Un intento de expresión matemática de la lógica modal clásica: El grupo de matrices modales y el sistema de coordenadas modales

Por MIGUEL SANCHEZ-MAZAS

Creemos haber encontrado la expresión matemática más clara y simple posible del sistema de conceptos *modales* que, por estar fundado sobre las oposiciones clásicas *posible-imposible, necesario-contingente, verdadero-falso,* puede, con toda propiedad ser denominado *sistema de la lógica modal clásica.* Desarrollado y explicado por nosotros en otro lugar (1), dicho sistema será aquí designado abreviadamente por *SM,* para distinguirlo de otros sistemas modales, como los conocidos *S1, S2, S3, S4, S5* de C. I. LEWIS y los recientes £ de J. LUKASIEWICZ (2) y *VE, EV, M, M', M''* y *M (p/q)* de G. H. VON WRIGHT (3), para citar los más afines. (No nos ocuparemos en este trabajo del sentido filosófico de las modalidades, para lo cual remitimos al citado lugar; ni nos detendremos en explicaciones o ejemplos; sólo nos interesa aquí mostrar que la expresión de las modalidades por las matrices que hemos adoptado satisface al sistema SM, cuya interpretación intuitiva corresponde a la lógica clásica.)

La expresión matemática que proponemos se funda en dos maneras de representación de las modalidades de cualquier orden, estrechamente vinculadas entre sí:

1. Mediante el *grupo de matrices modales.*

2. Mediante el *sistema de coordenadas modales:* Q (cantidad modal) y *S* (signo modal).

* * *

Veamos primero cuáles son las características formales generales del sistema modal *SM:*

a) Considera todas las estructuras compuestas de los conceptos modales elementales *posible* (P), *imposible* (I), *necesario* (N), *contingente* (C), *verdadero* (V) y *falso* (F), aplicables como operadores a una proposición o variable proposicional, y las de los conceptos modales superiores aplicables a dos o más argumentos, como *compatible* (P), etcétera. Todas estas estructuras lógicas se denominan, en general, *modalidades.*

b) Establece las leyes de reducción, equivalencia e implicación entre modalidades y proposiciones o funciones proposicionales modalizadas, deduciéndolas en virtud de ciertas reglas y esquemas generales de deducción que permiten operar algebraicamente.

c) Se funda en dos únicos conceptos independientes, *necesario* (N) y *falso* (F), en función de los cuales se definen los restantes conceptos elementales y, a través de éstos, todos los otros, de cualquier orden.

d) Las combinaciones entre modalidades se obtienen gracias a que en el universo lógico modal se define una operación, que aquí denominaremos *producto,* asociativa y, en general, no-conmutativa, respecto de la cual las modalidades constituyen un grupo. En efecto, satisfacen a las cuatro condiciones siguientes:

1. Dadas dos modalidades cualesquiera M y M', pertenecientes al sistema *SM,* existe siempre una modalidad M'', perteneciente a *SM,* igual al producto MM', y una modalidad M''', también perteneciente a *SM,* igual al producto M'M (condición de cierre).

2. Existe en el sistema *SM* una modalidad V que hace el papel de elemento unidad respecto de la operación producto, porque el resultado de multiplicar por ella, a la derecha o a la izquierda, cualquier modalidad M del sistema *SM* es equivalente a M misma (condición de existencia de la unidad).

3. Dada una modalidad cualquiera M del sistema SM existe siempre en *SM* una modalidad M', denominada *inversa* de M, que, multiplicada a la derecha o a la izquierda, por M, da un producto equivalente a la unidad (condición de existencia del elemento inverso).

4. Dadas tres modalidades cualesquiera M, M' y M'', pertenecientes a *SM,* el resultado de multiplicar M, a la izquierda, por el producto de M', a la izquierda, por M'' es equivalente al resultado de multiplicar el producto de M, a la izquierda, por M', a la izquierda, por M''; y, del mismo modo, el resultado de multiplicar M, a la derecha, por el producto de M', a la derecha, por M'' es equivalente al resultado de multiplicar el producto de M, a la derecha, por M', a la derecha, por M'' (condición de validez, para la operación producto, de la propiedad asociativa).

(1) *Teoría algebraica de la lógica modal clásica,* que será editada por el C. S. I. C.

(2) Jan Lukasiewicz: *A System of Modal Logic,* Actes du Xieme Congrés International de Philosophie. Bruxelles, 20-26 Août 1953. Vol. XIV, pp. 82-87.

(3) G. H. Von Wright: *An Essay in Modal Logic.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1951. Y también: *A New System of Modal Logic,* Actes du Xiéme Congrés International de Philosophie. Bruxelles, 20-26 Août 1953. Vol. V, pp. 53-64.

Si empleamos la notación 'XY' para designar el producto de la multiplicación de una modalidad X, a la izquierda, por otra modalidad Y, la notación 'YX' para designar el producto de la multiplicación de X, a la derecha, por Y, y usamos los cuantificadores '(X)' y '(EX)' para significar, respectivamente, como en el cálculo de predicados y de clases, 'para todo X' y 'existe un X tal que', el signo 'V' (verdadero) para representar la modalidad unidad, 'M^{-1}' para indicar la modalidad inversa de una modalidad M y '=' como signo de equivalencia, escribiremos las cuatro condiciones anteriores como sigue:

1. (M) (M') (EM") MM'=M"
   (M) (M') (EM"') M'M=M"'.
2. (EV) (M) VM=MV=M.
3. (M) (EM^{-1}) $MM^{-1}=M^{-1}M=V$.
4. (M) (M') (M") M(M'M") = (MM')M".
   (M) (M') (M") (M"M')M=M" (M'M).

e) Las definiciones básicas del sistema *SM*, que expresan las modalidades C (contingente), P (posible), I (imposible) y V (verdadero) como funciones o combinaciones de N (necesario) y F (falso), son las siguientes:

D1. C=FN
D2. P=FNF
D3. I=NF
D4. V=FF

f) De la aplicación de la anterior condición 2. (condición de existencia de la unidad) a las modalidades elementales N, C, P, I, F y V, resulta:

2a. VN=NV=N
2b. VP=PV=P
2c. VC=CV=C
2d. VI=IV=I
2e. VF=FV=F
2f. VV=V

g) Se establecen los siguientes axiomas para la reducción de modalidades de segundo orden a V (verdad):

A1. NP=V
A2. PN=V

que nos dan P como inversa de N y N como inversa de P. De A1. y A2. se deducen inmediatamente, teniendo en cuenta las equivalencias NP=II y PN=CC, demostrables haciendo uso de las definiciones y de la propiedad del elemento unidad V (3), las consecuencias:

A1'. II=V
A2'. CC=V

Las equivalencias A1'., A2'., D4 y 2f nos dan, respectivamente, I, C, F y V como modalidades inversas de sí mismas. Con ello, la condición 3. (condición de existencia del inverso) puede demostrarse como un teorema del sistema *SM*, del modo siguiente:

h) *Teorema.* Toda modalidad de *SM*, expresada por:

(1) $M=M_1M_2M_3 \ldots M_{n-1}M_n$

donde $M_1, M_2, M_3, \ldots M_{n-1}, M_n$ son modalidades elementales de *SM*, tiene su inverso:

(2) $M^{-1}=M_n^{-1}M_{n-1}^{-1} \ldots M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1}$

Demostración. Los inversos de las seis modalidades elementales N, P, C, I, F y V han sido establecidos en g). La existencia de los factores de M^{-1} en (2) está, pues, probada. Sólo queda por demostrar que $MM^{-1}=V$ y que $M^{-1}M=V$, para los valores de M y M^{-1} dados por (1) y (2). Y, en efecto:

$$
\begin{aligned}
MM^{-1} &= M_1M_2M_3 \ldots M_{n-1}M_nM_n^{-1}M_{n-1}^{-1} \ldots M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1} = \\
&= M_1M_2M_3 \ldots M_{n-1}VM_{n-1}^{-1} \ldots M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1} = \\
&= M_1M_2M_3 \ldots M_{n-1}M_{n-1}^{-1} \ldots M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1} = \\
&= M_1M_2M_3 \ldots V \ldots M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1} = \ldots \\
&= M_1M_2M_3M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1} = \\
&= M_1M_2VM_2^{-1}M_1^{-1} = \\
&= M_1M_2M_2^{-1}M_1^{-1} = \\
&= M_1VM_1^{-1} = \\
&= M_1M_1^{-1} = V \quad \text{c. q. d.}
\end{aligned}
$$

Y de una manera en todo análoga demostraríamos que $M^{-1}M=V$.

i) *SM* se funda, por último, en un axioma que expresa la implicación modal fundamental, del cual se deducen todas las leyes de implicación entre modalidades de cualquier orden. Este axioma es el siguiente:

$$N \rightarrow V \rightarrow P$$

donde ' $\rightarrow$ ' es el signo de implicación.

* * *

Matrices modales

Para la expresión matemática de semejante sistema hay que tener en cuenta, ante todo, el carácter no-conmutativo del producto entre modalidades, en virtud del cual mientras la expresión FI, por ejemplo, es decir, la que se lee:

"es falso que sea imposible"

equivale modalmente a "es posible", es decir a P, la expresión IF, que se lee:

"es imposible que sea falso"

equivale a "es necesario", o sea a N. Multiplicar a la derecha no da el mismo resultado que multiplicar a la izquierda, y como una de sus consecuencias dos símbolos F (falso) se anulan si se hallan contiguos en una expresión, pero no si se hallan separados por el símbolo de otra modalidad. Por ejemplo, mientras:

"es falso que sea falso que sea necesario" o sea, FFN, equivale simplemente a N, "es necesario", pues el grupo FF desaparece, si se tiene en cuenta D4, y 2a., que permiten escribir:

$$FFN = VN = N$$

sin embargo:

"es falso que sea necesario que sea falso"

es decir, FNF, equivale a "es posible", o sea P, como puede comprobarse por la definición D2.

En virtud de estas consideraciones se comprende que los números enteros son inadecuados para representar las modalidades y que el universo modal no puede traducirse en un sistema de relaciones matemáticas análogo al álgebra de BOOLE, que empleaba la suma y el producto aritméticos como expresión de la alternativa y conjunción de la lógica proposicional, gracias a que los caracteres formales de "verdadero" y "falso" en esa lógica son idénticos a los de "1" y "0" en una aritmética. Aquí, por el contrario, aun en el caso de que empleáramos tantos números enteros diferentes como modalidades distintas, nos encontraríamos con la dificultad del carácter no-conmutativo del producto. Intentemos entonces representar cada *operador modal* por medio de una matriz, ya que el producto de matrices es también no-conmutativo.

Tomemos matrices cuadradas de segundo orden, de coeficientes por el momento incógnitos, para expresar los seis operadores modales elementales V, F, N, I, P, C:

$$V = \begin{Vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{Vmatrix} \qquad F = \begin{Vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{Vmatrix}$$

$$N = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \qquad I = \begin{Vmatrix} i_1 & i_2 \\ i_3 & i_4 \end{Vmatrix}$$

$$P = \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix} \qquad C = \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{Vmatrix}$$

En virtud de la condición 2. que caracteriza al operador V como operador unidad, a la derecha y a la izquierda, podemos tomar como matriz representativa de la *verdad* la matriz unidad:

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

que multiplicada por cualquier otra matriz, a la derecha o a la izquierda, no la altera; es decir, da como producto una matriz idéntica a la dada.

Para encontrar la matriz representativa de F, expresemos la relación entre matrices equivalente a D4.:

$$FF = \begin{Vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{Vmatrix} = V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Aplicando los reglas para el producto de matrices, tenemos las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} f_1^2 + f_2 f_3 = 1 & \text{(a)} \\ f_1 f_2 + f_2 f_4 = 0 & \text{(b)} \\ f_3 f_1 + f_4 f_3 = 0 & \text{(c)} \\ f_3 f_2 + f_4^2 = 1 & \text{(d)} \end{cases}$$

De (a) y (d) se deduce $f_1^2 = f_4^2$. A su vez sacando factor común en (b) y (c), tenemos respectivamente $f_2 (f_1 + f_4) = 0$ y $f_3 (f_1 + f_4) = 0$. El sistema tiene más de una solución, y entre ellas elegimos la siguiente:

$$\{ f_1 = 1 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0 \quad f_4 = -1 \}$$

por ser la más sencilla y semejante a la representativa de V. Tenemos, pues, la matriz:

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Los operadores C, P e I, ahora, que en D1., D2. y D3. han sido definidos en función de N y F, estarán representados por matrices que cumplan las condiciones siguientes:

$$C = FN = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_3 & -n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{Vmatrix}$$

$$P = FNF = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_3 & -n_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ -n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix}$$

$$I = NF = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_3 & -n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} i_1 & i_2 \\ i_3 & i_4 \end{Vmatrix}$$

es decir, que tenemos:

$$\begin{Bmatrix} c_1 = p_1 = i_1 = n_1 & \\ c_2 = n_2 & p_2 = i_2 = -n_2 \\ c_3 = p_3 = -n_3 & i_3 = n_3 \\ c_4 = i_4 = -n_4 & p_4 = n_4 \end{Bmatrix} (*)$$

con lo cual sólo nos quedan por encontrar los elementos n_1, n_2, n_3 y n_4 para tener los de las matrices representativas de C, P e I.

Los axiomas de la reducción A1. y A2. se traducen en las condiciones siguientes:

$$NP = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ -n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$PN = \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_1 & -n_2 \\ -n_3 & n_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{Vmatrix} = V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

y, aplicando las reglas del producto de matrices, tenemos las ecuaciones:

$$\text{(e)} \begin{cases} n_1^2 - n_2 n_3 = 1 \\ -n_1 n_2 + n_2 n_4 = 0 \\ n_3 n_1 - n_4 n_3 = 0 \\ -n_3 n_2 + n_4^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{(f)} \begin{cases} n_1^2 - n_2 n_3 = 1 \\ n_1 n_2 - n_2 n_4 = 0 \\ -n_3 n_1 + n_4 n_3 = 0 \\ -n_3 n_2 + n_4^2 = 1 \end{cases}$$

El sistema (f) no añade nada nuevo al sistema (e).

De éste deducimos:

$$n_1^2 = n_4^2$$
$$n_2(n_4 - n_1) = 0$$
$$n_3(n_4 - n_1) = 0$$
$$n_1^2 = 1 + n_2 n_3$$

una de cuyas soluciones es la siguiente:

$$\{ n_1 = 1 \quad n_2 = 0 \quad n_3 = 1 \quad n_4 = 1 \}$$

que elegimos como representativa de N. Es decir, tenemos:

$$N = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

y aplicando las ecuaciones (*):

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

En resumen, hemos obtenido como matrices representativas de las modalidades elementales V, F, N, C, P e I, seis matrices distintas de segundo orden, cuya forma general es:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix}$$

siendo $Q = 1$ para N e I, $Q = 0$ para V y F, $Q = -1$ para P y C, al tiempo que $S = 1$ para N, V y P, $S = -1$ para I, F y C.

Estas matrices se relacionan entre sí de tal modo, que quedan satisfechas las equivalencias definitorias D1., D2., D3. y D4., así como las condiciones 2a., 2b., 2c., 2d., 2e. y 2f. y los axiomas de la reducción A1. y A2. Son el punto de partida que permite expresar matemáticamente cualquier modalidad mon-aria o simple por una matriz.

Grupo modal

Se comprueba inmediatamente que, como consecuencia de lo anterior, toda modalidad mon-aria estará representada por una matriz de la forma

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix}$$

donde Q es un entero cualquiera y S la unidad positiva o negativa, o sea $+1$ ó -1. En efecto, toda modalidad mon-aria de *SM* está engendrada por la aplicación reiterada de la operación producto a las modalidades elementales N, V, P, I, F y C y estará, por tanto, matemáticamente representada por una matriz resultante del producto de algunas de las seis matrices fundamentales halladas. Ahora bien, el producto de dos matrices fundamentales de la forma:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q' & S' \end{Vmatrix}$$

es una matriz de la forma:

$$M'' = MM' = \begin{Vmatrix} A & B \\ Q'' & S'' \end{Vmatrix}$$

en la que
$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1 . 1 + 0 . Q' = 1 \\ B = 1 . 0 + 0 . S' = 0 \\ Q'' = Q . 1 + S . Q' = Q + SQ' \\ S'' = Q . 0 + S . S' = SS' \end{array} \right\}$$

o sea que, en definitiva, resulta de la forma:

$$M'' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q + SQ' & SS' \end{Vmatrix}$$

pero, siendo los cuatro números Q, Q', S, S' siempre enteros para las matrices fundamentales, $Q'' = Q + SQ'$ será también siempre entero, y siendo S y S' siempre $+1$ ó -1, también $S'' = SS'$ resultará siempre $+1$ ó -1. Toda nueva matriz obtenida como producto de dos fundamentales será siempre, pues, al igual que éstas, de la forma:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q, \text{ entero} & S = \pm 1 \end{Vmatrix}$$

a) Toda nueva ampliación del conjunto de matrices modales, por nuevas multiplicaciones, mantendrá esta forma característica de las *matrices modales*. Como, además, b) pertenece al conjunto la matriz unidad:

$$V = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

y c) está definida, para cada matriz del conjunto:

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix},$$

la matriz recíproca o inversa:

$$M^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q' & S' \end{Vmatrix},$$

tal que $MM^{-1} = M^{-1}M = V$, o sea:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q & S \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q' & S' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

o lo que es lo mismo:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q + SQ' = 0 \\ SS' = 1 \end{array} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{array}{l} Q' = -Q/S \\ S' = 1/S \end{array} \right\}$$

con lo que está demostrado que M^{-1} pertenece siempre al conjunto de matrices modales, pues Q' es entero para Q entero y S igual a $+1$ ó -1 y S' es $+1$ ó -1 al ser S, $+1$ ó -1, y, por último, d) la propiedad asociativa es válida para el producto de matrices, tenemos que el conjunto de modalidades expresadas por la forma general

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Q, \text{ entero} & S, +1 \text{ ó } -1 \end{Vmatrix}$$

constituye un grupo que denominaremos *grupo modal*.

Las equivalencias entre modalidades de cualesquiera órdenes vendrán determinadas por las igualdades entre productos de matrices pertenecientes a este grupo.

Coordenadas modales.

Como hemos visto, todas las matrices modales hasta ahora examinadas, o sea, las correspondientes a modalidades mon-arias, tienen la primera fila idéntica (1 0). Esto aconseja (4) una representación más simple de las modalidades, por medio de un par de coordenadas Q y S. Q será un número entero, positivo o negativo, y S $+1$ ó -1. Podemos llamar *cantidad modal* a la primera coordenada y *signo modal* a la segunda, fundados en las siguientes leyes:

1. Siendo M y M′ modalidades de coordenadas respectivamente (Q, S.) y (Q′, S′), el producto de M por M′ es una modalidad $M'' = MM'$ de coordenadas (Q″, S″), definidas por las ecuaciones siguientes:

$$Q'' = Q + SQ'$$
$$S'' = SS'$$

2. Si M y M′ son modalidades, diremos que M (Q, S) implica M′ (Q′, S′) si Q es mayor o igual que Q′ y S es igual a S′. O sea:

$$M\,(Q, S) \rightarrow M'\,(Q', S'), \text{ si } Q > Q', S = S'$$

lo cual puede también expresarse por medio de este principio:

Entre modalidades del mismo signo, el sentido de la implicación está definido así: una modalidad implica a otra si su cantidad es mayor o igual que la de ésta.

Así definida la implicación entre modalidades mon-arias, vemos que satisface a las dos condiciones siguientes:

a) Transitividad: Si $M \rightarrow M'$ y $M' \rightarrow M''$, entonces $M \rightarrow M''$.

b) Reflexividad: Para todo M, $M \rightarrow M$.

Enero 1954.

Seminario de Lógica Matemática.
Instituto "Luis Vives". Serrano, 127. Madrid.

(4) Cuando ya había decidido adoptar el sistema de coordenadas modales (Q. S.), recibí una amable carta del gran físico don Julio Palacios, que, muy interesado por mi sistema, me confirmó en la conveniencia de esta nueva forma de expresión de las modalidades: "No soy experto en cuestiones de Lógica —me dice don Julio—; pero su conferencia me dejó muy impresionado, y lamento que no hubiera más tiempo para comentarla. Creo que ha logrado usted algo muy importante y definitivo, y le felicito por ello efusivamente. El empleo de las matrices como presentación de su teoría es un gran acierto; pero creo que podría usted crear un nuevo algoritmo representando cada modalidad por una díada (Q, $\pm$ 1), y definir el producto *no-conmutativo* sin recurrir a las matrices. Estoy seguro de que, en sus manos, ha de lograr grandes éxitos con su original teoría." Agradecí de veras estos consejos y ánimos de tan ilustre personalidad, enviados desde Lisboa el 21-XII-53, justamente una semana después de mi coferencia en el Instituto "Luis Vives", de Filosofía, en que hice una exposición sumaria de "Un sistema de Lógica modal."