Sudokua: denbora-pasa edo Zientzia?

María Merino Maestre

Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboaren saila
(UPV/EHU)

Laburpena: Testu honetan, sudoku munduaren atea zabaldu nahi dugu, bai jokua fenomeno modura ikusita, bai eta jokuak Zientzarekin eta bereziki Programazio Matematikoa, Konbinatoria eta Talde Teoria arloekin duen loturaren aldetik. Zein ote da jokoaren konplexutasun konputazionala? Ekuazio-sistema sinple baten bidez adieraz ote daiteke sudokua? Zenbat denbora beharko du programa batek sudoku bat ebazteko? Ba al dago munduan zailena den sudoku bat? Zenbat soluzio daude? Ezagutzen da beharrezkoa den sarrera kopuru gutxienezkoa? Galdera hauek erantzuten saiatuko gara, gaur egungo logikan oinarritutako denbora-pasa honen zaletasunean eta ikerkuntza mailan sortutako interesari erreparatuz.

Abstract: The aim of this paper is to open the door to the sudoku's world, this game as a phenomenon as well as its connection with Science, especially with Mathematical Programming, Combinatorics and Group Theory. What is the computational complexity of this game? Can it be solved by a simple system of equations? How long will a program need to solve it? Which is the most difficult in the world? How many solutions exist? Is it known the minimum number of entries necessary? . We will try to answer these questions, noticing the love of this logic-based puzzle and the emerging interest in scientific fields.

1. SARRERA

Ume zein heldu askorentzat, joko-mundua oso erakargarria da. Testu honen abiapuntu gisa, James R. Newman (1907-1966) matematikariaren ondoko esaldia [1] gogoratu nahi dut:

> Games are among the most interesting creations of the human mind, and the analysis of their structure is full of adventure and surprises.

XX. mendeko jokoen artean badago bat, nazio arteko prentsan lortutako ospea dela eta *«munduko hazkunde arinena duen denbora-pasa»* modura izendatua izan dena: zein eta sudokua. Bere ospea zabaldu egin da komunikabideetan: egunkari eta aldizkari gehienetan iraunkor bihurtu da, sudokuliburuak hedatu egin dira, interneten bidez hainbat weborrialde eraiki dira, [2], telebistako saio batzuk ere sortu dira, eta abar.

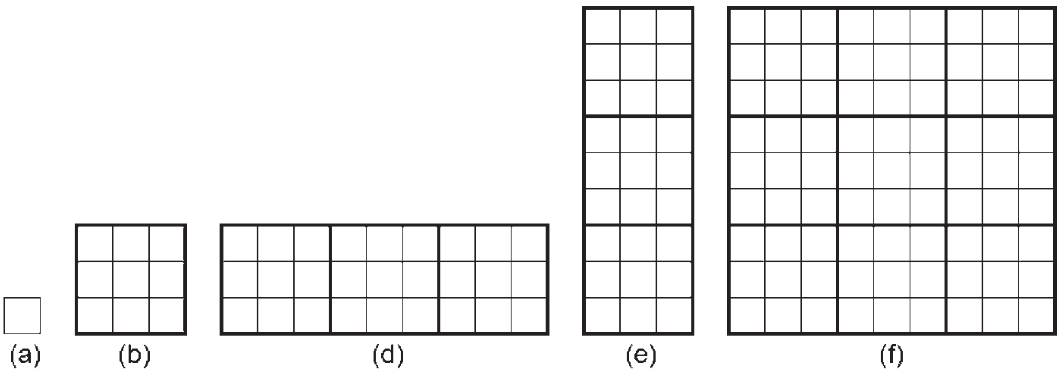
Baina, zer esan daiteke zientziaren ikuspegitik? Jakin-mina egon liteke zientzialarien artean? Ekuazio-sistema sinple baten bidez adieraz daiteke sudokuaren ebazpena? Zenbat denbora beharko luke programa batek sudoku bat ebazteko? Zenbat sudoku egon ahal dira? Zein da beharrezkoa den sarrera kopuru gutxienezkoa? Izango da sudokuaren erakargarritasuna NP-oso problema izatea? Zientzialariei zein sudokuzaleei edo behintzat jakin-mina dutenei zuzendutako testua da hau, galdera hauek erantzuten saiatuko dena.

2. atalean sudokuaren mundu entretenigarrian sartuko gara. 3. atalean Matematika Aplikatua eta sudokuaren arteko lotura azalduko da eta 4. atalean Matematikarekiko beste harreman batzuk aipatuko dira.

2. SUDOKUA

2.1. Definizioak eta Historia

Sudokua zenbakiak kokatzean datzan logika-puzzlea da eta *Arau Bakarra* deritzona betetzea du helburu. Hots, partzialki betetako 9 × 9 gelaxkako eremu bat osatzea 1etik 9rako zenbakiekin. Eremu hau 3 × 3 tamainako 9 kutxatan banatuta dago, eta problema ebazteko ezin da zenbakirik errepikatu zutabe, lerro edo kutxa berean.



1. irudia. Definizioak: (a) gelaxka, (b) kutxa, (d) banda, (e) pilarea, (f) sudokua

Hona hemen aurrerantzean erabiliko dugun terminologia: *puzzlea*, partzialki betetako matrizea; *sarrera*, hasieran emandako balioa; *kutxa*, 3 × 3 ordenako azpimatrize nagusiak; *gelaxka*, 81 karratutxoetako bakoitza; *banda*, horizontalki kutxa auzokideak; *pilarea*, bertikalki auzokide diren kutxak. Esaten da *sudokua ondo definitua edo zuzena* dela soluzio bakarrekoa bada. Azkenik, sudoku zuzen batean sarrera bat kendu ostean ondo definitu gabekoa bihurtzen bada, sudoku *laburtezina edo minimala* deritzo.

Seguraski, logikako denbora-pasa honen aitzindaria *karratu latindarra* da. Izate matematiko hau $n \times n$ elementuko matrizea da, bertan zutabe eta errenkada bakoitzean n ikurretako bat behin baino agertzen ez delarik. Leonhard Euler matematikariak (1707-1783) jarri zion izena, matrizea osatzeko ikur latindarrak erabili zituelako. Gaur egun, esperimentu-diseinuetan eta erroreak detektatzeko kodeetan erabiltzen dira. Sudokuaren propietateen arteko lotura, [3] liburuan lor daiteke. Beranduago, *karratu magikoa* sudokuaren aurrekari frantsesa bihurtu zen. Karratu hauetan zenbakien kokapena dela eta, lerro, zutabe eta diagonal nagusien baturak zenbaki berbera ematen du, konstante magikoa, hain zuzen ere. XIX mendearen amaieran agertu ziren lehenengo prentsako zenbakidun puzzleak. Pariseko *Le Siècle* egunkariak, 9 × 9 partzialki betetako 3 × 3 kutxako *karratu magikoa* argitaratu zuen 1892ko azaroaren 19an. Berez, ez zen sudokua, bi digituko zenbakiak agertzen zirelako, eta tresna aritmetikoak logika baino beharrezkoagoak zirelako. 1895eko uztailaren 6an, *La France* egunkariak, aurreko jokoa moldatu egin zuen, 1etik 9rainoko zenbakiak erabiliz (eta beraz, konstante magikoa 45 izanik), baina kutxak ezabatuz. M.B. Meynielek asmatutako joko honetan, nahiz eta kutxak markatuta ez egon, 1-9 zenbakiek ere osatzen zuten. Frantziako prentsan azaldu ziren I. Munduko Gudara arte.

Hala ere, Indianan jaiotako Howard Garns (1905-1989) arkitekto erretiratuari bururatu omen zitzaion egungo jokoa. 1979an *Dell Magazines*ek *Dell Pencil Puzzles & Word Games* aldizkarian lehenengo aldiz argitaratu zuen, *Number Place* izenarekin. Ez da argi ea denbora-pasa asmaitzale honek aipatutako prentsa ezagutzen zuen ala ez, baina hil zen jakin barik bere asmakizuna munduko fenomeno bilakatuko zela. 1984an, Maki Kaji (1951ean jaioa) japoniarrak Amerikako Estatu Batuetara bidaiatzean aurkitu zuen aipatutako aldizkaria. Hizkuntza dela eta, bi joko besterik ez zuen ulertzen. Beranduago, *Nikoli* argitaletxeak Japoniara eraman zuen, *Monthly Nikolist* egunkarian argitaratu zuen

数字は独身に限る

SUji wa DOKUshin ni kagiru izenaren pean, hau da, *«zenbakiak bakarrik egon behar dira»*, eta laburtuta, *sudoku* (su = zenbaki, doku = bakarrik). Nikoli Co. Ltd-eko buruak, Maki Kajik, jokoak egun duen ospea lortu zuen 1986an honako bi berrikuntza ezarriz: 32ko sarrera kopuruaren muga eta hasierako sarreren simetria. Baina, Wayne Gould (1945) epaile erretiratuaren eskutik heldu zen sudokuaren ospea Europara. Hong Kongen bizi den neozelandar honek ordenagailu-programa bat garatu zuen 6 urtean denbora-pasak arin sortzeko. Gaur egun, bera da *The Times* egunkariaren hornitzaile bakarra. Argitaletxe japoniarrean sudokuak eskuz sortzen dira eta kontratu bat sinatu dute Europan banatzeko.

2005ean, *International Collegiate Programming Contest (ICPC,* [4]) izeneko munduko unibertsitateen arteko programazio-txapelketak 9 problemen artean sudokua sartu zuen. Urte horretan, prentsa britaniar eta nazioartekoan hain ospe handia lortu zuelarik, *«munduko hazkunde arinena duen denbora-pasa»* zela esan zuten. 2006tik aurrera, Munduko Sudoku Txapelketa ospatzen da: lehenengoa Italian izan zen eta Jana Tylovak (1974an jaioa) ekonomialari txekiarrak irabazi zuen; Pragako 2007ko eta Indiako 2008ko irabazlea Thomas Snyder (1981an jaioa) bioingeniari estatubatuarra izan zen; Eslovakiako 2009ko eta Filadelfiako 2010eko txapelketak Jan Mrozowsky (1987an jaioa) ingeniari poloniarrak irabazi zituen. 2007 urtetik aurrera herrialde-txapelketa ere egiten da, azken urteetako talde irabazleak Japonia, Txekia Errepublika, Eslovakia eta Alemania izanik. 2010ean Sudokuaren Munduko Federazioa [5] sortu da.

Gizakiek hiru ebazte prozesu mota erabiltzen dituzte: *eskaneatzea, marka jartzea* eta *analisi logikoa*. Alde batetik, eskaneatze prozesuen artean, bi teknika daude: sare gurutzatua eta zenbaketa; bestalde, analisi logikoaren prozesua ezabapenaz edo absurdura eramanez egin daiteke.

a) *Sare gurutzatua*n, errenkadetan (zutabeetan) bilatzen dira falta diren zenbakiak. Zenbakien agertze maiztasuna kontuan hartzea eta digitu guztiak sistematikoki konprobatzea gomendatzen da.
b) *Zenbaketa*n, galdutako balioak identifikatzen dira, errenkada, zutabe eta kutxaka.
c) Zenbaki berririk asmatzea posible ez denean, marka jartzea erabiltzen da. Horrela, hautagaiak idazten edo markatzen dira gelaxka hutsetan.
d) *Ezabapena* metodoaren adibidea ondoko hau da: baldin eta errenkada (edo zutabe edo kutxa) berberean doi-doi 2 gelaxkatan hautagaien zerrendako zehatz-mehatz bikote bera badago, bikote horren zenbakiak ezin dira egon errenkada (edo zutabe edo kutxa) berberaren beste gelaxketan; beraz, ezaba daitezke hautagaien zerrendatik azken gelaxka horietarako.
e) *Absurdura eramanez* izeneko teknika azalduko dugu. Demagun gelaxka hutsen artean hautagai gutxien duen bat aukeratzen dugula, esate baterako, (1,1) gelaxkan 7 eta 9 balioak hautagai bakarrak direla. Aieru bat egin ondoren (adibidez, 7a soluzioa delako hipotesia ontzat eman eta gero) aurreko ebazte-prozesuak behin eta berriz errepikatzen dira. Hiru gauza gerta daitezke:

   — sudokuaren soluzio osoa aurkitzea;

— arauren bat apurtzen dela topatzea (bikoizte bat); orduan, ondorioztatzen da hasierako beste hautagaia dela soluzioa, hots, (1,1) gelaxkaren soluzioa 9 dela, 7 ezin delako izan. Betetako gelaxka berriarekin, aurrera egiten da ebazte-prozesuan;
— sudokua amaitu ezin izatea, eta beste aieru bat egin behar izatea. Kasu honetan, 2. aieru mailara iritsi garela esaten da.

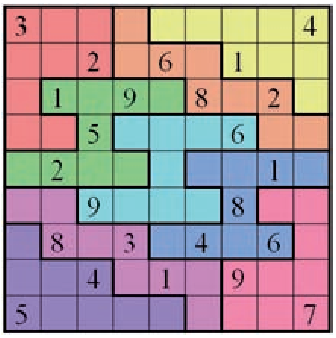
2.2. **Aldaerak**

Nahiz eta sudoku arruntenak 3×3 kutxako 9×9 gelaxkakoak izan, hainbat aldaera entretenigarri sortu dira (ikusi [6] eta [7]). Ikus ditzagun batzuk, ondoko sailkapenaren arabera ordenatuak.

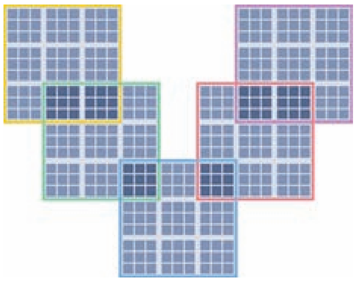
1. *Tamainaren araberako aldaerak*. $m \times m$ tamainako sudokuak $m{\times}m$ kutxa karratukoak dira, eta $r{\times}c$ kutxa angeluzuzenak dituztenak $(r \cdot c) \times (r \cdot c)$ tamainako sudokuak dira, $m, r, c \in \mathbb{N}$ direlarik.
2. *Murrizketa gehigarridun aldaerak*. Adibidez, *X sudoku* aldaeran, diagonal nagusietan ere kokatu behar dira zenbaki guztiak; *NRC sudokua*n lau kutxa gehiago daude; *Sudoku Diskoint Groups* mota honetan 9 koloreko 9 kutxa disjuntu gehitzen dira; *Magic Sudokua*n kutxa bakoitzean, errenkaden eta zutabeen batura berdina da, 15. *DG Sudoku* motan, ez dago zenbakirik kokapen berean edozein bi kutxatan; *Hypercube* sudokuan 3 murrizketa gehiago daude, kokapenei, banden minierrenkadei eta pilareen minizutabeei lotuta, ikusi [8].
3. *Jigsaw izeneko kutxen itxuren araberako aldaerak*. Kutxen itxura erregularra (karratua edo angeluzuzenekoa) izan daiteke edo irregularra. Tamaina desberdinak ere topa ditzakegu: 5×5 kutxa pentamino, 7×7 kutxa heptamino, 9×9 kutxa nonomino (2. irudikoa bezala) eta abar.
4. *Hasierako baldintza berriak dituzten aldaerak*. *Sudoku Killer* da gehien hedatuenetako bat; sarrerak eman beharrean gelaxka biko edo gehiagoko kaiolak daude, barruko soluzioen batura ezaguna delarik. *Sudoku Ken Ken* aurrekoa baino orokorragoa da, batura erabiltzeaz gain, kendura, biderkadura eta zatidura gehitzen baitira. *Sudoku Kakuro*, sudoku klasikoa eta gurutzegramaren arteko nahastura da, soluzioen baturak adierazten baitira horizontalki eta bertikalki; *Greater than Sudoku* delakoaren kasuan alboko bi gelaxken artean handiago eta txikiago direlako ikurrak baino ez dira ematen.
5. *Ez-zenbakizko aldaerak*. Hauetan, zenbakien ordez letrak, ikurrak edo irudiak erabiltzen dira.
6. *Gattai izeneko aldaerak, kutxa gainezarriak dauzkatenak*. Ugariak dira eta ospetsuenek, izen propioa dute. Horrela, *Sudoku Samurai* bost sudokuren gainjartzea da, eta beraz, Gattai-5 klasekoa da.

3. irudian ikus daitekeen Wing izenekoak bestalde, UPV/EHU logoaren antza harrigarria dauka.

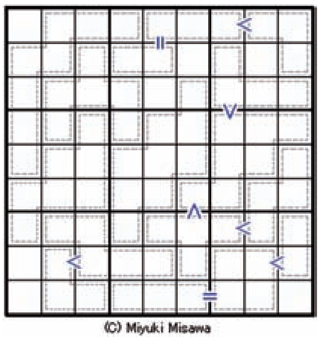
7. *Gelaxka ezkarratudun aldaerak*. Sudoku klasikoen gelaxken geometria karratua den arren, beste batzuk ere badaude: *Clock Sudoku*, zirkulu itxurakoa da eta 1etik 12ra bitarteko zenbakiak ditu, sei eraztun zentrukideetan, aurkako sei sektore bikoteetan eta kolore diferenteetako sei sektore bikoteetan; *Sudoku Spring* lore itxurakoa da eta gelaxkak triangeluarrak dira; *Hanidokua* erleen sudokua da, gelaxkak hexagonalekoak baitira.
8. *Hirutik gorako dimentsio kopuruak dituzten aldaerak*. *Sudokubea* Rubiken kuboa da, 1-9 zenbakiekin osatzekoa. *3Dokua* hiru dimentsiokoa da, 27 sudoku ditu (9 ale plano cartesiar bakoitzean). *4D Sudoku* deritzonak 3 × 3 × 3 kubodun kuboa da (aurpegi bakoitzean zenbaki batekoa), kanpoko sei aurpegietan eta barruko hamabi aurpegietan zenbaki guztiak direlarik.
9. *Aldaeren nahastea*, gutxienez aipatutako bi ezaugarri konbinatuz. *Sidokua* 7 × 7 jigsaw ez-zenbakiduna da, eta zenbakien ordez nota musikalak daude. Miyuki Misawa emakume japoniarraren *Greater Than Sudokua*, GT eta Killer sudokuen arteko nahasketa da, ikusi [9] eta 4. irudia.



2. irudia. Jigsaw



3. irudia. Wing



4. irudia. GT (Misawa)

3. SUDOKUA ETA MATEMATIKA APLIKATUA

Sudokua eskuz ebazteko teknikak 2.1 azpiatalean azalduta daude. Atal honen helburua sudokuak ebazteko ordenagailu-programa bat diseinatzean datza. Horretarako *Ikerkuntza Operatiboa (IO)* izeneko arlora joko dugu. 2010eko Wikipedian agertzen denez, IO, Matematika Aplikatuko diziplinen arteko adarra da hau. Ikerkuntza Operatiboak modelizazioa, estatistika, algoritmoak, analisi matematikoa, grafo-teoria eta optimizazioa erabiltzen ditu, benetako sistema konplexuen soluzio hoberenak (edo kuasihoberenak) aurkitzeko, haien funtzionamendua hobetzeko nahian. Arlo honek, metodo zientifikoaren laguntzaz, erabakiak hartze-prozesuetan laguntzen du. 1959an IFORS (International Federation of Operational Research Societies, [10]) munduko federazioa sortu zen, 30.000 kidek eta 45 herrialdek osatutakoa. Aplikazio-arlo guztietan zabaldu da, zeren eta helburu anitzetan hobetzeko soluzioak ematen baititu (etekinak maximizatuz, galerak, kostuak edo arriskua minimizatuz, efizientzia bilatuz, espazio eta denbora optimizatuz edo ekitatezko hobekuntza lortuz).

Helburuen araberako sailkapenean bi mota ditugu: optimizazio-ereduak eta iragarpen-ereduak. Optimizazio-ereduen artean, sekuentzia-, lokalizazio-, ibilbide- eta bilaketa-problemak aurki ditzakegu eta iragarpen-ereduen artean, ordezkatze, inbentario, ilara eta lehiakideen problemak.

3.1. **Programazio Lineala**

Programazio Lineala da Ikerkuntza Operatiboaren arlo nagusienetariko eta eraginkorrenetariko bat. Helburu-funtzio lineal bat eta murrizketa linealak (berdintzazkoak zein ezberdintzazkoak) dituen hobereneratze-ebazkizunak aztertzeko eta optimo edo hobezina aurkitzeko teknika-multzoa da hau eta haren bidez helburu-funtzioa delakoaren hobereneratzen duten aldagaien balioak lortzen dira.

Matrizeak erabilita, ondoko problemak ebazten ditu:

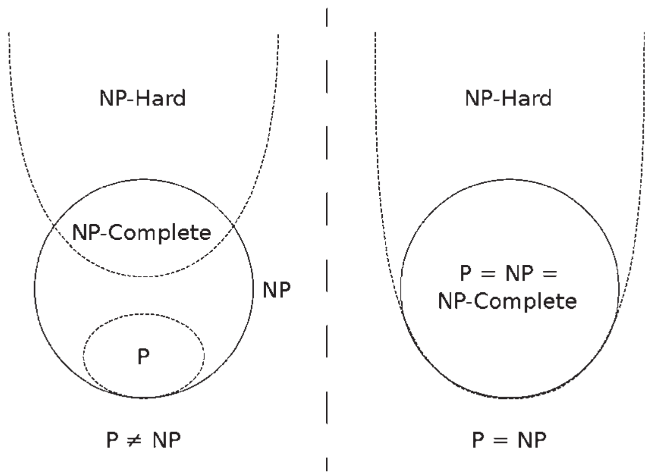
$$\begin{array}{rl} opt & c'x \\ o.b.: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^{+n}$ aldagai-bektorea, $c \in \mathbb{R}^n$ aldagaiko kostu-bektorea, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ koefiziente-matrizea eta $b \in \mathbb{R}^m$ murrizketako osagai askeen bektorea direlarik. Bi eragile daude problema hauen garrantzia eta hedapenaren atzean: 1947an George Bernard Dantzigek (1914-2005) garatutako *simplex metodoa* batetik, eta bestetik, ordenagailuen itzelezko garapena. Gaur egun, simplex algoritmoa tresna estandarra da, eta hainbat enpresa eta industriatan erabiltzen da. 2000 urtean, *Computing in Science & Engineering* [11] aldizkari zientifikoan agertzen da, John F. Nashen esanetan, *XX mendeko Zientzia eta Ingeniaritzaren praktika eta garapenean eragin handiena izan dutenen 10 algoritmoen artean hautatua* izan da simplex algoritmoa.

Sudokua ebazteko Ikerkuntza Operatiboaren metodologiari jarraituko diogu: (1) errealitatearen analisia eta problemaren formulazioa, (2) eredu matematikoaren adierazpena (aldagaiak, helburu-funtzioa, murrizketak), (3) ebazpena, (4) emaitzen aurkezpena (soluzioen analisia eta egiaztapena, ereduaren adierazgarritasuna, eta sentsibilitate-analisia) eta (5) inplementazioaren gauzatzea.

Programazio-tresnen aplikazioak ugariak dira sudokuaren inguruan. 2002 urte amaieran, Tokyoko unibertsitateko Takayuki Yatok eta Takahiro Setak argitaratu zuten jokoaren NP-osotasuna (ikusi [12]). Joko asko NP-oso problemak dira, Kakuro, Mastermind, Tetris eta gurutzegramen eraikuntza, besteak beste. Joko horien erakargarritasunaren arrazoi handi bat da arrazoizko denboran ebatzi ahal izateko moduko estrategia ezagunik ez egotea. NP-osotasuna S. A. Cookek plazaratu zuen lehenego aldiz [13] kongresu-aktetan 1971 urtean.

P motakoa da Turingen makina determinista batek denbora polinomikoan ebatzi ahal dituen problema (onartuen) multzoa. *NP* motan sartzen dira Turingen makina ezdeterminista batek denbora polinomikoan ebatzi ahal dituen problema (onartua)k. *C* erabaki-problema *NP-gogorra* da, denbora polinomikoan NP problema guztiak murrizten badira *C* problemara. *C* erabaki-problema *NP-osoa* klasean dago, NP eta NP-gogorra bada.



5. irudia. P, NP, NP-oso eta NP-gogor problemen Eulerren diagrama

Labur esanda, P problemak arin ebazten dira eta NP problemen soluzioak arin egiaztatzen dira. Konplexutasun konputazionalaren teorian NP-osoak direnen problemak dira NP klasearen zailenak eta seguraski ez dira P konplexutasunekoak. Oraindik ebatzi ez diren *Milurteko Zazpi problemak* begiratuta, beharrezkoa dugu *P versus NP* izena duen haietako bat, alegia, bi mota ezberdinak dauden edo ez jakiteko froga formal modura, (ikusi Cambridgeko *Clay Mathematics Institute* [14]), lehenengo ebazpen zuzenagatik milioi bat dolarreko saria ezartzen duena.

3.2. 9 × 9 sudokuaren modelizazioa

Programazio Matematikoa erabiliz, 9 × 9 tamainako sudoku tradizionalaren modelizazioa azalduko da. Edozein sistema modelizatzeko bi galdera erantzun behar dira: hasierako informazioa zein den eta zer informazio lortzea espero den. Joko honen kasuan, erantzunak berehalakoak dira: 9 × 9 matrizea partzialki beteta dago eta ebatzi ondoren, gelaxka hutsen soluzioa lortu nahi da. *Sarrera* egoeratik *irteera* egoerara aldatzeko sistemaren aldagaiak (ezezagunak) definitu eta murrizketak (bete behar diren baldintzak edo erlazioak) adierazi behar dira, hau da, hurrenez hurren gelaxken balioak eta Arau Bakarraren baldintzak adierazi behar dira (ikusi 2.1 azpiatala). Gelaxka bakoitzaren balioa adierazteko 9 aldagai bitar erabiliko ditugu. Defini ditzagun ondoko indizeak

i: azpindizea errenkada adierazteko, $i = 1, 2, \ldots, 9$
j: azpindizea zutabea adierazteko, $j = 1, 2, \ldots, 9$
k: goindizea balioa adierazteko, $k = 1, 2, \ldots, 9$

Izan bedi x^k_{ij} aldagaia (ij) gelaxka bakoitzeko ondoko aldagai bitarra:

$$x_{ij}^{k} = \begin{cases} 1, & \text{baldin } (ij) \text{ gelaxkaren balioa} k \text{ bada} \\ 0, & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

Beraz, sudokua zuzena bada, sistemaren ebazpenak emango du (ij) gelaxka bakoitzean $(x^1_{ij}, x^2_{ij}, \ldots, x^9_{ij})$ bektore soluzioa. Bektore hau nulua da osagai batean izan ezik, kokapena gelaxkaren soluzioa dena hain zuzen ere. Horrela, $729 = 9^3$ aldagai bitar behar dira. Baina, zeintzuk ote dira definitu behar diren murrizketak?

Arau Bakarra lau murrizketen bidez adieraz daiteke, murrizketa hauek x^k_{ij} aldagaien menpeko erlazio matematikoak izanik. Ikus dezagun adaldagaiak 0-1 izateagatik oso erreza dela erlazio linealen bidez egitea.

— I Araua: gelaxka bakoitzari balio bakarra dagokio. Edozein (ij) gelaxkako soluzioa 1etik 9ra bitarteko zenbakia izan behar da, eta hau lortzen da k kokapenaren aldagaia 1 eta besteetan 0 izanik. Beraz, ondoko murrizketa linealaren bidez adieraz daiteke: $x^1_{ij} + x^2_{ij} + x^3_{ij} + x^4_{ij} + x^5_{ij} + x^6_{ij} + x^7_{ij} + x^8_{ij} + x^9_{ij} = 1$, eta orokorrean:

$$\sum_{k=1}^{9} x_{ij}^{k} = 1, \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots, 9 \tag{1}$$

— II Araua: errenkada bakoitzean ez da errepikapenik egon behar. Hortaz, i. errenkadan, edozein k balio behin bakarrik agertu behar da:

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ij}^{k} = 1, \qquad \forall i, k = 1, 2, \ldots, 9 \tag{2}$$

— III Araua: zutabe bakoitzean ez da errepikapenik egon behar. Hortaz, j. zutabean, edozein k balio behin bakarrik agertu behar da:

$$\sum_{i=1}^{9} x_{ij}^{k} = 1, \qquad \forall j, k = 1,2,...,9 \tag{3}$$

— IV Araua: kutxa bakoitzean ez da errepikapenik egon behar. Hortaz, (i_0, j_0) kutxa bakoitza errenkada eta zutabe txikienaren bidez identifikatu ostean, edozein k balio behin bakarrik agertu behar da:

$$\sum_{i=i_0}^{i_0+2} \sum_{j=j_0}^{j_0+2} x_{ij}^{k} = 1 \qquad \forall i_0, j_0 = 1,4,7;\ k = 1,2,...,9 \tag{4}$$

Murrizketa guztiak aldagaien menpeko funtzio linealak dira eta aldagai guztiak 0-1, beraz definitutako sudokuaren problema lineala 0-1 problema osoa da. Horretarako, (1)-(4) ekuazio-sistemari esplizituki gehitu behar zaio aldagai mota:

$$x_{ij}^{\mathrm{k}} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j, k = 1, 2, ..., 9 \tag{5}$$

Modelizazioa amaitutzat emateko, hasierako sarreren informazioa sartzeko algoritmoa falta da. Izan bedi $A = (a_{ij})$ sarrera matrizea, a_{ij} balio bakoitzari (ij) gelaxkaren sarrera esleitzen zaio, baina gelaxka hutsik badago, orduan $a_{ij} = 0$ kontsideratzen da. Beraz,

$$\text{Baldin}\, a_{ij} = k \neq 0, \text{ orduan } x_{ij}^{k} = \begin{cases} 1, & \text{baldin}\, a_{ij} = k \\ 0, & \text{baldin}\, a_{ij} \neq k \end{cases} \tag{6}$$

Horrela, (1)-(5) sistemak eta (6) hasierako sarreren algoritmoak edozein sudoku tradizionala ebazteko *programa bakuna* osatzen dute.

Hala ere, ahalegin konputazionala murriz liteke sarreretatik ondorioztatzen den beherehalako informazioa sartzen bada.

$a_{ij} = k \neq 0$ betetzen den edozein kasutan,

$$j_0 \neq j \text{ betetzen duen edozein } j_0 \text{ zutaberako orduan } x_{ij_0}^{\mathrm{k}} = 0 \tag{7}$$

$$i_0 \neq i \text{ betetzen duen edozein } i_0 \text{ errenkadarako orduan } x_{i_0 j}^{\mathrm{k}} = 0 \tag{8}$$

$$\begin{gathered} i_0 \neq i \text{ edo } j_0 \neq j \text{ betetzen duen eta } (ij)\text{ri dagokion kutxan dagoen} \\ \text{edozein } (i_0, j_0) \text{ gelaxkarako orduan } x_{i_0 j_0}^{\mathrm{k}} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

ondoko moduan interpreta daitekeena: (7) murrizketen bidez zehazten da i. errenkadan ez dagoela k baliodun zutaberik (j.a izan ezik); (8) murrizketak adierazten du j. zutabean ez dagoela k baliodun errenkadarik (i.a izan ezik) eta azkenik, (9)ren bidez, (i, j)-ri dagokion kutxan, ez dagoela k baliodun gelaxkarik ((i, j).a izan ezik).

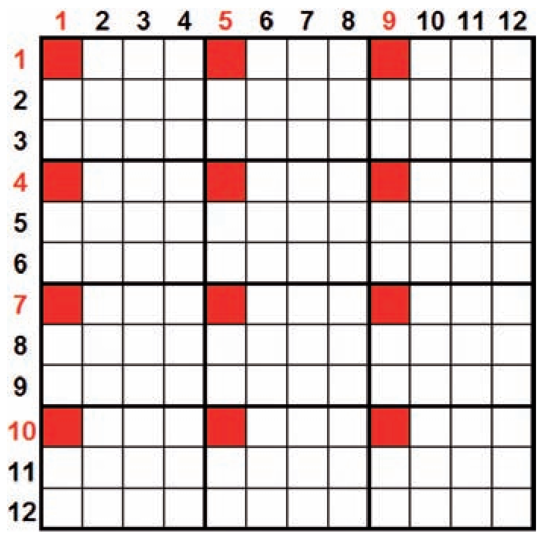
3.3. *n* × *n* sudokuaren modelizazioa

Definizioa Sudoku puzzleen klasea *n^2 gelaxkako matrize partzialki betea da, n gelaxkadun n kutxaduna, n ikur diferente erabiliz osatzekoa. {1, 2, …, n} zenbakiak izan ohi dira ikurrak, eta errenkada, zutabe eta kutxa bakoitza zehatz-mehatz osatu behar da ikur batekin. Kutxa erregularrak badira, karratuak edo angeluzuzenekoak izan daitezke, r × c tamainakoak, r errenkada kopurua eta c zutabe kopurua direlarik.*

Defini ditzagun ondoko multzoak:

- $\mathcal{N}$: ikurren multzoa da. Beraz, *i* errenkada-indizea, *j* zutabe-indizea eta *k* soluzio-goi indizeen multzoa ere adierazteko erabiliko dugu. $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\mathcal{N}_r$: kutxak adierazteko lehenengo indizeen multzoa da, hots, banda bakoitzaren errenkada txikiena. Orokorrean, $\mathcal{N}_r = \{1, 1 + r, 1 + 2r, ..., 1 + (c - 1)r\}$, $|\mathcal{N}_r| = c$ da.
- $\mathcal{N}_c$: kutxak adierazteko bigarren indizeen multzoa da, hots, pilare bakoitzaren zutabe txikiena. Orokorrean, $\mathcal{N}_c = \{1, 1 + c, 1 + 2c, ..., 1 + (r - 1)c\}$, $|\mathcal{N}_c| = r$ da.

Adibidez, $(r, c) = (3, 4)$ denean, $n = 12$ eta irudiko 3 × 4 kutxadun 12 × 12 sudokua dugu.



6. irudia. 12 × 12 sudokua

$\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, 12\}$,

$\mathcal{N}_r = \{1, 4, 7, 10\}$,

$\mathcal{N}_c = \{1, 5, 9\}$

Problema 0-1 osoa orokor daiteke ondoko moduan:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ij}^{k} = 1, \qquad \forall i, j \in \mathcal{N} \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} = 1, \qquad \forall i, k \in \mathcal{N} \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{k} = 1, \qquad \forall j, k \in \mathcal{N} \tag{12}$$

$$\sum_{i=i_0}^{i_0+r-1} \sum_{j=j_0}^{j_0+c-1} x_{ij}^{k} = 1, \qquad \forall (i_0, j_0) \in \mathcal{N}_r \times \mathcal{N}_c, \quad k \in \mathcal{N} \tag{13}$$

$$x_{ij}^{k} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j, k \in \mathcal{N} \tag{14}$$

(10)murrizketa-blokeak I Araua bermatzen du; (11), (12) eta (13) murrizketa-blokeek hurrenez hurren II, III eta IV Arauak bermatzen dituzte; azkenik, (14) blokeak aldagai guztien mota adierazten du. Programaren seudokodearen berri lortzeko, ikusi [15]. $n \times n$ sudokuak ebazteko sistema hau n^3 aldagai bitarrek, $4n^2$ murrizketek eta $4n^3$ elementu eznuluek osatzen dute.

(10)-(14) sistemak eta dagokion (6) hasierako sarreren algoritmoak *programa sinplea* osatzen dute eta (7)-(9) hasierako baldintzak ezarrita *programa modifikatua* sortzen da. Biak inplementatu dira n = 4, 6, 8, 9, 12, 16, 25 balioetarako. Esperientzia konputazionala C++ programaziolengoian egin da, *COmputational INfrastructure for Operations Research* (*COIN-OR*, [16]) proiektu irekia erabiliz (v1.3.1), makinaren ezaugarriak ondokoak direlarik: Workstation Debian Linux (kernel v2.6.26, 64 bits), 2 processors Xeon 5355 (Quad Core with 2 × 4 cores), 2.664 Ghz eta 16 Gb RAM.

1. taulan beha daitezke emaitza nagusiak. Notazioa ondokoa da: $r \times c$, kutxen dimentsioa; n, ikur, errenkada, zutabe eta kutxa kopurua (n = 9 sudoku estandarrari dagokiona); *gel*, gelaxka kopurua; *ald*, 0-1 aldagai kopurua; *mur*, problema osoaren murrizketa kopurua; *osa*, murrizketamatrizearen osagai eznuluen kopurua; *den*, matrizearen dentsitatea ehunekotan adierazita (*den* = 100 *osa*/*ald* × *mur*); T^b eta T^m exekutatzeko denbora (segunduetan), hurrenez hurren programa bakuna eta modifikatua erabiliz.

1. taula. Dimentsioak eta exekutatze-denborak

$r^2 \times c^2$ r × c	*n* n	*gel* n^2	*ald* n^3	*mur* $4n^2$	*osa* $4n^3$	*den* $100/n^2$	T^b (seg)	T^m (seg)
2 × 2	4	16	64	64	256	6,25	0,01	0,00
2 × 3	6	36	216	144	864	2,78	0,01	0,00
2 × 4	8	64	512	256	2.048	1,56	0,01	0,00
3 × 3	9	81	729	324	2.916	1,23	0,01	0,01
3 × 4	12	144	1.728	576	6.912	0,69	0,04	0,03
4 × 4	16	256	4.096	1.024	16.384	0,39	0,20	0,17
5 × 5	25	625	15.625	2.500	62.500	0,16	1,26	1,14

Goraipatzekoa da programazio matematikoak sudoku estandar erregularra ebazten duen eraginkortasuna. Gainera, programa modifikatua programa bakunarekin alderatuz lehenengoa apur bat arinagoa da. Azkenik, nabarmena da sudoku handiena ebazteko abiadura izugarria, izan ere, 25 × 25 sudokuak 15.625 aldagai bitar baitauzka. Zalantza barik, Optimizazioa tresna garrantzitsua da aldagai eta murrizketa handiko ereduak ebazteko.

Are gehiago, programa honen bidez, egiaztatu da ebazteko denbora oso antzekoa dela zailak eta errazak izendatutakoen artean.

1					7		9	
	3			2				8
		9	6			5		
		5	3			9		
	1			8				2
6					4			
3							1	
	4							7
		7				3		

7. irudia. AI Etana

Hala ere, 7. irudiko *AI Etana* izeneko sudokua ebazteko 0.9 segundu behar izan zuen programa modifikatuak. 2006 urtean munduko sudoku zailen modura aurkeztu zen. Arto Inkala (1969an jaioa) matematikari finlandarrak, 3 hilabete eta bilioi bat zenbaki-konbinazio egin ostean aurkitu zuen.

Zailtasunaren aldetik, esan beharra dago bere ebazpenak 8 aieru maila eskatzen dituela. Orain arte, antzeko konplexutasunekoak agertu diren arren, inork ez du sortu aieru maila gehiago behar den sudokurik.

4. SUDOKUA ETA MATEMATIKA

Sudokuaren propietate matematikoen garapena nahiko jarduera berria da, jokoaren arrakasta gorakorraren ondorioz sortu dena (ikusi [17], [18], [19] eta [20]).

Propietate matematikoak lantzeko Konbinatoria eta Talde Teorian oinarritutako teknikak erabiltzen dira, batzuetan Konputazioaren laguntzarekin. Ikerkuntza matematikoa bi arlotan garatzen dago: sudoku beteen propietateak eta jokoen propietateak.

— Betetako matrizeen propietateak, hau da, guztiz ebatzitako jokoenak. Bere helburu nagusia soluzioen zenbaketa da.
— Puzzleen propietateak. Hasierako sarreren garrantzia: kopuru maximo eta minimoa eta bere geometria.

4.1. Soluzioen zenbaketa

2003 urtean agertu ziren sudoku klasikoaren lehenengo emaitza ezagunak, Edward Russellek *USENET newsgroup rec.puzzles* weborrialdera bidalitakoak. Sudoku estandarren soluzio posible guztien kopurua kalkulatu zuen Bertram Felgenhauer (Department of Computer Science, TU Dresden, Alemania) eta Frazer Jarvis (Department of Pure Mathematics, University of Sheffield, Britainia Handia) irakasleekin batera:

$$6\ 670\ 903\ 752\ 021\ 072\ 936\ 960$$

Zenbakiaren deskonposizioa $9! \cdot 72^2 \cdot 2^7 \cdot 27\ 704\ 267\ 971$ da, azken osagaia zenbaki lehena delarik; [21] eta [22] erreferentzietan ikus daitezke kalkuluaren zehaztapenak. Emaitza hau logikaren eta ordenagailuen ahalmenari esker lortu zen.

Baina zenbat ote dira simetria dela eta ezabatu ahal direnak? Simetriaerlazioengatik bi matrizeen baliokidetasuna ondoko kasuetan agertzen da: ikurren berretiketatzea $9!$, banden permutazioak $3!$, banda baten errenkaden permutazioak $3!^3$, pilareen permutazioak $3!$, pilare baten zutabeen permutazioak $3!^3$, islatzea, transposizioa eta biraketa 2. Berretiketatzea aparte utzita, matrizearen 81 gelaxkekin, beste eragiketek *simetria taldea*ren azpitaldea osatzen dute, S_{81}, $3!^8 \cdot 2 = 3359232$ ordenako azpitaldea hain zuzen. Horrela, simetria guztien kopurua ondokoa da:

$$1\ 218\ 998\ 108\ 160$$

Soluzio bat emanda, soluzio baliokideen multzoa lor daiteke aipatutako eragiketak eginez (edozein eragiketa, berretiketatzea izan ezik) eta simetria-taldearen orbita bat osatuz. Beraz, oinarrizko soluzio diferenteen kopurua orbita kopurua da eta *Cauchy-Frobenius edo Burnside*ren lemaren bidez kalkula daiteke.

Lema: *Izan bedi G talde finitua, X multzo finituan eragiketak egiten dituena. Izan bedi r orbita kopurua eta $g \in G$ guztietarako, g-ren bidez finkatutako X multzoaren elementuek X^g osatzen dute. Orduan, orbita kopurua X^g multzoen kardinalen batezbestekoa da, hots,*

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left| X^g \right|.$$

Burnsideren puntu finkoak soilik berretiketatzeagatik desberdinak diren soluzioak dira. Teknika hau erabiliz, Edward Russellek eta Frazer Jarvisek oinarrizko soluzio diferenteen kopurua kalkulatu zuten (ikusi [23]), hau da, simetrikoki ere desberdinak diren soluzio diferenteen kopurua:

$$5\ 472\ 730\ 538.$$

Egun soluzio bat topatzekotan, 14 993 782 urte behar izango genituzke guztiak aurkitzeko. Demagun minutuan bat edo segunduan bat egin dezakegula; orduan hurrenez hurren 10 412 eta 174 urte beharko lirateke. Gainera, soluzio bakoitzean oinarrituta hainbat puzzle diseina daiteke; are gehiago, kopurua ez dago zehaztuta, ez zenbatetsia, ezta minimalen kasuan ere. Edozein kasutan, denbora-pasa bermatuta dago denbora luzerako.

2. taula. Sudoku erregularren soluzio zenbaketa

Kutxa	Egilea	Soluzio kopurua
2×2	(batzuk)	288
2×3	Pettersen	28200960
2×4	Russell	29136487207403520
2×5	Pettersen	1903816047972624930994913280000
2×6	Pettersen (*)	38296278920738107863746324732012492486187417600000
3×3	Felgenhauer/Jarvis	6670903752021072936960
3×4	Pettersen / Silver (*)	81171437193104932746936103027318645818654720000
3×5	Silver	$3.5086 \cdot 10^{84}$ (**)
4×4	Silver	$5.9584 \cdot 10^{98}$ (**)
4×5	Silver	$3.1764 \cdot 10^{175}$ (**)
5×5	Silver / Pettersen	$4.3648 \cdot 10^{308}$ (**)

(*): egiaztatzeke. (**): ezezaguna, zenbatespena.

3. taula. Sudoku aldaeren soluzio zenbaketa

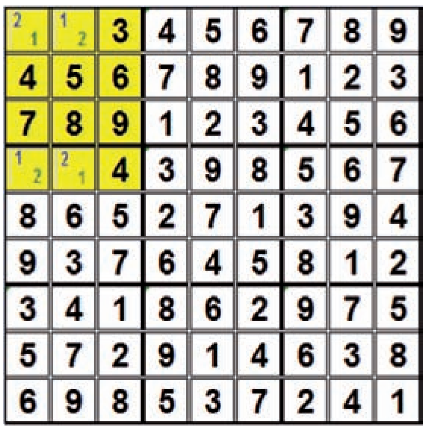
Aldaera	Egilea	Soluzio kopurua
Magic sudokua	Guenter Stertenbrink	5971968
Hypercube	Guenter Stertenbrink	37739520
NRC sudokua	Andries E. Brouwer	6337174388428800
X sudokua	Edward Russell	55613393399531520
DG sudokua	Edward Russell	201105135151764480

2. taulan sudoku erregularren soluzio posible guztien kopurua ikus daiteke eta 3. taulan aldaera batzuen soluzio kopurua; haien egileak frogatu dituzte, [17] weborrialdean aurki daiteke informazio gehiago. Hala ere, aieru anitz daude frogatu barik eta era berean emaitza asko daude lortu gabe, haien artean, 16 × 16 tamainako sudokuarena.

4.2. **Sarreren kopurua eta geometria**

Hasierako balioen kopuruari dagokionez, maximo eta minimoaren galdera dago.

Zein da soluzio anizkoitza ekiditen ez duen sarrera kopuru maximoa? Argi eta garbi, soluzio batean edozein 1, 2 edo 3 gelaxka kentzekotan soluzio bakarra izaten jarraitzen duena; hala ere, posible da 4 gelaxka kentzea soluzio bikoitza utzita (ikusi 8. irudia, non gelaxka hutsak angeluzuzen baten erpinak diren, gutxienez bi kutxa harremanetan egonda); beraz sarrera kopuru maximoa $9^2 - 4 = 77$ da.



8. irudia. Sarreren maximoa

Baina, zein da beharrezkoa den sarrera kopuru gutxienezkoa sudoku zuzen bat ebazteko? Oraingoz, nahiz eta frogapen gabeko problema izan, puzzlezale japoniarrek (Ken'ichiro Takahashi, besteak beste) zenbatetsi dute 17 dela simetriarik ez duen sudokuaren sarrera kopuru minimoa. 16 sarreradun sudokurik agertu ez den arren, matematikari batzuek kontua aztertzen dihardute. Adibidez, Gordon Royleren jakin-mina piztu du honek (School of Mathematics and Statistics, University of Western Australia), 17 sarrerako 48.000 sudoku baino gehiago bildu baititu. Bestalde, Gary McGuire ere (Dep. Mathematics, National University of Ireland, Maynooth) soluzio bakarreko 16 sarrerako sudokuen aukerak ikertzen ari da.

Gelaxka simetrikoen kasuan sarrera kopuru minimoa 18 delako aierua dago. Hala ere, ebazteko zailtasuna sarrera kopuruaren menpe ez ezik, hasierako datuen kokapenaren eta garrantziaren menpe ere badago. Gogoan har bedi 8 mailako Arto Inkalaren sudoku ospetsuak 23 sarrera dituela.

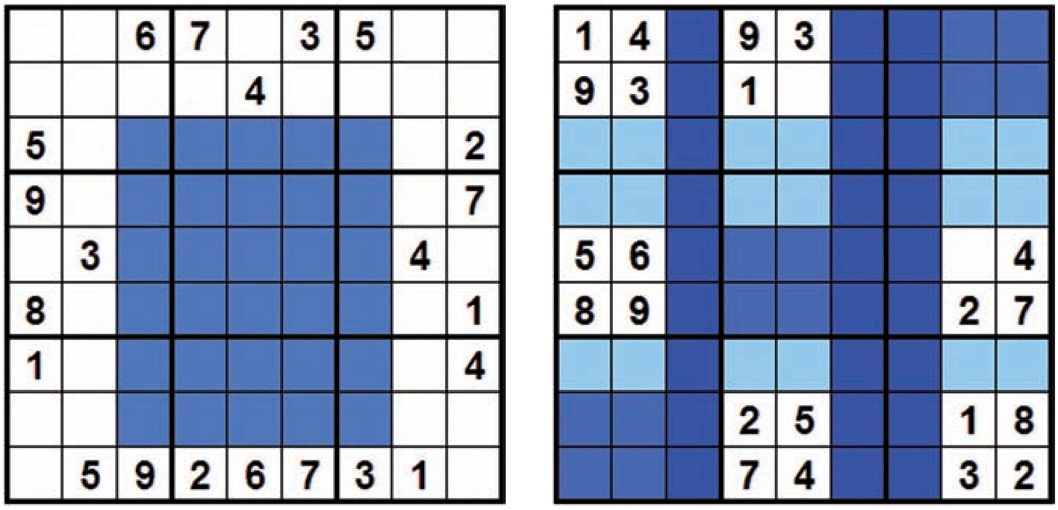
4. taulak murrizketa gehiago dituen aldaera batzuen sarrera kopuru minimoak adierazten ditu eta emaitzen egilearen izenak (ikusi [18]). Minimo guztiak aieruak besterik ez dira, salbuespena hypercube sudokua delarik. Beste batzuen kasuan ez dago ezta zanbatespenik ere, Sudoku Killerrenean adibidez.

4. taula. Sudoku aldaeren sarrera kopuru minimoa

Aldaera	Egilea	Sarrera kopurua
Magic Sudoku	Guenter Stertenbrink	7*
Hypercube	Guenter Stertenbrink	8
Sudoku GT-MM	Miyuki Misawa	8*
NRC sudokus	Andries E. Brouwer	11*
Sudoku DG	Glenn Fowler	11*
Sudoku X	Ruud van der Werf	12*

*: Aierua.

Sarreren geometriaren aldetik ere aieru batzuk plazaratu dira. Esate baterako, zein da hutsik dagoen eskualde handiena? Edo, zein da hutsik dagoen multzoen kopuru handiena, hau da, errenkada, zutabe edota kutxa gehiago duena? Frogapen formalik ez da ezagutzen baina 9. irudian ikusten denez, zenbatesten da lehenengoa 6×5 tamainakoa dela eta bigarrena 9 zenbakikoa (3 errenkada, 3 zutabe eta 3 kutxa).



9. irudia. Sarreren geometriari buruzko aieruak

Ikusi dugun bezala, aieru luze bat dago zenbatesteko eta formalki frogatzeko, aldaera dibertigarri anitz dastatzeko eta dedukzioa garatzeko hainbat aukera. Beraz, amaitzeko, gogora dezagun sudokuaren aita baten esana: jokoa ebazteko bi oinarri behar dira, arreta/logika eta plazerra. Izan ere, Maki Kajik dioenez,

> Estrategia hoberena estrategiarik ez izatean datza; praktikaren bidez lortu behar da, deduzituz eta gozatuz.

ERREFERENTZIAK

[1] J. NEWMAN (ed.), *The World of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1956.

[2] *Sudokumania*. http://www.sudokumania.com.ar/.

[3] D. BERTHIER, *The Hidden Logic of Sudoku*. Lightning Source Inc, 2007.

[4] *ACM ICPC*. http://cm.baylor.edu/welcome.icpc.

[5] *World sudoku federation*. http://worldsudokufederation.org/.

[6] *Sudoku variations*. http://www.sudopedia.org/wiki/Sudoku_Variations.

[7] V.H. HJEMMESIDE, *Sudoku*. http://www.menneske.no/.

[8] *Hypercube sudokua*. http://magictour.free.fr/sudoku6.

[9] M. MISAWA. http://www7a.biglobe.ne.jp/~sumnumberplace/27268961/.

[10] IFORS. http://www.ifors.org/.

[11] J. NASH, «The (dantzig) simplex method for linear programming», *Computing in Science & Engineering*, pp. 29-31, 2000.

[12] T. YATO and T. SETA, «Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles», IEICE TRANSACTIONS on *Funda-*

mentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, pp. 1052-1060, 2003.

[13] S.A. COOK, «The complexity of theorem proving procedures», *Proceedings, Third Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* liburuan (ACM, New York, USA), pp. 151-158, 1971.

[14] MILLENNIUM PRIZE PROBLEMS (Clay Mathematics Institute). http://www.claymath.org/millennium/.

[15] M. MERINO, «Sudokus y modelización», *Un paseo por la Geometría* liburuan 2009/10, UPV/EHU.

[16] *COIN-OR*. http://www.coin-or.org.

[17] WIKIPEDIA, *Mathematics of sudoku*. http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku.

[18] *The math behind sudoku*. http://www.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Mahmood/References.html.

[19] J. DELAHAYE, «The science behind sudoku», irunzkin teknikoa, *Scientific American,* 2006.

[20] J.S. PROVAN, *Sudoku: Strategy versus structure,* irunzkin teknikoa, University of North Carolina, 2009.

[21] B. FELGENHAUER and F. JARVIS, *Enumerating possible sudoku grids,* irunzkin teknikoa, 1-7, 2005.

[22] F. JARVIS, *Sudoku enumeration problems*. http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/.

[23] E. RUSSELL and F. JARVIS, *There are 5472730538 essentially different sudoku grids... and the sudoku symmetry group*. http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html.