Los coloquios de Zurich de 1938

Por RAMON CRESPO PEREIRA

Del Instituto de Matemáticas «Jorge Juan»

TODOS los hombres nos encontramos viviendo en el mundo. En este mundo hay cosas y para vivir nos vemos forzados a orientarnos entre esas cosas. Dentro del proyecto vital de todo hombre hay así un hacer ineludible: averiguar lo que las cosas son. La calidad, la originalidad, la importancia de estas averiguaciones depende, naturalmente, de la persona que piensa. El pensador auténtico será siempre el que logre mayores claridades sobre las cosas. Pero en varia medida todo hombre se ve obligado a pensar, actividad que en realidad no es otra cosa que saber a qué atenerse sobre el mundo en que vivimos.

Lo que resulta problemático es que las cosas —eso que llamamos cosas— tengan un «ser» inmutable. La asignación a las cosas de un ser inmutable y eterno ha constituído durante siglos una creencia sobre la que iba montada la filosofía. Si creemos que las cosas tienen un ser y que este ser es siempre el mismo para cada cosa, es natural que nos pongamos a buscarlo. Puesto que la captación de eso que constituye el ser de cada cosa nos permitirá saber a qué atenernos sobre esa cosa en toda circunstancia.

Si echamos una mirada a la historia vemos que la *realidad* hasta ahora no se ha dejado apresar totalmente. El hombre no se ha puesto definitivamente en claro sobre las cosas. El mundo sigue siendo misterioso, conserva notas ignoradas o problemáticas. Cabe incluso la sospecha de que este carácter misterioso sea esencial al mundo y que el hombre no se pueda aclarar nunca del todo los enigmas que el universo y la vida le plantean.

No hay cosa, en efecto, que se sustraiga en absoluto a este ineluctable destino. Todos los esfuerzos realizados hasta el momento para cazar racionalmente algo seguro en absoluto han fracasado.

En este artículo voy a tratar de la matemática desde el punto de vista de la idea que los matemáticos suelen expresar acerca de ella. Podrán patentizarse serias discrepancias entre los matemáticos. También, de pasada, comprobaremos que los conocimientos matemáticos no son absolutamente seguros.

* * *

El íntimo contacto con la matemática, logrado tras un pensar cotidiano en sus problemas, permite una mayor penetración en regiones más hondas y ricas. La experiencia del hacer matemático capacita para una mejor comprensión de los conceptos y los métodos matemáticos. Para el profano en matemáticas o para una persona insuficientemente preparada, algunos de esos métodos y conceptos matemáticos resultan artificiosos y complicados. Sólo se capta la belleza y armonía de la construcción matemática cuando la mente se ha ejercitado adecuadamente en la resolución de problemas. Este ejercicio lleva emparejada la comprobación de una cierta terquedad por parte de algunos problemas, reacios en descubrir los caminos conducentes a la solución elegante y justa. Tal vez pueda afirmarse lo mismo de toda actividad humana cuando ésta se desarrolla con autenticidad. Como dice Simmel a propósito de la filosofía: «... Los rígidos conceptos abstractos del sistema filosófico únicamente revelan su movimiento interior y la amplitud de la intuición del mundo en ellos encerrada, a la mirada que durante largo tiempo se ha esforzado en descubrirlos y recoger las excitaciones que emanan de su profundidad.»

Ahora bien, siempre resulta más difícil estudiar y definir el ser de una cosa que tener, manejar o producir esa cosa. Si es cierto que el acceso al mundo matemático no es fácil ni cómodo, es cosa interesante descubrir que los asiduos de la esfera matemática no suelen estar de acuerdo sobre lo que significa su ciencia. El «ser» de lo matemático es pensado de manera diferente por cada matemático. Es falso de todo punto que haya unanimidad entre los matemáticos sobre el «ser» de la ciencia que cultivan. Ha constituído hasta hace poco una creencia tranquilizadora el hecho —mito— de la unanimidad y armonía unitaria que reinaba entre los matemáticos en cuanto a las ideas acerca del orbe matemático. Algunos profesionales de tal ciencia, confortados con tan cómoda creencia, se atrevían a mirar despectivamente a otros hombres, especialmente a los filósofos. El argumento más fuerte que solían exhibir en sus razonamientos lo constituía siempre el hecho de que los filósofos no se hubieran puesto hasta ahora de acuerdo sobre la filosofía. Ahí estaban, en cambio, ellos —los matemáticos—, entre los cuales reinaba completa unanimidad sobre los puntos de vista matemáticos. Otro argumento muy fuerte era el relativo a la seguridad absoluta de los conocimientos matemáticos. Sólo la matemática permitiría lograr algo seguro.

Sin embargo, si dirigimos una mirada atenta a las circunstancias históricas que caracterizan el desarrollo de la matemática —sobre todo de la actual—, veremos que esta ciencia no se libra de la esencial inseguridad constitutiva de todo lo humano. Comprobaremos de paso el fin perseguido por este artículo: descubrir el «mito» de la unanimidad de un acuerdo general entre los matemáticos sobre el «ser» de la matemática.

* * *

El libro de F. Gonseth *Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des Sciences mathématiques,* Zurich, 1941, nos ofrece una magnífica ocasión para tratar el tema.

A finales del año 1938 se reunieron en L'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich matemáticos y lógicos de todo el mundo. Durante varios días estos científicos estuvieron disertando y discutiendo acerca de cuestiones relativas a los fundamentos y métodos de la matemática.

Una de las ideas que surgen en el lector después de acabar la lectura de dicho libro es la de que los matemáticos y lógicos que intervinieron en los Coloquios de Zurich no estaban de acuerdo sobre el «ser» de lo matemático. (Quizá sería preferible cambiar esta palabra «ser» por la de «consistencia» —aquello en que cada cosa consiste, según la terminología orteguiana—.) Quiero decir que esos científicos, entre los que figuraban algunos de primera calidad, Lebesgue, Enriques, Skolem, Fréchet, Sierpinski, Lukasiewicz, etc., discrepaban radicalmente sobre el sentido del hacer matemático.

Pero analicemos más de cerca el libro que suscita estos comentarios.

De momento se encuentran intervenciones de carácter puramente técnico, especial, intramatemático. Ejemplos: la conferencia de Skolem acerca del teorema de Löwenheim-Skolem, la intervención de Lukasiewicz sobre la lógica y el problema de los fundamentos y la exposición de Bernays acerca de cuestiones metodológicas actuales de la teoría hilbertiana de la demostración.

Las discrepancias y las discusiones surgieron, pero su carácter no era fundamental y no merecen ser profundizadas en este artículo. (Después de la intervención de Lukasiewicz se planteó el problema de si la lógica trivalente del conferenciante era susceptible de una interpretación intuitiva. Gonseth dió fin a esta discusión manifestando que se carecía de un criterio *a priori* para apreciar los progresos realizados por las nuevas lógicas.)

Junto a estas discusiones especiales figuraron otras que merecen ser destacadas para que se patentice lo afirmado al comienzo de este artículo acerca del mito de la unanimidad en lo matemático. Sólo voy a ocuparme de algunas de estas intervenciones de carácter general.

Resumiré primero algunas de las ideas expuestas por M. Fréchet en su conferencia titulada «El análisis general y la cuestión de los fundamentos».

Para Fréchet, la matemática no es una teoría puramente lógica. La creencia de que la ciencia matemática consista sólo en efectuar una sucesión de transformaciones lógicas a partir de proposiciones admitidas como verdaderas, le parece errónea. Si la matemática fuera sólo eso quedaría reducida a ser un mero juego, sin alcances de importancia. Pero lo curioso del caso es que todo el mundo cree hablar de la misma ciencia al mencionar la matemática.

Según Fréchet, la matemática tiene una raíz en la vida del hombre: la resolución de problemas concretos planteados por la naturaleza y la técnica. El querer desvincular a la matemática de toda conexión con el mundo real es ilusorio. La matemática, justamente, ha surgido del estudio de la realidad. Ciencia deductiva y mundo real están, pues, inter-relacionados. Con fino humor señala Fréchet el salto mortal que ha de dar quien pase de una geometría abstractamente estructurada a la de los objetos concretos. Los objetos de que se ocupa aquélla no se dejan captar por la intuición sensible. Los objetos que manejamos en los problemas concretos (tal como el de trazar con ayuda de la escuadra la paralela a una recta dada) obligan a efectuar con una cosa material (un instrumento de madera) operaciones sobre rectas abstractas en un plano abstracto. Sería preciso advertir que todas las proposiciones abstractas son falsas cuando las figuras sobre que se opera son esos trazos que deja una tiza sobre el encerado o un lápiz sobre el papel. Ahora bien, ¿por qué vale la pena establecer aquellas proposiciones sobre objetos abstractos? Pues porque orientan sobre el mundo real con tanta mayor aproximación cuanto que las figuras concretas consideradas, aquí y ahora, satisfacen mejor a las condiciones abstractas.

Para Fréchet todas nuestras ciencias no son otra cosa que un esquema aproximado de la realidad. Todas las nociones abstractas usadas en las distintas ramas matemáticas surgen en la experiencia humana y constituyen siempre la representación aproximada de ciertas observaciones. Además, en cada parte de la matemática hay que distinguir: 1.°, una síntesis inductiva; 2.°, la formación a partir de ésta de un sistema axiomático; 3.°, la teoría deductiva basada sobre las axiomas y los términos primitivos, y 4.°, la verificación de las consecuencias de esta teoría cuando se sustituyen las nociones abstractas por otras nociones concretas, las cuales tienden a representar esquemáticamente aquéllas.

Acorde con estos pensamientos, Fréchet cita las palabras de Cournot:

«Se trata ahora de saber si toda esta teoría no es más que un juego mental, una especulación curiosa o si tiene por objeto, por el contrario, leyes muy importantes y generales que rigen el mundo real. Para operar este paso de la idea de una relación abstracta a la de una ley eficaz en el orden de las realidades y de los fenómenos, los *razonamientos* matemáticos, apoyados sobre una cuestión de identidades, son *evidentemente insuficientes.* Es preciso recurrir a otras nociones, a otros principios del conocimiento; en una palabra, es necesaria la crítica filosófica.»

Queda todavía la posición adoptada por Fréchet frente al derecho que el matemático tiene de crear nociones abstractas nuevas, sin relación inmediata con fenómenos del mundo. Para Fréchet, la libertad constructiva del matemático no es completa. No se introducen porque sí nociones nuevas surgidas de la pura fantasía. Serán sólo legítimas las innovaciones que permitan transformar el aspecto de los resultados adquiridos y unifiquen estos resultados. Proponerse problemas arbitrarios por pura diversión, no debe de estar permitido al matemático.

Con esto queda resumida la posición ideológica del gran matemático francés en lo que suele llamarse la filosofía matemática. Las notas salientes son:

a) La matemática no es, ni debe ser, un simple juego.

b) La matemática es una actividad que tiene por objeto la resolución de los problemas concretos que la vida del hombre, referida a la naturaleza y la técnica, plantea.

c) Una matemática será tanto más lograda cuanto con mayor precisión resuelva dichos problemas concretos.

d) El matemático dedica su vida a resolver los problemas planteados a la matemática por la vida humana. Su fin supremo será el progreso de dicha ciencia.

e) El matemático no tiene, pues, la libertad de elegir problemas arbitrarios por pura diversión.

* * *

Para el público en general las palabras de los hombres de ciencia suelen llegar aureoladas con un halo de alta estimación. Al fin y al cabo la sociedad, de la cual el público forma parte, conserva durante más tiempo, inercialmente, los mitos de que se nutre, por ejemplo, la gran fe en la razón. De ahí el respeto con que la gente escucha, o suele escuchar, las doctas voces de los matemáticos, por creer que corresponden a un saber seguro e infalible. Además, se piensa: no sólo tienen autoridad estas palabras por provenir de un científico; lo tienen por el hecho de que ese hombre está dedicado a convivir con tales cuestiones. Tal hombre entiende de eso; merece crédito y oídos atentos.

Pero... sucede muy otra cosa cuando el auditorio de un científico está integrado por hombres de ciencia. ¿Cómo recibieron los oyentes las palabras de Fréchet? ¿Qué pensaron? ¿Cómo manifestaron su pensamiento?

He aquí algunas de las reacciones ideológicas provocadas por la intervención de Fréchet.

Enriques mostró satisfacción. El seguir los razonamientos del matemático francés le había placido. Encontraba muy sugestivos tales pensamientos. Estaba de acuerdo con Fréchet en que las matemáticas no se reducen a las reglas de la lógica. Pero... la posición de Fréchet le parecía exageradamente empírica. El objeto matemático —dijo Enriques— no es objeto de la experiencia. Es un objeto idealizado. Es decir, los objetos matemáticos no son materiales. Son fruto del espíritu humano y expresan la estructura íntima de la mente del hombre. Los objetos matemáticos no pueden comprobarse empíricamente. Si lo fueran, su comprobación exigiría a la vez conceptos matemáticos e ideas sobre la realidad. Pero la imposibilidad de la comprobación no trae consigo la inanidad de la tesis matemática abstracta. La verdadera significación de la matemática no está en el estudio de entes del mundo exterior. Los objetos que la matemática estudia son entes inteligibles en el sentido platónico...

Ferdinand Gonseth

Fácilmente podrá ver el lector cuánto difieren estas manifestaciones de Enriques de las ideas expuestas por Fréchet. Encontramos discrepancias que no vacilo en calificar de profundas. ¿Dónde queda esa pretendida unanimidad mítica, que la gente cree que se da en las ideas que los matemáticos tienen acerca de su ciencia?

Para Fréchet, además, el espíritu humano no crea por completo los objetos fundamentales del pensamiento matemático. La mente del hombre se limita a desgajar los caracteres esenciales de ciertas clases de objetos concretos. De este modo se puede lograr una correspondencia entre ciertos objetos concretos y un objeto ideal, de estructura más simple que, por eso, se presta mejor al razonamiento lógico pero que conserva su íntima conexión y semejanza con el objeto concreto de que ha surgido.

Para Enriques, en cambio, la posición es puramente idealista. La matemática no nos dice nada acerca del mundo real. Es ciencia de objetos ideales.

* * *

¿Qué dijeron otros asistentes a los Coloquios?

Bernays, con mucho tino, subrayó que sería necesario precisar qué se entiende por *experiencia*. Además, añadió, la diferencia entre certeza experimental y certeza racional no es tan tajante como suele creerse.

Otros participantes se desentendieron, incluso totalmente, de la cuestión. Lukasiewicz, por ejemplo, manifestó que los problemas planteados por Fréchet no eran del dominio de la lógica, sino de la psicología, y que en esta esfera se consideraba incompetente.

* * *

Consideremos ahora la conferencia de Lebesgue: *Las controversias sobre la teoría de conjuntos y la cuestión de los fundamentos*. Esta exposición del gran matemático francés ofrece abundantes patentizaciones de la diferencia radical entre el hacer matemático y una idea profunda, certera y universalmente compartida, acerca del ser de la matemática.

He aquí algunas de las ideas expuestas por Lebesgue en su intervención en el Coloquio y que muestran con claridad una diversidad de pareceres muy poco acorde con esa supuesta unanimidad sobre lo que es la matemática.

Para Lebesgue, la filosofía de las matemáticas no puede ser creada más que por los matemáticos. Claro que la palabra filosofía cobra en este contexto una significación que no es la habitual. Lebesgue quiere expresar con la voz filosofía simplemente una cierta reflexión sobre los métodos y teorías matemáticas. En este sentido, nadie más que un cultivador entendido de los métodos y teorías matemáticas podrá realizar tal filosofía. El matemático francés, al expresarse así, tiene sobre todo en la mente la idea de una meditación de las razones del éxito —o del fracaso— logrado con ciertas teorías matemáticas. La «filosofía» sugerida por Lebesgue sería un instrumento útil para los investigadores; mostraría esos senos profundos del quehacer matemático que la obra ya hecha suele ocultar y, de este modo, serviría para penetrar en los fundamentos de la matemática. Esta «filosofía» nos fuerza a salir de la esfera puramente lógica y subraya las raíces históricas del hacer matemático. Han hecho falta siglos para delimitar un problema matemático —proclama Lebesgue—. Tras repetidas experiencias seguidas de éxitos y de fracasos, los hombres han logrado una conquista del objeto y de los razonamientos adecuados para tratarle. Esta raíz histórica trae emparejada una cierta credulidad, una cierta fe en la razón. La historia es un escenario que nos va permitiendo ver las modificaciones a estos modos de razonar por los pensadores de talento creador. Ahí está Cantor. Las modificaciones introducidas por él aparecerían en toda su profundidad —dice Lebesgue— si al hablar de razonamiento no pensásemos de modo exclusivo en la lógica formal, la cual no es más que la morfología externa del razonar.

* * *

No creo sea preciso prolongar estas acotaciones a los Coloquios de Zurich de 1938. El fin perseguido por este artículo me parece ya suficientemente logrado. Las palabras pronunciadas por matemáticos ilustres ante colegas de mundial nombradía, entrañan una disparidad profunda en los pareceres acerca de lo que es matemática. Si nos acercamos a esos científicos con el propósito de lograr luz sobre lo que constituye la esencia de la matemática, debemos reconocer que sus palabras más bien nos desorientan que nos iluminan. Sería deseable que se hubieran puesto de acuerdo mínimamente. El presidente de los Coloquios, F. Gonseth, no tuvo más remedio que declarar el fracaso del intento de lograr una articulación armoniosa de los diversos puntos de vista. No sólo esto. También había fracasado el proyecto de establecer un fundamento seguro y unánimemente aceptado. Y... lo que es todavía más tremendo: *no se había sentido verdaderamente un deseo anhelante de conseguir con urgencia un tal acuerdo mínimo.*

Es cierto que a seguido Gonseth, diplomáticamente, quiso atenuar la importancia de esta situación. Pero el desacuerdo radical entre los diversos investigadores matemáticos y lógicos seguía allí como un espectro desafiante. Claro que a estos científicos las cuestiones de naturaleza puramente filosófica no suelen inquietarles. Su indiferencia va subrayada unas veces con un despectivo encogimiento de hombros o una mirada de olímpica superioridad; en otros casos, más tolerantes o humildes se limitan a declarar que no necesitan en sus trabajos resolver problemas de índole filosófica, en los cuales se dicen incompetentes. Pero en todos los casos el final es siempre el mismo: ¡ Eso no nos importa! ¡ Dejemos esas cosas para los filósofos!

Gonseth expuso su creencia de que su idea de *dialéctica* podía resolver las dificultades. La conferencia de Lebesgue mostraba claramente las diversas etapas de tal proceso: 1.° Significación de las cosas de que se trata. 2.° Fines perseguidos por el pensamiento. 3.° Maneras ya descubiertas de tratar las cuestiones, refrendadas por el buen sentido y la eficacia de las adquisiciones.

En este sentido, Gonseth aplaudió las palabras de Jorgensen, para el cual las matemáticas no deben desvincularse de los fines con ellas perseguidos. Además, Jorgensen hace notar con insistencia que la significación de los signos y símbolos usados por los matemáticos está íntimamente ligada a las cosas concretas. Por último, la exigencia de la no contradicción vale tanto como la de «actividad eficaz».

También en estas ideas de Jorgensen vió Gonseth una nueva expresión de una *dialéctica*. Otra idea interesante de Jorgensen citada por Gonseth es la de que el conocimiento matemático no debe separarse de una actividad más amplia que integre tanto el conocimiento de orden psicológico como las realidades del mundo físico-matemático.

* * *

¿Cómo es posible que a pesar de este desacuerdo radical entre los distintos cultivadores de la matemática, esta ciencia sea de importancia universal —por lo menos en el mundo moderno— y que su progreso resulte independiente, en cierto modo, de las opiniones de los matemáticos individuales?

Es curioso que, a pesar del desacuerdo, se hable, sin embargo, de una sola ciencia.

Aunque los matemáticos no se entienden sobre el asunto, es evidente que su actividad queda caracterizada por *algo* que simbolizamos con la palabra matemática. Es cierto que el hacer matemático posee notas peculiarísimas que se destacan frente a otros haceres humanos diferentes. Pero no cabe duda: dar una descripción completa y válida *para todos los investigadores* de qué sea *eso* que ellos hacen, discuten, persiguen y les apasiona, parece una tarea que se sale del marco puramente matemático. ¿A quién corresponde entonces tal disquisición? ¿Habrá que irrumpir en la región todavía más problemática e insegura de la filosofía? ¡Pobres filósofos!...