Lauki sareko patroi bitarren kalkulua, oinarrizko konbinatoriaren eskutik

María Merino Maestre[1], *Yosu Yurramendi Mendizabal*[2]

[1] Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboaren Saila.
Zientzia eta Teknologia Fakultatea (UPV/EHU)

[2] Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala Saila.
Informatika Fakultatea (UPV/EHU)

maria.merino@ehu.es, yosu.yurramendi@ehu.es

Jasoa: 2014-05-21 Onartua: 2014-07-29

Laburpena: Lan hau Yurramendi (2013) artikuluaren ondorioa da eta bertan formula matematiko batzuk lortu dira lauki angeluzuzen bitar kopurua kalkulatzeko. Lan honen helburua formula matematiko horiek konbinatoriaren bidez deduzitzea da. Bi matrize baliokide dira baldin eta berdinak badira islapen bat, 180 graduko biraketa edo bien konbinaketaren ondoren. Konputazio algoritmo baten laguntzaz zenbait formularen aieruak egin ditugu esperimentalki. Problema ebatzi da matrizeen lerro eta zutabe kopuruen arteko paritatearen arabera. Gero, zenbait emaitza gehitu dira.

Hitz gakoak: Konbinatoria, Konputazioa, patroi bitarrak, zenbaki osoen segidak, simetria.

Abstract: This work is a sequel of paper Yurramendi (2013), where some mathematical formulae for counting the number of binary rectangular grids have been obtained. The aim of this work is the combinatorial deduction of those mathematical formulae. Two matrices are considered equivalent if they are the same after reflection, 180 degree rotation or a combination of both. We experimentally conjecture the formulae with the help of a computational algorithm. The problem is classified according to the parity of the number of rows and columns of the matrices. Further results are added.

Keywords: Combinatorics, Computing, binary grids, integer sequences, symmetry.

1. SARRERA

Lan honi ekiteko zergatia, zenbatzeko, patroiak bilatzeko eta formula matematikoetan ezartzeko dugun gogoa eta atsegina da; ikus bedi besteak beste [1, 2, 3, 4].

Zehazki, lan honen jatorria EKAIA 26 aldizkarian agertutako [5] artikulua da. Konputazioa erabiliz formula batzuk induzitzen dira eta lan honek, aieru horien froga matematikoa erakustea du helburu. Nahiz eta Pólyaren teorema ezarriz (ikus [6, 7, 8]) azalpenak arinagoak izan, bakarbakarrik oinarrizko konbinatoria erabiliz frogatzeko aukera izango dugu. Pólyaren [9] liburuaren hitzaurrean agertzen denez,

> A great discovery solves a great problem, but there is a grain of discovery in the solution of any problem. Your problem may be modest, but if it challenges your curiosity and brings into play your inventive faculties, and if you solve it by your own means, you may experience the tension and enjoy the triumph of discovery. (George Pólya)

Gure jakin-mina pizten diguten zenbakiek zerikusia dute zehazki The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS, [10]) agertutako A005418, A225826tik A225834ra eta A225910 zenbaki osoen segidekin. Segida horiek (r, c)-lauki angelu-zuzeneko patroi bitarren sailei ($0 < r < 65$) eta beraien orokortzeari dagozkie.

Lehen segida, $r = 1$ denerako, Sloanek eta Guyk aurkeztu zuten; segida honi sarritan egiten zaio erreferentzia bibliografian, eta lotuta dago $(c - 1)$ puxtarri zuribeltzezko kate alderanzgarrien kopuruarekin; A034851 Losanitsch-en triangeluarekin (ikus [11]); c nodo dituen beldar-katezko grafoen kopuruarekin; ibilbide triangeluarrak $c + 2$ erpin bisitatuz, beraz, $c + 1$eko luzera eta c izkin; eta abar. 2013ko maiatzean, Yurramendi egilekideak zenbaki osoen zenbait segida sartu zituen entziklopedian, $2 \leq r \leq 10$ kasuetarako, eta geroxeago Heinz-ek $10 < r < 65$ kasuetarako. Irakurleak zenbakizko segidei buruzko informazio gehigarria aurki dezake web orrian.

Lan hau honela dago antolatuta: 2. atalean $a(r, c)$ zenbakien formulei buruzko susmo edo usteak ezarriko dira. 3. atalean oinarrizko kontzeptuak definituko eta emaitza batzuk erakutsiko dira. Formula orokorren konbinatoria-frogak 4. atalean azalduko dira, eta bukatzeko, 5. atalean emaitza gehigarri batzuk ikus daitezke.

2. KONPUTAZIOAREN BIDETIK EKARRITAKO USTEZKO FORMULAK

Definizioa 1

$M \in \mathfrak{M}_{rxc}$ matrize bitar bat r lerro eta c zutabe dituen matrize bat da, bere elementuak 0 edo 1 direlarik, hau da, $M = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $\forall i = 1, 2, ..., r$; $j = 1, 2, ..., c$.

Artikulu osoan matrize bitarrak landuko dira eta bereziki ondoko hiru baliokidetasun erlazioak erabiliko dira.

Definizioa 2

M eta $M' \in \mathfrak{M}_{rxc}$ matrize baliokideak dira baldin M matrizea M' matrize bihurtzen bada islapenez, 180 graduko biraketaz, edo bi eragiketa hauen konbinaketaz. Hortaz, hiru baliokidetasun mota hartuko ditugu gogoan:

— M eta M' matrizeak islapenaren bidezko baliokideak dira, $M \sim_1 M'$, baldin eta soilik baldin $a'_{i,j} = a_{i,c+1-j}\ \forall i, j$.
— M eta M' matrizeak 180 graduko biraketaren bidezko baliokideak dira, $M \sim_2 M'$, baldin eta soilik baldin $a'_{i,j} = a_{r+1-i,c+1-j}\ \forall i, j$.
— M eta M' matrizeak 180 graduko biraketaren ondorengo islapenaren bidezko baliokideak dira, $M \sim_3 M'$, baldin eta soilik baldin $a'_{i,j} = a_{r+1-i,j}\ \forall i, j$.

Hemen ebatzi behar da $\sim_1, \sim_2, \sim_3$ hiru baliokidetasun erlazioekiko zenbat $r \times c$ dimentsioko matrize bitar ezberdin diren, hots, $a(r, c)$ kopurua kalkulatu behar da.

Lehendabiziko $a(r, c)$ zenbakiak esperimentalki lortuak dira (ikus [5]), eta horretarako prozedura lau urratsetan deskriba daiteke:

— *1. urratsa:* Eratu konputazioaren bitartez $r \times c$ dimentsioko matrize bitar guztiak.
— *2. urratsa:* Sailkatu islapenen eta 180 graduko biraketen arabera.
— *3. urratsa:* Zenbatu $a(r, c)$ sail baliokideen kopurua.
— *4. urratsa:* Eratu $a(r, c)$ taula simetrikoa; bere dimentsioak konputagailuaren hardwarea eta softwarearen araberakoak dira.

1. taulan ikus daiteke Intel(r) Core(TM) i7 CPU Q720 1.60GHz prozesadorea, 4.00Gb RAM memoria, 64-biteko sistema eragilea eta R softwarea (ikus [12]) erabiliz egin zen $a(r, c)$-rako saiakuntzaren emaitza. Horrela $r \cdot c \leq 27$ izan da goi muga. Taula garbiro ikus dadin, ez dira azaltzen $a(r, c) = a(c, r)$, $c > 5$ denerako emaitza simetrikoak.

$r = 1$ denerako, OEISeko A005418 ondoko segida dugu:

$$\begin{cases} a(1, c) = 2\, a(1, c-1) + 2\, a(1, c-2) - 4\, a(1, c-3),\ c > 2, \\ a(1, 0) = 1,\ a(1, 1) = 2,\ a(1, 2) = 3 \end{cases} \tag{1}$$

eta $r = 2$ denerako, OEISeko A225826 ondoko segida dugu:

$$\begin{cases} a(2, c) = 4\, a(2, c-1) + 4\, a(2, c-2) - 16\, a(2, c-3),\ c > 2, \\ a(2, 0) = 1,\ a(2, 1) = 3,\ a(2, 2) = 7. \end{cases} \tag{2}$$

1. taula. Konputaziotik ekarritako $a(r, c)$ zenbakiak, $r \cdot c \leq 27$ eta $c \leq 5$ direlarik

(r, c)	1	2	3	4	5
1	2	3	6	10	20
2	3	7	24	76	288
3	6	24	168	1120	8640
4	10	76	1120	16576	263680
5	20	288	8640	263680	8407040
6	36	1072	66816	4197376	
7	72	4224	529920		
8	136	16576	4212736		
9	272	66048	33632256		
10	528	262912			
11	1056	1050624			
12	2080	4197376			
13	4160	16785408			

Formula errekurtsibo orokorrak segidetan behatutako erregulartasunak hauteman eta gero lortu dira, hau da, 1. taularen lerroak edo zutabeak aztertuz gero; Esperimentazio Miatzaileari buruz ikus bitez [13, 14, 15], besteak beste. r bikoitia denerako:

$$\begin{cases} a(r, c) = 2^r a(r, c-1) + 2^r a(r, c-2) - (2^r)^2 a(r, c-3), \; c > 2, \\ a(r, 0) = 1, a(r, 1) = a(1, r), a(r, 2) = a(2, r) \end{cases} \tag{3}$$

eta r bakoitia denerako:

$$\begin{cases} a(r,c) = 2^r a(r,c-1) + 2^r a(r,c-2) - (2^r)^2 a(r,c-3) - 2^{\frac{r+1}{2}c-3}\left(2^{\frac{r-1}{2}} - 1\right), \; c > 2, \\ a(r,0) = 1, a(r,1) = a(1,r), a(r,2) = a(2,r). \end{cases} \tag{4}$$

Ohar gaitezkeenez, $(a(1, c))_{c\geq 0}$ eta $(a(2, c))_{c\geq 0}$ errekurrentzia gogoan hartuta, esan daiteke segiden definizioa lehenengo bi segiden menpe daudela, zehazki lehenengo 6 zenbaki hauen menpe: $a(1, 0) = 1$, $a(1, 1) = 2$, $a(1, 2) = 3$, $a(2, 0) = 1$, $a(2, 1) = 3$, eta $a(2, 2) = 7$.

Behin formula errekurtsiboak finkatuta, formula esplizituak bilatzen dira balio partikularrak formuletan ezarriz, eta gai ezberdinen faktoreak aztertuz. Horrela induzitutako formulak hauexek dira:

$$a(r,c)=\begin{cases} 2^{\frac{rc}{2}-2}\left(2^{\frac{rc}{2}}+3\right), & r\,\text{bikoitia},\quad c\,\text{bikoitia} \\ 2^{\frac{rc}{2}-1}\left(2^{\frac{rc}{2}-1}+2^{\frac{c}{2}-1}+1\right), & r\,\text{bakoitia},\quad c\,\text{bikoitia} \\ 2^{\frac{rc}{2}-1}\left(2^{\frac{rc}{2}-1}+2^{\frac{r}{2}-1}+1\right), & r\,\text{bikoitia},\quad c\,\text{bakoitia} \\ 2^{\frac{rc-1}{2}-1}\left(2^{\frac{rc-1}{2}}+2^{\frac{r-1}{2}}+2^{\frac{c-1}{2}}+1\right), & r\,\text{bakoitia},\quad c\,\text{bakoitia}. \end{cases} \tag{5}$$

Era berean,

$$a(r,c)=\begin{cases} 2^{rc-2}+3\cdot 2^{\frac{rc}{2}-2}, & r\,\text{bikoitia},\quad c\,\text{bikoitia} \\ 2^{rc-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{c}{2}-2}+2^{\frac{rc}{2}-1}, & r\,\text{bakoitia},\quad c\,\text{bikoitia} \\ 2^{rc-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{r}{2}-2}+2^{\frac{rc}{2}-1}, & r\,\text{bikoitia},\quad c\,\text{bakoitia} \\ 2^{rc-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{r}{2}-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{c}{2}-2}+2^{\frac{rc-1}{2}-1}, & r\,\text{bakoitia},\quad c\,\text{bakoitia}. \end{cases} \tag{6}$$

3. HASIERAKO DEFINIZIO ETA PROPIETATEAK

Hasieran esan bezala, induzitutako formulen egiaztasuna frogatzea da helburua. Horretarako aldez aurretiko zenbait definizio eta ezaugarri emango ditugu.

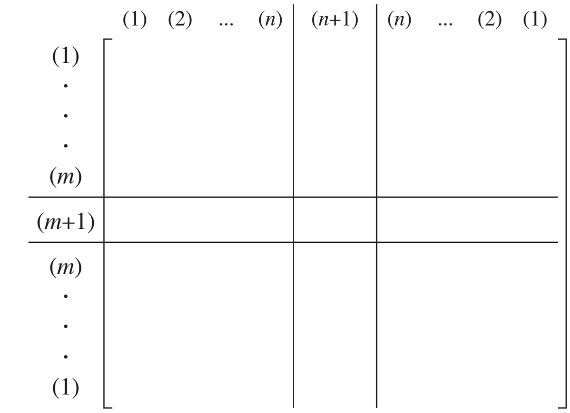
3.1. Definizioak

Izan bedi notazio gehigarri hau:

— m: lerro kopuru erdiaren sabaia da, $\lceil \frac{r}{2} \rceil$. Hau da, r lerro kopurua bikoitia denean, orduan $r = 2m$ da eta r bakoitia denean, orduan $r = 2m + 1$ da.
— n: zutabe kopuru erdiaren sabaia da, $\lceil \frac{c}{2} \rceil$. Hau da, c lerro kopurua bikoitia denean, orduan $c = 2n$ da eta c bakoitia denean, orduan $c = 2n + 1$ da.
— T: goi eremua multzo hau da $T = \{a_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq c\}$.
— B: behe eremua multzo hau da $B = \{a_{ij} : r + 1 - m \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c\}$.
— L: ezker eremua multzo hau da $L = \{a_{ij} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$.
— R: eskuin eremua multzo hau da $R = \{a_{ij} : 1 \leq i \leq r, c + 1 - n \leq j \leq c\}$.

— C_r: matrize baten lerro kopurua bakoitia denean, erdiko lerroa da multzo hau $C_r = \{a_{ij} : i = m + 1, 1 \leq j \leq c\}$.
— C_c: matrize baten zutabe kopurua bakoitia denean, erdiko zutabea da multzo hau $C_c = \{a_{ij} : 1 \leq i \leq r, j = n + 1\}$.
— AB: edo $A \cap B$, A eta B eremuen ebakidura multzoa da.

Lerro eta zutabe kopuruen, r eta c kopuruen, eta paritatearen arabera lau kasuak hartzen ditugu kontuan. r eta c bakoitiak baldin badira, orduan hutsak ez diren eremuen kopurua maximoa da; r bakoitia eta c bikoitia badira, $C_c = \varnothing$; r bikoitia, eta c bakoitia badira, $C_r = \varnothing$; eta, azkenik, r eta c bikoitiak badira $C_r = C_c = \varnothing$. 1. irudiak erakusten ditu indizeak eta eremuak kasu maximoan.



$$
\begin{array}{c|c|c|c}
 & L & C_c & R \\
\hline
r & TL & TC_c & TR \\
C_r & C_rL & C_rC_c & C_rR \\
B & BL & BC_c & BR
\end{array}
$$

1. irudia. $(2m + 1) \times (2n + 1)$ matrize-indize eta eremuak.

$a(r, c)$ kalkulatzeko, problema $rc + 1$ azpiproblematan deskonposa daiteke, bakoitza 1ekoen k kopurua finkatuz gero, $k = 0, 1, 2, ..., rc$. Horrela Batuketaren Legearen arabera,

$$a(r,c) = \sum_{k=0}^{rc} a(r,c,k),$$

eta hasierako problema $a(r, c, k)$ $\forall k = 0, 1, ..., rc$ kalkulatuta mamitzen da.

Gogoan hartuko ditugu datozen multzoak:

— Ω_k: $r \times c$ dimentsioak dituzten matrize bitarren multzoa, k 1ekoen kopurua delarik, $\Omega_k = \{M \in \mathfrak{M}_{r\times c} : \Sigma_{i=1}^{r} \Sigma_{j=1}^{c} a_{ij} = k\}$.
— V_k: islatuz (simetria-ardatz bertikala) inbarianteak diren matrize guztien Ω_k-ren azpimultzoa, hau da, $V_k = \{M \in \Omega_k : M \sim_1 M\}$.

— D_k: 180 gradu biratuz inbarianteak diren matrize guztien Ω_k-ren azpimultzoa, hau da, $D_k = \{M \in \Omega_k : M \sim_2 M\}$.
— H_k: 180 gradu biratu ondoren islatuz (simetria-ardatz horizontala) inbarianteak diren matrize guztien $\Omega_k$ren azpimultzoa, hau da, $H_k = \{M \in \Omega_k : M \sim_3 M\}$.

Gainera, notazio hau erabiltzen dugu: $V\,D_k = V_k \cap D_k$, $V\,H_k = V_k \cap H_k$, $H\,D_k = H_k \cap D_k$, $V\,H\,D_k = V_k \cap H_k \cap D_k$, $\Omega_{\bar{k}}^{-} = \Omega_k - (V_k \cup H_k \cup D_k)$, $V_{\bar{k}}^{-} = V_k - V\,H\,D_k$, $D_{\bar{k}}^{-} = D_k - V\,H\,D_k$, $H_{\bar{k}}^{-} = H_k - V\,H\,D_k$, $\Omega = \cup_{k=0}^{rc} \Omega_k$, $V = \cup_{k=0}^{rc} V_k$, $D = \cup_{k=0}^{rc} D_k$ eta $H = \cup_{k=0}^{rc} H_k$.

3.2. **Propietateak**

4. ataleko frogetan erabiliko diren aurretiko emaitza nagusiak konbinatoriako identitate klasiko hauek dira (ikus [16]):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \binom{n}{2k-1} = 2^{n-1}, \tag{8}$$

eta 1. proposizioan aurkezten diren propietateak.

Proposizioa 1

Hurrengo propietateak betetzen dira:

a) Edozein $k = 0, 1, ..., rc$, $V\,H_k = V\,D_k = H\,D_k = V\,H\,D_k$.
b) $r > 1$ eta $c > 1$ direnean, edozein matrize bitar errektangeluarrek zehatz-mehatz matrize baliokide bakar bat, bi edo lau ditu. Izan ere, matrize baliokide kopuruaren arabera sailkatzen baditugu matrize bitarrak bost matrize mota daude. Badago mota bat 4 matrize baliokide dituena, badaude hiru mota 2 matrize baliokide dituztenak, eta badago mota bat matrize baliokide bakarra duena.
c) $a(r, c)$ denerako formula orokorra hau da

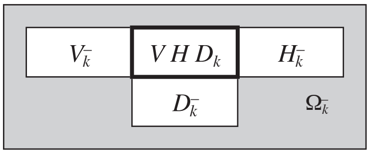
$$a(r, c) = \frac{1}{4}\,[2^{rc} + c(V) + c(H) + c(D)] \tag{9}$$

eta edozein $k = 0, 1, 2, ..., rc$, $a(r, c, k)$rako formula hau da

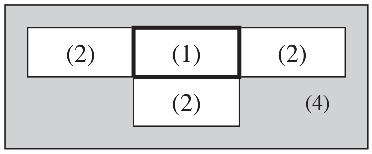
$$a(r, c, k) = \frac{1}{4}\,[c(\Omega_k) + c(V_k) + c(H_k) + c(D_k)] \tag{10}$$

Froga

a) Definizioetatik zuzen zuzenean lortzen da. Beraz, 2. irudian erakusten dira multzo bateraezin nagusiak.



2. irudia. Matrize baliokideen sailkapena.



3. irudia. Matrize baliokideen kopurua.

b) Simetriarik gabeko edozein matrizek, $M \in \Omega_k^-$, lau matrize baliokide ditu, islapenaren bidez, 180 graduko biraketaren bidez eta bien konbinaketen bidez lortutakoak, hain zuzen. Simetria bertikala besterik ez duen edozein matrizek, $M^V \in V_k^-$, bi matrize baliokide ditu, 180 gradu biratuz (edo biak konbinatuz). Simetria horizontala besterik ez duen edozein matrizek, $M^H \in H_k^-$, bi matrize baliokide ditu, islatuz (edo biak konbinatuz). Simetria guztiak dituen edozein matrizek, $M \in V\,H\,D_k$, matrize ordezkari bakarra du. Ikus 3. irudian matrize baliokideen kopurua multzo bateraezinekiko.

$$\Omega_3^-: \quad M_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathrm{M}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$M_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \mathrm{M}_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$V_2^-: \quad M_5^V = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad M_6^V = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$H_4^-: \quad M_7^H = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad M_8^H = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$D_2^-: \quad M_9^D = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad M_{10}^D = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$V\,H\,D_4 \quad M_{11} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

4. irudia. Matrize baliokide moten adibideak.

4. irudian, bost matrize moten adibide bana agertzen da. Lehenengo bi lerroetan 4 matrize ordezkari agertzen dira lehenengo motakorako $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \Omega_{\overline{3}}$ eta $M_1 \sim_1 M_2$, $M_1 \sim_3 M_3$, $M_1 \sim_2 M_4$. Hirugarren lerroan, 2 matrize ordezkari agertzen dira bigarren motakorako $M_5^V, M_6^V \in V_{\overline{2}}$ eta $M_5^V \sim_2 M_6^V$ (edo $M_5^V \sim_3 M_6^V$). Laugarren lerroan, 2 matrize ordezkari agertzen dira hirugarren motakorako, $M_7^H, M_8^H \in H_{\overline{4}}$ eta $M_7^H \sim_1 M_8^H$ (edo $M_7^H \sim_2 M_8^H$). Bosgarren lerroan, 2 matrize ordezkari agertzen dira laugarren motakorako $M_9^D, M_{10}^D \in D_{\overline{2}}$ eta $M_9^D \sim_1 M_{10}^D$ (edo $M_9^D \sim_1 M_{10}^D$). Azken lerroan matrize ordezkari bakarra dago bosgarren motakorako, $M_{11}^D \in VHD_4$.

c) Kontuan hartuta aurreko (a) eta (b) emaitzak, ikus 2. irudia ere, eta matrize ordezkarien multzo bakoitza behin bakarrik zenbatu nahi dugunez gero

$$a(r, c, k) = \frac{c(\Omega_{\overline{k}})}{4} + \frac{c(V_{\overline{k}})}{2} + \frac{c(H_{\overline{k}})}{2} + \frac{c(D_{\overline{k}})}{2} + c(VHD_k) \tag{11}$$

eta Inklusio-esklusio Printzipioaren arabera

$$\begin{aligned} a(r, c, k) &= \frac{1}{4} c(\Omega_k) - \frac{1}{4} c(V_{\overline{k}} \cup H_{\overline{k}} \cup D_{\overline{k}} \cup VHD_k) + \\ &+ \frac{1}{2} c(V_{\overline{k}}) + \frac{1}{2} c(H_{\overline{k}}) + \frac{1}{2} c(D_{\overline{k}}) + c(VHD_k) = \\ &= \frac{1}{4} c(\Omega_k) + \frac{1}{4} c(V_{\overline{k}}) + \frac{1}{4} c(H_{\overline{k}}) + \frac{1}{4} c(D_{\overline{k}}) + \frac{3}{4} c(VHD_k) = \\ &= \frac{1}{4} [c(\Omega_k) + c(V_k) + c(H_k) + c(D_k)]. \end{aligned}$$

Beste era batera esanda, formula ezarri egiten da (b) propietatearengatik, hau da, $c(\Omega_k) + c(V_{\overline{k}}) + c(H_{\overline{k}}) + c(D_{\overline{k}}) + 3c(VHD_k)$ hartzen dugunean lau aldiz ari garelako hartzen matrize ezberdin bakoitza, eta ondorioz $c(\Omega_k) + c(V_{\overline{k}}) + c(H_{\overline{k}}) + c(D_{\overline{k}}) + 3c(VHD_k) = c(\Omega_k) + c(V_k) + c(H_k) + c(D_k) = 4\,a(r, c, k)$.

Bereziki $r = 1$ denerako, k guztietarako $H_k = \Omega_k$ eta $D_k = V_k$, direnez gero, $a(1, c, k) = 1/2[c(\Omega_k) + c(V_k)]$. Eta $c = 1$ denerako, k guztietarako $V_k = \Omega_k$ eta $D_k = H_k$ direnez, orduan $a(r, 1, k) = 1/2\ [c(\Omega_k) + c(H_k)]$.

Amaitzeko, ohar gaitezen $c(\Omega_k) = \binom{rc}{k}$ dela, k 1eko ezarri behar direlako $r \times c$ matrizean, eta ondorioz, $c(\Omega) = 2^{rc}$.

Guztira:

$$a(r,c)=\sum_{k=0}^{rc}a(r,c,k)\overset{(10)}{=}\frac{1}{4}\left[\sum_{k=0}^{rc}\binom{rc}{k}+\sum_{k=0}^{rc}c(V_k)+\sum_{k=0}^{rc}c(H_k)+\sum_{k=0}^{rc}c(D_k)\right]\overset{(7)}{=}$$
$$=\frac{1}{4}\left[2^{rc}+c(V)+c(H)+c(D)\right]. \quad \square$$

4. KONBINATORIAREN BITARTEKO FORMULA OROKORRAK

r eta c-ren paritatearen arabera lau kasu bereiziko ditugu, eta kasu bakoitzean $c(V)$, $c(H)$ eta $c(D)$ kardinalaren kalkuluak egiteari ekingo diogu.

4.1. Lehenengo kasua: *r* bikoitia eta *c* bikoitia

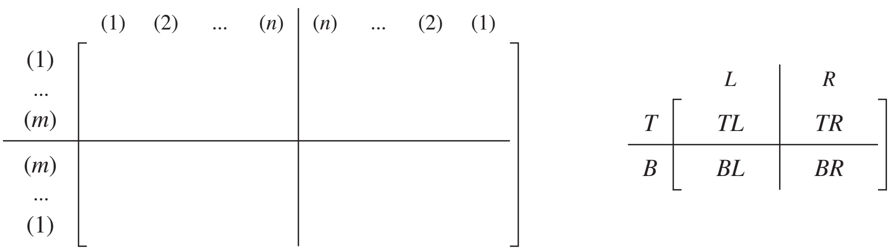
Proposizioa 2

$r \times c$ dimentsioak dituen matrize bitarrerako, r eta c bikoitiak direlarik,

$$a(r,c) = 2^{rc-2} + 3 \cdot 2^{\frac{rc}{2}-2} \tag{12}$$

Froga

5. irudian ematen da $r = 2m$ eta $c = 2n$ direnerako matrizearen irudikapena. Ohartu gaitezen $rc = (2m) \cdot (2n) = 4mn$ bikoitia dela.



5. irudia. $(2m) \times (2n)$ matrize-indize eta eremuak.

Lehenik, V-ren kardinala kalkulatuko dugu. k bikoitia denerako, $k = 0, 2, 4, ..., rc$, $c(V_k)=\binom{2mn}{\frac{k}{2}}$, $2m \cdot n$ elementu dituen L eremuan $k/2$ 1ekoak aukeratzeko moduen kopuruari dagokiolako; ikus 6. irudia.

$$
\begin{array}{c} \\ (1)\\ (2)\\ (3)\\ (4) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
l_{11} & l_{12} & l_{13} & & & \\
l_{21} & l_{22} & l_{23} & & & \\ \hline
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\
l_{41} & l_{42} & l_{43} & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ (1)\\ (2)\\ (3)\\ (4) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & l_{13} & l_{12} & l_{11}\\
 & & & l_{23} & l_{22} & l_{21}\\ \hline
 & & & l_{33} & l_{32} & l_{31}\\
 & & & l_{43} & l_{42} & l_{41}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

6. irudia. V_k multzoaren elementuak 4×6 matrize batean.

Behin $k/2$ elementu L eremuan aukeratuta, gainontzeko 1ekoak R eremuan kokatzen dira islapenaren arabera. k bakoitia denerako, $k = 1, 3, 5, ..., rc - 1$, c bikoitia denez gero, V_k multzo hutsa da, 1ekoak ezin direlako banatu modu berean L eta R eremu simetrikoetan.

$$
c(V) = \sum_{k=0}^{rc} c(V_k) = \sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc} c(V_k) = \sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc} \binom{2mn}{\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{2mn} \binom{2mn}{k} \overset{(7)}{=} 2^{2mn}. \tag{13}
$$

Bigarrenik, Hren elementu kopurua kalkulatuko dugu. k bikoitia denerako, berriz, $c(H_k) = \binom{2mn}{\frac{k}{2}}$, $m \cdot 2n$ elementu dituen T eremuan $k/2$ 1ekoak aukeratzeko moduen kopuruari dagokiolako; ikus 7. irudia

$$
\begin{array}{c} \\ (1)\\ (2)\\ (2)\\ (1) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16}\\
t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26}\\ \hline
 & & & & & \\
 & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \\ (1)\\ (2)\\ (2)\\ (1) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & & \\
 & & & & & \\ \hline
t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26}\\
t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

7. irudia. H_k multzoaren elementuak 4×6 matrize batean.

Behin $k/2$ elementu T eremuan aukeratuta, gainontzeko 1ekoak B eremuan kokatzen dira islatuz eta 180 gradu biratuz. Izan ere, k bakoitia denerako, r bikoitia denez gero, $c(H_k) = 0$, 1ekoak ezin dira banatu modu berean T eta B eremu simetrikoetan. Eta

$$
c(H) = \sum_{k=0}^{rc} c(H_k) = \sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc} c(H_k) = \sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc} \binom{2mn}{\frac{k}{2}} \overset{(7)}{=} 2^{2mn}. \tag{14}
$$

Hirugarrenik, *D*ren elementu kopurua kalkulatuko dugu. *k* bikoitia denerako, berriz ere, $c(D_k)=\begin{pmatrix} 2mn \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix}, 2m\cdot n$ elementu dituen *L* eremuan *k*/2 1ekoak aukeratzeko moduen kopuruari dagokiolako; ikus 8. irudia

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \end{array} \\
\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (2) \\ (1) \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
t_{11} & t_{12} & t_{13} & & & \\
t_{21} & t_{22} & t_{23} & & & \\
\hline
b_{21} & b_{22} & b_{23} & & & \\
b_{11} & b_{12} & b_{13} & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \end{array} \\
\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (2) \\ (1) \end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & b_{13} & b_{12} & b_{11} \\
 & & & b_{23} & b_{22} & b_{21} \\
\hline
 & & & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\
 & & & t_{13} & t_{12} & t_{11}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

8. irudia. D_k multzoaren elementuak 4×6 matrize batean.

Behin *k*/2 elementu *L* eremuan aukeratuta, gainontzeko 1ekoak *R* eremuan kokatzen dira 180 gradu biratuz. Berriro, *k* bakoitia denerako, $c(D_k) = 0$. Horrela,

$$c(D)=\sum_{k=0}^{rc} c(D_k)=\sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc} c(D_k)=\sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc}\begin{pmatrix} 2mn \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix} \stackrel{(7)}{=} 2^{2mn}. \tag{15}$$

(13), (14) eta (15) hiru emaitzak batuz, (9) formularen arabera (12) formula lortzen da:

$$a(r,c) = a(2m,2n) = \frac{1}{4}\,[c(\Omega) + c(V) + c(H) + c(D)] = \frac{1}{4}\,[2^{rc} + 2^{2mn} + 2^{2mn} + 2^{2mn}] =$$
$$= 2^{rc-2} + 3\cdot 2^{2mn-2} = 2^{rc-2} + 3\cdot 2^{\frac{rc}{2}-2}. \quad \square$$

4.2. **Bigarren kasua: *r* bakoitia eta *c* bikoitia**

Proposizioa 3

$r \times c$ dimentsioak dituen matrize bitarrerako, *r* bakoitia eta *c* bikoitia direlarik,

$$a(r,c)=2^{rc-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{c}{2}-2}+2^{\frac{rc}{2}-1}. \tag{16}$$

Froga

9. irudian ematen da $r = 2m + 1$ eta $c = 2n$ direnerako matrizearen irudikapena. Ikus daitekeenez $rc = (2m + 1) \cdot (2n) = 4mn + 2n$ bikoitia da.

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc|}
 & (1) & (2) & \cdots & (n) & (n) & \cdots & (2) & (1) \\
(1) & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
(m) & & & & & & & & \\
\hline
(m+1) & & & & & & & & \\
\hline
(m) & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
(1) & & & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|}
 & L & R \\
r & TL & TR \\
\hline
C_r & C_rL & C_rR \\
\hline
B & BL & BR
\end{array}
$$

9. irudia. $(2m + 1) \times (2n)$ matrize-indize eta eremuak.

Lehenik, $c(V)$ kalkulatuko dugu. k bikoitia denerako, hots, $k = 0, 2, 4, ..., rc$, orduan $c(V_k) = \binom{rn}{\frac{k}{2}}$ da. Izan ere, rn elementu dituen L eremuan $k/2$ 1ekoak aukeratzeko moduen kopuruari dagokio; ikus 10. irudia.

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \\
(1) & l_{11} & l_{12} & l_{13} & & & \\
(2) & l_{21} & l_{22} & l_{23} & & & \\
\hline
(3) & l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\
\hline
(4) & l_{41} & l_{42} & l_{43} & & & \\
(5) & l_{51} & l_{52} & l_{53} & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \\
(1) & & & & l_{13} & l_{12} & l_{11} \\
(2) & & & & l_{23} & l_{22} & l_{21} \\
\hline
(3) & & & & l_{33} & l_{32} & l_{31} \\
\hline
(4) & & & & l_{43} & l_{42} & l_{41} \\
(5) & & & & l_{53} & l_{52} & l_{51}
\end{array}
$$

10. irudia. V_k multzoaren elementuak 5×6 matrize batean.

k bakoitia denerako, $k = 1, 3, 5, ..., rc - 1$, c bikoitia denez gero, V_k multzo hutsa da. Eta

$$c(V) = \sum_{\substack{k=0 \\ bikoitia}}^{rc} c(V_k) = \sum_{\substack{k=0 \\ bikoitia}}^{rc} \binom{rn}{\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{\frac{rc}{2}} \binom{rn}{k} = \sum_{k=0}^{rn} \binom{rn}{k} \stackrel{(7)}{=} 2^{rn}. \qquad (17)$$

Bigarrenik, H_k ren kardinala C_r erdiko lerroan kokatuta dauden 1ekoen k_r kopuruaren baitan dago. Ohar gaitezkeenez, k bikoitia denerako k_r balioak 0 eta c-ren arteko zenbaki bikoitia izan behar du; bestela, gainontzeko 1ekoak ezingo liratekeelako berdin hainbanatu T eta B eremuen artean. Horrela, k_r elementu aukeratzen baldin badira C_r-n, $\dfrac{k-k_r}{2}$ elementu aukeratu behar da T eremuan, $\dfrac{k-k_r}{2}$ zenbakia 0 eta mc-ren artekoa delarik; ikus 11. irudia.

$$
\begin{array}{c}
 \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (2) \\ (1)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|ccc}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1)
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\
t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ \hline
r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ \hline
 & & & & & \\
 & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (2) \\ (1)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|ccc}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1)
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & & & \\
 & & & & & \\ \hline
r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ \hline
t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\
t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

11. irudia. H_k multzoaren elementuak 5×6 matrize batean.

Horrela, *Biderketaren Legea*ren arabera, edozein k_r bikoitia finkatzen delarik, $0 \leq k_r \leq c$, $\dbinom{c}{k_r}\dbinom{mc}{\frac{k-k_r}{2}}$ matrize ezberdin daude, $0 \leq \dfrac{k-k_r}{2} \leq mc$ delarik, baliokideki adierazita $k_r \leq k \leq 2mc + k_r$.

k bakoitia denerako, $c(H_k) \neq 0$ eta aurrekoan bezala C_r-n dauden k_r 1ekoen kopuruaren baitan dago. Ikus daitekeenez, k_r balioak 1 eta $(c-1)$-en arteko zenbaki bakoiti bat izan behar du. C_r-n k_r elementu aukeratzen baldin baditugu, orduan $\dfrac{k-k_r}{2}$ elementu aukeratu beharko ditugu T eremuan, $\dfrac{k-k_r}{2}$ zenbakia 0 eta mc-ren artekoa delarik.

$$
\begin{aligned}
c(H) &= \sum_{\substack{k=0\\ \textit{bikoitia}}}^{rc} c(H_k) + \sum_{\substack{k=0\\ \textit{bakoitia}}}^{rc} c(H_k) = \\
&= \sum_{\substack{k_r=0\\ \textit{bikoitia}}}^{c} \sum_{\substack{k=k_r\\ \textit{bikoitia}}}^{2mc+k_r} \binom{c}{k_r}\binom{mc}{\frac{k-k_r}{2}} + \sum_{\substack{k_r=0\\ \textit{bakoitia}}}^{c} \sum_{\substack{k=k_r\\ \textit{bakoitia}}}^{2mc+k_r} \binom{c}{k_r}\binom{mc}{\frac{k-k_r}{2}} = \qquad (18)\\
&= \sum_{\substack{k_r=0\\ \textit{bikoitia}}}^{c} \binom{c}{k_r} \sum_{k=0}^{mc}\binom{mc}{k} + \sum_{\substack{k_r=0\\ \textit{bakoitia}}}^{c} \binom{c}{k_r} \sum_{k=0}^{mc}\binom{mc}{k} \overset{(7),(8)}{=} \\
&= 2^{c-1}\cdot 2^{mc} + 2^{c-1}\cdot 2^{mc} = 2^{mc+c}.
\end{aligned}
$$

Hirugarrenik, Dren kardinala kalkulatuko dugu. k bikoitia denerako, $c(D_k)$ ezker erdiko lerroan, n elementu dituen C_rL eremuan k_r elementu aukeratzeko moduen kopuruari, eta $\frac{k-2k_r}{2}$ elementu $mn + mn$ elementu dituen $T\,L \cup BL$ eremuan aukeratzeko moduen kopuruei dagozkio; ikus 12. irudia

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \\
(1) & t_{11} & t_{12} & t_{13} & & & \\
(2) & t_{21} & t_{22} & t_{23} & & & \\
\hline
(3) & r_1 & r_2 & r_3 & & & \\
\hline
(2) & b_{21} & b_{22} & b_{23} & & & \\
(1) & b_{11} & b_{12} & b_{13} & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \\
(1) & & & & b_{13} & b_{12} & b_{11} \\
(2) & & & & b_{23} & b_{22} & b_{21} \\
\hline
(3) & & & & r_3 & r_2 & r_1 \\
\hline
(2) & & & & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\
(1) & & & & t_{13} & t_{12} & t_{11}
\end{array}
$$

12. irudia. D_k multzoaren elementuak 5×6 matrize batean.

Horrela, *Biderketaren Legea*ren arabera, edozein $k_r$rako, $0 \le k_r \le n$, $\binom{n}{k_r}\binom{2mn}{\frac{k-2k_r}{2}}$ matrize ezberdin daude, non $0 \le \frac{k-2k_r}{2} \le 2mn$ den, hau da, $2k_r \le k \le 4mn + 2k_r$ betetzen den. Ohar gaitezkeenez, k bakoitia denerako c bikoitia denez, D_k multzoa hutsa da. Eta

$$c(D)=\sum_{k=0}^{rc} c(D_k)=\sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc} c(D_k)=\sum_{k_r=0}^{n}\binom{n}{k_r}\sum_{\substack{k=2k_r\\ bikoitia}}^{4mn+2k_r}\binom{2mn}{\frac{k-2k_r}{2}}= \tag{19}$$
$$=\sum_{k_r=0}^{n}\binom{n}{k_r}\sum_{k=0}^{2mn}\binom{2mn}{k}\overset{(7)}{=}2^n\cdot 2^{2mn}=2^{2mn+n}=2^{rn}.$$

Horrela, (17), (18), (19) eta (9) erabiliz, (16) formula lortzen da:

$$a(r,c)=a(2m+1,2n)=\frac{1}{4}[c(\Omega)+c(V)+c(H)+c(D)]=\frac{1}{4}[2^{rc}+2^{rn}+2^{mc+c}+2^{rn}]=$$
$$=2^{rc-2}+2\cdot 2^{rn-2}+2^{mc+c-2}=2^{rc-2}+2^{rn-1}+{}^{2mc+c-2}=$$
$$=2^{rc-2}+2^{\frac{rc}{2}-1}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{c}{2}-2}. \quad \square$$

4.3. **Hirugarren kasua: *r* bikoitia eta *c* bakoitia**

Proposizioa 4

$r \times c$ dimentsioak dituen matrize bitarrerako, r bikoitia eta c bakoitia direlarik,

$$a(r,c)=2^{rc-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{r}{2}-2}+2^{\frac{rc}{2}-1}. \tag{20}$$

Froga

$r = 2n$ eta $c = 2m + 1$ direnerako matrizearen irudikapena 9. irudian emandakoaren iraulia da. $a(r, c) = a(c, r)$ konbinatoriaren bitartez, eta 3. proposizioa erabilita, (20) ekuazioa lortzen da. $\square$

4.4. **Laugarren kasua: *r* bakoitia eta *c* bakoitia**

Proposizioa 5

$r \times c$ dimentsioak dituen matrize bitarrerako, r eta c bakoitiak direlarik,

$$a(r,c)=2^{rc-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{r}{2}-2}+2^{\frac{rc}{2}+\frac{c}{2}-2}+2^{\frac{rc-1}{2}-1}. \tag{21}$$

Froga

1. irudian ematen da $r = 2m + 1$ eta $c = 2n + 1$ direnerako matrizearen irudikapena. Argi dago $rc = (2m + 1) \cdot (2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1$ bakoitia dela.

Lehenik, $c(V)$ kalkulatuko dugu. k bikoitia denerako, $k = 0, 2, 4, ..., rc - 1$, V_k ren kardinala C_c erdiko zutabean dauden, k_c, 1ekoen kopuruaren baitan dago. k_c balioak 0 eta $r$ren bitarteko zenbaki bikoiti bat izan behar du; bestela, gainontzeko 1 balioak ezingo liratekeelako berdin hainbanatu L eta R eremuetan. C_c en k_c elementu aukeratzen baldin badira, orduan $\dfrac{k-k_c}{2}$ elementu ezarri behar dira L eremuan, non $\dfrac{k-k_c}{2}$ balioa 0 eta rn bitarteko zenbakia den; ikus 13. irudia.

$$
\begin{array}{c}
 \\
(1)\\
(2)\\
(3)\\
(4)\\
(5)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|c|ccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (3) & (2) & (1)
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
l_{11} & l_{12} & l_{13} & c_1 & & & \\
l_{21} & l_{22} & l_{23} & c_2 & & & \\
\hline
l_{31} & l_{32} & l_{33} & c_3 & & & \\
\hline
l_{41} & l_{42} & l_{43} & c_4 & & & \\
l_{51} & l_{52} & l_{53} & c_5 & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\
(1)\\
(2)\\
(3)\\
(4)\\
(5)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|c|ccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (3) & (2) & (1)
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
 & & & c_1 & l_{13} & l_{12} & l_{11}\\
 & & & c_2 & l_{23} & l_{22} & l_{21}\\
\hline
 & & & c_3 & l_{33} & l_{32} & l_{31}\\
\hline
 & & & c_4 & l_{43} & l_{42} & l_{41}\\
 & & & c_5 & l_{53} & l_{52} & l_{51}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

13. irudia. V_k multzoaren elementuak 5×7 matrize batean.

Horrela, Biderketaren Legearen arabera, edozein kc bikoitia denerako, $0 \le k_c \le r$, $\sum_{k_c,k} \binom{r}{k_c} \binom{rn}{\frac{k-k_c}{2}}$ matrize ezberdin dago, $0 \le \dfrac{k-k_c}{2} \le rn$ delarik, edo baliokideki, $k_c \le k \le 2rn + k_c$.

k bakoitia denerako, $k = 1, 3, 5, ..., rc$, multzoa berriz ere ez da hutsa. $V_k$ren kardinala erdiko zutabe $C_c$aren, k_c, 1 balioen kopuruaren baitan dago. k_c balioak 0 eta $r$ren bitarteko zenbaki bakoiti bat behar du izan. C_cn k_c elementu aukeratzen baldin badira, orduan $\dfrac{k-k_c}{2}$ elementu ezarri beharko dira L eremuan, $\dfrac{k-k_c}{2}$ 0 eta rn bitarteko balio bat delarik. Eta

$$
\begin{aligned}
c(V) &= \sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc-1} c(V_k) + \sum_{\substack{k=0\\ bakoitia}}^{rc} c(V_k) = \\
&= \sum_{\substack{k_c=0\\ bikoitia}}^{r} \binom{r}{k_c} \sum_{\substack{k=k_c\\ bikoitia}}^{2rn+k_c} \binom{rn}{\frac{k-k_c}{2}} + \sum_{\substack{k_c=0\\ bakoitia}}^{r} \binom{r}{k_c} \sum_{\substack{k=k_c\\ bakoitia}}^{2rn+k_c} \binom{rn}{\frac{k-k_c}{2}} = \\
&= \sum_{\substack{k_c=0\\ bikoitia}}^{r} \binom{r}{k_c} \sum_{k=0}^{rn} \binom{rn}{k} + \sum_{\substack{k_c=0\\ bakoitia}}^{r} \binom{r}{k_c} \sum_{k=0}^{rn} \binom{rn}{k} =^{(7),(8)} \\
&= 2^{r-1} \cdot 2^{rn} + 2^{r-1} \cdot 2^{rn} = 2^{rn+r}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Bigarrenik, $H_k$ren kardinala erdiko C_r lerroan dagoen k_r 1 balio kopuruaren baitan dago; ikus 14. irudia. Eta 3. proposizioan azaldu denez,

$$
\begin{array}{c}
 \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (2) \\ (1)
\end{array}
\begin{array}{ccc|c|ccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \\
\hline
t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} & t_{17} \\
t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{15} & t_{25} & t_{26} & t_{27} \\
\hline
r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 \\
\hline
 & & & & & & \\
 & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (2) \\ (1)
\end{array}
\begin{array}{ccc|c|ccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \\
\hline
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
\hline
r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 \\
\hline
t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{15} & t_{25} & t_{26} & t_{27} \\
t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} & t_{17}
\end{array}
$$

14. irudia. H_k multzoaren elementuak 5×7 matrize batean.

$$
\begin{aligned}
c(H) &= \sum_{\substack{k=0\\ bikoitia}}^{rc} c(H_k) + \sum_{\substack{k=0\\ bakoitia}}^{rc} c(H_k) = \\
&= \sum_{\substack{k_r=0\\ bikoitia}}^{c} \binom{c}{k_r} \sum_{\substack{k=k_r\\ bikoitia}}^{2mc+k_r} \binom{mc}{\frac{k-k_r}{2}} + \sum_{\substack{k_r=0\\ bakoitia}}^{c} \binom{c}{k_r} \sum_{\substack{k=k_r\\ bakoitia}}^{2mc+k_r} \binom{mc}{\frac{k-k_r}{2}} = \\
&= \sum_{\substack{k_r=0\\ bikoitia}}^{c} \binom{c}{k_r} \sum_{k=0}^{mc} \binom{mc}{k} + \sum_{\substack{k_r=0\\ bakoitia}}^{c} \binom{c}{k_r} \sum_{k=0}^{mc} \binom{mc}{k} =^{(7),(8)} \\
&= 2^{c-1} \cdot 2^{mc} + 2^{c-1} \cdot 2^{mc} = 2^{mc+c}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Hirugarrenik, D_k kardinala $m + n$ elementu dituen C_rL ezkerrerdiko lerroan eta TC_c goierdiko zutabean dagoen, k_d, 1 balioen kopuruaren baitan dago. Esan beharrekoa da k bikoitia denerako k_d bikoitia edo bakoitia izan daitekeela, eta 0 eta $m + n$ bitarteko zenbaki bat izan behar dela. $C_rL \cup TC_c$ eremuan k_d elementu aukeratzen baldin badira, orduan $\dfrac{k-2k_d}{2}$ elementu ezarri behar dira $mn + mn$ elementu dituen $TL \cup BL$ eremuan, $\dfrac{k-2k_d}{2}$ 0 eta $2mn$ bitarteko zenbaki bat delarik; ikus 15. irudia.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(3)&(2)&(1)\end{array} \\
\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(2)\\(1)\end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
t_{11}&t_{12}&t_{13}&c_1&&& \\
t_{21}&t_{22}&t_{23}&c_2&&& \\ \hline
r_1&r_2&r_3&x&&& \\ \hline
b_{21}&b_{22}&b_{23}&&&& \\
b_{11}&b_{12}&b_{13}&&&&
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(3)&(2)&(1)\end{array} \\
\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(2)\\(1)\end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
&&&&b_{13}&b_{12}&b_{11} \\
&&&&b_{23}&b_{22}&b_{21} \\ \hline
&&&x&r_3&r_2&r_1 \\ \hline
&&&c_2&t_{23}&t_{22}&t_{21} \\
&&&c_1&t_{13}&t_{12}&t_{11}
\end{array}\right]
\end{array}$$

15. irudia. D_k multzoaren elementuak 5 × 7 matrize batean.

Horrela, *Biderketaren Legea*ren arabera edozein k_d finkorako, $0 \le k_d \le m + n$, $\dbinom{m+n}{k_d}\dbinom{2mn}{\frac{k-2k_d}{2}}$ matrize ezberdin daude, non $0 \le \dfrac{k-2k_d}{2} \le 2mn$ den, hau da, $2k_d \le k \le 4mn + 2k_d$. k bakoitia denerako, ikusi beharrekoa da k_d bikoitia edo bakoitia izan daitekeela, eta 0 eta $m + n$ bitartekoa izan behar dela, eta $C_r \cap C_c$ eremuko erdiko elementuak 1 balio izan behar duela beti. $C_rL \cup TC_c$ eremuan k_d elementu aukeratzen baldin badira, $0 \le k_d \le m + n$, $\dfrac{k-2k_d-1}{2}$ elementu ezarri behar dira $mn + mn$ elementu dituen $TL \cup BL$ eremuan, $\dfrac{k-2k_d-1}{2}$ 0 eta $2mn$ bitarteko zenbaki bat delarik, hau da, $2k_d + 1 \le k \le 4mn + 2k_d + 1$. Eta

$$c(D) = \sum_{\substack{k=0 \\ bikoitia}}^{rc} c(D_k) + \sum_{\substack{k=0 \\ bakoitia}}^{rc} c(D_k) =$$

$$= \sum_{k_d=0}^{m+n} \binom{m+n}{k_d} \sum_{\substack{k=2k_d \\ bikoitia}}^{4mn+2k_d} \binom{2mn}{\frac{k-2k_d}{2}} + \sum_{k_d=0}^{m+n} \binom{m+n}{k_d} \sum_{\substack{k=2k_d+1 \\ bakoitia}}^{4mn+2k_d+1} \binom{2mn}{\frac{k-2k_d-1}{2}} = \quad (24)$$

$$= 2 \cdot \sum_{k_d=0}^{m+n} \binom{m+n}{k_d} \sum_{k=0}^{2mn} \binom{2mn}{k} \overset{(7)}{=} 2 \cdot 2^{m+n} \cdot 2^{2mn} = 2^{2mn+m+n+1}.$$

Hortaz, (22), (23) eta (24) hiru emaitzak (9)n kontuan hartzen baditugu, (21) formula lortzen da:

$$\begin{aligned} a(r, c) = a(2m+1, 2n+1) &= \frac{1}{4}[c(\Omega) + c(V) + c(H) + c(D)] = \\ &= \frac{1}{4}[2^{rc} + 2^{rn+r} + 2^{mc+c} + 2^{2mn+m+n+1}] = \\ &= 2^{rc-2} + 2^{rn+r-2} + 2^{mc+c-2} + 2^{2mn+m+n-1} = \\ &= 2^{rc-2} + 2^{\frac{rc}{2}+\frac{r}{2}-2} + 2^{\frac{rc}{2}+\frac{c}{2}-2} + 2^{\frac{rc-1}{2}-1}. \quad \square \end{aligned}$$

5. BESTELAKO ZENBAIT EMAITZA

Korolarioa 1

V, H eta D multzoen kardinalak ondokoak dira:

a) $c(V) = 2^{r\left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil}$.

b) $c(H) = 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil c}$.

c) $c(D) = 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil}$.

Froga

Emaitzak egiaztatzeko, nahikoa da 2-5. proposizioak frogatzeko aurreko garapenak kontuan hartzea.

a) Izan ere, bat datoz r eta c bikoitiak direnean 2. proposizioan lortzen den (13) emaitza, r bakoitia eta c bikoitiak direnean 3. proposizioan lortzen den (17) emaitza eta r eta c bikoitiak direnean 5. proposizioan lortzen den (22) emaitza.

b) Izan ere, r eta c bikoitiak direnean 2. proposizioan (14) emaitza, r bakoitia eta c bikoitiak direnean 3. proposizioan (18) emaitza eta r eta c bikoitiak direnean 5. proposizioan (23) emaitza bat datoz.
c) Izan ere, r eta c bikoitiak direnean 2. proposizioan (15) emaitza, r bakoitia eta c bikoitiak direnean 3. proposizioan (19) emaitza eta r eta c bikoitiak direnean 5. proposizioan (24) emaitza bat datoz.

Proposizioa 6

$V\,H\,D$ multzoaren kardinala, alegia, irudikapen bakarra duten matrize kopurua hauxe da

$$c(V\,H\,D) = 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil} \tag{25}$$

Zehazki,

a) $c(V\,H\,D) = 2^{\frac{rc}{4}}$, r eta c bikoitia direlarik.
b) $c(V\,H\,D) = 2^{\frac{(r+1)c}{4}}$, r bakoitia eta c bikoitia direlarik.
c) $c(V\,H\,D) = 2^{\frac{r(c+1)}{4}}$, r bikoitia eta c bakoitia direlarik.
d) $c(V\,H\,D) = 2^{\frac{rc+r+c+1}{4}}$, r eta c bakoitia direlarik.

Froga

Azter dezagun r eta c balioen paritatearen arabera.

a) Izan bitez $r = 2m$ eta $c = 2n$ bikoitiak. 16. irudian erakusten den legez, nahikoa da elementuak TL eremuan aukeratzea.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (2) \\ (1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} t_{11} & t_{12} & t_{13} & & & \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc|ccc} (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (2) \\ (1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & t_{13} & t_{12} & t_{11} \\ & & & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{13} & t_{12} & t_{11} \end{array}\right] \end{array}$$

16. irudia. $V\,H\,D_k$ multzoaren elementuak 4×6 matrize batean.

Ikus daitekeenez $V\,H\,D_k$ multzoa ez da hutsa $k \equiv 0$ *mod* 4 denean, eta $c(V\,H\,D_k) = \begin{pmatrix} mn \\ \frac{k}{4} \end{pmatrix}$ da. Hau da, $c(V\,H\,D_k)$ mn elementu dituen TL eremuan $k/4$ elementu aukeratzeko moduen kopurua, beste $k/4$ elementu islapenaz *TR* eremuan kokatu behar direlako eta gainontzeko $k/2$ elementuak 180 gradu biratuz *B* eremuan kokatu behar direlako. Horrela,

$$c(VDH)=\sum_{k=0}^{rc} c(VHD_k)=\sum_{\substack{0\le k\le 4mn\\ k\equiv 0\, mod\, 4}} \begin{pmatrix} mn \\ \frac{k}{4} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{mn}\begin{pmatrix} mn \\ k \end{pmatrix} = 2^{mn} =^{(7)} 2^{\frac{rc}{4}}.$$

b) Izan bitez $r = 2m + 1$ bakoitia eta $c = 2n$ bikoitia. 17. irudian erakusten den legez, nahikoa da elementuak $TL \cup C_rL$ eremuan aukeratzea.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \\
(1) & t_{11} & t_{12} & t_{13} & & & \\
(2) & t_{21} & t_{22} & t_{23} & & & \\
\hline
(3) & r_1 & r_2 & r_3 & & & \\
\hline
(2) & & & & & & \\
(1) & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & (1) & (2) & (3) & (3) & (2) & (1) \\
(1) & & & & t_{13} & t_{12} & t_{11} \\
(2) & & & & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\
\hline
(3) & & & & r_3 & r_2 & r_1 \\
\hline
(2) & t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\
(1) & t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{13} & t_{12} & t_{11}
\end{array}$$

17. irudia. VHD_k multzoaren elementuak 5 × 6 matrize batean.

Ohar gaitezkeenez VHD_k multzoa ez da hutsa k bikoitia denean, eta $c(VHD_k) = \sum_{k_r,k}\begin{pmatrix} r \\ k_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} mn \\ \frac{k-2k_r}{2} \end{pmatrix}$ da. Hau da, $c(VHD_k)$ da C_rL eremuan k_r elementu, $0 \le k_r \le n$, eta *TL* eremuan $\frac{k-2k_r}{4}$ elementu, $0 \le \frac{k-2k_r}{4} \le mn$, aukeratzeko modu kopurua. Baldin $k \equiv 0$ *mod* 4 bada, orduan $2k_r \equiv 0$ *mod* 4 eta k_r bikoitia da. Baldin $k \equiv 2$ *mod* 4 bada, orduan $2k_r \equiv 2$ *mod* 4 eta k_r bakoitia da. Baldin $k \equiv 1$ *mod* 4 edo $k \equiv 3$ *mod* 4 bada, 1 balioak ezingo dira berdin hainbanatu eta $c(VHD_k) = 0$. Hortaz,

$$c(V\,H\,D) = \sum_{k=0}^{rc} c(V\,H\,D_k) = \sum_{\substack{0 \le k_r \le n \\ k_r\ bikoitia}} \binom{n}{k_r} \sum_{\substack{2k_r \le k \le 4mn+2k_r \\ k \equiv 0\ mod\ 4}} \binom{mn}{\frac{k-2k_r}{4}} +$$

$$+ \sum_{\substack{0 \le k_r \le n \\ k_r\ bakoitia}} \binom{n}{k_r} \sum_{\substack{2k_r \le k \le 4mn+2k_r \\ k \equiv 2\ mod\ 4}} \binom{mn}{\frac{k-2k_r}{4}} =$$

$$= \sum_{\substack{k_r=0 \\ bikoitia}}^{n} \binom{n}{k_r} \sum_{k=0}^{mn} \binom{mn}{k} + \sum_{\substack{k_r=0 \\ bakoitia}}^{n} \binom{n}{k_r} \sum_{k=0}^{mn} \binom{mn}{k} =$$

$$= \sum_{k_r=0}^{n} \binom{n}{k_r} \sum_{k=0}^{mn} \binom{mn}{k} = 2^n \cdot 2^{mn} = 2^{mn+n} \stackrel{(7)}{=} 2^{\frac{(r+1)c}{4}}.$$

c) Izan bitez $r = 2m$ bikoitia eta $c = 2n + 1$ bakoitia. Matrizea irauli eta aurreko (b) emaitza erabiliz gero lortzen da.

d) Izan bitez $r = 2m + 1$ eta $c = 2n + 1$ bakoitiak. 18. irudian erakusten den legez, nahikoa da elementuak $TL \cup C_rL \cup TC_c \cup C_rC_c$ eremuan aukeratzea.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (3) & (2) & (1) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (2) \\ (1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} t_{11} & t_{12} & t_{13} & c_1 & & & \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & c_2 & & & \\ \hline r_1 & r_2 & r_3 & x & & & \\ \hline & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (3) & (2) & (1) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (2) \\ (1) \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} & & & & t_{13} & t_{12} & t_{11} \\ & & & & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\ \hline & & & x & r_3 & r_2 & r_1 \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & c_2 & t_{23} & t_{22} & t_{21} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} & c_1 & t_{13} & t_{12} & t_{11} \end{array}\right] \end{array}$$

18. irudia. $V\,H\,D_k$ multzoaren elementuak 5×7 matrize batean.

Ikus daitekeenez $V\,H\,D_k$ multzoa ez da hutsa edozein k baliorako, $k = 0, 1, ..., rc$. Eta $c(V\,H\,D_k) = \sum_{k_d, k} \binom{m+n}{k_d} \binom{mn}{\frac{k-2k_d}{4}}$ da, non $0 \le k_d \le m + n$ eta $0 \le \frac{k-2k_d}{4} \le mn$ diren, hau da, $2k_d \le k \le 4mn + 2k_d$. Izan ere, $c(V\,H\,D_k)$ da $C_rL \cup TC_c$ eremuan k_d elementu, $0 \le k_d \le m + n$, eta TL eremuan $\frac{k-2k_d}{4}$ elementu,

$0 \le \dfrac{k - 2k_d}{4} \le mn$, aukeratzeko modu kopurua. Baldin $k \equiv 0 \ mod\ 4$ bada, orduan C_rC_c hutsa da, eta orduan $2k_d \equiv 0 \ mod\ 4$, eta k_d bikoitia da. Baldin $k \equiv 1 \ mod\ 4$ bada, orduan C_rC_c eremuak 1 balioa du eta orduan $2k_d \equiv 0 \ mod\ 4$ eta k_d bikoitia. Baldin $k \equiv 2 \ mod\ 4$ bada, orduan C_rC_c hutsa da, eta orduan $2k_d \equiv 2 \ mod\ 4$, eta k_d bakoitia da. Baldin $k \equiv 3 \ mod\ 4$ bada, orduan C_rC_c eremuak 1 balioa du, eta orduan $2k_d \equiv 2 \ mod\ 4$ eta k_d bakoitia. Beraz,

$$
\begin{aligned}
c(V\,H\,D) &= \sum_{k=0}^{rc} c(V\,H\,D_k) = \sum_{k_d=0}^{m+n} \binom{m+n}{k_d} \sum_{k=0}^{mn} \binom{mn}{k} + \\
&+ \sum_{k_d=0}^{m+n} \binom{m+n}{k_d} \sum_{k=0}^{mn} \binom{mn}{k} = 2 \cdot \sum_{k_d=0}^{m+n} \binom{m+n}{k_d} \sum_{k=0}^{mn} \binom{mn}{k} =^{(7)} \\
&= 2 \cdot 2^{m+n} \cdot 2^{mn} = 2^{mn+m+n+1} = 2^{\frac{rc+r+c+1}{4}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Korolarioa 2

$(V^- \cup H^- \cup D^-)$ multzoaren kardinala, alegia, bi matrize baliokide dituzten matrizeen kopurua hauxe da

$$
c(V^- \cup H^- \cup D^-) = 2^{r\left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil} + 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil c} + 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor} - 3 \cdot 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil}. \qquad (26)
$$

Froga

1 eta 6. proposizioak eta 1. korolarioa kontuan hartuta,

$$
\begin{cases}
c(V) = 2^{r\left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil} \\
c(H) = 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil c} \\
c(D) = 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
c(V^-) = c(V) - c(V\,H\,D) = 2^{r\left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil} - 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil} \\
c(H^-) = c(H) - c(V\,H\,D) = 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil c} - 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil} \\
c(D^-) = c(D) - c(V\,H\,D) = 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor} - 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil}
\end{cases}
$$

eta $c(V^- \cup H^- \cup D^-) = c(V^-) + c(H^-) + c(D^-)$ denez, (26) emaitza lortzen da.

Korolarioa 3

Ω^- multzoaren kardinala, alegia, lau matrize baliokide dituzten matrizeen kopurua hauxe da

$$c(\Omega^-) = 2^{rc} - 2^{r\left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil} - 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil c} - 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + 1}. \tag{27}$$

Froga

1. proposizioa dela eta, $c(\Omega^-) = c(\Omega) - c(V^- \cup H^- \cup D^-) - c(V\,H\,D) = c(\Omega) - c(V) - c(H) - c(D) + 2 \cdot c(V\,H\,D)$ eta (27) emaitza lortzen da 6. proposizioari eta 1. korolarioari esker.

Korolarioa 4

$a(r, c)$ zenbakia adierazteko ondoko adierazpena dugu:

$$a(r,c) = 2^{rc-2} + 2^{r\left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil - 2} + 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil c - 2} + 2^{\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{c}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor - 2}. \tag{28}$$

Froga

1. proposizioaren c) ataleko (9) emaitza eta 1. korolarioaren formulak erabiliz, adierazpena egiazta daiteke.

6. ONDORIOAK

Problema baten aurrean aztertzeko hiru bide matematiko azaltzen dira: konputazio hutsezko bide esperimentala eta indukzioa (artikulu honen jatorrian ibilitakoa); oinarrizko konbinatoriaren arrazonamendu deduktiboa (artikulu honetan bertan ibilitakoa); eta teoria orokor baten aplikazioarena (Pólyaren zerrendatze-teorema edo Redfield-Pólyaren teorema erabiliz ibil daitekeena, hain zuzen ere; [6, 7, 8]).

7. ESKER ONAK

Eskerrak eman nahi dizkiegu Euskal Herriko Unibertsitateko BETS 2011 Prestakuntza eta Ikerketa Unitateari, Eusko Jaurlaritzako IT-567-13 Ikerketa Taldeari, Ekonomia eta Lehiakortasun Espainiako Ministerioko MTM2012-31514 proiektuari eta Zientzia eta Teknologia Garatzeko Iberoamerikako Programaren P711RT0278 proiektuari Aldi berean egileok eskertzen diegu begirale teknikoari eta hizkuntza-aholkulariari egindako lana.

8. BIBLIOGRAFIA

[1] BURSTEIN A. eta MANSOUR T. 2003. «Counting occurrences of some subword patterns,» *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science,* 6, 001-012.

[2] GOULDEN I. eta JACKSON D. 1983. *Combinatorial enumeration*. John Wiley and Sons, New York.

[3] KITAEVY S., MANSOUR T. eta REMMELZ J. 2008. «Counting descents, rises, and levels, with prescribed first element, in words», *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science,* 10(3), 1-22.

[4] STAANLEY R. 1999. *Enumerative Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[5] YURRAMENDI Y. 2013. «Matematika esperimentalaren adibide bat: Lauki sareko patroi bitarren kopuruaren kalkulua,» *Ekaia,* 26, 325-348.

[6] REDFIELD J. H. 1927. «The Theory of Group-Reduced Distributions», *Amer. J. Math.,* 49(3), 433-455.

[7] PÓLYA G. 1937. «Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen», *Acta Mathematica,* 68(1), 145-254.

[8] PÓLYA G. and READ R. C. 1987. *Combinatorial enumeration of groups, graphs, and chemical compounds*. Springer-Verlag, New York.

[9] PÓLYA G. 1957. *How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

[10] SLOANE N.J.A. (ed.). «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences». Website. http://oeis.org.

[11] LOSANITSCH S.M. 1897. «Die Isomerie-Arten bei den Homologen der Paraffin-Reihe,» *Chem. Ber.,* 30, 1917-1926.

[12] R, «The R Project for Statistical Computing». Website. http://www.r-project.org.

[13] BAILEY D. eta BORWEIN J. M. 2012. *Exploratory Experimentation in Mathematics: Selected Works*. Perfectly Scientific Press, Oregon.

[14] POLYA G. 1981. *Mathematical Discovery.* John Wiley & Sons, New York.

[15] SØRENSEN H. K. 2010. «Exploratory experimentation in experimental mathematics: A glimpse at the PSLQ algorithm», in *PhiMSAMP Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice* (B. Löwe and T. Müller, eds.), 341-360, College Publications.

[16] COHEN D.I.A. 1978. *Basic Techniques of Combinatorial Theory.* John Wiley & Sons, New York.