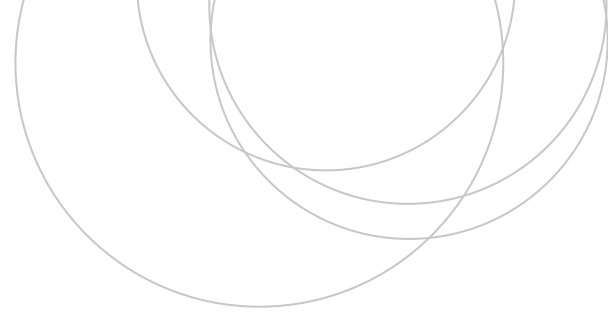




Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ZIENTZIA
ETA TEKNOLOGIA
FAKULTATEA
FACULTAD
DE CIENCIA
Y TECNOLOGÍA



Gradu Amaierako Lana (Fisika)
Fisikako eta Ingeniaritza Elektronikoko Gradu Bikoitza

PLANCK Sateliteak Behatutako Fisika: Mikrouhin Erradiazio Kosmikoaren (CMB) Temperatura Anisotropien Azterketa

Egilea:
Unai Arregi Leon
Zuzendaria:
Jon Urrestilla Urizabal

Motibazioa eta eskerrak

Betidanik izan dut Unibertsuaren hastapenaren inguruko interes handia eta ikasketetan zehar ikusitako kosmologia urriak bultzatu nau gai honetan sakontzera. Izatez, elektromagnetismoak, grabitateak eta Erlatibitate Orokorrak euren artean duten erlazioa guztiz ezezaguna zitzaidan eta lan honek lotura horri buruz ezagutzak lortzen lagundu dit.

Gainera, mikrouhin erradiazio kosmikoaren behaketarako egindako Planck-en misioaren berri izan nuen, gradu bikoitza ikastearen abantailetakoa batez baliatzea ideia ona izan litekeela iruditu zitzaidan: alde batetik, Fisikako Graduan lortutako ezagutzei esker hondoko erradiazioaren atzean dagoen fisika eta matematika lantzea posible izan dut; eta bestetik, Ingeniaritza Elektronikoko Graduan eskuratutako jakintzek Planck-en misioan erabilitako behaketa-teknikak eta radiometroak aztertzei aukera eman dit [5].

Eskerrak eman, hasteko, hilabeteotan ez ezik, azken 5 urte hauetan ere ni aguantatu nauten ama, aita eta nire bixki Garaziri. Zuek gabe ezinezkoa litzateke hau guztia aurrera eraman ahal izatea.

Eskerrak baita ere gainontzeko familiaritekoei (amona, yeye, Patxi, Jesus...) bidea mila aldiz errazagoa egiten laguntzeagatik. Halaber, esan, indarberritzeko ezinbestekoak izan zaizkidala asteburuetakoa deskonexio-momentuak: mila esker Azko, Aitorsu, Uranga, Dani, Larrarte eta, zer esanik ez, baita Intzitarrei ere.

Azkenik, nire irakasle eta zuzendaria izan den Jon Urrestillari ere eskerrak eman nahi nizkioke, proposatutako zuzenketengatik eta CAMB tresnaren berri eman izanagatik.

Gaien Aurkibidea

Motibazioak eta eskerrak	i
1 Sarrera	1
2 Unibertsoaren historia termikoa eta eredu kosmologiko estandarra (ΛCDM)	3
3 CMB-aren behaketak: anisotropien aurkikuntza eta Planck misioa	9
4 Perturbazio teoria kosmologikoa	12
4.1 Metrikaren perturbazioak	12
4.1.1 Koordinatu transformazioak eta gauge aukeraketa	13
4.2 Metrikaren eta energia dentsitatearen perturbazioen eboluzioa	15
4.2.1 Superkurbatura perturbazioak ($k\eta_r < 1$)	16
4.2.2 Azpikurbatura perturbazioak ($k\eta_r > 1$)	17
5 CMB-aren tenperatura anisotropiak: efektu fisiko eragileak	19
5.1 Tenperatura fluktuazioen espektroa: multipoloak	21
5.2 Eskala angeluar handietako anisotropien kalkulua	23
5.3 Eskala angeluar txikietako anisotropien kalkulua	24
5.3.1 Oszilazio akustikoak	26
5.3.2 Silk-en moteltzea	29
5.4 Bestelako prozesuen eragina espektroan: berionizazioa	30
6 CMB-aren tenperatura multipoloen espektrotik irakurritako informazioa	31
6.1 Oszilazio akustikoen kokapenen inguruko azterketa	31
6.2 Parametro kosmologikoekin lotutako irakurketa	33
7 Ondorioak eta gogoetak	36
A Zenbait kalkulu tentsorial	38
A.1 Alderantzizko metrika	38
A.2 Christoffel-en ikurrak	38
A.3 δG_0^0 -ren kalkulua	39
B Funtzio bereziak eta bestelako erlazioak	40
Erreferentziak	

Kapitulua 1

Sarrera

Unibertsoaren jatorriaren eta hedapenaren inguruan teoria mordera proposatua izan da historian zehar, eta gaur egun oraindik ere etengabeko eztabaidan dauden ideia eta proposamen ugari dago kosmologoen artean. Dena den, azken hamarkadetan ikuspuntu zientifikotik zein teknologikotik aurrera eramandako ikerketa eta proiektuei esker, nolabaiteko akordio unibertsal batera heltzea lortu da: Eredua Kosmologiko Estandarra edo Λ CDM eredua [22].

Izatez, hitzarmen horri jarraitzen dio 2009. urtean Europako Agentzia Espazialak (ESA *European Space Agency*-k) jaurti zuen Planck sateliteak [13]. Misio honen helburua, besteak beste, tresneria eta behaketa teknika egokiez baliatuz Big Bang-a jazo eta 380000 urte inguru pasa zireneko Unibertsoaren argazkia lortzea izan da. Garai hartatik gaurdaino aske hedatu diren fotoiek gordetzen dute informazio guztia; hondoko erradiazio kosmiko horren berezitasunak aztertuz, Unibertsoaren hedapenari buruzko ziurgabetasun ugari zehaztu ahal izan dira, gaur egun beha daitekeen egitura ez homogeneora (galaxiak, klusterrak...) eraman gaituzten fenomeno fisikoen inguruko azterketa sakona burutu delarik.

Horrela, detektatutako fotoiek norabide ezberdinetan Unibertsoaren batatzeko tenperaturaren inguruan desbiderapen oso txikiak ($\frac{\delta T}{T} \simeq 10^{-5}$) aurkeztu dituzte. Temperatura fluktuazio hauek fotoien distribuzioaren perturbazio baten moduan itzul daitezke, zeinak jatorria Unibertso goiztiarreko materia inhomogeneitatean duen. Azken honek aurkezten duen grabitate ezegonkortasunak izan duen eboluzioa deskribatzeko, perturbazio teoria kosmologiko lineala garatzea ezinbestekoa izango dugu. Modu horretan, behatu diren temperatura anisotropiek aipatutako perturbazioekin duten lotura argitzea izango da gure helburu nagusia, Planck sateliteak zehaztutako espektroaren portaera nondik datorren ondorioztatu ahal izango dugularik. Are gehiago, temperatura espektro horren profilak parametro kosmologiko ezberdinekiko menpekotasuna du eta gure xedea menpekotasun honek dakartzan ondorioak argitzea izango da.

Lanaren egiturari dagokionez, jarraian datorren 2. kapitulan gainontzeko atalartarako baliagarriak izango zaizkigun Unibertsoaren historia termikoaren zenbait gertaeren deskribapena burutuko dugu. Ondoren, 3. kapitulan, CMB-aren detekzioarako historian zehar egin diren behaketa-misio ezberdinak aurkeztuko ditugu, CMB-aren aurkikuntzatik hasiz eta Planck misioan erabilitako behaketa-teknikaren azalpenarekin bukatuz. Halaber, 4. kapitulan garatuko dugun lehenengo ordenako perturbazio teoria kosmologikoak 5. kapituluko temperatura fluktuazioen kalkuluen nondik norakoak ulertzen ahalbidetuko digu. 6.kapituluan, analitikoki lortutako temperatura espektro hurbildutik irakur daitekeen informazioaren inguruko eztabaida kualitatiboa burutu ez ezik, gure espektro hurbildu horren mugapenak zeintzuk diren ere ikusiko dugu. Bukatzeko, azken kapitulan egindako zenbait gogoetekin emango diogu amaiera lanari.

Datozen ataletan etengabe erabiliko dugun notazioaren inguruan zenbait ohar aipatzea ere lagungarria izango zaigu. Alde batetik, $\hbar = c = k_B = 1$ unitate naturalak erabiliko ditugu: notazioa erraztea

suposatuko digu eta, gainera, lan honen testuinguruan guztiz zentzuzkoa den aukeraketa da.

Bestalde, Einstein-en batuketa-hitzarmenez baliatuko gara adierazpen orotan. Azken honen arabera, indize jakin bat goian eta behean azaltzen bada, bere balio guztietarako batuketa egin behar dela ulertu behar da. Adibidez, v^α espaziodenborako tetra-bektore edo 4-bektore orokor bat izanik:

$$v^\alpha v_\alpha \equiv \sum_\alpha v^\alpha v_\alpha. \quad (1.1)$$

Ildo honetatik, hitzarmenez, indize grekoek ($\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$) 0-tik 3-rako balio osoak hartzen dituzte, eta latinezko indizeek aldiz (i, j, k, \dots) 1-etik 3-rakoak. Deribatuak adierazteko ere Erlatibitate Orokorrean jarraitu ohi den notazioari helduko diogu. Batetik, f eremu eskalar, bektorial zein tentsorial baten espaziodenborako x^μ koordenatuekiko deribatu arrunta ondorengo moduan adieraziko dugu:

$$f_{,\mu} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (1.2)$$

Bestetik, eremu bektorial eta tentsorialetarako (1.2)-ko deribatu arruntaren ezberdina den beste deribatu bat definitzen da: deribatu kobariantea, zeina D_μ , ∇_μ edo $;$ moduan adierazten den [16]. Hauxe dugu v^α 4-bektorearen deribatu kobariantea:

$$v^\alpha_{;\mu} \equiv \partial_\mu v^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha v^\nu, \quad (1.3)$$

non $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ A eranskinean definitutako Christoffel-en ikurrak diren. Era berean, t^α_β tentsorearen kasuan, bere deribatu kobariantea ondorengo moduan idazten da:

$$t^\alpha_{\beta;\mu} \equiv \partial_\mu t^\alpha_\beta + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha t^\sigma_\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\sigma t^\alpha_\sigma. \quad (1.4)$$

Azken ohar gisa, esan, lan osoan zehar erabiliko dugun metrikaren signatura $(+, -, -, -)$ izango dela.

Kapitulua 2

Unibertsoaren historia termikoa eta eredu kosmologiko estandarra (Λ CDM)

Aipatu dugun Λ CDM ereduaren Unibertsoaren jasotako datu oro modu egokienean ulertzeko tresna bezala kontsideratua izan da. Besteak beste, Unibertsoaren ezaugarri ezberdinak zehazten dira bertan: Unibertsoaren propietate goiztiarrak eta beraren eboluzioa, geometria, materia eta energia mota ezberdinak, eta abar. Lan honen benetako muina den Mikrouhin Erradiazio Kosmikoaren (CMB-aren) jatorria eta ezaugarriak hobeto ulertzeko asmoz Λ CDM ereduaz baliatuko gara, eta hau baliagarria izango zaigu Unibertsoaren historia zabalean zehar gertaera ezberdinak kokatzeko. Jakina, guk hori oso modu laburrean egingo dugu, soilik gainontzeko ataletarako beharrezkoa den informazioa landuko dugularik.

Hasteko eta behin, Unibertsoaren mota ezberdinetako osagaiak aztertuko ditugu. Sailkapen mota ezberdinak jarrai ditzakegun arren, hemen egoera ekuazioaren arabera sailkapena izango da jarraituko duguna; hau da, presioaren eta energia dentsitatearen arteko erlazioa izango da osagai motak ezberdintzeko erabiliko dugun irizpidea. Horrela, kontsideratuko dugu Unibertsoa osatzen duten fluido mota ezberdinak barotropikoak direla, hots, euren presioa energia dentsitatearen funtzioa baino ez dela. Presioa p eta energia dentsitatea ε moduan adieraziz, $w = p(\varepsilon)/\varepsilon$ parametro barotropikoaren arabera ondorengo espezieak bereiz ditzakegu:

- Erradiazioa ($w = 1/3$): Unibertsoaren partikula erlatibistek osatutako fluidoa. Bertan sartzen dira fotoiak eta hiru espezieko neutrinoak.
- Materia ($w = 0$): presiorik gabeko osagaien jarioa. Materia hau ez-erlatibista da eta bi mota ezberdin bereiz daitezke: materia barionikoa eta materia ilun hotza (CDM). Barioen taldean sartzen dira nukleoiez gain baita elektroiak¹ ere eta, materia ilun hotzari dagokionez, oraindik argitzeke dago zehazki zer den (beste batzuen artean, oinarriko partikulei dagokien partikula supersimetrikoak CDM izateko hautagaietako batzuen moduan proposatuak izan dira).
- Energia iluna ($w = -1$): presio negatiboa duen konstante kosmologiko baten moduan ezaugarritzen da berarekin (Λ letra grekoaz adierazi ohi dena). Unibertsoaren eboluzioa ulertzeko ezinbestekoa izan zen Λ txertatzea Einstein-en ekuazioetan, erakarpen grabitatorioa baino indartsuagoa den aldarape-naren bitartez Unibertsoaren hedapenaren azelerazioa uler baitaiteke. Konstante kosmologiko hau plazaratu diren aukeretako bat baino ez da: esaterako, energia iluna guztiz konstantea ez deneko aukera ere proposatua izan da (kintesentzia izenez ezagutzen dena [22]).

¹Jakin badakigu elektroiak barioiak ez direla, baina barioiekin batera taldekatu ohi dira testuinguru honetan.

Unibertsoa hedatu ahala, sailkapen hau ere aldatzen joango dela ohartu: temperaturarekin batera, osagai batzuen energia dentsitateak ere txikituz joango dira eta hortaz pausaguneko energia (masa) energia zinetikoaren aldean garrantzia hartzen joango da. Aurrera jarraitu aurretik, esan, atal honetan printzipio kosmologikoa onartuko dugula. Azken honen arabera, eskala handietan Unibertsoa homogenea (hots, itxura berekoa puntu guztietan) eta isotropoa (hau da, itxura berekoa norabide orotan) da. Bestela esanda, kapitulu honetako ekuazioek Unibertsoaren “zero-ordenako” bertsio edo deskribapen bat ematen digute, Unibertso leun batena alegia. Behin Unibertsoaren osagai ezberdinak definituta ditugularik, hedapenaren historiari ekin ahal izateko baliagarria izan zaigu Einstein-en ekuazioak idaztea [11]²:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta}. \quad (2.1)$$

Guk orokorrean jariakin perfektuari dagokion ondorengo energia-momentu tentsorea erabiliko dugu (u^α jariakinaren abiadura 4-bektorea izanik) [3]:

$$T_\beta^\alpha = (\varepsilon + p)u^\alpha u_\beta - p\delta_\beta^\alpha. \quad (2.2)$$

Unibertsoa $a(t)$ eskala faktoreaz hedatzen doala (hots, eskala faktorea Unibertsoa denboran zehar Unibertsoko distantzia fisikoak zenbat handitzen diren adierazten duen denboraren menpeko funtzioa genuke) eta behaketek aurreikusten duten geometria espazial laua aintzat hartuta, FRLW³ metrika deritzoguna erabiliko dugu:

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \quad \longleftrightarrow \quad g_{\alpha\beta} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Metrika hau definitzeko erabili ditugun denbora eta espazio aldagaiak lan honetan egingo dugun azterketarako aproposenak dira. Denbora aldagaiari dagokionez, denbora konformala deritzoguna erabili dugu (η) zeina ondorengo moduan erlazionatzen den denbora fisiko edo kosmologikoarekin: $dt = a d\eta$. Espazioko aldagaiei dagokionez, koordenatu kohigikorrek erabili ditugu; \mathbf{q} benetako koordenatu fisikoak eta \mathbf{x} koordenatu higikorrek badira, $\mathbf{q} = a\mathbf{x}$ da bien arteko erlazioa. Hau da, koordenatu kohigikorrek erabiltzean Unibertsoko espazioko objektu ororen \mathbf{x} koordenatu espazialak finko mantentzen dira (hortik izena, Unibertsoarekin batera hedatuz doan sistemaren koordenatuen modura uler baitaitezke). Lan osoan erabiliko ditugun espaziodenborako koordenatuak (η, \mathbf{x}) izango dira.

Unibertsoaren historia termikoa ulergarriagoa egiteko asmoz, komenigarria izango zaigu Einstein-en ekuazioen soluzioak eta energia-momentu tentsorearen kontserbazio legetik ondorioztatzen diren energia dentsitateen denboran zeharreko eboluzioa aztertzea. Horrela, T_β^α -ren $\beta = 0$ osagaiaren kontserbazio legeak ondorengo itxura hartzen du ($'$ ikurraz adieraziko dugu denbora konformalarekiko deribatua):

$$T_{0;\alpha}^\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon' + 3\frac{a'}{a}(\varepsilon + p) = 0. \quad (2.4)$$

Azken batean, masaren kontserbazioaren legea baino ez dugu berau (jarraitutasun ekuazioa). Bertan ageri den $\frac{a'}{a}$ hedapen erritmoa \mathcal{H} Hubble-n parametroa dugu. Ikus daiteke $\varepsilon \propto a^{-3(1+w)}$ erako soluzioak (2.4) ekuazioa betetzen duela [3]; horrela, energia dentsitatearen eboluzioak eskala faktorearekiko menpekotasun zuzena izango du, euren arteko erlazioa indize bariotropikoaren arabera izanik. Hau jakinda, Einstein-en ekuazioek eskala faktorearen denborarekiko menpekotasuna emango digute ($a(\eta)$). (2.1) taulan laburbilduko ditugu emaitzak [6].

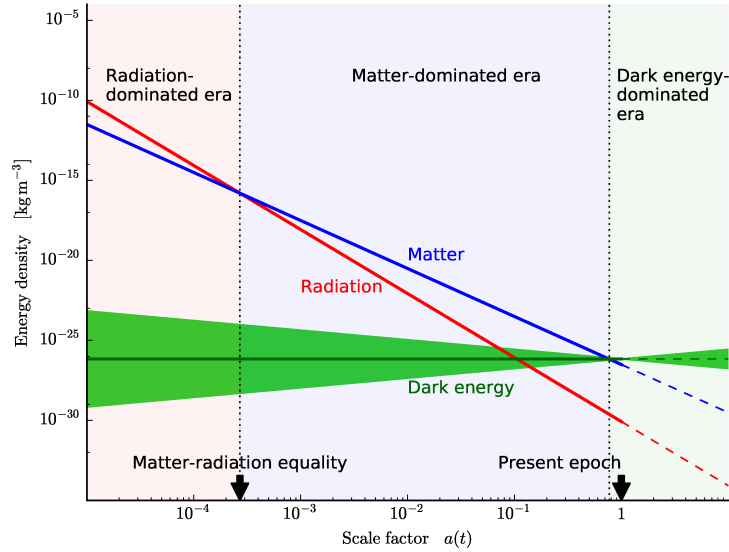
² $R_{\alpha\beta}$ eta R Ricci-ren tentsorea eta eskalarra dira hurrenez hurren (ikus bedi A eranskina); G Newton-en grabitazio konstantea; $T_{\alpha\beta}$ energia-momentu tentsorea; azkenik, $g_{\alpha\beta}$ metrika tentsorea dugu, zeinak bi gertaeran arteko espaziodenborako distantzia adierazten duen ds^2 lerro elementua definitzea ahalbidetzen digun.

³Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Osagaia	w	ε	$a(\eta)$	\mathcal{H}
Erradiazioa	$\frac{1}{3}$	$\propto a^{-4}$	$\propto \eta$	$\propto a^{-1}$
Materia	0	$\propto a^{-3}$	$\propto \eta^2$	$\propto a^{-\frac{1}{2}}$
Λ	-1	ktea	$\propto \frac{1}{ \eta }$	ktea

Taula 2.1: Unibertsoko osagai ezberdinen energia dentsitatearen eta eskala faktorearen denboran zeharreko eboluzioa.

Taula horretan oinarrituz Unibertsoaren historian hiru aro ezberdin bereiz ditzakegu, zeinetan fluido kosmikoa nagusiki osagai jakin batez edo batzuez osatuta dagoen: erradiazio aroa, materia aroa eta energia-ilun aroa (ikus bedi (2.1) irudia). Argi dago garai oso goiztiarretan Unibertsoa erradiazioz menderatutako eta dentsitate handiko plasma beroaz osatuta zegoela. Baina, Unibertsoa hedatu ahala, fotoien energia eta temperatura txikitzen joango dira. Eskala faktorearen balioa ere handituz doa eta horrekin batera materia gisa kontsideratu ditugun osagaien ($w = 0$) energia dentsitateak garrantzia hartzen du, batez ere eV-eko magnitude ordenako tenperaturetara heltzean. Izatez, 0.75 eV-eko tenperatura inguruan, ordura arte nagusi zen erradiazioaren energia dentsitatea materiarenaren berdin-antzekoa bilakatzen da ($\varepsilon_m \propto a^{-3} \simeq \varepsilon_\gamma \propto a^{-4}$). Hortik aurrera materiaz menderatutako Unibertsoaren aroan sartzen gara [29].



Irudia 2.1: Unibertsoko osagai ezberdinen energia dentsitatearen eboluzioa denboran zehar [14]. Bertan ikus daitekeen eskualde berdeak parametro barotropikoaren balio ezberdinen arabera energia ilunak izango lukeen eboluzioa adierazten du: erdiko lerro horizontala $w = -1$ aukerari dagokio (konstantea), eta gainontzeko zonaldea $w \in [-1.2, -0.8]$ balio tarteari dagokio. Hortaz, argi dago w -ren aldaketa txiki batek energia ilunaren dentsitatearen eboluzioa asko alda dezakeela.

Ildo horretatik, aro honetan jazotzen dira aztertuko dugun CMB-aren jatorri edo eragile zuzenak diren gertaera garrantzitsuenak. eV-eko eskala honen barruan, hasiera batean bai elektroi askeen eta protonen arteko Rutherford sakabanaketaren tasa, eta baita elektroi askeen eta fotoien arteko Thomson-en

sakabanaketari dagokion tasa Unibertsoaren \mathcal{H} hedapen ratioa baino handiagoak dira [17]; hori dela eta,

$$e^- + p \longleftrightarrow H + \gamma \quad (2.5)$$

erreakzioaren bitartez sortutako hidrogeno atomo oro azkar deuseztatzen da eta fotoien batzuek beste ibilbide askea laburra da, ionizatutako plasma bat osatzen dutelarik. Haatik, tenperatura jaitsi ahala fotoiek energia galtzen dute eta horrekin batera baita atomoak ionizatzeko ahalmena ere; ondorioz, gero eta H neutro kantitate handiagoa ageriko da, (2.5) erreakzioan eskuinerantzko noranzkoa indartzen delarik. Horrela, protoi askeen dentsitatea barioien dentsitate totalaren %10 inguru deneko deneko garaiari birkonbanaketa deritzogu [22] (0.33 eV-eko tenperatura dagokiona): elektroiak eta protoiak bat egiten dute ionizatuko ez den hidrogeno neutroa sortzeko, fotoi gehigarri bat askatuz.

Jakina, birkonbinaketa prozesua ez da bat-batekoa; hau da, tenperaturak beherantz egin ahala orduan eta fotoi gehiagok izango dute aske hedatzeko aukera eta, 0.26 eV-eko tenperaturaren bueltan, kontsidera daiteke jadanik fotoiek ez dutela inolako sakabanaketarik jasango. Nolabaiteko Unibertso gardena sortzen da beraz: fotoien desakoplamendua deritzogu garai honi eta aske geratutako fotoi hauexek dira, hain zuzen, gaur egun behatutako Mikrouhin Erradiazio Kosmikoa osatzen dutenak. Fotoien desakoplamendu honetan, Unibertsoak 380000 urte inguru ditu eta, hortaz, argi dago egun behatutako erradiazio hori oso urrutitik datorrela: azken sakabanatze gainazala (ingelesez *last scattering surface*, LSS) deritzogu fotoi hauen iturri gisa kontsidera dezakegun gainazal esferiko erraldoiari. Guri gure galaxian zentratutako LSS-a dagokigu, baina Unibertsoa edozein puntutan kokatutako behatzaile batek beste LSS baliokide bat izango luke definituta.

Jakina, hedatuz doan Unibertso batean, distantzia fisiko oro luzatuz doa denborarekin eta, hortaz, berdina gertatuko da LSS-tik datozkigun fotoien uhin luzerekin ere. Horrela, η aldiunean igorritako λ uhin luzerako fotoi bat, gaur egun (η_0), ondorengo λ_0 uhin luzerakoa izango da, bada: $\lambda_0 = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta)} \lambda$. Ohartu, beraz, $a(\eta_0) > a(\eta)$ denez urruneko igorle batetik datorkigun argiak gorrirantzko lerrakuntza jasango duela: espektroak uhin luzera handiagoetarantzko (energia baxuagoetarantzko) desplazamendua izango du. Hala, $z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$ lerrakuntza bezala definitzen da [22] eta ondorengo moduan geratzen da gorrirantzko lerrakuntzaren legea:

$$1 + z(\eta) = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta)} = \frac{1}{a(\eta)}. \quad (2.6)$$

Ohartu gaur egungo eskala faktorearen balioa $a(\eta_0) = 1$ moduan definitu ohi dela. Hortaz, hemendik aurrera aipatutako eskala faktorearen balio guztiak $a(\eta_0)$ -rekiko dituzten balio erlatiboak izango dira. Aitzitik, egun detektatutako fotoi guztiak ez datoz LSS gainazaletik zuzenean. Kopuru hori kuantifikatzen duen parametroari sakonera optikoa (τ) deritzogu [33]:

$$\tau(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} \sigma_T a(\eta) n_e(\eta) d\eta, \quad (2.7)$$

non $\sigma_T \simeq 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ Thomson-en sakabanaketaren sekzio eragilea eta n_e elektroien dentsitatea diren. Hala, elektroien bat azken sakabanaketatik gaurdaino aske bidaiatu izanaren probabilitatea $e^{-\tau}$ moduan definitzen da. Fotoien desakoplamendutik aurrerako historia termikoa lan honen haritik ateratzen den arren, ideia nagusienak era laburrean eskematiza ditzakegu gaur egungo egoerarako.

Eskala faktorea handitzen doanez, erradiazioari eta materiari dagozkien energia dentsitateak nagusitasuna galtzen doaz. Esan berri dugu birkonbinaketaren ondoren Unibertsoa neutralizatu egin dela, baina egun galaxien artean gas ionizatua beha daiteke. Honen azalpena berionizazioa deritzogun fenomenoak du. Ez dago argi berau noiz hasi ezta zein abiaduratan eman zen ere, baina jakin badakigu 2.6 meV-eko tenperaturari amaitu zela [6]; horrela, birsakabanatutako fotoiak bigarren LSS gehigarri batetik datozkigula uler daiteke eta honek eraginik izango du egun behatutako CMB-aren tenperatura anisotropietan.

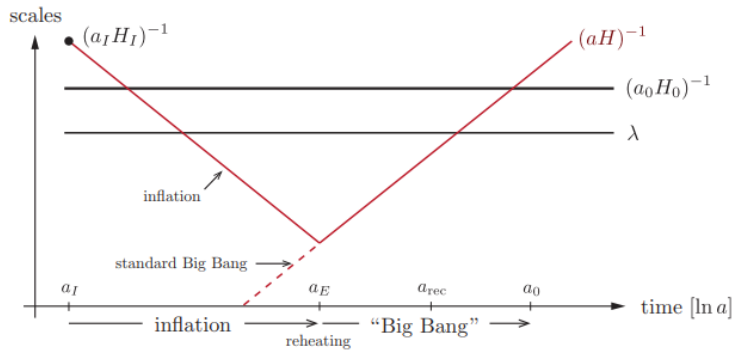
Tenperatura ordena honetan (meV-ekoan alegia), energia ilun gisa definitu dugun konstante kosmologikoari dagokion energia dentsitatea garrantzia hartzen doa hedapenak aurrera egin ahala, eta 0.33 meV-eko tenperaturatik aurrera ($a = 0.44$), Unibertsoa energia ilun honetaz menderatuta geratu da (ikus, berriro ere, (2.1) irudia) [29]. Nolanahi ere, Λ CDM ereduaren arabera gaur egun ($T = 0.24$ meV) halako Unibertsoa izaten jarraitzen dugu, zeinetan energia iluna energia osoaren \simeq %70-a, materia iluna \simeq %25-a eta materia arrunta (barioiak, neutrinoak, izarrak...) \simeq %5-a diren [3].

Badirudi orain arte azaldutakoarekin argituta geratzen direla Unibertsoaren hedapen-historiaren zati handi baten nondik norakoak. Baina, izatez, Λ CDM ereduak baditu bere mugapenak. Adibidez, jakin badakigu hondoko erradiazio kosmikoko fotoien banaketa hein handi batean uniformea den tenperatura bati dagokion espektruaren adierazlea dela (gogoratu datozen ataletan azalduko ditugun tenperatura fluktuazioak oso txikiak direla, $10^{-5} - 10^{-6}$ ordenakoak). Baina nola da posible iraganean kontaktu kausalik izan ez duten LSS-ko bi puntu ezberdinetatik iristen zaizkigun fotoiek energia berdina izatea?⁴

Arazo honi (eta beste hainbati) erantzuna emateko asmoz, 1981. urtean Alan Guth fisikari estatubatuarrek inflazioa proposatu zuen. Honen arabera, Unibertsoa sortu eta 10^{-34} s ingurura, Unibertsoak hedapen azeleratuko aro finitu bat izan zuen. Denbora tarte honetan, Unibertsoaren eskala faktorea gutxienez 10^{27} faktoreaz handitu zen eta, ondorioz, baita izugarri hoztu ere. Inflazio ideia honek horizonteen arazoari aurre nola egiten dion ulertzeko, bi distantzia definituko ditugu [6]:

- Partikula horizontea (χ_p): $\eta - \eta_i$ moduan definitzen da. Argiak η_i aldiune batetik η beste aldiune batera bidaiatu ahal izan duen gehieneko distantzia kohigikorraren adierazlea da. Distantzia honek kausalitatearen muga zehazten du: bi partikula iraganean komunikatuta egon ahal izan dira, euren arteko distantzia kohigikorra χ_p baino txikiagoa bada.
- Hubble-n erradioa⁵ (\mathcal{H}^{-1}): distantzia kohigikor honen balioa aldiuneko kausalitatearen adierazlea da. Bi partikulen arteko distantzia \mathcal{H}^{-1} -k aldiune jakin batean duen balioa baino handiagoa bada, bi partikula horiek ezin izango dute elkar komunikatu *aldiune horretan*.

Inflazioa, beraz, $\chi_p \gg \mathcal{H}^{-1}$ lortzea ahalbidetzen duen mekanismoa bezala uler daiteke: partikulek ez zuten elkar komunikatzen azken sakabanaketa garaian, baina lehenagoko aldiune batean kontaktu kausallean egon dira, hain zuzen (ikus (2.2) irudia). Modu honetan horizonteen arazoa ebatzita geratzen da.



Irudia 2.2: Eskala kosmologiko ezberdinen eboluzioa denboran zehar [6]. λ hizkiak gure analisisian bi partikulen arteko distantzia kohigikorra adierazten du eta $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{\dot{H}}{a}$ denbora kosmologikoari dagokion Hubble-n parametroa dugu.

⁴Horizonteen problema deitzen zaio arazo honi.

⁵Beste izen batzuk ere erabili ohi dira: Hubble-n eskala, kurbatura eskala, horizontea...

Bestalde, Einstein-en (2.1) ekuazioetako $\alpha = \beta = 1$ osagaia aztertuz, inflazioan gertatzen den bezala Unibertsoaren hedapena azeleratua izateko ($a'' > 0$) zein baldintza bete behar den ikus daiteke. Ezinbestekoak ditugu, horretarako, A eranskinean burututako kalkulu baliokideen bitartez lortzen diren ondorengo adierazpenak [6]:

$$G_0^0 = 3 \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2, \quad G_j^i = \left(2 \frac{a''}{a^3} + \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 \right) \delta_j^i. \quad (2.8)$$

Azken erlazio hauek erabiliz, azelerazioaren ekuazioa bezala ezagutzen dena [22] lortzen dugu:

$$G_1^1 = 8\pi G T_1^1 \iff \frac{a''}{a^3} = -\frac{4\pi G}{3} (3p + \varepsilon). \quad (2.9)$$

Hortaz, inflazio garaian, Unibertsoa $p < -\varepsilon/3$ presio negatiboko beste konstante kosmologiko batez menderatuta egon behar da (konstante hau inflatoi bezala ezagutzen da [3]; ez da arestian aipatutako Λ konstatearen berdina). Inflazioaren amaieran, berriz, Unibertsoa berotu egiten da (*reheating*) eta erradiazioz eta oinarritzko partikulez betetzen da. Une hau kontsideratu ohi da hain entzuna dugun Big Bang-aren hasiera bezala.

Azkenik, ondorengo atalei begira, lagungarri gerta dakiguke kapitulu honetan deskribatutako Unibertsoaren historia termiko laburraren eskema bat adieraztea. Azpiko (2.2) taulan bildu ditugu lan honetan zehar etengabe aipatuko ditugun gertaera nagusiak.

Gertaera	Adina	Lerrakuntza	Temperatura
Inflazioa	10^{-34} s	–	–
...
Materia-Erradiazio berdinketa	60000 urte	3400	0.75 eV
Birkonbinaketa	260000 urte	1200	0.33 eV
Fotoien desakoplamendua	380000 urte	1100	0.26 eV
Berionizazio bukaera	$400 \cdot 10^6$ urte	5	2.6 meV
Energia ilun-Materia berdinketa	$9 \cdot 10^9$ urte	1.3	0.33 meV
Gaur egun	$13.8 \cdot 10^9$ urte	0	0.24 meV

Taula 2.2: Kapitulu zehar deskribatutako historia termikoan zeharreko gertaera garrantzitsuenak.

Kapitulua 3

CMB-aren behaketak: anisotropien aurkikuntza eta Planck misioa

Aurreko kapituluko Unibertsoaren deskribapena berau homogenea eta isotropoa deneko hipotesia aintzat hartuta burutu dugu. Unibertso primitiboko eskala handietan onarpen hori baliagarria izan daitekeen arren, Unibertsoa guztiz homogenea eta isotropoa izango balitz materia ezin elkartu ahal izango litzateke galaxiak sortzeko, galaxia klusterrak ez lirateke existituko, eta abar.

1965. urtean, A. Penzias eta R. Wilson ikerlariek (1978. urteko Fisikako Nobel saria jaso zutenak euren aurkikuntzagatik), irrati interferentzien jatorriaren bila lanean zeudelarik, espero ez zuten 4GHz inguruko maiztasuneko eta 3K inguruko tenperaturako seinale “isotropiko eta polarizatu gabeko” bat detektatu zuten [31]. Horrela, urte horretan bertan Dicke zientzialariak artikulu bat argitaratu zuen, zeinetan Penzias-ek eta Wilson-ek detektatutako zeruko seinale isotropiko hori Big Bang bero batetik zetorrela proposatzen baitzuen [10]. Ez zegoen oker, izan ere, Mikrouhin Erradizio Kosmikoko (CMB-ko) fotoiak ziren behatuak izan zirenak. Baina, esan bezala, galdera ireki ugari zegoen erradiazio honen inguruan: zein punturarte da isotropikoa seinalea? Seinale honi dagokion espektroa gorputz beltz batek igorritako erradiazioaren espektroaren guztiz baliokidea al da?

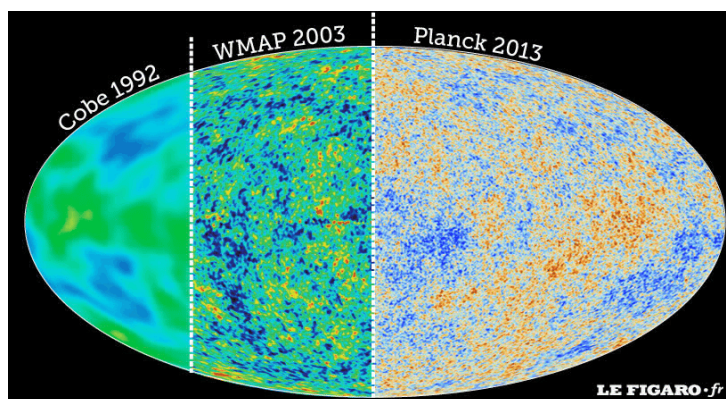
CMB-aren aurkikuntzaren ondoren, garaiko kosmologoen pentsatzen zuten Unibertsoan ikus daitezkeen galaxiak, klusterrak eta bestelako superklusterrak Unibertso goiztiar edo primitiboan emandako fluktuazioen ondorio zuzenak zirela. Ez hori bakarrik, fluktuazio berauek CMB-aren tenperaturan norabide ezberdinetatik etorritako tenperatura aldaketa txikien eragile behar zuten izan. Era ezberdinetako esperimentu ugari martxan jarri ziren aipatutako bariazio txiki horien aurkikuntzarako, baina 1992. urterarte ez zen emaitzarik lortu: urte horretan, NASA-k COBE (*Cosmic Background Explorer*) izeneko satelitea jaurti zuen [9], zeinak CMB-aren anisotropia primarioak detektatu zituen. Sekulako oihartzuna izan zuen misio honek hedabideetan eta Stephen Hawking-ek “mendeko aurkikuntza zientifikorik handiena” izan zela baieztatu zuen [13]. Izan ere, CMB-aren anisotropiek Unibertso goiztiarra aztertzeko modu guztiz berritzailea suposatu zuten: fluktuazio kuantikoak Big Bang-a jazo eta $\simeq 10^{-34}$ segundora gertatu zirenez, berauen ondorio zuzenak diren anisotropiek Unibertso goiztiarraren eta bere hedapenaren deskribapenaren parte diren zenbait parametro estimatzen ahalbidetuko digute: besteak beste, geometria, adina eta konposizioa.

COBE-ren ondoren, 2001. urtean jaurti zen WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) [7] izan zen NASA-ren esparru honetako esperimentu garrantzitsuenak: besteak beste, Unibertsoaren geometria espaziala laua izatetik oso gertu dagoela ondorioztatu zen. Are gehiago, Unibertsoa nagusiki materia eta energia ilunez osatuta edo menderatuta dagoela ere frogatu ahal izan zen, eta baita gaur egungo Unibertsoa egiturak eskala-aldaezinak (hau da, eskala tarte zabal baterako anplitude konstantekoak) ziren sorburu-fluktuazioetatik jaio direla ere [13].

Hala ere, temperatura anisotropiez gain, CMB-aren beste propietate interesgarri bat ere egon badago, berori neurtzeko aurrerapausu haundiak eman direlarik azken urteotan: polarizazioa. Ildo horretatik, WMAP-ek polarizazio mapak argitaratu zituen arren, oraindik tresneriaren aldetik teknika berriak diseinatzen itzeleko beharra zegoen, batetik, sentsibilitatea handitzeko eta, bestetik, bereizmen angeluarra hobetzeko [10]. Aipatu beharra dago temperatura fluktuazioak nabarmen txikiak izateak (μK magnitude ordenakoak) sekulako erronka suposatzen zuela radioastronomoentzako. Horrela, COBE eta WMAP misioen ondoren, lan honen oinarria den Planck misioa izan da CMB-aren behaketarako burututako esperimenduetatik bereizmenik hoberena eta emaitzarik garbienak lortu dituen (bai temperatura anisotropiekin lotutakoak eta baita polarizazioarekin erlazionatutakoak ere).

Planck satelitea ESA-k jaurti zuen 2009. urteko maiatzaren 14an. Satelite honek, polarizazio mapa zehatzez gain, CMB-aren temperatura anisotropiak $\frac{\Delta T}{T} \simeq 2 \cdot 10^{-6}$ sentsibilitatearekin eta $5'$ inguruko bereizmen angeluarrarekin behatzea lortu du (ikus bedi (3.1) irudia). Horretarako, bi instrumentu nagusiz baliatu zen satelitea [8]: maiztasun altuko instrumentua (HFI, *High Frequency Instrument*) eta maiztasun baxuko instrumentua (LFI, *Low Frequency Instrument*). HFI-ari dagokionez, berau 100 GHz eta 857 GHz balioen arteko maiztasun tartean arduratu zen: kriogenikoki (zehazki, 0.1 K-eko temperaturara) hoztutako 52 bolometro erabili zituen, zeinak materialen erresistentziaren temperaturarekiko menpekotasunaz baliatzen diren neurgailuak diren.

Bestalde, LFI instrumentuari dagokionez, berau 30 GHz eta 70 GHz arteko maiztasunen arduraduna dugu. Horrela, behe maiztasuneko instrumentu honek hiru kanal (33, 44 eta 70 GHz-etan zentratutakoak) ezberdinetatik jasotzen du hondoko erradiazioaren seinalea, radiometro diferentzial gisa ezagutzen diren irrati maiztasuneko hartzaile batzuen bitartez (sasi-korrelazio radiometro ere deitu ohi zaie).

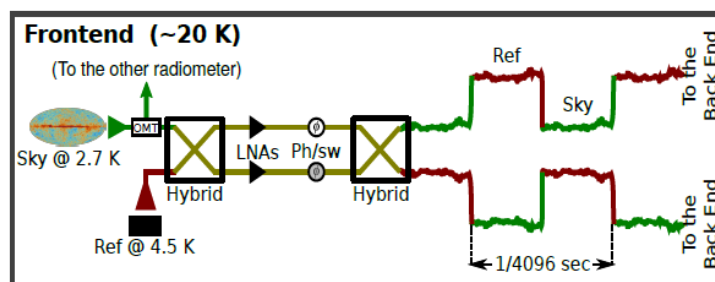


Irudia 3.1: COBE-k, WMAP-ek eta Planck sateliteak behatutako temperatura anisotropiak [34]. Bertan argi ikus daiteke batz besteko $\simeq 2.726$ K temperaturaren [18] inguruko bariazioen behaketak zehaztasun gero eta handiagoaz behatu ahal izan direla.

Interesgarria izan daiteke radiometro hauek zein teknika erabiltzen duten gainetik azaltzea. Bi adarrez osatutako sistema hartzaileak dira eta bi azpiunitate nagusitan banatuta daude: alde batetik, 20K-etara hoztutako *front end* delako hasierako modulua dute eta, bestetik, azken honi uhin gidien bitartez konektatuta dagoen *back end* bat dute, 300K-etako temperaturan lan egiten duena.

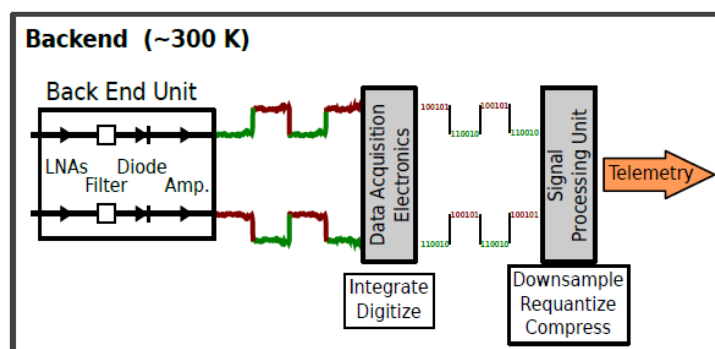
Radiometroen adar batean zeruko seinalea jasotzen den bitartean, bigarren adarraren sarrerako seinalea 4K inguruko erreferentziakoa karga ezagun bati dagokiona da. Zeruko erradiazioa oso ahula eta zaratatsua denez, tresneriak berak txertatutako zarata gehigarriak guri interesatzen zaigun CMB-aren seinalea ez-kutarratzen du; arazo honi aurre egiteko Planck-eko radiometroek erabilitako estrategia aproposa da oso.

20 K-etako hasierako moduluan, lehenik eta behin, zeruko eta erreferentziako kargako seinaleak akoplatu egiten dira. Ondoren, zarata baxuko anplifikadoreetatik pasatzen da seinale akoplatua, anplifikadoreen zaratak zeruko zein erreferentziako kargako voltaiak modu guztiz berdinean kaltetzen dituelarik. Anplifikadoreetako irteerak desfasadore batzuetatik pasatzen dira, zeinak 4.096 kHz-ko maiztasunaz bi desfase ezberdin sartzen dituen: periodo erdi batean 0-ko desfasea sartzen du eta bestean, aldiz, π -koa. Horrela, hasierako modulu honen azken etapan bi adarretako seinaleak desakoplatzen dira, irteerak (desfasatzailaren egoeraren arabera) zeruko seinalearen eta erreferentziakoaren proportzionalak izango direlarik (ikus (3.2) irudia).



Irudia 3.2: Planck-en LFI-ko radiometroen hasierako moduluko bloke diagrama eta seinaleen eredua [1].

Bestalde, *front-end* delakoaren irteerako seinaleak *back-end* modulura garraiatzen dira uhin giden bitartez eta, bertan, maiztasun iragazketa bat burutuko da, radiometro bakoitzari dagokion tarte espektralarekin soilik geratuko garelarik. Azkenik, seinale hau detektore baten bidez detektatzen da eta integratzaile baten bitartez seinaleak leuntzen dira (ikus bedi (3.3) irudia). Prozesaketa honen ondorioz, radiometroaren irteeran T_{sky} -ren eta T_{ref} -ren proportzionalak diren voltaiak jasoko dira: ezaguna den T_{ref} -ri dagokion irteeratik radiometroak txertatu duen zarata zein den ezagutu ahal izango dugu eta, beraz, T_{sky} -ren seinale garbia lortzea posible izango dugu beste adarretik (T_{ref} eta T_{sky} berdin kaltetu baitira)¹.



Irudia 3.3: Planck-en LFI-ko radiometroen 300K-etako irteerako modulua. Irudian, halaber, radiometroaren ondoren datozen digitalizazio eta prozesaketa unitateak ikus daitezke [1].

Planck-en satelitean txertatutako HFI eta LFI instrumentu hauen bitartez tarte espektral zabala behatu ahal izateaz gain, puntako tresneria elektronikoa eta behatze-teknika guztiz ezberdinak implementatzea posible izan da, Planck-en misioaren arrakastaren arrazoi nagusienetako bat suposatuta dutelarik.

¹Azterketa sakonago baterako, ikus egilearen Ingeniaritza Elektronikoko Gradu Amaierako Lana [5].

Kapitulua 4

Perturbazio teoria kosmologikoa

Arestiko ataletan azaldutakoari jarraiki, argi dago fotoiak direla Unibertsoaren garai goiztiarretako ezau-garriei eta berauen denboran zeharreko eboluzioari buruzko ezagutza lortzeko gehien erabilia izan den iturria. Era horretan, materia banaketaren homogeneitate faltak eta beronek eragindako grabitate eze-gonkortasuna ulertzeko ezinbestekoa dugu Erlatibitate Orokorrari jarraitzen dion perturbazio teoria era-biltzea. Atal honetan, hortaz, Unibertso materiaren banaketaren inhomogeneitateak eta berauek indu-zitutako metrika perturbazioak deskribatuko ditugu, lehenengo ordenako perturbazio teoria kosmologikoa erabiliz. Metrikak pairatutako fluktuazioak denbora eremuan zehazteko gai izango gara, eta Einstein-en ekuazioetaz baliatuz, fotoiei dagokien energia dentsitatearen denboran zeharreko eboluzioa lortzea izango dugu helburu.

4.1 Metrikaren perturbazioak

Hurbilketa linealean, 2. kapitulan aurkeztutako FLRW metrika bi osagaien batura gisa idatz dezakegu Unibertso perturbatu baterako:

$$g_{\alpha\beta} = {}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}. \quad (4.1)$$

Lehenengo osagaia Unibertso homogeneroari dagokion metrika ez-perturbatua den bitartean ((2.3) ekuazioa), bigarren batugaiak metrikaren perturbazioa bera adierazten du. Berau perturbazio gisa tratatu ahal izateko, onartuko dugu $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$ desberdintza betetzen dela. Horrela, simetria propietateak direla eta, metrikaren perturbazioa independenteak diren osagai laburtezinetan deskonposa daiteke (beroni SVT deskonposizioa deitu ohi zaio) [27, 12]:

$$\delta g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 2a^2\phi & \alpha = \beta = 0 \\ 2a^2(B_{,i} + S_i) & \alpha = 0 \quad \beta = i \\ a^2(2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}) & \alpha = i \quad \beta = j \end{cases} \quad (4.2)$$

non ϕ , B , ψ eta E funtzio eskalarrak, S_i eta F_i dibergentzia nuluko bektore perturbazioak eta h_{ij} aztarna nuluko eta $h_{j,i}^i = 0$ betetzen duen tentsore simetrikoa diren.

Jakina, espero moduan, guztira hamar osagai independente ditugu deskonposaketa honetan (lau funtzio eskalar, dibergentzia nuluko baldintza bana duten bi bektore espazial eta lau baldintza betetzen dituen 6 osagai independentedun tentsorea), jatorrizko $\delta g_{\alpha\beta}$ delakoaren osagai independenteen kopuru berbera dena. Lan honi dagokionez, soilik perturbazio eskalarrak izango dira kontsideratuko ditugunak; izan ere, perturbazio bektorialak azkar desagertzen baitira eta uhin grabitazionalen teoria garatzeko lan

honetan jarraitutako estrategia baliokidea jarraitu beharko baikenuke, baina metrikaren perturbazio tenorialak kontsideratuz, hain zuzen. Esanak esan, definitu berri ditugun perturbazio eskalarrak energia dentsitateen fluktuazioen ondorio zuzena dira eta hondoko erradiazio kosmikoaren anisotropien kalkulurako ezinbestekoak izango ditugu (izatez, perturbazio eskalarrak dira CMB-an ageri diren fluktuazioen artean handienak).

4.1.1 Koordenatu transformazioak eta gauge aukeraketa

Kontsidera dezagun espaziodenborako ondorengo koordenatu transformazioa:

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \chi^\alpha, \quad (4.3)$$

non $\chi^\alpha = \chi^\alpha(\eta, x^i)$ translazio infinitesimala den. Guk transformazio honen aurrean gure FLRW metrika perturbatua nola aldatzen den ezagutu nahi dugu; hori lortzeko, translazio elementua ondorengo moduan berridaztea lagungarri gerta dakiguke [27]:

$$\chi^\alpha = (\chi^0, \chi^i) \quad \text{non} \quad \chi^i = \chi_\perp^i + \zeta^i. \quad (4.4)$$

(4.4) ekuazioan definitu dugun χ_\perp^i delakoa dibergentziarik gabeko bektore espaziala da eta ζ delakoa, berriz, funtzio eskalarra. Hala, gogoratu soilik (4.2)-ko perturbazio eskalarrak kontsideratu ditugula eta, ondorioz, jatorrizko koordenatuetan ondorengo izango da gure Unibertso inhomogeneoko metrikari dagokion lerro elementua:

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2B_{,i}dx^i d\eta - ((1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij})dx^i dx^j]. \quad (4.5)$$

Bestalde, jakin badakigu ds^2 elementua eskalarra dela eta, beraz, koordenatu sistema batetik bestera pasatzean bere balioak bere horretan dirauela. Propietate honetaz baliatuz gero, \tilde{x}^α koordenatu aukeraketa berrian perturbazioek duten itxura zehaztea posible izango dugu. Hasteko, esan dugun moduan:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda)dx^\mu dx^\nu = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\lambda)d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta. \quad (4.6)$$

Jakin badakigu (4.3)-tik \tilde{x}^α koordenatu berriak jatorrizkoen menpekoak direla eta, ondorioz, katearen erregela erabiliz zera idatz dezakegu: $d\tilde{x}^\alpha = \left(\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right) dx^\mu$ eta $d\tilde{x}^\beta = \left(\frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}\right) dx^\nu$. Hau (4.6) berdintzan ordezkaturik, metrikaren transformazio legea lortzen dugu:

$$g_{\mu\nu}(x^\lambda) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\lambda). \quad (4.7)$$

Azken transformazio lege honek zazpi ekuazio independente ez nulu ditu atzean¹, eta horietako bakoitzak bi koordenatu sistemetako metriken perturbazioak erlazionatzen ditu. Adibide bat garatzearren, har dezagun $\mu = \nu = 0$ kasuko ekuazioa, bada:

$$g_{00}(x^\lambda) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial \eta} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\lambda). \quad (4.8)$$

Arestian aipatu dugun moduan, perturbazioak txikiak dira Unibertso homogeen eta isotropoko metrikako elementuekin alderatuta. Hori dela eta, lehenengo ordenako perturbazio teoriak baliatuko gara, bigarren ordenako eta ordena altuagoko perturbazio osagaiak arbuaiatuz. Denbora-denbora osagai dagoen (4.8) ekuazioan, $\alpha \neq 0$ eta $\beta \neq 0$ batugaietan ekarpen perturbatibo ezberdinen arteko biderkadurak agertzen zaizkigu eta, ondorioz, soilik $\alpha = \beta = 0$ batugaiarekin geratuko gara:

$$g_{00}(x^\lambda) = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} \tilde{g}_{00}(\tilde{x}^\lambda). \quad (4.9)$$

¹Izatez, μ eta ν indizeen hamar konbinazio independente ditugu, baina horietako hirutan (zati espazialean diagonaletik kanpo geratzen direnetan, zehazki) perturbazioen biderkadurak agertzen zaizkigu eta 1. ordenatik haratagoko osagai horiek arbuaiatu egingo ditugu.

Hau jakinda, FLRW metrika perturbatu gabearen eta bere (4.5) bertsio perturbatuaren adierazpenak erabiliko ditugu azken ekuazioa garatzeko:

$$\begin{aligned}
g_{00}(x^\lambda) &= \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} \tilde{g}_{00}(\tilde{x}^\lambda), \\
a(\eta)^2(1+2\phi) &= (1+\chi^{0'})^2 a(\tilde{\eta})^2(1+2\tilde{\phi}), \\
a(\eta)^2(1+2\phi) &\simeq (1+2\chi^{0'})(a(\eta) + a(\eta)'\chi^0)^2(1+2\tilde{\phi}), \\
a(\eta)^2(1+2\phi) &\simeq (1+2\chi^{0'})(a(\eta)^2 + 2a(\eta)a(\eta)'\chi^0)(1+2\tilde{\phi}), \\
a^2(1+2\phi) &\simeq a^2 + 2aa'\chi^0 + 2a^2\chi^{0'} + 2a^2\tilde{\phi}, \\
\tilde{\phi} &= \phi - \frac{a'}{a}\chi^0 - \chi^{0'} \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}a\chi^{0'}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Falta diren gainontzeko μ eta ν indizeen konbinazioei dagozkien ekuazioekin gauza bera eginez, froga daiteke metrikaren perturbazio eskalarrek ondorengo itxura dutela (4.3)-ko koordenatu sistema berrian, bada [27]:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= \phi - \frac{1}{a}(a\chi^0)', & \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a}\chi^0, \\
\tilde{B} &= B + \zeta' - \chi^0, & \tilde{E} &= E + \zeta.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ohar bedi soilik χ^α translazio elementu infinitesimaleko χ^0 eta ζ osagaiak agertzen direla koordenatu aukeraketa berriko metrika perturbazioetan. Zein da funtzio eskalar hauek koordenatu edo gauge transformazioekiko duten portaera ezagutzearen helburua? Bada, horren erantzuna ondorengoa dugu: koordenatu sistema batetik bestera pasatzean, metrikan fiktizioak diren perturbazio gehigarriak ager daitezke (gauge arazoa deitu ohi dena); adibidez, Unibertso homogeen eta isotropoari dagokion FLRW metrikak, $x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \chi^i$ transformazioaren pean, $ds^2 = a^2[d\eta^2 - 2\chi_i' d\tilde{x}^i d\eta - (\delta_{ij} + \chi_{j,i} + \chi_{i,j})d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j]$ itxura izango lukeela erraz ikus daiteke metrikaren transformazio legea erabiliz [6]. Ikus daiteke, hortaz, tildedun koordenatu berrietan metrikan perturbazio gisa interpreta daitezkeen gaiak agertzen direla: baina, jakina, alderantzizko transformazioa burutuz gai horiek desagertu egiten dira eta, hortaz, inolako esanahi fisikorik gabeko ekarpenak izan behar dira. Arazo hau ekiditeko, guztiz zentzuzkoa dirudi koordenatu transformazio ororekiko aldaezinak diren funtzioak eraikitzea, ondorioztatu ditugun (4.11) erlazioak kontutan hartuz. Testuinguru honetan, gauge aldaezinak diren ϕ , B , ψ eta E funtzio eskalarren ondorengo bi konbinazio linealak eraiki ohi dira (*Bardeen* potentzialak ere deituak):

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a}[a(B - E)'] \quad \text{eta} \quad \Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a}(B - E'). \tag{4.12}$$

Bi funtzio hauen bitartez deskribatuko ditugu metrikaren perturbazio eskalarrak, ez baitute koordenatu aukeraketarekiko menpekotasunik erakusten, hain zuzen. Dena den, gauge arazoari irtenbidea bilatu diogun arren, ohartu oraindik ere guztiz zehaztu gabe dugula zein izango den gure koordenatu sistema: hau da, perturbazio eskalarrak aldarazten dituzten χ^0 eta ζ eskalarrak zehazteko askatasuna daukagu. Horrela, bi baldintza inposa ditzakegu eta gure kasuan gauge Newtondar gisa definitzen den aukeraketa izango da burutuko duguna, bada:

$$B = 0, \quad E = 0. \tag{4.13}$$

Gauge aukeraketa honekin, hortaz, metrika perturbatuak ondorengo itxura diagonal hartuko du (kontutan izan, (4.13)-rengatik, gauge Newtondarrean $\Phi = \phi$ eta $\Psi = \psi$ ditugula eta, ondorioz, (4.12)-ko gauge aldaezinak diren aldagaiak fisikoki metrikaren perturbazioen anplitudeak berak direla):

$$ds^2 = a^2[(1+2\Phi)d\eta^2 - (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \tag{4.14}$$

4.2 Metrikaren eta energia dentsitatearen perturbazioen eboluzioa

Energia dentsitate perturbazioak ($\delta\varepsilon$) eta hauen ondorio zuzena diren metrika perturbazioak denboran zehar nola aldatzen diren kalkulatzeko izango dugu helburu atal honetan. Horretarako, jakina, Einstein-en ekuazioak ezinbestekoak izango zaizkigu, beraiek baitira metrikaren perturbazioak materia banaketaren perturbazioekin nolabait akoplatzen edo erlazionatzen dituztenak.

Ezer baino lehen, hemendik aurrera onarpen partikular bat burutuko dugu metrikaren perturbazioetarako. 2. kapituluaz azaldu dugun moduan, birkonbinaketa garaian ($\eta = \eta_r$) Unibertsoa CDM materiaz menderatuta dago eta, beraz, osagai honen ekarpena izango da nagusi jariakin kosmikoaren T_β^α totalean. CDM-a jariakin perfektu baten modura deskriba daitekeenez, energia-momentu tentsorearen zati espaziala diagonal da eta horri esker, bi gauge aldazkinak berdinak direla baieztatu daiteke [6]: $\Phi = \Psi$. Oinarri gisa hartuko dugun metrika, hortaz, ondorengoa izango da:

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (4.15)$$

Orain bai, ekin diezaiozun perturbazioen denborarekiko menpekotasuna aztertzeari. Fluktuazioei dagozkien Einstein-en ekuazioak (2.1)-koak izango dira baina $G_\beta^\alpha \rightarrow \delta G_\beta^\alpha$ eta $T_\beta^\alpha \rightarrow \delta T_\beta^\alpha$ ordezkapenak eginez. Lehenik eta behin, (2.1)-eko eskuinaldea garatuko dugu. 2. kapituluako jariakin perfektuaren energia-momentu tentsorearen adierazpena kontsideratuz ondorengo moduan idatz ditzakegu berorren perturbazio eskalarrak, interesatzen zaizkigun energia, 4-abiadura eta presio fluktuazioen funtzioan (0 azpiindize batez izendatuko ditugu perturbatu gabeko Unibertso homogeneoari dagozkion energia eta presioa)²:

$$\delta T_0^0 = \delta\varepsilon, \quad \delta T_i^0 = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)\delta u_i, \quad \delta T_j^i = -\delta p \delta_j^i. \quad (4.16)$$

Azken adierazpen hauetan bigarren ordenako ekarpen perturbatiboak arbuia egin ditugu. Puntu honetan, u^α 4-abiaduraren inguruko hausnarketa bat lagungarri gerta dakiguke; 2. kapituluako Unibertso isotropo eta homogeneoan, fluido kosmikoarekin batera kohigitzen den sistema definitu eta erabili dugu; haatik, benetazko Unibertso perturbatuan, partikulen/objektuen higidura materia inhomogeneitateak eta potentzial grabitatorioak menderatzen dute eta eragin hau arestiko sistema kohigikorrekiko u^α perturbatu batean itzultzen da (abiadura pekuliar deitu ohi zaio) [12, 27]. Horrexegatik, (4.16) ekuazioan gure jariakin ezberdinek perturbatu gabeko hondoarekiko duten 4-abiaduraren zati espazialaren perturbazioak ageri dira (δu_i), Unibertso homogeneoan ez bezala jadanik zero ez direnak.

Bestalde, (2.1)-eko ezker aldeari dagokionez, Einstein-en tentsorearen definizioaz baliatuz, berorren perturbazio eskalarrak Φ -ren funtzioan idatzi ahal izango ditugu. Ezinbestekoak ditugu, horretarako, A eranskinean burututako garapenak. Horiek erabiliz, 1. ordenako perturbazioei dagozkien Einstein-en ekuazioak ondoriozta ditzakegu (0. ordenakoak Unibertso homogeneoari dagozkionak dira). Gure ekuazioak energia dentsitatearen perturbazioen menpe idazteko, presio fluktuazioak ere berorien funtzioan idatziko ditugu; $p(\varepsilon) = w\varepsilon$ egoera ekuaziorako $\delta p = c_s^2 \delta\varepsilon$ izango dugu, $c_s^2 = (\partial p / \partial \varepsilon)_S = w$ soinuaren abiaduraren karratua izanik (orokorrean $\delta p = c_s^2 \delta\varepsilon + \tau \delta S$ genuke ($\tau = (\partial p / \partial S)_\varepsilon$), baina guk perturbazio adiabatikoak kontsideratuko ditugu lan osoan zehar: $\delta S = 0$). Hau kontutan hartuta, perturbazioen ekuazioak hurrengo moduan geratzen dira (ikus bedi A eranskina):

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \delta\varepsilon, \quad (4.17)$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2 (\varepsilon_0 + p_0) \delta u_i, \quad (4.18)$$

$$\Phi'' + 3(1 + c_s^2)\mathcal{H}\Phi' - c_s^2 \nabla^2 \Phi + (2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2)\Phi = 0. \quad (4.19)$$

²Perturbatu gabeko Unibertsoan kontutan izan $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ dugula. Eta, bestalde, ohartu $u^\alpha u_\alpha = 1$ berdintzak gure metrika perturbatua erabiliz Unibertso inhomogeneoko ondorengo abiaduraren 0-osagaira garmatzala (1. ordeneko osagaia): $u^\alpha u_\alpha = 1 \leftrightarrow u^0 u_0 = u^0 g_{00} u^0 = 1 \leftrightarrow u^0 = \frac{1}{a}(1 + 2\Phi)^{-1/2} \simeq \frac{1}{a}(1 - \Phi)$.

Justu birkonbinaketa hasi aurretiko aldiuneei dagokien Unibertsoaren konposaketa ondorengo moduan planteatuko dugu, 2. kapituluaren esandakoari jarraiki: alde batetik, materia ilun hotzak osatutako jariakin perfektua den osagaia izango dugu eta, bestetik, oraindik akoplatuta dauden barioi eta fotoiek osatutako jariakin ez perfektua izango dugu. Dena den, nahiz eta CDM osagaia izan nagusi, gure benetazko interesa fotoien energia dentsitatearen aldaketak dira, berauek azalduko baitute CMB-aren tenperaturan agertzen diren anisotropiak. Testuinguru honetan, hortaz, fotoi-barioi jariakinari dagokien T_β^α perturbatuaren kontserbazio legeak ($T_{\beta;\alpha}^\alpha = 0$) ere baliagarriak izango zaizkigu³. $\beta = 0$ indizeari dagokion kontserbazio ekuazioa barioien ($p_b = 0$ eta $\sigma_b = 0$) eta fotoien⁴ ($p_\gamma = \varepsilon_\gamma/3$ eta $\sigma = (4/15)\varepsilon_\gamma\tau_\gamma$) energia dentsitateek independenteki betetzen dute (fotoiak erlatibistak baitira, barioiak ez bezala), hurrenez hurren:

$$(\delta_b - 3\Phi)' + au_{,i}^i = 0, \quad (4.20)$$

$$(\delta_\gamma - 4\Phi)' + \frac{4}{3}au_{,i}^i = 0, \quad (4.21)$$

non $\delta_b \equiv \delta\varepsilon_b/\varepsilon_b$ eta $\delta_\gamma \equiv \delta\varepsilon_\gamma/\varepsilon_\gamma$ izendatu ditugun [25]. Haatik, momentu linealaren kontserbazioa den $\beta = i$ ekuazioa barioi-fotoi jariakin totalak bete behar du; perturbazio adiabatikoetan $\delta_b = \frac{3}{4}\delta_\gamma$ betetzen dela jakinda [27, 12] eta (4.20)-(4.21) ekuazioetatik baliatuz, ondorengo moduan idatz daiteke berori:

$$\left(\frac{\delta_\gamma'}{c_s^2}\right)' - \frac{4\tau_\gamma}{5a}\nabla^2\delta_\gamma' - \nabla^2\delta_\gamma = \frac{4}{3c_s^2}\nabla^2\Phi + \left(\frac{4\Phi'}{c_s^2}\right)' - \frac{48\tau_\gamma}{15a}\nabla^2\Phi'. \quad (4.22)$$

Ildo beretik, esan, energia-momentu tentsore perturbatuaren kontserbazio lege hauek 1. ordenako perturbazioei dagozkienak direla, orain arte egin dugun moduan (0. ordenako ekuazioak energiaren eta momentuaren kontserbazioen adierazle baino ez dira).

Horrela, jadanik eskuragai ditugu bai metrikaren perturbazio eskalarren eboluzioa adierazten dituzten (4.17)-(4.19) ekuazioak eta baita fotoien energia dentsitatearen fluktuazioen eboluzioa deskribatzen duten (4.21) eta (4.22) ekuazioak ere. Ondorengo bi azpiataletan ekuazio horien soluzioak topatuko ditugu; horretarako, uhin lau erako perturbazioak kontsideratuko ditugu ($\Phi = \Phi_k e^{ik\mathbf{x}}$) eta dagokien k uhin-zenbaki kohigikorren arabera bi portaera ezberdinduko ditugu. Saikapena burutzeko garrantzi handikoa den kurbatura eskala edo horizontea ($c\mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}^{-1}$) erabiliko dugu: berau \mathcal{H}^{-1} Hubble denbora batean argiak bidaiatutako distantziaren estimazio gisa interpretatuko dugu oraingoan. Horrela, η aldiune jakin batean, $\lambda = 2\pi/k$ uhin luzera kohigikorreko perturbazio bat horizontearen kanpo (barne) dagoela diogu baldin eta $\lambda/\mathcal{H}^{-1} = 2\pi/k\mathcal{H}^{-1} \sim 1/k\mathcal{H}^{-1} > 1$ (< 1) bada. Hortaz, CDM-z menderatutako birkonbinaketa garaiko Unibertsoarako ($\mathcal{H} = 2\eta^{-1}$) ondorengo bi bereizketak egingo ditugu:

- $k < \mathcal{H} \iff k\eta_r < 1$: perturbazio hauen uhin luzera kurbatura (edo Hubble) eskalaren balioa baino handiagoa da. Superkurbatura modo deritzegu.
- $k > \mathcal{H} \iff k\eta_r > 1$: fluktuazio hauek, aldiz, birkonbinaketa garaian jadanik horizontearen barne daude eta horregatik deritzegu azpikurbatura modo.

4.2.1 Superkurbatura perturbazioak ($k\eta_r < 1$)

Espaziodenborako u^α abiaduraren 1. ordenerarteko garapena eginez froga daiteke $u_{,i}^i \sim k^2\eta\Phi$ dela, zeinak $k\eta_r < 1$ modoetarako $k^2\eta\Phi \ll \Phi' \sim \mathcal{H}\Phi \sim \Phi/\eta$ izatea suposatzen duen [12]. Beraz, birkonbinaketa

³Jariakin ez perfektuetarako, $T_\beta^\alpha = (\varepsilon + p)u^\alpha u_\beta - p\delta_\beta^\alpha - \sigma(P_\gamma^\alpha u_\beta^\gamma + P_\beta^\gamma u_\gamma^\alpha - \frac{2}{3}P_\beta^\alpha u_\gamma^\gamma)$ dugu, σ zizailadura koefizientea eta $P_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta$ izanik [27].

⁴ τ_γ fotoiek sakabanaketarik jasaten ez duteneko denbora da: $\tau_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e}$.

garaietan horizontetik at dauden perturbazioen kasuan, (4.21) ekuazioko abiadura terminoa arbuigarrua da eta ondorengo soluzioa izango du:

$$(\delta_\gamma)_k - 4\Phi_k = K, \quad (4.23)$$

non K hasierako baldintza batekin zehaztu beharreko integrazio konstantea den. Hasierako baldintzari dagokionez, beronek erradiazioz menderatutako Unibertso goiztiarrarekin erlaxionatutako baldintza bat behar du izan. Baldintza hori zehazteko, kontutan izango dugu materia- γ berdinketaren aurretiko erradiazioaren ($c_s^2 = w = 1/3$, $\mathcal{H}\propto\eta^{-1}$) $k\eta < 1$ modoetarako, (4.19)-ko metrika perturbazioan gailentzen den soluzioa konstante bat dela (η -ren independentea) [27]. Horrela, hau jakinda, (4.17) erabil dezakegu fotoien energia dentsitatearen garai hartako balioa zehazteko:

$$\begin{aligned} (4.17) \rightarrow -k^2\Phi_k - 3\mathcal{H}^2\Phi_k &= 4\pi G a^2(\delta\varepsilon_\gamma)_k, \\ -\Phi_k(k^2 + 3\mathcal{H}^2) &\simeq -\Phi_k(3\mathcal{H}^2) \simeq 4\pi G a^2(\delta\varepsilon_\gamma)_k, \\ -\Phi_k(a^2 8\pi G \varepsilon_\gamma) &\simeq 4\pi G a^2(\delta\varepsilon_\gamma)_k, \\ -2\Phi_k \varepsilon_\gamma &\simeq (\delta\varepsilon_\gamma)_k \rightarrow (\delta_\gamma)_k \simeq -2\Phi_k. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Azken aurreneko pausuan Unibertso homogeneousko Einstein-en 00 ekuazioaz baliatu gara ($\mathcal{H}^2 = a^2 \frac{8\pi G}{3} \varepsilon$, Friedmann-en ekuazioa bezala ere ezagutzen dena). Hortaz, inflazio garaiko perturbazio primitiboak Φ_k^0 gisa izendatzen baditugu, (4.24)-ko hasierako baldintza $(\delta_\gamma)_k \simeq -2\Phi_k^0$ moduan geratzen da eta (4.23)-ko K konstantearen balioa determina dezakegu:

$$-2\Phi_k^0 - 4\Phi_k^0 = K \quad \rightarrow \quad K = -6\Phi_k^0 \quad \rightarrow \quad (\delta_\gamma)_k = 4\Phi_k - 6\Phi_k^0. \quad (4.25)$$

Lortu ditugu, beraz, erradiazioaren energia dentsitate fluktuazioak kurbatura perturbazioen funtzio idaztea. Halere, gogora bedi δ_γ eta Φ perturbazioen $\eta = \eta_r$ garaiko balioak direla interesatzen zaizkigunak CMB-aren tenperatura anisotropiak kalkulatzeko. (4.25)-ko soluzioa birkonbinaketa garaian ezagutzeko, $\Phi_k(\eta_r)$ ezagutu behar dugu. Horretarako, kontserbatzen den ondorengo kantitatea definituko dugu [27] (azken batean, kurbatura perturbazio aldagai berri bat besterik ez da):

$$\zeta = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \Phi}{1+w} + \Phi. \quad (4.26)$$

Era honetan, erradiazioz menderatutako unibertso goiztiarreko ζ_i birkonbinaketa garaiko ζ_f -rekin berdinduz, $\Phi_k(\eta_r)/\Phi_k^0$ transferentzia funtzioa ezagutu ahal izango dugu, bada:

$$\zeta_i(w_i = 1/3, (\Phi_k)_i = \Phi_k^0, \Phi_k^{0'} = 0) = \zeta_f(w_f = 0, (\Phi_k)_f = \Phi_k(\eta_r), \Phi_k(\eta_r)' = 0) \longleftrightarrow \Phi_k(\eta_r) = \frac{9}{10} \Phi_k^0. \quad (4.27)$$

Emaitza hau kontutan hartuz, jadanik lortu dugu birkonbinaketa garaiko δ_γ superkurbatura perturbazioak Φ_k^0 gisa ezaugarritu ditugun fluktuazio primitiboen menpe idaztea:

$$(\delta_\gamma(\eta_r))_k = 4\Phi_k(\eta_r) - 6\Phi_k^0 = 4\left(\frac{9}{10}\Phi_k^0\right) - 6\Phi_k^0 \longleftrightarrow (\delta_\gamma(\eta_r))_k = -\frac{12}{5}\Phi_k^0 = -\frac{8}{3}\Phi_k(\eta_r). \quad (4.28)$$

Ikus daitekeen moduan, horizontetik kanpoko metrika perturbazioek eta hauen eragile diren energia dentsitatearen perturbazioek ez dute ia aldaketarik jaso, inflazio garaiko Unibertso perturbazio goiztiarrekin alderatuta.

4.2.2 Azpikurbatura perturbazioak ($k\eta_r > 1$)

Azpiatal honetan gure helburua 4.2.1 ataleko bera izango da, baina birkonbinaketa garaian jadanik horizontea zeharkatu duten perturbazioen kasurako, hain zuzen. Jakina, berriro ere ezinbestekoak izango ditugu zenbait hurbilketa egitea, perturbazioen ekuazioen soluzioak topatu ahal izateko. Oraingoan

erabiliko dugun estrategia ondorengo izango da: birkonbinaketa garaian agintzen duen presio nuluko CDM-aren kasurako, (4.19) ekuazioak ondorengo itxura sinplea hartzen duela argi ikus daiteke:

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0. \quad (4.29)$$

Ekuazio hau era errazean ebatz dezakegu $y = \ln \eta$ aldagai aldaketa eginez koefiziente konstanteko ondorengo ekuazio diferentzialean bihurtzen baita:

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} + 5\frac{d\Phi}{dy} = 0 \iff \Phi(y) = K_1 + K_2e^{-5y} \iff \Phi = K_1 + \frac{K_2}{\eta^5}. \quad (4.30)$$

Hortaz, K_2 -rekin doan ekarpen beherakorra arbuaiatuz, birkonbinaketa garaian Φ perturbazioa materia ilunaren dentsitate fluktuazioek induzitutakoa dela onartzeak Φ berori denbora konformalaren independentea dela ondorioztatzera eraman gaitu (ohartu jadanik (4.27) ekuazioan hori suposatu dugula CDM-z menderatutako Unibertsoaren ζ_f kantitaterako). Aurreko atalean bezala, metrikaren perturbazioen informazioa izateak ezagutu nahi ditugun δ_γ fluktuazioak determinatzen lagunduko digu, akoplatuta baitaude. Horrela, superkurbatura kasuan ez bezala, kurbaturaz azpitiko fotoien dentsitate perturbazioetarako argi dago ezin baiezta dezakegula $\delta_\gamma \simeq -2\Phi$ denik ((4.24)-ko hurbilketak ez baitzaizkigu aplikagarriak suertatuko oraingoan). Izatez, honek kalkuluak nahikotxo zailduko dizkigu $k\eta > 1$ dentsitate perturbazioetarako.

Oraingo honetan (4.22) ekuazioaz baliatuko gara erradiazioaren fluktuazioen adierazpenak lortzeko. Argudiatu berri dugun moduan, Φ konstantea denez ekuazio horren eskuinaldeko azken bi gaiak nuluak izango dira:

$$\left(\frac{\delta_\gamma'}{c_s^2}\right)' - \frac{4\tau_\gamma}{5a}\nabla^2\delta_\gamma' - \nabla^2\delta_\gamma = \frac{4}{3c_s^2}\nabla^2\Phi. \quad (4.31)$$

Azken ekuazio diferentzial hau ebatzeko aldagai aldaketa ezberdinak egiteaz gain, beste hainbat hurbilketa kontsideratu behar dira. Are gehiago, emaitza soilik bi kasu limiteetan baino ezin da ebatzi analitikoki. 4. kapitulu honen xede nagusia ondoren CMB-aren tenperatura fluktuazioak kalkulatu ahal izateko δ_γ ezagutzea denez, ez du zentzurik erabat matematikoa den garapen horretan sakontzeak. Horrela, froga daiteke aztergai izango ditugun eskaletarako (4.31)-ko soluzio hurbildua ondorengo dela [27]:

$$(\delta_\gamma(\eta))_k \simeq \left(-\frac{4}{3c_s^2}T_p + 4T_o\sqrt{c_s}\cos\left(k\int_0^\eta c_s d\eta'\right)e^{-(k/k_D)^2}\right)\Phi_k^0, \quad (4.32)$$

non T_p eta T_o direlakoak (4.31) ekuazioaren integrazio konstanteak diren. Berauek δ_γ -ren anplitudea inflazio garaiko Φ^0 -ren zein frakzio den adieraziko dute eta horregatik deritzegu transferentzia funtzio; datorren gaian aztertuko ditugun eskaletarako, ondorengo balio hurbilduak onargarriak izango dira [27]:

$$T_p \simeq \frac{1}{4}\ln\left(\frac{14}{k\eta_{eq}}\right) \quad \text{eta} \quad T_o \simeq 0.36\ln(5.6k\eta_{eq}). \quad (4.33)$$

Ohar gisa, η_{eq} delakoa materia-erradiazio berdinketa aldiunea dugu eta ohiko moduan (4.32)-n guk $\eta = \eta_r$ izango dugu. Halaber, $(\delta_\gamma(\eta))_k$ -ren soluzio honetan uhin zenbaki kohigikor berezi bat definitu dugu, $k\eta_r > 1$ perturbazioen moteltze edo indargetze eskala zehaztuko duena [21]:

$$k_D = \frac{2}{5}\int_0^{\eta_r} c_s^2\frac{\tau_\gamma}{a}d\tilde{\eta}. \quad (4.34)$$

Superkurbatura perturbazioekin alderatuta, argi dago birkonbinaketa garaiazen aurretik horizontea zeharkatu duten perturbazioak inflazio garai goiztiarretik asko aldatu direla: (4.32)-n ikus daitekeenez, k -ren zein η -ren menpekotasuna duten ekarpen oszilakorrak ageri dira. Izan ere, fluktuazio berauek izango ditugu eskala angeluar txikietako CMB-aren espektroan ageri diren gailur akustikoen eragileak.

Kapitulua 5

CMB-aren tenperatura anisotropiak: efektu fisiko eragileak

Azken sakabanaketa gainazaletik datozkigun fotoiak aske hedatu dira birkonbinaketa garaitik hona. Horrela, gaur egun jasotako hondoko erradiazio berorren espektroan ageri diren anisotropiak (hau da, eskala angeluar ezberdinetako tenperatura fluktuazio txikiak) 4. kapituluan aztertu ditugun inhomogeneitateen ondorio zuzena dira. Izatez, behagarri dugun magnitudea ez da materia dentsitatearen perturbazioa bera, erradiazioaren banaketa funtzioa (edo, baliokideki, tenperatura bera) baino. Boltzmann-en ekuazioa izango da kapitulu honetako gure abiapuntu eta tresna nagusia, izan ere, beronek deskribatzen baitu CMB-aren fotoien f banaketa funtzioak izan duen denboran zeharreko eboluzioa. Gure kasuan fotoien hedapena askea izan denez, Boltzmann-en ekuazio homogeneoa beteko du f -k [15]:

$$\frac{df}{d\eta} = 0. \quad (5.1)$$

Banaketa funtzio hau (4.15) metrikari dagokion Unibertso perturbatuko da noski eta Bose-Einstein-en banaketa funtzioaren itxura du, zeina ondorengo moduan idatz daitekeen $\hat{p}_i = -\frac{p_i}{p}$ norabidetik¹ datozen ω maiztasuneko fotoientzako [27]:

$$f = {}^{(0)}f + \delta f = \frac{1}{\exp(\omega/T) - 1} \quad \text{non} \quad T = T_0(\eta) + \delta T(x^\alpha, \hat{p}_i) \quad \text{eta} \quad \omega = p_0 u^0. \quad (5.2)$$

Ohartu beraz, $f = f(x^i(\eta), p_i(\eta), \eta)$ denez, (5.1) ekuazioa ondorengo eran berridatz dezakegula:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{dx^i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{d\eta} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0. \quad (5.3)$$

Orain, (5.3)-ko $\frac{dx^i}{d\eta}$ eta $\frac{dp_i}{d\eta}$ ekarpenak kalkulatu behar ditugu. Horretarako espaziodenbora kurbatuen fotoien ibilbide askea deskribatzen duten geodesiko nuluen ekuazioetatik baliatuko gara. Fotoien ibilbide aske horiek λ parametro afinarekin parametrizatzen baditugu, $p^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ (beraz, $p^0 = \frac{d\eta}{d\lambda}$ eta $p^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$) momentuko fotoien geodesikoak ondorengo moduan definitzen dira [15]:

$$\frac{dp_\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} p^\mu p^\nu. \quad (5.4)$$

¹Hemen momentuaren modulu espaziala horrela definituko dugu: $p = [\sum_i (p_i)^2]^{\frac{1}{2}}$.

4.2 atalean u^0 osagaia metrikaren perturbazioen funtzio idatzi dugun moduan, gauza bera egin dezakegu orain momentuaren denbora osagaierako. Fotoien kasuan, masa gabekoak direnez, $p^\alpha p_\alpha = 0$ dugu eta:

$$p^0 g_{00} p^0 + g^{ii} p_i p_i = 0 \leftrightarrow a^2(1 + 2\Phi)(p^0)^2 - \frac{(1 + 2\Phi)}{a^2} \sum_i (p_i)^2 = 0 \leftrightarrow p^0 = \frac{p}{a^2} \leftrightarrow p_0 = g_{00} p^0 = (1 + 2\Phi)p. \quad (5.5)$$

Erlazio hauek erabilita zera ondoriozta dezakegu, perturbazioen 1. ordenerarte:

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{d\eta} &= \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\eta} = \frac{p^i}{p^0} = \frac{-\frac{1}{a^2}(1 + 2\Phi)p_i}{p/a^2} = -\frac{p_i}{p}(1 + 2\Phi) = \hat{p}_i(1 + 2\Phi). \quad (5.6) \\ \frac{dp_\alpha}{d\eta} &= \frac{dp_\alpha}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\eta} = \frac{dp_\alpha}{d\lambda} \frac{1}{p^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} p^\mu p^\nu \frac{1}{p^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} p^\mu p^\nu \frac{1}{p^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} p^0 p^0 \frac{1}{p^0} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} p^i p^j \frac{1}{p^0} = \\ &= \frac{1}{2} 2a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{p}{a^2} + \frac{1}{2} 2a^2 \delta_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{p^i p^j}{p^0} = p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} + a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{\sum_i (p^i)^2}{p^0} = p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} + a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \frac{(1 + 2\Phi)^2 p^2}{a^4 p^0} = \\ &= p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} + (1 + 2\Phi)^2 p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} = p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} + p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} = 2p \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Orduan lortu berri ditugun metrikaren perturbazioen menpeko emaitzak (5.3)-en ordezkatzuz, Boltzmann-en ekuazioa ondoengo eran geratzen zaigu:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} + \hat{p}_i(1 + 2\Phi) \frac{\partial f}{\partial x^i} + 2p \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0. \quad (5.8)$$

Izatez, (5.8) ekuazioa da temperatura fluktuazioak aurreko kapituluaz aztertutako energia dentsitate eta metrika perturbazioekin erlazionatzea ahalbidetuko diguna. Horretarako, kontutan hartu behar dugu gu 1. ordenako perturbazio teoria lineala garatzen ari garela; hori dela eta, horixe bera egingo dugu (5.2) banaketa funtzioaren $\frac{\omega}{T}$ aldagaiarekin ere:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{T} &= \frac{p_0 u^0}{T} = \frac{p_0}{T \sqrt{g_{00}}} = \frac{p(1 + 2\Phi)}{T a \sqrt{(1 + 2\Phi)}} = \frac{p \sqrt{(1 + 2\Phi)}}{T a} = \frac{p}{T a} (1 + \Phi) = \frac{p}{T_0 a} \left(1 + \frac{\delta T}{T_0}\right) (1 + \Phi) = \\ &= \frac{p}{T_0 a} (1 + \Phi) \left(1 - \frac{\delta T}{T_0}\right) = \frac{p}{T_0 a} \left(1 + \Phi - \frac{\delta T}{T_0}\right). \quad (5.9) \end{aligned}$$

f banaketa funtzioaren aldagaia perturbazioen konbinazio lineal gisa idazteak 0. ordenako eta 1. ordenako Boltzmann-en ekuazioak eskuratzeko ahalbidetuko digu [15]. Hortaz, (5.8)-(5.9) kontutan hartuz eta katearen erregela aplikatuz aurreko kasuetan bezala:

$$0. \text{ ordena (Unibertso homogeen eta isotropoa)} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial(T_0 a)}{\partial \eta} = 0, \quad (5.10)$$

$$1. \text{ ordena (Unibertso perturbatua)} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \hat{p}_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\delta T}{T} + \Phi \right) = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (5.11)$$

Zero ordenako Boltzmann-en ekuazioak Unibertso homogeen eta isotropoan temperatura eskala faktorearen alderantziz proportzionala dela esaten digu, 2. kapitulutik jadanik bagenekiena. Aitzitik, 1. ordenako ekuazioari dagokionez (hau da guri interesatzen zaiguna), alde batetik Unibertsoa hedatu ahala eskala angeluar ezberdinetan agertutako anisotropia txikiei dagokien $(\delta T/T)$ ekarpena daukagu eta, bestetik, grabitatearen efektua kuantifikatzen duen bigarren batugaia daukagu (Φ), hain zuzen. Gogoratu guk 4. kapituluaz birkonbinaketa garaian Φ denbora konformalaren independentea dela frogatu dugula; ondorioz, (5.11) ekuazioaren eskuinaldea nulua dugu eta soluzio posibleetako bat ondorengoa da:

$$\frac{\delta T}{T} + \Phi = \text{konstantea}. \quad (5.12)$$

Partikularki, gaur egun Planck satelitearen bitartez detektatutako tenperatura fluktuazioak 4. kapituluan landu ditugun birkonbinaketa garaikoekin erlaziona ditzakegu (5.12)-z baliatuz:

$$\left(\frac{\delta T}{T} + \Phi\right)_{\eta_r} = \left(\frac{\delta T}{T} + \Phi\right)_{\eta_0} \longleftrightarrow \frac{\delta T}{T}(\eta_0, x_0^i, \hat{p}_i) = \frac{\delta T}{T}(\eta_r, x_{\eta_r}^i, \hat{p}_i) + \Phi(\eta_r, x_{\eta_r}^i) - \Phi(\eta_0, x_{\eta_0}^i). \quad (5.13)$$

Aurrera jarraitu aurretik, esan beharra dago guk anisotropiak aztertuko ditugunez, tenperatura fluktuazioen fotoi-norabidearekiko menpekotasuna izango dugula aztergai. Hori dela eta, azken ekuazioko $\Phi(\eta_0, x_{\eta_0}^i)$ batugaia mespretxatu egingo dugu, gaur egun eta Lurraren kokapenean potentzial grabitatorioak duen balioaren adierazlea baino ez baita. Bestela esanda, ekarpen honek isotropoa den tenperatura *shift* bat besterik ez du suposatuko.

Esanak esan, (5.13)-ren arabera, egun behatutako tenperatura fluktuazioak bi ekarpen ezberdinen batura ditugu: lehenengoa, birkonbinaketa garaian dagozkion jatorrizko fluktuazioen osagaia dugu eta bigarrena, aldiz, birkonbinaketa garaian eta azken sakabanaketa gainazalean Φ -k zuen balioa da. Azken hau 4. kapituluan lortu ditugun $\delta\gamma$ perturbazioen menpe idaztea komeni zaigu. Horretarako, (2.1) taula burura ekarriz:

$$\varepsilon_\gamma \alpha a^{-4} \longrightarrow \varepsilon_\gamma \alpha T^4 \longrightarrow \delta\varepsilon_\gamma \alpha 4T^3 \delta T \longrightarrow \delta\gamma \equiv \frac{\delta\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma} = 4 \frac{\delta T}{T}. \quad (5.14)$$

Hortaz, (5.13)-tik CMB-aren tenperatura fluktuazioak kalkulatzeko baliagarri izango zaigun erlazio garrantzitsuenetarikoa lortzen dugu:

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0, x_0^i, \hat{p}_i) = \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\eta_r}. \quad (5.15)$$

Puntu honetan aski arrazoitua geratzen da aurreko kapituluan garatu dugun perturbazio teoria kosmologikoaren erabilgarritasuna eta baita bertatik lortutako perturbazioen emaitzena ere, lortu dugun azken berdintzaren arabera horiexek baititugu Planck sateliteak behatutako anisotropien eragile. Bestalde, gogoratu uhin lau erako perturbazioekin jardun dugula eta, beraz, ezinbestekoa izango zaigu Fourier-en espazioan lan egitea. Azken batean, momentu edo uhin zenbaki kohigikorraren espazioan jardun dugu 4. kapituluan zehar eta modo bakoitza k aldagai kohigikor eta jarraitu horren bidez deskribatu dugu; teoria linealean, modo horietako bakoitzak modu independentean eboluzionatuko du eta horien konbinazio izango dira gaur egun espazio adierazpidean lortutako tenperatura anisotropiak, bada:

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{p}}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\eta_r}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{p}}\eta_0)}. \quad (5.16)$$

Azken berdintza lortzeko η_r aldiuneko birkonbinaketari dagokion denbora konformalaren balioa gaur egungo unibertsoaren adina (η_0) baino askoz txikiagoa dela onartu dugu: $\mathbf{x}_{\eta_r} = \mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0) \simeq \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{p}}\eta_0$. (5.16)-ren bitartez tenperatura anisotropien kalkulari ekin aurretik, azken ohar garrantzitsu bat egin beharra daukagu. Aurreko kapituluko $(\delta\gamma)_k$ eta Φ_k inflazio garaiko Φ_k^0 perturbazio goiztiarren menpe idatzi ditugu (ikus (4.28) eta (4.32)); inflazioaren teoriak eta behaketa ezberdinek $|(\Phi_k^0)^2|k^3 = Bk^{n_s-1}$ itxurako espektroa aurrezaten dute [27], n_s (indize espektrala) 1-etik oso hurbil egonik ($1 - n_s \simeq 0.03 - 0.08$). Arrazoi honengatik, hemendik aurreranzko kalkuluetan eskalaren independentea den espektro goiztiarra kontsideratuko dugu:

$$|(\Phi_k^0)^2|k^3 = B \quad (= ktea). \quad (5.17)$$

5.1 Tenperatura fluktuazioen espektroa: multipoloak

CMB-aren erradiazioa gure galaxian zentratuta dagoen eta esferikoa den azken sakabanaketa gainazaletik datorkigunez, baliagarria suerta dakiguke tenperatura anisotropiak fisikan hain erabiliak diren harmoniko

esferikoetan garatzea:

$$\frac{\delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{p}}) = \sum_l \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \quad \text{non} \quad \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (5.18)$$

C_l koefizienteetako multipolo deritzegu eta batzbesteko ikurrek norabide guztietarako batzbestekoa adierazten dute (zeru osoan zeharrekoa, alegia). Hala, temperatura autokorrelazio funtzioa (edo bi puntuko korrelazio funtzioa) ondorengo eran erlaziona dezakegu multipoloekin:

$$\begin{aligned} R_T &= \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{\mathbf{p}}) \frac{\delta T}{T}(\hat{\mathbf{p}}') \right\rangle = \sum_{l,l',m,m'} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta', \phi') = \\ &= \sum_{l,l',m,m'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta', \phi') = \sum_l C_l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') = \sum_l C_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (5.19)$$

non $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}' = \cos \theta$ den eta P_l direlakoak Legendre-ren polinomioak diren (ikus (B.1)). Halaber, (5.16) erabiliz ere beste bide baliokide bat dago temperaturaren autokorrelazio funtzioa idazteko:

$$R_T = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{p}}) \frac{\delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{p}}') \right\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 e^{i\eta_0 k(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}})}. \quad (5.20)$$

Orain, uhin lauen Legendre-ren polinomietako eta Bessel-en funtzio esferikoetako deskonposaketa erabil dezakegu [17]:

$$e^{ik\eta_0(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}})} = \sum_l (2l+1) i^l j_l(k\eta_0) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}).$$

Horrela,

$$\begin{aligned} R_T &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) i^{l'-l} j_l(k\eta_0) j_{l'}(k\eta_0) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) P_{l'}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}') = \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\dots|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 \sum_{l,l',m,m'} (2l+1)(2l'+1) i^{l'-l} j_l j_{l'} \frac{(4\pi)^2}{(2l+1)(2l'+1)} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Integrakizuneko elementu diferentziala $d^3 k = k^2 dk d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}$ dugu. Orduan, $\hat{\mathbf{k}}$ -ri dagokion angelu solidoarekiko integrala eginez eta harmoniko esferikoen (B.2) ortonormaltasun baldintza erabiliz, zera lortzen dugu:

$$\begin{aligned} R_T &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} |\dots|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 \sum_{l,l',m,m'} (2l+1)(2l'+1) i^{l'-l} j_l j_{l'} \frac{(4\pi)^2}{(2l+1)(2l'+1)} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{p}}') \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \\ &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 \sum_{l,m} (2l+1)^2 (j_l(k\eta_0))^2 \frac{(4\pi)^2}{(2l+1)^2} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}') = \\ &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 (4\pi)^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta) (j_l(k\eta_0))^2 = \\ &= \sum_l \int_0^\infty \frac{2}{\pi} k^2 dk \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 (j_l(k\eta_0))^2 \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Azken emaitza hau (5.19)-rekin alderatuz gero, C_l multipoloen adierazpena irakur dezakegu metrikaren eta energia dentsitatearen perturbazioen funtzioan:

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 (j_l(k\eta_0))^2. \quad (5.23)$$

Datozen ataletan, bada, birkonbinaketa garaian Hubble-en eskalatik kanpoko superkurbatura perturbazioetarako zein birkonbinaketaren aurretik horizontea zeharkatu zuten azpikurbatura perturbazioetarako (5.23) ebatziko dugu, 4. kapituluko emaitzak kontsideratuta. Ohar gisa, birkonbinaketa garaiko Hubble-n eskala $\theta \sim 1^\circ$ eskala angeluarrari dagokionez [35], $\theta > 1^\circ$ eskala angeluarretako tenperatura anisotropiak superkurbatura perturbazioek induzitutakoak izango dira eta $\theta < 1^\circ$ eskaletakoak, berriz, kurbaturaz azpitikoez sortutakoak. Multipoloen l momentua ondorengo eran erlaziona daiteke eskala angeluarrarekin [22]: $\theta \simeq \frac{\pi}{l}$; hortaz, eskala angeluar handiak l txikiei dagozkie eta eskala angeluar txikiak aldiz l handiei.

5.2 Eskala angeluar handietako anisotropien kalkulua

Esan dugun moduan, eskala angeluar handietan ($\theta > 1^\circ$) behatutako CMB-aren tenperatura anisotropiak birkonbinaketa garaiko $k\eta_r < 1$ inhomogeneitateek sortutakoak dira. Horrela, 4.2.1 atalean esandakoari jarraiki, jakin badakigu inhomogeneitate hauek ez dutela aldaketa nabaririk jasan inflazio garaitik hona eta, ondorioz, Unibertso goiztiarreko fluktuazio kuantikoei buruzko informazioa gordetzen dute. 4. kapitulutik birkonbinaketa garaiko δ_γ eta Φ superkurbatura perturbazioei dagozkien k -modoan adierazpenak ezagunak ditugu:

$$\begin{aligned}\Phi_k(\eta_r) &= \frac{9}{10}\Phi_k^0, \\ (\delta_\gamma(\eta_r))_k &= -\frac{8}{3}\Phi_k(\eta_r) = -\frac{12}{5}\Phi_k^0.\end{aligned}\tag{5.24}$$

Alde batetik, (5.16) ebatziz, eskala angeluar txikietarako tenperatura anisotropiak ezagut ditzakegu:

$$\begin{aligned}\frac{\delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{p}}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4} \left(-\frac{8}{3}\Phi(\eta, x^i) \right) + \Phi(\eta, x^i) \right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{p}}\eta_0)} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \Phi_k(\eta_r, x^i) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{p}}\eta_0)} \equiv \frac{1}{3}\Phi(\eta_r, \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{p}}\eta_0, \hat{\mathbf{p}}) \simeq \frac{1}{3}\Phi(\eta_r, \mathbf{x}_r, \hat{\mathbf{p}}).\end{aligned}\tag{5.25}$$

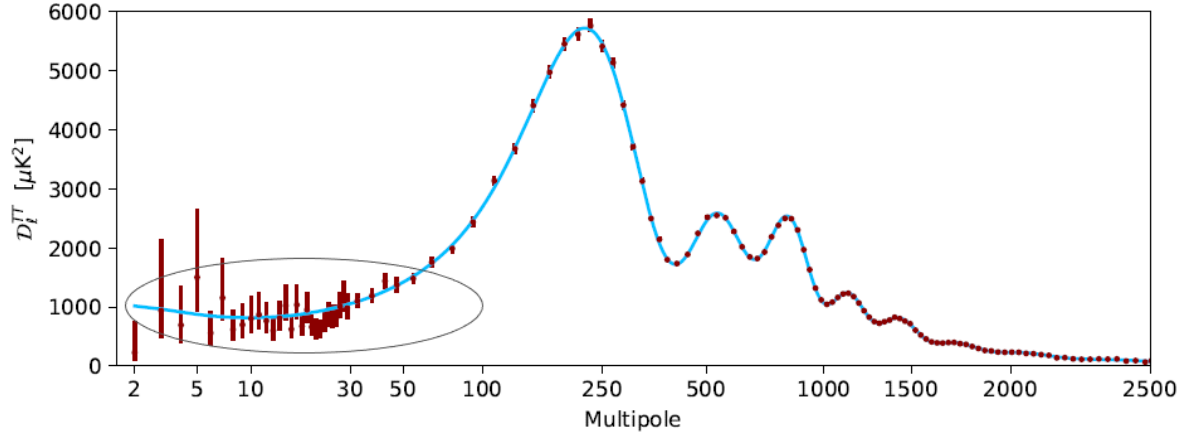
Hots, gaur egun detektatutako eskala angeluar txikietako tenperatura anisotropiak birkonbinaketa garaian azken sakabanaketa gainazalean potentzial grabitatorioak zuen balioaren herena dugu. Efektu honi Sachs-Wolfe efektua deritzogu, 1967an beraz azaldu zuten zientzialariei erreferentzia eginik. Ildo beretik, aztertzen ari garen eskaletarako multipoloak kalkulatzeko gai gara. Atal honetan egindako hurbilketen baliagarritasuna kontutan hartuz, jarraian egindako kalkulua $2 \leq l \lesssim 100$ multipoloetarako izango da onargarria (hortik aurrerako momentuetarako beste efektu batzuk izango baitira nagusi). Kalkula dezagun (5.23):

$$\begin{aligned}C_l &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k} \left| \frac{1}{3}\Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 (j_l(k\eta_0))^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k} \left| \frac{1}{3} \frac{9}{10}\Phi^0 \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 (j_l(k\eta_0))^2 = \\ &= \frac{9}{100} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k} |\Phi_k^0|^2 (j_l(k\eta_0))^2 = \frac{9B}{100} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} (j_l(k\eta_0))^2.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Jarraian $x = k\eta_0$ aldagai aldaketa eginez eta B eranskineko (B.3)-(B.5) erlazioez baliatuz:

$$\begin{aligned}C_l &= \frac{9B}{100} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x} (j_l(x))^2 = \frac{9B}{100} \frac{\Gamma(2)\Gamma(l)}{4\Gamma^2(3/2)\Gamma(l+2)} = \frac{(l-1)!}{4 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 (l+1)!} = \\ &= \frac{1}{\pi l(l+1)} \quad \longrightarrow \quad l(l+1)C_l = \frac{9B}{\pi 100}.\end{aligned}\tag{5.27}$$

Era horretan, eskala angeluar handietan, perturbazio adiabatikoez sortutako tenperatura anisotropien espektroa konstantea dela lortu dugu. Izatez, hauxe dugu Planck-en emaitzetan hasierako l multipoloen kasuan bereiz daitekeen zonalde laua (ikus (5.1) irudia). Horrela, Sachs-Wolfe efektu hau multipolo



Irudia 5.1: 2018 urteko Planck misioko emaitzetatik ateratako temperatura espektroa [4]: ardatz bertikalean $D_l = l(l+1)C_l/2\pi$ ageri da eta horizontalean l . Borobilduta adierazi dugu Sachs-Wolfe efektuaren ondoriozko joera laua (*plateau* deitu ohi dena).

baxuetarako Φ potentzial grabitatorioak duen eraginaren adierazlea dela esan dezakegu: materia inhomogeneitateak induzitutako grabitate ezegonkortasunak fotoien lerrakuntza dakar eta hau temperatura anisotropia batean itzultzen da.

Bestalde, 5.1 irudian ikus daitekeen moduan, $l \lesssim 5$ eta $30 \lesssim l \lesssim 100$ ordenetan Sachs-Wolfe efektuaren portaera lauk gorakadak jasaten ditu. Goranzko malda hauen arrazoia edo zergatia zera dugu: guk materiaz menderatutako Unibertsoan Φ denboraren independentea dela onartu dugun arren, berez erradiazioak ere ekarpena badu Φ -n, eta ezin izango genuke (5.11) ekuazioaren eskuinaldea anulatu. Fotoien ibilbideetan barrena potentzial grabitatorioak dituen denboran zeharreko aldaketei dagokien ekarpen honi Sachs-Wolfe efektu integratua deritzogu [24].

5.3 Eskala angeluar txikitako anisotropien kalkulua

$l > 200$ multipoloek adierazten dituzten temperatura anisotropiak birkonbinaketa garaian jadanik horizontea zeharkatu zuten perturbazioek induzitakoak dira. 4. kapituluan aztertutakoaren arabera, beraz, jakin badakigu fluktuazio berauek inflazio garaikoetatik abiatuta eboluzioa izan dutela. Hori dela eta, eskala angeluar txikitako temperatura behaketek parametro kosmologiko ezberdinen inguruko informazioa emango digute, azken batean beraien arabekoak baitira perturbazioen anplitudeek historian zehar jasandako aldaketa horiek, hain zuzen.

Eskala angeluar handietako multipoloen kalkuluari ekin aurretik, ohar garrantzitsu bat azaldu beharra daukagu. 2. kapitulutik aurrera birkonbinaketa garaiari erreferentzia egitean bat-bateko aldiune konkretu batez mintzo izan gara: alegia, $\eta = \eta_r$ aldiunean fotoiek euren azken sakabanaketak jasaten dituztela kontsideratu dugu. Aitzitik, atal honetako eskaletarako ($k\eta > 1$) bat-bateko birkonbinaketaren hurbilketak huts egiten du eta, ondorioz, (5.23) ekuazioko multipoloen adierazpen integralean temperatura fluktuazioak txikituko dituen gai esponenzial berri bat agertuko zaigu. Fenomeno honi lodiera finituko efektua deritzogu [25, 27]. Beronen eraginez, fotoiak azkenekoz sakabanatu zireneko aldiunearen nolabaiteko ziurgabetasuna gehitzen zaio gure analisiari; bada, honi aurre egiteko, 2. kapituluan definitu dugun $\tau(\eta)$ sakonera optikoaz baliatuko gara.

Ildo honetatik, gaur egun behatutako CMB-ko fotoi bat $d\tilde{\eta}$ tartean azkenekoz sakabanatu eta geroztik aske hedatu izanaren probabilitatea $g(\tilde{\eta})d\tilde{\eta}$ bezala definitu ohi da, non $g(\tilde{\eta})$ delakoari ikuspene funtzio

deritzogun:

$$g(\tilde{\eta}) = \frac{d\tau}{d\tilde{\eta}} e^{-\tau(\tilde{\eta})}. \quad (5.28)$$

Froga daiteke [23] ikuspen funtzioak bere balio maximoa $z \simeq 1050$ inguruko gorriranzko lerrakuntzan lortzen duela eta $(13.7\mathcal{H}_r)^{-2}$ bariantzadun eta $\mu = \eta_r$ itxarotako baliodun banaketa Gaussiar² baten bidez hurbil daitekeela [27]:

$$g(\tilde{\eta}) \simeq \frac{13.7\mathcal{H}_r}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(13.7\mathcal{H}_r)^2(\tilde{\eta} - \eta_r)^2\right). \quad (5.29)$$

Hortaz, eskala angeluar txikietan behatutako anisotropien kasurako, lanean zehar erabili dugun η_r bir-kobinaketa aldiunea (5.29)-en itxarotako balio gisa uler dezakegu. Honenbestez, ikuspen funtzioa kontutan hartzean, azken sakabanaketa gainazalari denboran (edo, bestela esanda, gorriranzko lerrakuntzan) nolabaiteko lodiera ematen ari gara. (5.16) adierazpenean, hortaz, aske hedatzeko fotoiek definitu berri dugun banaketa Gaussiarra jarraitu zutela kontsideratu beharko dugu, eta ezin izango dugu $\mathbf{x}_{\eta_r} = \mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0) \simeq \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{p}}\eta_0$ hurbilketa aplikatu³; birkonbinaketa tartean δ_γ eta Φ asko aldatzen ez direla eta euren $\eta = \eta_r$ -ko balioetatik hurbil ditzakegula onartzuz:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{p}}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta} g(\tilde{\eta}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{p}}(\tilde{\eta} - \eta_0))} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta} g(\tilde{\eta}) e^{i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{p}}(\tilde{\eta} - \eta_0)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Azken ekuazio honetako $\tilde{\eta}$ aldagaiari dagokion integrala ebazteko, $g(\tilde{\eta})$ ikuspen funtzioa $\tilde{\eta} = \eta_r$ aldiu-nearen inguruan zorrotzen den banaketa dela kontutan hartuko dugu [25]. Hori dela eta, denbora konformalarekiko integrakizunean ikuspen funtzioarekin bidertzen ari den funtzio esponontziala bere $\tilde{\eta} = \eta_r$ puntuaren inguruko lehenengo ordenako Taylor-en garapenez ordezkatu dugu, bada:

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}(\tilde{\eta} - \eta_0) \approx \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} [\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}(\tilde{\eta} - \eta_0)]|_{\tilde{\eta}=\eta_r} (\tilde{\eta} - \eta_r) = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0) + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}(\tilde{\eta} - \eta_r).$$

Horrela, azken emaitza hau arestiko (5.30)-en ordezkatzuz eta metrika eta dentsitate perturbazioen isotropiagatik $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}} = k/\sqrt{3}$ hartuz, denbora konformalarekiko integrala ebatzi ahal izango dugu (B.6) erlazioaz baliatuz:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\eta_0, \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{p}}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0))} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta} g(\tilde{\eta}) e^{i\frac{k}{\sqrt{3}}(\tilde{\eta} - \eta_r)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0))} \frac{13.7\mathcal{H}_r}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{\eta} e^{-\left(\frac{(13.7\mathcal{H}_r)^2}{2}(\tilde{\eta} - \eta_r)^2 - i\frac{k}{\sqrt{3}}(\tilde{\eta} - \eta_r)\right)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0))} \frac{13.7\mathcal{H}_r}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{(13.7\mathcal{H}_r)^2}} e^{-\frac{k^2}{6(13.7\mathcal{H}_r)^2}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{p}}(\eta_r - \eta_0))} e^{-\frac{k^2}{6(13.7\mathcal{H}_r)^2}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{4}\delta\gamma + \Phi(\eta, x^i)\right)_{\mathbf{k}, \eta_r} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{p}}\eta_0)} e^{-(\sigma k)^2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

²Banaketa Gaussiarraren definizioa hauxe dugu: $g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$, non σ^2 bariantza eta μ itxarotako balioa diren.

³Zeren eta, ohartu, (5.16) ekuazio horretan esponontzialeko $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{\eta_r})$ -ren barne dagoen $k\tilde{\eta}$ ekarpenak garrantzia hartzen duela kurbaturaz azpitiko modoetarako.

Adierazpenak erraztearren, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{6}(13.7\mathcal{H}_r)}$ definitu dugu. Ohar bedi azken berdintzan jadanik posible dugula $\eta_r - \eta_0 \simeq -\eta_0$ aplikatzea, izan ere, jadanik kuantifikatu baitugu birkonbinaketaren luzera finituak dakarren eragina. Eta multipoloak tenperatura anisotropien autokorrelazio funtziotik datoztenez, C_l -ren espresio berria ondorengoa izango da:

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{k} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 e^{-2(\sigma k)^2} (j_l(k\eta_0))^2. \quad (5.32)$$

Horrela, lodiera finituko efektuak arestian aipatutako gai esponentzial bat dakarrela ikus dezakegu, fluktuazioen moteltze gehigarri bat suposatuko duena, hain zuzen. Gehigarria diogu, izatez, birkonbinaketa bat-batekoa ez izateak ere eraginik izan baduelako 4. kapituluko (4.34) moteltze eskalaren balioan [20].

5.3.1 Oszilazio akustikoak

Jadanik eskura dauzkagu azpikurbatura perturbazioekin lotutako tenperatura anisotropiei dagozkien multipoloak kalkulatzeko beharrezko tresna guztiak. Ezer baino lehen, (5.32)-n integrakizuneko Bessel-en funtzio esferikoen l handietarako portaera aztertuko dugu. $\nu = l + \frac{1}{2} \approx l$ definituz [23]:

$$j_l^2(k\eta_0) = \begin{cases} 0 & k\eta_0 < \nu \\ \frac{1}{(k\eta_0)\sqrt{(k\eta_0)^2 - \nu^2}} \cos^2 \left(\sqrt{(k\eta_0)^2 - \nu^2} - \nu \arccos \left(\frac{\nu}{k\eta_0} \right) - \frac{\pi}{4} \right) & k\eta_0 > \nu \end{cases} \quad (5.33)$$

Beraz, ikus dezakegu soilik $k\eta_0 > \nu \approx l$ modoez egingo dietela ekarpen ez nulua eskala angeluar txikieta-ko tenperatura fluktuazioei. Halaber, modo hauetarako agertzen den kosinu karratua bere batazbesteko balioa den $\frac{1}{2}$ balioarengatik ordezkatu dezakegu, (5.32)-ko materia eta dentsitate perturbazioak baino azkar-rrago aldatzen baita k uhin zenbakiarekin. Era horretan, $200 \lesssim l \lesssim 1000$ multipoloetarako haxe izango da burutu beharreko kalkuluaren adierazpen hurbildua:

$$C_l = \frac{1}{\pi} \int_{l\eta_0^{-1}}^\infty \frac{k^3 dk}{k} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 e^{-2(\sigma k)^2} \frac{1}{(k\eta_0)\sqrt{(k\eta_0)^2 - \nu^2}}. \quad (5.34)$$

Azter dezagun, orain, δ_γ eta Φ -rekin lotutako (5.34)-ko gaia. (4.32)-ko soluziei erreparatuz gero, zera izango dugu:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4} \delta_\gamma + \Phi(\eta, x^i) \right|_{\mathbf{k}, \eta_r}^2 &= \left| -\frac{1}{3c_s^2} T_p + T_o \sqrt{c_s} \cos \left(k \int_0^{\eta_r} c_s d\eta \right) e^{-(k/k_D)^2} + T_p \right|_{\mathbf{k}}^2 = \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{3c_s^2} \right)^2 T_p^2 \right) |\Phi_k^0|^2 + \left(\frac{T_o^2 c_s}{2} e^{-2(k/k_D)^2} \right) |\Phi_k^0|^2 + \left(\frac{T_o^2 c_s}{2} \cos \left(2k \int_0^{\eta_r} c_s d\eta \right) e^{-2(k/k_D)^2} \right) |\Phi_k^0|^2 + \\ &+ \left(2T_p T_o \left(1 - \frac{1}{3c_s^2} \right) \sqrt{c_s} \cos \left(k \int_0^{\eta_r} c_s d\eta \right) e^{-(k/k_D)^2} \right) |\Phi_k^0|^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Horrela, ohar bedi multipoloek lau ekarpen ezberdin izango dituztela kasu honetan. (5.35)-eko lehenengo bi batugaiak gai ez oszilakorrak diren bitartean, azken batugaiak azken aurrenekoaren periodo bikoitza duen kosinua dugu. Horra hor azpikurbatura modoez induzitutako tenperatura anisotropien izenaren jatorria: $c_s(\eta)$ soinuaren abiaduraren menpekota den maiztasuneko uhin oszilakorrak ageri zaizkigu espektroan, oszilazio akustikoak deituak. Era horretan, $x = \frac{k\eta_0}{l}$ aldagai aldaketa eginez eta $k^3 |\Phi_k^0|^2 = B$ eskalarekiko aldaezina den espektro primitiboa kontsideratu dugula gogoratu, ondorengo eran planteatu dezakegu C_l multipoloen kalkulua:

$$l(l+1)C_l \simeq l^2 C_l = N_1 + N_2 + O_1 + O_2,$$

non:

$$N_1 = \frac{B}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3c_s^2}\right)^2 \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \frac{T_p^2}{\sqrt{x^2-1}} e^{-2\left(\frac{\sigma l x}{\eta_0}\right)^2}, \quad (5.36)$$

$$N_2 = \frac{B c_s}{\pi} \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \frac{T_o^2}{\sqrt{x^2-1}} e^{-2(\sigma^2+1/k_D^2)\left(\frac{l x}{\eta_0}\right)^2}, \quad (5.37)$$

$$O_1 = \frac{B c_s}{\pi} \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \frac{T_o^2}{\sqrt{x^2-1}} \cos\left(2\frac{l x}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta\right) e^{-2(\sigma^2+1/k_D^2)\left(\frac{l x}{\eta_0}\right)^2}, \quad (5.38)$$

$$O_2 = \frac{2B}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3c_s^2}\right) \sqrt{c_s} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \frac{T_p T_o}{\sqrt{x^2-1}} \cos\left(\frac{l x}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta\right) e^{-2(\sigma^2+1/2k_D^2)\left(\frac{l x}{\eta_0}\right)^2}. \quad (5.39)$$

Ikuspuntu fisikotik ekarpen oszilakorrak direnez interesgarrienak, O_1 eta O_2 osagaiak kalkulatu ditugu B eranskinen (B.7) ekuazioaren laguntzaz baliatuz:

$$O_1 = \frac{B c_s}{\pi} \frac{1}{2} (T_o(1))^2 e^{-2(\sigma^2+1/k_D^2)\left(\frac{l}{\eta_0}\right)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\frac{l}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta}} \cos\left(2\frac{l}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta + \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.40)$$

$$O_2 = \frac{2B}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3c_s^2}\right) \sqrt{c_s} T_p(1) T_o(1) e^{-2(\sigma^2+1/2k_D^2)\left(\frac{l}{\eta_0}\right)^2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{l}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta}} \cos\left(\frac{l}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta + \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.41)$$

Analisis errazteko asmoz, O_1 eta O_2 ekarpenetako esponentzialetan ageri diren eskalak konmutadura ereduaren ($\Omega_b = 0.04$, $\Omega_m = 0.3$, $h = 0.93$) arabera hartzen dituzten balioetakoak direla onartuko dugu hemendik aurrera [23]:

$$\frac{\eta_0 k_D}{\sqrt{2}} \simeq 1200 \quad , \quad \frac{\eta_0}{\sigma \sqrt{2}} \simeq 1500. \quad (5.42)$$

O_1 -en eta O_2 -ren (5.40) eta (5.41) soluzioetan perturbazioen transferentzia funtzioek (T_p eta T_o direlakoe) zein c_s -k parametro kosmologiko ezberdinekiko menpekotasun zuzena dute; zehazki, materia hotzaren dentsitatearen (Ω_m), barionen dentsitatearen (Ω_b) eta Hubble-n konstantearen (h) arabera dira. [27]-n Mukhanov-ek proposatzen eta arrazoitzen dituen menpekotasunak (5.1) taulan laburbildu ditugu, hain zuzen.

Horrela, argi dago eskala angeluar txikietako tenperatura fluktuazio akustikoen Unibertsoaren hedapenaren zein konposaketaren inguruko informazioa emango digutela. Esate baterako, O_2 ekarpenak berak fotoiez gain bestelako materiaren presentziaren beharra adierazten digu: erradiazioz beteriko Unibertso batean $c_s = \frac{1}{3}$ genuke eta, ondorioz, (5.41)-tik O_2 nulua izango litzateke. Kurbaturaz azpitiko anisotropien profilaren azterketa sakonagoa burutuko dugu 6.kapituluan, parametro kosmologikoen balioek dituzten murrizketetako batzuk (*constraints*) ondorioztatu ahal izango ditugularik, besteak beste.

Horren aurretik, oszilazio akustikoen maximoak (tontorrak) analitikoki zein l -tan kokatzen diren aztertuko dugu. Horretarako, onartuko dugu O_1 -en anplitudea O_2 -ren anplitudearen balio absolutua (negatiboa baita) baino handiagoa dela eta, hortaz, oszilazioen tontorrak nagusiki O_1 -ren maximoei zor izango diegula. Anplitude positiboko kosinua daukagunez, ondorengoak izango dira bere maximoen kokapenak:

$$\cos\left(2\frac{l}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \leftrightarrow \frac{2l}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \leftrightarrow l \equiv l_n = \left(\frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta\right)^{-1} \pi \left(n - \frac{1}{8}\right). \quad (5.43)$$

$$T_p(x, \Omega_m) \simeq 0.74 - 0.25 \ln \left(\frac{x l}{200 \Omega_m^{-0.09} \sqrt{\Omega_m h^2}} \right)$$

$$T_o(x, \Omega_m) \simeq 0.5 + 0.36 \ln \left(\frac{x l}{200 \Omega_m^{-0.09} \sqrt{\Omega_m h^2}} \right)$$

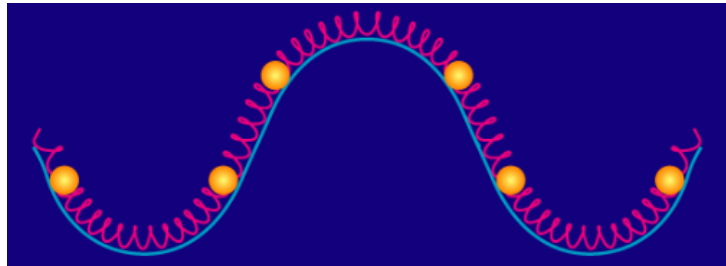
$$c_s(\Omega_b) = \frac{1}{\sqrt{3(1 + 17 \Omega_b h^2)}}$$

$$\frac{1}{\eta_0} \int_0^{\eta_r} c_s d\eta \simeq 0.014 (1 + 2.21 \Omega_b h^2)^{-1} (\Omega_m h^{3.1})^{0.16}$$

Taula 5.1: Parametro kosmologikoen menpekotasuna. Bertan, $\varepsilon_k = \frac{3\mathcal{H}_0^2}{8\pi G}$ dentsitate kritiko gisa definitu ohi den kantitatearekiko definitzen dira osagai ezberdinen energia dentsitateak ($\Omega_i = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}$) [22]. Bestalde, $h = \frac{\mathcal{H}_0}{75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}$ dugu, $1 \text{ Mpc} = 3.2616 \text{ argi urte} = 3.0857 \cdot 10^{22} \text{ m}$ izanik.

Ohartu, beraz, tontor akustikoen espektroan dituzten kokapenek ere parametro kosmologikoen menpekotasun zuzena aurkezten dutela. Dena den, ez dugu ahaztu behar azken (5.43) emaitza hau gure hurbilketen ondorio zuzena dela eta, hortaz, bere baliagarritasuna mugatuta egongo dela (bera ere era sakonago batean aztertuko dugu ondorengo kapituluan).

Orain arte burututako azterketak analitikoki oszilazio akustikoen daudela frogatzera eramaten gaituen heinean, hortik haratago joan gaitezke eta soinuen uhin hauen jatorria edota interpretazio fisikoa ematea lagungarria gerta dakiguke. Aurreko kapituluan esan dugun moduan, inflazio garaiko fenomeno kuantiko goiztiarrek energia dentsitateari eta potentzial grabitatorioari fluktuazioak eragin zizkieten: dentsitate altuko zonaldeetan potentzial putzuak indutzen dira eta energia dentsitate baxuko zonaldeetan, berriz, potentzial gailurrak agertarazten dira. Grabitateak potentzial putzuetan jariatzen diren kosmikoen konpresioa eragiten duen bitartean, potentzial gailurretan plasmaren zabalkuntza (alegia, gailurretik ihesaraztea) suposatuko du [19].



Irudia 5.2: Oszilazio akustikoen jatorriaren ereduaren irudikapena [19]. Bertan, potentzial putzuekin eta tontorrek batera, malguki baten modura ezaugarritutako presioaren ekarpena agertzen da. Energia dentsitate fluktuazioak zirkunferentzia laranjek adierazten dituzte, eta grabitatearen eta presioaren arteko borroka horren ondorioz oszilatzen egongo dute.

Baina, jakina, birkonbinaketa baino lehen jakin badakigu fotoiak oraindik Unibertsoan osagai ezberdinek osatzen duten fluidora akoplatuta daudela eta, beraz, fotoiek jariatzen diren presioaren ekarpen bat egongo

diote (gogoratu erradiazioaren kasuan $w = 1/3$ dela). Horrela, presio honek grabitatearen eraginari aurka egingo dio eta plasmak aurkezten duen erresistentzia horren emaitza zuzenak ditugu garaiko oszilazio akustikoak (ikus bedi aurreko orrialdeko (5.2) irudia). Are gehiago, inflazioan sortutako haziek eskala guztietan uzten dituztenez fluktuazioak, berauek Fourier-en transformatuaren bidez uhin zenbaki ezberdinetako uhin lauetan deskonposatzea ahalbidetzen digu: oszilazio akustiko horien maiztasuna, analitikoki ondorioztatu dugun bezala, $\omega(\eta) = kc_s(\eta)$ moduan ereduza daiteke.

Birkonbinaketa garaia iristean, barioiek fotoiei aske hedatzea ahalbidetzen diete eta deskribatu ditugun soinu uhinek oszilatzeari uzten diote, oszilazio horiek nolabait izoztuta gelditzen direlarik. Honenbestez, birkonbinaketa garairako oszilazioen muturretara heldu diren modoez (hau da, potentzial grabitatorioaren ondoriozko konpresio/zabalkuntza maximoa dutenek) areagotutako tenperatura fluktuazioen azternak gordeko dituzte eurekin: hauen adierazle ditugu, hain zuzen ere, CMB-aren tenperatura espektroan agertzen diren eta analitikoki lortu ditugun tontor akustikoak.

Fotoi-barioi jaraikinak birkonbinaketa heltzerako konpresio bat jasateko aukera izan duen oinarriko modo berezi bat izango du, eta berorren seinale dugu lehenengo tontor akustikoa. k uhin zenbaki bikoitza duen uhinak maiztasun bikoitzaz oszilaten duenez, jakin badakigu bigarren modo bat egonogo dela zeinak jadanik birkonbinaketarako konpresio eta zabalkuntza bana pairatu dituen (bigarren tontor akustikoa beronen adierazle dugu). Berdin hirugarren tontorrerako. Horrela, laugarren harmonikoari dagokion oszilazio akustikotik aurrera, berauen uhin luzeraren balioak erlazio zuzena du birkonbinaketa garaiko fotoiek talkarik jasan gabe egin dezaketzen ibilbidearekin (difusio luzerarekin): honek soinu uhinen aztarna hauek desagertaraztea eragingo du, ondorengo atalean aztertuko dugun moduan.

5.3.2 Silk-en moteltzea

(5.1) irudian ikus dezakegun moduan, hirugarren tontor akustikotik aurrera tenperatura anisotropiak oso azkar txikitzen dira: oszilazioen indargetze esponentzial bat bereiz daiteke, zeina gure adierazpenetan etengabe idatzi dugun $\exp\left(-\left(\frac{k}{k_D}\right)^2\right)$ ekarpenak sortua den. Baina zerri zor diogu gai esponentzial honen agerpena? Bada, John Silk zientzialariak 1968.urtean argitaratutako lanean deskribatu zuen fotoien difusioari, hain zuzen [32]. Era intuitibo batean azal daiteke berau.

Aztergai dugun birkonbinaketa garaia iristean, hidrogeno atomo neutroak sortzearekin batera fotoiak barioietatik desakoplatzen hasten direla aski argi daukagu. Halaber, fisikoki prozesu hau denbora tarte mugatu batean gertatzen da: Unibertsoa birkonbinatzen doan heinean, aske geratzen hasiak diren fotoiek barioiekin talkak paraitzeko denbora nahikoa dute eta sakabanaketaren ondoren guztiz ausazkoak diren ibilbideei ekiten diete. Ausaz egindako ibilbide hauek perturbazioen uhin luzera bat igarotzea edo zeharkatzea ahalbidetzen badiete, fotoi "hotzek" eta "beroek" elkarrekin nahasteko aukera izango dute, batazbestean fluktuazioak desagerraraziko dituztelarik, hain zuzen.

Prozesu honek noski denbora darama eta birkonbinaketako erradiazioaren argazkia den (5.1) irudian difusio eskalatik azpitiko multipoloen oszilazioak desagertzen dira, espektroaren anisotropia maila nolabait ere ahulduz. Beste era batean esanda, fotoien ausazko ibilbidearen (difusio luzeraren) balio edo balio txikiagoko uhin luzerako perturbazioek dakartzaten tenperatura fluktuazioak dira indargetuko direnak. Lehenengo hiru tontorrek efektu honi eusten diote.

Aurreko atalean aipatu bezala, difusioaren ondoriozko tenperatura fluktuazioen moteltzeari dagokion eskala $l_D \simeq 1200$ balioari dagokio, gutxi gorabehera [23]. Bestalde, Silk-en moteltzearen eskalaren kalkulua analitikoan birkonbinaketaren luzera finitua kontsideratzeak ikuspen funtzioa txertatzearen beharra dakar, (5.30)-en egin dugun moduan; kalkuluak eginez ikus daiteke ekarpen honek jatorrizko eragin esponentziala leunduko lukeela [20].

5.4 Bestelako prozesuen eragina espektroan: berionizazioa

Tenperatura anisotropien espektroaren azterketarekin bukatzeko, azken ohar bat egingo dugu Unibertsoaren berionizazioak behatutako tenperatura fluktuazioetan izan duen eraginaren inguruan. Berionizazioak fotoiak berriro akoplatzen ditu elektroien eta barioien plasmara edo jariakinera; hori dela eta, azken sakabanaketa gainazaletik era librean hedatutako fotoietako batzuek berriro ere sakabanaketak jasango dituzte, anisotropiei egiten zieten ekarpena galduz.

Sakonera optikoaren definiziotik jakin badakigu fotoien $1 - e^{-\tau}$ frakzioa izan dela birsakabanatua ($z_{ion} \simeq 5$ balioko lerrakuntza inguruan). Fotoi horiek berriro ere desakoplatuko dira euren batazbesteko ibilbide askea ionizazio garaiko horizonte eskala baino handiagoa denean: hori dela eta, tenperatura anisotropien espektroan birsakabanatu ez diren $e^{-\tau}$ fotoien ekarpena baino ez zaigu geratuko ionizazioko horizonte eskalatik behera (eta, eskala hontatik gora fotoi guztien ekarpena izango dugu). Hortaz, berionizazioaren eragina ondorengo eran laburbil daiteke:

$$C_l^0 = \begin{cases} C_l & l < l_{ion} \\ e^{-\tau} C_l & l > l_{ion} \end{cases} \quad (5.44)$$

C_l^0 bezala izendatu ditugu egun behatutako multipoloak, C_l -ak aurreko ataletan lortutako emaitza analitikoak diren bitartean. Modu batez berionizazioaren eragin hau kuantifikatzearen, $z_{ion} = 5$ eta konmuztadura ereduko parametroen balioak kontsideratuz, $l_{ion} \simeq 7$ lortzen dugu [27]. Hortaz, Planck misioko $\tau = 0.0561$ sakonera optikorako, $l > 7$ multipoloetarako emaitza analitikoaren ekarpenaren $e^{-\tau} \simeq \%95$ -a behatuko genuke eta espektroa bere horretan mantenduko litzateke $l < 7$ eskaletarako.

Kapitulua 6

CMB-aren tenperatura multipoloen espektrotik irakurritako informazioa

Azken kapitulu honetan, lehenik eta behin, aurreko ataletan ikusitako teoria analitiko hurbilduaren mugak aztertuko ditugu. Horretarako, oszilazio akustikoen kokapenen inguruko azterketaz baliatuko gara, (5.43) emaitza oinarritzat hartuko dugularik. Behin hori eginda, lortu dugun tenperatura anisotropien espektro analitikotik parametro kosmologikoen inguruan ondoriozta daitezkeen zenbait ideien lanketa burutuko dugu, zeinak lan honetan zehar jarraitutako estrategia indartzen lagunduko digun.

6.1 Oszilazio akustikoen kokapenen inguruko azterketa

Argi geratu da ezinezkoa litzazigukeela aurreko ataletako emaitzak lortzea hasiera batetik hurbilketa-rik egin izan ez bagenu. Hurbilketa horien bitartez lortutako adierazpen analitikoak fenomeno fisiko ezberdinen interpretazio kualitatiboak egiteko baliagarriak izan zaizkigun arren, oraindik aztertzeke daukagu bertatik lortzen diren zenbakizko soluzioak zein puntutaraino datozen bat erralitatearekin. Hori baloratzeko erabiliko dugun tresna tontor akustikoen posizioak izango dira. Lehenengo hiru tontorrei ($n = 1, 2, 3$) dagozkien posizioak ebatziko ditugu, laugarren tontorretik aurrera arestian azaldu dugun Silk-en moteltzearen ondorioz oszilazioak esponentzialki indargetzen baitira, hain zuzen. Horretarako, hiru estrategia ezberdin planteatuko ditugu:

- Lehenengo ebazpena (Analitikoa 1): Planck-en misioan estimatutako parametro kosmologikoen balioak gure adierazpen analitikoetan ordezkaturiko ditugu, Planck-en emaitzen eta teoriaren arteko adostasuna aztertzeko. Hauek dira lehen ebazpen honetan erabilitako parametroen balioak: $h = 0.9$, $\Omega_m h^2 = 0.2111$ eta $\Omega_b h^2 = 0.0397$.
- Bigarren ebazpena (Analitikoa 2): honetan, aurreko atalean definitu dugun konmutadura ereduak onartutako parametroen balioak erabili ditugu; azken batean, eredu honek behaketa ezberdinetako emaitzak aintzat hartzen ditu eta guk garatutako teoria analitiko hurbilduarekin adostasun handiago batera heltzen lagun diezaguke.
- Hirugarren ebazpena (Planck): hirugarren hau, izatez, ez dugu ebazpena; hemen, Planck-en misioan ondorioztatutako tontor akustikoen posizioen emaitza zuzenei erreparatuko diegu [4]; era horretan, hirugarren kasu honek, gure emaitza hurbilduak gizakiak aurrera eramandako misio bateko balio errealistekin alderatzeko aukera emango digu.

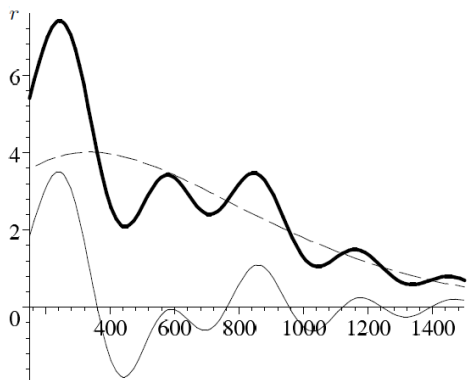
Hurrengo orrialdeko (6.1) taulan ikus ditzakegu hiru ebazpen horietako bakoitzean (5.43) erabiliz lortu ditugun l_1 , l_2 eta l_3 direlakoen balioak.

Kokapena	Analitikoa 1	Analitikoa 2	Planck
l_1	279	265	220
l_2	598	569	538
l_3	917	872	809

Taula 6.1: Lehenengo hiru tontor akustikoen posizioak. Lehenengo zutabeen (5.43)-eko emaitzak adierazi ditugu, Planck-en misioan estimatutako parametro kosmologikoen balioak erabiliz. Bigarren zutabeen, komunztadura ereduaz baliatu gara (5.43) ebazteko. Hirugarren zutabeen Planck-en misioan bertan lortutako kokapenak azaltzen dira (ikus (5.1) irudia).

Ikus dezakegun moduan, atal honetan analitikoki garatutako emaitzak Planck-en misioan lortutakoetik ahalik eta gertuen egon daitezen, konmuztadura eredu erabiltzea komeni zaigu gehien. Izan ere, Planck-eko misioan ondorioztatu ziren parametroen balioak gure espresio teorikoetan ordezkatzuz gero (Analitikoa 1), argi ikus daiteke (6.1) taulako hirugarren zutabeko emaitzetatik zertxobait gehiago aldentzen garela. Honek agerian uzten du lan honetan garatutako soluzioak egokiak direla batez ere tenperatura anisotropien espektroaren itxura, joera eta beronen parametro kosmologikoen menpekotasuna ondorioztatzeko, baina ez ordea balio numeriko guztiz zehatzak lortzeko.

Ikus bedi, orain, azpiko (6.1) irudia, zeinak konmuztadura eredu parametroen balioak erabiltzen dituen. Beha daitekeen moduan, analitikoki ebatzi ez dugun ekarpen ez oszilakorrak tontor akustikoen altuera handitzen du eta baita kokapena desplazatu ere. Halaber, gogoratu guk maximoen posizioak O_1 ekarpena kontsideratuz ebatzi dugula, baina izatez, periodo bikoitza duen O_2 ekarpenak ere eraginik izango du posizioetan (O_1 -en maximoen eta O_2 -renen arteko l batean egongo dira tontor akustikoak, bi horien arteko interferentziaren emaitza zuzena baitira).



Irudia 6.1: Oszilazio akustikoak nagusi direneko espektroaren tartea [26]. Ardatz bertikalean $r = \frac{l(l+1)C_l^{AC}}{l(l+1)C_l^{SW}}$ oszilazio akustikoen multipoloen eta Sachs-Wolfe efektuko multipoloen arteko ratioa adierazten da eta ardatz horizontalean l momentua. Azpimarratuta dagoen kurbak kalkulatu ditugun O_1 eta O_2 ekarpen oszilakorraren (lerro leunaren) eta N_1 eta N_2 ekarpen ez oszilakorraren (lerro etenaren) arteko batura adierazten du.

Horretaz gain, kontutan hartu beharra dago (besteak beste) Silk-en indargetzeari dagokion k_D eskalak parametro ezberdinekiko dituen menpekotasunak, zein gure adierazpen analitikoetan kontsideratu ez dugun berionizazioak ere zerikusirik izan badutela emaitza hurbilduetan lortutako desadostasunetan.

Halere, aipatu ditugunak Planck-ek emandako emaitza zuzenetatik aldendu izanaren arrazoiak baino ez dira. Badute bere garrantzia noski, baina kontutan hartuta zenbat hurbilketa burutu ditugun eta beste zenbat fenomeno arbiatu, ezin uka dezakegu gure teoria analitikoak emaitzetara hein handi batean gerturatzea ahalbidetu ez digunik, hamarkada batzuetako desbideraketak besterik ez baititugu lortu.

6.2 Parametro kosmologikoekin lotutako irakurketa

Amaitu berri dugun (6.1) ataleko emaitzek agerian utzi dute aurreko kapituluetan garatu dugun teoria hurbilduak atzean duen funtsa edo muina fisikoa mantentzen jarraitzen duela. Hori dela eta, azken azpiatal honetan pausu bat aurrerago joango gara eta gure CMB-aren anisotropien espektroak parametro kosmologikoei buruz zein informazio gordetzen duen arakatuko dugu.

Alde batetik, eskala angeluar handietako Sachs-Wolfe efektuaren ondoriozko haran lauak inflazio garaiko perturbazioen anplitudearen inguruko informazioa emango digu; hala, eskala aldaezina den espektro goiztiarrerako ($n_s = 1$), $l < 30$ momentuko multipoloen anplitudeek B konstantearen balioa determinatzea ahalbidetuko dute. Are gehiago, eskala angeluar hauetan behatutako anisotropiek erakutsi ditzaketen malda aldaketak jatorrizko espektroa zein puntutaraino den eskala aldaezina aztertzen lagungarri izan daitezke. Era horretan, behaketek argi utzi dute indize espektrala izatez unitatetik oso gertu dagoela (ikus bedi (6.2) taula).

Bestalde, oszilazio akustikoei dagokienez, berauek Unibertsoaren kurbatura espazialaren, materia dentsitate ezberdinen eta Hubble-n konstantearen inguruko informazioa eman diezaguketela ikusiko dugu, besteak beste. Lehenik eta behin, lehenengo tontor akustikoaz baliatuko gara. Izan ere, ohartu beronen posizioa ($l_1 \simeq 220$) birkonbinaketa garaiko eskala angeluarrari dagokiola (aurreko kapituluaren aipatu bezala 1° inguruko dena). Aldi berean, birkonbinaketako horizontearen irekidura angeluarra $\sqrt{\Omega_{tot}}$ -ren proportzionala denez [27], $l_1 \propto (\Omega_{tot})^{-\frac{1}{2}}$ izango da. Orduan, kurbatura espaziala duen Unibertso ireki baten kasuan ($\Omega_{tot} < 1$) lehenengo tontor akustikoa l handiagoetara (eta, beraz, eskala angeluar txikiagoetara) desplazatuko litzateke, hain zuzen. Baina, nahikoa al da lehenengo tontorraren kokapenez baliatzea kurbatura espaziala finkatzeko?

5.3.1 ataleko emaitzetan, halaber, l_1 delakoa $\Omega_b h^2$ eta $\Omega_m h^2$ materia dentsitateen menpekota dela ikusi dugu. (5.43)-ren arabera, ikus daiteke bariori dentsitatearen handitzeak eta materia ilunarena txikitzeak ere l_1 eskubirantz desplazatuko lukeela. Hortaz, argi dago lehenengo tontor akustikoaren kokapen soilarekin ezin izango dugula kurbatura espaziala zehaztu, parametroekiko endekapena existitzen baita [19]. Endekapen hau hausteko, lehenengo tontorraren altueraz balia gaitzake. Multipolo oszilakorren anplitudeak berriro ere barioien eta CDM-ren dentsitateen menpekoak dira: kasu honetan, $\Omega_b h^2$ handitzeak lehenengo tontorraren altuera handitzea dakarren bitartean, $\Omega_m h^2$ -ren handitzeak aurkako eragina (txikitzea) du. Portaera honek ahalbidetuko digu kurbatura espazialarekin dugun endekapena haustea: lehenengo tontorraren altuera finko utz dezakegu barioien eta materia ilunaren dentsitateen aldibereko hazkunde baten bitartez; gainera, arestian esandakoaren arabera, bi hazkunde hauek ere ez lukete aldatarik suposatuko l_1 posizioan (kontrako efektua baitute). Ondorioz, lehenengo tontor akustikoaren altuera finko baterako, l_1 kokapenak kurbatura espazialarekiko menpekotasuna baino ez du! Lehenengo oszilazio akustiko honen behaketek kurbatura espazial lau baten ebidentzia garbia utzi dute ($\Omega_{tot} \simeq 1$).

Kurbatura espazialaren eta bariori zein materia ilun dentsitateen arteko endekapena ezabatzea lortu dugun arren, soilik lehen tontor akustikoa aztertuz aipatu bi dentsitatei buruzko mugapenik edota erlaziorik lortzea ezinezkoa zaigu.

Ildo horretatik, kontsidera dezagun orain zein eragin duen bigarren tontor akustikoaren presentziak. Horretarako kontutan hartu behar dugu bigarren tontor akustikoa ($n = 2$) O_1 -ren eta O_2 -en arteko lehenengo interferentzia suntsitzailearen emaitza zuzena izango dela (jakina, O_2 -k O_1 -en periodo bikoitza baitu eta anplitudea, berriz, negatiboa (ikus (5.41))). Ekarpene suntsitzaile honek $\Omega_b h^2$ handitzearekin batera bigarren tontorraren altuera txikitzea dakar; aitzitik, $\Omega_m h^2$ -ren handitzeak ere altuera jaitsiaraziko du, lehenengo tontorraren kasuan ez bezala. Azken honen zergatia O_1 -en anplitudean ageri den T_o^2 transferentzia funtzioa materia ilun dentsitatea handitzean ekarpen negatiboa egiten duen O_2 -ren $T_p T_o$ transferentzia funtzioa baino azkarrago txikitzen dela da [27]. Orain arte esandako laburtuz, A_1 eta A_2 badira lehen bi tontor akustikoen altuerak:

$$\begin{aligned}\Omega_b h^2 \uparrow (\downarrow) &\rightarrow A_1 \uparrow (\downarrow) \quad A_2 \downarrow (\uparrow) \\ \Omega_m h^2 \uparrow (\downarrow) &\rightarrow A_1 \downarrow (\uparrow) \quad A_2 \downarrow (\uparrow)\end{aligned}$$

Horra hor, bada, barioi eta CDM dentsitateen arteko endekapenaren haustearen gakoa. Izan ere, barioi dentsitateak eta materia ilun dentsitateak bigarren tontor akustikoa ez desagertzeko bezain txikiak izan behar baitute, eta aldiberean, lehenengo tontor akustikoaren altueraren ezagutzak bi dentsitate horiek euren artean bete beharreko desberdintza zehaztuko digu. Behaketetako datuak aintzat hartuz, Ω_m eta Ω_b unitatetik (dentsitate kritikotik alegia) oso azpitik daudela eta $\Omega_m > \Omega_b$ dela frogatua izan da.

Bestalde, ohar bedi lehenengo tontorraren altueraren eta bigarren tontorraren existentziaren konbinazioak materia barionikoaz eta materia ilun hotzaz gain Unibertsoa betetzen duen bestelako osagairik egon behar duela zehazten duela ($\Omega_{tot} \simeq 1$ izan behar duelako): horixe dugu, bada, energia ilunaren existentziaren frogetako bat, hain zuzen. Azkenik, Hubble-n konstanteari dagokionez, CMB-aren anisotropiek beronen balioaren inguruko informazioa eman diezagukete: (5.1) taulako menpekotasunak aztertuta, ikus daiteke tontor akustikoen (5.43) kokapenak $\Omega_m h^{3.1}$ -ren menpekoak diren bitartean, altuerak (oszilazioen anplitudeek) $\Omega_m h^2$ -ren menpekotasuna dutela. Ondorioz, h -rekiko aldakortasun hau ahula izan arren, erabilgarria izan da bere balioaren zehaztasuna hobetzeko. Atal honetan burututako azterketaren ildo beretik doazen ikerketek parametro ezberdinen balioak ondorengo (6.2) taulan adierazitako zehaztasunez ezagutzea suposatu du.

Parametroa	Balioa	Parametroa	Balioa
\mathcal{H}_0	67.66 ± 0.42	n_s	0.9665 ± 0.0038
$\Omega_m h^2$	0.14240 ± 0.00087	Ω_Λ	0.6889 ± 0.0056
$\Omega_b h^2$	0.02242 ± 0.00014	Adina [Gurte]	13.787 ± 0.020
τ	0.0561 ± 0.0071	$k_D [\text{Mpc}^{-1}]$	0.14078 ± 0.00028
$10^9 B$	2.105 ± 0.030	z_{ion}	7.82 ± 0.71

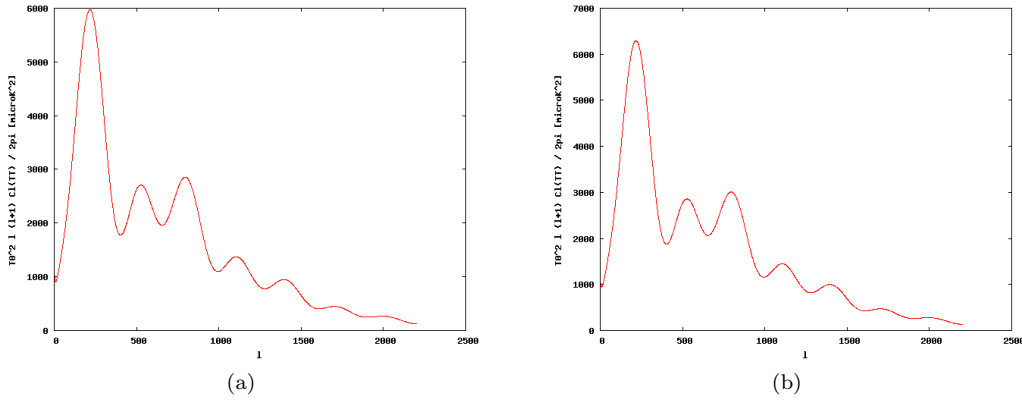
Taula 6.2: Planck-en misioaren 2018ko emaitzekin batera argitaratutako parametro ezberdinen balioak [2]. Taula honetan, $h = 0.6766$ da.

Lan honetan zehar jarraitu dugun estrategia beraz, hurbilketa analitikoak eginez, CMB-aren tenperatura anisotropien nondik norakoak ulertzeko erabilgarriak diren espresioak lortzea izan da, eta ondoren hortik

zein datu eskura ditzakegun aztertzeke aukera izan dugu. Errealitatean, ordea, honetan diharduten zientzielariak jarraitzen duten ibilbidea ez da hori: 4. eta 5. kapituluetakoko ekuazioak numerikoki, zenbakizko metodoen bitartez, ebatzi ohi dituzte eta bertatik lortutako emaitzak interpretatu.

Modu honetan, interesgarria da NASA-ko web orrialdean eskuragarri dagoen CAMB (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*) tresna¹. Aplikazio honek parametro kosmologiko ezberdinen balioak hartzen ditu *input* bezala eta balio horiei dagokien CMB-aren espektroa bueltatzen du, horretarako *Fortran90*-en idatzitako kode batez² baliatzen delarik. Gainera, bestelako propietate batzuk doitzeko aukera ere ematen digu: adiabatikoak ez diren perturbazio eskalarrak aukera daitezke, perturbazio bektorial zein tentsorialak grafika daitezke, kontsideratu nahi dugun multipoloen momentu maximoa (l_{max}) ere zehaztu daiteke, eta abar.

Adibide bat planteatzearren, tresna honetaz baliatuko gara berionizazioaren eragina ere ebazpen numerikoetatik ondoriozta daitekeela ikusteko. Alde batetik, CAMB delakoari (5.4) atalean aipatutako adibide numerikoan bezala $z_{ion} = 5$ lerrakuntzan emandako berionizazioa kontsideratzeko aginduko diogu. Eta, bestetik, bigarren espektro bat itzultzeko eskatuko diogu baina berionizaziorik kontsideratu gabe. Azpiko irudian ikus ditzakegu bi kasu hauen emaitzak.



Irudia 6.2: Ezkerraldeko irudian $z_{ion} = 5$ -eko berionizazioa kontutan hartuta lortutako CMB-aren tenperatura anisotropien espektroa adierazten da. Eskuinaldekoan, aldiz, ez da berionizaziorik kontsideratzen. Gainontzeko parametroetarako ($\mathcal{H}_0, \Omega_m h^2, \Omega_b h^2$) (6.2) taulako balioak erabili ditugu.

Espero genuten moduan, berionizazioak espektroaren txikitzea dakar. CAMB-ek *output* bezala eskuragarri utzitako datu fitxategiak erabiliz, ikusi dugu bi kasuetan lehenengo tontor akustikoa $l_1 = 217$ posizioan kokatzen dela; lehenengo tontor honetan berionizazioak eragindako indargetzea zein den ere determina dezakegu fitxategi horietatik ((5.44) ekuazioko notazio bera erabiliz):

$$\frac{C_{l=1}^0}{C_{l=1}} = \frac{5971.2}{6295.3} = 0.9485 \quad (6.1)$$

Eta ohartu emaitza hau bat datorrela berionizazioa azaldu duguneko (5.4) ataleko $\simeq 95$ -eko balioarekin, hain zuzen. Honek agerian uzten du errealitatean erabiltzen diren zenbakizko metodoek lan honetan jarraitu dugun estrategia analitikoaren alternatiba eraginkorra suposatzen dutela. Aurkako ibilbidea jarraitzen da, azken batean: zehaztutako parametroen balioetarako, kalkulu numerikoen bitartez lortutako espektroa behatutakoarekin ahalik eta adostasun handienera heltzea bilatzen da, bada.

¹Esteka honek bertara garamatza: https://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_camb_form.cfm

²Antony Lewis eta Anthony Challinor ikerlariak idatzi zuten kode hau.

Kapitulua 7

Ondorioak eta gogoetak

Lan osoan zehar landutako oinarri teorikoak eta analitikoki lortutako emaitzak aintzat hartuz hainbat ondorio atera ditzakegu. Alde batetik, argi dago Unibertsoaren hedapenari zor diogula gaur egun dektatua izan den hondoko erradiazio kosmikoaren tenperatura anisotropiak behatzea. Birkonbinaketa garaian kokatutako behatzaile batek CMB guztiz isotropo bat behatuko luke, soilik haren inguru hurbileko fotoien ekarpena neurtzeko baino ez bailitzateke gai izango. Haatik, denborak aurrera egin ahala, gero eta urrunagotik datozen fotoiak helduko zaizkio behatzaile irudikari horri; horrela, ia 14 biloi urte pasa ondoren, azken sakabanatze gainazaletik geodesiko nuluetan barrena hedatutako fotoiak heldu zaizkigu (gaur egun, gorriranzko lerrakuntza kosmologikoaren eraginez, espektrorik elektromagnetikoaren mikrouhin-tarteari dagozkionak) eta berauek garai goiztiarreko Unibertsoari buruzko informazioa inprimatuta daramate.

Izatez, azken sakabanaketa gainazal horretan inflazio garaiko fluktuazio kuantikoetan jatorria duten inhomogeneitateak anisotropia gisa ikusten ditugu. Azken batean, esan genezake birkonbinaketa garaiko homogeneitate eza gaur egungo isotropia angeluar ezan bilakatu dela. Horra hor, agian, lanean zehar abstraktuena suerta daitekeen ideia edo kontzeptua: $\theta \simeq \frac{\pi}{7}$ tarte angeluarraz banatutako bi norabidetatik datorkigun erradiazioaren tenperatura autokorrelazioak Unibertso goiztiarreko $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ uhin luzerako perturbazioen aztarnak dakartza. Eskala guztien artean, bereziki garrantzia duen bat nabarmendu dugu: birkonbinaketa garaiko horizontea gaur egungo zeruan $\theta \simeq 1^\circ$ inguruko eskala angeluarrari dagokio. Eskala angeluar honek energia dentsitate perturbazioak bi modu ezberdinetan lantzea suposatzen digu: batetik, eskala angeluar hauen goitikako modoez ez dute eboluzionatzeko aukerarik izan eta inflazio teoriaren egiaztapen sendoa suposatzen dute; eta, bestetik, eskala angeluar txikiagoetan, birkonbinaketa aurretik Unibertsoa menderatzen zuen jariakinaren soinu oszilazioen aztarnak landu ditugu, zeinak parametro kosmologiko ugariaren inguruko azterketa sakona ahalbidetu duten (Unibertsoaren geometria, konposaketa, historia termikoa, birkonbinaketaren iraupena...).

Matematikari dagokionez, azken sakabanaketa gainazalaren esferikotasunak fisikan hain erabiliak diren harmoniko esferikoetatik baliatzeko aukera eman digu: modu honetan, garapen matematiko hutsak anisotropien adierazle diren multipoloak (espektrora) birkonbinaketa garaiko metrika zein energia dentsitate perturbazioekin erlazionatzera eramanez gaitu. Are gehiago, perturbazio hauek k uhin zenbaki ezberdina duten eta independenteki eboluzionatu duten modoetan deskonposatzeak kalkulu analitikoak errazten lagundu digu. Halaber, Fourier-en transformazioen erabilpenaren aukeraketa hau are indartsuagoa suertatzen da, landu ditugun fluktuazioak lehenengo ordenako perturbazio teoria kosmologiko baten emaitza zuzenak baitira: teoria guztiz lineala alegia.

Bestalde, lan honetan soilik perturbazio eskalarrak kontsideratu ditugu: hauek Unibertsoaren historiari eta hedapenari buruzko informazio iturrietako bat baino ez dira. Izan ere, CMB-an ere badute eragina guk kontsideratu ez ditugun eta perturbazio tentsorialekin deskribatzen dituzten uhin grabitazionalak.

Lan honen helburutik at geratzen den arren, puntu honetan CMB-aren polarizazioak garrantzia hartzen du. CMB-aren polarizazio patroia ortogonalak diren bi polarizazio-modotan bana daiteke: E-modoa (edo errotazional nuluko modoa) eta B-modoa (edo dibergentzia nuluko modoa). Lan honetan aztertu ditugun energia dentsitate perturbazioek (eskalarrek) tenperatura fluktuazioez gain, E-modoa sortzen dituzte CMB-aren polarizazioan. Aitzitik, uhin grabitazionalak (perturbazio tentsoarialek alegia) tenperatura fluktuazio eta E-modoez gain, B-modoa ere eragiten dituzte CMB-aren polarizazio patroian eta horixe da hain zuzen euren garrantziaren arrazoi nagusia: azken batean, B-modoen detekzioak¹ inflazio ereduak aurreratzen dituzten uhin grabitazionalen inguruko informazioa emango baitigute. Hortaz, interesgarria izan liteke lan honen jarraipen modura CMB-aren polarizazioaren azterketari ekitea, eta horretarako baliagarria gerta dakiguke noski lan honetan tenperatura anisotropiak azaltzeko garatutako perturbazio teoria kosmologikoa.

Horrela, oinarritzat hartu dugun Planck-en misioak kosmologiaren eta behaketa-tekniken aurrerakuntzan garrantzi handia izan duela argi dago. Inolako aurrekaririk gabeko bereizmenarekin eta sentsibilitatearekin CMB-aren tenperaturaren eta polarizazioaren mapak argitaratzearekin batera Unibertsoaren garai goiztiarrak zehaztasun handiz ezagutzeko aukera zabaldu du. Are gehiago, polarizazio patroiko B-modoen detekzioak Planck-en ondoren datozen misioetarako erronka berria suposatuko du²; arlo horretan gehiago sakontzeko eta aurrerapasoak emateko argumentu sendoak finkatu dira eta emaitza gero eta hobeagoak lortzea espero da.

Azkenik, lanaren hasieran esan dugun moduan, Planck-en misioan ikerlariak Λ CDM ereduaz baliatu dira eta bertako parametroen balioak ere inoizko zehaztasunarekin argitaratu dituzte. Baina honek ez du esan nahi jadanik kosmologia guztia zehaztuta gelditu denik, ezta gutxiagorik ere.

Izan ere, ildo honetatik, interesgarria da esaterako azken urte hauetan Planck-en misioan estimatutako Hubble-n parametroaren balioaren inguruan sortu den eztabaida. Adam G. Riess zientzialaria nagusi duen ikerketan, galaxietarako zein luminositate edo argitasun handiko objektuetarako (supernovetarako) distantzien kalibrazio metodo batez baliatzen dira Hubble-n parametroaren balioa lortzeko, ondorioztatu duten balioa $\mathcal{H}_0 = 72.25 \pm 2.38 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ izan delarik [30]. Jakina, Planck-en $\mathcal{H}_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ -rekin bat ez datorrena. Bi ikerketa lan hauek Unibertsoaren hedapen erritmoa neurtzeko teknika eta eredu ezberdinaz baliatzen dira eta bi emaitzen arteko adostasun eta bateragarritasun faltak (errore tarteez ez baitute ezta elkar gurutzatzen ere), ziurgabetasun berri bat erantsi diete egungo eta, zer esanik ez, etorkizuneko kosmologiari.

¹Planck-ek B-modoei dagokien espektroa detektatu duela egiaztatu da jadanik [28].

²Esperimentu horien artean aipa daitezke, esate baterako [5]: The QUIJOTE Experiment, GroundBIRD, edota LiteBIRD.

Eranskina A

Zenbait kalkulu tentsorial

A.1 Alderantzizko metrika

(4.15)-ko FLRW metrika perturbatuaren alderantzizkoa era errazean topa daiteke, $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ propietatea erabiliz. Lehenengo ordenako perturbazio gaiak soilik kontsideratuz, zuzenean ondoriozta daiteke hauxe dela alderantzizkoa:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{1}{a^2}(1 - 2\Phi) & \alpha = \beta = 0 \\ -\frac{1}{a^2}(1 + 2\Phi)\delta^{ij} & \alpha = i \quad \beta = j \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Christoffel-en ikurrak

Einstein-en tentsorearen $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$ definizioan agertzen diren $R_{\alpha\beta}$ tentsorea eta R eskalarra Ricci-ren tentsorea eta eskalarrak dira, hurrenez hurren [11]:

$$R_{\alpha\beta} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho}\Gamma_{\beta\rho}^{\lambda}, \quad R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.2})$$

non

$$\Gamma_{\beta\rho}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\beta}g_{\lambda\rho} + \partial_{\rho}g_{\lambda\beta} - \partial_{\lambda}g_{\beta\rho}) \quad (\text{A.3})$$

bere bi azpiindizeetarako simetrikoak diren Christoffel-en ikurrak diren. Horrela, (4.15) metrikarako Christoffel-en ikurren adierazpenak ezagutu nahi ditugu, ondoren Einstein-en tentsorearen definizioarekin $\delta G_{\beta}^{\alpha}$ kalkulatzeko. Eranskin honetan $\alpha = \beta = 0$ kasua garatuko dugu (adibide bezala). Hasteko, Christoffel-en ikurrari dagokionez:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{\lambda 0} - \partial_{\lambda} g_{00}) = \frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{00} = \frac{(1-2\Phi)}{2a^2} \frac{\partial}{\partial \eta} (a^2(1+2\Phi)) = \\ &= \frac{(1-2\Phi)}{2a^2} (2aa'(1+2\Phi) + 2a^2\Phi') = (1-2\Phi) \left(\frac{a'}{a}(1+2\Phi) + \Phi' \right) = \\ &= \frac{a'}{a} + 2\frac{a'}{a}\Phi + \Phi' - 2\frac{a'}{a}\Phi = \\ &= \Phi' + \frac{a'}{a} = \Phi' + \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Modu bertsuan gainontzeko indizeetarako kalkuluak ondorengo Christoffel-en ikurretara garamatzatela ikus daiteke [6]:

$$\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{00}^i = \Phi_{,i}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H}(1 - 4\Phi)\delta_{ij} - \Phi'\delta_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_{j0}^i = (\mathcal{H} - \Phi')\delta_j^i, \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{jk}^i = \Phi_{,i}\delta_{jk} - \Phi_{,j}\delta_{ik} - \Phi_{,k}\delta_{ji}. \quad (\text{A.8})$$

Horrela, (A.2) eta (A.5)-ren bitartez, Ricci-ren tentsorearen 00 osagaiaren 1. ordenerarteko emaitza lor dezakegu, bada:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{0\rho}^\lambda = \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0i}^\rho \Gamma_{0\rho}^i = \\ &= \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{00}^j - \Gamma_{0i}^0 \Gamma_{00}^i - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i = \\ &= \partial_i (\Phi_{,i}) - \partial_0 (\mathcal{H} - \Phi') \delta_i^i + (\mathcal{H} - \Phi') (\mathcal{H} + \Phi') \delta_i^i + (-\Phi_{,i})^2 - (\Phi_{,i})^2 - (\mathcal{H} - \Phi')^2 \delta_i^j \delta_j^i \simeq \\ &\simeq \nabla^2 \Phi - 3(\mathcal{H} - \Phi')' + 3\mathcal{H}^2 - 3(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{H}\Phi') = \\ &= \nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}' + 3\Phi'' + 6\mathcal{H}\Phi'. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Baliokideki, Christoffel-en ikurren adierazpenetaz baliatuz, gainontzeko indizeetarako Ricci-ren tentsorearen osagaiak lor daitezke ondorengo emaitzetara helduz [6]:

$$R_{0i} = 2(\Phi'_{,i} + \mathcal{H}\Phi_{,i}), \quad (\text{A.10})$$

$$R_{ij} = (\nabla^2 \Phi - \Phi'' - 6\mathcal{H}\Phi' + (1 - 4\Phi)(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2))\delta_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Aurreko emaitzak zuzenean ordezkaturik, Ricci-ren eskalarra lor dezakegu:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} \simeq \frac{2}{a^2} (-\nabla^2 \Phi + 3\Phi'' + 12\mathcal{H}\Phi' - 3\mathcal{H}' + 6\mathcal{H}'\Phi - 3(1 - 2\Phi)\mathcal{H}^2). \quad (\text{A.12})$$

A.3 δG_0^0 -ren kalkulua

Orain, Einstein-en tentsorearen definizioa aplikatuz bilatzen ari garen δG_0^0 lehenengo ordenako perturbazioaren espresiora iritsiko gara:

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}g^{00}R_{00}g_{00} - \frac{1}{2}g^{ij}R_{ij}g_{00} = \frac{1}{2}R_{00} + \frac{(1 + 4\Phi)}{2}\delta^{ij}R_{ij} = \\ &= \frac{1}{2}(\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}' + 3\Phi'' + 6\mathcal{H}\Phi') + \frac{(1 + 4\Phi)}{2}\delta^{ij}\delta_{ij}(\nabla^2 \Phi - \Phi'' - 6\mathcal{H}\Phi' + (1 - 4\Phi)(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)) = \\ &= \frac{1}{2}(\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}' + 3\Phi'' + 6\mathcal{H}\Phi') + \frac{3(1 + 4\Phi)}{2}(\nabla^2 \Phi - \Phi'' - 6\mathcal{H}\Phi' + (1 - 4\Phi)(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)) = \\ &= \frac{\nabla^2 \Phi}{2} - \frac{3}{2}\mathcal{H}' + \frac{3}{2}\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + \frac{3}{2}\nabla^2 \Phi - \frac{3}{2}\Phi'' - 9\mathcal{H}\Phi' + \frac{3}{2}\mathcal{H}' + 3\mathcal{H}^2 - 6\Phi\mathcal{H}' - 12\Phi\mathcal{H}^2 + 6\Phi\mathcal{H}' + 12\Phi\mathcal{H}^2 = \\ &= 3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2 \Phi - 6\mathcal{H}\Phi' \equiv {}^{(0)}G_{00} + \delta G_{00}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Ondorioz, lortu berri dugun adierazpenetik $\delta G_{00} = 2\nabla^2 \Phi - 6\mathcal{H}\Phi'$ dela irakur dezakegu. Dena den, azken emaitza eskuratu aurretik, lan osoaren zehar erabilitako indizeen notazioa mantentzeko asmoz metrikaren alderantzizkoaz baliatuz indize bat jaitsiko dugu:

$$G_0^0 = g^{00}G_{00} = \frac{1}{a^2}(3\mathcal{H}^2 + 2\nabla^2 \Phi - 6\mathcal{H}\Phi' - 6\mathcal{H}^2\Phi) \equiv {}^{(0)}G_0^0 + \delta G_0^0. \quad (\text{A.14})$$

Espero bezala, ohartu soilik 0. ordenako gaia hartuz Einstein-en 00 ekuazioa (Friedmann-en ekuazioa) berreskuratzen dugula Unibertso homogeneorako. Orain bai, heldu gara bilatzen ari ginen 1. ordenako perturbazioaren Φ -rekiko menpekotasuna ezagutzera, bada:

$$\delta G_0^0 = \frac{1}{a^2}(2\nabla^2 \Phi - 6\mathcal{H}\Phi' - 6\mathcal{H}^2\Phi). \quad (\text{A.15})$$

Eranskina B

Funtzio bereziak eta bestelako erlazioak

Hona hemen lanean zehar baliagarriak gerta dakizkiguken zenbait definizio eta erlazio.

Legendre-ren polinomioak, harmoniko esferikoen konbinazio gisa:

$$P_l(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}'). \quad (\text{B.1})$$

Harmoniko esferikoen ortonormaltasun baldintza:

$$\int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{B.2})$$

Gamma (Γ) funtzio berezia ($n, m \in \mathbb{N}$):

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.4})$$

Bessel-en funtzio esferikoen integral berezi bat:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty x^p (j_l(x))^2 dx = \frac{\Gamma(1-p)\Gamma\left(l + \frac{p+1}{2}\right)}{2^{1-p}\Gamma^2\left(1 - \frac{p}{2}\right)\Gamma\left(l + \frac{3-p}{2}\right)}. \quad (\text{B.5})$$

Funtzio esponentzialen integral erabilgarria:

$$\int_{-\infty}^\infty dx \exp(-(ax^2 + bx + c)) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right). \quad (\text{B.6})$$

Oszilazio akustikoen kalkulurako integral erabilgarria (ohartu $x = 1$ puntu singularra dela) [36]:

$$\int_1^\infty dx \frac{f(x) \cos(ax)}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(x=1) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{B.7})$$

Erreferentziak

- [1] N Aghanim et al. “Planck 2013 results. V. LFI calibration”. In: *Astronomy & Astrophysics* 571 (2014), A5.
- [2] N Aghanim et al. “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”. In: *arXiv preprint arXiv:1807.06209* (2018).
- [3] Juan María Aguirregabiria Aguirre. *Grabitazioa eta Kosmologia*. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea.
- [4] Y Akrami et al. “Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck”. In: *arXiv preprint arXiv:1807.06205* (2018).
- [5] Unai Arregi Leon. “PLANCK Satellite’s Low Frequency Instrument: Study Of The Radiometers For Measuring The Cosmic Microwave Background (CMB)”. In: (2019).
- [6] Daniel Baumann. “Cosmology, part III mathematical tripos”. In: *University lecture notes* (2014).
- [7] Charles L Bennett et al. “The Microwave Anisotropy Probe* Mission”. In: *The Astrophysical Journal* 583.1 (2003), p. 1.
- [8] Marco Bersanelli et al. “Planck pre-launch status: Design and description of the Low Frequency Instrument”. In: *Astronomy & Astrophysics* 520 (2010), A4.
- [9] NW Boggess et al. “The COBE mission-Its design and performance two years after launch”. In: *The Astrophysical Journal* 397 (1992), pp. 420–429.
- [10] Martin Bucher. “Physics of the cosmic microwave background anisotropy”. In: *International Journal of Modern Physics D* 24.02 (2015), p. 1530004.
- [11] Sean M Carroll. “A No-Nonsense Introduction to General Relativity”. In: *Enrico Fermi Institute and Department of Physics, University of Chicago* (2001).
- [12] Anthony Challinor. “Cosmology, Part II - Large Structure Formation”. In: *University lecture notes* (2009).
- [13] Planck Collaboration Collaboration et al. “Planck Blue Book”. In: *ESA Planck blue book, ESA* (2005).
- [14] Ivan Debono and George Smoot. “General relativity and cosmology: Unsolved questions and future directions”. In: *Universe* 2.4 (2016), p. 23.
- [15] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Elsevier, 2003.
- [16] Kees Dullemond and Kasper Peeters. “Introduction to tensor calculus”. In: (1991).
- [17] Ruth Durrer. “The cosmic microwave background”. In: *The Cosmic Microwave Background, by Ruth Durrer. ISBN 978-0-521-84704-9 (HB). Published by Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2008.* (2008).
- [18] DJ Fixsen. “The temperature of the cosmic microwave background”. In: *The Astrophysical Journal* 707.2 (2009), p. 916.
- [19] Wayne Hu. *Intermediate Guide to the Acoustic Peaks and Polarization*. URL: <http://background.uchicago.edu/~whu/intermediate/intermediate.html>.

- [20] Wayne Hu. “Lecture notes on CMB theory: From nucleosynthesis to recombination”. In: *arXiv preprint arXiv:0802.3688* (2008).
- [21] Wayne Hu and Martin White. “The damping tail of cosmic microwave background anisotropies”. In: *The Astrophysical Journal* 479.2 (1997), p. 568.
- [22] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [23] David H Lyth and Andrew R Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge University Press, 2009.
- [24] César Merlin and Marcelo Salgado. “The gravitational light shift and the Sachs-Wolfe effect”. In: *General Relativity and Gravitation* 43.10 (2011), pp. 2701–2712.
- [25] Peter Mészáros and Vladimír Balek. “Effect of radiation-like solid on small-scale CMB anisotropies”. In: *Classical and Quantum Gravity* 34.17 (2017), p. 175010.
- [26] V Mukhanov. ““CMB-Slow” or How to Determine Cosmological Parameters by Hand?” In: *International Journal of Theoretical Physics* 43.3 (2004), pp. 623–668.
- [27] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [28] HU Nørgaard-Nielsen. “Confirmation of the detection of B modes in the Planck polarization maps”. In: *Astronomische Nachrichten* 339.6 (2018), pp. 432–439.
- [29] Guido Walter Pettinari. “The intrinsic bispectrum of the Cosmic Microwave Background [PhD thesis]”. In: *arXiv preprint arXiv:1405.2280* (2014).
- [30] Adam G Riess et al. “A 2.4% determination of the local value of the Hubble constant”. In: *The Astrophysical Journal* 826.1 (2016), p. 56.
- [31] Matts Roos. *Introduction to cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [32] Joseph Silk. “Cosmic black-body radiation and galaxy formation”. In: *The Astrophysical Journal* 151 (1968), p. 459.
- [33] Naoshi Sugiyama. “Introduction to temperature anisotropies of Cosmic Microwave Background radiation”. In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2014.6 (2014), 06B101.
- [34] J Alberto Vázquez, Luis E Padilla, and Tonatiuh Matos. “Inflationary Cosmology: From Theory to Observations”. In: *arXiv preprint arXiv:1810.09934* (2018).
- [35] David Wands, Oliver F Piattella, and Luciano Casarini. “Physics of the cosmic microwave background radiation”. In: *The Cosmic Microwave Background*. Springer, 2016, pp. 3–39.
- [36] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford university press, 2008.

