijando como cota de diseño  $\omega_n = \omega_e$ , las ganancias resultan,

$$\begin{aligned}K_p &= \begin{bmatrix} 78,5 & 0 \\ 0 & 1878,7 \end{bmatrix} \\ K_d &= \begin{bmatrix} 17,7346 & 0 \\ 0 & 86,5115 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Como es esperable, en la fig. 3.77 se observa que la estrategia con compensación en adelanto utilizando el modelo inverso presenta los mejores resultados. El efecto vibratorio no consigue atenuarse en consecuencia de las conclusiones de la sección previa (3.2.3).



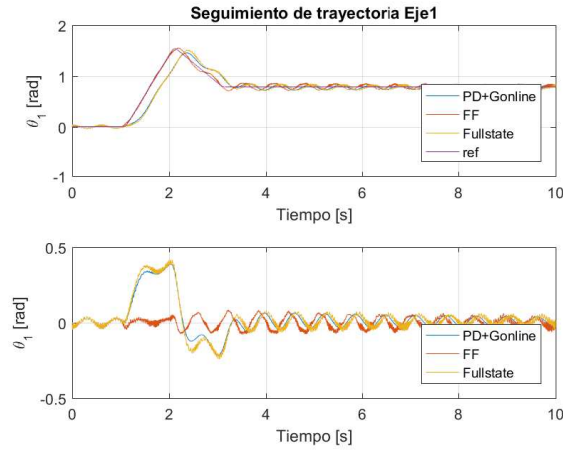


Figura 3.77: Comparación de la respuesta temporal del eje 1 del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias.

Se observa también que las ganancias propuestas no son suficientes para garantizar un buen seguimiento. Por lo tanto y considerando que de todas formas no se van a poder anular activamente las vibraciones de los eslabones, se recalculan las ganancias tomando como cota de diseño la frecuencia elástica dada por las juntas. En consecuencia se trabaja a frecuencias mayores a la frecuencia elástica de los eslabones, con el consecuente incremento en las vibraciones.

$$\omega_{e1} = 21,0721$$

$$\omega_{e2} = 74,7087$$

Haciendo  $\omega_n = \omega_e$

Fijando como cota de diseño  $\omega_n = \omega_e$ , las ganancias resultan,

$$K_p = \begin{bmatrix} 460 & 0 \\ 0 & 5597,4 \end{bmatrix}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} 43,3628 & 0 \\ 0 & 149,5458 \end{bmatrix}$$

### 3.3.2. Estrategia PD+ G

Se evalúa el desempeño del control PD con compensación de gravedad modificado para atender los efectos de deflexión en juntas y eslabones. En

las fig. 3.78 y 3.79 se muestra la evolución temporal para el seguimiento de trayectorias, destacándose la mejora en cuanto al seguimiento aunque se nota aún la persistencia del retraso y las marcadas oscilaciones no amortiguadas producto de la flexibilidad de los eslabones. El valor medio final corresponde a la posición deseada del eje.

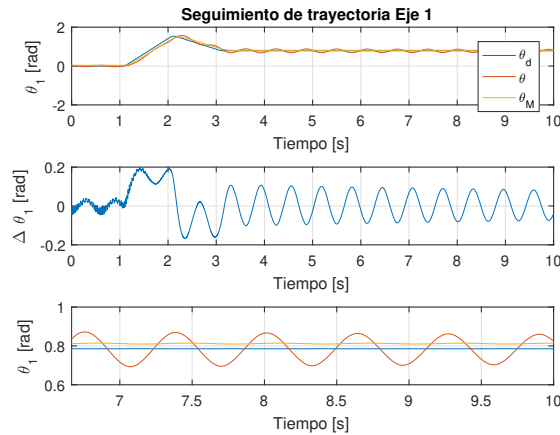


Figura 3.78: Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+G

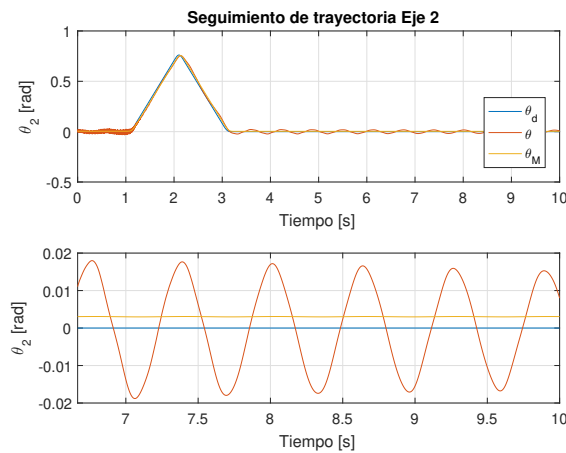


Figura 3.79: Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+G

Una observación interesante que surge de la fig. 3.80 es que la fuerza de control tiene un carácter oscilatorio producto de estar trabajando con ganancias demasiado altas para la elasticidad del eslabón. Los motores deben

sumar y restar torque en forma casi estática a una frecuencia de algunos Hertz. Es así que este ajuste resulta impracticable, demostrando que en el diseño de un robot con eslabones ligeros se debe buscar maximizar la rigidez aumentando así las frecuencias elásticas, para evitar luego tener que empobrecer demasiado el rendimiento.

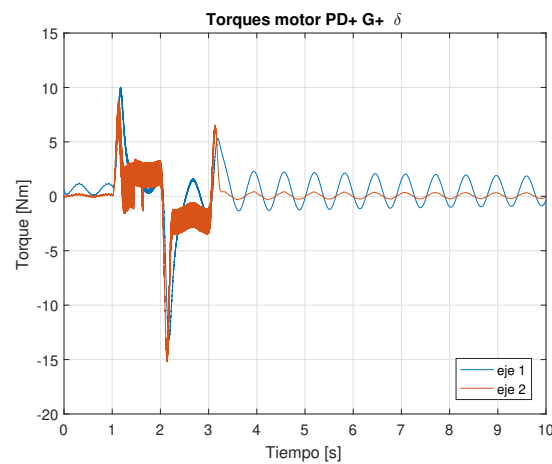


Figura 3.80: Variación en el tiempo de los torques de un sistema completamente flexible con una estrategia PD+G

### 3.3.3. Estrategia PD+FF

La estrategia que contempla el uso del modelo inverso nos muestra en la evolución temporal de las variables de posición (figs. 3.81 y 3.82) que el error de seguimiento mejora, eliminándose principalmente el retraso. Las oscilaciones producto de la interacción del control con los modos elásticos del eslabón están presentes.

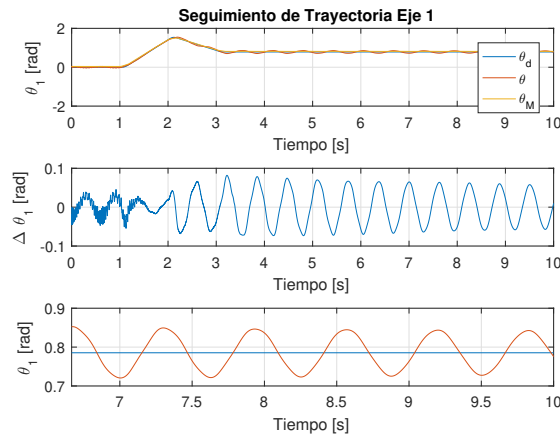


Figura 3.81: Seguimiento de trayectoria del primer eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+FF

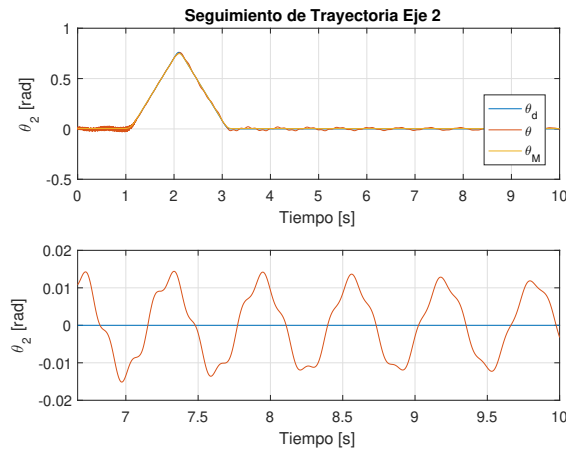


Figura 3.82: Seguimiento de trayectoria del segundo eje de un sistema de péndulo doble completamente flexible para una estrategia PD+FF

En la fig. 3.83 se observa un marcado incremento en los torques máximos, así como un efecto oscilatorio que se traduce en las vibraciones del eje vista en las fig. 3.81.

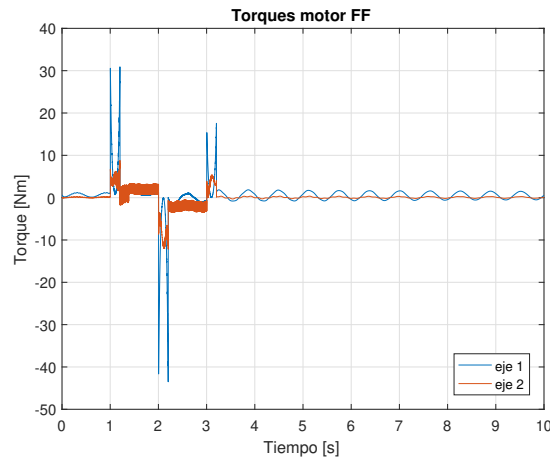


Figura 3.83: Variación temporal los torques de un sistema completamente flexible con una estrategia PD+FF

### 3.3.4. Comparación de todas las estrategias

Para comparar el desempeño de las estrategias presentadas, se muestra las curvas de seguimiento a trayectorias (figs. 3.84, 3.85) y los torques involucrados (fig. 3.86).

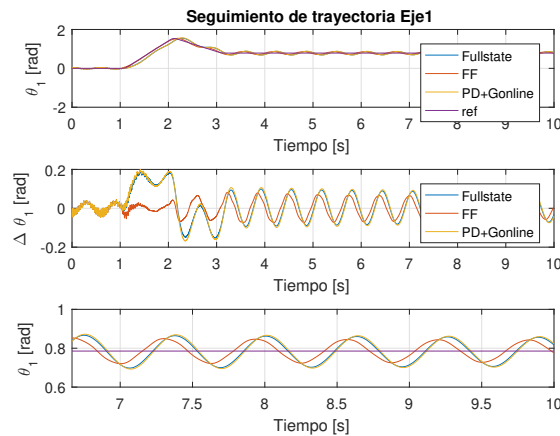


Figura 3.84: Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 1 del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias.

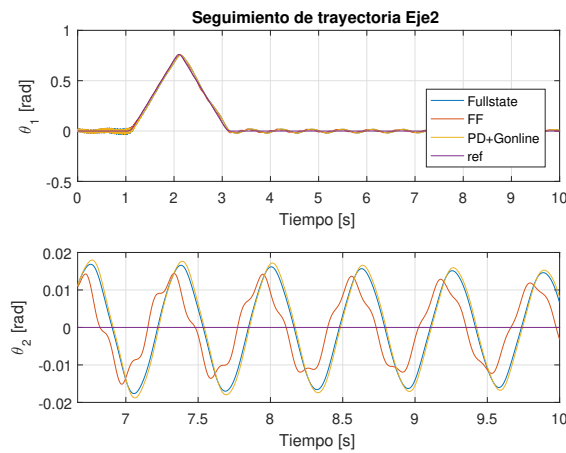


Figura 3.85: Comparación de la respuesta en el tiempo del eje 2 del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias.

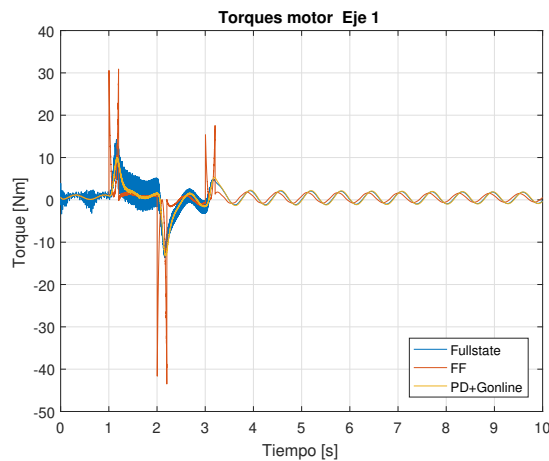


Figura 3.86: Comparación de los torques del primer motor del péndulo doble completamente flexible para diferentes estrategias.

Se observa que las estrategias más sencillas dan resultados pobres en seguimiento de trayectoria, ejemplo de ello son el retraso con el que actúan o las desviaciones que padecen, ambos apreciables en las figs. 3.84 y 3.85. Por otro lado, la estrategia FF sigue dando los mejores resultados en cuando al seguimiento.

Otra importante conclusión es la imposibilidad de disipar las vibraciones. Esto se debe al hecho de contar con dos frecuencias elásticas diferentes. Al considerar la frecuencia elástica más alta para calcular las ganancias acarrea

una clara mejora en el seguimiento pero la amplitud de las vibraciones aumenta considerablemente, obteniendo una mala respuesta en la disipación de vibraciones. Por el contrario trabajar con la frecuencia elástica más baja acarrea errores de seguimiento que alejan a este modelo de su objetivo principal de reproducir los movimientos deseados.

Para lidiar con estas dificultades, los fabricantes más destacados de cobots buscan una solución de compromiso entre el peso- rigidez y la performance. Enfocan su diseño principalmente a cumplir las normas de seguridad para trabajo conjunto, por lo que al incorporar variados sensores externos de seguridad pueden incrementar la robustez del mecanismo y a la vez su rendimiento.

# Capítulo 4

## Conclusiones

Un péndulo doble con articulaciones flexibles, otro con eslabones flexibles y uno último, combinando las dos flexibilidades, han sido modelizados y simulados bajo diferentes estrategias de control en este trabajo. Con esto se ha tratado de analizar el comportamiento de estos sistemas bajo diferentes excitaciones y el desarrollo y disipación de los efectos no deseados como las vibraciones, para así poder comprender las estrategias empleadas por diferentes fabricantes para controlar sus cobots.

Para ello se ha modelado la elasticidad en la articulación mediante un resorte torsional. En la obtención de las ecuaciones dinámicas se ha despreciado el acoplamiento inercial entre diferentes actuadores, siendo ésta una buena aproximación para un cobot debido a las reducciones que emplean en sus actuadores.

Para la modelización de los eslabones flexibles y obtención de sus ecuaciones dinámicas se ha empleado el método de modos asumidos y la deformación ha seguido la teoría de la viga de Euler Bernoulli, empotrada-masas. Debido a la geometría -sección transversal constante y pequeña comparando con la longitudinal- que presentan los eslabones, el método empleado es aplicable en la modelización de un eslabón de un cobot de UR. Lo mismo ocurre al realizar las integrales sobre el eje neutro y no sobre el volumen en la obtención de los parámetros dinámicos, siendo buena la aproximación.

En cuanto al control, diferentes estrategias han sido implementadas para cada modelo. Para el caso de las articulaciones flexibles, todas las estrategias han resuelto satisfactoriamente el problema de seguimiento y disipación de vibraciones, siendo la estrategia FF la que mejores resultados ha ofrecido. Para el caso del sistema de eslabones flexibles, en cambio, aunque se haya logrado contrarrestar el efecto de las deflexiones y obtener un buen seguimiento a una trayectoria deseada, no se ha podido realizar lo propio en la disipación de vibraciones, concluyendo que es necesario atenuarlos de manera pasiva



o mediante otras estrategias más avanzadas. No obstante, en todos ellos ha quedado claro que existe una relación cerrada entre la velocidad de respuesta y la aparición de las vibraciones, necesitando llegar a un compromiso entre ambos a la hora de diseñar las ganancias.

Para la obtención de un modelo completamente idéntico al de UR deben considerarse las deflexiones transversales en el espacio, siendo este un tema para futuros trabajos. Por otro lado, también debería trabajarse la inclusión de más eslabones siendo uno de ellos transversal ofreciendo la posibilidad de poder estudiar los efectos de la deflexión en el seguimiento de una trayectoria en el espacio.

En cuanto al control concierne, otras estrategias más avanzadas deben ser analizadas en aras de mejorar la performance de seguimiento y la velocidad consiguiendo disipar mejor las vibraciones. Para el caso de eslabones flexibles además debe analizarse el control cartesiano ya que con la estrategia considerada, aunque llegue a obtenerse la posición deseada de  $\theta$  la deflexión de la barra hace que la posición del extremo útil no coincida con la posición de trabajo.

# Bibliografía

- [1] *Robots and the Workplace of the Future*, IFR, International Federation of Robotics Frankfurt, Germany March 2018.
- [2] M.W. SPONG, S. HUTCHINSON, M. VIDYASAGAR, *TRobot Modeling and Control*, November 2005.
- [3] S. JÖRG , J. LANGWALD , J. STELTER , G. HIRZINGER , C. NATALE *Flexible Robot-Assemblyusing a Multi-Sensory Approach*, Proc IEEE intConfRoboticsAutomat, 3687-3694 (2000).
- [4] *Executive Summary World Robotics 2016 Industrial Robots*, IFR, International Federation of Robotics.
- [5] *Demystifying Collaborative Industrial Robots*, IFR, International Federation of Robotics, December 2018.
- [6] A. PICHLER, S.C. AKKALADEVI, M. IKEDA, M. HOFMANN, M. PLASCH, C. WÖGERER, G. FRITZ *Towards shared autonomy for robotic tasks in manufacturing*, 27th International Conference on Flexible Automation and Intelligent Manufacturing, FAIM2017, 27-30 June 2017, Modena, Italy.
- [7] *Drag&Bot: Roboter-programme schnell und intuitivstellen*, Fraunhofer-Institutfür Produktions technik und Automatisierung, IPA, June 2016.
- [8] F. TOBE, *Why Co-Bots Will Be a Huge Innovation and Growth Driver for Robotics Industry*, IEEE Spectrum, February 2019.
- [9] C.N. RIVIERE, T.W. YANG, P.K. KHOSLA, *Towards active tremor cancelingin tranded microsurgical instruments*, IEEE Transactions on robotics and automation, Vol. 19 (5) (2003) 793-800.
- [10] R. KUMAR, P. BERKELMAN, P. GUPTA, A. BARNES, P.S. JENSEN, L.L WHITCOMB, R.H. TAYLOR, *Preliminary experiments in cooperative*

- human/robot force control for assisted microsurgical manipulations*, IEEE Transactions on robotics and automation, (2000).
- [11] M. UCHIYAMA, A. KONNO, T. UCHIYAMA, S. KANDA, *Development of a flexible dual arm manipulator tested for space robotics*, IEEE International workshop on intelligent robot and systems, (1990) 375381.
- [12] O.A. BAUCHAU, J.I. CRAIG, *Structural Analysis: With Applications to Aerospace Structures*, Structural Analysis. Solid Mechanics and Its Applications, vol 163. Springer, Dordrecht,2009
- [13] S.S. TIMOSHENKO, *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*, Courier Dover Publications, 1983.
- [14] A.A. ATA, WALEED F. FARES, MOHAMED Y. SA'ADEH, *Dynamic analysis of a two-link flexible manipulator subject to different sets of conditions*, Elsevier, Procedia Engineering 41 ( 2012 ) 1253 1260.
- [15] B. KANG, J.K. MILLS, *Vibration control of a planar parallel manipulator using piezoelectric actuators*, Journal of intelligent and Robotic Systems, 42(1) (2005) 5271.
- [16] F. KHORRAMI, *Adaptative nonlinear control for end-effector position tracking of multi-link flexible manipulators with embedded active materials*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control I (1994) 103108.
- [17] *Why Cobots?*, Universal Robots. 2019.
- [18] W.J. BOOK, *Controlled Motion in an Elastic World*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 252-261 (1993).
- [19] A. DE LUCA, W.J. BOOK, *Robots with Flexible Elements*, Springer Handbook of Robotics 2008.
- [20] T. YOSHIKAWA, *Foundations of Robotics: Analysis and Control*,1990 MIT Press.
- [21] M.W. SPONG, *Modeling and control of elastic joint robots*,ASME Joint Dynamic System measurement control, 1987
- [22] CARLOS CANUDAS DE WIT, BRUNO SICILIANO, GEORGES BASTIN, *Theory of Robot Control*, Springer 1999.

- [23] P. BENGOA, A. ZUBIZARRETA, A. MANCISIDOR, I. CABANES, E. PORTILLO, *Modos asumidos y elementos finitos: Comparativa de modelos para robots flexibles*, Actas de las XXXV Jornadas de Automática, 3-5 de septiembre de 2014, Valencia.
- [24] L. MEIROVITCH, *Analytical methods in vibrations*, 1967.
- [25] V. FELIU, K.S. RATTAN, H.B. BROWN, *Modeling and Control of Single-Link Flexible Arms With Lumped Masses*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 114(1):59, 1992.
- [26] W. KHALIL, M. GAUTIER, *Modeling of mechanical systems with lumped elasticity*, Proceedings 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No.00CH37065), volume 4, pages 3964-3969. IEEE, 2000.
- [27] J.S. KIM, M. UCHIYAMA, *Mechanism of Constrained Spatial Flexible Manipulators*, JSME International Journal Series C, 46(1):123-128, 2003.
- [28] J.Z. SASIADEK, A. GREEN, *Dynamics and Trajectory Tracking Control of a Two-Link Robot Manipulator*, Journal of vibration and control (May 2003).
- [29] A. DE LUCA, B. SICILIANO, *Closed-Form Dynamic Model of Planar Multilink Lightweight Robots*, IEEE Transactions on systems and cybernetics, VOL. 21, NO. 4, July/August 1991.
- [30] C.M. OAKLEY, R.H. CANNON, *End-point control of a two link manipulator with a very flexible forearm: issues and experiments*, Proc. 1989 Amer. Contr. Conf., Pittsburgh, PA, June 1989, pp. 1381-1388
- [31] W.J. BOOK, *Modeling, design, and control of flexible manipulator arms: a tutorial review*, In 29th IEEE Conference on Decision and Control, pages 500-506 vol.2. IEEE, 1990.
- [32] W.J. BOOK, S. CETINKUNT, *Symbolic Modeling and Dynamic Simulation of Robotic Manipulators with Compliant Links and Joints*, International Journal of Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, May 1988.
- [33] S. NICOSIA, F. NICOLÒ, D. LENTINI, *Dynamical control of industrial robots with elastic and dissipative joints*, 8th IFAC World Congress, Kyoto 1981.

- [34] P. TOMEI, *A simple PD controller for robots with elastic Joints* , IEEE Trans. Robotic Automation Control, 1991
- [35] A. DE LUCA, B. SICILIANO, L. ZOLLO, *PD control with online gravity compensation for robots with elastic joints: Theory and experiments* , Automatica 41:1809-1819,2005.
- [36] A. ALBU-SCHÄFFER, G. HIRZINGER, *A globally stable state feedback controller for flexible joint robots* , ADV. Robot, 799-814, 2001
- [37] L.E. PFEFFER, O. KHATIB, J. HAKE, *Joint torque sensory feedback in the control of a PUMA manipulator*, IEEE trans. Robot. AUtom. 5(4) 418-425, 1989.
- [38] A. DE LUCA, B. SICILIANO, *Relevance of dynamic models in analysis and synthesis of control laws for flexible manipulators*, In Robotics and Flexible Manufacturing Systems, Elsevier, 1992
- [39] A. DE LUCA, B. SICILIANO, *Regulation of Flexible Arms Under Gravity*, IEEE Transactions on robotics and automation, VOL. 9, NO. 4, August 1993
- [40] A. LABUSCHAGNE, N.F.J. VAN RENSBURG , A.J. VAN DER MERWE, *Comparison of linear beam theories*, Elsevier Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 2030.