Superveniencia, propiedades maximales y teoría de modelos

(Supervenience, Maximal Properties, and Model Theory)

Xabier DE DONATO RODRÍGUEZ y Marek POLANSKI

Recibido: 21.11.2005
Versión Final: 06.05.2006

BIBLID [0495-4548 (2006) 21: 57; pp. 257-276]

RESUMEN: En el presente artículo, se examinan y discuten dos argumentos con consecuencias reduccionistas debidos a Jaegwon Kim y a Theodore Sider respectivamente. De acuerdo con el argumento de Kim, la superveniencia fuerte implicaría la coexistencia necesaria de propiedades (es decir, tal y como normalmente se interpreta, la reducción). De acuerdo con el de Sider, ocurriría lo mismo con la superveniencia global. Uno y otro hacen un uso esencial de sendas nociones de propiedad maximal, las cuales son discutidas aquí a la luz de una interpretación natural e interesante de la teoría de las propiedades implícita en sus argumentos. Bajo esta nueva interpretación, en términos modelo-teóricos (véase apartado 4), obtenemos diversas posibilidades de relaciones formales entre las tesis de superveniencia y la reducción, según la lógica utilizada. Al menos bajo una interpretación interesante, los argumentos de Kim y Sider no son correctos, quedando demostrado así que dichos argumentos no son válidos en general.
Descriptores: superveniencia, propiedades maximales, teoría de modelos, reducción, fisicismo no reductivo

ABSTRACT: *We discuss and analyze two reductive arguments due to Jaegwon Kim and Theodore Sider respectively. According to the first one, strong supervenience would imply necessary coextension of properties (i.e., reduction). According to the second, this would be also the case of global supervenience. Kim and Sider make essential use of their respective notions of maximal properties, which we analyze here in the light of a natural and interesting interpretation of the underlying theory of properties. Under this interpretation, in terms of model theory (see § 4), we obtain different possibilities of formal relations between the superveniencie theses and reduction, depending on the logic we use. Under at least one interesting interpretation, the arguments of Kim and Sider are not correct and we become the conclusion that these arguments are not valid in general.*
Keywords: *supervenience, maximal properties, model theory, reduction, non-reductive physicalism*

1. Introducción

Desde los años ochenta, ha tenido lugar un debate en filosofía de la mente en torno a la adecuación de la superveniencia global y la fuerte (que abreviamos SG y SF respectivamente) como tesis fisicistas no reduccionistas. Algunos argumentos en relación con esta cuestión han sido propuestos con el fin de mostrar (o pueden interpretarse en el sentido de que muestran) que SG y SF son demasiado fuertes para servir a propósitos no reduccionistas, porque bajo supuestos adicionales aceptables, tanto SG como SF tendrían consecuencias reduccionistas. En el presente artículo, discutiremos dos conocidos argumentos en esta dirección, debidos respectivamente a Kim y Sider. Ambos argumentos (y otros semejantes) están basados en lo que podríamos llamar una "teoría naïve de las propiedades" (TNP), la cual está constituida por un cuerpo informal de tesis más o menos caracterizadas (explícita o implícitamente) sobre propiedades y sus extensiones en mundos posibles. Tanto Sider como Kim hacen un uso esencial de sendas nociones de propiedad maximal. Para poder considerar la corrección (formal y material) de sus argumentos, es necesario disponer de una reconstrucción formal precisa de sus (diferentes) caracterizaciones de propiedad maximal. En consecuencia, comenzaremos ofreciendo una reconstrucción de TNP como base conceptual subyacente y, especialmente, de las nociones de propiedad maximal de Kim y Sider. El hecho de que ambos argumentos revelen una estructura similar nos ha conducido a analizarlos aquí conjuntamente. Como veremos, ambos argumentos son reconstruibles en una forma bajo la cual son formalmente correctos, pero en ambos casos hay involucrada una cuestión crucial y es la de la existencia de propiedades maximales, la cual afecta a la corrección material de los argumentos. Bajo nuestra reconstrucción esta cuestión crucial queda iluminada de un modo que lleva a interesantes resultados, así como a distintas interpretaciones posibles de las relaciones lógicas entre SF y SG, por un lado, y la reducción por otro. De acuerdo con esta interpretación, que resulta totalmente natural, a las propiedades se les puede hacer corresponder fórmulas, mientras que los mundos posibles se pueden interpretar como modelos. El aparato lógico que emplearemos es, por tanto, el de la teoría de modelos y los sistemas considerados serán $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, $\mathcal{L}_{\omega\omega}$, y $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Obtendremos la conclusión de que, en $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ y con estructuras finitas, los argumentos de Kim y Sider (y las tesis que se supone apoyan) no son materialmente correctos(as): para poder ser concluyentes, incluso restringiéndonos a estructuras finitas, ambos argumentos necesitan fórmulas infinitas. Para obtener argumentos materialmente correctos, además de restringirnos a estructuras finitas, basta el uso de fórmulas expresables en $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Ni Kim ni Sider hacen ningún supuesto en relación con el número de individuos en un mundo posible, sino que más bien pretenden la validez general de sus argumentos. El uso de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ parece reflejar adecuadamente las intenciones de Kim, pero desafortunadamente algunos pasos de su argumento no pueden ser formalizados en esta lógica. Por otra parte, la invalidez del teorema de definibilidad de Beth en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ nos revela que la tesis de Sider es falsa y que, por tanto, su argumento no puede ser materialmente correcto. Todas estas consideraciones muestran que, bajo una interpretación natural como la aquí presentada, las estrategias reduccionistas de Kim y Sider no resultan concluyentes en general.

2. Teoría naïve de las propiedades

Las distintas tesis de superveniencia están usualmente formuladas de acuerdo con una base conceptual que podemos llamar "teoría naïve de las propiedades" (o TNP). De hecho, tal teoría no se ha formulado con precisión en ninguna parte. Lo que podemos encontrar en la bibliografía sobre el tema es más bien un cierto cuerpo de conceptos y supuestos que, a pesar de carecer de precisión formal, está formulado de manera suficientemente clara como para realizar una reconstrucción sin esenciales correcciones. En lo que sigue vamos a proponer una reconstrucción de los principales elementos de TNP, sus supuestos ontológicos y principios generales, en la medida en que sean relevantes para el estudio de las relaciones entre superveniencia y reducibilidad.

2.1. Reconstrucción de TNP

La ontología de TNP consiste en tres categorías disjuntas de entidades:

- mundos posibles
- individuos y tuplas finitas de individuos
- propiedades unarias y relacionales de individuos

Los individuos son entidades no analizables que existen en mundos posibles. Un individuo puede existir en más de un mundo posible. Las propiedades están instanciadas por individuos (o tuplas de ellos) en los mundos posibles en que estos individuos existen. Necesitamos tres tipos de variables. Usaremos las variables u, v, w para mundos posibles. Para referirnos a individuos y tuplas de ellos usaremos las letras a, b, c (con subíndices si es necesario). Para las propiedades, usaremos P, Q, R. La aserción "a tiene la propiedad P en el mundo w" es simbolizada por "$P_w(a)$", que expresa la relación ternaria entre propiedades, mundos y (tuplas de) individuos. Las propiedades tienen sus extensiones en mundos posibles. La extensión de la propiedad P en w es simbolizada mediante "P^w". A cada mundo w asociaremos un conjunto no vacío de individuos $D(w)$ que comprende todos y sólo aquellos individuos que existen en w. Si P es una propiedad n-aria (o relacional), entonces P^w es un subconjunto (posiblemente vacío) del conjunto de todas las n-tuplas de $D(w)$. Dos propiedades son idénticas si sus extensiones en cada mundo son las mismas. Podemos identificar en consecuencia cada propiedad P con una función definida sobre el conjunto de los mundos posibles que asigna a cada mundo w el conjunto P^w. Cada mundo w puede verse como una entidad compleja de la forma $(D(w), P^w, Q^w, ...)$ consistente en el universo de w seguido por la secuencia de extensiones de todas las propiedades que los individuos tienen en ese mundo. De este modo, los criterios de identidad para mundos y propiedades quedan claramente definidos. La propiedad P *implica* la propiedad Q ($P \supset Q$) si para cada mundo w: $P^w \subseteq Q^w$. Claramente, P y Q son idénticas syss $P \supset Q$ y $Q \supset P$. De una propiedad n-aria P se dice que es *consistente* si hay un mundo w tal que $P^w \neq \varnothing$. Ahora podemos definir las operaciones booleanas para propiedades. Para cualesquiera propiedades n-arias P y Q, Q es la negación de P si para cada mundo w, $Q^w = D(w)^n \setminus P^w$. Para cada familia de propiedades n-arias Θ, la extensión de la conjunción de Θ en el mundo w es la intersección del conjunto de las extensiones de las propiedades de la familia Θ en w. Análogamente, definimos la disyunción de un conjunto de propiedades. Asimismo podemos definir operaciones cilíndricas para propiedades que correspondan a los cuantificadores existencial y universal.

2.2. Propiedades maximales

La noción de *propiedad maximal* juega un papel crucial en el debate sobre superveniencia y reducción. Existen varias explicaciones diferentes de esta noción. Aquí reconstruimos dos de ellas: una debida a Jaegwon Kim, la otra a Theodore Sider. Merecen especial atención, puesto que tanto Kim como Sider hacen un uso esencial de dicho concepto en sus respectivos argumentos, los cuales muestran aparentemente que interesantes tesis de superveniencia, como son SF y SG, tienen, contrariamente a las motivaciones que había detrás de ellas, consecuencias reduccionistas.

2.2.1. Kim sobre maximalidad

Podemos comenzar con las palabras con las que Kim presenta su noción de propiedad maximal (Kim 1993, p. 58-59):

> (…) consider what we may call *B-maximal properties*: these are the strongest consistent properties constructible in B (…). These properties are mutually exclusive, and every object must have just one of these. Clearly, two objects are indiscernible in B just in the case they have the same B-maximal property.

En el texto de Kim, B denota una cierta familia de propiedades. Una propiedad es consistente si es instanciada por (al menos) un objeto en un mundo posible. La noción de propiedad maximal se define relativamente a esta familia. Si explicamos "P es al menos tan fuerte como Q" como "$P \supset Q$", podemos extraer de la caracterización kimeana de propiedad B-maximal los siguientes postulados:

[KMP1] P es una propiedad B-maximal syss P es una B-propiedad consistente y no existe ninguna B-propiedad Q que sea consistente y tal que Q implique P pero P no implique Q.

[KMP2] Para cada mundo posible w y cada individuo a en w, existe una propiedad B-maximal P tal que a tiene P en w.

[KMP3] Si P y Q son dos propiedades B-maximales distintas, entonces no hay ningún individuo que tenga P y Q en el mismo mundo posible.

[KMP4] Dos individuos son B-indiscernibles syss tienen la misma propiedad B-maximal.

Donde decimos "individuo", podemos decir también "tupla de individuos". [KMP4] hace referencia a la noción de B-indiscernibilidad, entendida por Kim en los siguientes términos: un individuo a en un mundo w es B-indiscernible del individuo b en un mundo u si y sólo si para cada propiedad P en B: a tiene P en w syss b tiene P en u. Emplearemos el símbolo "$\approx_B$" para denotar la relación de B-indiscernibilidad, que es una relación binaria entre pares de la forma (w, a) donde w es un mundo posible y a es un individuo (o tupla de ellos) de $D(w)$. Usando el lenguaje de TNP, podemos definir la B-indiscernibilidad en el sentido de Kim de la siguiente manera:

[K-B-INDISC] $(w, a) \approx_B (u, b) \Leftrightarrow_{df} \forall P \in B\ (P_w(a) \leftrightarrow P_u(b))$

Introduzcamos la expresión Max_B para predicar la maximalidad, de forma que $Max_B(P)$ se lea como "P es una propiedad B-maximal". Los anteriores postulados pueden reescribirse entonces de la siguiente forma:

[*KMP1*] $Max_B(P) \leftrightarrow P \in B \wedge \exists w \exists a\, P_w(a) \wedge \forall Q \in B\, (\exists w \exists a\, Q_w(a) \wedge Q \supset P \rightarrow P = Q)$

[*KMP2*] $\forall w\, \forall a \in D(w)\, \exists P \in B\, (Max_B(P) \wedge P_w(a))$

[*KMP3*] $\forall P\, \forall Q\, \forall w\, \forall a \in D(w)\, (Max_B(P) \wedge Max_B(Q) \wedge P_w(a) \wedge Q_w(a) \rightarrow P = Q)$

[*KMP4*] $(w, a) \approx_B (u, b) \leftrightarrow \forall P\, (Max_B(P) \rightarrow (P_w(a) \leftrightarrow P_u(b)))$

[*KMP1*] puede servir como una definición de *B*-maximalidad. Denote $\Delta^B_{w,a}$ la propiedad *B*-maximal de un objeto *a* en un mundo *w*, si tal propiedad existe. En caso negativo, $\Delta^B_{w,a}$ queda indefinida. La expresión $\Delta^B_{w,a} \cong \Delta^B_{u,b}$ significará: " $\Delta^B_{w,a}$ y $\Delta^B_{u,b}$ o ambas están definidas y entonces son idénticas o ambas están indefinidas". Resulta obvio que para cualquier mundo *w* y todo objeto *a* en *w*, tenemos:

$(\Delta^B_{w,a})_w(a) \Leftrightarrow$ el objeto *a* tiene en *w* la propiedad *B*-maximal

$\Leftrightarrow \Delta^B_{w,a}$ está definida

Los postulados [*KMP2*] y [*KMP4*] pueden reescribirse entonces en una forma equivalente y más abreviada:

[*KMP2*]´ $\forall w\, \forall a \in D(w)\, (\Delta^B_{w,a})_w(a)$

[*KMP4*]´ $(w, a) \approx_B (u, b) \leftrightarrow \Delta^B_{w,a} \cong \Delta^B_{u,b}$

Si asumimos que la familia *B* está cerrada bajo *operaciones booleanas finitas*, entonces los postulados [*KMP1*] - [*KMP4*] no son independientes entre sí:

Proposición 1

Bajo clausura booleana finita de *B*:

(i) [*KMP1*] implica [*KMP3*]

(ii) [*KMP1*] y [*KMP2*] implican [*KMP4*]

Prueba

(i) Asumamos [*KMP1*]. Sean *P* y *Q* dos propiedades *B*-maximales tales que $P_w(a)$ y $Q_w(a)$. Entonces $[P \wedge Q]$ es consistente y, obviamente, $[P \wedge Q] \supset P$ y $[P \wedge Q] \supset Q$. Por la *B*-maximalidad de *P* y *Q* y por [*KMP1*], tenemos que $P \supset [P \wedge Q]$ y que $Q \supset [P \wedge Q]$. Por tanto, $P = Q$.

(ii) Asumamos [*KMP1*] y [*KMP2*]. La implicación $\rightarrow$ en [*KMP4*] es obvia. Mostraremos la otra dirección. Sean *w*, *a*, *u*, *b* tales que $(w, a) \approx_B (u, b)$ no es el caso. Entonces para algún $Q \in B$ tenemos $Q_w(a)$ y $\dot{-}Q_u(b)$. Por [*KMP2*], existen $\Delta^B_{w,a}$ y

$\Delta^B_{u,b}$, y por tanto $[\ \Delta^B_{w,a}\ \wedge Q\ ]_w(a)$ y $[\ \Delta^B_{u,b}\ \wedge\ \dot{-}Q\ ]_u(b)$. Por [*KMP1*], tenemos $[\Delta^B_{w,a}\ \wedge Q\ ] = \Delta^B_{w,a}$ y $[\Delta^B_{u,b}\ \wedge\ \dot{-}Q\ ] = \Delta^B_{u,b}$. Por tanto, $\Delta^B_{w,a}$ y $\Delta^B_{u,b}$ no pueden ser idénticas. *q.e.d.*

[*KMP4*] motiva una definición alternativa de propiedades *B*-maximales: pueden ser definidas como propiedades asociadas con clases de equivalencia de $\approx_B$. Considérese, en efecto, la siguiente condición:

[*KMP5*] $\quad Max_B(P) \leftrightarrow P \in B\ \wedge \exists w\ \exists a{\in}D(w)\ \forall u\ \forall b{\in}D(u)\ (P_u(b) \leftrightarrow (w, a) \approx_B (u, b))$

Pero tal definición alternativa resulta, en realidad, equivalente a [*KMP1*]. Veámoslo:

Proposición 2

[*KMP5*] es equivalente a [*KMP1*]

Prueba

Mostramos que las siguientes condiciones son equivalentes para cada $P \in B$:

(1) $\exists w \exists a\ P_w(a)\ \wedge \forall Q{\in}B\ (\exists w \exists a\ \ Q_w(a)\ \wedge\ Q \supset P\ \rightarrow\ P = Q)$

(2) $\exists w\ \exists a{\in}D(w)\ \forall u\ \forall b{\in}D(u)\ (P_u(b) \leftrightarrow (w, a) \approx_B (u, b))$

(1) $\Rightarrow$ (2)

Por (1) tenemos que para algún *w* y algún *a:* $P_w(a)$. Considérese un mundo posible arbitrario *u* y un objeto *b* en ese mundo. Si $(w, a) \approx_B (u, b)$, entonces obviamente $P_u(b)$. Supongamos ahora que $(w, a) \approx_B (u, b)$ no es el caso. Entonces para algún $Q \in B$ tenemos que $Q_w(a)$ y $\dot{-}Q_u(b)$. Mostraremos que $P_u(b)$ no es el caso. Para ello supongamos lo contrario, esto es que $P_u(b)$. Por consiguiente, $[P \wedge \dot{-}Q\ ]_u(b)$ y claramente $[P \wedge \dot{-}Q\ ] \supset P$. Por (1), tenemos $[P \wedge \dot{-}Q\ ] = P$. Puesto que $P_w(a)$, tenemos también que $\dot{-}Q_w(a)$, con lo que llegamos a una contradicción.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sean *w* y *a* tales que: $\forall u\ \forall b{\in}D(u)\ (P_u(b) \leftrightarrow (w, a) \approx_B (u, b))$. Entonces también tenemos que $P_w(a)$. Sea Q una *B*-propiedad tal que $Q \supset P$ y $Q_u(b)$, para algún *u*, *b*. Esto implica que $P_u(b)$ y, por tanto, $(w, a) \approx_B (u, b)$. Ahora mostremos que $P \supset Q$. Si $P_v(c)$, entonces $(w, a) \approx_B (v, c)$. En consecuencia, $(u, b) \approx_B (v, c)$. De lo que se sigue que $Q_v(c)$. *q.e.d.*

Obsérvese que $(w, a) \approx_B (u, b)$ es equivalente a $\forall Q \in B\ (Q_w(a) \to Q_u(b))$. De ello resulta el siguiente:

Corolario 1

Bajo [*KMP1*] o [*KMP5*], las siguientes dos condiciones resultan equivalentes para todo $P \in B$:

(i) $Max_B(P)$

(ii) $\exists w\, \exists a\, \forall u\, \forall b \in D(u)\ (P_u(b) \leftrightarrow \forall Q \in B\ (Q_w(a) \to Q_u(b)))$

Se sigue de este corolario que una propiedad *P* es *B*-maximal syss *P* es la conjunción de todas las *B*-propiedades de algún objeto *a* en un mundo *w*. Esto significa que [*KMP2*] se sigue si *B* está cerrado bajo operaciones booleanas infinitas no restringidas. Según Kim, este hecho parece ser constitutivo. Kim escribe (Kim 1993, p. 152): “I don’t see any special problem with an infinite procedure here, any more than in the case of forming infinite unions of sets or the addition of infinite series of numbers.”

Veremos luego que, en algunos casos interesantes, esta asunción resulta problemática.

2.2.2. Sider sobre maximalidad

La explicación de la noción de *B*-maximalidad propuesta por Theodore Sider en Sider (1999) es diferente de la de Kim. Su punto de partida es la noción de *B*-indiscernibilidad, que es más restrictiva que $\approx_B$. Sider la llama *B*-indiscernibilidad *global*. Simbolicemos esta relación con $\overset{\approx}{\approx}_B$. La *B*-indiscernibilidad *global* de Sider queda definida por:

[S-B-INDISC] $(w, a) \overset{\approx}{\approx}_B (u, b) \Leftrightarrow_{df}$ hay un *B*-isomorfismo de *w* en *u* que transforma *a* en *b*.

Un *B*-isomorfismo de *w* en *u* se define como una biyección f del universo del mundo *w* en el de *u* tal que para cada *B*-propiedad *Q* y cualquier *a* del universo de *w* se cumple la siguiente condición: $Q_w(a)$ syss $Q_u(f(a))$.

Considere el lector el siguiente pasaje de Sider (cfr. Sider 1999, p. 919):

> The relation of global A-indiscernibility (…) is clearly an equivalence relation; with each of its equivalence classes there is an associated property: the property had by all and only those members of the equivalence class. I call these properties *maximal A-properties*. (…) The recipe for coming up with a maximal property is this: select some possible object and describe all its features with respect to A, both intrinsic and relational. *All* relational properties must be mentioned, and so along the way it will be necessary to completely describe the distribution of A-properties and relations throughout the entirety of that object’s possible world.

La noción sideriana de *B*-propiedad maximal es abstraída de la relación $\overset{\approx}{\approx}_B$. Simbolizaremos el predicado de maximalidad sideriana mediante $SMax_B$. De acuerdo con Sider, su definición queda establecida mediante la siguiente fórmula:

$$[SMP1] \quad SMax_B(P) \leftrightarrow P \in B \wedge \exists w\, \exists a \in D(w)\, \forall u\, \forall b \in D(u)\, (P_u(b) \leftrightarrow (w, a) \vec{\approx}_B (u, b))$$

Como mera consecuencia de [*SMP1*], tenemos:

Proposición 3

[*SMP1*] y [*KMP1*] (o bien [*KMP5*]) implican conjuntamente que para cualesquiera dos mundos posibles w, u, y cualesquier objetos a, b, y toda B-propiedad P:

(i) si $(w, a) \vec{\approx}_B (u, b)$, entonces $(w, a) \approx_B (u, b)$,

(ii) si $SMax_B(P)$ entonces $Max_B(P)$.

Prueba (inmediata).

Para esta clase de propiedades maximales, la unicidad resulta directamente de la proposición anterior más la Proposición 1(i):

Corolario 2

[*SMP1*] implica: $\forall P, Q\, \forall w\, \forall a\, (SMax_B(P) \wedge SMax_B(Q) \wedge P_w(a) \wedge Q_w(a) \rightarrow P = Q)$

Denote $\Theta^B_{w,a}$ la propiedad B-maximal de un objeto a en un mundo w, si tal propiedad existe. En caso contrario, $\Theta^B_{w,a}$ queda indefinida. Incluso dando por garantizada la condición de clausura booleana infinitaria irrestricta de B, no está claro si esta condición garantiza a su vez la existencia de $\Theta^B_{w,a}$ para todo w y todo a en w. La asunción de que $\Theta^B_{w,a}$ está siempre definida resultará crucial para el argumento de Sider. En consecuencia, añadiremos el siguiente postulado:

$$[SMP2] \quad \forall w\, \forall a \in D(w)\, \exists P \in B\ (SMax_B(P) \wedge P_w(a))$$

3. Superveniencia y reducibilidad

Consideremos algunas variantes de la tesis de la superveniencia como relación entre dos familias de propiedades A y B. Asumamos que la familia B (de propiedades *básicas*, también llamadas *subvenientes*) está cerrada al menos bajo operaciones booleanas finitas. La principal motivación existente tras los distintos conceptos de superveniencia es la idea de una relación de determinación (o dependencia) no reductiva. Las propiedades *supervenientes* están determinadas por las básicas sin dejarse en cambio reducir por éstas.

3.1. Superveniencia local, superveniencia global y reducibilidad en el marco de TNP.

Tenemos una variante local y otra global de superveniencia de A sobre B. En la literatura especializada se pueden distinguir dos formas de superveniencia local. La llamada *superveniencia fuerte* de A sobre B se define así:

$$\textbf{(SF)} \quad \forall w, u \in W\, \forall a\, \forall b\, ((w, a) \approx_B (u, b) \rightarrow (w, a) \approx_A (u, b))$$

La versión *débil* es:

$$\textbf{(SD)} \quad \forall w \in W\, \forall a\, \forall b\, ((w, a) \approx_B (w, b) \rightarrow (w, a) \approx_A (w, b))$$

Por otra parte, una explicación comúnmente aceptada de *superveniencia global* tiene la siguiente forma:

$$\textbf{(SG)} \quad \forall w, u \in W\, \forall f\, (w \cong^B_f u \ \rightarrow\ w \cong^A_f u)$$

$w \cong^B_f u$ significa que f es una biyección del universo de w en el universo de u tal que para cada Q de B y cualquier a del universo de w se cumple: $Q_w(a)$ syss $Q_u(f(a))$.

La reducción en términos de B-propiedades usualmente se explica como *coexistencia necesaria*:

$$(CN) \quad \forall P \in A\, \exists Q \in B\, \forall w \in W\, \forall a \in w\ (P_w(a) \leftrightarrow Q_w(a)).$$

Una forma más débil de reducción es como sigue:

$$(CND) \quad \forall P \in A\, \forall w \in W\, \exists Q \in B\, \forall a \in w\ (P_w(a) \leftrightarrow Q_w(a)).$$

3.2. Los argumentos reductivos de Kim y Sider

En una serie de artículos (cfr. Kim 1993), Jaegwon Kim arguyó que si la familia B de propiedades subvenientes está cerrada bajo operaciones infinitas irrestrictas, entonces (SF) implica (CN) y, análogamente, (SD) implica (CND). Theodore Sider ofrece en Sider 1999 un argumento en favor de la tesis de que (SG) implica (CN). Como dijimos, tanto Kim como Sider hacen un uso esencial de sus respectivas nociones de propiedad maximal (de un objeto en un mundo), las cuales hemos visto arriba (2.2.1 y 2.2.2.). Con ayuda de sendas nociones, ambos definen para cada A-propiedad P su correspondiente B-sustituto Δ^P (Kim) o, respecivamente, Θ^P (Sider) en los términos, muy similares, que vemos a continuación:

$$\Delta^P =_{df} \quad \{\Delta^B_{w,a} : P_w(a)\ \wedge\ w \in W\ \wedge\ a \in D(w)\}$$

$$\Theta^P =_{df} \quad \{\Theta^B_{w,a} : P_w(a)\ \wedge\ w \in W\ \wedge\ a \in D(w)\}$$

Kim y Sider ofrecen sendos argumentos con el objeto de mostrar que, bajo (SF), en el caso de Kim, y (SG), en el de Sider, las arriba definidas Δ^P respectivamente Θ^P son B-propiedades necesariamente equivalentes a P. Ambos argumentos reflejan pareja estructura.

Si en el argumento que veremos a continuación sustituimos $\Delta^B_{w,a}$ por $\Gamma_{w,a}$, Δ^P por Γ^P así como $\approx_A$ y $\approx_B$ por $\equiv_A$ y $\equiv_B$ respectivamente, lo que obtenemos es una reconstrucción del argumento de Kim. Y si sustituimos $\Theta^{B}_{w,a}$ por $\Gamma_{w,a}$, Θ^{P} por Γ^{P} e igualmente $\vec{\approx}_{A}$ y $\vec{\approx}_{B}$ por $\equiv_{A}$ y $\equiv_{B}$ respectivamente, el argumento resultante es esencialmente el dado por Sider (cfr. Sider 1999, p. 920-921) (excepto en algún detalle poco importante que no viene al caso):

(i) asumamos $P_{w}(a)$

(ii) entonces $(\Gamma_{w,a})_{w}(a)$

(iii) y, de ahí, $(\Gamma^{P})_{w}\, a)$

(iv) asumamos $(\Gamma^{P})_{w}(a)$

(v) entonces, para algún u y algún b: $P_{u}(b)$ and $(\Gamma_{u,b})_{w}(a)$

(vi) así $(w, a) \equiv_{B} (u, b)$

(vii) por tanto $(w, a) \equiv_{A} (u, b)$

(viii) de modo que $P_{w}(a)$

El paso (iii) se sigue de (ii) y la definición de Δ^{P}, respectivamente Θ^{P}. Similarmente, (v) se sigue de (iv) más la definición de Δ^{P}, respectivamente Θ^{P}. El paso (vi) es una consecuencia del paso (v), la definición de $\Delta^{B}_{u,b}$, respectivamente de $\Theta^{B}_{u,b}$ y [*KMP5*], respectivamente [*SMP1*]. El paso (vii) se sigue de (vi) y de la asunción de la superveniencia, (SF) o respectivamente (SG). El paso (viii) se sigue a su vez de (vii) y (iv). El paso (ii) requiere en ambos casos algunas asunciones sobre la existencia de ciertas propiedades. Bajo nuestra reconstrucción, $(\Delta^{B}_{w,a})_{w}(a)$ respectivamente $(\Theta^{B}_{w,a})_{w}(a)$ se cumple syss $\Delta^{B}_{w,a}$ respectivamente $\Theta^{B}_{w,a}$ existen. Este paso requiere claramente [*KMP2*], respectivamente [*SMP2*]. Tanto Kim como Sider parecen concebir esta asunción existencial como no problemática. Kim afirma que está garantizada por la condición de clausura infinita irrestricta de *B*. En el caso de Sider, la justificación de [*SMP2*] resulta menos transparente. Mostraremos que, al menos bajo una interpretación interesante del formalismo de TNP, estos supuestos cruciales son falsos y que, en consecuencia, de acuerdo con esta interpretación, los argumentos apoyados en ellos no son correctos.

4. *Superveniencia en términos de modelos*

4.1. *Paráfrasis modelo-teórica*

TNP es un marco abstracto (preteórico) para el estudio de la superveniencia y reducción de propiedades. Esta teoría es neutral con respecto a muchas cuestiones concernientes a la naturaleza de las propiedades y de los mundos posibles. En nuestra opinión, las tesis generales sobre las relaciones entre la superveniencia y la reducibilidad de propiedades también son aplicables a sistemas de propiedades definidas por fórmulas. Los argumentos reductivos reconstruidos más arriba serían de poco interés si tales argumentos resultaran ser incorrectos en relación con tales familias de propiedades. Pero justamente ocurre que, bajo la paráfrasis modelo-teórica, los supuestos cruciales de TNP resultan ser verdaderos sólo en relación con un conjunto restringido de condiciones.

La teoría de modelos proporciona herramientas conceptuales suficientes para explicar todas las nociones involucradas en el debate de la superveniencia. La mayoría de ellas tienen contrapartes modelo-teóricas que resultan bastante naturales. Considere el lector un conjunto de letras predicativas (un vocabulario) L junto con dos subvocabularios disjuntos L_B y L_A. Sea K una clase de estructuras para L que representa la colección de mundos posibles. Cada estructura M contiene un universo de objetos *dom*(M) y para cada predicado P de L, su denotación P^M. Tal estructura puede ser vista (o al menos ser representada) como un mundo posible. En consecuencia, una propiedad n-aria asociada con K es una función que asigna a cada estructura M de K un conjunto de n-tuplas de objetos de *dom*(M). Funciones de este tipo son las que en la bibliografía especializada reciben a menudo en inglés el nombre de *queries*. Si restringimos nuestras consideraciones a propiedades que sean expresables con ayuda de fórmulas de L, entonces algunas de estas *queries* (de hecho la mayoría) no cuentan como propiedades.

4.2. Indiscernibilidad y maximalidad

Las relaciones de indiscernibilidad $\approx$ y $\overset{\rightarrow}{\approx}$ definidas en el marco de TNP (véase 2.2.) tienen como contrapartes modelo-teóricas dos relaciones definidas para clases de fórmulas en lugar de para clases de propiedades. Sean M y N estructuras para L y sea Φ una colección de fórmulas en un subvocabulario de L. Sean $\overline{a}$ y $\overline{b}$ tuplas de elementos de la misma longitud de M y N respectivamente. Bajo Φ-isomorfismo de M en N entendemos una biyección f entre *dom*(M) y *dom*(N) tales que para toda fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$ y cualesquier elementos $a_1, \ldots, a_n$ en M: $M \quad \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ syss $N \quad \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.

Diremos que $\overline{a}$ es en M *indiscernible localmente* de $\overline{b}$ en N *con respecto a* Φ (en símbolos $(M, \overline{a}) \approx_\Phi (N, \overline{b})$) syss $\overline{a}$ satisface en M exactamente las mismas fórmulas Φ que satisface $\overline{b}$ en N. Una tupla $\overline{a}$ en M es *globalmente indiscernible* de la tupla $\overline{b}$ en N *con respecto a* Φ (en símbolos $(M, \overline{a}) \overset{\rightarrow}{\approx}_\Phi (N, \overline{b})$) syss existe un Φ-isomorfismo f de M en N que transforma $\overline{a}$ en $\overline{b}$. Claramente, $(M, \overline{a}) \overset{\rightarrow}{\approx}_\Phi (N, \overline{b})$ implica $(M, \overline{a}) \approx_\Phi (N, \overline{b})$. Con ayuda de las relaciones $\approx_\Phi$ y $\overset{\rightarrow}{\approx}_\Phi$, podemos ahora definir contrapartes modelo-teóricas de las nociones de maximalidad reconstruidas en 2.2. Nuevamente, en lugar de maximalidad de propiedades, hablaremos de maximalidad de fórmulas.

Diremos que una fórmula $\varphi(\overline{x}) \in \Phi$ es *localmente maximal* con respecto a Φ en una clase K syss se cumple:

[L-Max] hay M en $\mathbf{K}$ y una tupla $\bar{a}$ en M tales que para toda N en $\mathbf{K}$ y toda $\bar{b}$ en N:

$$N \quad \varphi(\bar{x})\,[\bar{b}] \text{ syss } (M, \bar{a}) \approx_{\Phi} (N, \bar{b})$$

Diremos que una fórmula $\varphi(\bar{x}) \in \Phi$ es *globalmente maximal* en una clase $\mathbf{K}$ syss se cumple:

[G-Max] hay M en $\mathbf{K}$ y una tupla $\bar{a}$ en M tales que para toda N en $\mathbf{K}$ y toda $\bar{b}$ en N:

$$N \quad \varphi(\bar{x})\,[\bar{b}] \text{ syss } (M, \bar{a}) \overrightarrow{\approx}_{\Phi} (N, \bar{b})$$

4.3. Superveniencia modelo-teórica

Sean $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ dos colecciones de fórmulas de los vocabularios L_A y L_B respectivamente, las cuales contienen todas las fórmulas atómicas de estos dos lenguajes. $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ representan respectivamente las familias de propiedades supervenientes y subvenientes. Ahora podemos formular paráfrasis modelo-teóricas de los distintos conceptos de superveniencia relativamente a una clase $\mathbf{K}$ de modelos para un vocabulario L que incluya ambos L_A y L_B. Comencemos por la SF. $\Phi(A)$ *superviene fuertemente sobre* $\Phi(B)$ con respecto a $\mathbf{K}$ si se cumple que:

[SF] Para cada M, N en $\mathbf{K}$ y cualesquiera tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$: $(M, \bar{a}) \approx_{\Phi(B)} (N, \bar{b})$ implica $(M, \bar{a}) \approx_{\Phi(A)} (N, \bar{b})$.

Por otro lado, podemos expresar la *superveniencia débil* de $\Phi(A)$ *sobre* $\Phi(B)$ con respecto a $\mathbf{K}$ mediante la siguiente condición:

[SD] Para cada M en $\mathbf{K}$ y cualesquiera tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$: $(M, \bar{a}) \approx_{\Phi(B)} (M, \bar{b})$ implica $(M, \bar{a}) \approx_{\Phi(A)} (M, \bar{b})$.

Finalmente, diremos que $\Phi(A)$ *superviene globalmente* sobre $\Phi(B)$ con respecto a $\mathbf{K}$ si se cumple lo siguiente:

[SG] Cada $\Phi(B)$-isomorfismo de una estructura M de la clase $\mathbf{K}$ en la estructura N de $\mathbf{K}$ es también un $\Phi(A)$-isomorfismo de M en N.

En nuestro marco modelo-teórico, podemos explicar igualmente sendas nociones, débil y fuerte, de reducibilidad de $\Phi(A)$ a $\Phi(B)$ con respecto a $\mathbf{K}$. Estas versiones de reducibilidad entre familias de fórmulas corresponden a las condiciones de coextensión débil y coextensión fuerte definidas con respecto a una colección de mundos posibles.

Diremos que $\Phi(A)$ es *reducible* a $\Phi(B)$ en $\mathbf{K}$ si se cumple que:

[CN] Para cada fórmula φ de $\Phi(A)$ existe una fórmula ψ en tal que para cada M en K φ y ψ están satisfechas en M por exactamente las mismas tuplas de elementos.

Más adelante, para cada L_A-fórmula φ, hablaremos de la L_B-fórmula correspondiente según [CN] como de su "L_B-sustituto".

Por otro lado, la *reducción débil* de $\Phi(A)$ a $\Phi(B)$ en K puede ser expresada en los términos siguientes:

[CND] Para cada fórmula φ de $\Phi(A)$ y cada M en K hay una fórmula ψ de $\Phi(B)$ tal que φ y ψ son satisfechas en M por exactamente las mismas tuplas de elementos.

Las siguientes relaciones de implicación se cumplen cualquiera que sea la elección particular de la clase K:

$$\begin{array}{ccccc}
[\text{CND}] & \leftarrow & [\text{CN}] & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
[\text{SD}] & \leftarrow & [\text{SF}] & \rightarrow & [\text{SG}]
\end{array}$$

Nótese que si K es la clase de todos los modelos de una teoría T (de primer orden) en un vocabulario L y las colecciones $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ son, respectivamente, el conjunto de todas las fórmulas finitarias en algún subvocabulario L_A y L_B de L, entonces [CN], [SF] y [SG] coinciden. Para poder verlo, obsérvese que la condición de SG de todas las fórmulas finitarias en L_A sobre todas las fórmulas finitarias en L_B no es otra cosa que la definibilidad implícita de todos los predicados de L_A por parte de las fórmulas finitarias en el vocabulario L_B con respecto a la teoría T. Por otra parte, la condición de reducibilidad de todas las fórmulas finitarias en L_A a las fórmulas finitarias en L_B es equivalente a la definabilidad explícita de todos los predicados en L_A por parte de fórmulas finitarias en L_B con respecto a la teoría T. En otras palabras, la implicación [SG] → [CN] es equivalente al Teorema de definibilidad de Beth. Esta observación en realidad no es nueva, sino que fue hecha ya en su momento por Hellman y Thompson (cfr. Hellman, G. y F.W. Thompson 1975). Conviene notar al mismo tiempo que la estrucutra de la prueba del Teorema de Beth no guarda semejanza con el patrón argumental común a los argumentos reductivos de Kim y Sider. En particular, no descansa en suposición alguna acerca de la existencia de fórmulas local o globalmente maximales. De hecho, la prueba es más bien compleja comparada con los argumentos de Kim y Sider. La corrección de estos dos argumentos no puede mostrarse en el marco de una lógica finitaria. La razón no es simplemente que ambos argumentos hacen uso de operaciones infinitas. Téngase en cuenta que la mera existencia de fórmulas maximales es ya altamente problemática. Todo indica que, restringiéndonos a lenguajes finitos e identificando mundos posibles con clases de modelos, no necesitamos invertir más tiempo en el estudio de dichos argumentos. O bien restringimos nuestras consideraciones a clases elementales de modelos y entonces obtenemos directamente (sin ulterior argumentación) los resultados reduccionistas, o bien incluimos clases de modelos no elementales, lo que sería tanto como no poder esperar ya ningún resultado interesante en relación con nuestro debate. Pero, como vamos a ver en lo que queda del presente artículo, la teoría de modelos puede enseñarnos todavía muchas más cosas de interés que lo que a primera vista parecía.

4.4. Superveniencia y modelos finitos

¿Qué sucedería si impusiéramos restricciones a la cardinalidad de la clase K? Consideremos primeramente la situación que se nos presenta cuando K es una clase arbitraria de estructuras *finitas* en un vocabulario finito L con subvocabularios disjuntos L_A y L_B. Es un hecho bien conocido que para un vocabulario dado cada estructura finita puede ser descrita hasta la isomorfía por una única fórmula *finitaria* en ese vocubulario. Más aún, si M es una estructura finita L y L' es un subvocabulario de L, entonces para cada tupla $\bar{a}$ del universo de M podemos encontrar, de un modo canónico, una fórmula $\delta_{M,\bar{a}}$ en L' tal que para cada estructura N para L y cada tupla $\bar{b}$ (de la misma longitud que $\bar{a}$) del universo de N se cumple lo siguiente:

[#] $N \quad \delta_{M,\bar{a}}[\bar{b}]$ syss hay un L'-isomorfismo entre M y N que transforma $\bar{a}$ en $\bar{b}$.

Tal fórmula $\delta_{M,\bar{a}}$ es maximal tanto global como localmente. De ello se sigue claramente que si Φ es el conjunto de todas las fórmulas finitas L', entonces las relaciones de indiscernibilidad $\approx_\Phi$ y $\vec{\approx}_\Phi$ coinciden si se definen con respecto a una clase de estructuras finitas. Obsérvese que cualquier fórmula $\delta(\bar{x})$ del tipo mencionado no puede ser definida como la conjunción de todas las fórmulas finitas satisfechas por $\bar{a}$ en M. Tal conjunción no es una fórmula finita. Las paráfrasis modelo-teóricas de [*KMP2*] y [*SMP2*] se cumplen a pesar de que no podemos construir conjunciones infinitas. Hay distintas maneras de construir fórmulas maximales. Sin embargo, hay que notar que la construcción de $\delta_{M,\bar{a}}$ supone cuantificación (finita) e identidad. Una manera sencilla de construirla podría ser mediante el siguiente ejemplo:

sea $M = (dom(M), R)$, donde $dom(M) = \{a_1, a_2, a_3\}$ y R es la siguiente relación binaria: $\{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_3)\}$. Sea $\bar{a} = (a_1, a_2)$ y sea L un lenguaje con un símbolo relacional binario P (que representa R). Como $\delta_{M,\bar{a}}$ puede tomarse la siguiente fórmula de L:

$\exists x_3$ ($\{\neg(x_i = x_j): i < j \leq 3\} \wedge P(x_1, x_2) \wedge P(x_1, x_3) \wedge P(x_3, x_3) \wedge \neg P(x_1, x_1) \wedge$ $\wedge \neg P(x_2, x_1) \wedge \neg P(x_2, x_2) \wedge \neg P(x_2, x_3) \wedge \neg P(x_3, x_1) \wedge \neg P(x_3, x_2) \wedge \forall x_4$ $\{x_4 = x_i :$ $i < j \leq 3\}$)

Es fácil ver que para cada estructura N de la forma ($dom(N)$, S), donde S es una relación binaria y cada par ordenado (b_1, b_2) de elementos de $dom(N)$ se cumple:

N $\delta_{M,\bar{a}}$ $[x_1/b_1, x_2/b_2]$ syss existe un isomorfismo f de M en N tal que $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_2$.

La existencia de fórmulas maximales tiene, entre otras, la siguiente consecuencia:

Proposición 5

Sean $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ los conjuntos de todas las *fórmulas infinitas pero contables* en los dos subvocabularios L_A y L_B de L respectivamente. Para cada clase K de estructuras finitas para L, las siguientes condiciones resultan equivalentes entre sí:

(1) $\Phi(A)$ superviene fuertemente sobre $\Phi(B)$ con respecto a K.

(2) $\Phi(A)$ superviene globalmente sobre $\Phi(B)$ con respecto a K.

(3) $\Phi(A)$ es reducible a $\Phi(B)$ en K.

Prueba

Basta probar la dirección (1) → (3). Sea $\varphi(\bar{x})$ cualquier fórmula infinitaria contable en L_A. Y ahora, para cada M en K y cada tupla $\bar{a}$, sea $\delta_{M,\bar{a}}$ una fórmula de L_B que satisfaga la condición de maximalidad. Podemos definir una fórmula $\psi(\bar{x})$ en la clase K esencialmente del mismo modo en que Kim define Δ^P para P, es decir, mediante la disyunción:

$$\{\delta_{M,\bar{a}} : M \quad \varphi(\bar{x})[\bar{a}], M \in \mathrm{K}\}.$$

Nótese que, aunque K es una *clase arbitraria* de estructuras finitas para L, hay sólo un número contable de fórmulas de la forma $\delta_{M,\bar{a}}$ y, así, la expresión de arriba resulta ser una disyunción contable, la cual, en virtud de (1), es obviamente equivalente a $\varphi(\bar{x})$ en cada estructura de la clase K. *q.e.d.*

Así pues, en lenguajes infinitarios y disponiendo de clases arbitrarias de estructuras finitas, tenemos que se cumple el siguiente diagrama de relaciones de implicación:

$$\begin{array}{ccccc} \text{[CN]} & \leftrightarrow & \text{[SF]} & \leftrightarrow & \text{[SG]} \\ \downarrow & & & & \\ \text{[CND]} & \leftrightarrow & \text{[SD]} & & \end{array}$$

4.5. Dificultades con los argumentos reductivos en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$

La asunción de que todos los mundos posibles son finitos puede resultar en algunos contextos bastante natural, pero no es precisamente la que adoptan Kim y Sider. En el presente apartado, veremos que cuando adoptamos una lógica con conyunciones y disyunciones arbitrariamente largas y sin restricciones sobre la cardinalidad de los modelos, entonces los argumentos de Kim y Sider topan con serias dificultades. La lógica que parece representar mejor tales irrestricciones es $\mathcal{L}_{\infty\omega}$.

Comencemos con el argumento de Sider. Podemos usar el hecho de que el Teorema de Beth no es válido en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ (cfr. Gregory 1974, p. 26) para mostrar que la afirmación de Sider de que [SG] implica [CN] resulta falsa. Sin embargo, un contraejemplo debido a Gregory puede servirnos, tras una ligera modificación, para mostrar que [SG] ni siquiera implica [SD] en general (cfr.: Polanski 2005). De este modo, el argumento de Sider no puede ser correcto. Nótese, sin embargo, que al contrario que en el caso de los modelos finitos, la paráfrasis modelo-teórica del axioma [*SMP2*], que es uno de los supuestos implícitos de Sider, resulta falsa cuando tratamos con una clase arbitraria de modelos infinitos incluso si el lenguaje del que disponemos permite conyunciones y disyunciones infinitas. Para verlo, consideremos las estructuras Q y R consistentes en los números racionales y los números reales con sus respectivos órdenes usuales. Valiéndonos de la técnica standard *back-and-forth* y de un conocido teorema debido a Karp, se puede mostrar que para cada número racional q las estructuras (Q, q) y (R, q) son equivalentes con respecto a todas las sentencias infinitarias. Por tanto, q tiene en Q y en R las mismas propiedades expresables en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$. Pero, claramente, no existe un isomorfismo entre Q y R.

¿Qué hay de la prueba de Kim? En principio, parece que puede formalizarse en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ sin mayores problemas. Comencemos, por razones heurísticas, con el argumento de Kim en favor de la implicación [SD] $\rightarrow$ [CND]. Asumamos que la colección $\Phi(A)$ de todas las fórmulas infinitarias en L_A superviene débilmente en **K** sobre la colección $\Phi(B)$ de todas las fórmulas infinitarias en L_B. Supongamos ahora que pudiéramos construir, para cada modelo M de **K** y cualquier *n*-tupla $\bar{a}$ en M, una fórmula $\psi_{M,\bar{a}}$ en L_B tal que para todas las tuplas $\bar{b}$ en M de la misma longitud que $\bar{a}$ se cumpla: $M \quad \psi^{\bar{a}}_{M}[\bar{b}]$ syss $\bar{a}$ y $\bar{b}$ satisfacen en M las mismas fórmulas infinitarias en L_B. En tal caso podríamos sin duda proporcionar un L_B-sustituto de cualquier fórmula $\varphi(\bar{x})$ en L_A. La siguiente disyunción infinita hace las veces de dicha expresión:

$$\{\psi_M^{\bar{a}} : M \quad \varphi(\bar{x})[\bar{a}],\ \ \bar{a} \in M\}.$$

Obsérvese que para cada M la cardinalidad del conjunto de todas las n-tuplas de M es o bien finita o bien igual a la cardinalidad de M. El aparato de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ nos capacita para construir una disyunción del tipo que acabamos de ver. ¿Cómo construir una fórmula del tipo de $\psi_M^{\bar{a}}$? Sea $\bar{a}$ una tupla en M. Para cada tupla $\bar{b}$ en M de la misma longitud que $\bar{a}$, si existe alguna fórmula infinita en L_B que sea satisfecha en M por $\bar{a}$ pero no por $\bar{b}$, entonces elegimos una fórmula de este tipo (si no existe, entonces vamos a la tupla siguiente). Al final del proceso, cuando hemos examinado todas las tuplas $\bar{b}$ en M, lo que obtenemos es un *conjunto* de fórmulas. (La efectividad o no de este proceso, su realizabilidad o no por parte de una mente finita, no desempeñan ningún papel en el presente contexto). Sea $\psi_{M,\bar{a}}$ la conjunción de este conjunto de fórmulas. Obviamente, $\psi_M^{\bar{a}}$ es satisfecha por $\bar{a}$ en M. Considérese cualquier tupla $\bar{b}$ en M. Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ satisfacen en M exactamente las mismas fórmulas infinitas en L_B, en tal caso tenemos $M \quad \psi_M^{\bar{a}}[\bar{b}]$ (de otro modo, un miembro de la conjunción $\psi_M^{\bar{a}}$ sería falso de $\bar{b}$ en M). Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no satisfaciesen en M exactamente las misma fórmulas infinitarias en L_B, entonces habría (a partir de la citada construcción) al menos un miembro de la conjunción $\psi_M^{\bar{a}}$ que no es satisfecho por $\bar{b}$ en M, y consiguientemente $M \quad \psi_M^{\bar{a}}[\bar{b}]$. Obsérvese que $\psi_M^{\bar{a}}$ no necesita ser localmente maximal, de modo que el argumento de Kim referente a la reducción débil no requiere en realidad [*KPM2*]. Sin embargo, en el planteamiento original de Kim parece ser esencial el uso de propiedades (fórmulas) maximales.

Las anteriores consideraciones nos llevan a la siguiente:

Proposición 6

Sean $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ los conjuntos de todas las fórmulas infinitarias en los vocabularios L_A y L_B respectivamente y sea K cualquier clase de modelos para un vocabulario L, extensión que incluye L_A y L_B. Entonces $\Phi(A)$ superviene débilmente sobre $\Phi(B)$ con respecto a K syss $\Phi(A)$ es débilmente reducible a $\Phi(B)$ en K.

Procederemos ahora de manera análoga para mostrar la implicación [SF] $\rightarrow$ [CN] de acuerdo con las pautas propuestas por Kim. Nótese para empezar que, para llevar a cabo la estrategia kimeana en este caso general, no necesitamos fórmulas localmente maximales. Desafortunadamente, no podemos seguir la estrategia naïve seguida por Kim y definir una fórmula localmente maximal $\delta_{M,\bar{a}}$ de $\bar{a}$ en M como la siguiente conjunción:

$$\{\psi(\bar{x}) : M \quad \psi(\bar{x})[\bar{a}],\ \psi(\bar{x}) \text{ es una fórmula infinita en } L_B\}.$$

Trabajando con $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ no necesitamos preocuparnos por limitaciones de cardinalidad, puesto que la construcción de esta lógica nos garantiza que para cualquier *conjunto* de fórmulas existe su conjunción. El problema no es por tanto la cardinalidad, cuanto el hecho de que la colección que viene detrás del conyuntor no forma conjunto alguno. La razón es que la colección de todas las $\mathcal{L}_{\infty\omega}$-fórmulas en un vocabulario es una *clase propia*. Es fácil ver que, como consecuencia directa de esto, la familia de fórmulas presentada en la conyunción de arriba también debe ser una clase propia. Nótese asimismo que el camino elegido en el caso infinitario es completamente inútil aquí, puesto que no podemos construir fórmulas con infinitos cuantificadores. Necesitamos un medio de superar estas dificultades. Afortunadamente, en este caso podemos encontrar de una forma canónica una L_B-fórmula $\delta_{M,\bar{a}}$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ que es equivalente a la conjunción virtual de todas las fórmulas infinitarias en L_B satisfechas por esta tupla en M. Procederemos de la manera siguiente: comenzaremos con una tupla $\bar{a} = (a_1, \dots , a_n)$ en M a ser caracterizada y consideraremos el modelo expandido $(M, \bar{a})$. Para este modelo, construimos una (así llamada) *sentencia de Scott* $\beta_{(M,\bar{a})}$ en un vocabulario apropiadamente expandido $L_B(\bar{c})$ (donde $\bar{c} = (c_1, \dots , c_n)$ es tupla de n nuevas constantes diferentes dos a dos) con la siguiente propiedad:

[##] para cada N de la clase K y cada tupla $\bar{b}$ (de la misma longitud que $\bar{a}$) en N: $(N, \bar{b}) \quad \beta_{(M,\bar{a})}$ syss $(M, \bar{a})$ y $(N, \bar{b})$ hacen verdaderas las mismas sentencias en $L_B(\bar{c})$.

Una sentencia con esta propiedad es llamada una *sentencia de Scott* para la estructura en cuestión. Entonces definimos $\delta_{M,\bar{a}}$ como la fórmula en L_B que obtenemos cuando sustituimos en $\beta_{(M,\bar{a})}$ cada constante c_i por la variable x_i. Por [##], $\delta_{M,\bar{a}}$ es una fórmula localmente maximal satisfecha por $\bar{a}$ en M. La sentencia $\beta_{(M,\bar{a})}$ puede ser definida como la conjunción de una familia $\{\theta_{\bar{d}} : \bar{d} \text{ en } (M, \bar{a})\}$ donde $\theta_{\bar{d}}$ es la siguiente fórmula:

$$\forall \bar{x}\ \left[\psi^{\bar{d}}_{(M,\bar{a})} \to \left(\forall y \quad \{\psi^{\bar{d}e}_{(M,\bar{a})} : e \text{ en } (M, \bar{a})\} \wedge \quad \{\exists y\ \psi^{\bar{d}e}_{(M,\bar{a})} : e \text{ en } (M, \bar{a})\}\right)\right]$$

De este modo, hemos producido un análogo lingüístico de una propiedad localmente maximal. Ahora resulta tentador definir un L_B-sustituto de una fórmula $\varphi(\bar{x})$ en L_A tal y como lo hace Kim, esto es, mediante la disyunción:

$$\{\delta_{M,\bar{a}} : M \quad \varphi(\bar{x})[\bar{a}]\ \&\ \bar{a} \text{ en } M\ \&\ M \text{ en K}\}.$$

Si esta disyunción existe, es claro que es equivalente a $\varphi(\bar{x})$ en K. ¿Pero por qué debería existir esta disyunción, si K es una clase propia? Obsérvese que hay clases de estructuras K tal que la colección de sentencias de Scott de todos los elementos de K no forma un conjunto. En tales casos no podemos construir la correspondiente disyunción. Más aún, hay también casos en los que ninguna fórmula bien formada es equivalente a cada virtual disyunción. Ilustraremos esto por medio de un ejemplo. Sea **K** la clase de todos los buenos órdenes. Para cada M de **K** sea β_M una sentencia de Scott para M. Podemos construirla en una forma canónica tal que dos elementos de K que satisfagan las mismas sentencias infinitarias tengan la misma sentencia de Scott. De acuerdo con un conocido resultado, dos buenos órdenes equivalentes con respecto a las sentencias formuladas en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ son ya isomorfos. De esto y del hecho de que la colección de todos los ordinales es una clase propia, concluimos que la colección de sentencias de Scott de todos los elementos de **K** no forma un conjunto. Por tanto, no podemos construir la correspondiente disyunción. Pero, ¿podemos acaso encontrar una fórmula que se comporte igual que la disyunción? También se puede demostrar que esto es falso. Una fórmula tal axiomatizaría la clase de todos los buenos órdenes, lo que es imposible. Estas dificultades, sin embargo, no excluyen de manera automática la posibilidad de mostrar que [SF] implique [CN]. Lo que en cualquier caso muestran es que el argumento de Kim, al menos en su forma original, no puede ser formalizado en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$. No hay, como acabamos de ver, un principio general correcto que justifique uno de los pasos cruciales en la argumentación de Kim. Conjeturamos que la tesis de Kim es asimismo falsa. Desgraciadamente, no podemos (al menos por el momento) proporcionar un contraejemplo.

Nuestras conclusiones con respecto al uso de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ quedan recogidas en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} [\mathrm{CN}] & \rightarrow & [\mathrm{SF}] & \rightarrow & [\mathrm{SG}] \\ & & \downarrow & & \\ & & [\mathrm{SD}] & \leftrightarrow & [\mathrm{CND}] \end{array}$$

5. Significación filosófica de los presentes resultados

Argumentos reductivos basados en operaciones infinitas, tales como el formulado por Kim, han sido aceptados por muchos autores sin cuestionar la legitimidad de asumir la existencia de propiedades maximales. La explicación modelo-teórica de los diferentes conceptos de superveniencia, así como del de reducción, muestran, sin embargo, lo interesante y fecunda que resulta la cuestión acerca de la lógica subyacente que escogemos con el fin de reconstruir dichos argumentos. Como hemos visto, es necesario el uso de la lógica infinitaria para que dichos argumentos puedan ser correctos, pero al mismo tiempo son necesarias ciertas restricciones. Los argumentos funcionan siempre y cuando trabajemos con estructuras finitas, pero, bajo una lógica infinitaria irrestricta (esto es, conyunciones y disyunciones arbitrariamente largas) *con clases arbitrarias de estructuras infinitas*, la afirmación de Sider resulta falsa, mientras que el argumento de Kim no se puede formalizar. ¿Qué consecuencia filosófica podemos extraer de esto?

Glanzberg, el único autor —al menos que sepamos nosotros— que se ha ocupado de la relevancia de la lógica infinitaria para el debate de la superveniencia, subraya algo en lo que estamos perfectamente de acuerdo, aunque valga decir que por razones distintas (Glanzberg 2001, p. 427): "The moral of the discussion above is not that infinitary logic is bad, but rather that (...) one must decide how much infinitary logic to allow".

No queremos ser categóricos, sino que dejamos abierta la puerta a las tesis antirreduccionistas. Aunque no disponemos de un contraejemplo de la tesis de Kim, el hecho de que su argumento no pueda ser formalizado en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ sin restricciones muestra que al menos generalmente no funciona y de que probablemente haya algo erróneo en su tesis (no sólo bajo nuestra interpretación, sino de un modo fundamental). La interpretación modelo-teórica aquí propuesta muestra cuán decisivos son, para el debate filosófico que nos ocupa, los supuestos sobre propiedades/fórmulas maximales, así como las restricciones impuestas en el sistema lógico elegido. En la presente contribución, no hemos querido defender tesis antirreduccionistas, sino sólo mostrar que ciertos argumentos/tesis reduccionistas no funcionan en general, dejando así abierta la posibilidad de dar con una tesis antirreduccionista coherente (en filosofía de la mente o en otros campos) basada en el concepto de superveniencia fuerte/global.

REFERENCIAS

Ebinghaus, H.-D. y J.Flum (1995). *Finite Model Theory*. Berlin: Springer.

Glanzberg, M. (2001). "Supervenience and Infinitary Logic", *Nous* 35, 419-439.

Gregory, J. (1974). "Beth Definability and Infinitary Logic", *Journal of Symbolic Logic* 39, 22-26.

Hellman, G., y F.W. Thompson (1975). "Physicalism: Ontology, Determination, and Reduction", *Journal of Philosophy* 72, 551-64.

Kim, J. (1993). *Supervenience and Mind*. Cambridge (Mass.): Cambridge University Press.

Polanski, M. (2005). "Stalnaker on Strong and Global Supervenience", manuscrito no publicado.

Sider, T. (1999). "Global Supervenience and Identity across Times and Worlds", *Philosophy and Phenomenological Research* 59, 913-937.

Xavier DE DONATO RODRÍGUEZ es doctor en lógica y filosofía de la ciencia por la Universidad Ludwig-Maximilian de Munich. Actualmente es investigador en estancia posdoctoral en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM (México). Su área principal de investigación es la filosofía de la ciencia y, en particular, la aplicación de métodos formales al estudio de las relaciones interteóricas.

DIRECCIÓN: Instituto de Investigaciones Filosóficas, Universidad Nacional Autónoma de México. Circuito Maestro Mario de la Cueva, s/n. Ciudad de la Investigación en Humanidades. Ciudad Universitaria, 04510, Coyoacán. México, D.F. E-mail: xdonato@minerva.filosoficas.unam.mx.

Marek POLANSKI es doctor en lógica y filosofía de la ciencia por la Universidad Ludwig-Maximilian de Munich. Actualmente imparte seminarios en esta misma universidad. Marek Polanski es autor de *Zur logischen Analyse von Theorienreduktion und Theorienäquivalenz*, München: Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung, 2002. Su área principal de investigación es la lógica, así como la aplicación de métodos formales, en particular de la teoría de modelos, en filosofía de la ciencia y filosofía analítica.

DIRECCIÓN: Seminar für Philosophie, Logik, und Wissenschaftstheorie, Ludwig-Maximilians-Universität München Ludwigstr. 31, D-80539 München. E-mail: marek.polanski@web.de.