

Helburu geometrikoen eskuratze-mailaren kategorizazio bidean Van Hiele ereduaren barruan¹

*Joxemari Sarasua Fernández
Modesto Arrieta Illarramendi*

Euskal Herriko Unibertsitatea
Matematika eta Zientzia Esperimentalen Didaktikarako Saila
Donostiako Irakasleen Unibertsitate Eskola

GAKO-HITZAK: Ahalmen espaziala. Van Hiele erdua. Geometria. Pedagogia. Matematikak.

Artikulu honetan zenbait ekarpen plazaratu nahi ditugu derrigorrezko zein unibertsitate-aurreko eskolaldian zehar landu beharko liratekeen eduki eta helburu geometrikoak modu eraginkorrago batean zedarritu nahian. Van Hiele erdua abiapuntu harturik, irudi lauei dagozkien helburu geometrikoak kategorizatzeke nondik norakoak zirriborratuko ditugu. Era berean, azterketa honen harian Van Hiele erduan detektatu ditugun zenbait hutsuneren berri ere emango dugu.

1. SARRERA

Azken hamarkadetan berebiziko interesa piztu da ahalmen espaziala eta geometriaren irakaskuntzaren inguruan. Jakin-min hau ez da ustekabea, ezta arrazoirik gabea ere. Izan ere, «matematika modernoa» deritzanaren gorenaldiak, batez ere hirurogei eta hirurogei eta hamarreko hamarkadetan, espazio-gaitasunarekin loturiko eduki geometrikoak baztertzeraz jo zuen geometriaren formalizazio eta aljebratzearen mesedetan (Arrieta, 2003; 59.-60. orr.).

Esan daiteke, laburbildu beharrez, bi izan direla azken denboretan pentsamendu espazialaren eta geometriaren analisisira lerratu diren teoria-ildo nagusiak, zein bere ikuspegitik eta interes-guneetatik abiatuz: Piaget-en teoria psikogenetikoa, batetik, eta Van Hiele erdua, bestetik.

¹ Artikulu honen bertsio bat 2006ko apirilaren 26 eta 29 bitartean Bilbon ospatutako «INFAD» XIII. Psikologia Kongresura aurkeztu zen komunikazio gisa.

- Lehenak espazio errealetik haurraren espazio psikologikorako bidean gertatzen diren buru-bilakaeretan jarri zuen arreta, kontzeptu espazialen garapen ebolutiboa aztertu nahian (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960; Piaget & Inhelder, 1967). Hori horrela, erlazio geometrikoen arteko mailaketa moduko bat osatu zuen, oinarriko-etatik hasi eta konplexuetaraino: *topologikoak* (formarekin edo tamainarekin zer ikusirik ez duten propietate globalak), *proiektiboak* (perspektibaren ideiarri lotuak; hau da, objektu bat posizio edo angelu ezberdinetatik ikusita bere forma iragartzeko gaitasunarekin erlazionatuak) eta *euklidearrak* (tamainari eta distantziari dagozkien propietateak).
- Van Hiele-k (1986) geometriari buruzko ikuskera bikoitza hartzen du: espazioaren zientzia gisa eta, aldi berean, egitura matematiko bat frogatzeko tresna gisa, arrazoibide moduak bereiziz eta hauen artean halako sekuentziario bat proposatuz, ondoko atalean zehaztuko denez.

Auzi bat, ordea, ebatzi gabe dago oraindik: bi ikerketa lerrook osagarriak izan daitezke?; posiblea litzateke bi ikuspegiok batera besarkatuko litzuzkeen eredu bateratzailerik ematea?

Bada hemen, hala ere, azpimarratzekoa den zerbait: badirudi ikerketa-lerro bakoitzak eduki-eremu berezia hartu duela langai. Isometriek, irudi lauek, angeluek eta solidoek, esate baterako, trataera joria jaso dute Van Hiele ereduaren ildoko hainbat ikerketen aldetik (Burger & Shaugnessy, 1986; Jaime & Gutiérrez, 1990; Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991; Jaime & Gutiérrez, 1996; Alfonso, Camacho & Socas, 2000). Beste eduki batzuek, berriz, hala nola nozio topologikoek edo propietate proiektiboek, ez dute tokirik aurkitu lerro bereko azterketetan (Hershkowitz, 1990, 93. orr.).

Eredu teoriko global baten gabezia sumatzen dugu espazioa bistaratzeko gaitasuna aztertzeko orduan; honek, gainera, ikerketa bateratuek eta eraginkorrek aurre egiteko definizio gutxiko gune lainotu ugari dakartza (Arrieta, 2003): zer ulertzen dugu zehazki *ahalmen espaziala*, *orientazio espaziala* edo *bistaratzea* diogunean?; matematikaren irakaskuntzan azken urteotan agertu diren ikuspegi berrien argitan, merezi al du eskola-kurrikulumetako geometria berrikustea?; eta erantzuna baiezkoa bada, posible al da eduki, helburu eta prozedura geometrikoak, Haur Eskolatik hasi eta Batxilergora bitartean, sailkatu, kategorizatu eta proposamen didaktiko bateratzaile eta global batean integratzea?

Arrietak hiru auzi edo ikerketa-lerro plazaratzen ditu heziketa matematikoak espazio-gaitasunari loturik aurre egin beharreko erronka gisa:

- **1. AUZIA:** Ahalmen espazialaren egitura aztertzeko faktoreei, hauekin loturiko prozesu kognitiboei eta jarduera espazialak ebazteko estrategiei dagokienez.

- **2. AUZIA:** Ahalmen espaziala eta honi eskolaldi osoan zehar dagozkion helburu geometrikoak berraztertzea.
- **3. AUZIA:** Proposamen didaktikoak bateratzeko eredu baten beharra: nolako baldintzak bete beharko lituzke proposamen bateatzaile batek ahalmen espaziala etengabe eta orekatuki garatzen lagunduko badu?

Artikulu honen asmoa bigarren eta hirugarren auzien argitze lanean aurrera egitea da. Zehatzago esanda, Van Hiele eredu abiapuntu harturik, derrigorrezko irakaskuntzan zehar geometria arloan (eta orobat irudi lauetan) ikasleak bereganatu beharko lituzkeen helburuen halako kategorizazio bat eman nahi genuke, behar denean azpi-sailkapenak ere proposatuz. Birkategorizazio honen ondoren, Van Hiele ereduaren zenbait alderdi hobetzeko proposamen ildo batzuk zirriborratuko ditugu.

2. VAN HIELE EREDUA

Askotarikoak ditugu teoria psikogenetikoak haurren garapen espaziala nola gauzatzen den ulertzeko emandako giltzak. Era berean, ezin gutxie-tsi daitezke Piaget-en ekarpenak arlo honetan, kontzeptu geometrikoen sorrerari buruzko hainbat ikerketarako marko edo erreferente noraezkoak izan baitira (besteak beste, eta egileak berak aitortzen duenez, atal honetan aurkeztera goazen eredurako) (Van Hiele, 1986, 5.-6. orr.).

Esan daiteke, laburbildu beharrez, Piaget-en ikerketen eremua ezagutzaren psikologia eta ideia matematikoen garapena dela, nagusiki; proposamen metodologikoetan, ordea, hankamotz samar geratzen da. Konstruktibismoak, eta orobat teoria psikogenetikoak, ondoko helburua du: ikasleek nola ikasten duten azaltzea. Maisu-maistrek nola azaldu behar duten, ordea, beste kontu bat da; horri buruz ezer gutxi dio. Van Hiele-ren proposamena hutsune hau betetzera dator neurri zabal batean: geometriaren ikaskuntza deskribatu eta lagundu nahi duen hezkuntza-eredu globala da².

Van Hiele hezkuntza-ereduaren muina lau printzipio hauetara laburbil daiteke (Jaime & Gutiérrez, 1990):

- i) Matematika-ikasleengan hainbat perfekzio-maila aurki daitezke euren arazoibideaz denaz bezainbatean.

² Van Hiele diogun arren, senar-emazte bati buruz ari gara: Pierre Marie Van Hiele eta Dina Van Hiele-Geldof bikote nederlandarrari buruz, hain zuzen ere. Matematika bi irakasle hauek geometria arloko ikaskuntza errazteko eta azkartzeko eredu plazaratu zuten 1957. urteko beren doktoretza tesian. Handik gutxira Dina hil zen, baina bere senarrak ikerketekin segitu zuen, hasierako proposamenak osatuz eta aberastuz.

- ii) Ikasleak bere arrazoibide-mailari dagozkion gauzak bakarrik uler-tuko dizkio irakasleari.
- iii) Erlazio matematiko bat ezin adieraz badaiteke ikasleen oraingo arrazoibide-mailaren arabera, itxaron egin beharko da ikasleek go-gagoko arrazoibide-maila bat eskuratu arte.
- iv) Ezinezkoa da pertsona bati batera edo bestera arrazoitzen irakastea. Matematika era egokian irakatsiz, ordea, lehen bait lehen bes-te modu batera arrazoitzen lagun dakioko.

Van Hiele ereduak bi alderdi ditu, beraz:

- a) **Alderdi deskribatzailea** edo analitikoa: sekuentzia bat osatzen du-ten hainbat arrazoibide mota identifikatzen ditu, *arrazoibide-mailak* deritzenak. Gizabanakoaren arrazoitzeko gaitasunak etapa guzti ho-riek ibili behar ditu jakintza-arlo bat ikasten hasten denetik garapen intelektual goren batera iritsi arte. Pertsona guztiek zeharkatzen di-tuzte maila horiek —behinik behin, geometria arloko— zerbait be-rria ikasten hasterakoan: haur txikiek, lehen eta bigarren hezkuntza-ko ikasleek, unibertsitateko ikasleek eta, oro har, pertsona heldu orok.
- b) **Alderdi pedagogikoa**: argibideak eta proposamen didaktikoak es-kaintzen dizkio maisuari ikasleak hurrengo arrazoibide-mailara iri-tsi daitezen. Proposamen hauetaz baliaturik, hezitzaileak unitate di-daktiko mardulak osa ditzake, hain zehatzak eta zorrotzak dira argibideak. Argibide hauei *ikaskuntza-faseak* deritze.

Ohar bat, hala ere: Van Hiele ereduak gidatzen duen asmoa ikaskuntza eta arrazoibide matematikoari dagokio bere osotasunean. Hala ere, orain arte burutu diren ikerketa garrantziko guztiek geometriaren eremuan jarri dute arreta. Gehiago esango genuke: oso zaila dirudi —oraingoz, behin-tzat— Van Hiele ereduak geometria ez den beste esparru matematiko batean aplikatzeak. Horrela egitekotan aldaketa oso sakonak sartu beharko lirate-ke arrazoibide-mailen karakterizazioetan; ildo horretan egin diren saio guz-tiek, gainera, emaitza eskasak lortu dituzte (Hoffer, 1983; Jaime & Gutié-rrez, 1990).

Jarraian Van Hiele-k proposatu zituen bost arrazoibide-mailak deskri-batuko ditugu, bakoitzaren ezaugarri nagusiak emanaz eta, beharrezkoa de-nean, adibide konkretuez (bereziki irudi lauei buruzkoak) baliatuz (Hoffer, 1983; Burger & Shaughessy, 1986; Jaime & Gutiérrez, 1990):

1. MAILA: EZAGUTZA OROKORRA

—Etapa honetan kontzeptu geometrikoak era global batean ikusten dira, osagairik edo atributu adierazgarririk ez balute bezala. Irudi geometrikoak, adibidez, unitatetzat jotzen dira, eta hauek deskriba-tzerakoan atributu ez-adierazgarriak erabiltzen dira.

- Irudi geometrikoak beren forma edo itxura fisikoaren arabera eza-
gutzen dira, ez beren parteak edo propietateak aztertuz. Ondorioz,
irudien arteko sailkapenak antzekotasun edo desberdintasun fisiko
globalez baliatuz burutzen dira. Ondoko espresioak ohikoak dira
deskribapenak egiteko: «badakit-zeren antzekoa da», «ez-dakit-zeren
itxura du», e.a.
- Maila honetako ikasleak ezin du orokortu irudi batean ikusten di-
tuen ezaugarriak klase bereko beste irudi batera.
- Ikaslea hiztegi geometrikoa ikasteko gauza da, forma bereziak iden-
tifica ditzake eta, irudi bat emanik, kopia dezake.

2. MAILA: ANALISIA

- Ikasleak konturatu egiten dira irudi geometrikoak osagaiez edo ele-
mentuez osaturik daudela, baita propietate matematikoak dituztela
ere. Irudia osatzen duten parteak deskribatu eta bere propietateak
eman ditzakete, beti ere modu informal batean. Irudiak karakteriza-
tzeko gauza dira.
- Esperimentazioaz eta behaketaz baliaturik ikasleak bestelako pro-
pietateak ondoriozta ditzake, klase bereko beste irudietara jenerali-
zatuz.
- Ikasleek ezin dute propietate batzuk besteekin erlazionatu, eta, on-
dorioz, ezin dute irudien arteko sailkapen logikorik burutu (behin-
tzat beren elementuak edo propietateak erabiliz; formaz, koloreaz
eta abarrez baliatuz bai).

3. MAILA: SAILKAPENA

- Arrazoibide (matematiko) formala gorpuzten hasten da etapa hone-
tan. Ikasleak badaki propietate batzuk bestetatik ondorioztatzen di-
rela, eta elkarren arteko inplikazioak edo erlazioak ere aurki ditzake.
Oro bat, irudi geometrikoen familiak logikoki sailka ditzake ezagun
dituen propietate edo erlazio geometrikoei kontu eginez. Dena dela,
bere arrazoibidea manipulazioaren menpekoa da oraindik.
- Ikasleek definizio matematiko formalak eman ditzakete; definizioak
zertarako diren eta nolako ezaugarriak dituzten ulertzen dute.
- Arrazoiketa logiko-formal baten ondoz ondoko urratsak ulertu
arren, ikasleek ez dute frogapenaren ez egitura ez beharra sentitzen.
Irakasleak frogapen baten urrats kateatuak azaltzen baditu, ulertzeko
gai dira, baina ezin dute euren kabuz eraiki.

4. MAILA: DEDUKZIO FORMALA

- Arrazoibide-maila honetara iritsita, ikasleek arrazoiketa logiko-for-
malak ulertu eta eraiki ditzakete beren kabuz. Ondoz ondoko froga-

penek zentzua dute jadanik, eta beharrezkotzat jotzen dituzte enunziatu bat egia dela konprobatzeko.

- Ikasleek emaitza batera bide bati baino gehiagori jarraituz hel daitezkeela onartzen dute. Definizio baliokideak ere egon daitezkeela ulertzen dute.

5. MAILA: ZORROZTASUNA

- Ikasleak hainbat axiometan oinarrituriko sistemak konpara ditzake.
- Ikasleak hainbat geometria azter ditzake eredu konkreturen beharrik gabe.

3. VAN HIELE EREDUAREN ZENBAIT HUTSUNE

Ezin uka daiteke Van Hiele ereduaren inguruko hainbat proposamenek bete-betean asmatu dutela, bai alderdi didaktikoari bai geometriaren ikaskuntza prozesuari dagokionez. Horrela geratu da agerian azken hamarkadetan: bere ildoko proposamen eta teoria ugari sortu dira, hezkuntza zein akademi esparruetan berebiziko interesa piztu dutenak, eta bere kategoriek, analisi moduek eta ekarpen didaktikoez aparte tokia berenganatu dute hainbat herrialdetako curriculumetan (Hoffer, 1983).

Bultzada honi esker posible izan da ikasleek eduki geometrikoak eskuratzten dituzten prozesua era lokal batean modelizatzea, baita arrazonomendu geometrikoaren hainbat maila hierarkizatu eta karakterizatzea ere. Honen ondorioz ikasleen maileri egokiago dagozkien eta ikaskuntza prozesua nabarmenki azkartzen dituzten ekarpen didaktiko zehatzak ere plazaratu dira.

Orain arte Van Hiele teoriaren ekarpenak eta abantailak eman ditugu. Hala ere, arrazoibide mailak, hauen deskriptoreak eta, orokorrean, inguruko literatura arreta handiagoaz aztertuz gero, analisia sakonagoa merezi duten zenbait gabezia suma daitezke. Azaldu zaizkigun hutsune nagusiak jarraian zerrendatuko ditugu:

3.1. Lortu beharreko helburuen alde aurreko definiziorik eza

Arrazoibide mailen karakterizazioetan sarritan aipatzen dira, agerian zein ezkutuan, ikasleak maila jakin batean kokatu ahal izateko bereganatu behar dituen trebetasunak (adibidez, «konparatzen du», «antzematen du», «ez du klase barnekotasunik onartzen», «deduzitzen du», «orokortzen du», etab.). Hala eta guztiz ere zenbait hutsune sumatu ditugu ikasleak bere eskolaldian zehar eskuratu behar omen dituen helburu geometrikoari buruz:

- i) Ez dira propio zehazten.

- ii) Ez dira berdefinitzen, edo egokitzen, arrazoibide mailaren arabera.
- iii) Ez dira berdefinitzen, edo modu lokal batean egokitzen, eduki geometrikoen arabera.
- iv) Ez dira alde zuzenetik antolatzen kategoriaz ezberdinetan, eta ez da ematen euren arteko hierarkia lortzeko edo erlazio sarrerik.
- v) Ez dira parekatzen Van Hiele ereduko arrazoibide mailen deskriptoreekin, ea bat datozen ala ez.

Formulazio global baten gabeziak definizio gabeko hiru esparru hauek ukitzen ditu: (a) *zeintzuk diren* irakatsi beharreko *edukiak*, kontzeptuzkoak zein prozedurazkoak, (b) hauek *nola sekuentziatu behar diren* heziketa urrats ezberdinetan, eta (c) *nola berregokitu Van Hiele-ren mailak* helburuen sailkapen berriaren barruan. Itxura denez, Van Hiele eredua inguruko ekarpen ugari zehaztasun gutxiko koordinatu hauek garatzen dira.

3.2. Ezaugarrien esleipen asimetrikoa

Helburu geometrikoak birkategorizatze bidean, arrazoibide mailen buruzko deskriptoreak aztertu ditugu osotasunean. Analisi honen ondorioz, helburuei dagozkien ezaugarrien arteko desorekatik eratorritzen diren hutsune nabarmenak antzeman ditugu. Beste era batera esanda: helburu batzuk argikiro zehazten badira ere, beste batzuen kasuan, edo (a) *ez dira definitzen*, edo (b) *ez dira behar bezala garatzen*, edo (c) *ez dira aipatu ere egiten*. Horrenbestez, maila guztietatik 70 deskriptore ez daude era egoki batean sailkatuta; honek, bere aldetik:

- i) Ezaugarri horien ulerkuntza oztopatu egiten du.
- ii) Mailen arteko mugak ilundu egiten ditu.
- iii) Oharkabeko eskasiak edo gabeziak ezkuta ditzake.

3.3. Proposamen didaktiko itxiak

Behatu denez, Van Hiele eredua gaineko ekarpen didaktikoen sarritan alde batera uzten dituzte ikaskuntza proposamenak garatzeko orduan kontuan hartu beharreko zenbait alderdi garrantzitsu. Bereziki honako puntuak aipatu nahi genituzke:

- i) Ikaskuntza geometrikoari dagozkion zenbait alderdi psikologiko, adibidez: (a) geometriako prozesu kognitiboen berezitasunak (adibidez, kontzeptu eta kontzeptuaren gogo-irudiaren arteko bereizketa) (Vinner, 1983), (b) errorearen trataera, eta (c) elementu distaktoreak (Hershowitz, 1990).

- ii) Erabili daitezkeen materiala eta baliabideen aniztasuna: (a) manipulatioak (geobandak, zotzak, puzzleak, tangrama, teseladunak, Lego etab.), eta (b) tresna birtualak (eraikuntza softwarea).
- iii) Irakasleen sasi ulertuak eta hutsuneak, bai Van Hiele ereduari bai jaso duten heziketa hertsiki matematikoari dagokionez.
- iv) Ahalmen espazialaren eginkizuna (Arrieta, 2003).

Ados daude ikerlari guztiak harreman estua dagoela hizkuntza eta arrazoibide mailen artean, eta horregatik hizkuntza elementu funtsezkotzat jotzen da ikaskuntza prozesua eraginkorra izateko (Linares eta Sánchez, 1990). Era berean, gorago aipatutako alderdiak ere kontuan hartu eta Van Hiele ereduaren barruan nolabait integratu beharko lirarteke.

3.4. Lehenengo hezkuntza urratsetarako ekarpen espezifikorik eza

Hershkowitz-ek nabarmendu duenez (Hershkowitz, 1990, 93. orr.), azken hamarkadetan burutu diren pentsamendu geometrikoari buruzko ikerketa gehienek 9 urtetik gorako ikasleengan, unibertsitate eskoletako irakaslegaiengan eta, baita ere, lanean ari diren irakasleengan jarri dute arreta. Hala ere, ezer gutxi dago haur txikien ikasketa goiztiarrari buruz, «ikerlariak oso goizik hasten diren prozesuen berri jakiteko geroago azaltzen diren aztarnak bakarrik kontuan hartu nahi balituzte bezala». Oso gutxi dira, era berean, Van Hiele ereduak adin tarte horretarako eman dituen ekarpenak. Bereziki ondoko alderdiak sumatzen dira faltan:

- i) Haur hezkuntzarako helburu espezifikoak argitzea: unibertso batuak edo biderkakorrak sailkatzea, antzematea, margotzea, marraztea etab.
- ii) Haur hezkuntzarako proposamen didaktiko espezifikoak.
- iii) Beharrezkoa balitz, lehen arrazoibide maila azpisekuentziaztea eraginkorrago bihurtzeko.

3.5. Zenbait eduki multzo jakinetara mugatzea

Van Hiele ereduak berezkoa omen duen asmo oro-hartzailea gorabehera, gutxienez pentsamendu geometrikoaz denaz bezainbatean, zerbaitek arreta deitzen digu: ikuspegi *piagetiano* batetik trataera joria jaso duten eduki batzuek (adibidez, nozio topologiko edo proiektiboak dagozkienek) oraindik ez dute lekurik aurkitu Van Hiele ereduaren barruan. Beste eduki batzuei buruz (isometriak, angeluak, irudi lauak, solidoak) ezin esan daiteke gauza bera, etengabeko ikergaiak izan baitira ereduak sortu zenez geroztik, orain dela ia mende erdia (Burger & Shaughnessy, 1986; Jaime & Gutiérrez, 1990; Jaime & Gutiérrez, 1996; Guillén, 1997; Alfonso, Camacho & Socas, 2000).

4. VAN HIELE EREDURAKO HOBEKUNTZA PROPOSAMENA

Gure ustez, Van Hiele ereduaren deskriptoreak helburu geometrikoen ikuspegitik egoki berraztertuko balira, ondoko abantailak aterako genituzke:

- a) Maila bakoitzaren ezaugarrien ulerkuntza erraztea.
- b) Maila bakoitzaren mugak zehazten laguntzea.
- c) Ereduaren gabeziak edo hutsuneak erakustea.

Beraz, berrazterketa horri ekin diogu.

Hasteko, (i) helburu geometriko guztiak banan-banan zerrendatu ditugu, derrigorrezko irakaskuntzarako indarrean dagoen curriculumaren arabera; ondoren (ii) modu arrazional batean antolatzerik ba ote dagoen aztertu dugu, arloaren edo eduki-multzoaren arabera banatuz.

Derrigorrezko eskolaldian zehar honako hau dugu matematika irakaskuntzaren helburu orokorra: ikasleak bere adimen-gaitasuna hobetzea eta beste arloetan aplikatu daitezkeen tresnak bereganatzea. Guzti hau zenbait prozedura, hizkuntza-gaitasun eta baliabide eskuratzean hezurramitzen da, ondoko kategorietara bideratuak: (i) KONTZEPTUEN ULERMENa, (ii) PROZEDURAZKO KALKULUa eta (iii) PROBLEMEN EBAZPENa. Azken hau aurreko helburuen bat-egitearen emaitza bezala ulertzen dugu (izan ere, horien gainean eraikitzen da); beraz, lehenengo bietan jarriko dugu geure arreta, jakin badakigu ere ebazpenerako gaitasunak eskuratzeko aparteko analisisa merezi duen berezko dimentsioa duela.

Hori horrela, gure LEHENENGO KATEGORIA edukiari dagokio, hau da, matematika ezagutzaren bereganatze orokorrari.

Bi helburu orokorretako bakoitza beste bi bloketan banatzen da. Bi bloke hauek helburuak eskuratzeko beharrezkoak diren gaitasunei eta matematika-ezagutzen bereganatzea ebaluatzeko sarritan erabiltzen diren arloko konstanteei dagozkie. Hau da:

1. Katgoria	2. Katgoria
KONTZEPTUEN ULERMENA	ANTZEMATEA (gaitasun sentso-motoreak)
	KOMUNIKAZIOA (gaitasun idatziak edo ahozkoak)
PROZEDURAZKO KALKULUA	IRUDIKAPENA (marrazteko gaitasunak)
	ARRAZONAMENDUA (gaitasun logikoak)
PROBLEMEN EBAZPENA (aurreko bien sintesia)	

BIGARREN KATEGORIA honek, modu natural batean, gaitasun bloke bakoitzari doazkion *ekintzazko aditzak* identifikatzen dira. Hauek zailtasun mailaren arabera ordenatuko ditugu. Hona hemen, adibidez, HIRUGARREN KATEGORIA hau gehituz, irudi lauei dagozkien helburu guztiak:

1. Kategoria	2. Kategoria	3. Kategoria
KONTZEPTUEN ULERMENA	ANTZEMATEA	IDENTIFIKATU
		ERLAZIONATU
		SAILKATU
	KOMUNIKAZIOA	DESKRIBATU
		DEFINITU
PROZEDURAZKO KALKULUA	IRUDIKAPENA	MARRAZTU
	ARRAZONAMENDUA	INDUZITU
		DEDUZITU
		FROGATU
PROBLEMEN EBAZPENA (aurreko bien sintesia)		

Ikusten denez, helburuak hierarkizatuak ageri dira gaitasun multzo bakoitzerako. *Identifikatzea* diogunean «uste duguna edo bila gabiltzana ote den antzematea» esan nahi dugu; *erlazionatzea*, berriz, honako hau da: «gauza bat beste batekin harremanetan jartzea, biak konparatuz»; sailkatzea diogunean «gauza bakoitzari dagokion multzoa edo klasea zehatzuz ordenatzea» esan nahi dugu. Beraz, *identifikatzea erlazionatzea* baino lehenagokoa dugu, izan ere irudi batzuk konparatu ahal izateko, bakoitza den bezalakoa antzeman behar da. *Erlazionatzea* ere *sailkatzea* baino lehenagokoa da, azken honek sailkatu beharreko irudi guztien arteko erlazio posible guztiak ulertzea eskatzen baitu: partekotasuna, barnekotasun anizkoitza, dikotomikoa, ez-dikotomikoa etab.

Deskribatzea esaterakoan zera ulertu behar dugu: nola edo hala definitzea, zehatzago esanda, «objektu baten ezaugarriak edo osagaiak zehatz-mehatz zerrendatzea, haren atributu esanguratsuak edo ez-esanguratsuak emanez». Beraz, definitzearen ekintza baino aurreragokoa da; izan ere *definitzea* hau da: «argi eta zehatz-mehatz objektu baten esanahia finkatzea hura karakterizatzen duten atributu beharrezko eta nahikoen zerrenda minimo emanez».

Marratzea izenpean irudikatzen duten hainbat ekintza adierazi nahi ditugu: lekuz aldatzea, proiektatzea, itxuraz aldatzea, koloreztatzea, eskuz marratzea, konpasaz eta erregelaz marratzea, baliabide manipulati- boez edo softwarez eraikitzea etab.

Induzitzea honi esaten diogu: «banakako hainbat behaketa edo esperientzietatik abiatuz fenomeno batean ezkutuan edo inplizituki emanda dagoen printzipio orokorra erauzteari»: adibidez, ekintza eta fenomenoetatik, legeak; banakako objektu batetik, bere klasea; efektuetatik, arrazoiak, etab. Partikularrari atxikituriko ekintza da, deduzitu ahal izateko behar den mailaren aurrekoa, inondik ere. Izan ere, *deduzitzea* deritzogu «printzipio, proposamen edo suposizio batetik abiatuta ondorio logikoak ateratzeari»: esaterako, osotasunetik parteak, edo klase batetik bere ordezkariak. Bi ekintzok matematikan *frogatzea* deitzen dugunaren aurrekoak dira: «arrazonamendu sintetiko eta bateratzailea erabiliz, enuntziatu bat egiaztatzea». Froga guztiek ondoko osagaiak dituzte: (a) hasierako planteamendua; (b) garapen lineala edo konplexua, urrats bateko edo gehiagoko arrazonamendu modu inductiboak zein deduktiboak biltzen dituena, eta (c) aurreko urratsek, egitura itxia eta logikoa osatuz, hartaraten duten bukaera.

LAUGARREN KATEGORIA batek, hau era zailtasunaren arabera hierarkizatuak, erakutsiko digu helburu didaktiko bakoitzaren bereganatze edo ulermen maila. Hona hemen, irudi lauez denaz bezainbatean, gure sailkatze-kategorizazio proposamena:

1. Katgoria	2. Katgoria	3. Katgoria	4. Katgoria
kontzeptuen ulermena	antzematea	identifikatu	osotasunaren arabera
			partearen arabera
		erlazionatu	osotasunaren arabera
			partearen arabera
		sailkatu	osotasunaren arabera
			partearen arabera
	komunikazioa	deskribatu	osotasunaren arabera
			partearen arabera
definitu	ezaugarri guztiak		
	ezaugarri minimoak		
prozedurazko kalkulua	irudikapena	marraztu	kopiatuz
			sortuz
	arrazonamendu	induzitu	orokortuz
			egiaztatuz
		deduzitu	eraikiz
			egiaztatuz
frogatu	eraikiz		
problemen ebazpena (aurreko bien sintesia)			

Identifikatu, erlazionatu, sailkatu, deskribatu eta defini dezakegu *osotasunaren arabera* (osotasunari begira) edo *partearen arabera* (osagai edo propietateei begira). Sailkapen bat *osotasunaren arabera* egina dela esango dugu objektu geometrikoaren itxura orokorraren arabera bada; beraz hau ez da izango, zentzu hertsian, *sailkapen logiko* bat. Sailkapen bat, berriz, *partearen arabera* egina dela esango dugu benetako sailkapena bada: esan nahi baita, ohiko eragile logikoez baliatuz (partekotasuna, barnekotasun anizkoitza etab.) burutzen denean. Kontzeptu honen sekuentziazioari behar-beharrezkoa deritzogu, esangura matematiko zorrotzaz gabetuko badugu ere, bere eskuratzeko mailaren arabera hierarkia bat eratu ahal izateko. Berdin egingo dugu bestelako nozioei atxikituriko esanahiari dagokionez, adibidez: definitu (minimoa ez den definizio bat, zentzu hertsian, ezin daiteke halakotzat jo, nahiz eta onargarria izan daitekeen, eta baita ere, arrazoibide matematikoko maila batzuetan, berezko helburua osa dezakeen), induzitu, deduzitu, frogatu etab. Sekuentziazio bikoitz honi (hau da, zenbait kontzeptu geometrikoaren esanahian eta bereganatzean) erabat justifikatua deritzogu Van Hiele ereduaren barruan. Izan ere, funtsezko behar bati erantzuten dio, alegia, hizkuntza eta terminologia ikaslearen arrazoibide-mailari egokitzeari, hark ulertuko badu.

Bestalde, objektu bat marraztu daiteke *kopiatuz* (esate baterako: margotuz, kalkatuz, proiektatuz edo eredu bat kopiatuz, eskuz edo konpasa eta erregela erabiliz), edo bestela *sortuz*, adibidez definizio idatzi edo ahozko bat emanda.

Arrazonamendu induktiboa, esperimentazioa abiapuntu harturik, *orkortuz* ager daiteke (adibidez, objektu batetik edo objektu kopuru txiki batetik klase batera, edo banakako kasu batetik lege batera) edo bestela prozedura formal eta analitiko baten bidez.

Era berean, arrazonamendu deduktiboa eta frogapenak perspektiba bikoitzetik landu daitezke: kasu kopuru mugatu batean *egiaztatuz*, neurketa zuzen edo zeharkakoen bidez, edo froga analitiko bat *eraikiz*. Adibidez, nola *frogatu* liteke *egiaztatuz*, zeharkako neurketen bidez, hiruki bateko barne angeluek angelu laua osatzen dutela? Bada, edozein hiruki kartulina batean margotu ondoren, bere angeluak guraizeez moztuz eta lerro zuzen batean bata bestearen ondoan ipiniz.

* * *

Gure iritiz, Van Hiele ereduaren deskriptoreak helburu geometrikoen ikuspegitik berraztertzeak hirugarren atalean seinatu ditugun gabeziak osatzen lagunduko luke; era berean, ikasleek eskuratu beharko lituzketen helburu geometrikoak eraginkorrago definitu eta zedarritzeko baliagarria izan daitekeelakoan gaude, baita mailen ezaugarriak orekatuago eta arrazionalago banatzeko ere.

Gainera, berrazterketak balio lezake, *mutatis mutandis* eta helburuak berregokituz, Van Hiele ereduaren ikuspegitik arreta nahikorik jaso ez duten hainbat eduki edo hezkuntza etapetarako ekarpen didaktiko berriei atak zabaltzeko.

Jasotze-data: 2006-04-03

Onartze-data: 2006-04-06

Abstract

This article aims to provide elements contributing to efficiently defining contents and objectives for geometry associated with obligatory and pre-university schooling. Taking the Van Hiele model as a reference framework, an outline is given of the categorisation of geometry objectives relating to plane diagrams which the students should acquire during their education in mathematics.

Keywords: *Space ability. Van Hiele Model. Geometry. Teaching. Mathematics.*

El presente artículo pretende aportar elementos que contribuyan a definir de manera más eficaz los contenidos y objetivos geométricos asociados a la escolaridad obligatoria y preuniversitaria. Tomando como marco de referencia el modelo Van Hiele, se esbozará una categorización de los objetivos geométricos, relativos a las figuras planas, que los alumnos deberían de adquirir a lo largo de su formación en matemáticas.

Palabras clave: *Capacidad espacial. Modelo de Van Hiele. Geometría. Pedagogía. Matemáticas.*

Le présent article prétend fournir des éléments qui contribuent à définir de manière plus efficace les contenus et objectifs géométriques associés à la scolarisation obligatoire et de la propédeutique. En prenant comme cadre de repère le modèle Van Hiele, on ébauchera une catégorisation des objectifs géométriques relatifs aux formes plates, que les élèves devraient acquérir tout au long de leur formation en mathématiques.

Mots clé: *Capacité de l'espace. Modèle de Van Hiele. Géométrie. Pédagogie. Mathématique*

BIBLIOGRAFIA

- ALFONSO, M.C.; CAMACHO, M.; SOCAS, M.M. (2000). «Dos ejemplos de unidades de aprendizaje desarrollados bajo la perspectiva de los V.H.: medidas de ángulos y giros». ALFONSO, M.C.; CAMACHO, M.; SOCAS, M.M. (Ed.), *Formación del profesorado e investigación en educación matemática II*, 11-50. Universidad de La Laguna. Tenerife.
- ARRIETA, M. (2003). «Capacidad espacial y educación matemática». *Educación Matemática* 15(3), 57-76.
- BURGER, W.F.; SHAUGHNESSY, J.M. (1986). «Characterizing the VH levels of development in Geometry». *Journal for Research in Mathematics Education* 7(1), 31-48.
- DAVEY, G.; HOLLIDAY, J. (1992). «Van Hiele: Guidelines for Geometry». *The Australian Mathematics Teacher* 48(2), 26-29.
- GUILLÉN, G. (1997). *El modelo de VH aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Doktorego tesia. Universitat de València.
- GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J.M. (1991). «An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the VH levels». *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3), 237-251.
- HERSHKOWITZ, R. (1990). «Psychological Aspects of Learning Geometry». En NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Ed.), *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 70-148. Cambridge UP. Cambridge.
- HOFFER, A. (1983). «Van Hiele Based Research». LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. 205.-227. Academic Press. Florida.
- JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. (1990). «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo Van Hiele». LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M.V. (Ed.), *Teoría y práctica en Educación Primaria*. 295-384. Alfar. Sevilla.
- JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Síntesis. Madrid.
- PEGG, J.; DAVEY, G. (1991). *Levels of geometric understanding*. 47(2), 10-13.
- PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Routledge y Kegan Paul. London
- PIAGET, J.; INHELDER, B. (1967). *The child's conception of space*. Norton. New York.
- VAN HIELE, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Academic Press. London.
- VINNER, S.; HERSHKOWITZ, R. (1983). «On concept formation in geometry». *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 83(1), 20-25.