Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Conexión y Conjunto de Cantor

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Marta Aldasoro Rosales

Trabajo dirigido por
Marta Macho Stadler

Leioa, 22 de junio de 2019

Índice general

Introducción

El conjunto de Cantor, que fue introducido por Georg Cantor (1845) en el año 1883. Es un subconjunto fractal del intervalo real $[0, 1]$ que se estudia en muchas ramas de las matemáticas, gracias a sus múltiples y sorprendentes propiedades. Por ejemplo, en la teoría de la medida, es un excepcional ejemplo para demostrar que hay conjuntos infinitos de medida nula. Es, también, uno de los primeros ejemplos de conjunto fractal.

El objetivo principal de este trabajo es dar el siguiente corolario de clasificación (Teorema central):

El Conjunto de Cantor es el único espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo salvo homeomorfismos.

Con esto queda probado que el conjunto ternario de Cantor es un modelo sencillo de espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo de construir.

El trabajo se ha organizado en dos capítulos. El primero, se ha divido en cinco partes. En la primera y segunda parte, se han desarrollado conceptos y resultados de espacios conexos y conexos por caminos, respectivamente. En la tercera parte se han definido los conceptos de conexión local y conexión local por caminos; para, en la cuarta parte relacionar los conceptos de conexión y conexión local. Este capítulo viene motivado por el hecho de que el conjunto de Cantor es un espacio totalmente disconexo, y siendo está una propiedad destacada que lo caracteriza, ha sido conveniente hacer un primer capítulo de conexión. La quinta parte, se ha reservado para las quasicomponentes, que relacionaremos con las componentes conexas. Damos un teorema necesario para probar el teorema clave del segundo capítulo.

El segundo capítulo, lo hemos dividido en cuatro partes. La primera parte se ha basado en construir el conjunto de Cantor y obtener propiedades conjuntistas sobre él. En la segunda parte, en cambio, se han demostrado propiedades topológicas del mismo. En la tercera parte, se introduce el concepto de 0-dimensionalidad, y el de las sucesiones límite inversas. Finalmente, utilizando las herramientas anteriores, se obtiene el Teorema central citado anteriormente.

En el apéndice, que hemos dividido en dos partes, damos algunas propiedades generales usadas en los 2 primeros capítulos.

Capítulo 1

Conexión

Durante los cursos de Topología y Ampliación de Topología del Grado de Matemáticas, vemos los conceptos de conexión y conexión por caminos. Por lo tanto, a lo largo de este capítulo escribiremos las definiciones y enunciados vistos en estas asignaturas sin demostrarlos y probaremos aquellos que resultan nuevos.
El objetivo de este capítulo es relacionar las cuatro nociones de conexión (la conexión, la conexión por caminos, la conexión local y la conexión local por caminos) e introducir el concepto de quasicomponentes que necesitaremos en el Capítulo 2.

1.1. Espacios conexos

Definición 1.1.1. Una *separación* de un espacio topológico (X, τ) está definida por un par de abiertos U y V, disjuntos, cuya unión es X. Si uno de los dos abiertos es vacío, se dice que la separación es *trivial.*

Definición 1.1.2. Un espacio topológico (X, τ) es *conexo*, si la única separación que existe es la trivial, y se dirá *disconexo* en caso contrario. Y A $\subset$ X es *conexo*, cuando lo es como subespacio con la topología relativa.

Proposición 1.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces, son equivalentes:*

(i) *X es disconexo.*

(ii) *Existe A subconjunto propio de X que es abierto y cerrado a la vez.*

(iii) *Existe una función continua y sobreyectiva $f : (X, \tau) \longrightarrow (\{0, 1\}, \tau_{dis})$.*

Observación 1.1.1. La conexión es un propiedad absoluta, tal que si B $\subset$ A $\subset X$, entonces B es conexo en (X, τ) si y solo si lo es en (A, τ_A)

Ejemplos 1.1.1. Damos algunos ejemplos de espacios conexos.

(i) En cualquier espacio topológico, el vacío y los puntos son conexos.

(ii) Cualquier espacio sin abiertos o cerrados disjuntos es conexo.
Si $A \subset X$, las topologías A-inclusión y A-exclusión son, respectivamente, $\tau_A = \{U \subset X : A \subset U\} \cup \{\emptyset\}$ y $\tau^A = \{U \subset X : A \cap U = \emptyset\} \cup \{X\}$
Por tanto, X con la topología A-inclusión y con la topología A-exclusión es conexo ya que la primera no tiene abiertos disjuntos y la segunda no tiene cerrados disjuntos.
Cualquier subconjunto de un espacio indiscreto es, por tanto, conexo, ya que no tiene abiertos (ni cerrados) disjuntos.

(iii) Cualquier espacio discreto X con más de un punto es disconexo, ya que si x, y son puntos distintos de X, entonces $\{x\}$ es abierto, cerrado y es propio (ya que contiene a x, pero no a y). Por tanto, por la Proposición 1.1.1 es disconexo.

(iv) En X con la topología A-inclusión, todo subconjunto de X es conexo, ya que la topología inducida sigue sin tener abiertos disjuntos.

(v) En X con la topología A-exclusión, dado B subconjunto de X, tal que $A \cap B = \emptyset$, B es conexo, si y solo si se reduce a un punto o es el vacío.

Si $A \cap B \neq \emptyset$, el único abierto que lo contiene es X, por lo que no existe una separación no trivial, y por tanto, es conexo.

(vi) Un conjunto infinito X con la topología cofinita es conexo.

Un subconjunto A de X es conexo si y solo si se reduce a un punto, es el vacío o es infinito.

(vii) En $\mathbb{R}$ con la topología usual los conexos son los intervalos.

Proposición 1.1.2. *La imagen continua de un espacio conexo es conexa.*

Corolario 1.1.3. *La conexión es una propiedad topológica, es decir, se preserva por homeomorfismos.*

Teorema 1.1.4. *El producto de espacios conexos es conexo si y solo si lo es cada espacio factor.*

Definición 1.1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y sean A y B dos subconjuntos de X. Se dice que A y B están *mutuamente separados* si $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

Teorema 1.1.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea C un subconjunto de X. Entonces, C es conexo si y solo si no existen subconjuntos A y B mutuamente separados en X y no vacíos, cuya unión es C.*

Demostración. Primero, suponemos que C es un subconjunto disconexo, cuya separación está dada por los abiertos no vacíos U y V, cuya unión es C. Para ver que son conjuntos mutuamente separados en X solo quedaría probar que $(U \cap \overline{V}) \cup (\overline{U} \cap V) = \emptyset$.

Por un lado, tenemos que $U \cup V = C$, por lo que C - $(U \cup V) = (C$ - $U)$ $\cap$ $(C$ - $V) = \emptyset$, de manera que $C - U \subset V$. Por otro lado, tenemos que $U \cap V = \emptyset$, por lo que $V \subset C - U$.

Por tanto, $V = C - U$. Análogamente, tenemos que $U = C - V$, por lo que U y V son no vacíos, abiertos y cerrados.

De esta manera, por ser U y V cerrados,

$U \cap \overline{V} = U \cap V = \emptyset$, y $\overline{U} \cap V = U \cap V = \emptyset$.

Ahora, en segundo lugar, suponemos que A y B están mutuamente separados en X, y su unión es C. Por tanto, tenemos

$A \cup B = C$ y $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$

Entonces, denotando por $\overline{A}^C$ la clausura de A en el subespacio C,

$\overline{A}^C = \overline{A} \cap C = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup \emptyset = A.$

Por tanto, A es cerrado en C, y análogamente, también lo es B. Por tanto, tenemos que $C - A$, $C - B$ abiertos en C, tal que

$C - A \cup C - B = C - (A \cap B) = C - (A \cap \overline{B}) = C$
$C - A \cap C - B = C - (A \cup B) = C - C = \emptyset.$ □

Corolario 1.1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si A y B están mutuamente separados y C es un conjunto conexo tal que $C \subset A \cup B$, entonces C $\subset$ A o $C \subset B$.*

Demostración. Es evidente, ya que si A y B están mutuamente separados, $A \cap C$ y $B \cap C$ estarán mutuamente separados. □

Esto nos va a permitir buscar una manera para demostrar si un espacio es conexo.

Desarrollaremos la demostración de los dos siguientes teoremas, ya visto en el curso de Topología, esta vez utilizando el resultado obtenido en el Teorema 1.1.5.

Teorema 1.1.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

(i) *Dada una familia $\{C_i : i \in I\}$ de conjuntos conexos tales que $\cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, entonces $X = \cup_{i \in I} C_i$ es un conjunto conexo.*

(ii) *Si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe un conjunto conexo C_{xy} que lo contiene, entonces X es conexo.*

(iii) *Dada una familia $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos conexos tales que $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in N$, entonces $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es un conjunto conexo.*

Demostración. (i) Suponemos que X es disconexo, entonces por el Teorema 1.1.5, $X = A \cup B$, donde A y B están mutuamente separados en X. Entonces, como dado $i_0 \in I$, C_{i_0} es un conjunto conexo contenido en $A \cup B$, por el Corolario 1.1.6, $C_{i_0} \subset A$ o $C_{i_0} \subset B$.

Por otro lado, como $\cap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$ y A y B son disjuntos, tenemos que $C_i \subset A$ para todo $i \in I$ o $C_i \subset B$ para todo $i \in I$. Y por tanto, o bien A es vacío o lo es B. Por lo que, no existen conjuntos no vacíos mutuamente separados en X, y por tanto, X es conexo.

(ii) Ses $x_0 \in X$, por tanto, $X = \cup_{x\in X} C_{x_0x}$; $\cap_{x\in X} C_{x_0x}$ no es vacío ya que x_0 está en todos ellos, por lo que podemos aplicar (i) para concluir que X es conexo.

(iii) Haremos la demostración por inducción sobre n.
Para n=1, es evidente; para n=2, tenemos por (i) que como $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ y ambos son conexos, su unión también lo es.
Por tanto, suponemos que $\cup_{i=1}^{n-1} C_i$ es un conjunto conexo, y como $(\cup_{i=1}^{n-1} C_i) \cap C_n = \cup_{i=1}^{n-1} (C_i \cap C_n) \neq \emptyset$, ya que $C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$, por hiótesis. Por tanto, como C_n también es conexo, podemos aplicar (i) y concluir que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es un conjunto conexo.

□

Teorema 1.1.8. *Sea C un conjunto conexo en un espacio topológico (X, τ), y sea D contenido en X tal que $C \subset D \subset \overline{C}$, entonces D es conexo.*

Demostración. Probaremos que $\overline{C}$ es conexo, ya que como $C \subset D \subset \overline{C}$, tenemos que $D = \overline{C}^D$, denotando por $\overline{C}^D$ la clausura de C en el subespacio D,
Suponemos entonces, que $\overline{C}$ no es conexo. Entonces, por el Teorema 1.1.5 existen A y B mutuamente separados cuya unión es $\overline{C}$, es decir, $\overline{C} = A \cup B$, y $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$. Por tanto, $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y queremos ver que y $((A \cap C) \cap (\overline{B \cap C})) \cup ((\overline{A \cap C}) \cap (B \cap C)) = \emptyset$
Por otro lado, tenemos, que como C es conexo, por el mismo teorema, o $A \cap C = \emptyset$ o $B \cap C = \emptyset$, por lo que evidentemente, se cumple la condición que buscábamos y que demuestra que entonces C no sería conexo, que es una contradicción. □

Corolario 1.1.9. *La clausura de cualquier conjunto conexo es un conjunto conexo.*

Ejemplos 1.1.2. (i) Utilizando el Teorema 1.1.7, $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ con la topología usual es un espacio conexo, ya que es la unión de todas las rectas que pasan por el origen, que son conexas por Ejemplos 1.1.1 el número 7 y todas se cortan en un punto.

(ii) Una bola abierta en $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es un espacio conexo, ya que es homeomorfo al espacio total y la conexión es una propiedad topológica. Además, por el Teorema 1.1.8, la bola cerrada también sería conexa, y cualquier subconjunto comprendida entre ambas.

1.2. Conexión por caminos

Definición 1.2.1. Sea (X,τ) un espacio topológico. Un *camino en* X es una aplicación continua σ: $([0,1]\,,\tau_u) \longrightarrow (X,\tau)$. Si $\sigma(0)=x$, y $\sigma(1)=y$, se dice que σ es un *camino de* x *a* y.

Definición 1.2.2. Un espacio topológico (X,τ) se dice que es *conexo por caminos* si para todo par de puntos de X existe un camino que los une. Un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ) se dice que es *conexo por caminos* si lo es como espacio con la topología relativa, $\tau|_A$.

Ejemplos 1.2.1. Daremos ejemplos de espacios conexos por caminos.

(i) Los espacios indiscretos son conexos por caminos, ya que, si x,$y \in X$, entonces $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ definida por

$$\sigma(t) = \begin{cases} x & \text{si } t<1 \\ y & \text{si } t=1 \end{cases}$$

es un camino en X que une x con y, ya que cualquier aplicación sobre el espacio indiscreto es continua.

(ii) Todo subconjunto convexo de $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es conexo por caminos.

(iii) En $(\mathbb{R},\tau_u)$ los subconjuntos conexos y conexos por caminos coinciden, y son los intervalos.

(iv) En $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$, sea A $\subset \mathbb{R}^n$, si A contable y n $>$ 1, entonces $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ es conexo por caminos.

(v) Sea (X,τ) un espacio topológico y A $\subset$ B $\subset X$, entonces A es conexo por caminos como subespacio de B si y solo si lo es como subespacio de X ya que $(\tau|_B)|_A = \tau|_A$.

Proposición 1.2.1. *La imagen continua de un espacio conexo por caminos es conexo por caminos.*

Corolario 1.2.2. *La conexión por caminos es una propiedad topológica.*

Teorema 1.2.3. *El producto de espacios conexos por caminos es conexo por caminos si y solo si lo es cada espacio factor.*

Observación 1.2.1. La conexión y la conexión por caminos no son hereditarias, es decir, un subconjunto de un espacio conexo (conexo por caminos, respectivamente) no tiene porque ser conexo (conexo por caminos, respectivamente). Por ejemplo, $(\mathbb{Q}, \tau_u)$ no es conexo por caminos. Aunque hay algunos resultados parciales como los del Teorema 1.1.7 o el Teorema 1.1.8.

1.3. Conexión local y conexión local por caminos

Todas las pruebas de las propiedades enunciadas pueden verse en [1] .

Definición 1.3.1. Un espacio topológico (X, τ) es *localmente conexo* si todo punto admite una base de entornos conexos.

Definición 1.3.2. Un espacio topológico (X, τ) se dice que es *localmente conexo por caminos* si todo punto posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos.

Teorema 1.3.1. *El producto de espacios localmente conexos (localmente conexos por caminos, respectivamente) es localmente conexo (localmente conexo por caminos, respectivamente) si y solo si cada espacio factor lo es.*

Observación 1.3.1. La conexión local y la conexión local por caminos no son hereditarias.

Ejemplo 1.3.1. $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es un espacio localmente conexo y localmente conexo por caminos.
Ahora, si tomamos el subespacio $(\mathbb{Q}, \tau_u)$ tenemos que no es ni localmente conexo, ni localmente conexo por caminos.

Proposición 1.3.2. *La imagen continua y abierta de un espacio localmente conexo (localmente conexo por caminos, respectivamente) es locamente conexa (localmente conexa por caminos, respectivamente).*

Observación 1.3.2. En general, la conexión local y las conexión local por caminos no se preservan bajo aplicaciones continuas.

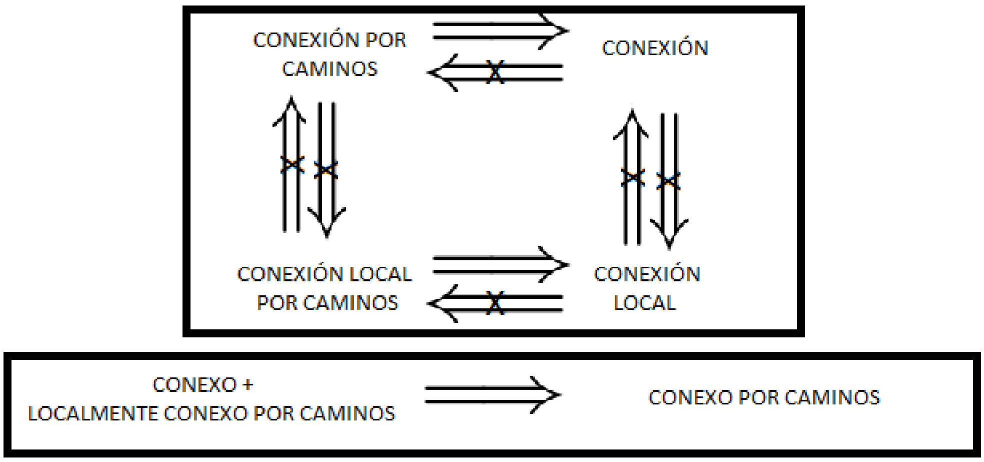
Ejemplo 1.3.2. Sean los espacios topológicos $(\mathbb{Q}, \tau_{dis})$, $(\mathbb{Q}, \tau_u)$, entonces la aplicación identidad:

$$id\colon (\mathbb{Q}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \tau_u)$$

es una aplicación continua, pero $(\mathbb{Q}, \tau_{dis})$ es localmente conexo y localmente conexo por caminos, mientras que $(\mathbb{Q}, \tau_u)$ no lo es.

1.4. Relaciones entre estos conceptos

Para comenzar, ilustraremos con una imagen las relaciones existentes entre estos conceptos, para posteriormente, demostrar estos resultados.



Proposición 1.4.1. *Si (X, τ) es un espacio topológico conexo por caminos, entonces es conexo.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) no fuera conexo. Por definición, existen dos abiertos disjuntos y no vacíos U y V cuya unión es X.
Sean $x \in U$, $y \in V$, como (X, τ) es conexo por caminos, existe un camino que los une, es decir, existe una aplicación σ: $([0,1], \tau_u) \longrightarrow (X, \tau)$ continua tal que $\sigma(0) = x$, y $\sigma(1) = y$.

Por ser f continua, $\sigma^{-1}(U)$, $\sigma^{-1}(V)$ son abiertos y $\sigma^{-1}(U \cup V) = \sigma^{-1}(X)$ $= [0, 1]$
Por ser $\sigma(0) = x$, y $\sigma(1) = y$ $\sigma^{-1}(U)$, $\sigma^{-1}(V)$ son no vacíos.

$\sigma^{-1}(U) \cap \sigma^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$, y
$\sigma^{-1}(U) \cup \sigma^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f(X) = [0, 1]$.

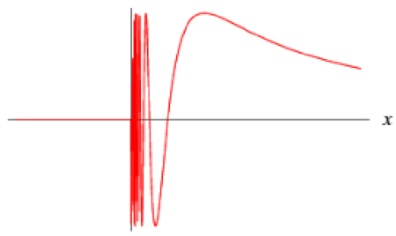
Por tanto, tenemos que $\sigma^{-1}(U)$, $\sigma^{-1}(V)$ son una separación no trivial de $[0, 1]$, que es absurdo, por Ejemplos 1.1.1, el número 7. □

Lema 1.4.2. *Sean A, B conjuntos conexos en el espacio topológico (X,τ). Entonces, si $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ o $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, tenemos que $A \cup B$ es conexo.*

Demostración. Suponemos que $A \cup B$ no es conexo. Entonces, por el Teorema 1.1.5 existen subconjuntos C y D, tal que $(C \cap \overline{D}) \cup (\overline{C} \cap D) = \emptyset$ y cuya unión es $A \cup B$. Como A es conexo y B, tenemos que necesariamente, $C = A$ y $D = B$ y $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$, pero por hipóteis tenemos $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ o $B \cap \overline{A} \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. □

Ejemplo 1.4.1. Veamos mediante el siguiente ejemplo que el recíproco no es cierto. Sea la *curva seno topológico*, es decir, el subespacio de $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$:

$$A = ((-\infty, 0] \times \{0\} \cup \left\{ \left(x, sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) : x > 0 \right\}.$$



A es conexo, pero no es conexo por caminos.

Demostración. (i) A es conexo; sean

$$B = (-\infty, 0] \times \{0\}, \ \ C = \left\{ \left(x, sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) : x > 0 \right\}.$$

B y C son conexos porque ambos son homeomorfos a intervalos. Tenemos que $\overline{C} = C \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, y por lo tanto, que $(B \cap \overline{C}) \neq \emptyset$, ya que el punto $(0, 0)$ está. Entonces, por el Lema 1.4.2, $B \cup C = A$ es conexo

(ii) A no es conexo por caminos.

Vamos a suponer que A es conexo por caminos, por tanto, para todo par de puntos, existe un camino que los une.
Suponemos, en particular, que existe σ: $([0, 1],\tau_u) \longrightarrow (A,\tau_u)$ camino del $(0, 0)$ al $(1, sen1)$.

Como σ es una función continua y $[0, 1]$ es un conjunto compacto, tenemos que $\sigma([0, 1])$ es un conjunto compacto en A, que es equivalente a decir que es un conjunto compacto en $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$ y que $\sigma([0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$.

Pero $\overline{\sigma([0, 1])} = \sigma([0, 1]) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, es decir, $\sigma([0, 1])$ no es cerrado en $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$. Pero por ser $\mathbb{R}^2$ de Hausdorff, todo compacto es cerrado, por lo que llegamos a una contradicción.

□

Proposición 1.4.3. *Si (X, τ) es un espacio topológico localmente conexo por caminos, entonces es localmente conexo.*

Demostración. Por ser (X, τ) un espacio topológico localmente conexo por caminos, todo punto posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos, por tanto, utilizando la Proposición 1.4.1, tenemos que todo punto posee una base local formada por conjuntos conexos, y por tanto, (X, τ) es un espacio topológico localmente conexo. □

Ejemplo 1.4.2. Veamos mediante el siguiente ejemplo que el recíproco no es cierto.
Tomemos ($\mathbb{R}$,τ_{coc}), donde $\tau_{coc} = \{U \subset \mathbb{R}$: $\mathbb{R} - U$ es contable$\} \cup \{\emptyset\}$.

Supongamos que ($\mathbb{R}$,τ_{coc}) es localmente conexo por caminos. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{B}_x$ una base local en x formada por conjuntos conexos por caminos. Sea $B \in \mathcal{B}_x$, sea $y \in B$, distinto de x y sea σ un camino en B entre x e y. Tenemos que σ: $([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (B\ , \tau_{coc}^{B})$ es un función continua, con $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.

Observamos que como todo entorno de un punto debe contener un abierto que contiene a ese punto, los entornos básicos B deberán ser de complementario contable (en particular, son incontables).

Como en $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ los cerrados son los conjuntos finitos (y el conjunto $\mathbb{R}$); los puntos son cerrados, y como σ es continua, $\sigma^{-1}(\{x\})$ es cerrado para todo $x \in B$, y

$$[0,1] = \sigma^{-1}(B) = \sigma^{-1}(\cup_{x \in B}\{x\}) = \cup_{x\in B}\{\sigma^{-1}(\{x\})\}.$$

Recordemos que la imagen inversa de dos puntos diferentes tiene que ser diferente. Por lo tanto, llegamos a una contradicción, ya que $\cup_{x\in B}\{\sigma^{-1}(x)\}$ tiene que ser un conjunto que tiene el mismo número de elementos que B, y B es un conjunto de complementario contable en $\mathbb{R}$, mientras el intervalo $[0,1]$ no.

Ahora, en cambio vamos a ver que si es localmente conexo.
Recordemos que los subconjuntos conexos en este espacio topológico son los puntos, el conjunto vacío y los conjuntos no contables. Por tanto, si B es un entorno de un punto, por el argumento dado anteriormente, B es no contable y por tanto conexo.

Veamos ahora mediante algunos ejemplos que la conexión y la conexión por caminos no están relacionadas con la conexión local y la conexión local por caminos, respectivamente.

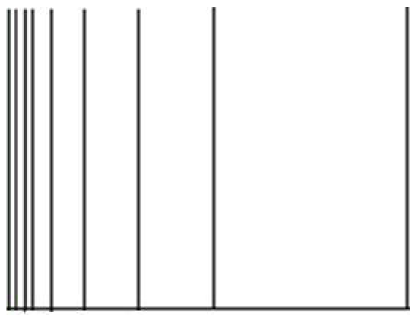
Ejemplos 1.4.1. (i) El espacio (A:$= (0,1) \cup (1,2)$,τ_u) es localmente conexo pero no es conexo.

Demostración. Sea $x \in A$, entonces definimos $\mathcal{B}_x = \{(x-\epsilon, x+\epsilon)$: $\epsilon > 0\}$. Vemos que es una base local de entornos conexos en A.

Por otro lado, vemos, fácilmente que no es un conjunto conexo ya que es la unión de dos intervalos disjuntos. □

(ii) El *Espacio Peine* es conexo, y pero no es localmente conexo.
Sea el *Espacio Peine*, es decir, el subespacio de ($\mathbb{R}^2$,τ_u):

$$A = ((\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$$



a) A es conexo:

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos

$C_n := \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] \cup ([0,1] \times \{0\})$ para $n \neq 0$
$C_0 := \{0\} \times [0,1] \cup ([0,1] \times \{0\})$

Observamos que cada C_n es un conjunto conexo.
Además, tenemos que $\cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C_n = A$, $\cap_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C_n = ([0,1] \times \{0\}) \neq \emptyset$.
Por tanto, por el Teorema 1.1.7 concluímos que el Espacio Peine es conexo. □

b) A no es localmente conexo:

Demostración. Vamos a ver que no existe un entorno conexo del punto $(0,1)$.
Sea B un entorno básico del punto $(0,1)$, como el límite de la sucesión $\{(\frac{1}{n},1)\}$ es el punto $(0,1)$, tenemos que B debe contener algún punto de la forma $(\frac{1}{n},1)$. Por lo que, conluímos que B no puede ser un conjunto conexo, y por tanto, A no es localmente conexo. □

Ejemplos 1.4.2. (i) El espacio $(\mathbb{R} - \{0\}, \tau_u)$ es localmente conexo por caminos pero no es conexo por caminos.

Demostración. Sea $x \in A$, entonces definimos $\mathcal{B}$x $= \{(x-\epsilon, x+\epsilon)\colon \epsilon > 0\}$. Vemos que es una base local de entornos conexos por caminos en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Por otro lado, vemos, fácilmente que no es un conjunto conexo por caminos ya que es la unión de dos intervalos disjuntos, por tanto, no es conexo, por lo que no puede ser conexo por caminos. □

(ii) Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ y sea $A = \{(x,x) : x \in [0,1]\}$. Se define una topología sobre X a partir de las siguientes bases de entornos:

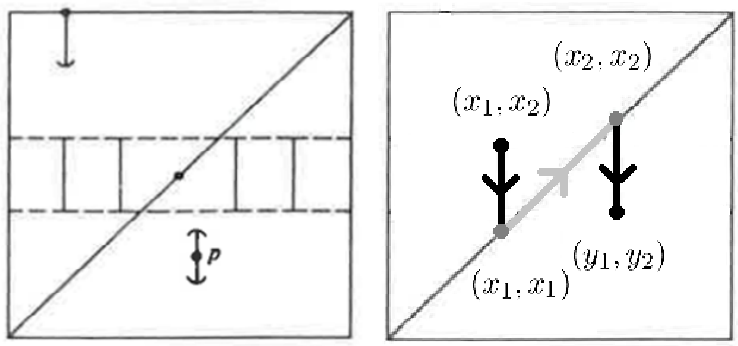
Si $(x,t) \notin A$, los entornos básicos son:

$$\mathcal{B}_\epsilon(x,t) = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \colon |y-t| < \epsilon\},$$

es decir, un segmento vertical que contiene al punto (x,t).
Si $(t,t) \in A$, los entornos básicos son:

$$\mathcal{B}_\epsilon(t,t) = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \colon |y-t| < \epsilon \text{ y } x \notin \{x_1,...,x_n\} \text{ para todo } x_i \neq t\},$$

donde $\{x_i\}_{i=1}^n$ es cualquier familia finita de puntos de [0,1], es decir, son franjas abiertas horizontales privadas de una familia finita de segmentos verticales.
La topología definida por esta base de entornos se llama *topología de Alexandroff*, y $(X,\,\tau)$ se llama *cuadrado de Alexandroff*.



Es fácil ver que este espacio es conexo por caminos. El camino entre dos puntos viene representado en la segunda ilustración.
Si B es un segmento vertical o $B = A$, es obvio que la topología de subespacio sobre ellos es la usual. Así, si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son dos puntos en X, basta con tomar el segmento vertical que va de (x_1,x_1), tomar el segmento sobre A que une (x_1,x_1) con (x_2,x_2) y unir, finalmente, (x_2,x_2) con (x_2,y_2) por un segmento vertical. El trayecto recorrido es un camino que une (x_1,y_1) con (x_2,y_2).

En cambio, no es localmente conexo por caminos. La razón es que cualquier entorno de un punto de la diagonal no es conexo, ya que dado $B \in \mathcal{B}_\epsilon(t,t)$, los segmentos verticales que se quitan hacen que este espacio sea disconexo, como se ve claramente en el dibujo. Por tanto, por la Proposición 1.4.1 B no es conexo por caminos.

Proposición 1.4.4. *Si un espacio topológico (X,τ) es conexo y localmente conexo por caminos, entonces (X,τ) es conexo por caminos.*

Demostración. Sea $a \in X$, y sea $A := \{x \in X$ tal que existe un camino en X que une a con $x\}$.

Vamos a ver que A es abierto cerrado y no vacío, y por tanto, como X es conexo, por la Proposición 1.1.1 A tiene que ser X.

(i) $a \in A$, por tanto A no es vacío.

(ii) A es abierto, si y solo si siendo $x \in A$, existe un entorno básico $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset A$.
Sea $x \in A$, entonces existe un camino σ en X que une a con x.
Por ser $x \in X$ y X localmente conexo por caminos, entonces x posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos.
Sea $B \in \mathcal{B}_x$ e $y \in B$. Como B es conexo por caminos, existe un camino τ en B y por tanto, en X que une x e y.
Por tanto, tenemos que $\tau \star \sigma$ es un camino que une a con y. Por tanto, $y \in A$, y por tanto, $B \subset A$.

(iii) A es cerrado si y solo si $X - A$ es abierto, si y solo si siendo $x \in X - A$, existe un entorno básico $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset X - A$.
Como $x \in X - A$, entonces no existe ningún camino en X que une a con x.
Por ser $x \in X$ y X localmente conexo por caminos, entonces x posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos.
Sea $B \in \mathcal{B}_x$ e $y \in B$. Como B es conexo por caminos, existe un camino τ en B y por tanto, en X que une y e x.
Por tanto, si existiera un camino σ en X uniendo a e y, $\tau \star \sigma$ sería un camino en X uniendo a y x. Por tanto, tenemos que $y \in X - A$, y por tanto, $B \subset X - A$.

□

Corolario 1.4.5. *Un subconjunto abierto y conexo de $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$ es conexo por caminos.*

Demostración. Si U es abierto y conexo en $(\mathbb{R}^n,\tau_u)$, contiene a una bola centrada en cada uno de sus puntos. Estas bolas forman una base de entornos conexos. □

1.5. Componentes conexas y Quasicomponentes

Definición 1.5.1. Sea (X,τ) un espacio topológico Se le llama *componente conexa del punto x* al mayor conjunto conexo $C(x)$ que contiene a x. En particular, es la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x

Lema 1.5.1. *Las componentes conexas de un espacio topológico (X, τ) constituyen una partición del espacio.*

Teorema 1.5.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico, las componentes conexas son cerradas.*

Demostración. Sea x un elemento de X y sea $C(x)$ la correspondiente componente conexa, entonces por el Teorema 1.1.8, sabemos que la clausura de $C(x)$ también es un conjunto conexo. Además, $C(x) \subset \overline{C(x)}$.
Pero por ser $C(x)$ el mayor conjunto conexo que contiene a x, $C(x) = \overline{C(x)}$, es decir las componentes conexas son conjuntos cerrados. □

Definición 1.5.2. Un espacio topológico (X, τ) es *totalmente disconexo* si sus únicas componentes conexos son el vacío y los puntos.

Ejemplo 1.5.1. (i) Sea $(\mathbb{Q},\tau_u)$. Vemos que en este conjunto las componentes conexas son los puntos y el vacío. Es decir, con este ejemplo vemos que las componentes conexas no tienen porqué ser abiertas. También deducimos que es un conjunto totalmente disconexo.

Definición 1.5.3. Sea (X, τ) un espacio topológico Se le llama *componente conexa por caminos del punto x* al mayor conjunto conexo por caminos $C'(x)$ que contiene a x. En particular, es la unión de todos los conjuntos conexos por caminos que contienen a x.

Corolario 1.5.3. *Si (X,τ) es un espacio topológico loalmente conexo por caminos, las componentes conexas por caminos coinciden con las componentes conexas.*

Definición 1.5.4. Sea (X,τ) un espacio topológico y sea x in X. Llamamos *quasicomponente de x* a la intersección de los conjuntos que contienen a x y son abiertos y cerrados a la vez:

$$Q(x) = \bigcap\{A \subset X \text{ tal que } x \in A \text{ y } A \in \tau \cap \mathcal{C} \ \}$$

Observación 1.5.1. Como $Q(x)$ es la intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Estudiemos, ahora que relación existe entre las componentes conexas y las quasicomponentes.

Proposición 1.5.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea x in X. Entonces, $C(x) \subset Q(x)$.*

Demostración. Si (X,τ) es conexo, $C(x) = X$, por la Proposición 1.1.1 el único abierto y cerrado que contiene a x es el total por lo que, también, $Q(x) = X$.

Si no fuera conexo, de nuevo, por la Proposición 1.1.1, podríamos decir que existe un subconjunto propio A que es abierto y cerrado a la vez, y que contiene a x (si ningún subconjunto propio abierto y cerrado a la vez contiene a x, tendríamos que $Q(x) = X$, por lo que la inclusión que buscamos quedaría probada).

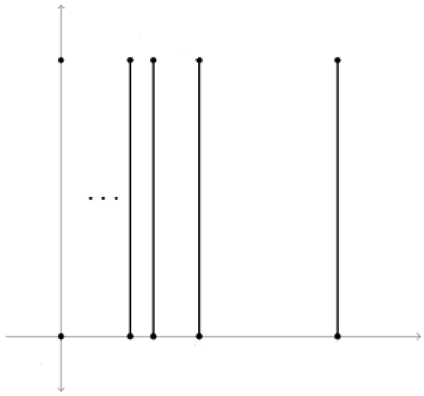
Por tanto, A, $X - A$ forman una separación no trivial de X. Como $C(x) \cap A \neq \emptyset$, por estar x en ambos, $C(x)$ es conexo y A es abierto y cerrado a la vez, utilizando, por tercera vez, la Proposición 1.1.1, ahora para el subespacio topológico $(C(x),\tau_{C(x)})$, llegamos a que $C(x) \subset A$. Y, finalmente, concluímos que:

$$C(x) \subset \bigcap\{A \subset X \text{ tal que } x \in A \text{ y } A \in \tau \cap \mathcal{C} \} = Q(x)$$

$\square$

Ejemplo 1.5.2. Veamos mediante el siguiente ejemplo que el recíproco no es cierto. Consideremos el siguiente espacio topológico, subespacio de $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n \cup \{(0,0),(0,1)\} \text{ donde } L_n = \{\tfrac{1}{n}\} \times [0,1].$$



Sea B un entorno abierto y cerrado del punto $(0,1)$. Como el límite de la sucesión $\{(\frac{1}{n},1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el punto $(0,1)$, tenemos que para todo n mayor que un cierto N, B contiene los puntos de la forma $(\frac{1}{n},1)$, es decir, $B \cap L_n \neq \emptyset$. Como B es abierto y cerrado, y L_n es conexo, utilizando la Proposición 1.1.1, $L_n \subset B$ para $n \geq N$.

Tomamos, ahora, la sucesión $\{(\frac{1}{n},0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo límite es el punto $(0,0)$, por lo que, todo entorno B' del $(0,0)$ contiene puntos de la forma $(\frac{1}{n},0)$ para n mayor que un cierto N'. Por ello, $B' \cap L_n \neq \emptyset$ para $n \geq N'$. Por tanto, sea $M = \max\{N,N'\}$, para $n \geq M$, $(0,0)$ es un punto clausura de $L_n \subset B$, y como B es cerrado, $(0,0) \in B$. Es decir, el punto $(0,0)$ está en todos los conjuntos abiertos y cerrados que contienen a $(0,1)$ y por tanto, está en la quasicomponente del punto $(0,1)$, es decir, en $Q((0,1))$.

Por otro lado, $C((0,1)) = \{(0,1)\}$. Por tanto, hemos demostrado que el punto $(0,0)$ está en $Q((0,1))$, pero no en $C((0,1))$.

Ahora recordaremos algunos resultados de normalidad, para poder ver, después, cuando coinciden las componentes conexas y las quasicomponentes.

Definición 1.5.5. Un espacio topológico (X,τ) se dice que normal si dados dos cerrados disjuntos A y B, existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Proposición 1.5.5. *Un espacio topológico (X,τ) es normal si y solo si dados A y B cerrados disjuntos, existen U y V abiertos, tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, y $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Lema 1.5.6. *Si un espacio topológico (X,τ) es de Hausdorff y compacto, entonces es normal.*

Proposición 1.5.7. *Sea (X,τ) un espacio topológico compacto, sea U abierto en X y sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados en X tal que $\cap_{i\in I}F_i \subset U$. Entonces, existe un subconjunto J de I finito, tal que $\cap_{j\in J}F_j \subset U$.*

Demostración. Por ser U abierto, tenemos que $X-U$ es cerrado, y por tanto por ser (X,τ) compacto, $X-U$ es compacto.
Como $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados, entonces $\{X-F_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos.
Por tanto como $\cap_{i\in I}F_i \subset U$, tenemos que $\{X-F_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento por abiertos de $X-U$, ya que

$X - U \subset X - \cap_{i\in I}F_i = \cup_{i\in I}(X - F_i)$.

Por ser $X-U$ compacto, existe un $J \subset I$ finito, tal que $X-U \subset \cup_{j\in J}(X-F_j)$, subrecubrimiento finito de $X-U$.

Por consiguiente,

$X - \cup_{j\in J}(X - F_j) \subset X - (X - U) = U$.
$X - \cup_{j\in J}(X - F_j) = \cap_{j\in J}(X - (X - F_j) = \cap_{j\in J}(F_j)$

Concluímos, entonces que $\cap_{j\in J}(F_j) \subset U$. □

Definición 1.5.6. Un espacio topológico (X,τ) se dice que T_4 si y solo si es de Frechet y es normal.

Lema 1.5.8. *Si un espacio topológico (X,τ) es de Hausdorff y compacto, entonces es T_4.*

Demostración. Por ser de Hausdorff es de Frechet, y por el Lema 1.5.6 es normal. □

Teorema 1.5.9. *Sea (X,τ) un espacio topológico de Hausdorff y compacto. Entonces, $C(x) = Q(x)$.*

Demostración. Lo que queremos probar es que $Q(x)$ es conexo, y así, por la Proposición 1.5.4, se daría la igualdad.

Suponemos que $Q(x)$ es disconexo. Entonces, por la Proposición 1.1.1, existe un subconjunto propio A de $Q(x)$ que es abierto y cerrado. Por lo tanto, $Q(x) - A$ es también abierto y cerrado en $Q(x)$. Y entonces, ambos son cerrados en disjuntos $Q(x)$, pero por ser $Q(x)$ cerrado en X (intersección de cerrados en X), tenemos que A y $Q(x)-A$ son también cerrados en disjuntos X. Ahora, utilizando la Proposición 1.5.5, existen U y V abiertos , tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, y $A \subset U$ y $Q(x) - A \subset V$, donde U y V abiertos disjuntos.

Por tanto,

$$Q(x) := \bigcap\{B \subset X \text{ tal que } x \in B \text{ y } B \in \tau \cap \mathcal{C} \text{ (en } X)\}.$$

Ahora, aplicando la Proposición 1.5.7, sabemos que existe un subconjunto finito de $\{B \subset X \text{ tal que } x \in B \text{ y } B \in \tau \cap \mathcal{C}\ \}$. Sea $\{B_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ tal que

$$Q(x) := \bigcap\{B \subset X \text{ tal que } x \in B \text{ y } B \in \tau \cap \mathcal{C} \text{ (en } X)\} \subset \cap_{i=1}^n B_i.$$

Por ser $\{B_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ una familia finita de abiertos y cerrados en (X, τ), $\cap_{i=1}^n B_i$ es abierto y cerrado en (X, τ) .

Tenemos entonces, que por ser U abierto en (X, τ), $\cap_{i=1}^n B_i \cap U$ es abierto en (X, τ). Además,

$\overline{\cap_{i=1}^n B_i \cap U} \subset \overline{\cap_{i=1}^n B_i} \cap \overline{U} = \cap_{i=1}^n B_i \cap \overline{U} \subset (\cap_{i=1}^n B_i \cap (U \cup V)) \cap \overline{U} = \cap_{i=1}^n B_i \cap ((U \cup V) \cap \overline{U}) = \cap_{i=1}^n B_i \cap U.$

Por tanto, $\cap_{i=1}^n B_i \cap U$ también es cerrado en (X, τ).

Entonces, como $Q(x)$ es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados en (X, τ) que contienen a x, y $x \in \cap_{i=1}^n B_i \cap A$, tenemos que $Q(x) \subset \cap_{i=1}^n B_i \cap A \subset A$. Por tanto $Q(x)$ - $A = \emptyset$ y por tanto $Q(x)$ es conexo. $\square$

Corolario 1.5.10. *Un espacio topológico* (X,τ) *compacto y de Hausdorff es totalmente disconexo si y solo si dados* x, $y \in X$, $x \neq y$, *existe un conjunto* U *abierto y cerrado tal que* $x \in U$ *e* $y \notin U$.

Demostración. Por el Teorema 1.5.9 tenemos que $C(x) = Q(x)$. Además, por ser (X,τ) totalmente disconexo, $\{x\} = C(x) = Q(x)$. Por tanto, existe un conjunto abierto y cerrado que contiene a x pero no a y.

Para la otra implicación, suponemos que existe un conjunto conexo A con al menos dos puntos x, y. Por hipótesis, existe un conjunto U abierto y cerrado tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Por tanto, $U \cap A$ es abierto y cerrado en la topología inducida a A, y es propio porque contiene a x pero no a y. Por tanto, A disconexo, que es una contradicción. $\square$

Capítulo 2

El Conjunto de Cantor

El conjunto ternario de Cantor, introducido por Georg Cantor en 1883, es un destacado subconjunto fractal del intervalo real $[0, 1]$. Se construye de manera recursiva, como se mostrará en el primer apartado. Se puede describir como el conjunto de todos los puntos del intervalo $[0, 1]$ que admiten una expresión en base 3 que no utiliza el dígito 1.

2.1. Construcción del conjunto de Cantor

Primero, tomamos el intervalo de la recta real $[0, 1]$ y lo dividimos en tres subintervalos de igual longitud de la siguiente manera:

$$\left[0, \tfrac{1}{3}\right], \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \left[\tfrac{2}{3}, 1\right]$$

Ahora, eliminamos el intervalo abierto de en medio y definimos

$$C_1 := \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right]$$

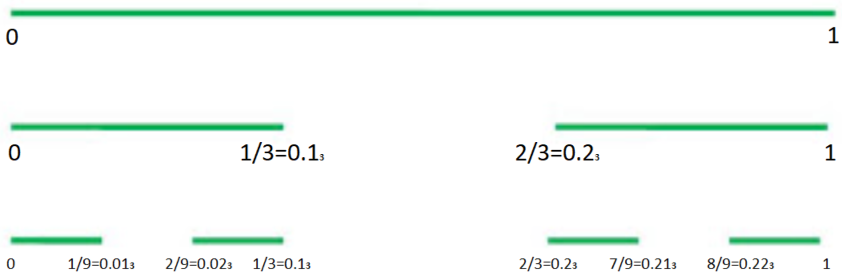
En segundo lugar, repetimos lo mismo con los intervalos de C_1, es decir, dividimos a ambos en tres subintervalos y quitamos el intervalo central. Así, obtendríamos

$$C_2 := \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right].$$

En general, C_{n+1} se construye dividiendo cada intervalo de C_n en tres subintervalos iguales (el primero y el último cerrados, y el segundo abierto) y eliminando el central. Continuando este proceso indefinídamente, llegamos a definir el **Conjunto ternario de Cantor**, que es la intersección de todos los conjuntos C_n.

$$\text{C} := \cap \{C_n : n \in \mathbb{N} \}$$

Ahora vamos a ver esta construcción pensando los números del intervalo $[0, 1]$ en base 3:



Veamos que va pasando en cada iteración:

- En el primer paso estamos eliminando los números reales que en base 3 tienen un 1 como coeficiente 3^{-1}, menos el 0.1_3. No obstante, podemos escribirlo de la siguiente manera: $0.1_3 = 0.02_3$, ya que $0.02_3 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.
- En el segundo paso estamos eliminando los números reales que en base 3 tienen un 1 como coeficiente 3^{-2}, menos el 0.01_3. Igual que antes, podemos escribirlo de la siguiente manera: $0.01_3 = 0.002_3$.

Observación 2.1.1. (i) $0 = 0_3$ (ii) $1 = 0.2_3$

Demostración. $0.2_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$. □

Nuestro objetivo es ver que el conjunto de Cantor puede definirse como el conjunto de números reales del intervalo $[0, 1]$ que expresados en base 3, están representados por ceros y doses, es decir:

$$\mathrm{C} = \{x \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ con } a_n = 0 \text{ ó } 2 \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Para llegar a ello, nos quedaría demostrar la siguiente proposición, ya que así quedaría probado que los extremos de los intervalos C_n, pueden expresarse mediante ceros y doses, siendo estos los únicos en los que teníamos el dígito 1.

Proposición 2.1.1. *Todo número real del intervalo* $[0, 1]$ *que se escribe* $x = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{3^n}$ *con* $a_n = 0$ *ó 2 para toda* $n < m$ *y* $a_m = 1$ *puede representarse en su forma ternaria con solo doses y ceros.*

Demostración. Sea $x \in (0, 1)$,

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{a_{m-1}}{3^{m-1}} + \frac{1}{3^m}$$

Veamos que $\frac{1}{3^m}$ puede ser expresado en su forma ternaria por ceros y doses:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3^{m+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^m}.$$

Por tanto,

$$x = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n}, \text{ donde } a_n = 0 \text{ ó } 2.$$

□

Proposición 2.1.2. *La representación ternaria de un número del conjunto de Cantor es única.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in \mathrm{C}$ que tiene dos representaciones en base 3 tales que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \text{ con } a_n, b_n \in \{0, 2\} \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq b_n$ siendo n el primer término en el que son distintos. Como $a_n, b_n \in \{0, 2\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a_n = 0$ y $b_n = 2$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{0}{3^n} + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{3^{n+2}} + ... \\
&\leq \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + ... \\
&= \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...\right) \\
&= \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{0}{3^n} + \frac{1}{3^n} \\
&< \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} + \frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{3^{n+2}} + ... \\
&= \frac{b_1}{3^1} + \frac{b_2}{3^2} + ... + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} + \frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{3^{n+2}} + ... = x
\end{aligned}$$

Llegamos a una contradicción, y deducimos entonces lo que queríamos probar. □

Proposición 2.1.3. *C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados y disjuntos.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Para $n = 1$, C_1 está formada por $2 = 2^1$ intervalos cerrados y disjuntos.

Ahora, entonces, suponemos cierto que C_{n-1} está formado por 2^{n-1} intervalos cerrados y disjuntos. Para obtener a partir de C_{n-1}, C_n dividimos cada intervalo de C_{n-1} en tres subintervalos (dos cerrados y el central abierto, que es el que eliminamos). De tal manera, por cada intervalo de C_n obtenemos dos nuevos intervalos cerrados y disjuntos entre sí.

Por lo tanto, C_n tiene $2{\cdot}2^{n-1} = 2^n$ intervalos cerrados y disjuntos. □

Proposición 2.1.4. *Cada intervalo que compone C_n tiene longitud de $\frac{1}{3^n}$.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Para n=1, $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Entonces, $l(\left[0, \frac{1}{3}\right]) = l(\left[\frac{2}{3}, 1\right]) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$, donde l denota la longitud del intervalo.

Ahora, entonces, suponemos cierto que cada intervalo que compone C_{n-1} tiene longitud de $\frac{1}{3^{n-1}}$. Para obtener a partir de C_{n-1}, C_n dividimos cada intervalo de C_{n-1} en tres subintervalos de igual longitud.
De tal manera, cada intervalo de C_n mide $\frac{1}{3}$ de lo que mide cada intervalo de C_{n-1}, es decir $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$ □

Corolario 2.1.5. *La suma de las longitudes de los intervalos que componen C_n es $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.3, tenemos que C_n tiene 2^n intervalos y por la Proposición 2.1.4, que la longitud de cada uno es $\frac{1}{3^n}$. Por lo tanto, la suma total de las longitudes es: $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. □

Proposición 2.1.6. (i) *$C_{n+1} \subset C_n$ para $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *C es no vacío, ya que los extremos de los intervalos están en C.*

Demostración. Evidente por construcción. □

Teorema 2.1.7. *El conjunto ternario de Cantor tiene medida de Lebesgue nula.*

Demostración. Para demostrar que el conjunto de Cantor tiene medida nula, calcularemos la medida de su complementario: $[0, 1]$ - C.

Por la Proposición 2.1.4, es evidente que para cada $n \in \mathbb{N}$, el intervalo central abierto de C_n que eliminamos para conseguir el C_{n+1} siguiente mide $\frac{1}{3^n}$.

Por otro lado, sabemos que el complementario de C_n tiene la mitad de intervalos que C_n, de manera que tiene $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ intervalos, ya que por cada tres subintervalos de C_n, nos quedamos con dos y eliminamos uno. Estos 2^{n-1} intervalos tienen longitud $\frac{1}{3^n}$ cada uno, es decir el complementario de C_n tiene medida $\frac{2^{n-1}}{3^n}$. Por tanto, obtenemos que la medida de Lebesgue es:

$$\mu([0, 1] \text{ - C}) = \mu([0, 1]) \text{ - } \mu(\text{C}).$$

Entonces,

$$\mu(\text{C}) = \mu([0, 1]) \text{ - } \mu([0, 1] \text{ - C}) = 1 \text{ - } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 \text{ - } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 \text{ - } \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1 \text{ - } 1 = 0$$

□

Proposición 2.1.8. *El conjunto de Cantor es no numerable.*

Demostración. Sabemos que $[0,1]$ es un conjunto no numerable. Por tanto, si construimos una sobreyección del conjunto de Cantor a dicho intervalo, tenemos que $Card(C) \geq Card([0,1])$ y como $[0,1]$ no numerable, concluimos que C tampoco lo es.

Por tanto, sea ϕ: C $\longrightarrow [0,1]$, definida por,

$$\phi(x) = \phi(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

Sea $y \in [0,1]$ tal que en forma binaria es $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{2^n}$, $e_n \in \{0,1\}$. Por tanto, si tomamos $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot e_n}{3^n}$, tenemos que $2 \cdot e_n \in \{0,2\}$ y por tanto, $x \in$ C. Finalmente, obtenemos que $\phi(x) = y$. □

Observación 2.1.2. En particular, esto nos lleva a darnos cuenta que el conjunto de Cantor tiene más puntos, aparte de los extremos de los intervalos que componen cada C_n para $n \in \mathbb{N}$.

Para la próxima observación utilizaremos los conceptos visto en el Apéndice A de objetos fractales.

Observación 2.1.3. El conjunto de Cantor, en particular, por ser totalmente disconexo, como hemos visto en Ejemplo A.2.1 tiene dimensión topologíca cero.

El conjunto de Cantor es un conjunto fractal. Como $C \subset [0,1]$, y dicho intervalo tiene dimensión topológica 1, cabe esperar que C tiene dimensión Box Counting entre 0 y 1.

Ahora, vamos a calcular la dimensión Box Counting del conjunto de Cantor, tal y como se ha visto en la Definición A.2.3. Para ello, vamos a tomar una malla del conjunto, en este caso, formada por intervalos y vamos a ir, recursivamente, encontrando una malla de intervalos de menor diámetro que siguen cubriendo el conjunto de Cantor. Lo iremos haciendo paralelamente a como lo hemos construido, es decir, ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, $C \subset C_n$, cualquier cubrimiento para C_n, será un cubrimiento para C.

Para cubrir C_1, tomamos un malla de diámetro $\delta = \frac{1}{3}$ que cubre el intervalo $[0,1]$. Por tanto, hay tres intervalos y como dos cortan a C_1, $\mathrm{N}_\delta(C_1) = 2$.

Para cubrir C_2, tomamos un malla de diámetro $\delta = \frac{1}{9}$ que cubre el intervalo $[0,1]$. Por tanto como cuatro de los intervalos cortan a C_2, $\mathrm{N}_\delta(C_2) = 2^2$.

Continuando de esta manera, llegamos a que para cubrir C_n, tomamos un malla de diámetro $\delta = \frac{1}{3^n}$ que cubre el intervalo $[0,1]$. Por tanto, como 2^n de los intervalos cortan a C_n, $\mathrm{N}_\delta(C_n) = 2^n$.

Finalmente, podemos calcular su dimensión fractal, donde $\delta = \frac{1}{3^n}$:

$$dim_B(C) = \lim_{n\to 0} \frac{\log(N_\delta(C))}{\log(\frac{1}{\delta})} = \lim_{n\to 0} \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \lim_{n\to 0} \frac{\log(2)}{\log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.631.$$

Por tanto, por la Definición A.2.4, el conjunto de Cantor es un fractal.

2.2. Propiedades topológicas del conjunto de Cantor

En esta sección probaremos las propiedades topológicas del conjunto de Cantor. De aquí en adelante, estudiaremos C como subespacio de la recta real con la topología usual.

Proposición 2.2.1. *C_n es un conjunto cerrado para $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como por la Proposición 2.1.3, C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados, tenemos que C_n es cerrado, ya que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada. □

Corolario 2.2.2. *El conjunto de Cantor es compacto.*

Demostración. Por definición tenemos que C:= $\cap \, \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como C_n es cerrado para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que C es cerrado por ser la intersección de conjuntos cerrados.

Por tanto, como C es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$ y $[0, 1]$ es un conjunto compacto, utilizando que la compacidad es débilmente hereditaria, concluímos que C compacto. □

Proposición 2.2.3. *El conjunto de Cantor es denso en sí mismo, es decir, dado $\epsilon > 0$; si $x \in C$ entonces existe $y \neq x$ tal que $|x - y| < \epsilon$ e $y \in C$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ para $n \to \infty$, existe N $\in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < \epsilon$. Como $x \in$ C, tenemos que $x \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $x \in C_N$, por lo que existe un intervalo de C_N; (a, b), de longitud $\frac{1}{3^n}$, tal que $x \in (a, b)$.

Tomamos $y = a$ ó b de manera que $y \neq x$. Entonces: $|x - y| \leq |a - b| = \frac{1}{3^N} < \epsilon$. □

Definición 2.2.1. Un conjunto A se dice que es *perfecto* cuando A es cerrado y denso en sí mismo, es decir, todos sus puntos son de acumulacíon.

Proposición 2.2.4. *El conjunto de Cantor es un conjunto perfecto.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.3, C es un conjunto denso en sí mismo, y por el Corolario 2.2.2, C es un conjunto cerrado. Por lo tanto, C es un conjunto perfecto. □

Proposición 2.2.5. *El conjunto de Cantor tiene interior vacío.*

Demostración. Suponemos por reducción al absurdo que x es un punto interior de C, entonces por definición existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset$ C. Por lo tanto, siendo μ la medida de Lebesgue,

$$\mu(x-\epsilon, x+\epsilon) \leq \mu(\mathrm{C}) = 0 \Rightarrow 2\epsilon = \mu(x-\epsilon, x+\epsilon) \leq 0 \Rightarrow \epsilon \leq 0,$$

que contradice $\epsilon > 0$.

Por lo tanto, C tiene interior vacío. □

Proposición 2.2.6. *El conjunto de Cantor es totalmente disconexo.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existe un conjunto A $\subset$ C, tal que A es conexo, y A tiene al menos dos puntos $x, y \in$ A tal que $x \neq y$. Podemos suponer que $x < y$.

Por ser los intervalos (y el vacío) los únicos subconjuntos conexos de la recta real, tenemos que por definición de lo que es un intervalo, $[x, y] \subset$ A. Por tanto,

$$\mu([x, y]) = y - x \leq \mu(\mathrm{C}) = 0, \text{ que implica que, } x = y.$$

□

Lema 2.2.7. *Sean x, y elementos del conjunto de Cantor cuya distancia es menor que $\frac{1}{3^N}$, entonces es $a_n = b_n$ para $n \leq N$, siendo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre N.
Para N=1, dados x e y tales que

$$|x-y| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right| < \frac{1}{3}.$$

Supongamos que $a_1 \neq b_1$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $a_1 = 0$ e $b_1 = 2$. Entonces, tenemos que

$$\frac{1}{3} > \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right| \geq \left|\frac{a_1 - b_1}{3}\right| - \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right|.$$

Y por tanto,

$$\frac{2}{3} = \left|\frac{a_1 - b_1}{3}\right| < \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right| + \frac{1}{3}.$$

Calculando el miembro de la derecha tenemos que

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right| + \frac{1}{3} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n} + \frac{1}{3} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Por tanto, obtenemos que $\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$, lo que es una contradicción y concluimos que $a_1 = b_1$. Ahora, entonces, suponemos cierto para N-1, y lo demostraremos para N.

Supongamos que $a_N \neq b_N$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $a_N = 0$ e $b_N = 2$. Entonces, tenemos que

$$\frac{1}{3^N} > \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right| \geq \left|\frac{a_N - b_N}{3^N}\right| - \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right|.$$

Y por tanto,

$$\frac{2}{3^N} = \left|\frac{a_N - b_N}{3^N}\right| < \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right| + \frac{1}{3^N}.$$

Calculando el miembro de la derecha tenemos que

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}\right| + \frac{1}{3^N} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{3^n} + \frac{1}{3^N} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \frac{1}{3^N} = 2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{3^{N+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3^N} = \frac{1}{3^N} + \frac{1}{3^N} = \frac{2}{3^N}.$$

Por tanto, obtenemos que $\frac{2}{3^N} < \frac{2}{3^N}$, lo que es una contradicción y concluimos que $a_N = b_N$ para $n \leq N$. □

En esta proposición utilizaremos la noción de espacio topológico producto y los resultados correspondientes obtenidos en el Ápendice A.

Proposición 2.2.8. *El Conjunto de Cantor es homeomorfo a un producto numerable de espacios discretos;* $(\Pi_{n\in\mathbb{N}}\{0,2\} = \{0,2\}^{\infty}, \tau_{dis})$.

Demostración. Sea $x \in$ C, tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, y sea

$$f : C \longrightarrow \{0,2\}^{\infty}$$
$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) = (a_1, a_2, a_3, ...).$$

Tenemos que probar lo siguiente: f está bien definida, f es biyectiva, f continua. De esa manera, como C con la topología usual inducida es compacto y $(\{0,2\}, \tau_{dis}^{\infty})$ es de Hausdorff, por el Lema A.1.5 tenemos que f es un homeomorfismo.

(i) f está bien definida, por las Proposiciones 2.1.1 y 2.1.2.

(ii) f es inyectiva por la misma razón, ya que dados $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \in$ C, tal que $f(x) = f(y)$, obtenemos:
$(a_1, a_2, a_3, ...) = (b_1, b_2, b_3, ...) \Longrightarrow a_1{=}b_1,\ a_2{=}b_2,\ a_3{=}b_3,\ ... \Longrightarrow x = y$.
f es sobreyectiva, ya que sea $(x_1, x_2, ...) \in\{0,2\}^{\infty}$, si tomamos $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$), entonces, $f(x) = (x_1, x_2, ...)$

(iii) Por el Lema A.1.1 f es continua si y solo si $p_k \circ f$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que,

$$p_k \circ f\colon \mathrm{C} \longrightarrow (\{0,2\}, \tau_{dis})$$

$$(p_k \circ f)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) = a_k.$$

Tenemos que $(p_k \circ f)^{-1}(\{0,2\}) = C$, que es abierto con la topología usual inducida; $(p_k \circ f)^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, que también es abierto; y $(p_k \circ f)^{-1}(\{a\}) = \{x \in \mathrm{C} \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_k = a\}$, donde a puede ser 0 ó 2.

A:=$\{x \in \mathrm{C} \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_k = a\}$ es abierto si y solo si para todo $x \in$ A, existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in (x$ - ϵ,x + $\epsilon) \cap$ C $\subset$ A. Tomamos $\epsilon < \frac{1}{3^k}$, y sea $y \in (x$ - ϵ,x + $\epsilon) \cap$ C, tenemos que $|x - y| < \frac{1}{3^k}$, y utilizando el Lema 2.2.7, $a_n = b_n$ para $n \leq k$.

Por tanto, como $x \in$ A, $a_k = a = b_k$, por lo que, $y \in$ A y entonces (x - ϵ,x + $\epsilon) \cap$ C $\subset$ A, es decir, tenemos que f es continua.

$\square$

La siguiente proposición muestra un resultado bastante llamativo acerca de las propiedades del conjunto de Cantor.

Proposición 2.2.9. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, C es homeomorfo a C^n con la topología inducida.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.

Para n=1, es evidente; para n=2, tenemos la siguiente función:

$$f\text{: C x C} \longrightarrow \text{C}$$

$$f(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = (a_1, b_1, a_2, b_2, ...)$$

Tenemos que probar lo siguiente: f está bien definida (esto es evidente así que no lo probaremos explícitamente), f es biyectiva y f continua. De esa manera, como C x C con la topología producto usual inducida es compacto (por ser producto de compactos) y C es de Hausdorff (por ser homeomorfo a un espacio de Hausdorff como hemos visto en la Proposición 2.2.8), por el Lema A.1.5 tenemos que$f$ es un homeomorfismo.

(i) f es inyectiva.
Dados $((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))$,$((c_1, c_2, ...), (d_1, d_2, ...)) \in$ C x C. Entonces, $f(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = f(((c_1, c_2, ...), (d_1, d_2, ...)))$ si y solo si, $(a_1, b_1, a_2, b_2, ...) = (c_1, d_1, c_2, d_2, ...)$. Esto implica que $a_m = c_m$, y $b_m = m_m$ para todo m $\in \mathbb{N}$, y por tanto, $((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...)) = ((c_1, c_2, ...), (d_1, d_2, ...))$

(ii) f es sobreyectiva. Sea $(u_1, u_2, ...) \in$ C. Tomamos $((u_1, u_3, u_5, ...), (u_2, u_4, u_6, ...)) \in$ C x C y tenemos que $f(((u_1, u_3, u_5, ...), (u_2, u_4, u_6, ...))) = (u_1, u_2, u_3, ...)$

(iii) Por el Lema A.1.1 f es continua si y solo si $p_k \circ f$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que,

$$(p_k \circ f)(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = \begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} & \text{si n es impar} \\ b_{\frac{n}{2}} & \text{si n es par} \end{cases}$$

Sean ϕ_1,ϕ_2 las siguientes funciones:

$$\phi_1, \phi_2 \text{: C x C} \longrightarrow \text{C}$$

$$\phi_1(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = (a_1, a_2, ...) \ \phi_2(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = (b_1, b_2, ...)$$

Observamos que ϕ_1,ϕ_2 son funciones continuas.

Veremos ahora que $p_n \circ \phi_1 = p_{2n-1} \circ f$ y $p_n \circ \phi_2 = p_{2n} \circ f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, tendríamos que como p_n,ϕ_1,ϕ_2 son continuas $p_{2n-1} \circ f$, $p_{2n} \circ f$ serían continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, y, por tanto, $p_n \circ f$ sería continua para todo $n \in \mathbb{N}$ y, finalmente, lo sería f. Calcularemos, entonces, dichas funciones:

$$(p_n \circ \phi_1)(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = p_n((a_1, a_2, ...)) = a_n$$
$$(p_{2n-1} \circ f)(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = p_{2n-1}(((a_1, b_1, a_2, b_2, ...))) = a_{\frac{2n-1+1}{2}} = a_n$$
$$(p_n \circ \phi_2)(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = p_n((b_1, b_2, ...)) = b_n$$
$$(p_{2n} \circ f)(((a_1, a_2, ...), (b_1, b_2, ...))) = p_{2n}(((a_1, b_1, a_2, b_2, ...))) = b_{\frac{2n}{2}} = b_n$$

Por tanto, C es homeomorfo a C x C. Para concluir, suponemos que C x ...x C (n-1 veces) es homeomorfo a C. Entonces, C x ... x C x C (n veces) es homeomorfo a C x C, que como ya hemos visto, es a su vez, homeomorfo a C.
Es decir, hemos probado que C es homeomorfo a C^n para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2.3. 0-dimensionalidad

Definición 2.3.1. Un espacio topológico (X, τ) es *0-dimensional* si todo punto x de X tiene una base local $\mathcal{B}_x$ formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.

Lema 2.3.1. *(X, τ) es* 0-dimensional *si y solo si para todo punto $x \in X$ y todo F conjunto cerrado que no contiene a x, existe un conjunto cerrado y abierto que contiene a x y no corta a F.*

Demostración. $\Rightarrow$) Dado $x \in$ X y F cerrado que no contiene a x, tenemos que $x \in X$ - F que es abierto, y por lo tanto es entorno de x. Por ello, existe un entorno básico $B \in \mathcal{B}_x$ donde $B \subset X$ - F, y como (X, τ) es *0-dimensional* su base local está formada por conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U}_x = \{ \ U \subset X \mid x \in U$ y U abierto y cerrado $\}$.
Veamos que es una base local en x. Sea N entorno de x, sabemos que existe un abierto V, tal que $x \in V \subset N$. Por tanto, $X - V$ es un cerrado que no contiene a x. Aplicando la hipótesis, existe un conjunto U cerrado y abierto que contiene a x y no corta $X - V$, y por tanto, $U \in \mathcal{U}_x$ y $U \subset V \subset N$. Por tanto, $\mathcal{U}_x$ es una base local en x. □

Teorema 2.3.2. *Un espacio topológico (X, τ) compacto y de Hausdorff es 0-dimensional si y solo si es totalmente disconexo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como, por hipótesis, (X, τ) es 0-dimensional, todo punto de X tiene una base local formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Y como (X, τ) es de Hausdorff para todo x, $y \in X$, $x \neq y$, existen un conjunto $U \in \mathcal{B}_x$ y un conjunto $V \in \mathcal{B}_y$ disjuntos tal que $x \in U$ e $y \in V$. Por ser (X, τ) 0-dimensional U es un conjunto abierto y cerrado. Por tanto, U es un conjunto abierto y cerrado tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Es decir, por el Corolario 1.5.10 (X, τ) es totalmente disconexo.

$\Leftarrow$) Como (X, τ) es compacto, de Hausdorff y totalmente disconexo, por el Corolario 1.5.10, tenemos que dados x, $y \in X$, $x \neq y$, existe un conjunto U abierto y cerrado tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Entonces, para que (X, τ) sea 0-dimensional, por el Corolario **??**, hay que ver que sea $x \in X$ y F conjunto cerrado que no contiene a x, entonces existe un conjunto cerrado y abierto que contiene a x y no corta a F.
Sea $a \in F$, por lo que acabamos de decir, existe un U_a abierto y cerrado tal que $x \in U_a$ y $a \in X - U_a$ ($X - U_a$ es un conjunto abierto y cerrado a la vez). Tenemos que $\{X - U_a\}_{a \in F}$ es un cubrimiento por abiertos de A, y como F compacto, por ser (X, τ) compacto y de Hausdorff, existe un subrecubrimiento finito por abiertos de F: $\{X - U_{a_1}, ..., X - U_{a_n}\}$ y $\cap_{i=1}^{n} \mathrm{U}_{ai}$ es un conjunto abierto y cerrado que contiene a x y no corta a F.
□

Corolario 2.3.3. *El conjunto de Cantor es 0-dimensional.*

Introduciremos la definición de sucesión límite inversa y algunos resultados necesarios para demostrar nuestro teorema central. Además, de aquí en adelante, utilizaremos la noción de espacio topológico producto y los resultados correspondientes obtenidos en el Ápendice A.

Definición 2.3.2. Sean (X_0, τ_0),(X_1, τ_1),... espacios topológicos, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n una función continua f_n: $(X_n, \tau_n) \Rightarrow (X_{n-1}, \tau_{n-1})$. La sucesión:

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} X_2 \xleftarrow{f_3} ...$$

que nombraremos con $< X_n, f_n >$, se llama *sucesión límite inversa de* $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. El *espacio límite inverso*: X_∞ está formado por los puntos $x \in \Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ X_n$, donde

x: $\mathbb{N}\cup\{0\} \to \cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}X_n$, con $x_k := x(k) \in X_k$ para k $\in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $f_n(X_n) \subset X_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

y hereda la topología de subespacio de $(\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ X_n$,$\tau_{Tyc})$.

Teorema 2.3.4. *Sea $< X_n, f_n >$ sucesión límite inversa, donde X_n son conjuntos no vacíos compactos y de Hausdorff para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Entonces, X_∞ es un conjunto no vacío compacto y de Hausdorff.*

Demostración. Como X_n es de Hausdorff para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, tenemos que lo la Proposición A.1.4 $\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ X_n$ es de Hausdorff, y por ser una propiedad hereditaria, por la Proposición A.1.3, X_∞ es de Hausdorff.
Sea Y_k el conjunto formado por los x: $\mathbb{N}\cup\{0\} \to \cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}X_n$, tales que $f_k(x_k) \in X_{k-1}$. Por tanto, $X_\infty = \cap_{k\in\mathbb{N}}\ Y_k$. Para $n \in \mathbb{N}$, cada $Y_1 \cap Y_2 \cap ... \cap Y_n$ es no vacío, por lo que solo hace falta probar que cada $Y_1 \cap Y_2 \cap ... \cap Y_n$ es compacto en $\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ X_n$, y al ser un espacio de Hausdorff, solo hace falta probar que $Y_1 \cap Y_2 \cap ... \cap Y_n$ es cerrado. Es decir, faltaría probar que Y_n es cerrado.
Tomamos $z \in \Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\ X_n$ y $z_{n-1} \in X_{n-1}$ donde $z_n \notin Y_n$. En ese caso, $f_n(z_n) \neq z_{n-1}$. Como $f_n(z_n)$, $z_{n-1} \in X_{n-1}$ y X_{n-1} es de Hausdorff, existen U, V abiertos disjuntos tal que $f_n(z_n) \in U$, y $z_{n-1} \in V$. Además, como $f_n(z_n) \in U \in \mathcal{N}_{f_n(z_n)}$, y f_n es continua, existe $W \in \mathcal{N}_{z_n}$ tal que $f_n(W) \subset U$. Entonces, el conjunto X_1 x ... x X_{n-2} x V x $\mathring{W}$ x X_{n+1} x ... es un abierto que contiene a z que no corta a Y_n, por tanto Y_n es cerrado. □

Definición 2.3.3. 2.1.1 Sean $< X_n, f_n >$, $< Y_n, g_n >$ sucesiones límite inversas de $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Una *función* Φ de $< X_n, f_n >$ a $< Y_n, g_n >$ es una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ donde φ_n: $X_n \to Y_n$, tal que $\varphi_{n-1} \circ f_n = g_n \circ \varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que Φ es *continua* si cada φ_n lo es, Φ es *sobreyectiva* si cada φ_n lo es y así sucesivamente. La *aplicación inducida* $\varphi : X_\infty \to Y_\infty$, se define por:

$$\varphi(x_0, x_2, ...) = (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), ...)$$

El hecho de que $\varphi_{n-1} \circ f_n = g_n \circ \varphi_n$, implica que $(\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), ...) \in Y_\infty$, por lo que está bien definida.

$$\begin{array}{ccccccc} ... & \xleftarrow{f_{n-1}} & X_{n-1} & \xleftarrow{f_n} & X_n & \xleftarrow{f_{n+1}} & ... \\ & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \downarrow \varphi_n & & \\ ... & \xleftarrow{g_{n-1}} & Y_{n-1} & \xleftarrow{g_n} & Y_n & \xleftarrow{g_{n+1}} & ... \end{array}$$

Teorema 2.3.5. *Sean $< X_n, f_n >$, $< Y_n, g_n >$ sucesiones límite inversas y Φ una de $< X_n, f_n >$ a $< Y_n, g_n >$. Entonces,*

(a) Si Φ es continua, entonces la función inducida φ también lo es.

(b) Si Φ es una función sobreyectiva, y X_n, Y_n compactos, no vacíos y de Hausdorff, entonces φ es una función continua y sobreyectiva.

Demostración. (a) Suponemos que Φ es continua, y como Y_∞ es subconjunto de $\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} Y_n$, Φ es continua si y solo si $p_n \circ \Phi$ es continua, donde p_n: $\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X_n \longrightarrow X_n$ es la n-ésima proyección de $\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X_n$. Sea p'_n: $\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} Y_n \longrightarrow X_n$ es la n-ésima proyección de $\Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} Y_n$, tenemos que

$$p'_n \circ \varphi = \varphi_n \circ p_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

donde φ: $X_\infty \longrightarrow Y_\infty$, φ_n: $X_n \longrightarrow Y_n$

Y como φ_n, p_n son continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, la la función $\varphi_n \circ p_n$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto, la función $p'_n \circ \varphi$ también es continua. Entonces, volviendo a hacer uso de la Proposición A.1.1, conluímos que la función inducida φ también lo es.

(b) Sea $y \in \Pi_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} Y_n$ y para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, sea $A_n := \varphi_n^{-1}(y_n)$. Como Y_n es de Hausdorff (en particular, por la Proposición A.1.2, es de Fréchet) los puntos son cerrados y, por tanto, $\{y_n\}$ es cerrado en Y_n. Como φ es continua, $A_n := \varphi^{-1}(y_n)$ es cerrado en X_n, y como X_n es compacto, A_n es compacto. Por ser φ_n sobreyectiva A_n es no vacío. Si tomamos $h_n = f_n \restriction_{A_n}$, la sucesión

$$A_0 \xleftarrow{h_1} A_1 \xleftarrow{h_2} A_2 \xleftarrow{h_3} ...$$

es una sucesión límite inversa de espacios compactos, no vacíos y de Hausdorff (por ser X_n de Hausdorff). Veamos que se cumple que $h_n(A_n) \subset A_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $z \in A_n$, entonces $\varphi_n(z) = y_n$. Tenemos, que $g_n(\varphi_n(z)) = g_n(y_n) = y_{n-1}$, y que $\varphi_{n-1}(f_n(z)) = g_n(\varphi_n(z))$. Por tanto, $\varphi_{n-1}(f_n(z)) = y_{n-1}$, por lo que $f_n(z) \in \varphi_{n-1}^{-1}(y_{n-1}) = A_{n-1}$.
Por el Teorema 2.3.4 X_∞ es no vacío, por lo que, sea $x \in A_\infty$, entonces $\varphi(x_0, x_2, ...) = (\varphi_0(x_0),\varphi_1(x_1),...) = (y_0, y_2, ...)$.

□

Definición 2.3.4. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, un *refinamiento* de un recubrimiento $\mathcal{U}$ de (X, τ) es un nuevo recubrimiento: $\mathcal{V}$ de (X, τ), tal que para todo $V \in \mathcal{V}$, V está contenido en algún $U \in \mathcal{U}$.

Definición 2.3.5. Llamamos *partición* del conjunto X a una coleeción de conjuntos disjuntos en X que lo cubren. Si $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$,... es una sucesión de particiones de X tal que $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces la *sucesión derivada* que se obtiene de $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$,... es la sucesión límite inversa:

$$Y_0 \xleftarrow{f_1} Y_1 \xleftarrow{f_2} Y_2 \xleftarrow{f_3} ...$$

donde Y_n es el espacio discreto que tiene por elementos los conjuntos de $\mathcal{U}_n$ y $f_n : Y_n \longrightarrow Y_{n-1}$ lleva cada conjunto de $\mathcal{U}_n$ al único conjunto que lo contiene en $\mathcal{U}_{n-1}$.

Teorema 2.3.6. *Sea X un espacio métrico compacto totalmente disconexo. Entonces:*

(a) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe un cubrimiento finito por abiertos disjuntos $\mathcal{U}_n$ de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$ tal que $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$.

(b) Si $< Y_n, f_n >$ es la sucesión derivada de tales recubrimientos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ...$, entonces X es homeoformo a Y_∞.

Demostración. (a) Como X es un espacio métrico totalmente disconexo, por el Teorema 2.3.2 tenemos que X es 0-dimensional, por lo que, todo punto de X tiene una base local formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Haremos la prueba por inducción sobre n.
Sea $n = 0$. Dado $x \in X$ y $B(x, \frac{1}{3})$, existe $U_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $U_x \subset B(x, \frac{1}{3})$, por lo que, $diam(U_x) \leq \frac{2}{3} < 1$. Así, $\{U_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento por abiertos y cerrados de X y por ser X compacto podemos tomar un subrecubrimiento finito $\{U_{x_1}, ..., U_{x_k}\}$. Definimos ahora:

$$U'_{x_1} = U_{x_1} \quad U'_{x_2} = U_{x_2} \text{ - } U_{x_1} \quad ,..., \quad U'_{x_k} = U_{x_k} \text{ - } (U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_{k-1}})$$

Por tanto, $\mathcal{U}_0 = \{U'_{x_1},...,U'_{x_k}\}$ es un cubrimiento fintio por abiertos disjuntos de diámetro menor que 1. Ahora, aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$,...,$\mathcal{U}_{n-1}$ son cubrimientos finitos por abiertos disjuntos de diámetro menor que $1, \frac{1}{2},..., \frac{1}{2^{n-1}}$, respectivamente.
Supongamos que $\mathcal{U}_{n-1} = \{V_{x_1},...,V_{x_t}\}$. Como para cada i = 1,...,t, $V_{x_i} = X$ - $(V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_{i-1}} \cup V_{x_{i+1}} \cup ... \cup V_{x_t})$, V_{x_i} es cerrado y por tanto, compacto, y entonces podemos refinar $\mathcal{U}_{n-1}$ ya que podemos obtener subrecubrimientos finitos de abiertos y cerrados para cada V_{x_i} de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$, de la misma forma que hemos hecho antes. Sea $\mathcal{U} = \{W_{x_1}, ..., W_{x_s}\}$ el conjunto formado por dichos subrecubrimientos, entonces

$$\mathcal{U}_n = \{W_{x_1}, W_{x_2} - W_{x_1} ..., W_{x_s} \text{ - } (\bigcup_{j<s} W_{x_j})\}$$

es el cubrimiento n-ésimo que estabamos buscando.

(b) Tenemos que Y_n está formado por los conjuntos de $\mathcal{U}_n$, por lo que es finito. Por tanto, con la topología discreta Y_n es compacto, por a) es no vacío y por ser la propiedad de Hausdorff hereditaria, Y_n es de Hausdorff.
Por el Teorema 1.4.6, como $< Y_n, f_n >$ es una sucesión límite con Y_n compactos, no vacíos y de Hausdorff, tenemos que Y_∞ es compacto, no vacío y de Hausdorff.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\varphi_n : X \longrightarrow Y_n, \text{ donde } \varphi_n(x) \text{ es el conjunto } \mathcal{U}_n \text{ que contiene a } x.$$

Entonces, $\Phi = \{\varphi_n\}$ es una aplicación de $< X_n, id >$ a $< Y_n, f_n >$, porque:
$\varphi_{n-1} \circ id(x) = \varphi_{n-1}(x)$, que por definición lleva a x al único elemento que contiene a x en $\mathcal{U}_{n\,-\,1}$.
$\varphi_n(x)$ lleva a x al único elemento que contiene a x en $\mathcal{U}_n$ y, por tanto, $f_n \circ \varphi_n(x)$ lleva al único elemento que contiene a x en $\mathcal{U}_n$ al único conjunto que contiene a x en $\mathcal{U}_{n\,-\,1}$.
Por tanto, $\varphi_{n-1} \circ id = f_n \circ \varphi_n$.
Además, sea φ la aplicación inducida,

$$\varphi : X \longrightarrow Y_\infty$$

por la Definición 2.1.1, si φ_n es continua y sobreyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$, φ es continua y sobreyectiva, ya que para todo $U \in Y_n$, $\varphi_n^{-1}(U) = U \in \tau$, y para todo $U \in Y_n$, existe $x \in$ V tal que $\varphi_n(x) = V$. De hecho, es evidente que el espacio límite inverso de $< X_n, id >$ es X:

$$X \overset{id}{\longleftarrow} X \overset{id}{\longleftarrow} X \overset{id}{\longleftarrow} ...$$

Tenemos que φ es sobreyectiva y continua, por tanto, si probamos que φ es inyectiva, como X es compacto y Y_∞ es de Hausdorff, por el Lema 2.3.7 tendríamos que φ es un homeomorfismo.
Sean $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, y cuya distancia es ϵ, entonces tomado un n_0 tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$ (su existencia viene de la propiedad arquimediana). Por tanto, como cada elemento de $\mathcal{U}_{n_0}$ tiene diámetro menor que $\frac{1}{2^{n_0}}$, x e y no pueden pertenecer al mismo elemento de $\mathcal{U}_{n_0}$, por lo que, $\varphi_{n_0}(x) \neq \varphi_{n_0}(y)$, y por tanto, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

$\square$

Lema 2.3.7. *Dado (X, τ) un espacio topológico compacto, totalmente disconexo, perfecto y de Hausdorff, U un conjunto abierto no vacío y $n \in N$, entonces existen $U_1, U_2, ..., U_n$ conjuntos abiertos no vacíos disjuntos dos a dos tales que $U = U_1 \cup ... \cup U_n$.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n.
Para n=1, es evidente. Para n=2, como (X, τ) es un espacio perfecto U no puede ser un punto.
Si $U = \{x\}$ abierto, entonces por la definición 2.2.1, x sería un punto de acumulación de (X, τ), y por definición de punto de acumulación de X, para cada entorno $B \in \mathcal{B}_x$, $(B - x) \cap X \neq \emptyset$. Como $\{x\}$ abierto que contiene a x, es entorno suyo, y por tanto debería cumplir que $(\{x\} - \{x\}) \cap X \neq \emptyset$, que es absurdo.
Por lo tanto, al menos tiene dos puntos distintos x y y. Por la Proposición **??**, como (X, τ) es de Hausdorff y totalmente disconexo, existe un conjunto V abierto y cerrado tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Sea $U_1 = U \cap V$ y $U_2 = U$ - V, y obtenemos el resultado que queríamos.
Por tanto, dado U un conjunto abierto no vacío, existen U, V conjuntos abiertos no vacíos disjuntos tales que $U = U \cup V$. Para concluir, suponemos que existen $U_1, U_2, ..., U_{n-1}$ conjuntos abiertos no vacíos disjuntos dos a dos tales que $U = U_1 \cup ... \cup U_{n-1}$. Entonces, como $U_1 \cup ... \cup U_{n-1}$ es un abierto no vacío, podemos aplicar el caso de n=2, que ya hemos demostrado.
Por tanto, queda probado para todo $n \in$N □

2.4. Teorema central y algunos ejemplos

Teorema 2.4.1. *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) dos espacios totalmente disconexos, perfectos, compactos y métricos son homeomorfos.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.6 para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe un cubrimiento finito por abiertos disjuntos $\mathcal{U}_n$ de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$ tal que $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$. Sean $(\mathcal{U}_n)$, $(\mathcal{V}_n)$ las correspondientes sucesiones de particiones de X e Y, respectivamente. Utilizando el Lema 2.3.7, podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$, $\mathcal{V}_n$ tienen el mismo número de elementos. Sean $\mathcal{U}_1 = \{U_{11},...,U_{1k}\}$ y $\mathcal{V}_1 = \{V_{11},...,V_{1k}\}$, entonces sabemos que cada U_{1i} es la unión de elementos de $\mathcal{U}_2$ y que cada V_{1i} es la unión de elementos de $\mathcal{V}_2$. Utilizando el Lema 2.3.7, podemos suponer también que son unión del mismo número de elementos, es decir, $U_{2j} \subset U_{1i}$ si y solo si $V_{2j} \subset V_{1i}$. Continuando con este proceso, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos casar los cubrimientos de $\mathcal{U}_n$ y los de $\mathcal{V}$.
Como $< X_n, f_n >$, $< Y_n, g_n >$ son las sucesiones límite inversas derivadas de $(\mathcal{U}_n)$ y $(\mathcal{V}_n)$, respectivamente, definimos la función φ_n: $X_n \longrightarrow Y_n$ dada por $\varphi_n(U_{nj}) = V_{nj}$. Como X_n y Y_n son espacios discretos, tenemos que φ_n y φ_n^{-1} son funciones continuas, y como es evidentemente biyectiva, es un

homeomorfismo.
Por el Teorema 2.3.4 tenemos que X_∞, Y_∞ son compactos, de Hausdorff, no vacíos y totalmente disconexos. Por el Teorema 2.3.5, φ es continua y sobreyectiva. Si vieramos que es inyectiva por el Lema A.1.5, tendríamos que φ es un homeomorfismo entre X_∞ y Y_∞.
Que φ es inyectiva se deduce fácilmente del hecho que φ_n es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$.
Por tanto, tenemos que X_∞ es homeomorfo a Y_∞, y utilizando el Teorema 2.3.6, concluímos que X es homeomorfo a Y. $\square$

Finalmente, llegamos al objetivo de nuestro trabajo. Con este corolario, estamos probando que el conjunto ternario de Cantor es el modelo topológico de cualquier espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo:

Corolario 2.4.2. *El Conjunto de Cantor es el único espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo salvo homeomorfismos.*

Ahora, veremos un ejemplo, que demuestra que podemos encontrar conjuntos de Cantor sobre el intervalo $[0,1]$ de medida de Lebesgue arbitraria $\alpha \in (0,1)$.

Ejemplo 2.4.1. Sea $\alpha \in (0,1)$.
Primero, cogemos el intervalo de la recta real $[0,1]$ y lo dividimos en tres subintervalos de la siguiente manera:

$$\big[0, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha\big],\ \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha\big), \big[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha, 1\big]$$

Ahora, eliminamos el intervalo abierto de en medio cuya medida es

$$\mu\big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha\big) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha) \text{ - } (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha) = \tfrac{1}{2}\alpha$$

y definimos

$$D_1 := \big[0, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha\big] \cup \big[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha, 1\big]$$

En segundo lugar, repetimos lo mismo con los intervalos de D_1, es decir, dividimos a ambos en tres subintervalos de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}\big[0, \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\alpha\big] \cup \big(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\alpha, \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\alpha\big) \cup \big[\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\alpha, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha\big] \cup \\ \big[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha, \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{16}\alpha\big] \cup \big(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{16}\alpha, \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16}\alpha\big) \cup \big[\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16}\alpha, 1\big]\end{gathered}$$

y quitamos los dos intervalo centrales cuya medida es

$$\mu\big(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\alpha, \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\alpha\big) = \mu\big(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{16}\alpha, \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16}\alpha\big) = \tfrac{1}{8}\alpha$$

y definimos

$$D_2 := \big[0, \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{16}\alpha\big] \cup \big[\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16}\alpha, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\alpha\big] \cup \big[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\alpha, \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{16}\alpha\big] \cup \big[\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16}\alpha, 1\big]$$

Continuando de esta manera, llegamos a que la suma de las medidas de los intervalos centrales de D_{n+1}, es $\frac{1}{2}\times$ la medida de D_n.

$$\mu([0,1] \text{ - D}) = \mu([0,1]) \text{ - } \mu(\text{D}).$$

Entonces,

$$\mu(\text{D}) = \mu([0,1]) \text{ - } \mu([0,1] \text{ - D}) = 1 \text{ - } \alpha\big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + ...\big) =$$
$$1 \text{ - } \alpha\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(\frac{1}{2^n}\big) = 1 \text{ - } \alpha\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \text{ - } \alpha \neq 0$$

Ya que la construcción es totalmente paralela al conjunto ternario de Cantor, tenemos que este conjunto de Cantor es métrico (eso lo es por ser subespacio de un métrico), compacto, perfecto y totalmente disconexo.

Observación 2.4.1. Con este ejemplo, observamos, que la medida no es una propiedad topológica, ya que hemos encontrado un conjunto de Cantor homeomorfo al conjunto ternario de Cantor con medida no nula.

Recordemos que en la Proposición 2.2.9, hemos demostrado, en particular, que $C \times C$ es homeomorfo a C, lo que nos lleva a buscar ejemplos de espacios homeomorfos a C en dimensión 2. Buscaremos uno diferente a $C \times C$.

Ejemplo 2.4.2. Sea,

$$C_1 := \big[0, \tfrac{1}{3}\big] \cup \big[\tfrac{2}{3}, 1\big]$$

el conjunto definido en la construcción del conjunto ternario de Cantor, y sea $B(x,\epsilon)$ la bola cerrada en $\mathbb{R}^2$ de centro x y radio ϵ, definimos

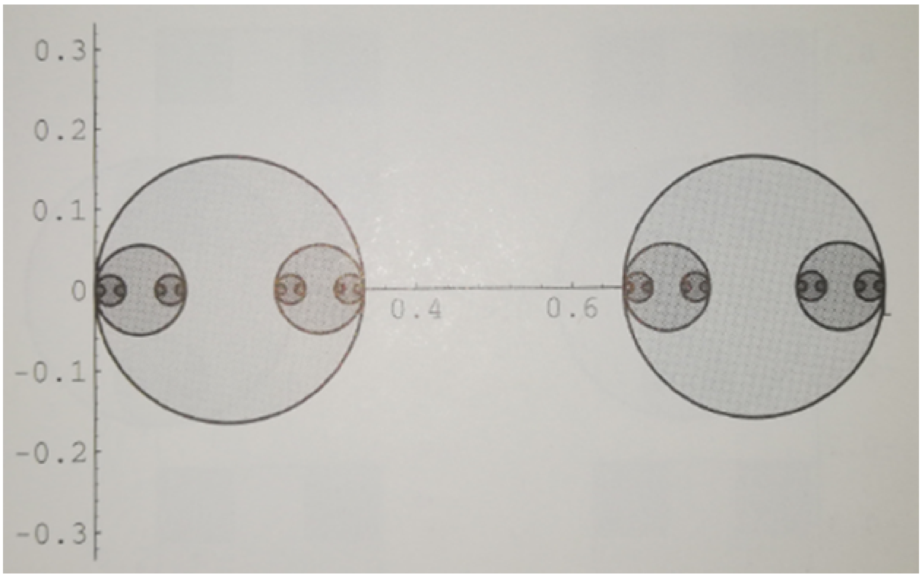
$$D_1 := B(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}) \cup B(\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6})$$

En segundo lugar, repetimos lo mismo con C_2, es decir, sea

$$C_2 := \big[0, \tfrac{1}{9}\big] \cup \big[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\big] \cup \big[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\big] \cup \big[\tfrac{8}{9}, 1\big].$$

definimos

$$D_2 := B(\tfrac{1}{18}, \tfrac{1}{18}) \cup B(\tfrac{5}{18}, \tfrac{1}{18}) \cup B(\tfrac{13}{18}, \tfrac{1}{18}) \cup B(\tfrac{17}{18}, \tfrac{1}{6})$$



En general, D_n se construye tomando la bola cerrada que tiene inscrito a cada intervalo de C_n. Continuando este proceso indefinídamente, llegamos a definir un conjunto de Cantor de dimensión 2, que es la intersección de todos los conjuntos D_n.

$$\text{D:=} \cap \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Puede parecer que como cada C_n no es homeomorfo a cada D_n, entonces C y D no son homeomorfos. En cambio, como D es un espacio métrico (eso lo es por ser subespacio de un métrico), compacto, perfecto y totalmente disconexo, es homeomorfo a C. Estas tres últimas propiedades se siguen de la construcción que hemos llevado a cabo, que es análoga a la del conjunto ternario de Cantor, por lo que sería análogo hacer estas pruebas pero para una dimensión superior.

Apéndice A

A.1. Propiedades topológicas

Definición A.1.1. Sea (X_i, τ_i) una familia de espacios topológicos, donde $i \in I$. Definimos el *espacio topológico producto* como el par $(\Pi_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$, donde

$$\Pi_{i\in I} X_i = \{x\colon I \to \cup_{i\in I} X_i, \text{ con } x(i) \in X_i \text{ para i} \in I\}$$

es el *Producto Cartesiano infinito* de los conjuntos X_i.
La función p_k: $(\Pi_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (X_k, \tau_k)$, definida por $p_k(x) = x_k$ es la k-ésima proyección y τ_{Tyc} es la *Topología de Tychonov*, que se obtiene tomando como base para los abiertos los conjuntos de la forma $\Pi_{i\in I} U_i$, donde U_i es abierto en X_i y $U_i = X_i$ para todo i menos un número finito de subíndices. Notemos que $\Pi_{i\in I} X_i$ donde $U_i = X_i$ para todo i menos para $\in \{i_1, i_2, ..., i_m\}, m \in \mathbb{N}$, se puede escribir como :

$$\Pi_{i\in I} X_i = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap p_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap ... \cap p_{i_m}^{-1}(U_{i_m})$$

Por tanto, la topología está definida por la subbase:

$$\{p_i^{-1}(U_i), \text{ donde } i \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \text{ abierto en } X_i\}$$

La topología de Tychonov es la menor topología tal que las proyecciones son continuas.

Lema A.1.1. *Sea (Y, τ) un espacio topológico, sea $(\Pi_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ un espacio producto y sea p_k: $(\Pi_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (X_k, \tau_k)$, la k-ésima proyección. Entonces f: $(Y, \tau) \longrightarrow (\Pi_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es continua si y solo si $p_k \circ f$ es continua $\forall k \in I$.*

Demostración. Dadas dos funciones continuas, su composición es continua, por lo que solo quedaría probar la otra implicación.
Suponemos que $p_k \circ f$ es continua para todo $k \in I$. Caculamos $f^{-1}(p_k^{-1}(U_k))$ $= (p_k \circ f)^{-1}(U_k)$, y como la proyección es siempre continua y $p_k \circ f$ es continua por hipótesis, concluimos que $f^{-1}(p_k^{-1}(U_k))$ es abierto en X_k, y por tanto, continua. $\square$

Proposición A.1.2. *Si un espacio topológico es de Hausdorff, entonces es de Fréchet.*

Proposición A.1.3. *La propiedad de Hausdorff es hereditaria, es decir, todo subconjunto con la correspondiente topología inducida también es de Hausdorff.*

Proposición A.1.4. *El producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff si y solo si cada espacio factor lo es.*

Lema A.1.5. *Sean (X, τ_X) (Y, τ_Y) espacios topológicos, y sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua y biyectiva. Si (X, τ_X) es compacto y (Y, τ_Y) es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Si f es continua, biyectiva y abierta (o cerrada) entonces f es un homeomorfismo. Por tanto, probaremos que f es cerrada. Sea F cerrado en (X, τ_X), como la compacidad es débilmente hereditaria, F es compacto. Como f continua, tenemos que $f(F)$ es compacto. Finalmente, como (Y, τ_Y) es un espacio de Hausdorff, todo compacto es cerrado. □

A.2. Objetos fractales

Definición A.2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos en X. Un subconjunto $A \subset X$, se dice que tiene *dimensioń topológica 0* si para todo $x \in A$, existe un $B \in \mathcal{B}_x$ tal que la frontera de B no corta a A.

Definición A.2.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos en X. Un subconjunto $A \subset X$, se dice que tiene *dimensioń topológica k*, con k > 0, si para todo $x \in A$, existe un $B \in \mathcal{B}_x$ tal que la frontera de B corta a A en un subconjunto de dimensión topológica $k-1$, y, además, k es el menosr número natural que cumple esta propiedad.

Ejemplo A.2.1. (i) Todos los conjuntos totalmente disconexos tienen dimensión topológica cero, ya que existen entornos lo suficientemente pequeños como para solo contener al propio punto.

(ii) Cualquier curva en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ tiene dimensión topológica 1, ya que para todo punto existe un entorno que corta a la curva en un conjunto de al menos dimensión cero.

La dimensión de Box-Counting es otro método para calcular la dimensión de un conjunto en un espacio métrico (X,d).

Definición A.2.3. Sea (X,d) un espacio métrico. Sea A un subconjunto acotado y no vacío. Tomamos una malla cuadrada de diámetro δ que cubra

A y de dimensión la misma que X, y llamamos $N_\delta(A)$ al número de cuadrados de dicha malla que intersecan a A. Entonces, denimos la *dimensión de BoxCounting*, como:

$dim_B(A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{-\log(\delta)} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log(N_\delta(A))}{\log(\frac{1}{\delta})}$

Definición A.2.4. Sea (X,d) un espacio métrico. Sea A un subconjunto acotado y no vacío. Entonces, A se dice que es un *fractal* si:

$$dim_{top}(A) \neq dim_B(A)$$

Bibliografía

[1] Stephen Willard, *General Topology*, Dover, 2004

[2] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, *Counterexamples in topology*, Dover, 1995

[3] Dennis Roseman, *Elementary topology*, Prentice Hall, 1999.

[4] José Mateos Cortés, *Propiedades del conjunto de Cantor*, Foro RED-Mat, Vol 6, 1997.

[5] Antonio Giraldo Carbajo y M. Asunción Sastre Rosa, *Geometría fractal*, Universidad Politécnica de Madrid, 2001.

[6] Iván Serapio Ramos, *Funciones y Propiedades de Whitney*, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.