Una nueva métrica como ensayo para axiomatizar la Economía

Por JOSÉ GALLEGO-DÍAZ

Conferencia pronunciada en la sesión científica de la Sección de Filosofía e Historia de la Ciencia del Instituto "Luis Vives", el 25 de noviembre de 1953.

Quiero, antes de entrar en la materia de mi disertación, en primer lugar, dedicar unas palabras de agradecimiento al Secretario de esta Sección, señor Sánchez-Mazas, que me ha invitado a exponer en este Instituto "Luis Vives" mis investigaciones acerca de una nueva métrica y sus aplicaciones a la fundamentación de la Economía, y, después, recordar aquí las importantes contribuciones a la Economía Matemática realizadas por eminentes matemáticos y economistas españoles. No haré sino mencionar los nombres de Flores de Lemus, Fernández Baños, Bernácer, Llamas, Anós, González Quijano (hijo).

I

1. **Introducción.**—Por una explicable fuerza de inercia se utiliza, desde hace siglos, la métrica euclídea en las ciencias experimentales. La rutina, enemiga acérrima del progreso científico, actúa sobre nosotros con fuerzas insospechadas y operando en las zonas abismales del subconsciente se atrinchera, blindada de tradición, en cómodas zanjas de indiferencia peyorativa. Pretendemos con éste nuestro trabajo introducir una nueva métrica en las ciencias de la naturaleza, es decir, en todas aquellas que se basan en la observación y experimentación y que dependen, por tanto, de medidas, estando así sometidas al control numérico siempre, lo cual permite rechazar o admitir una hipótesis, contrastándola con la realidad. La Termodinámica, la Economía, la Biología, la Psicofísica, la Cibernética y otras muchas ciencias entran de lleno en nuestro dominio.

Queremos advertir que nuestro objeto no es dar una respuesta causal o intrínseca de la gran masa de fenómenos cuya sede es el espacio-tiempo. Ni el de interferir, por ende, con la teoria de la relatividad. Nuestra métrica aspira a *describir* tan sólo los múltiples fenómenos de la realidad en cuanto son susceptibles de representación en el plano o en el espacio euclídeo ordinario de tres o de n dimensiones. Pero, precisamente, su interés y su originalidad —si es que la tienen— radica en ello. Nuestra posición es de tendencia extremista en un solo sentido: negamos la validez o vigencia de la métrica euclídea para la explicación de los fenómenos experimentales, y ello en atención a que, como veremos en seguida, sus intrínsecas caracteristicas son totalmente inadecuadas al fin perseguido. He aquí los dos principales motivos: *a)* el método de comparación, obligadamente seguido en ello, es impropio para lo que se intenta medir: la superposición parece que debe convenir únicamente a objetos espaciales: la distancia entre dos puntos $A\ (x_1, y_1)$ $B\ (x_2, y_2)$ está expresada en geometría euclídea, como se sabe, por la fórmula:

$$d\,(A\,,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

o lo que es equivalente: $ds^2 = dx^2 + dy^2$. La propiedad que *caracteriza* a esta distancia es la de que resulta invariable respecto a cualquier rotación de ejes coordenados. Y en general que permanece invariable respecto al grupo de los movimientos. Pero ¿qué significado puede tener dicha rotación de ejes en la representación de los fenómenos naturales? Piénsese, por ejemplo, para no citar más que dos casos, en las transformaciones adiabáticas de la termodinámica o en los fenómenos de crecimiento en biología. En cambio, parece evidente que la métrica *natural* de los fenómenos naturales debe darnos *distancias* que resulten invariantes cuando efectuemos un cambio de escalas; esto es, un cambio de unidades de medida. Por ejemplo: si estudiamos el crecimiento en peso de un organismo en función del tiempo, la *distancia* entre dos puntos cualesquiera de la curva de crecimiento no deberá variar cuando expresemos el peso en kilogramos en lugar de en gramos, y el tiempo en minutos en lugar de en segundos. Esto nos lleva a admitir el postulado de que la distancia entre dos puntos representativos de un fenómeno natural debe ser invariable respecto al grupo de transformaciones: $\begin{cases} y = \beta y_1 \\ x = \alpha x_1 \end{cases}$ en donde α y β son parámetros que expresan el cambio de unidades de medida.

Naturalmente, la generalización al caso de una magnitud función de n variables independientes es obvia.

b) La elección de una determinada unidad de medida parece tan inconveniente como innecesaria. Ningún objeto natural posee propiedades de *arquetipo*. Es decir, que carece de propiedades físicas que puedan caracterizarle, y así; creemos sinceramente que no existe magnitud alguna que goce del privilegio de ser ella —y no otra— *metro*.

Intentamos, pues, realizar un nuevo análisis del concepto de medida, ya que, como justamente dice Bauer, "c'est evidemment sur la mesure que sont fondées toutes nos sciences exactes de la nature, depuis la géométrie, jusqu'à la biologie".

2. **Determinación axiomática de la métrica.** — Para construir la métrica partiremos de tres axiomas: el primero ha sido justificado en el apartado anterior. Si nos limitamos por comodidad al espacio de dos dimensiones, podemos formularlo así:

Axioma I.—*La distancia entre dos puntos $A\ (x_1,$*

$y_1)$ B (x_2, y_2) , $[z = d\ (A, B) = F\ (x_1, x_2, y_1, y_2)]$ *ha de ser una función homogénea, de grado cero en* x, y. Es decir, que:

(1) $$d\,(A\,,B) = F\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{y_1}{y_2}\right)$$

El segundo y el tercero, de acuerdo con la teoría de los espacios abstractos semimétricos, son los siguientes:

(2) AXIOMA II: $d\ (A, B) = d\ (B, A)$

(3) y AXIOMA III: $d\ (A, A) = 0$

3. Resolución de las ecuaciones funcionales que permiten determinar la forma cuadrática fundamental.

Si hacemos: $\dfrac{x_1}{x_2} = m$; $\dfrac{y_1}{y_2} = n$, en virtud de (1) y (2) se verifica:

(4) $$F(m\,,n) = F\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$$

A pesar de que la literatura relativa a ecuaciones funcionales de varias variables independientes no es muy rica, hemos resuelto la ecuación funcional (4) de la siguiente sencilla manera:

Efectuando el cambio de variables:

$$\begin{cases} u = Lm \\ v = Ln \end{cases}$$

o lo que es lo mismo: $\begin{cases} m = e^u \\ n = e^v \end{cases}$

La ecuación se convierte en:

$$F(\,e^u\,,e^v\,) = F(e^{-u}\,,\,e^{-v})$$

Es decir: $F\,(u\,,v) = F(-u\,,\,-v)$.

Esta ecuación la satisfacen todas las superficies $z = F\ (u, v)$ que sean simétricas respecto al eje z. Pero como la distancia debe ser tal que la forma diferencia: $d\ s^2 = g_{11}\ d\ x^2 + g_{22}\ d\ y^2 + 2\ g_{12}\ d\ x\ d\ y$ sea cuadrática, elegimos, de las posibles, la más sencilla, esto es:

$$z^2 = u\ v.$$

Así, pues, la distancia buscada será:

(5) $$z = d\,(A\,,B) = \sqrt{L\frac{X_1}{X_2}\,.\,L\frac{Y_1}{Y_2}}$$

Esta distancia, como es fácil comprobar, satisface a nuestros tres axiomas.

Es inmediato obtener

$$ds_2 = \frac{dx}{x}\cdot\frac{dx}{y}$$

Es decir:

(6) $$d\,s = \frac{\sqrt{dxdy}}{\sqrt{xy}}$$

4. **Geodésicas.**—Para encontrar las geodésicas del espacio de RIEMANN, definido por (6), hemos de hallar las curvas que hagan estacionaria la

$$\int ds \text{ es decir} \int \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{xy}}\,dx$$

La ecuación de EULER, del Cálculo de Variaciones, es como se sabe:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta y'\,\delta y'}\,y'' + \frac{\delta^2 F}{\delta y\,\delta y'}\,y' + \frac{\delta^2 F}{\delta x\,\delta y'} - \frac{\delta F}{\delta y} = 0$$

que aplicada a nuestro caso, nos da:

$$y'' - \frac{y'^2}{y} + \frac{y'}{x} = 0$$

o

(7) $$xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$$

cuya integración es inmediata y nos da:

8) $$y = Ax^m$$

Las diversas significaciones de la fórmula (8) son conocidas en las ciencias experimentales. Así, por ejemplo: en biología matemática, representa la ley del crecimiento relativo o allométrico (1); en termodinámica, la ley de las transformaciones adiabáticas (2); en economía, la curva de la demanda de MARSHALL (3), etc.

5. **El principio de mínimo en las ciencias experimentales.**—Análogamente al principio de HAMILTON en mecánica, debe admitirse que gran número de fenómenos en las ciencias experimentales deben obedecer a una ley de variación estacionaria del tipo:

$$\int \Phi\ ds = \text{máximo o minimo}$$

Si suponemos, por análogas razones a las expuestas en la introducción, que la función Φ es homogénea, debemos hallar los extremos de la integral:

$$\int x^m y^n \sqrt{dx\ dy}$$

Para aplicar la correspondiente ecuación de EULER, efectuemos el cambio de variables:

$$\begin{cases} v = e^y \\ u = e^x \end{cases}$$

con lo cual la expresión a extremar se convierte en:

$$\int e^{\alpha u + \beta_1 v} \sqrt{\frac{dv}{du}}\ d\,u$$

y la ecuación de EULER:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta v'}\,v'' + \frac{\delta^2 F}{\delta v\,\delta v'}\,v' + \frac{\delta^2 F}{\delta v\,\delta v'} - \frac{\delta F}{\delta v} = 0$$

se transforma en:

$$v'' + 2\beta_1\,(v')^2 - 2\alpha_1\,v' = 0$$

que, puesta en la forma:

$$v''/v' + 2\beta^1\,v' - 2\alpha_1\,v' = 0$$

da por integración inmediata:

$$v' = k_1\,x^{2\alpha_1}\,/y^{2\beta_1}$$

y teniendo en cuenta el cambio de variables antes realizado, resulta, finalmente:

(9) $$y^{2\beta_1} = C_1\,x^{2\alpha_1} + C_2$$

que comprenden, como caso particular ($C_2 = 0$), a las geodésicas antes determinadas.

Es interesante observar que, recordando la definición de la elasticidad de una función $y = f\ (x)$ (véase, por ejemplo: GALLEGO DÍAZ: Sobre la permutación de los operadores d/dx y Ex. *Gazeta de Matemática*, núm. 26), las curvas definidas por (9) pueden asimismo caracterizarse por:

(10) $$E_2\,(y) = aE_1\,(y) + b\,.$$

(a y b constantes: $E_2(y)$ es la elasticidad segunda de la función, y $E_1(y)$, la elasticidad primera).

Y en el caso particular $a = 0$ se obtiene la *curva normal de error.*

6. **Braquistóconas.**—Si se supone ahora que estudiamos la variación de un fenómeno en función del tiempo físico x y admitimos una ley del tipo $y = f(x)$, y reconocemos la existencia de un segundo "tiempo" *(tiempo biológico de* CARREL o *tiempo fisiológico* de LECONTE DE NOUY, por ejemplo), que representamos por τ, podemos escribir:

(11) $$\frac{ds}{d\tau} = v(x, y)$$

siendo v la velocidad de crecimiento en función del tiempo físico.

Para hallar la braquistócrona, hemos de extremar la integral:

$$\tau = \int \frac{ds}{v(x, y)}$$

Pueden hacerse varias hipótesis sobre la naturaleza de la función $v(x, y)$.

Si suponemos que es homogénea, de grado cero, por ejemplo:

$$v = k\sqrt{\frac{a-y}{x}}$$

se obtiene:

$$\tau = \int \frac{\sqrt{x'}\, dy}{k\sqrt{y(a-y)}}$$

y resuelta la correspondiente ecuación de EULER, resulta:

(12) $$y = \frac{a}{1 + b \cdot c^x}$$

que es la ecuación de la conocida curva *logística,* encontrada empíricamente por millares de observadores y que nosotros hemos obtenido como *braquistócrona* de nuestro espacio, resultando así una sorprendente analogía entre biología y óptica, que sería interesante profundizar más.

7. **Aplicaciones a la biología y a la psicofísica. Nueva curva de crecimiento.**—Finalmente, si además de exigir que la *distancia* sea independiente de las unidades de medida, admitimos que la velocidad de crecimiento v es función de la elasticidad E, y, por tanto, independiente del cambio de unidades, y adoptamos la forma más sencilla $v = E$, resulta, después de integrada la correspondiente ecuación de EULER:

(13) $$y = \frac{ax^k}{1 + bx^k}$$

cuyo gráfico es en determinados casos muy parecido al de la curva logística.

II

EL PRINCIPIO DE LA MINIMA ACCION ECONOMICA

Precisada en las anteriores cuartillas la forma de la función ofelimidad (1) y adoptada la métrica correspondiente al espacio de Riemann que acabamos de indicar, nuestro principio variacional básico, que llamamos de la *mínima acción económica,* se puede enunciar así:

De todas las trayectorias posibles, desde A *a* B, *que puede recorrer un punto móvil (representativo en el espacio de* 2n + 1 *dimensiones de una cierta configuración económica), sigue aquella para la cual la integral de la ofelimidad a lo largo de la misma, es decir* $\int \Omega\, ds$., *es mínima.*

La importancia de nuestro principio es doble: de un lado, permite abordar con rigor y por vez primera en la economía las ecuaciones de la dinámica económica; de otro, sirve para determinar, como veremos más tarde, la ofelimidad de un individuo utilizando los datos estadísticos de sus consumos a lo largo del tiempo.

Determinación de las curvas de demanda y oferta.

Aplicando nuestro principio de la *mínima acción económica,* podremos hallar las ecuaciones de todas las posibles curvas de demanda y oferta, ya que unas y otras son *trayectorias* del *espacio económico* considerado.

En efecto, la cuestión se reduce a determinar los valores estacionarios de la integral $\int \Omega ds$, en donde, según demostramos antes, y supuesto que sólo consideramos una mercancía x y su precio y en el instante t, se verifica:

$$\Omega = K\, x^m\, y^n\, t^n .$$

Consideramos dos casos: *a)* que el tiempo sea constante, y *b)* que varíe el tiempo. En el primer caso será:

$$ds = \sqrt{\frac{dx}{x} \cdot \frac{dy}{y}}$$

y en el segundo:

$$ds = \sqrt{\frac{dx}{x} \cdot \frac{dy}{y} + \frac{dt^2}{t^2}}$$

$$\int k x^m\, y^n\, t^p \frac{\sqrt{dx\, dy}}{\sqrt{xy}}$$

es decir:

$$\int x^M y^N \sqrt{y'}\, dx.$$

Formemos la correspondiente ecuación de EULER ($M = m - 1/2$, $N = n - 1/2$):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'\, \partial y'} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

de donde:

$$F = x^M y^N \sqrt{y'}$$

se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\ M x^{M-1} y^N \sqrt{y'} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}\ N x^M y^{N-1} \sqrt{y'}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{x^M y^N}{2\sqrt{y'}} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'\, \partial y'} = -\frac{x^M y^N}{4y' \sqrt{y'}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} = \frac{N x^M y^{N-1}}{2\sqrt{y'}} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y'} = \frac{M x^{M-1} y^N}{2\sqrt{y'}}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior de EULER:

$$xyy'' + 2Nx(y')^2 - 2Myy' = 0.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, efectuemos el cambio:

$$y = e^t \qquad y' = e^t t' \qquad y'' = e^t[(t')^2 + t'']$$

resulta:

$$t''x + (2N+1)(t')^2x - 2Mt' = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$t'' - \frac{2Mt'}{x} = -(2N+1)(t')^2$$

y efectuando el nuevo cambio:

$$t' = 1/u \qquad t'' = -u'/u^2$$

se obtiene:

$$u'x + 2Mu - (2N+1)x = 0$$

ecuación diferencial lineal que resolvemos por el conocido método de variación de constantes:

$$u' + \frac{2Mu}{x} = 0 \qquad u'/u = 2M/x \qquad Lu = L\frac{c}{x^{2M}}$$

$$u = \frac{c}{x^{2M}} \qquad u' = \frac{dc}{dx}\cdot\frac{1}{x^{2M}} - \frac{2Mc}{x^{2M+1}}.$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{dc}{dx} = (2N+1)x^{2M}$$

que por integración inmediata da:

$$c = \frac{2N+1}{2M+1}x^{2M-1} + c'.$$

Por tanto:

$$u = \frac{2N+1}{2M+1}x + \frac{c'}{x^{2M}}$$

de donde:

$$\frac{1}{u} = \frac{(2M+1)x^{2M}}{(2N+1)x^{2M+1} + c'(2M+1)}$$

y teniendo en cuenta que $1/u = t' = dt/dx$, resulta:

$$t = \int\frac{(2M+1)x^{2M}dx}{(2N+1)x^{2M+1} + c'(2M+1)}$$

o sea:

$$t - \frac{1}{2N+1}L[(2N+1)x^{2M+1} + c'(2M+1)] + Lc_1$$

y como $y = e^t$, resulta finalmente:

$$y = k[(2N+1)x^{2M+1} + c'(2M+1)]^{\frac{1}{2N+1}}$$

que es la ecuación de las curvas teóricas de demanda y de oferta.

Podíamos haber resuelto la ecuación diferencial por un procedimiento más rápido y elegante, como a continuación indicamos, y que nos sirve de comprobación del método precedente.

Basta dividir los dos miembros de la ecuación por y'; así resulta la ecuación:

$$\frac{y''}{y'} + 2N\frac{y'}{y} = \frac{2M}{x}$$

que puede ponerse en la forma:

$$Ly' = 2MLx - 2NLy + Lc_1$$

que da por integración inmediata:

$$y' = \frac{cx^{2M}}{y^{2N}}$$

y volviendo a integrar, resulta finalmente:

$$y^{2N+1} = c_1x^{2M+1} + c'_1$$

que es idéntica, salvo el cambio de constantes, a la ecuación antes obtenida y que llamaremos *ecuación canónica de las curvas de demanda y oferta.*

Vamos a integrar, utilizando la elasticidad:

La expresión a extremar es:

$$\int x^M y^N \sqrt{dx\,dy}.$$

Efectuemos el cambio de función y variable independiente:

$$\begin{cases} u = Lx \\ v = Ly \end{cases} \qquad \begin{cases} x = e^u \\ y = e^v \end{cases}$$

diferenciando, resulta:

$$dx = e^u du \qquad dy = e^v dv$$

y sustituyendo:

$$\int e^{Mu+Nv}\sqrt{e^{u+v}du\,dv} = \int e^{u(M+1/2)+v(N+1/2)}du\,dv$$

y haciendo:

$$M + 1/2 = \beta \qquad N + 1/2 = \alpha \qquad F = e^{\alpha v \beta u}\sqrt{v'}$$

la ecuación de EULER es:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta v'\delta v'}v'' + \frac{\delta^2 F}{\delta v\,\delta v'}v' + \frac{\delta^2 F}{\delta u\,\delta v'} - \frac{\delta F}{\delta v} = 0$$

y como:

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \beta e^{\alpha v + \beta u}\sqrt{v'} \qquad \frac{\delta F}{\delta v} = \alpha e^{\alpha v + \beta u}\sqrt{v'}$$

$$\frac{\delta F}{\delta v'} = e^{\alpha v + \beta u}\frac{1}{2\sqrt{v'}}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta v'\delta v'} = -\frac{1}{4}e^{\alpha v + \beta u}\frac{1}{v'\sqrt{v'}}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta v'\delta u} = \beta e^{\alpha v + \beta u}\frac{1}{2\sqrt{v'}} \qquad \frac{\delta F}{\delta v'\delta v'} = \alpha e^{\alpha v + \beta u}\frac{1}{2\sqrt{v'}}$$

La ecuación de EULER es:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta v'\delta v'}v'' + \frac{\delta^2 F}{\delta v\,\delta v'}v' + \frac{\delta^2 F}{\delta u\,\delta v'} - \frac{\delta F}{\delta v} = 0$$

o sea, simplificando:

$$v'' + 2\alpha(v')^2 - 2\beta v' = 0$$

que se puede poner en la forma siguiente al dividi por v':

$$\frac{v''}{v'} + 2\alpha v' - 2\beta = 0$$

y por integración inmediata:

$$v' = e^{2\beta u - 2\alpha v + k}$$

$$Lv' + 2\alpha v = 2\beta u + k$$

es decir:

$$v' = e^{(2M+1)Lx - (2N+1)Ly + k}$$

$$v' = k_1\frac{x^{2M+1}}{y^{2N+1}}$$

Pero teniendo en cuenta el cambio de variab realizado, v' = elasticidad de y, luego:

$$E(y)\,k_1\frac{x^{2M+1}}{y^{2N+1}}$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$y^{2N+1} = c_1 x^{2M+1} + c'_1.$$

que es la ecuación canónica de las curvas de demanda y oferta.

III

OBSERVACIONES Y CONSECUENCIAS

I.—En general, las curvas de oferta y demanda dependen de cuatro parámetros, M, N, c_1 y c'_1. Para determinarlos, será preciso conocer *dos* parejas de puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

II.—La determinación de M y N por medio de los métodos de la Estadística Matemática nos lleva al conocimiento y medida de la ofelimidad. Como se sabe, hasta la fecha, y exceptuando el método de FRISCH, conocido con el nombre de *método de los isoquantas* no era posible medir la ofelimidad. Obsérvese además que el método de las isoquantas sólo es válido para medir la utilidad marginal de la moneda.

III.—Como la elasticidad de nuestras curvas vale:

$$E(y) = y' \frac{x}{y} = c \frac{x^{2M+1}}{y^{2N+1}}$$

para que sea constante, tiene que ocurrir:

$$y^{2N+1} = k x^{2M+1}$$

y entonces $c'_1 = 0$. Lo cual nos indica que las curvas particulares así obtenidas coinciden con las famosas curvas de MARSHALL de la demanda.

IV.—Si se suponen conocidos los valores de M y N, las curvas forman una *red*, dependiendo sólo de dos parámetros; luego para fijarlos, bastará conocer *dos* puntos.

V.—La ecuación fundamental carece de sentido si $M = -\,^1/_2$, $N = -\,^3/_2$. Pero en ese caso la ecuación diferencial de que partimos se convierte en:

$$x y y'' - x (y')^2 + y y' = 0.$$

Recordando que la elasticidad valía $E = y'x/y$ y suponiendo que sea constante e igual a k, hallemos la ecuación diferencial a que satisfacen todas las curvas de elasticidad constante. Derivando, resulta:

$$y'' \frac{x}{y} + y' \frac{y - x y'}{y} = 0$$

$$x y y'' + y y' - x (y')^2 = 0\,.$$

Es decir, la misma ecuación diferencial antes encontrada, lo cual nos indica que en este caso, son soluciones de la extremal de:

$$\int \sqrt{\frac{dx\,dy}{xy}} = \int ds$$

todas las curvas de elasticidad constante o *isoelásticas*. O, dicho de otro modo, *las curvas isoelásticas son las geodésicas del espacio de Riemann correspondiente (espacio económico).*

VI.—La variabilidad de los parámetros permite rigurosamente los *shiftings* o transposiciones corrientemente observadas en las curvas de demanda.

La forma de las distintas curvas comprendidas en la ecuación es muy diversa, pero entre ellas pueden encontrarse de la forma que indicamos y que concuerdan con las representadas por el profesor ALLEN, para la demanda de un artículo de primera necesidad en un mercado reducido y en uno extenso, y para un artículo que admite sustitutivos.

Claro es que de las curvas que dibujamos sólo tendrán significación económica las partes de las mismas comprendidas en el primer cuadrante.

Determinación de las curvas históricas de la dinámica económica.

Pasemos ahora al estudio del caso *b)*, en el cual suponemos el tiempo variable. Empecemos por el caso más sencillo, en que sólo consideramos una cantidad de mercancía y, su precio z y el tiempo x. Según nuestro principio de *mínima acción económica*, las trayectorias que nos interesa determinar serán las curvas extremales de $\int \Omega \, ds$, que teniendo en cuenta que:

$$\Omega = k x^m y^n z^p$$

y que:

$$ds = \sqrt{\frac{dy\,dz}{yz} + \frac{dx^2}{x^2}}$$

se convierten en:

$$k \int x^m y^n z^p \sqrt{\frac{dy\,dz}{yz} + \frac{dx^2}{x^2}}.$$

Hagamos el cambio de variables $x = e^w$, $y = e^u$ $z = e^v$. La expresión que hay que extremar es:

$$\int e^{m + n u w + p v} \sqrt{du\,dv + dw^2}$$

y poniendo por comodidad de escritura:

$$F = e^{mw + nu + pv} \sqrt{u' v' + 1}$$

$$\Delta = mw + nu + pv$$

$$\theta = u' v' + 1$$

y teniendo en cuenta que las correspondientes ecuaciones de EULER son:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial v'} u'' + \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial v'} v'' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v'} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u'} v' + \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial u'} - \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial v'} u'' + \frac{\partial^2 F}{\partial v' \partial v'} v'' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v'} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial v'} v' + \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

y sustituyendo en esta ecuaciones los valores:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta u'} e^{\Delta} \frac{v'}{2\theta} \qquad \frac{\delta^2 F}{\delta u'\,\delta u'} = -e^{\Delta} \frac{(v')^2}{4} \frac{1}{(u'v'+1)^{3/2}}$$

$$\frac{\delta F}{\delta v'} = e^{\Delta} \frac{u'}{2\theta} \qquad \frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta v'} = e^{\Delta} \frac{(u')^2}{4} \frac{1}{(u'v'+1)^{3/2}}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta u'\,\delta v'} = \frac{e^{\Delta}}{4} \frac{u'v'+2}{(u'v'+1)^{3/2}} \qquad \frac{\delta F}{\delta u} = ne^{\Delta}\theta$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta u'} = \frac{v'}{2\theta} ne^{\Delta} \qquad \frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta v} = \frac{u'}{2\theta} pe^{\Delta} \qquad \frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta w} = \frac{v'}{2\theta} me^{\Delta}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta u} = \frac{u'}{2\theta} ne^{\Delta} \quad \frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta v} = \frac{u'}{2\theta} pe^{\Delta} \quad \frac{\delta^2 F}{\delta v'\,\delta w} =$$

$$= \frac{u'}{2\theta} me^{\Delta} \quad \frac{\delta F}{\delta v} = pe^{\Delta}\,\theta$$

resulta:

$$-(v')^2 u'' + (u'v'+2)\,v'' + 2\,nu'v'\,(u'v'+1) +$$
$$+ 2\,p\,(u')^2\,(u'v'+1) + 2\,m\,v'(u'v'+1) - 4n\,(u'v'+1)^2 = 0$$

$$(2+u'v')\,u'' - (u')^2 v'' + 2\,(u')^2 n\,(u'v'+1) +$$
$$+ 2pu'v'\,(u'v'+1) + 2\,m\,u'\,(u'v'+1) - 4p\,(u'v'+1)^2 = 0$$

y multiplicando la primera por $2 + u'v'$ y la segunda por $(v')^2$, y sumando y despejando v'', y haciendo lo análogo para despejar u'', resulta finalmente, después de sencillas simplificaciones, el sistema:

$$v'' + (1+u'v')\,m\,v' - 2n) = 0$$
$$u'' + (1+u'v')\,m\,u' - 2p) = 0$$

y haciendo $v' = \alpha$, $u' = \beta$, se convierte en:

$$\alpha' + (1+\alpha\,\beta)\,(m\,\alpha - 2n) = 0$$
$$\beta' + (1+\alpha\,\beta)\,(m\,\beta - 2p = 0$$

que es el que hay que resolver. Para ello, dividiendo una por otra, queda:

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{m\,\alpha - 2\,n}{m\,\beta - 2\,p}$$

o sea:

$$\frac{\alpha'}{m\,\alpha - 2\,n} = \frac{\beta'}{m\,\beta - 2\,p}$$

lo cual nos permite obtener la integral primera:

$$\mathrm{L}\,(m\,\alpha - 2\,n) = \mathrm{L}\,(m\,\beta - 2p) + \mathrm{L}k_1$$
$$m\,\alpha - 2\,n = k\,(m\,\beta - 2p)$$
$$\alpha = \frac{k\,(m\,\beta - 2\,p) + 2\,n}{m}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación del anterior sistema:

$$\beta' + \left[\, 1 + \beta\,\frac{k\,(m\,\beta - 2\,p) + 2\,n}{m} \,\right] (m\,\beta - 2p) = 0$$

$$\beta' = (2p - m\,\beta)\,\frac{m + \beta\,k\,(m\,\beta - 2p) + 2\,n}{m}$$

$$\frac{d\,\beta}{(2p - m\,\beta)\,[k\,m\,\beta^2 + 2\,\beta\,(n - p\,k) + m} = \frac{dw}{m}$$

quedando ya reducido el problema a cuadraturas. La discusión general no la hacemos por no alargar excesivamente la conferencia.

Una vez hallado el valor de β en función de w, nos basta recordar que:

$$\beta = \frac{du}{dw}$$

luego si suponemos $\beta = \psi\,(w)$, tendremos:

$$\frac{du}{dw} = \psi\,(w)$$

y por tanto:

$$u = \int \psi\,(w)\,dw + k_1 \quad u = F_1\,(w)$$
$$\mathrm{L}\,y = F_1\,(\mathrm{L}x) \qquad y = e^{\,F_1\,(Lx)}$$

y análogamente para las α', α, v, z, hallándose finalmente:

$$z = e^{\,F_2\,(Lx)}.$$