Las matemáticas y la sistematización de las ciencias experimentales y de observación

Por JUAN BELGRANO

Ingeniero del Instituto Técnico de la Construcción

En la primera parte de su conferencia de apertura de esta Sección de Filosofía e Historia de la Ciencia, el profesor Rey Pastor trató ya algunos de los puntos esenciales de este tema y temo que las breves consideraciones que siguen parezcan muy pobres al lado de la brillante disertación de nuestro ilustre presidente, Sin embargo, como estas líneas han de servir de base de discusión, pensé que no se debía destruir la unidad del tema y que, aunque brevemente, debía seguir mencionando aquellos puntos. No entraré en consideraciones filosóficas y ambiciono solamente exponer puntos de vista sobre un problema de frontera entre matemática y ciencia experimental, que deberían ser comunes a todos los que cultivan estas ciencias y también a todos los *filósofos metodólogos.*

Consideraremos sucesivamente los puntos siguientes:

A) *Fases de la sistematización o matematización de las ciencias experimentales.*

B) *Forma moderna perfecta de las matemáticas.*

C) *Problemas propios de las ciencias experimentales y de observación irreductibles a las matemáticas.*

A) FASES DE LA MATEMATIZACION

El profesor Rey Pastor estableció en su conferencia una clasificación histórica de estas fases, basada en las teorías matemáticas que se utilizan para sistematizar las ciencias experimentales y de observación. Creo que resulta también de interés clasificar independientemente del tiempo, según el grado de sistematización alcanzado, considerando la naturaleza de las leyes que se establecen:

1) *Leyes descriptivas.*—Toda ciencia, incluso las matemáticas para el niño y los pueblos primitivos, empieza con una ordenación más o menos arbitraria y más o menos creciente de conceptos (quizá singular-plural del lenguaje, botánica de Linné, etc). y por el enunciado de leyes entre estos conceptos, que no son susceptibles de formulación lógica precisa por la naturaleza de los conceptos y de las relaciones consideradas y que llamamos, a falta de otro nombre, *Leyes descriptivas.* En la filología actual se encuentran abundantes ejemplos de tales leyes: leyes de tendencias, con excepciones.

2) *Leyes empíricas.*—En la etapa siguiente se manejan conceptos susceptibles de medida o de interpretación matemática. Se multiplican entonces las leyes o recetas empírico-matemáticas, cada una de las cuales equivale al enunciado de un axioma:

Si se produce el conjunto de condiciones (A), las magnitudes z_1, z_2 ...... z_n están ligadas por las relaciones:

$$f' (z_1, z_2, \ldots\ldots z_n) = 0$$
$$f'' (z_1, z_2, \ldots\ldots z_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Como ejemplos de ciencia en esta etapa creo que pueden mencionarse:

La astronomía de los Tolomeos (muy avanzada).

La geometría pre-griega de los antiguos egipcios (agrimensura).

La psicología experimental actual.

La aritmética de los pueblos primitivos y de los analfabetos.

Las leyes empíricas son meras recetas de acción sin nexo entre sí. Los progresos de la ciencia conducen a leyes más generales, permitiendo la deducción lógica de numerosas otras y se suele dar a estas leyes generales el nombre de *principios*, que consideramos como una nueva fase.

3) *Principios.*—Las leyes empíricas aparecen con gran profusión; en cambio, los llamados *principios,* quedan siempre en número muy reducido y no suelen pasar de la media docena.

Ejemplos de tales principios se encuentran en:

La astronomía de Kepler y la mecánica de Galileo y Newton.

La física y la química actuales.

La termodinámica (Joule, Carnot, Nernst, Clausius).

Posiblemente se enunciaban igualmente «principios» en la geometría griega antes de Euclides.

Puede decirse que los principios son una forma *seudomatemática*; al enumerarles la ciencia progresa rápidamente sin preocuparse de darles una forma lógica perfecta. Son en número reducido, pero ocultan el enunciado de otros principios o axiomas que se sobreentienden por estimarles evidentes.

Por ejemplo, el *principio de inercia* en mecánica clásica, sobreentiende un axioma afirmando la existencia de un sistema de relojes que permita definir la *simultaneidad* de sucesos referidos a sistemas de ejes distintos, es decir, la existencia del *tiempo universal* negada por la relatividad.

Análogamente, los principios de la termodinámica, de la química, de la mecánica cuántica, sobreentienden numerosas otras leyes.

En resumen, los llamados principios en número reducido, de varias ciencias experimentales y de observación, presuponen en rigor el enunciado de varias otras leyes elementales que se admiten como evidentes. Al descomponer estos principios en leyes elementales se llega al enunciado de *axiomas*, que constituyen la fase siguiente de matematización, cuyo modelo es la geometría de Euclides, durante largo tiempo considerada como matemática, pero que más bien, como veremos, constituye una fase de transición hacia las matemáticas en su forma moderna, tal y como se presenta en los trabajos de Peano, Hilbert, Rey Pastor, etcétera...

4) *Axiomas.*—Durante mucho tiempo la sistematización alcanzada en los «Elementos» de Euclides pareció perfecta, y hubo poca preocupación de extenderla a otras ramas. En la misma aritmética, si no me equivoco, antes de Peano se enunciaban solamente las leyes de conmutatividad, asociatividad y distributividad de las operaciones fundamentales de adición y multiplicación, además quizás de los axiomas de *inducción completa* y de *continuidad,* y creo que las modificaciones introducidas por Peano en la axiomática aritmética han sido más profundas que las introducidas por Hilbert en la axiomática de Euclides. Esto nos conduce directamente al estudio de lo que es *matemática moderna,* en donde veremos en que se diferencia ésta de la concepción de Euclides.

B) FORMA MODERNA PERFECTA DE LAS MATEMATICAS

1) Las matemáticas modernas se diferencian de la de Euclides por las preocupaciones siguientes:

a) Introducción de *conceptos primitivos* no susceptibles de definición. Por ejemplo, muchas definiciones de Euclides no son matemáticas:

La recta es el camino más corto de un punto a otro.

En cambio, se reconoce actualmente la imposibilidad de definición lógica extensiva o comprensiva de todos los conceptos, siendo necesario introducir *conceptos primitivos*, que son *elementos* y *relaciones*.

Por ejemplo, en la aritmética de Peano:

Conceptos primitivos
- *Elementos*: número natural; cero
- *relaciones*: siguiente de

en la geometría de Hilbert

Elementos: Puntos, Rectas, Planos

Relaciones: Pertenecer, Entre, Congruente, Continuo

limitándose a la geometría proyectiva, Rey Pastor utiliza:

Elementos: Puntos, Segmentos

Relaciones: Pertenecer

b) Preocupaciones metamatemáticas de: *compatibilidad* del sistema de axiomas: no se puede llegar a una contradicción;

Independencia de cada axioma, ningún axioma es consecuencia de otros; ejemplo conocido es la negación del postulado de Euclides por la geometría de Rieman y Lobatchevski, *completicidad*, posibilidad de deducir la verdad o falsedad de cualquier proposición enunciada en los términos de una ciencia.

Recordemos que la compatibilidad, hasta ahora, sólo se puede demostrar admitiendo los axiomas de la lógica y de la teoría de conjuntos o de la aritmética de los números reales. La independencia de cada axioma se reduce a la compatibiladad del sistema en el cual este axioma se reemplaza por su negación. En cuanto a la completicidad, este problema parece dificilísimo de resolver. Hilbert postula la completicidad como axioma final en aritmética y geometría (no en su forma más exigente de la imposibilidad de agregar otro axioma compatible con los precedentes, sino en la forma más restringida de categoricidad, pero cuya definición precisa en lógica matemática resulta bastante delicada).

2) Posibilidades de matematización perfecta en las ciencias actuales

Hasta la fecha tan sólo han sido puestas en forma logística la aritmética o el sistema equivalente de la teoría de conjuntos y las distintas geometrías. Algún esfuerzo de investigación permitiría fácilmente conseguir el mismo resultado para la mecánica y termodinámica clásica, y probablemente sin grandes dificultades para las teorías de física moderna: relatividad, mecánica cuántica y ondulatoria, atomística.

Se señala este propósito con la esperanza de que investigadores españoles se adelanten a los extranjeros en esta tarea. Para la termodinámica, por ejemplo, los excelentes tratados de los señores Palacios y Guggenheim exponen esta ciencia en una forma de transición entre la de los principios y la axiomática. Nuevos progresos en este sentido sólo pueden conseguirse mediante una estrecha colaboración entre matemáticos «logistizantes» y físicos «matematizantes». Es interesante subrayar de paso el alcance que tendría este resultado en el ámbito científico internacional y el interés que debería despertar el tema, ya que con toda seguridad, es posible llegar al resultado apetecido. Además, para la enseñanza de las futuras generaciones es evidente la ventaja que proporcionaría una exposición lógica de las teorías físicas modernas, que en su forma actual chocan bastante con nuestra formación clásica: relatividad, principio de invertidumbre de Heisenberg, etc...

3) Las matemáticas modernas no tienen contenido

Consideremos, por ejemplo, el sistema de elementos y axiomas de la aritmética en la forma más generalmente aceptada. Actualmente la de Peano: (personalmente creo más conveniente tomar la unidad como elementos y definir el cero al generalizar los reales negativos como el módulo de adición, y ordenándolo entre positivos y negativos, ya que la noción cero es muy abstracta y artificial).

Elementos: número natural (clase) (N);
cero (0);
siguiente de

Axiomas:

1) Cero es un número natural.

2) El siguiente de un número natural es un número natural.

3) Dos números naturales que tienen el mismo «siguiente» son iguales.

4) Cero no es siguiente de ningún número.

5) Si relación verdadera para n implica verdadera para n + 1, si es verdadera para cero es verdadera para todos los números naturales.

Damos a la clase número natural como hace notar Fausto Toranzos el sentido siguiente: colección de objetos distintos con primer objeto y sin último objeto;
cero el primer objeto:
siguiente de el sucesivo;
este sistema de entes cumple los axiomas...

De la misma manera, cuando se haya axiomatizado la mecánica y la termodinámica, se hablará de «temperaturas», «cantidades de calor», parámetro «tiempo», «energía», etc..., de una manera completamente abstracta, como hablamos actualmente de «números naturales» o de «plano». Sin duda, esto permitirá simplificar teorías físicas, pero no suprimirlas. Matemáticas y Física deben quedar siempre separadas y veremos ahora brevemente qué dominio irreductible a las matemáticas, queda a la Física («o a cualquier ciencia matematizada»).

C) PROBLEMAS PROPIOS DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES Y DE OBSERVACION

Es evidente que a medida que va avanzando la sistematización de una ciencia y principalmente a partir de la introducción de «principios», gran número de clases de hechos experimentales pueden «deducirse» como «consecuencias» de estos principios que llamaremos «antecedentes». Evitamos así las palabras «causa» y «efecto», cuyas definiciones suscitarían discusiones metafísicas.

Asimismo, las experiencias que antes de enunciar los «principios» hubieran sido necesarias para «inducir» «consecuencias» de estos principios, se hacen innecesarias. Por ejemplo, en Geometría no se piensa actualmente en «inducir» la ley

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

mientras que ésto hubiera sido necesario para los antiguos egipcios (al parecer no llegaron a generalizar los casos particulares que conocían).

A las ciencias de las «percepciones» (evitando la palabra metafísica de «realidad»), física, química, astronomía, biología, etc., les quedarán siempre las difíciles tareas siguientes:

1) Establecer a partir de «percepciones» los *conceptos primitivos*, elementos y relaciones. Es necesaria una familiarización experimental con los conceptos aun los más sencillos de «número» de «siguiente» de «unidad» (mejor que el cero). Lo mismo ocurre con la «recta»: hilo tendido, rayo luminoso, el intento de seudo-definición de Euclides: camino más corto, etcétera, o bien con plano superficie de líquido... volumen, superficie, línea, punto..., segmento, medida de longitu-

des, etc... Así es igualmente con el «conjunto», la «función» o «correspondencia». Se omite actualmente en la enseñanza de la física esta familiarización metódica por considerar estos conceptos como «intuitivos» generalmente, dando de ellos seudo-definiciones, o bien porque se parte en las ciencias exactas de conceptos muy indirectamente asequibles a la experiencia como al considerar (Guggenheim) la «entropía» como concepto primitivo en la termodinámica; algo análogo ocurre con el «cero» del sistema de Peano. Los «conceptos primitivos» deberían ser fácil y casi directamente asequibles a la experiencia o percepción, y esta exigencia debería ser respetada en la elección de éstos, ya que la axiomatización es posible a partir de sistemas muy variados de «conceptos primitivos».

Este «establecimiento» de los «conceptos primitivos» a partir de percepciones parece fácil en la Aritmética y Geometría, porque las nociones correspondientes nos son familiares. Sin embargo, la introducción del «tiempo», por ejemplo, como concepto primitivo en la mecánica plantea ya bastantes dificultades en cuanto a la elaboración experimental de este concepto, y más aún los de «temperatura», «energía», etc.

2) Justificación experimental de los axiomas.

Una vez elaborados experimentalmente los «conceptos primitivos», queda una misión más delicada aún, que es la justificación experimental de los axiomas, la cual plantea el *problema de la inducción*.

Por ejemplo, en la geometría de Euclides, familiar a todos los axiomas de enlace y los de ordenación, es decir, los de la geometría proyectiva (sistema de Rey Pastor, por ejemplo), parecen relativamente fáciles de fundamentar experimentalmente.

No ocurre así con los axiomas de «congruencia» o de medida que suponen la permanencia de formas, permanencia bastante difícil de fundamentar experimentalmente, ya que es una propiedad límite y que no existen cuerpos «rígidos». A estas dificultades se suman las planteadas por la «inducción científica», bastante mal resueltos al parecer hasta ahora desde el punto de vista «metodológico». En efecto, en la inducción conocemos algunos trechos experimentales; se trata de elegir una «ley», «axioma» o «principio» como «antecedente» tal que estos hechos sean «consecuencias» de este «antecedente». Hay multitud de antecedentes que permiten deducir estos hechos, y la elección está limitada lógicamente tan sólo por las condiciones de compatibilidad con los antecedentes anteriormente admitidos (no existe la criba de las arenas del desierto...).

Se suele exigir, además del antecedente, ciertas propiedades, que podemos llamar «estéticas», cuando se habla de su «simplicidad», y que se ha de dar la preferencia al antecedente «más simple» entre todos los posibles. Pero el problema de la inducción es demasiado vasto y complejo para ser tratado ahora y quise solamente indicar su existencia y subrayar su dificultad (*).

3) Problema del límite de validez.

Toda axiomatización supone «extrapolaciones», es decir, el paso a límites idealización (cf. la de Galileo, etcétera), por ejemplo, «cuerpos rígidos», «línea» sin espesor», sucesión indefinida de números en la aritmética, etc. Las leyes, principios y axiomas pueden ser válidos con la *aproximación* experimental asequible dentro de ciertos límites de los conceptos fundamentales. Por ejemplo, Pasch, Rey Pastor introducen como concepto primitivo el de «segmento», «región finita», y Pasch deja aparte la cuestión de saber si cualquier «segmento» contiene infinitos puntos. El axioma $(A = B) . (A = C) \rightarrow (B = C)$ es físicamente falso cuando se llega al límite de precisión de los instrumentos. La ley macroscópica de variación monótona de la entropía no es válida para sistemas microscópicos; la mecánica clásica no lo es para grandes velocidades... Ya es sabido que las teorías físicas modernas niegan numerosos principios que hace cincuenta años se consideraban como dogmas científicos, y que la enseñanza secundaria y parte de la superior sigue presentando como tales hasta ahora: por ejemplo, varios principios de la mecánica y de la termodinámica clásicas. Cuando, después de asimilar estas nociones, se quiere entrar en el estudio de la teoría de la relatividad, ondulatoria y cuantas, los nuevos conceptos chocan y su asimilación cuesta un esfuerzo que probablemente habría sido posible ahorrar delimitando ya, aunque de manera imprecisa, el campo de validez de las teorías clásicas.

Esta delimitación viene a ser otra faceta muy importante del problema de la inducción cuando se trata de extender nuestro conocimiento a fenómenos que no están a nuestra escala: el mundo atómico o el universo. Creo que siempre han de establecerse, primero, las leyes de los fenómenos a nuestra escala y que cualquier extrapolación debe ser cuidadosamente comprobada antes de formular una ley. Por ejemplo, la energía cinética de una bola esférica del dispositivo indicado es sensiblemente para α no muy pequeño: $w = k\, d \operatorname{sen} \alpha$, para α pequeño hay rozamiento y cesa de existir esta proporcionalidad.

Problemas análogos se plantean constantemente, por ejemplo, al justificar la medición de fuerzas pequeñas por el péndulo de torsión, y la justificación satisfactoria de estas medidas es más delicada de lo que a primera vista parece. Las precauciones a tomar para tener en cuenta las «circunstancias», el «entorno» del fenómeno al limitar la validez de la inducción constituyen otro problema sumamente difícil que pertenece a la Física, Química, Biología, etc., de resolver, aunque imperfectamente. La revolución científica de este siglo debería conducir a una mayor circunspección en la extrapolación de leyes, y sería provechoso para las generaciones futuras de investigadores, que se examinaran ya más detenidamente las condiciones de «entorno» que permiten el enunciado de cada ley; la importancia de estos estudios es cada día mayor, ya que en Astronomía y en Física atómica las medidas son cada vez más indirectas y los fenómenos se alejan cada vez más de la «escala humana».

Conclusiones

En resumen:

1) La sistematización permite deducir cada vez más hechos experimentales de un número reducido de leyes, principios o axiomas.

2) En su estado perfecto «matemático», conceptos primitivos y axiomas (programa de Peano, Hilbert, Rey Pastor), la matemática es un *molde*, un *clasificador* sin contenido; se puede prever en corto plazo la axiomatización de gran parte de la Física actual.

3) Una vez axiomatizada, quedará a la Física, o a cualquier otra ciencia, tres tareas fundamentales:

a) Mostrar cómo la experiencia sugiere los conceptos primitivos de la ciencia axiomatizada.

b) «Inducir» los axiomas a partir de hechos experimentales convenientemente elegidos.

c) Limitar el dominio de validez de los axiomas enunciados.

(*) Debería ser objeto de un estudio detallado en cada ciencia, incluso en la fundamentación de la aplicación de las matemáticas al mundo externo.