Mathematical thought and its objects

CHARLES PARSONS

Cambridge: Harvard University Press, 2008, xx+378 or.

Matematikaren filosofia izan da Charles Parsonsen ikerketa-gaia urte askotan. Harvard Unibertsitateko Edgar Pierce Professor of Philosophy emeritua izanik, jarraitzen du lanean, azken liburu honek erakusten duen moduan. Egia da kapitulu gehienak aurrez publikatutakoak direla baina, Parsonsek berak dioen moduan, guztiak daude berrikusiak, berrituak edo garatuak. Denbora luzez espero izan den liburua da eta bere matematikari buruzko azken ikuspegia ez ote den susmoa daukat, bere irakasle nagusiei eginiko erreferentzia dela eta: B. Dreven, W.V. Quine eta Hao Wang. Matematikaren filosofiari buruzko liburua da, noski, baina bereziki matematikaren ontologia eta epistemologiari buruzkoa: zein diren objektu matematikoak eta nola den posible horien ezagutza. Estrukturalista da Parsons eta ikuspegi horretatik aztertzen ditu objektu matematikoak eta beren existentzia. Parsonsek defendatuko duen teoria nominalismotik urrun dago, hau da, objektu matematikoen existentziaren ukaziotik urrun dago, baina baita ere platonismotik, ez baitu objektu transzendenterik onartzen. Beretzat existentzia, beti, estruktura edo egitura batekiko ematen da eta, ondorioz, objektu matematikoen izaera horrelakoa da: egitura batekiko erlatiboa. Parsonsen bigarren ardatz teorikoa intuizionismoa da. Intuizioa da objektu abstraktuetara heltzeko bidea. Ikusiko dugunez, intuizio horrek ez digu zenbakiak eraikitzen uzten, ez baitugu horien intuiziorik, ez baitira oinarrizko objektuak.

Bederatzi kapitulu ditu liburuak eta matematikaren filosofiaren gairik mamitsuenen arteko bidaia luzea da, batzuetan korapiloen artekoa, beste batzuetan oso argigarria. Bi parteetan bana daiteke: lehenengo kapitulutik laugarrenera bata eta laugarren kapitulutik bederatzigarrenera bestea. Hasierako parte honetan arazo ontologikoei buruz arituko da Parsons: objektu matematikoei buruz, zehatzago esanda. Lehenengo kapituluan, Parsonsek hiru objektu mota bereiziko ditu: zehatzak, ia-zehatzak eta abstraktuak. Sailkapen honek ez ditu kontsidera daitezkeen objektu mota guztiak barneratzen, ez baita hori bere asmoa (onartzen du, ebaluatzaile baten iradokizunaren ondorioz, «ia-ia zehatzak» ere izan daitezkeela).

Bigarren kapitulua egitura kontzeptuaren azterketa da. Egiturak oso normalak dira matematikan. Nahiz eta gauza oso konplexua iruditu, egitura batek egiten duena ez da testuinguru bat definitzea besterik. Ohikoena da objektuen/indibiduoen domeinu bat aukeratzea eta, domeinu horretan bertan definituak, zenbait funtzio eta erlazio zehatz aukeratzea. Aljebran aurki daitezke adibide asko baina baita ere ereduen teorian, non egiturak objektu matematiko bihurtzen diren multzoen teoriari esker.

Ezaguna da multzoen teoriatik eratorritako ikuspegiek zenbaki arrunten definizio aski naturalak eskaintzen dituztela, Dedekinden definizioa adibidez, eta hemendik abiatzen direla beste zenbaki klaseak definitzeko asmoz. Aipatzekoak dira, ordea, ikuspegi honek dituen arazoak, agerian geratzen direnak Zermelo-Fraenkel multzoen teoria modernoaren axiomatizazioarekin alderatzen badugu. Horien arteko bereziena, infinitua axioma baten bitartez sartu behar izatea. Parsonsek eliminatibistatzat jotzen du ikuspegi hau, azken finean teoriak postulatzen dituen objektu matematikoak baztertzea edo eliminatzea proposatzen delako. Dedekindek eta beste batzuk, adibidez, lortzen dute zenbakiei buruzko enuntziatuak zenbakiei erreferentziarik egiten ez dituzten enuntziatuetara itzultzea. Nolanahi ere, itzulpenak ez garamatza urrunegi, hemen ere multzoak eta funtzioak izango ditugulako.

Estrukturalismoaren defendatzaileen artean ere badira eliminatibistak, Benacerrafen kasua adibidez, eta hauek osatzen dute Parsonsek estrukturalismo eliminatibista deitzen duena. Hauek, noski, objektu matematiko guztiak eliminatzea proposatzen dute. Estrukturalistek logizismoak egin duen aurkako norabideko bidea egiten dute. Zenbaki errealak oinarrian hartuz, zenbaki naturaletara iristen dira eta, azkenik, multzoen teoriara. Bi kasuetan, aldiz, bigarren ordenako logikaren beharrak arazo berdintsuetara garamatza: logizistek klasearen edo multzoaren beharra baldin badute, estrukturalistek egitura interpretatu behar dute eta klase edo multzoen teoriako beste terminoetan egin beharko dute. Gainera, orain behar duguna ez da jada aritmetikako eredu estandar bat, multzoen teoriako eredu estandarra baizik.

Hirugarren kapituluan modalitatea aztertzen da. Nominalismo ezberdinek partekatzen duten abiapuntua da modalitatea: egitura modalen existentzia onartu gabe, egitura horien posibilitatea kontsideratzen da. Honek, noski, posibilitatea kontzeptuaren analisi sakon bat eskatzen du alde batetik eta, bestetik, nolako modalitateaz ari garen zahaztea: metafisikoa, fisikoa, epistemikoa edo matematikoa. Posibilitate matematikoaz hitz egitea problematikoa izan daiteke. Nozio hau pareka daiteke konsistentziarekin, hau da, pentsa daiteke posibilitate matematikoa multzoen teoriaren (zenbait hipotesi laguntzaile gehituz) konsistentziarekiko baliokidea dela; konsistentziak eredu estandar baten existentziaren posibilitatea frogatuko lukeen zentzuan interpretaturik. Ez dirudi oso urruti goazenik posibilitate matematikoa multzoen teoriaren konsistentziari buruzko arazoa bihurtzen badugu. Bestetik, posibilitatea fisikoa kontsideratzen bada, argi dago ez dela horrelakorik baldin eta ez badiogu multzoen teoriako eredu estandarrari domeinu «fisikoa» eskatu nahi. Ez da horrelakorik. Gogoratu Russellek zenbaki kardinal handienaren paradoxari buruz ari zenean zioena: munduan ezin dira klase (multzo) gehiago izan gauzak (elementuak) baino. Ez du beraz bide honek irtenbiderik eskaintzen ontologia matematikoa definitzeko. Objektu matematikoak objektu fisikoak ez badira objektu ez-fisikoak beharko dute izan.

Laugarren kapituluan estrukturalismora bueltatzen gara berriro; ikuspegi estrukturalistaren defentsara matematikaren filosofian klasikoa den eztabaida baten bitartez: multzoen izaera. Multzoen teoriaren interpretazio estrukturalistaren aurka plazaratzen den arrazoi nagusia da eskatzen dituen egituren estatusa edo izaera. Interpretazio honi egitura oso aberatsak beharrezkoak suertatzen zaizkio multzo kontzeptua barneratu ahal izateko eta honek multzoaren kontzepzio «ontologikoa» eskatzen du. Tradizionalki multzoak ongi definitutako objektu oso zehatzak dituen eremu batean iterazio eragiketa aplikatuz, «-en multzoa» (Gödel), lortzen diren «gauzak» dira. Hiru ideia nagusien arabera ezaugarritu izan dira multzoak:

a) Bilduma edo sorta. Bere osagaiek osatzen duten objektua edo bere osagaiez osatutako objektua.

b) Aniztasuna edo pluraltasuna. Eraikuntza pluralak dira, subjektu pluralak kontsideratzen ditugunean sortuak («Katuak ugaztunak dira»).

c) Hedadura. Propietate edo ezaugarri baten hedadura (Frege).

Estrukturalisten arabera ikuspegi hauek ez dira beharrezkoak multzoen teoriarako, hau da, multzoa kontzeptua ez da beharrezkoa multzoen teoriarako eta ondorioz eliminatu ahal izango dugu. Gogoratu berriro Russell eta bere izena daraman paradoxa saihesteko zehaztapen axiomari egin behar izan zitzaion murrizketa multzoen ekoizpen librea geldiarazteko. Multzoaren beharrik ez bada ere (lehentasun ontologikoa ematen baitzaio elementuari, multzoak «gure» eraikuntza direla esanez) multzoen teoria axiomatikoa onartzen da, zenbait argudio «intuitibo» emanez eta, horrela, intuizioaren arazoari ateak irekitzen zaizkio.

Bigarren partea intuizioari eta epistemologiari eskainia dago. Beti esan izan ohi da intuizionismoak izaera epistemikoa duela eta bide honetatik garatuko ditu Parsonsek bigarren parte honetako bost kapituluak. Lehenengo hiruetan intuizioa aztertzen da eta beste bietan epistemologiaz arituko zaigu.

Bosgarren kapituluan, esan bezala, matematikaren ikuspegi intuizionistaren garapen propioa eskainiko digu Parsonsek. Bere posizioa kantianoa dela dio baina Hilbert eta Brouwerren ikuspegiak ez ditu baztertu nahi eta ondorioz, ñabardura eta zehaztasun dezente egin beharko ditu.

Hasteko, «intuizio» kontzeptuaren bi erabilpen ezberdinen bereizketa egingo du. Alde batetik, proposizio oso baten intuizioa eta, bestetik, objektu baten intuizioa. Aurkezpen historiko baten ondoren (Kant eta Husserl besteak beste), intuizioaren eta pertzepzioaren arteko erlazioa aztertzen du. Intuizioa ezagutza «sortzailea» kontsideratua izan da, hau da, bere bitartez munduari buruzko ezagutza lortzen dugu. Beraz, garrantzitsua izango da pertzepzioarekin duen erlazioa. Dena den, hasierako abiapuntura bueltatzen gara behin eta berriz: nola hautematen ditugu gure intuizioa eragiten, kausatzen duten objektu matematikoak? Honako hau da intuizionismoak duen gakoetako bat, nola azaldu pertzepzioak eskainitakoa eta gure abstrakzioa direnaren arteko erlazioa. Parsonsek intuizionismo hilbertiarraren bidea hartuko du hemen: emandako hizkuntza formal baten gaineko tipoen intuizioa defendatuko du ditxosozko erlazioa eraikitzen hasteko. Beste ikuspegiek jarraitzen zuten bide berdina ez bada ere, bide paraleloa jarraituko du, «tipo berdina izan» erlazioari buruz eta antzeko «adierazpenei» buruz hitz egitea baimendua den neurrian, objektu/tipoen arteko identitatea erlazioa eraikitzea zilegi egiten zaigu. Gogoratu Fregek eta Cantorrek antzeko ikuspegia erabili zutela zenbakiak («kardinal berdina izan» Cantorrek eta «zenbaki kardinala» Fregek) definitzeko, «zenbakigarritasun berdina izan» erlazioa erabili baitzuten.

Orain bai, zenbaki arrunten intuizioaren bila joango zaigu seigarren kapituluan. Eta, noski, ez du aurkituko. Ez hori bakarrik, aukerarik ere ez dio horrelako intuizioari emango. Zenbaki arruntak dira, 0tik hasita eta iteratuz, ondorengoa operazioa aplikatuz lortu ahal direnak. Ikuspegi klasiko honek eraman gaitu arazo multzo honetara: zertaz dihardu aritmetikak? Zein da indukzio matematikoaren estatusa? Hauek dira beraz zazpigarren eta zortzigarren kapituluetan aztertuko diren gaiak. Estrukturalismoaren arazo nagusia, zenbaki arrunten definizioaren harian, ondorengoan datza. Posible egiten zaie zenbaki arruntak «Dedekind-Peano axiomak asetzen dituen egitura» moduan eraikitzea edo deskribatzea; eta posible da lortzen dugun sistema zuzena delako. Zuzena diogunean zentzu teknikoan diogu noski; sistema bat zuzena da baldin kalkuluaren bitartez, hau da axiometatik inferentzia erregelak aplikatzearen bitartez produzitzen duguna, baliozkotasun semantikoa badu. Logikaren kasuan, adibidez, kalkuluko teorema guztiak logikoki baliozkoak badira. Beraz, honek bermatzen du kalkuluak ekoiztutakoa ez dela baliozkotasun semantikoaren aurka joango. Halere, logikak argi uzten digu horrelako posizioa ez dela guztiz onargarria zeren Dedekind-Peano axiomak asetzen dituzten egiturak bat baino gehiago dira eta ondorioz, «zenbakien egitura» ez da bakarra (badira aritmetikaren eredu ez estandarrak) eta ondorioz, zenbaki «kontzeptu» ezberdinak izango genituzke. Kapitulua osatzen da kardinalitatea eta multzo finitu/infinituen eztabaida luze batez zenbakien intuizioa ez dela existitzen ondorioztatzeko (kapitulu honek bi apendize ditu non erabilitako zenbait argumentu zehazten diren).

Zazpigarren kapituluaren helburua argia da: intuizioa objektu matematikoen sortzailea dela errefusatzea. Zenbakiak ez dira jada objektu matematikoak, Parsonsen ikuspegian, baina oraindik bada aritmetikaren beste «eredu» intuitibo bat: kateen egitura (sinboloen segida finituak dira kateak). Honek zenbaki arrunten (edo zenbaki osoen) similaritate-tipo berdintsua du eta egitura horretan badira lehen elementu bat eta eragiketa monadiko bat («ondorengoa»-ren parekoa). Honetaz gain, badugu kateen intuizioa eta egitura honek Dedekind-Peano axiomak asetzen dituenaren froga. Antzeko zerbaitez aritzen ziren jada Hilberten eskolan eta Hilbert berak eta Bernaysek eztabaidatu zuten honen inguruan. Kateak objektu matematiko oinarrizkoak balira, aritmetika hauetaz arituko litzateke.

Esan bezala, estrukturalismoak, Parsonsen estrukturalismoak behintzat, ez du onartzen zenbaki arruntei buruzko intuiziorik badenik, baina honek ez du esan nahi ezinezkoa denik hauei buruzko ezagutza intuitiboa lortzerik, eta bereziki, zenbaki arruntek zenbait ezaugarri dituztela ezagutzerik. Halere, Frege eta Cantorren bat-bat korrespondentziak kardinalitate ezberdinak definitzea permititzen zuen modu berean, kateek aritmetika zer den eta aritmetikari buruzko zenbait ezaugarrien ezagutza intuitiboa eskaini dezakete. Zenbakien kasuan gertatzen den moduan, bi kateen artean defini daitezke erlazio ezberdinak. Modu honetan progresioaren kontzeptua lor daiteke: bi kate erlazioan egongo lirateke baldin batak besteak baino elementu bat gehiago balu. Hauxe da finitismo hilbertiarraren oinarri intuitiboa. Eta ziurrenik honek Poincaré frantses intuizionista eskandalizatuko luke logizistak (Frege, Russell eta baita Cantor ere) proposatutako zenbakien definizioak eskandalizatzen zituen modu berean. Elementu bat gehiago izate horrek bat zenbakiaren definizio edo intuizioa eskatzen duelako jada. Arazo larriagoak sortzen dira (jatorrizko) errekurtsioa kontsideratzen dugunean.

Azkena, noski, ondorioei eskainitakoa da, arrazoimenari eta arrazoizko intuizioari. Bere proposamenaren araberako aritmetikaren eta multzoen teoriaren eraiketa burutu nahian, intuizionismotik harago joango da eta zenbaki arrunten ezagutzaren berri emango du predikagarritasuna kontzeptuaren bitartez. Predikagarritasun kontzeptua Russellek eta Poincarék XX. mendearen hasieran izandako logizismoari eta paradoxei buruzko eztabaidan sortutako kontzeptua da eta klasea bat definitzen duen predikazioa eta klasea definitzen ez duen predikazioaren arteko muga zehaztu nahi zuen, Poincarék proposatutako gurpil zoroaren printzipioan oinarrituta. Ondorioa argia zen, edozein predikatuk ez du klaserik definitzen edota, bada predikaturik objekturik aurresuposatzen ez duenik. Beraz, klaseak definitu egin behar dira aski ez delako predikatu edo ezaugarri bat aipatzea. Matematiketan erabiltzen den definizio metodorik zabalduena indukzio bidezko definizioa da. Gogoratu beharko genuke hemen Poincarék eta Russellek izandako eztabaida, aipatutakoarekin lotua, matematika-indukzio bidezko definizio eta printzipioaren izaera logikoa ala matematikoari buruzkoa. Honek, noski, matematika-indukzioaren printzipioa aztertzera eramaten gaitu. Bukatzeko, Parsonsek funtsezko tesia edo bere oinarrizko argudioa azalduko digu: zenbaki arrunten sistema bakarra da (isomorfia salbu). Sistema ezberdinak balira ere, egitura berdina izango lukete eta bakartasun hau matematika-indukzioaren kontzeptutik, Parsonsen kontzeptu berezitik zehazkiago esanda, datorkio aritmetikari eta, honen parte izanik, zenbaki arrunten sistemari.

Xabier Arrazola
ILCLI