MENTIRAS SOBRE EL MENTIROSO†
(*Lies about the Liar*)

Andreas BECK*

Manuscrito recibido: 1996.6.10.
Versión final: 1997.4.7.
* Planetarium - Sternwarte, A-5742 Wald in Pinzgau, Königsleiten 29, Austria.
BIBLID [ISSN 0495-4548 (1997) Vol. 12: No 30; p. 513-550]

RESUMEN: La construcción de un lenguaje formal en el que sea posible llevar a cabo formulaciones sobre la verdad de los enunciados del propio lenguaje se ha revelado en extremo problemático, puesto que los llamados enunciados del mentiroso conducen a paradojas. En su libro *The Liar*, Barwise y Etchemendy afirman haber solucionado el problema mediante su *semántica russelliana* y *semántica austiniana*. Sin embargo, en este artículo va a ser demostrado que la *semántica russelliana* fracasa en solucionar el problema por las mismas razones que planteamientos clásicos suelen fracasar, y que la *semántica austiniana* fracasa totalmente puesto que esta semántica no contiene ningún predicado veritativo.

Descriptores: verdad, paradoja del Mentiroso, auto-referencia, teoría de situaciones, semántica russelliana, semántica austiniana.

ABSTRACT: *Formal languages with truth predicates are seriously affected by paradoxes in the form of Liar sentences. In their best-seller* The Liar, *Barwise and Etchemendy achieved to convince a respectable part of the philosophical world that they have solved this problem by means of their* Russellian- *and* Austinian semantics. *The aim of this paper is to stop the rumour that the Liar paradox is solved. It will be shown that* Russellian semantics *fails because of the same reasons classical approaches use to fail, and that* Austinian semantics *fails totally since it contains no truth predicate, i.e. in Austinian semantics it is generally impossible to express the truth or falsehood of a proposition.*

Keywords: *truth, Liar paradox, self-reference, situation theory, Russellian semantics, Austinian semantics.*

Ehrgeiz ist der Tod des Denkens
L. Wittgenstein

1. Introducción

La construcción de un lenguaje formal en el que sea posible llevar a cabo formulaciones sobre la verdad de fórmulas del propio lenguaje exige incorporar el concepto de verdad como expresión predicativa al alfabeto de la sintaxis. Este procedimiento se ha revelado en extremo problemático, puesto que las llamadas *oraciones del mentiroso* conducen a paradojas. Los planteamientos clásicos para la solución de este problema son, por un lado, las teorías con huecos veri-falsativos *(truth-gap-theories)*; i.e. semánticas con una asignación parcial de valores que no atribuyen a las oraciones paradójicas ni el predicado *verdadero* ni el predicado *falso*; por otro lado, los *planteamientos sintácticos*; i.e. lenguajes en los que las oraciones paradójicas quedan excluidas sobre la base de restricciones sintácticas. Mar (1985) consiguió mostrar que la capacidad expresiva de una teoría con huecos veri-falsativos es necesariamente demasiado débil como para poder alcanzar una verdadera solución del problema. Así pues, la solución más satisfactoria hasta el momento era de carácter sintáctico: la teoría de los niveles de lenguaje de Tarski.

La teoría de situaciones constituye una nueva posibilidad de aproximación al problema de las paradojas. Los desarrollos iniciales de este enfoque han sido efectuados por Barwise y Etchemendy (1987). En el presente trabajo sostenemos que también en el enfoque situationista queda sin resolver el problema, puesto que no se han dejado de usar relaciones veritativas clásicas para evaluar proposiciones.

1.1. Definición de paradoja

La oración que se designa como Mentiroso:

$$ß_{\text{Mentiroso}}\text{: } ß_{\text{Mentiroso}} \textit{ es falso}$$

formula únicamente su propia falsedad. Al tratar de decidir si el Mentiroso es o no es una oración verdadera se comprueba que el Mentiroso es verdadero si y sólo si es falso. Esta situación, se puede expresar en un lenguaje formal L con $ß_{\text{Mentiroso}} \in L$ y una relación veritativa VER: L×{verdadero, falso} del siguiente modo:

$$\text{VER}(ß_{\text{Mentiroso}}, \text{verdadero}) \quad \text{si y sólo si} \quad \text{VER}(ß_{\text{Mentiroso}}, \text{falso})$$

Definición. Sea L un lenguaje formal, ß una fórmula de L y VER: L×{verdadero, falso} una relación veritativa que conecta cada fórmula ß con un valor de verdad. Entonces ß se denomina *semánticamente paradójico* si vale:

$$\text{VER}(ß, \text{verdadero}) \quad \text{si y sólo si} \quad \text{VER}(ß, \text{falso})$$

Observación. La relación VER es una función veritativa si en L no hay ninguna fórmula paradójica.

1.2. Planteamientos clásicos

Empezamos con un resumen breve de las razones por las que los planteamientos clásicos no han llegado a una solución satisfactoria de la paradoja. Una vista amplia y bastante completa de todos los planteamientos se puede encontrar en Kirkham (1992) y Brendel (1992).

1.2.1. La teoría de los niveles de lenguaje de Tarski

La teoría de los niveles de lenguaje de Tarski (1935) establece una solución sintáctica del Mentiroso. No se busca una función veritativa apropiada sino que el Mentiroso queda excluido del lenguaje sobre la base de su naturaleza sintáctica. En esta teoría no hay un lenguaje universal sino una jerarquía infinita de lenguajes $L = (L_0, L_1, L_2, ...)$, donde L_0 es un lenguaje objeto puro y L_n designa para todos los números naturales $n > 0$ un metalenguaje referente a L_{n-1}. En L no existe ningún concepto universal de verdad sino que cada nivel de lenguaje L_n con $n > 0$ posee su propio predicado de verdad *verdadero*$_n$*(ß)* y *falso*$_n$*(ß)*, donde estos predicados están definidos sólo para fórmulas ß de niveles de lenguaje inferiores $L_0, ..., L_{n-1}$. De este modo, el Mentiroso no constituye ninguna fórmula admisible en L, pues: Supóngase que el Mentiroso *ß: ß es falso* es una fórmula en L. Luego hay un $n \in N$ tal que el Mentiroso es un elemento del nivel de lenguaje L_n y por consiguiente *falso*$_n$ constituye su predicado de verdad aplicado. Dado que la fórmula aplica este predicado a sí mismo, es decir, se aplica una fórmula del nivel n, no puede ser sin embargo un elemento de L_n. Se sigue de esta contradicción que el Mentiroso no constituye una fórmula admisible en L.

Lo más inconveniente de esta solución radica en la imposibilidad de un nivel de lenguaje supremo, ya que para cada nivel de lenguaje puede señalarse uno superior. Ello implica que, segœn esta teoría, no pueden llevarse a cabo formulaciones relativas a todos los niveles de lenguaje de L. Por ejemplo, la fórmula *El Mentiroso no es una fórmula admisible en L* no es una fórmula admisible en L. En otras palabras, se sigue de la teoría de los niveles de lenguaje de Tarski que los teoremas de la teoría de los niveles de lenguaje no constituyen fórmulas bien formadas y por tanto carecen de sentido.

Los planteamientos sintácticos, como el de Tarski, se caracterizan por intentar resolver la paradoja del Mentiroso mediante una limitación del concepto de verdad de tal modo que no para cualquier fórmula ß del lenguaje L, *verdadero(ß) / falso(ß)* son fórmulas de L. Sin embargo, no es posible reconocer una fórmula como paradójica por el simple escrutinio de estructura sintáctica (cf. Kripke 1975), por lo cual es imposible excluir por una limitación sintáctica únicamente tales fórmulas que serían paradójicas si fueran admisibles en L. Para asegurar la consistencia de tales lenguajes hay que limitar los predicados veritativos tan estrictamente que muchas fórmulas quedan excluidas del lenguaje aunque no causen ninguna paradoja.

Varios lógicos intentaron superar esta inconveniencia con planteamientos semánticos donde para cada fórmula ß de L, también *verdadero(ß) / falso(ß)* son fórmulas de L. Así las fórmulas paradójicas son excluidas semánticamente por una relación veritativa parcial VER: Lx{verdadero, falso} que no asigna un valor de verdad a las fórmulas paradójicas. Sin embargo, Mar demostró que de esta manera tampoco se puede superar el problema.

1.2.2. La crítica de Mar a los intentos de solución semánticos

En su libro *Liars, Truth-Gaps, and Truth*, Mar publicó en 1985 una crítica fundamental a los ensayos de solución de la paradoja del mentiroso que operaban con huecos veri-falsativos. En tales semánticas, la asignación de valores que atribuye a las fórmulas del lenguaje uno de los valores *verdadero* o *falso* es sólo una función veritativa parcial. Ello quiere decir que la función veritativa no abarca la totalidad de las fórmulas bien formadas. A las fórmulas que escapan a la función se les atribuye el 'valorí *indeterminado*. Mar muestra que con este tipo de método sólo cabe resolver aparentemente la paradoja del mentiroso, ya que la semántica que se origina tiene inevitablemente tal debilidad expresiva que los resultados centrales de esta semántica no pueden ser fórmulados en la semántica sin resultar paradójicos. Estas fórmulas no formulables han sido llamadas por Mar *Revenge Problems*.

La formulación central del Mentiroso es la formulación de su propia no-verdad. Si se modifica la semántica hasta abandonar la lógica clásica donde la falsedad equivale a la no-verdad, el Mentiroso ya no dice en realidad *ß: ß es falso*. Habría que adaptarlo a los valores empleados en la nueva semántica. Mar demostró que el Mentiroso así reformulado (denominado *Mentiroso reforzado*) se muestra nuevamente como paradójico en la semántica. Este Mentiroso reforzado puede considerarse un caso especial del *Revenge*

Problem, pues su existencia tiene como consecuencia que el concepto de no-verdad no pueda formularse en la semántica sin dar lugar a paradojas.

En suma, Mar concluye que el Mentiroso no es resoluble semánticamente. Comparando las teorías con huecos veri-falsativos con la teoría de los niveles de lenguaje de Tarski, escribe:[1]

> (...) Tarski's solution to the semantical antinomies has not been superseded by the truth-gap theories. Although the liar paradox has apparently disappeared from various formal object languages constructed by Martin, van Fraassen, and Kripke by the use of truth-value gaps, it turns out that, like the Cashire Cat, the liar's grin remains.

1.2.3. Lenguajes veritativamente cerrados

Ahora bien, ni con una limitación sintáctica (de los predicados veritativos) ni con una restricción semántica (de la función veritativa) se puede llegar a una solución satisfactoria. Esta resulta solamente posible en un lenguaje veritativamente cerrado, es decir en un lenguaje L donde puede referirse dentro de la semántica a todos los conceptos de verdad de la teoría sobre el lenguaje.

Definición. Sea L un lenguaje. Entonces L es *veritativamente cerrado* si existen dos relaciones monádicas *verdadero(_)*.*falso(_)* en el sintaxis de L y una relación veritativa VER: Lx{verdadero,falso} que cumplen las siguientes condiciones:

i) Para cada fórmula ß de L, *verdadero(ß)* / *falso(ß)* son fórmulas de L.
ii) VER es una función total sobre L, i.e. si ß es una fórmula de L, entonces o VER(ß,verdadero) o VER(ß,falso).

Con este tipo de lenguaje Barwise y Etchemendy han intentado realizar una solución teórica-situacional del Mentiroso:

2. El planteamiento de solución de Barwise y Etchemendy

En la teoría de situaciones ocupa un lugar central la particularidad de que los portadores de valores de verdad ya no son las fórmulas sino las proposiciones, donde con el término *proposición* se designa *una declaración sobre el mundo, hecho por una fórmula en* *una situación*.[2] Fórmulas distintas pueden expresar en una situación la misma proposición en tanto que la misma fórmula empleada en situaciones diferentes puede expresar igualmente proposiciones distintas. Se obtiene de este modo una semántica de doble nivel, en la que una fórmula se representa primeramente en una proposición y a continuación se asigna a esta proposición un valor de verdad que depende de la situación.

2.1. El lenguaje formal £

Las semánticas consideradas por Barwise y Etchemendy están basadas en un lenguaje £ que consta de:

> los símbolos de constantes *Claire*, *Max*, *2-Trébol*, *3-Trébol*, ..., *R-Pica*, *A-Pica*,
> los símbolos de relación diádicos *Tiene*, *Cree*,
> el símbolo de relación monádico *Verdadero*,
> las conectivas lógicas $\wedge$, $\vee$, $\neg$,
> los pronombres demostrativos proposicionales *esto*, *aquello*$_1$, *aquello*$_2$, ...
> y el indicador de dominio $\downarrow$.

Este indicador se emplea para señalar el ámbito al que se refiere el pronombre demostrativo auto-referencial *esto*.

Fórmulas atómicas* de £* son formulaciones de la forma:

> *(a Tiene c)*, *(a Cree d)*, *(Verdadero d)*

con $a \in$ {*Claire*, *Max*}, $c \in$ {*2-Trébol*, ..., *A-Pica*} y $d \in$ {*esto*, *aquello*$_1$, *aquello*$_2$, ...}.

La *clase de las fórmulas** £* se define como la clase menor que contiene las fórmulas* atómicas de £* y queda delimitada con las reglas siguientes:

> Si ß$_1$ y ß$_2$ son fórmulas*, también lo son *(*ß$_1 \wedge$ ß$_2$*)*, (ß$_1 \vee$ ß$_2$*)*.
> Si ß es una fórmula*, también lo son *(Verdadero* ß*)*, *(*$\neg$ ß*)* y *(b Cree* ß*)*,
> con $b \in$ {*Claire*, *Max*}.
> Si ß es una fórmula*, también lo es $\downarrow$ß.

Cada *esto* que ocurre en una fórmula* necesita un indicador ↓ que asigne su ámbito de auto-referencia.

El *lenguaje* $\pounds$ *de todas las fórmulas* sea la subclase mas grande de $\pounds^*$ tal que:

> Si ß ∈ $\pounds$, entonces ß ∈ $\pounds^*$ y en ß no hay ningún *esto* cuyo ámbito no es señalado por un indicador ↓.

Ejemplo

(1) La oración *Max tiene el 3 de tréboles o esto es verdadero* puede leerse de dos maneras. El pronombre demostrativo *esto* puede referirse a *Max tiene el 3 de tréboles o esto es verdadero* o sólo a la fórmula parcial *esto es verdadero*. Con ayuda del indicador ↓ pueden formalizarse de modo unívoco estos dos tipos de lectura

> (1.1) ↓*((Max Tiene 3-Trébol)* ∨ *Verdadero(esto))*
> (1.2) *(Max Tiene 3-Trébol)* ∨↓ *Verdadero(esto)*

(2) El Mentiroso *ß: ß es falso* se fórmula ↓¬*Verdadero(esto)*

2.2. La teoría de conjuntos circulares

Para poder representar todas las proposiciones expresadas por fórmulas de $\pounds$ como conjuntos, es preciso un universo de conjuntos en el que sean admisibles conjuntos que se contengan a sí mismos. Por ello, Barwise y Etchemendy emplean una ampliación del universo de conjuntos de Zermelo-Fraenkel desarrollada por Aczel (1988). En ese universo, el Axioma de Fundación fue reemplazado adecuadamente de modo tal que un conjunto pueda contenerse a si mismo. Se puede demostrar que cada objeto del universo de conjuntos de Zermelo-Fraenkel también pertenece al universo de conjuntos de Aczel. Por otra parte, todos los objetos circulares (es decir, objetos m, con $m \in m_1 \in \ldots \in m_n \in m$) representan objetos del universo de conjuntos de Aczel que no pertenecen al universo de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Los objetos del universo de conjuntos de Aczel los designamos por *conjuntos*$_A$. En esta teoría vale el siguiente resultado:

Lema de solución. Todo sistema finito de ecuaciones de conjuntos$_A$ posee una y sólo una solución.

Con ese lema estamos en condiciones de poder representar también todas las proposiciones expresadas por fórmulas auto-referenciales del lenguaje $\mathcal{L}$ como conjuntos$_A$.

2.3. La semántica russelliana: Introducción y crítica

2.3.1 Proposiciones russellianas

Considérese el universo de conjuntos$_A$ con los elementos primitivos

Claire, Max, 2-Trébol, 3-Trébol, ..., R-Pica, A-Pica, Tiene, Cree, Verdadera, $\neg$, $\wedge$, $\vee$

Dentro de este universo, definiremos la clase de todas las proposiciones russellianas del modo siguiente a modo de un n-tuplo ordenado.

Definición

1) Sea *PreRUSSELL-PROP* la clase más grande tal que:

si $p \in$ PreRUSSELL-PROP entonces tiene p una de las representaciones siguientes:

i) [a Tiene c], [a Cree q], [Verdadera q]

con $a \in$ {Claire, Max}, $c \in$ {2-Trébol, ..., A-Pica} y $q \in$ PreRUSSELL-PROP

ii) $[\wedge X]$, $[\vee X]$ con $X \subseteq$ PreRUSSELL-PROP

iii) $\neg q$ con $q \in$ PreRUSSELL-PROP

donde la negación $\neg$ se define de la manera siguiente:

$$\neg[\wedge X] := [\vee \{\neg q \,/\, q \in X\}]$$
$$\neg[\vee X] := [\wedge \{\neg q \,/\, q \in X\}]$$

y $\neg\neg q := q$.

(2) Si p es un n-tuplo ordenado de tipo i) o su negación, entonces p se denomina *atómica.*

(3) Sea *RUSSELL-PROP* la subclase más grande de PreRUSSELL-PROP tal que:

Si $p \in$ RUSSELL-PROP entonces p puede descomponerse en proposiciones atómicas en un número finito de pasos. Los elementos p de esta clase se denominan *proposiciones russellianas.*

Ejemplo

(1) [Max Tiene 2-Trébol] es una proposición russelliana atómica.
(2) p = [Max Cree p]$\wedge$p es elemento de PreRUSSELL-PROP, pero no de RUSSELL-PROP.
(3) *(Mentiroso russelliano)* p = $\neg$[Verdadera p] es una proposición russelliana.[3]

2.3.2. Semántica russelliana

Sea ß una fórmula de $\pounds$ y *esto*, *aquello*$_1$, *aquello*$_2$, ... los pronombres demostrativos que ocurren en ß. A ß se asigna por medio de una aplicación Val una proposición russelliana con parámetros p(P,Q_1,Q_2,...) donde los parámetros P,Q_1,Q_2,... corresponden a los pronombres demostrativos *esto*, *aquello*$_1$, *aquello*$_2$, ... de ß.

Definición. Definimos la aplicación *Val* de $\pounds$ según RUSSELL-PROP(P,Q_1,Q_2,...) mediante:

- Val(*a Tiene x*) = [a Tiene x]
- Val(*a Cree aquello*$_i$) = [a Cree Q_i]
- Val(*a Cree esto*) = [a Cree P]
- Val(*a Cree* ß) = [a Cree Val(ß)]
- Val(*Verdadero aquello*$_i$) = [Verdadera Q_i]
- Val(*Verdadero esto*) = [Verdadera P]
- Val(*Verdadero* ß) = [Verdadera Val(ß)]
- Val(ß$_1$ $\wedge$ ß$_2$) = [$\wedge$ {Val(ß$_1$), Val(ß$_2$)}]
- Val(ß$_1$ $\vee$ ß$_2$) = [$\vee$ {Val(ß$_1$), Val(ß$_2$)}]
- Val($\neg$ß) = $\neg$Val(ß)
- Val($\downarrow$ß) = la solución unívoca p de la ecuación P = Val(ß) (P,Q_1,Q_2,...)

Sea ß una fórmula de $\pounds$. Luego se asignan a todos los *aquello*$_i$ en ß proposiciones russellianas q_i mediante una *función de contexto*

c:{*aquello*$_i$ | *aquello*$_i$ figura en ß} $\longrightarrow$ {q_i | q_i proposición russelliana}.

Si ß contiene los pronombres demostrativos proposicionales *aquello*$_1$, ..., *aquello*$_n$ entonces sea *la proposición russelliana expresada por ß en el contexto c*:

Val(ß)(c(*aquello*$_1$), ...,c(*aquello*$_n$)).

En Val(ß)(c(*aquello*$_1$), ...,c(*aquello*$_n$)) es cada parámetro de la forma Q_i de Val(ß) sustituido por una de las proposiciones russellianas q_i. Al parámetro P no se le asigna ninguna proposición russelliana puesto que la solución unívoca p a partir de RUSSELL-PROP(P,Q_1,Q_2,...) de P = Val(ß)(P,c(*aquello*$_1$), ...,c(*aquello*$_n$)) ya es elemento de RUSSELL-PROP. Se sigue del lema de solución que para todas las fórmulas ß de £ existe una y sólo una proposición russelliana q, con

Val (ß)(c(*aquello*$_1$), ..., c(*aquello*$_n$)) = q.

Ejemplo. La representación del Mentiroso en £ es el mentiroso russelliano

p = ¬[Verdadera p].

Pues Val(↓¬ *Verdadero(esto)*) = la solución unívoca p de la ecuación:

P = Val(¬ *Verdadero(esto)*) (P)
= ¬ Val(*Verdadero (esto)*) (P)
= ¬[Verdadera P]

Definición

(1) Sea la *clase de todos los estados de cosas SOA* la clase más grande tal que:

Si δ ∈ SOA entonces δ tiene una de las siguientes representaciones:

<Tiene,a,c,i>, <Cree,a,q,i>, <Verdadera,q,i>

con a ∈ {Claire, Max}, c ∈ {2-Trébol, ...,A-Pica}, q ∈ RUSSELL-PROP, i ∈ {0,1}.

(2) Sea la *clase de todas las situaciones SIT* la clase más grande tal que:

Si s ∈ SIT entonces s es un subconjunto de SOA.

(3) Cuando dos estados de cosas se distinguen sólo por su polaridad i entonces se denominan *duales*.

Después de estas definiciones podemos formular el concepto de verdad para proposiciones russellianas p. El concepto fundamental es que un modelo convierte una proposición p en verdadera si y sólo si los estados de cosas *correspondientes* a p son elementos del modelo.

Definición

(1) Sea s una situación, M una subclase de SOA, p una proposición russelliana y X un conjunto de proposiciones russellianas. Entonces defínase $\models$ del modo siguiente:

- $M \models p$ si y sólo si existe una situación $s \subseteq M$ con $s \models p$

donde para p atómica:

- $s \models$ [a Tiene c]	si y sólo si	<Tiene,a,c,1> $\in$ s
- $s \models \neg$[a Tiene c]	si y sólo si	<Tiene,a,c,0> $\in$ s
- $s \models$ [a Cree q]	si y sólo si	<Cree,a,q,1> $\in$ s
- $s \models \neg$[a Cree q]	si y sólo si	<Cree,a,q,0> $\in$ s
- $s \models$ [Verdadera q]	si y sólo si	<Verdadera,q,1> $\in$ s
- $s \models \neg$[Verdadera q]	si y sólo si	<Verdadera,q,0> $\in$ s

y en los demás casos:

- $s \models [\wedge X]$	si y sólo si	$s \models p$, para todo $p \in X$
- $s \models [\vee X]$	si y sólo si	$s \models p$, para un $p \in X$ [4]

Además se define:

- $M \not\models p$ si y sólo si $\neg(M \models p)$.

(2) Decimos que una proposición *p es verdadera (falsa) dentro de M*, si el estado de cosas

<Verdadera,p,1> (<Verdadera,p,0>) es elemento de M; y
M hace p verdadera (falsa), si vale $M \models p$ ($M \not\models p$).

(3) Sea M una subclase no vacía de SOA. Luego M se denomina *modelo consistente* si y sólo si M no contiene ningún estado de cosas junto con su dual.
(4) Sea M un modelo consistente. Entonces M se denomina *modelo casi semánticamente cerrado*, si M cumple las siguientes condiciones:

- <Verdadera,p,1> $\in$ M	si y sólo si	$M \models p$
- si <Verdadera,p,0> $\in$ M	entonces	$M \not\models p$

(5) Un modelo casi semánticamente cerrado máximo (referente a la inclusión) se denomina *modelo.*

Para el Mentiroso resulta de ese modo lo siguiente:

Proposición. Sea p = $\neg$[Verdadera p] el Mentiroso russelliano. Entonces vale para todos los modelos M:

(1)	$M \not\models p$	(M hace p falsa)
(2)	<Verdadera,p,0>$\notin$ M	(p no es falsa dentro de M)

Demostración

(1) Supóngase que vale $M \models p$. Luego existe una situación $s \subset M$ con $s \models p$. Por consiguiente, el estado correspondiente al Mentiroso, <Verdadera,p,0>, es un elemento de s y se sigue $M \not\models p$ a partir de la clausura casi semántica de M, lo cual significa una contradicción con el supuesto.
(2) Supóngase que <Verdadera,p,0> sea un elemento de M. Luego {<Verdadera,p,0>} es una situación en M con {<Verdadera,p,0>} $\models$ p, lo que según (1) no es posible.

□

Consecuencia

(1) Puesto que por $M \not\models p$, tampoco <Verdadera,p,1> puede ser elemento de M, se sigue que ni <Verdadera,p,0> ni su dual <Verdadera,p,1> representan un estado de cosas en M.

(2) La relación de consecuencia <Verdadera,p,0> $\in$ M $\Rightarrow$ M $\not\models$ p en la definición de la clausura casi semántica de modelos no es definible como equivalencia ($\Leftrightarrow$), puesto que de otro modo el Mentiroso sería una paradoja.

Esta segunda consecuencia muestra que no puede haber un modelo M, tal que las proposiciones son verdaderas/falsas dentro de M si y sólo si M las hace verdaderas/falsas.

2.3.3. ¿Resuelve la semántica russelliana la paradoja?

Antes de empezar con la crítica de la semántica russelliana vamos a definir exactamente lo que son los estados de cosas correspondientes a una proposición.

Definición. Sea p una proposición russelliana y δ un estado de cosas. Entonces δ es *un estado de cosas correspondiente a p* si y sólo si $\exists s \in \mathrm{SIT}\ (\neg(s \models p) \wedge (s \cup \{\delta\} \models p))$.

Consecuencia. Si p es atómica entonces hay un único estado de cosas, δ, correspondiente a p. Para este estado de cosas vale: $\{\delta\} \models p$.

Una semántica que resuelva la paradoja del mentiroso ha de permitir formular el concepto de la falsedad dentro del lenguaje. En la semántica considerada, las proposiciones son los portadores de valores de verdad, y una proposición solamente puede ser verdadera/falsa respecto a un modelo M. Analizamos si estos conceptos de verdad/falsedad, i.e. la verdad/falsedad de una proposición respecto a un modelo M, se puede formular dentro del lenguaje £.

Empezamos con el concepto de verdad:

Sea p_1 una proposición cualquiera. Según la semántica russelliana, la fórmula

$$ß_{01} = (\mathit{Verdadero\ aquello}_1)$$

expresa, en el contexto en que

$$c(\mathit{aquello}_1) = p_1$$

la proposición p_{01} que afirma la verdad de p_1. Es decir

$$p_{01} = \mathrm{Val}(\text{ß}_{01})\ c(aquello_{1})$$
$$= [\text{Verdadera } p_1]$$

Una proposición solamente puede ser verdadera respecto a un modelo dado M. Pero no es totalmente claro, si la verdad de una proposición p respecto a un modelo M es representada en esta semántica por

M hace p verdadera

o por

p es verdadera dentro de M.

Sin embargo, por la clausura casi semántica vale en cada modelo:

M hace p verdadera si y sólo si p es verdadera dentro de M

Es decir,

$$M \models p \Leftrightarrow \langle \text{Verdadera}, p, 1 \rangle \in M$$

Por lo tanto, los dos conceptos de verdad de la semántica russelliana son equivalentes y se sigue:

$$p \text{ es } \textit{verdadera (respecto a M)} \Leftrightarrow M \models p$$
$$\Leftrightarrow \langle \text{Verdadera}, p, 1 \rangle \in M$$

Con estos preliminares podemos comprobar si p_{01} afirma la verdad de p_1.

Si p_{01} = [Verdadera p_1] afirma la verdad de p_1 (respecto a un modelo M) ha de valer:

[Verdadera p_1] es verdadera (respecto a M) si y sólo si
p_1 es verdadera (respecto a M)

Es cierto que

$[\text{Verdadera } p_1]$ es verdadera (respecto a M) $\Leftrightarrow$
$<\text{Verdadera}, p_1, 1> \in M \Leftrightarrow$
p_1 es verdadera (respecto a M)

y se sigue que p_{01} realmente afirma la verdad de p_1.

Por tanto es posible formular la verdad de una proposición en el lenguaje. Seguimos con la pregunta si ese resultado positivo vale también para la falsedad de una proposición.

Sea p_1 una proposición cualquiera. Según la semántica russelliana, la fórmula

$$ß_{02} = \neg(\textit{Verdadero aquello}_1)$$

expresa, en el contexto en que

$$c(\textit{aquello}_1) = p_1$$

la proposición p_{02} que afirma la falsedad de p_1. Es decir

$$\begin{aligned} p_{02} &= \text{Val}(ß_{02})\ c(\textit{aquello}_1) \\ &= \neg[\text{Verdadera } p_1] \end{aligned}$$

Como ni estamos en una semántica con huecos veri-falsativos ni en una semántica con más de dos valores de verdad, la *falsedad* de una proposición p equivale a su *no-verdad*. Es decir:

p *es falsa (respecto a un modelo M)* si y sólo si
p no es verdadera (respecto a un modelo M).

Por

p es verdadera (respecto a M)	$\Leftrightarrow$	M hace p verdadera
	$\Leftrightarrow$	p es verdadera dentro de M

se sigue

$$\begin{aligned} \text{p no es verdadera (respecto a M)} &\Leftrightarrow \text{M no hace p verdadera} \\ &\Leftrightarrow \text{p no es verdadera dentro de M} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{p } \textit{es falsa (respecto a M)} &\Leftrightarrow \text{M no hace p verdadera} \\ &\Leftrightarrow \text{p no es verdadera dentro de M.} \end{aligned}$$

En términos formales

$$\begin{aligned} \text{p } \textit{es falsa (respecto a M)} &\Leftrightarrow \neg(M \models p) \\ &\Leftrightarrow \neg(<\text{Verdadera},p,1> \in M). \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \text{p } \textit{es falsa (respecto a M)} &\Leftrightarrow M \not\models p \\ &\Leftrightarrow <\text{Verdadera},p,1> \notin M. \end{aligned}$$

Analizamos si la proposición p_{02} realmente afirma la falsedad de p_1.

Si $p_{02} = \neg[\text{Verdadera } p_1]$ afirma la falsedad de p_1 (respecto a un modelo M) debería ser válido:

$\neg[\text{Verdadera } p_1]$ es verdadera (respecto a M) si y sólo si
p_1 es falsa (respecto a M).

Tenemos

$\neg[\text{Verdadera } p_1]$ es verdadera (respecto a M) $\Leftrightarrow$
$<\text{Verdadera},p_1,0> \in M$

y p_1 es falsa (respecto a M) $\Leftrightarrow$
$<\text{Verdadera},p_1,1> \notin M$

Por consiguiente, afirmaría p_{02} sólo la falsedad de p_1 (respecto a M) si valiera:

$$<\text{Verdadera},p_1,0> \in M \Leftrightarrow <\text{Verdadera},p_1,1> \notin M$$

Pero no existe ningún modelo que cumpla esta condición para todas las proposiciones russellianas, con lo cual resulta que la proposición p_{02} no afirma la falsedad de p_1.

Observación. El hecho de que no puede haber un modelo M que hace una proposición p falsa si y sólo si <Verdadera,p,0> es elemento de M, tiene la consecuencia de que no es posible expresar la falsedad de una proposición.

Como aún no es posible expresar la falsedad de una proposición en la semántica russelliana se sigue directamente que la proposición p = ¬[Verdadera p] designada por Barwise y Etchemendy como Mentiroso russelliano no es en absoluto *el* Mentiroso. El Mentiroso es la fórmula que expresa la proposición que afirma su propia falsedad. Si queremos ser capaces de expresar el Mentiroso en la semántica russelliana tenemos que corregir la relación $\models$ tal que una proposición como $\neg[\text{Verdadera } p_1]$ es verdadera (respecto a un modelo M) si y sólo si p_1 es falsa (respecto a M):

Definición [Corrección]. Sea p una proposición russelliana, s una situación y M una subclase de SOA. Entonces $\models_R$ se define por:

- $M \models_R p$ si y sólo si existe una situación $s \subseteq M$ con $s \models_R p$

donde para p atómica:

$$- s \models_R p \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} s \models p & \text{si } p \neq \neg[\text{Verdadera } p_1] \\ <\text{Verdadera},p_1,1> \notin s & \text{si } p = \neg[\text{Verdadera } p_1] \end{cases}$$

y en los demás casos:

- $s \models_R [\wedge X]$ si y sólo si $s \models_R p$, para todo $p \in X$
- $s \models_R [\vee X]$ si y sólo si $s \models_R p$, para un $p \in X$

Sea la semántica russelliana* la semántica que resulta de la sustitución de $\models$ por $\models_R$ y manteniéndose sin modificaciones las demás definiciones de la semántica russelliana. De este modo, la proposición $p_{02} = \neg$[Verdadera p_1] afirma realmente la falsedad de la proposición p_1 (respecto a un modelo M), porque vale:

Proposición. Sea $p_{02} = \neg$[Verdadera p_1]. Luego vale para todos los modelos M:

$\neg$[Verdadera p_1] es verdadera (respecto a M) si y sólo si p_1 es falsa (respecto a M).

Demostración

p_{02} es verdadera (respecto a M) $\Leftrightarrow$ M $\models_R \neg$[Verdadera p_1] $\Leftrightarrow$
<Verdadera,p_1,1> $\notin$ M $\Leftrightarrow$ p_1 es falsa (respecto a M)

□

Ahora bien, de este modo el Mentiroso russelliano p = $\neg$[Verdadera p] representa *el* Mentiroso, o sea, la proposición que afirma de sí misma que es falsa. Pero desgraciadamente esto conduce a una paradoja:

Proposición. Sea p = $\neg$[Verdadera p] el Mentiroso russelliano. Entonces para todos los modelos M vale:

p es verdadera (respecto a un modelo M) si y sólo si
p es falsa (respecto a un modelo M).

Demostración

Sea p verdadera (respecto a M). Luego vale M $\models_R \neg$[Verdadera p]. Es decir: <Verdadera,p,1> $\notin$ M y por consiguiente es p falsa (respecto a M).

Sea p falsa (respecto a M). Luego vale M $\not\models_R \neg$[Verdadera p]. Entonces sigue <Verdadera,p,1> $\in$ M, de lo cual se sigue que p es verdadera (respecto a M).

□

En resumen, hay que decir que la semántica russelliana no representa ninguna solución a la paradoja del Mentiroso puesto que en esa semántica no es posible expresar la falsedad de una proposición. Cuando corregimos la semántica de tal modo que la falsedad es expresable, el Mentiroso resulta paradójico.

2.4. La semántica austiniana: Introducción y crítica

2.4.1. Proposiciones austinianas

Una proposición russelliana p se convierte en portadora de un valor de verdad sólo mediante la indicación de un modelo M, donde se asignan a p dependiendo de M dos conceptos de verdad variables: *M hace p verdadera/falsa* y *p es verdadera/falsa dentro de M*. La semántica austiniana toma en consideración esa dependencia para una proposición de estados de cosas dados en un modelo no sólo en el momento de asignar valores sino ya en la definición. Para eso usan Barwise y Etchemendy situaciones que forman parte de las proposiciones mismas. Las razones por las que es necesario usar situaciones (es decir: conjuntos de estados de cosas) en vez de modelos (clases propias de estados de cosas) las vamos a manifestar al final del apartado 2.4.2.

Definición

(1) Sean la *clase de todos los estados de cosas SOA*, la *clase de todas las situaciones SIT* y la *clase de todas las proposiciones austinianas AUSTIN-PROP* las clases más grandes tal que:

- si x ∈ SOA entonces x tiene una de las siguientes representaciones:

  <Tiene,a,c,i>, <Cree,a,q,i>, <Verdadera,q,i>

con a ∈ {Claire, Max}, c ∈ {2-Trébol,...,A-Pica}, q ∈ AUSTIN-PROP, i ∈ {0,1}

- si s ∈ SIT entonces s es un subconjunto de SOA.
- si p ∈ AUSTIN-PROP entonces p tiene la representación {s;T}, con s ∈ SIT y T ∈ Γ([SOA]).

  donde la *clausura Γ([SOA])* es la clase más pequeña tal que:

  - si $\delta \in$ SOA entonces $[\delta] \in \Gamma([SOA])$
  - si $Y \subseteq \Gamma([SOA])$ entonces $[\wedge Y]$ y $[\vee Y] \in \Gamma([SOA])$

Los elementos p de esta clase se denominan *proposiciones austinianas*.

(2) Sea p = {s;T} una proposición austiniana. Entonces sea *Sobre(p)*:= s y *Tipo(p)*:= T.

Las definiciones de estados de cosas duales y de modelos consistentes se adoptan literalmente de la semántica russelliana.

Proposición. AUSTIN-PROP no es un conjunto$_A$.[5]

Antes de empezar con un análisis de la semántica austiniana tenemos que corregir la definición de los tipos. Del modo como Barwise y Etchemendy definen la clase de los Tipos $\Gamma([SOA])$ resulta que ni el conjuntor $\wedge$, ni el disjuntor $\vee$ son funciones de $\Gamma([SOA]) x \Gamma([SOA])$ a $\Gamma([SOA])$ porque:

> Sean T, T' $\in \Gamma([SOA])$ entonces $T \wedge T'$ no es elemento de $\Gamma([SOA])$. Para conseguir que $T \wedge T'$ es elemento de $\Gamma([SOA])$ tenemos que aplicar también el primer paso de la definición inductiva de $\Gamma([SOA])$ e introducir una vez más '[' y ']'. Solo entonces es la conjunción $[T \wedge T']$ elemento de $\Gamma([SOA])$. Sin embargo el conjuntor $\wedge$ tampoco es definible como función mediante:
>
> $$[\wedge]: \Gamma([SOA]) x \, \Gamma([SOA]) \longrightarrow \Gamma([SOA]), \; [\wedge](T,T') := [T \wedge T'],$$
>
> como se demuestra mediante un contraejemplo:
>
> Sean δ_1, δ_2, δ_3 elementos de SOA.
>
> Si $X_1 = \{[\delta_1],[\delta_2],[\delta_3]\}$ entonces
> $[[\delta_1]\wedge[\delta_2]\wedge[\delta_3]] \in \Gamma([SOA])$
>
> Si $Y_0 = \{[\delta_1],[\delta_2]\}$ entonces $[[\delta_1]\wedge[\delta_2]] \in \Gamma([SOA])$, y si $Y_1 = \{[[\delta_1]\wedge[\delta_2]],[\delta_3]\}$ entonces $[[[\delta_1]\wedge[\delta_2]]\wedge[\delta_3]] \in \Gamma([SOA])$.
>
> Con lo cual tenemos que tanto $[[\delta_1]\wedge[\delta_2]\wedge[\delta_3]]$ como $[[[\delta_1]\wedge[\delta_2]]\wedge[\delta_3]]$ son elementos de $\Gamma([SOA])$. Obsérvese que en $[[[\delta_1]\wedge[\delta_2]]\wedge[\delta_3]]$ el segundo conjuntor es una función
>
> $$[\wedge]: \Gamma([SOA]) x \Gamma([SOA]) \longrightarrow \Gamma([SOA])$$

mientras que el segundo conjuntor en $[[\delta_1]\wedge[\delta_2]\wedge[\delta_3]]$ no es una función *sobre* $\Gamma([SOA])x\Gamma([SOA])$ porque ni podemos entender el conjuntor $[\wedge]$ por

$$[[\delta_1]\wedge[\delta_2]\wedge[\delta_3]]$$

debido a que '$[\delta_1]\wedge[\delta_2]$' no es elemento de $\Gamma([SOA])$, ni podemos entenderlo por

$$[[\delta_1]\wedge[\delta_2]\wedge[\delta_3]]$$

puesto que tampoco '$\delta_2]$' es elemento de $\Gamma([SOA])$.
Para corregir eso sustituimos la definición de arriba de $\Gamma([SOA])$ por:

Definición [Corrección]

(1) Sea la clausura *Γ(SOA)* la clase más pequeña tal que:

- si $\delta \in SOA$ entonces $\delta \in \Gamma(SOA)$
- si $Y \subseteq \Gamma(SOA)$ entonces $\wedge Y$ y $\vee Y \in \Gamma(SOA)$

(2) Sea *la clase de todos los tipos TIPO* la clase más pequeña tal que:

- si $\alpha \in \Gamma(SOA)$ entonces $[\alpha] \in TIPO$

Se sigue que ahora

el conjuntor: $\wedge:\Gamma(SOA)x\Gamma(SOA) \longrightarrow \Gamma(SOA)$, $\wedge(\alpha_1,\alpha_2):= \alpha_1 \wedge \alpha_2$
el disjuntor: $\vee$: $\Gamma(SOA)x\Gamma(SOA) \longrightarrow \Gamma(SOA)$, $\vee(\alpha_1,\alpha_2):= \alpha_1 \vee \alpha_2$
y $[\ ]$: $\Gamma(SOA) \longrightarrow TIPO$, $[\ ](\alpha):= [\alpha]$ son funciones bien definidas.

Observación. La función $[\ ]$: $\Gamma(SOA) \longrightarrow TIPO$ es una biyección. Por consiguiente contiene la clase cociente $\{\alpha\in \Gamma(SOA) \mid [\ ](\alpha) = T\}$ para cada Tipo T un único elemento $\alpha\in \Gamma(SOA)$.

Definición

(1) Sea $p = \{s;T\}$ una proposición austiniana. Entonces sea *Infon(p)*$:= [\ ]^{-1}(T)$.
(2) Un elemento T de TIPO se denomina *atómico* si y sólo si $[\ ]^{-1}(T)\in SOA$.

Regresamos a la descripción de proposiciones austinianas. Al usar Tipos T nos referimos a partir de ahora siempre a elementos de TIPO.

Ejemplo. $p = \{s_i;[\langle \text{Tiene,Max,3-Trébol,1}\rangle \wedge \langle \text{Tiene,Claire,3-Trébol,0}\rangle]\}$ es para todas las situaciones s_i una proposición austiniana. Vale:

$$\text{Tipo}(p) = [\langle \text{Tiene,Max,3-Trébol,1}\rangle \wedge \langle \text{Tiene,Claire,3-Trébol,0}\rangle] \text{ y}$$
$$\text{Infon}(p) = \langle \text{Tiene,Max,3-Trébol,1}\rangle \wedge \langle \text{Tiene,Claire,3-Trébol,0}\rangle$$

Las proposiciones austinianas se conciben de modo análogo a las proposiciones russellianas como conjuntos_A. El lema de solución permite de nuevo la representación de proposiciones circulares en forma de sistemas de ecuaciones:

Ejemplo (Mentiroso austiniano). Para toda situación s, $p_s = \{s;[\langle \text{Verdadera},p_s,0\rangle]\}$ es una proposición austiniana (circular). Nótese que existe un Mentiroso austiniano p_s propio de cada situación s.

2.4.2. Semántica austiniana

Definición. La negación de Infons se define inductivamente del modo siguiente:

Si δ es un estado de cosas, y δ^* su dual, entonces $\neg\delta := \delta^*$
Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(\text{SOA})$, entonces $\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2) := \neg\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$ y $\neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) := \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2$

Luego se define la negación para Tipos mediante:

Si $[\alpha]$ es un Tipo entonces $\neg[\alpha] := [\neg\alpha]$

Sea ß una fórmula de £. Entonces se asigna a ß por medio de una aplicación Val una proposición austiniana con parámetros $p(P,S,Q_1,Q_2,...)$. Como en la semántica russelliana asigna Val al pronombre *esto* el parámetro P y a los pronombres *aquello$_i$* parámetros Q_i. Además introduce Val a cada proposición con parámetros un parámetro-situacional S.

Definición. Definimos la aplicación *Val* de £ según AUSTIN-PROP$(P,S,Q_1,Q_2,...)$ mediante:

- Val(*a Tiene x*) = {S;[<Tiene,a,x,1>]}
- Val(*a Cree aquello$_i$*) = {S;[<Cree,a,Q_i,1>]}
- Val(*a Cree esto*) = {S;[<Cree,a,P,1>]}
- Val(*a Cree* ß) = {S;[<Cree,a,Val(ß),1>]}
- Val(*Verdadero aquello$_i$*) = {S;[<Verdadera,Q_i,1>]}
- Val(*Verdadero esto*) = {S;[<Verdadera,P,1>]}
- Val(*Verdadero* ß) = {S;[<Verdadera,q,1>]} donde q = Val(ß)(s,c).
- Val($ß_1 \wedge ß_2$) = {S;[Infon(Val($ß_1$)) $\wedge$ Infon(Val($ß_2$))]}
- Val($ß_1 \vee ß_2$) = {S;[Infon(Val($ß_1$)) $\vee$ Infon(Val($ß_2$))]}
- Val($\neg$ß) = {S;$\neg$[Infon(Val(ß))]}
- Val($\downarrow$ß) = la solución unívoca p de la ecuación P = Val(ß) (P, S, Q_1,...)

Sea ß una fórmula de £. De modo análogo a lo efectuado en la semántica russelliana, asignamos a todos los *aquello$_i$* en ß proposiciones austinianas q_i mediante una función c. Como ahora tenemos además un parámetro S en Val (ß), tenemos que sustituir también ese parámetro por una situación s, para describir el contexto[6]. O sea: Si ß contiene los pronombres demostrativos proposicionales *aquello$_1$*, ..., *aquello$_n$* entonces la proposición austiniana expresada por ß en el contexto (s,c) es:

Val (ß)(s,c(*aquello$_1$*),...,c(*aquello$_n$*)).[7]

La situación del contexto, s, determina el valor del parámetro-situational S, y la función del contexto, c, determina el valor de cada parámetro Q_i de Val(ß).

Ejemplo. La representación del Mentiroso de £ es la proposición del mentiroso austiniana:

Val($\downarrow\neg$*Verdadero(esto)*)=la solución unívoca de la ecuación P={S;[<Verdadera,P,0>]}

con la función de contexto (s,c) se obtiene p = {s;[<Verdadera,p,0>]}

Formularemos el concepto de verdad para proposiciones austinianas.

Definición

(1) Sea [α]$\in$TIPO y s$\in$SIT. Entonces la relación *OF* se define inductivamente por:

- Para $\alpha \in$ SOA: $OF(s,[\alpha]$ si y sólo si $\alpha \in s$
- Si $[\alpha] = [\alpha_1 \wedge \alpha_2]$: $OF(s,[\alpha])$ si y sólo si $OF(s,[\alpha_i])$, para $i = 1,2$
- Si $[\alpha] = [\alpha_1 \vee \alpha_2]$: $OF(s,[\alpha])$ si y sólo si $OF(s,[\alpha_1])$ o $OF(s,[\alpha_2])$

Si vale $OF(s,[\alpha])$, entonces decimos que s *es del tipo* $[\alpha]$.

(2) Sea $p = \{s;[\alpha]\}$ una proposición austiniana. Entonces sea:

p *es verdadera* si y sólo si $OF(s,[\alpha])$[8]
p *es falsa* si y sólo si $\neg OF(s,[\alpha])$

(3) Sea M un modelo consistente. Luego M se denomina *modelo parcial,* si M cumple las siguientes condiciones:

- si <Verdadera,p,1> $\in$ M entonces p es verdadera
- si <Verdadera,p,0> $\in$ M entonces p es falsa

(4) Un modelo parcial máximo (referente a la inclusión) se denomina *modelo austiniano.*
(5) Una situación s se denomina *posible* si y sólo si existe un modelo M tal que s es subconjunto de M.

Proposición. Sea M un modelo austiniano. Entonces vale:

(1) Sea δ un estado de cosas y δ^* su dual.

Luego δ es elemento de M si y sólo si δ^* no es elemento de M.

(2) M es semánticamente cerrado. Es decir que vale:

- <Verdadera,p,1> $\in$ M si y sólo si p es verdadera
- <Verdadera,p,0> $\in$ M si y sólo si p es falsa

(3) M no es un conjunto_A.

Demostración

(1) Sea $\delta \notin$ M. Luego $M \cup \{\delta^*\}$ es consistente.

Por consiguiente, se sigue de la maximalidad de M que $\delta^* \in$ M.

(2) Se sigue de (1) y de la definición de modelos parciales.

(3) Si AUSTIN-PROP no es un conjunto$_A$, entonces SOA no es un conjunto$_A$ y, entonces M no es un conjunto$_A$.

□

Para el Mentiroso resulta de ese modo lo siguiente:

Proposición. Sea s una situación posible y $p_s = \{s;[<Verdadera,p_s,0>]\}$ el Mentiroso austiniano para la situación s. Luego vale:

(1) $\neg$OF(s, [<Verdadera,p_s,0>]) (p_s es falsa)
(2) Si M es un modelo austiniano entonces <Verdadera,p_s,0> $\in$ M

Demostración

(1) Supóngase que p_s es verdadera. Luego vale OF(s,[<Verdadera,p_s,0>]) de lo que se sigue que <Verdadera,p_s,0> es elemento de s. Puesto que s es una situación posible, hay un modelo N con s como subconjunto de N. Por consiguiente, <Verdadera,p_s,0> es elemento de N y se sigue de su clausura semántica que p_s es verdadera, lo que significa una contradicción con el supuesto.
(2) De (1) se sigue por la clausura semántica de M, que <Verdadera,p_s,0> es elemento de M.

□

2.4.3. ¿Resuelve la semántica austiniana la paradoja?

Para ver mejor la semejanza de la semántica russelliana con la austiniana definimos lo siguiente.

Definición. Sea T un Tipo y δ un estado de cosas. Entonces δ es *un estado de cosas correspondiente a T* si y sólo si $\exists s \in$ SIT ($\neg$OF(s,T) $\wedge$ OF(s$\cup\{\delta\}$,T)).

Consecuencia. Si T es atómico entonces hay un único estado de cosas, δ, correspondiente a T. Para este estado de cosas vale: $[\,]^{-1}T = \delta$ y OF($\{\delta\}$,T).

El mecanismo para evaluar proposiciones es el mismo en la semántica austiniana y en la russelliana. La única diferencia es que en la semántica russelliana decimos que *M hace p verdadera* si y sólo si los estados de cosas que corresponden a p son elementos de M mientras que en la semántica austiniana *p es verdadera* si y sólo si los estados de cosas que corresponden al Tipo(p) son elementos de la situación Sobre(p).

Por consiguiente, para obtener en la semántica austiniana resultados diferentes que en la russelliana, es necesario definir las situaciones como conjuntos para que sean distintas a los modelos como clases propias. Aclararemos este asunto después de la siguiente observación.

Observación

(1) Hay situaciones que constan de un único estado de cosas y no son posibles. Por ejemplo, cada situación $s' := \{\langle Verdadera, p_s, 1\rangle\}$ con p_s un Mentiroso austiniano es una situación que no puede presentarse en ningún modelo austiniano.
(2) Si se considera un Mentiroso austiniano p_s en un modelo austiniano M, entonces se sigue

$$\langle Verdadera, p_s, 1\rangle \notin M \qquad y \qquad \langle Verdadera, p_s, 0\rangle \notin s$$

Nótese que este resultado se distingue de la solución russelliana sólo por el hecho de que s como subconjunto de SOA es auténticamente menor que M como subclase de SOA.

Supongamos que también las clases de estados de cosas fueran elementos de SIT. Luego, especialmente, los modelos austinianos, M, serían situaciones y para cada tal M existiría un Mentiroso $p_M = \{M;[\langle Verdadera, p_M, 0\rangle]\}$.
Como vale

$$p_M \text{ es falsa} \Leftrightarrow \neg OF(M,[\langle Verdadera,p_M,0\rangle]) \Leftrightarrow \langle Verdadera,p_M,0\rangle \notin M$$

obtenemos el resultado de que no existen modelos semánticamente cerrados sino solamente modelos casi semánticamente cerrados, es decir: de (M hace que) p_M es verdadera no se sigue que p_M sea verdadera dentro de M, lo cual es exactamente el resultado de la semántica russelliana.

Consecuencia. En la introducción del libro *The Liar* escriben Barwise y Etchemendy:[9]

> (...) we take a proposition to be a claim about the world, the kind of thing that is asserted by a successful statement.

Esa descripción parece plausible y está más o menos reflejada por lo que hemos definido como proposición en la semántica russelliana. Sin embargo la proposición austiniana ya no tiene mucho que ver con *una declaración sobre el mundo* puesto que los mundos son representados por modelos austinianos, pero Sobre(p) tiene que ser una situación, y por lo tanto algo más pequeño que un modelo austiniano. De esto resulta que:

Consecuencia. Si nos encontramos en un mundo M entonces, según la semántica austiniana, no existen fórmulas que expresan proposiciones que hacen una afirmación sobre M.

Pero no solamente es imposible hablar *sobre* el mundo, tampoco existen fórmulas que expresen en todas las situaciones posibles (de un mundo), una proposición verdadera. Puesto que:

Dado un modelo M, existen para cada Tipo $[\alpha]$ situaciones posibles $s \subset M$ tales que $\neg OF(s,[\alpha])$. Por tanto no hay ningún Tipo, $[\alpha]$, tal que para todas las $s \subset M$, la proposición $p_s = \{s;[\alpha]\}$ sea verdadera. Es decir que ninguna fórmula ß expresa en todas las situaciones posibles una proposición verdadera.

Consecuencia. Como un teorema es una fórmula que expresa en cada situación posible una proposición verdadera, se sigue que, según la semántica austiniana, no existen teoremas[10].

Analicemos ahora si la semántica austiniana realmente resuelve el Mentiroso.

En la semántica russelliana es posible expresar la verdad de una proposición p_1, puesto que por la clausura casi semántica de modelos (russellianos) M vale para p_{01} = [Verdadera p_1]:

$$M \models p_{01} \Leftrightarrow \langle \text{Verdadera}, p_1, 1\rangle \in M \Leftrightarrow M \models p_1$$

y por lo tanto:

p_{01} = [Verdadera p_1] es verdadera (respecto a M) si y sólo si
p_1 es verdadera (respecto a M)

Por otra parte no es posible expresar la falsedad de una proposición en la semántica russelliana. Este punto débil no ha podido ser resuelto por la semántica austiniana. Aquí ni siquiera es posible expresar la verdad de una proposición. Para poner esto en evidencia consideremos un ejemplo.

Sea β_{01} la fórmula que expresa en un contexto c la verdad de una proposición $p_1 = \{s_1;[\alpha_1]\}$

Es decir:

$$\beta_{01} = (\mathit{Verdadero\ aquello}_1),$$

con $\quad c(S,\ \mathit{aquello}_1) = (s_{01}, p_1).$

Según la semántica austiniana obtenemos la proposición

$$\begin{aligned} p_{01} &= \mathrm{Val}(\beta_{01})\ c(S,\ \mathit{aquello}_1) \\ &= \{s_{01};[\langle \mathrm{Verdadera}, p_1, 1\rangle]\} \end{aligned}$$

Si p_{01} afirma la verdad de p_1 debería ser válida la siguiente equivalencia:

$$p_{01} \text{ es verdadera} \qquad \text{si y sólo si} \qquad p_1 \text{ es verdadera}$$

Vale:

$$\begin{aligned} & p_{01} \text{ es verdadera} \Leftrightarrow \\ & OF(s_{01},[\langle \mathrm{Verdadera}, p_1, 1\rangle]) \Leftrightarrow \\ & \langle \mathrm{Verdadera}, p_1, 1\rangle \in s_{01} \\ \text{y} \quad & p_1 \text{ es verdadera} \Leftrightarrow \\ & OF(s_1,[\alpha_1]) \end{aligned}$$

Como $\langle \mathrm{Verdadera}, p_1, 1\rangle \in s_{01}$ no es equivalente a $OF(s_1,[\alpha_1])$ se sigue que p_{01} no afirma la verdad de p_1.

Ejemplo

Sean $p_{01} = \{s_{01};[\langle \mathrm{Verdadera}, p_1, 1\rangle]\}$ y $p_1 = \{s_1;[\langle \mathrm{Verdadera}, p_1, 1\rangle]\}$ proposiciones con $s_{01} \cap s_1 = \varnothing$.

Luego: si p_{01} es verdadera entonces p_1 es falsa y
si p_1 es verdadera entonces p_{01} es falsa

puesto que $s_i \cap s_j = \varnothing$ implica para todos los estados de cosas, δ, que:

si $OF(s_i,[\delta])$ entonces $\neg OF(s_j,[\delta])$.

Ahora bien, la semántica austiniana no afirma que $p_{01} = \{s_{01};[\langle \text{Verdadera},p_1,1\rangle]\}$ declare la verdad de p_1 en general. Más bien, afirma que p_{01} declara que p_1 es verdadera *en la situación* s_{01}. Por ello parece conveniente exigir que p_{01} se refiera a la misma situación que p_1. Además, solamente las proposiciones sobre situaciones posibles se consideran como expresables mediante fórmulas en el mundo actual, tal que las situaciones s_{01} y s_1 deben ser presupuestas como situaciones posibles.

Ejemplo. Sea $s = \{\langle \text{Tiene,Max,2-Trébol},1\rangle\}$, $p_1 = \{s;[\langle \text{Tiene,Max,2-Trébol},1\rangle]\}$ y $p_{01} = \{s;[\langle \text{Verdadera},p_1,1\rangle]\}$. p_{01} se refiere a la misma situación que p_1, p_{01} afirma sobre s que p_1 es verdadera en s. Pero p_{01} es falsa mientras que p_1 es verdadera. Es decir, la proposición expresada por la fórmula *(Verdadero(Max Tiene 2-Trébol))* en la situación s es falsa mientras que la proposición expresada por la fórmula *(Max Tiene 2-Trébol)* en la misma situación s es verdadera. No hace falta referirse al *T-schema* de Tarski para ver que eso contradice el significado del concepto de verdad.

Para defender la semántica se tendría que exigir que, en el caso en que p_1 es verdadera, la proposición p_{01} afirma la verdad de p_1 solamente si $\langle \text{Verdadera},p_1,1\rangle \in s_{01}$. Pero esto es inadmisible puesto que entonces hay que evaluar p_1 antes de poder definir p_{01}. En el caso auto-referencial, esto significa que hay que evaluar una proposición antes de poder definirla, lo que supone una contradicción con el hecho de que, según la definición de la relación OF, una proposición tiene que ser definida antes de que pueda ser verdadera o falsa.

El hecho de que la falsedad de una proposición sea expresable tampoco se puede ver análogamente, porque:

Sea β_{02} la fórmula que expresa en un contexto c la falsedad de una proposición $p_1 = \{s_1;[\alpha_1]\}$. Es decir:

$\beta_{02} = \neg$*(Verdadero aquello$_1$)*, con $c(S, aquello_1) = (s_{02}, p_1)$.

Según la semántica austiniana obtenemos la proposición

$$p_{02} = \mathrm{Val}(ß_{02})\ c(S, aquello_1)$$
$$= \{s_{02}; [<\mathrm{Verdadera}, p_1, 0>]\}$$

Entonces vale:

$$p_{02} \text{ es verdadera} \Leftrightarrow$$
$$<\mathrm{Verdadera}, p_1, 0> \in s_{02},$$

lo que no equivale a

$$p_1 \text{ es falsa} \Leftrightarrow$$
$$\neg \mathrm{OF}(s_1, [\alpha_1]).$$

Observación. En 2.3.3. hemos visto que, en la semántica russelliana, la imposibilidad de modelos semánticamente cerrados provoca la imposibilidad de formular la falsedad de una proposición russelliana dentro de la semántica.

Así, a primera vista, parece sorprendente que, en la semántica austiniana, la existencia de modelos semánticamente cerrados no implique la posibilidad de formular la verdad/falsedad dentro de la semántica. Sin embargo, se observa que los modelos no influyen de ningún modo en la evaluación de proposiciones austinianas puesto que OF es una relación sobre SITxTIPO. Por tanto, el resultado de la existencia de modelos semánticamente cerrados no tiene consecuencias respecto a la expresabilidad de la verdad/falsedad en la semántica austiniana.

Lo que sería necesario para que la verdad/falsedad de una proposición austiniana fuera formulable es la clausura semántica de situaciones. Pero esta clausura no la tenemos. Al contrario, ni hay situaciones que cumplan para todas las proposiciones:[11]

$$p \text{ es verdadera si y sólo si } <\mathrm{Verdadera}, p, 1> \in s$$

ni hay situaciones que cumplan para todas las proposiciones:

p es falsa si y sólo si $<Verdadera,p,0> \in s$

lo que provoca que ni podemos formular la verdad ni la falsedad de una proposición austiniana dentro de la semántica.

Como en la semántica russelliana, se sigue que $p_s = \{s;[<Verdadera,p_s,0>]\}$ no es *un* Mentiroso, o sea: no es una proposición que afirma su propia falsedad. Para poder formular el Mentiroso tenemos que ser capaces de expresar la falsedad de una proposición. En contraposición a la parte correspondiente en la semántica russelliana ahora ni la proposición $\{s;[<Verdadera,p_1,1>]\}$ afirma la verdad de p_1, ni $\{s;[<Verdadera,p_1,0>]\}$, la falsedad de p_1.

Intentamos corregir a continuación la relación OF para que sea posible formular la verdad/falsedad de una proposición. Para lograr esto tenemos que modificar OF tal que: (1) una proposición como $\{s;[<Verdadera,p_1,1>]\}$ sea verdadera si y sólo si p_1 es verdadera, y: (2) una proposición como $\{s;[<Verdadera,p_1,0>]\}$ sea verdadera si y sólo si p_1 es falsa:

[Intento de corrección]. Sea $s \in SIT$ y $q = \{s_q;[\alpha_q]\}$ una proposición. Entonces la relación *OF** se define por:

- Para $\alpha \in SOA$: Si $\alpha \in SOA-\{<Verdadera,q,i> \mid q \in AUST\text{-}PROP, i \in \{0,1\}\}$:

	$OF^*(s,[\alpha])$	si y sólo si	$\alpha \in s$
y	$OF^*(s,[<Verdadera,q,1>])$	si y sólo si	$OF^*(s_q,[\alpha_q])$
	$OF^*(s,[<Verdadera,q,0>])$	si y sólo si	$\neg OF^*(s_q,[\alpha_q])$

- Si $[\alpha] = [\alpha_1 \wedge \alpha_2]$: $OF^*(s,[\alpha])$ si y sólo si $OF^*(s,[\alpha_i])$, para $i = 1,2$
- Si $[\alpha] = [\alpha_1 \vee \alpha_2]$: $OF^*(s,[\alpha])$ si y sólo si $OF^*(s,[\alpha_1])$ o $OF^*(s,[\alpha_2])$

Sea la semántica austiniana* la semántica que resulta de la sustitución de OF por OF* y manteniéndose sin modificaciones las demás definiciones.

Luego bien es verdad que, si $p_{01}=\{s_{01};[<Verdadera,p_1,1>]\}$ y $p_{02}=\{s_{02};[<Verdadera,p_1,0>]\}$ con $p_1 = \{s_1;[\alpha_1]\}$, entonces:

p_{01} es verdadera $\Leftrightarrow$
$OF^*(s_{01},[<Verdadera,p_1,1>]) \Leftrightarrow$
$OF^*(s_1,[\alpha_1]) \Leftrightarrow$
p_1 es verdadera.

y p_{02} es verdadera $\Leftrightarrow$
$OF^*(s_{02},[<\text{Verdadera},p_1,0>]) \Leftrightarrow$
$\neg OF^*(s_1,[\alpha_1]) \Leftrightarrow$
p_1 es falsa,

pero, en el caso auto-referencial, resulta que la definición de OF* es circular y por tanto incorrecta.

Ejemplo. Sea $p_{01} = \{s_{01};[<\text{Verdadera},p_{01},1>]\}$. Entonces habríamos definido

$OF^*(s_{01},[<\text{Verdadera},p_{01},1>])$ incorrectamente mediante el círculo:
$OF^*(s_{01},[<\text{Verdadera},p_{01},1>])$ si y sólo si $OF^*(s_{01},[<\text{Verdadera},p_{01},1>])$.

Consecuencia. Una corrección de la relación OF para que la verdad/falsedad sea expresable dentro de la semántica no es posible por las proposiciones auto-referenciales.

Resumiendo, hay que decir que la semántica austiniana supone un retroceso respecto de la semántica russelliana, porque no podemos expresar ni la verdad ni la falsedad de una proposición. Por supuesto que, siempre es posible denominar a objetos ontológicos <Verdadera,p,1>/<Verdadera,p,0>, pero si esos objetos no representan semánticamente la verdad/falsedad de p entonces las denominaciones carecen de sentido. Una corrección de la relación OF de tal modo que <Verdadera,p,1> represente la verdad de p y <Verdadera,p,0> la falsedad de p resulta imposible por las proposiciones auto-referenciales.

Además, esta semántica tiene en su contra el hecho de tener menos capacidad expresiva que la teoría de los niveles de lenguaje de Tarski. Mientras que en Tarski sólo es imposible efectuar fórmulas sobre el lenguaje, en la semántica austiniana ni siquiera hay fórmulas con validez general, es decir fórmulas que expresan en cada situación, Sobre(p), posible proposiciones, p, que son verdaderas.

2.5. Las semánticas russelliana y austiniana reformuladas como semánticas clásicas

En este apartado final demostraremos que tanto la relación veritativa de la semántica russelliana como la de la semántica austiniana son relaciones clásicas.

Empezamos con la reformulación de la evaluación de proposiciones de la semántica russelliana.

Definición

(1) Sea $\text{RUSSELL-PROP}_{\text{Atom}}:=\{q \in \text{RUSSELL-PROP} \mid q \text{ atómica}\}$, $X \subseteq \text{RUSSELL-PROP}_{\text{Atom}}$ y $p \in \text{RUSSELL-PROP}$. Entonces defínase la relación $\models^R$ inductivamente del modo siguiente:

Para $p \in \text{RUSSELL-PROP}_{\text{Atom}}$:	$X \models^R p$	si y sólo si	$p \in X$
Si $p = p_1 \wedge p_2$:	$X \models^R p$	si y sólo si	$X \models^R p_1$ y $X \models^R p_2$
Si $p = p_1 \vee p_2$:	$X \models^R p$	si y sólo si	$X \models^R p_1$ o $X \models^R p_2$

(2) Sea M un modelo. Entonces se define:

$$M^R := \{p \in \text{RUSSELL-PROP}_{\text{Atom}} \mid \exists \delta \in M (\{\delta\} \models p)\}$$

(3) Una subclase X de $\text{RUSSELL-PROP}_{\text{Atom}}$ es un *modelo*^{R} si y sólo si existe un modelo M tal que:

$$X = M^R.$$

Consecuencia

(1) Si X es un modelo^R entonces

$$X = \{\delta \in \text{SOA} \mid \exists p \in X (\delta \text{ es un estado de cosas correspondiente a } p)\}^R$$

(2) Una subclase X de $\text{RUSSELL-PROP}_{\text{Atom}}$ es un modelo^R si y sólo si X cumple las siguientes condiciones:

i) si $p \in X$ entonces $\neg p \notin X$
ii) $[\text{Verdadera } p] \in X$ si y sólo si $X \models^R p$
iii) si $\neg[\text{Verdadera } p] \in X$ entonces $\neg(X \models^R p)$
iv) X es maximal, i.e. si $X \subseteq Y \subseteq \text{RUSSELL-PROP}_{\text{Atom}}$ e Y cumple las condiciones i),ii),iii) entonces: $Y = X$.

La siguiente proposición demuestra que tanto el concepto *M hace p verdadera* como el concepto *p es verdadera dentro de M* son definibles mediante M^R y $\models^R$:

Proposición. Sea p una proposición russelliana y M un modelo. Entonces vale:

(1) $M \models p$ si y sólo si $M^R \models^R p$
(2) <Verdadera,p,1> $\in M$ si y sólo si [Verdadera p] $\in M^R$

Demostración

(1) se demuestra directamente por inducción y (2) se sigue de (1) y la definición de modelos^R.

□

Obsérvese que ni hace falta la definición de estados de cosas ni la de situaciones para la relación veritativa de la semántica russelliana. Todas esas definiciones sobran y solamente ocultan que esta semántica no representa novedades.

Llegamos a la semántica austiniana. En 2.4.3. ya hemos señalado que la manera de evaluar proposiciones en la semántica austiniana es la misma que en la russelliana. Por tanto, la relación clásica $\models^A$ que vamos a definir en lo siguiente no se distingue en su procedimiento de la relación $\models^R$.

Definición. Sea $X \subseteq SOA$ y $\alpha \in \Gamma(SOA)$. Entonces defínase la relación $\models^A$ inductivamente del modo siguiente:

Para $\alpha \in SOA$: $X \models^A \alpha$ si y sólo si $\alpha \in X$
Si $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$: $X \models^A \alpha$ si y sólo si $X \models^A \alpha_1$ y $X \models^A \alpha_2$
Si $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$: $X \models^A \alpha$ si y sólo si $X \models^A \alpha_1$ o $X \models^A \alpha_2$

La siguiente proposición demuestra que el concepto de verdad de proposiciones austinianas es definible mediante la relación $\models^A$:

Proposición. Sea $p = \{s;[\alpha]\}$ una proposición austiniana. Entonces vale:

p es verdadera si y sólo si $s \models^A \alpha$

Demostración

Por inducción se demuestra que para cada Tipo T y cada situación s vale

$$OF(s,T) \text{ si y sólo si } s \models_A [\ ]^{-1}(T).$$

$\square$

3. Conclusión

El Mentiroso es la fórmula que afirma de sí mismo que no es verdadera. En lógicas donde cada fórmula/proposición que no es verdadera es falsa tiene la forma *ß: (ß es falso)*. En los planteamientos clásicos de solución semántica se intentó resolver la paradoja del Mentiroso mediante semánticas donde el *no ser verdadera* no es expresable puesto que el *concepto de falsedad* que tienen no equivale a la *no-verdad.* Es decir, con semánticas donde de *no ser verdadera* una fórmula no tiene por que ser *falsa* y donde no hay posibilidades para expresar que *una fórmula no es verdadera*. Mar mostró que así no se puede resolver la paradoja puesto que el *auéentico* Mentiroso no es expresable si no podemos expresar el *no ser verdadero*. Si ampliamos las posibilidades de expresión para poder expresar el Mentiroso, entonces el Mentiroso regresa como paradoja a estas semánticas.

La semántica russelliana no se distingue en ese sentido de los planteamientos clásicos puesto que la falsedad en el sentido de la no-verdad no es expresable (aunque la falsedad de una proposición tendría que ser equivalente a la no-verdad porque la semántica russelliana es una semántica donde toda proposición es o verdadera o falsa). Si corregimos la semántica tal que $\neg$[Verdadera p] realmente afirme la falsedad de una proposición p, entonces el Mentiroso regresa inmediatamente como paradoja.

En la semántica austiniana la situación es diferente. Fijándonos solamente en el criterio de si la falsedad equivale a la no-verdad para comprobar si la solución es correcta, la semántica austiniana parece perfecta. Barwise y Etchemendy escriben:[12]

> In certain respects, the Austinian treatment of the Liar seems almoust too good to be true. Simply by making explicit the situation a proposition is about, we seem to have salveraged virtually all our pretheoretic intuitions about truth and falsity. Every proposition is true or false, and nothing prevents any such fact from being part of the world.

Puesto que cada proposición es o verdadera o falsa y por la clausura semántica de los modelos austinianos, la falsedad de esa semántica equivale con la no-verdad, Barwise y

Etchemendy concluyen que la semántica austiniana representa una solución real. Sin embargo esa conclusión es incorrecta. Tanto en los intentos clásicos, por ejemplo en el de Kripke, como en la semántica russelliana, *la verdad* es expresable y el fallo viene con la imposibilidad de expresar *la falsedad*. La semántica austiniana, en este aspecto se muestra diferente pero no mejor.

En esa semántica ni siquiera es posible expresar *la verdad*. La proposición que finge declarar la verdad de una proposición p_1, es decir la proposición expresada por la fórmula (*Verdadero aquello*$_1$) en un contexto c(*S*,*aquello*$_1$) = (s,p_1) no afirma realmente la verdad de c(*aquello*$_1$) = p_1. Ahora bien, se define el concepto de la falsedad como la negación de ese concepto incorrecto, con lo cual se consigue solamente que también el concepto de falsedad sea incorrecto y la proposición expresada por la fórmula ($\neg$*Verdadero aquello*$_1$) tampoco exprese la falsedad de p_1. Sólo en el caso de que el concepto de verdad sea correcto, es conveniente comprobar la expresabilidad del Mentiroso mediante la pregunta de si la negación de ese concepto de verdad equivale al concepto de falsedad que tiene la semántica. En conclusión, obtenemos una conclusión completamente diferente a la de Barwise y Etchemendy, cuando afirman:[13]

> In the end, we think our account provides much more than a solution to the paradox of the Liar. It provides an explanation of how the paradox comes about, and of exactly which of our untutored intuitions come into conflict.

Por el contrario, en este artículo ha sido señalado que:

El Mentiroso sigue siendo un problema sin solución real.

Notas

† Agradezco la contribución de Luis Villegas y José Miguel Sagüillo a la mejora de este texto a través de sus comentarios.

Este trabajo participa del proyecto de investigación de título "Ontosemántica de las expresiones científicas" (XUGA 20506B94), subvencionado por la *Consellería de Educación y Ciencia* de la *Xunta de Galicia*.

[1] Mar (1985, p. 194).

[2] En la teoría de situaciones actual no hay definiciones uniformes de los conceptos. Un resumen de todos los conceptos de la teoría de situaciones se encuentra en Villegas (1994).

3 La posibilidad de representar elementos de PreRUSSELL-PROP como ecuaciones (o sistemas de ecuaciones), se sigue del lema de solución que garantiza que existe siempre una y sólo una solución.

4 Puesto que por definición cabe descomponer las proposiciones russellianas en proposiciones russellianas atómicas en un número finito de pasos, $\models$ es una relación bien definida unívoca en SITxPROP.

5 Es lo que Barwise y Etchemendy afirman sin demostración. Por mi parte, no he dado con una prueba que lo demuestre o lo niegue. Si la afirmación fuera falsa, entonces la semántica austiniana sería equivalente a la russelliana (Véase 2.4.3).

6 Quiere decirse: la misma fórmula β empleada en situaciones diferentes conduce a proposiciones diferentes. La semántica austiniana cumple de este modo una exigencia central de la teoría de situaciones, lo cual no se había conseguido todavía con la semántica russelliana.

7 Como en la semántica russelliana, al parámetro P no se le asigna ninguna proposición austiniana puesto que la solución unívoca p a partir de AUSTIN-PROP($P,S,Q_1,Q_2,\ldots$) de $P = \mathrm{Val}(\beta)(P,s,c(Q_1),c(Q_2),\ldots)$ ya es elemento de AUSTIN-PROP. Se sigue del lema de solución que para todas las fórmulas β de $\mathcal{L}$ existe una y sólo una proposición austiniana q, con $\mathrm{Val}(\beta)(s, c(\mathit{aquello}_1), \ldots, c(\mathit{aquello}_n)) = q$.

8 Se observa que se define este concepto de verdad sin referirse a modelos. En vez del concepto de la semántica russelliana *modelo M hace p verdadera/falsa* tenemos ahora el concepto *situación s = Sobre(p) hace que p es verdadera/falsa*.

Como la situación que hace que una proposición austiniana $p = \{s;[\alpha]\}$ es verdadera/falsa ya forma parte de la proposición, se puede escribir brevemente *p es verdadera/falsa* en vez de *s hace p verdadera/falsa*.

9 Barwise, Etchemendy (1987, p. 11).

10 Puesto que en el mundo de esta semántica no existen proposiciones de validez general, en ello no sólo carecen de sentido -como en Tarski- los teoremas de esta semántica sino todos los teoremas de las matemáticas y de la lógica, puesto que ambas disciplinas consisten precisamente en eso: en efectuar fórmulas que expresan proposiciones de validez general. Un mundo así, sin matemática ni lógica, resulta por supuesto inaceptable a nuestros ojos, dado que en tal caso nos quedaríamos sin trabajo. Desde luego puede objetarse a esto último que en el mundo real existente la mayoría de los lógicos están efectivamente en el paro, pero esa es otra historia.

11 Si una situación s cumpliera para todas las proposiciones: p es verdadera si y sólo si $\langle \mathrm{Verdadera},p,1\rangle \in s$ entonces $\{\langle \mathrm{Verdadera},p,1\rangle \mid p \in$ AUSTIN-PROP $\wedge$ p es verdadera$) \subseteq s$. Pero esto no es posible puesto que s tiene que ser un conjunto$_A$ y si AUSTIN-PROP es una clase propia tambien lo es $\{\langle \mathrm{Verdadera},p,1\rangle \mid p \in$ AUSTIN-PROP $\wedge$ p es verdadera$\}$.

12 Barwise, Etchemendy (1987, p. 164).

13 Barwise, Etchemendy (1987, p. 9).

BIBLIOGRAFIA

Aczel, P.: 1988, *Non - Well - Founded Sets*, Stanford, CSLI.

Beck, A.: 1997, *The Liar Lies and Snow is White: Outline of a theory of truth for semantical closed languages*, Ph.D, Bremen.

Barwise, J., Etchemendy, J.: 1987, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, New York, Oxford Univ. Press.

Brendel, E.: 1992, *Die Wahrheit ueber den Luegner*, Berlin, De Gruyter.

Kirkham, R.: 1992, *Theories of truth: a critical introduction*, Massachusetts, MIT.

Kripke, S.: 1975, 'Outline of a Theory of Truth', *Journal of Philosophy*, 690-716.

Mar, G.: 1985, *Liars, Truth-Gaps, and Truth*, Ph.D, Los Angeles.

Tarski, A.: 1935, 'Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen', *Studia Philosophica* 1, 261-405.

Villegas, L.: 1994, 'Significado, información y contexto de uso en la semántica de situaciones', *Agora* 13/2, 145-163.

Andreas Beck ha realizado estudios de Matemáticas, Lógica y Astronomía en la Ludwig-Maximilian-Universität München desde 1987 hasta 1993, y el Doctorado en Filosofía en la Universidad de Santiago de Compostela desde 1994 hasta julio de 1996. A partir de agosto de 1996 ha continuado la tesis en la Universität Bremen. Ha sido asistente científico en el Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Santiago de Compostela desde 1994 hasta 1996, y a partir de esta fecha es gerente general del observatorio astronómico de Königsleiten (Austria) y actuario en la Münchner Rück. Entre sus publicaciones se encuentra el libro *Vervollständigung und algebraischer Abschluß von bewerteten Körpern* (Munich, 1993).