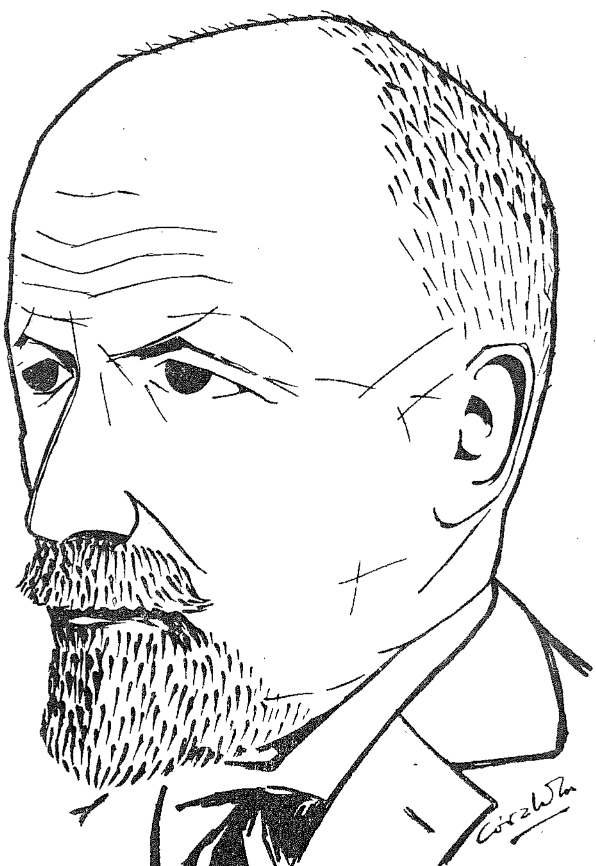
Sobre el concepto de existencia en matemáticas

Por ANTONIO MILLAN PUELLES

CON el estudio de la teoría de conjuntos y el subsiguiente auge que experimentan las revisiones generales de los principios de la axiomática, la noción de existencia sufre una serie de inflexiones ante las cuales no es lícito al filósofo permanecer enteramente ajeno. A la especial naturaleza con que tiene que habérselas el especialista de la materia inteligible, la viene hoy envolviendo una honda preocupación matemática que con frecuencia se infiltra en los intereses de la propia ontología. En el complejo de esta sutil temática, que constituye un terreno acaso excesivamente



George Cantor

resbaladizo, sería muy conveniente la colaboración del especialista y el filósofo; pero lo único que puede hacerla posible es una *clara delimitación de las esferas respectivas*. Las densas y esquemáticas aportaciones de Fraenckel no han acabado de reconocer esta última exigencia, con lo cual el problema no ha hecho otra cosa que complicarse.

Lo que por el momento más importa es, ante todo y fundamentalmente, deshacer los fecundos equívocos que han provocado la mayoría de las falacias de tránsito. Por de pronto, sería provechosa la distinción de estas dos cuestiones que, a mi modo de ver, representan las líneas directrices del problema: a), ¿qué es lo que existe en las matemáticas? b), ¿existe lo matemático?

La polémica entre las escuelas de Hilbert y Brouwer puede ser resumida de esta forma. En la posición hilbertiana la «existencia matemática» se reduce a la no contradicción; en la brouweriana, a la constructibilidad. La brillantez de las fórmulas de Brouwer ha conseguido no pocos discípulos, pese a la inmediata repugnancia que suscita con las alusiones subjetivistas del semiintuicionismo. Por otra parte, el antropologismo matemático de la última fase de Oscar Becker ha contribuído de algún modo a vencer, bien que por caminos diferentes, algunos de los obstáculos que se oponían al criterio de la constructibilidad. En su favor tiene el criterio de la contradicción, la decidida preferencia de los matemáticos por toda fundamentación estrictamente lógico-objetiva. Las paradojas de la teoría de conjuntos sólo tienen sentido en esta postura, desde el punto de vista de la vigencia del principio de no contradicción. El propio tema de la «impletividad» de ciertas definiciones circulares como la ecuación $x = a - x$, enraiza en la misma preocupación; bien que sobre la marcha sea oportuno señalar que no hay propiamente tal circularismo, toda vez que en la citada ecuación debe distinguirse, desde un punto de vista *filosófico*, entre la pura indicación significativa de un complejo de operaciones a efectuar, y la definición, enteramente recta y no circular, según la cual $x = a/2$, que resulta de cumplir esas operaciones.

Los esfuerzos de Brouwer para la legitimación de una lógica trivalente, según la cual el principio de no contradicción no sería verdadero ni falso, sino precisamente «tercero», no afectan en definitiva a la cuestión de la existencialidad de lo matemático. También con el propio criterio de la constructibilidad nos seguimos moviendo en un terreno de posibilidades. Lo matemático *constructivo* no es lo matemático *construído*. Pero otro tanto acontece en la posición de Hilbert.

La pura no contradicción es sólo un signo de posibilidad, no de existencia. La misma necesidad de las proposiciones matemáticas verdaderas no justifica, sin más, la existencia de los sujetos de esas proposiciones. Con tal de que éstos sean simplemente posibles, la relación que en la proposición se establece entre ellos y sus respectivos predicados, es necesariamente válida. Trátase, pues, de una necesidad meramente hipotética o de relación, y no de una necesidad absoluta que, por así decirlo, recortase en el ámbito de la nada una existencia real necesaria. El teorema concerniente a la relación entre el valor de dos rectos y la suma de los ángulos de un triángulo euclidiano, sigue siendo válida, aunque desaparezcan todos los correlatos ónticos.

Cualquiera, pues, que sea el criterio que se utilice para la determinación de lo que existe en matemáticas, sea la no contradicción, sea la constructibilidad, el tema mismo de la existencia de lo matemático queda sin resolver.

Con los criterios en cuestión sólo podrá determinarse la estructura esencial de lo matemático, su peculiar figura y condición, pero nada de ello certifica que, en verdad, lo matemático exista con un carácter estrictamente supraobjetivo. De una manera análoga a como en un poema de pura imaginación se dice que existen tales y cuales elementos, sin que en rigor estos elementos existan precisamente fuera de la imaginación, así también *en* la especulación matemática pueden existir las respectivas estructuras, sin que por ello realmente existan como subsistentes.

El empleo del término «existencia» en las escuelas de Hilbert y Brouwer, por cuanto invade equívocamente el orbe de lo ontológico, es totalmente abusivos. La alineación de las teorías de Platón y Aristóteles sobre el problema de la subsistencialidad de lo matemático, en la misma dirección que la polémica moderna sobre el criterio de pura existencialidad *en* las matemáticas y precisamente junto a esa polémica (Fraenckel), constituye un acoplamiento esencialmente nutrido de anacronismo. Una y otra cuestión se deslizan en planos diferentes, y es ésta la razón por la cual el matemático debe ceder al filósofo el tratamiento del problema de la subsistencialidad de la materia inteligible, reservándose para sí el tratamiento y estudio de la legislación esencial que compete a su objeto.