

# Oinarri-aldaketako kontzeptu eta prozedurei dagozkien akatsen azterketa: Unibertsitateko 1. mailako aljebra

*Izaskun Baro Yubero*

izaskun.baro@ehu.es  
Matematika Aplikatua Saila  
Bilboko Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa  
Euskal Herriko Unibertsitatea

*Modesto Arrieta Illarramendi*

modesto.arrieta@ehu.es  
Matematikaren Didaktika saila  
Donostiako Irakasleen Unibertsitate Estola  
Euskal Herriko Unibertsitatea

**GAKO HITZAK:** Matematika. Didaktika. Akatsak. Analisi estatistikoa. Unibertsitate-hezkuntza.

## 1. SARRERA

Ingeniaritzaren lehen mailako ikasgai klasikoa da Aljebra Lineala. Ingeniaritza Eskolaren arabera, programa zerbait alda daiteke, baina nahiko irakasgai uniforme da. Bertan, lehenengo gai bezala, normalean Batxilergoan lantzen diren matrizeak eta ekuazio linealetako sistemak aztertzen dira. Gai hori garatu ondoren, ikasleei berriak egingo zaizkien gaiak hasten dira, berriak idazkera aldetik, baita kontzeptu aldetik ere. Gai hori eta, oro har, irakasgaia irakasteko erabili dudan metodoa honakoa da: teoria azaldu eta teoria horrekin erlazionatuta dauden trebatzeko ariketak egin.

Oro har, Matematika irakasgai jarraitua da, hau da, aurretik azaldutakoa ondo ulertua izan behar da hurrengoa ulertu ahal izateko. Are gehiago Aljebra. Aurreko gaia ez bada ulertu, hurrengoa ulertzea ezinezko lan bihurtzen da. Aldiz, aurreko gaia ulertu bada, hurrengoa ulertzea errazagoa da. Beraz, kontzeptuak argi egon behar du.

2006/2007 urtean Aljebra Linealeko irakasgaia lehen aldiz irakatsi nuenean, oinarri aldaketak ez zirela oso ondo ulertu konturatu nintzen, eta horrek kezka bat sortu zidan: agian ez nuen behar bezain ondo azaldu gaia, edo behar beste denbora eman atal hori azaltzen. Egia esan, Rojanok (1994, 46. orr.) esaten duen bezala, «ikuspegi kontzeptualistak aurre egin behar dio baita denbora didaktikoak eta eskola zikloko denbora errealak bat egiteko arazoari». Hau da, askotan —edo gehienetan— irakasle bezala denbora gehiago emango zenuke zerbait azaltzen, baina ikasgai horretako materia guztia emango baduzu, ezin duzu denbora hori guztia erabili. Oreka bat bilatu behar da, eta askotan hori da zailena.

Hala ere, Hernándezen aburuz (1995) bada beste arrazoi bat ere. Bere ustez, ez zaio ia garrantzirik ematen kontzeptuei, garrantzi handiena ohiko problemak ebatzeari ematen zaio. Beraz, ikasleari ohiko problema horietatik pixka bat alderatzen den problemak ebatzea eskatzen badiozu, erabat galduta ikusiko du bere burua, eta, horren ondorioz, gehitu egingo da akatsak egiten dituen ikasleen kopurua. Askotan, ikasleek buruz ikasten dituzte ariketa tipoak ebatzen, benetan zer egiten duten ondo ulertu gabe.

Bilboko Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoan, Aljebra Lineala irakasgaiko azterketaren zuzenketa ikasgaia eman duten irakasleen artean banatzen da, eta irakasle bakoitzak bi edo hiru ariketa zuzentzen ditu. 2006/2007 urtean oinarri aldaketen inguruko ariketa zuzentzeko aukera izan nuen. Eta oinarri aldaketen inguruan, akatsak behin eta berriro errepikatzen zirela ikusi nuen. Beraz, egokia iruditu zitzaidan akats horiek aztertzea. Izan ere, atal horretan egiten diren akats motak sailkatzeko aukera izango bagenu, eta ondorio jakin batzuk atera, bai irakasgaia ematen duten irakasle taldearentzat baita datozen ikasleentzat ere ondorio onuragarriak izango lituzkeela iruditzen zait.

## 2. AKATSEN AZTERKETAREN GARRANTZIA

Matematika ez da eskuratzen era natural batean, ez baita etengabe erabiltzen; ikasi eta landu egin behar da. Hori egin ezean, akats gehiago egiten dira, eta horien ondorioak larriagoak dira (Azarqui Taldea, 1994).

Hainbat ikerlarik (Matz, 1982; González eta Díez, 2002; Movshovitz-Hadar, Zaslavsky eta Inbar, 1987; Gallardo eta Rojano, 1988; Crowley, Thomas eta Tall, 1994; Rico, 1997, Socas, 1997) agerian utzi dute akatsen garrantzia beraien ikerketetan.

Oro har, akatsak giza-ezagutzaren eraikuntza eta elaborazio prozesuaren zati bat dira, bereziki, ezagutza zientifikoanrenak; era berean, baita ezagutza matematikoaren eraikuntza prozesuarenak ere.

Matematikan, hizkuntza naturalak ikur hizkuntzara iritsi behar du. Horrek gatazka batera eramaten gaitu. Hizkuntza naturalak esanahi ezberdinak aditzera eman dezakeen arren, hizkuntza matematikoa zehatza da, arau zehatzei jarraitzen die, eta ez du esanahirik bere ikurren interpretaziotik at.

Horrek ikasleei zailtasunak sortzen dizkie, eta akatsen iturburuetako bat izan daiteke (Fernández, Castro, Segovia eta Rico, 1996).

Akatsak eta porrotak ez dira erraz aztertzeoak. Akatsa ez da ezjakintasunaren, zalantzaren edo zoriaren ondorio hutsa, irakaskuntzaren teoria enpirista eta konduktibistak uste bezala. Palarea-k (1998) dioenez, akats asko arau bat erabili ezin den egoera batean (ezagutzen den arau baten egokitze okerra) egitearen ondorio dira. Akatsak egoera berri batera jakintza baten egokitzapenaren saiakera zentzudun baina ez arrakastatsu gisa defini daitezke.

Matematika hezkuntzako ikertzaileek ikasleek Matematikaren jakintza-aren gertakari zailtasuna aztertzen dute. Hala ere, ikerketa horietatik lortzen diren emaitzak ez datoz, oro har, eskolako errealtatearekin bat. Izan ere, oro har ikertzaileak ez dira eskolako irakasle, eta eskolako irakasleek ez dute ez ikertzen, ezta ere ikerketetatik lortutako ondorioak erabiltzen. Beraz, badirudi Matematika hezkuntzaren ikerketen emaitzak alde batera gelditzen direla. Aldiz, ikertzailea bera irakaslea bada, orduan lortutako errazago erabiliko ditu emaitzak (Rico, 1997).

Egin behar dugun horri, Cooper, Boulton-Lewis eta Atweh-k (1996) «ikerkuntza ekintza» izenarekin definitu zuten, alegia, jendeak errealtatea aldatzeko ikertzea da helburu nagusia. «Ikerkuntza ekintzaren» xede nagusia jendeari ikertzen laguntzen saiatzen da, errealtatea aldatzea helburu. Bereziki, norberari dagozkion hezkuntza- eta giza-errealtateak ikertuko ditu, eta berari dagozkion errealtatean ikertzen eta aldatzen saiatuko da. Horrela, bere irakaskuntzaren praktika hausnarketa, eztabaida eta berreraikuntza baterako ulergarriagoak izango dira, eta oraina eta geroa aldatzeko balioa irabaziko dute.

Kieran-en ustez (Palarea, 1998), hauxe da oraindik ere ikertzaileen helburua: ikasleek aljebra oinarriko egitura eta metodo aljebraikoak nola ulertzen dituzten ikertu beharko da gure ezagutza maila gehitzeko. Hori horrela ikertzen bada, eta ondorioak lortzen badira, aljebra erakusteko eredu berriak sor daitezke, non ikasleak arrakasta handiagoa lor dezakeen.

Kuhn-ek dio (Palarea, 1998) ekarpen adierazgarrietako bat ikertzaileek Aljebra eremuan garatzeko duten ikaskuntza-irakaskuntza teorien saiakeren eztabaida dela. Taldekatze horretan, aljebra erakusteko eredu teoriko pragmatikoak falta direla adierazten du.

Akatsen analisiak interes bikoitza du Rico-ren (1997) ustez: batetik, Matematikaren ikaskuntza-irakaskuntza hobeto bideratzeko estrategia orokor eta zehatzak antolatzen laguntzeko balio die irakasleei, zailtasun gehien eragiten duten gaietan sakonduz. Bestetik, gai horiek zuzentzeko estrategiak hobeto prestatzeko laguntzen die. Zentzu horretan, irakasleak Matematikaren zailtasunen informazio gisa ulertu behar ditu bere ikasleen akats zehatzak. Horrek ahalegin zehatza eskatzen du aurretik aipatutako bi norabideetan.

Akatsak sailkatzean bost helburu definitu zituzten Movshovitz-Hadarrak, Zaslavsky eta Inbar-ek (1987). Izan ere, artikulua horretan bertan esa-

ten duten bezala, Bigarren Hezkuntzako ikasleen Matematikako akatsak ez dira ustekabekoak, ikaslearentzat nolabaiteko logika duen prozesutik datoz. Bigarren Hezkuntzan gertatzen den hori zuzen-zuzenean heda daiteke Unibertsitatean Matematikaren kasura, eta bereziki Aljebrearenera.

Ricok (1997) ikusten duen moduan, akatsen tratamendua Matematikaren irakaskuntzan ez da zerbait arrunta, ezta demagogikoa ere. Ezin da konpondu ez baieztapen boluntaristekin, ezta deskalifikazio orokorrekin ere. Akatsaren kontzeptualizazioak eragina dauka Matematikaren hezkuntzan, Matematikaren jakintzaren eraikuntzan, bere hedapenean, ulermenean edo balorazioan.

Chevallard (Palarea, 1998) irakaskuntza funtzionala izatearen alde agertzen da, hau da, ezin da helbururik gabe egin. Modu horretan irakasten denean, ez da alferrikako irakaskuntza izango, baina bai ez-osoak, eta ondorioz, oztopo eta akatsen iturri. Aljebren egiten dena ez da, oro har, zertarako egiten den jakiten. Ikasleari iruditzen zaio irakaslearen gurari hutsagatik ikasi behar duela. Gainera, Torralbo, Maz eta bestek (2007) Matematika modu artifizial, testuingurutik kanpo, bizitzako egoera errealetatik urrun, eta algoritmoetan arreta berezia jarrita irakasten adela azaltzen dute. Eta horrek guztiak motibazio eza eragiten du askotan ikasleengan.

Ricok (1997) bi multzotan banatu zituen Matematikako irakasleak, klaseko jarreraren arabera: ohiko jarrera dutenak batetik, jarrera moderno eta aurrerakoiagoa dutenak bestetik. Lehen multzokoentzat akatsa datu objektiboa da, eta ikaslearen edo ikasle taldearen ezjakintasuna erakusten du. Beraz, akats hori kontrolatu egin behar da, zuzendu edo bestela zigortu (puntuak jaisten edo). Bigarren multzoko irakasleentzat, ordea, akatsak soilik zati batez eraikitako jakintza adierazten du, bidean dagoen prozesu baten emaitza. Irakasleak haren eboluzioan parte hartu behar du, blokeoak, bazterketak eta zigorrak saihesteko. Hala ere, bi multzoetako irakasleak ados daude hausnarketa batzutan, adibidez, akatsa zerbait naturala dela, ahal den azkarrena diagnostikatu behar dela, eta ikasleari akats hori gainditzeko lagundu behar zaiola.

### 3. AKATSEN SAILKAPENAREN BERRIKUSKETA

Matematikan akatsen azterketa denboran zehar garrantzitsua izan dela ikusi dugu. Hainbat ikertzailek aztertu dituzte ikasleen Matematika-akatsak eta urte desberdinetan. Hala ere, Matz-ek (1982) dioenez, bateragarritasun harrigarri bat dago ikasleek erdi-goiko mailatan egiten dituzten Matematika akatsetan. Hau da, oro har, ikasleen akatsak nahiko antzekoak dira, eta ez dago akats mota asko.

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky eta Inbarrek (1987) Matematikako akatsen hurrengo sailkapena egiten dute:

- Informazio espaziala eskuratzean sortzen direnak.
- Trebetasuna faltagatik sortzen direnak.
- Zorroztasun faltagatik sortzen direnak.
- Arau okerrak erabiltzerakoan sortzen direnak.

Artikulu berean, baina akatsa egiteko unea kontuan hartuta, beste akats mota batzuen sailkapen bat ematen dute:

- Ikasleak datu zehatz bat gehitu du, edo ez dio jaramonik egin datu zehatz bati.
- Ikasleak gaizki itzuli du idatzitako adierazpen bat Matematikaren hizkuntzara.
- Logikoa den bezala, ikaslearen ondorioa okerra da.
- Ikasleak definizio edo teorema baten bertsio oker bat aplikatu du.
- Ikasleak oinarritzko gaitasunetan egin du akatsa.

Beste ikerlari batzuek (Gallardo eta Rojano, 1988) Matematikan —eta, gure kasura ekarrita, Aljebran— egin daitezkeen akatsen beste sailkapen bat eman dute. Artikulu horretan, akatsak hurrengo hiru multzotan sailkatu dituzte:

- Estrapolazio-teknika okerra aukeratzeagatik sortutakoak.
- Ezagupen egoki baina ez nahikoa erakusten dutenak.
- Prozeduran sortzen direnak.

Azken urte hauetan egin diren akatsen sailkapenekin jarraituz, Socas eta Palareak (1994) ezberdintasun argi bat egiten dute akatsen eta oztopoen artean. Oztopoa ez dela akats egiaztatzen dute; aldiz, akatsak ikasleak dituen oztopoen ondorio izan daitezke. Artikuluan oztopoen sailkapena egiten dute, baina guk akatsetan jarriko dugu oraingoan arreta guztia. Kasu horretan sortzen duten akatsen sailkapena hau da:

- Aritmetikan oinarria duten Aljebrako akatsak.
  - Banatze propietatea gaizki erabiltzerakoan sortutakoak.
  - Elkartze propietatea gaizki erabiltzerakoan sortutakoak.
  - Sinplifikatzean egindakoak.
- Hizkuntza aljebraikoan oinarritzen diren aljebraren akatsak.

Urteak aurrera, egile berberak akats horien sailkapena garatu dute, esaterako, Socasek (1997) zailtasunen sailkapen bat egiten du. Jakina da ohi-koagoa dela akatsak egitea edonork zailtasunak ikusten dituen unean. Zailtasunentzat egindako sailkapena ondokoa da:

- Matematikaren objektuen zailtasunei loturikoa.
- Matematikako pentsaeraren prozesuei loturikoa.
- Irakas-prozesuari loturikoa.
- Ikasleen garapen kognitiboari loturikoa.
- Ikasleek Matematikarekin duten jarrera afektiboari loturikoa.

Gairen batek, bereziki Matematikak zailtasunak baditu, zailtasun horiek akatsak sortuko dituzte. Matematikarentzat, Ricok (1997) hurrengo zailtasunen sailkapena egin zuen:

- Finkoak, aldaezinak, kanpokoak, erabiltezinak eta irrealak.
- Abstraktuak eta errealtatearekin erlaziorik gabeak.
- Gutxi batzuentzat misterio eskuragarria.
- Zentzuari iraina egiten diote kasu batzuetan.
- Jakintza arlo bat, non epaiketak egingo diren ez bakarrik intelektuoa-  
ren inguruan, baizik eta pertsonaren balioaren inguruan ere.

Hernández, Socas eta Camachok (1998) Bigarren Hezkuntzako Aljebran egin daitezkeen akatsen inguruko sailkapena egin dute, hurrengoa:

- Oztopo jakin batean oinarria duten akatsak.
  - Idatzitakoak ez du zentzurik.
  - Eragiketa batean egindakoak.
  - Prozedura akatsak (propietate banakorra gaizki erabili, elkartze propietatea gaizki erabili, sinplifikatze akatsak...)
  - Akatsak idazterako orduan.
- Jarrera afektiboan eta emozionalean oinarria duten akatsak.

Akatsen sailkapenari dagokionez, Hernandez, Socas eta Camachoren (1998) eredia erabili da, berriena delako, bai eta Aljebran egin daitezkeen akats motak Unibertsitateko akatsekin ondoen egokitzen dituen. Hala ere, kontuan hartu behar da sailkapen hori Bigarren Hezkuntzako Aljebrako irakasgai egindako akatsak sailkatzeko egin zela. Gainera, gure kasuan, Ingeniaritza Industrialeko lehen mailako Aljebra Linealeko irakasgai egindako akatsak sailkatu nahi ditugu. Hala ere, badago akatsik ez dagoen kasurik azterketa batean. Izan ere, azterketa batzuetan ariketa ondo zegoen, eta beste batzuetan ariketa zuriz entregatu zuten. Bestetik, lehen ikerketa honetan jarrera afektiboan eta emozionalean oinarria duten akatsak ez dira kontrolatu.

Beraz, erabilitako akatsen sailkapena ondokoa izan da (Hernández, Socas eta Camacho, 1998) Unibertsitatera egokituz:

1. Oztopo jakin batean oinarria duten akatsak:
  - 1.1 Idatzitakoak ez du zentzurik.
  - 1.2 Akatsak eragiketa batean.
  - 1.3 Akatsak oinarrian: enuntziatua gaizki ulertuta.
  - 1.4 Akatsak idazterako orduan: bi aldagai ezberdin izendatzeko hizki bera erabili...
2. Ariketa bukatu gabe, baina egin duten arte zuzen.
3. Zuri, erantzun gabe.
4. Ondo

## 4. HELBURUA

Kontuan hartu behar da, akatsak ariketak ondo egiteko saiakera zentzudun baina ez arrakastatsuak direla. Wess Roberts-ek esango lukeen bezala, «akatsak egiten ez dituenak ez da nahikoa saiatzen ari». Beraz, akatsak egin behar dira eta horietaz ikasi, hurrengoetan akats bera ez egiteko. Akatsetatik ikasten jakin behar da.

Beraz, ikerketa honen helburua hau da:

Ikasleek egiten dituzten akatsak aztertzea eta sailkatzea. Hurrengo urteetan arreta gehiago jarri, eta mota horietako akatsak gutxitzea lortzeko. Gainera zera aztertu nahi da: ea akats mota ezberdinak egiten diren ikasle talde guztietan, eta egin duten akats motaren arabera nota ezberdina jaso duten.

Laburbilduz:

**Aljbrako oinarri aldaketako kontzeptu eta prozedurei dagozkien akatsak aztertu eta ondorioak atera, hurrengo urteetan Aljbraren irakaskuntzan akatsak gutxitzen dituen eredu berri bat planteatu ahal izateko.**

## 5. METODOA

### 5.1. Froga eta aldagaiak

Ikerketa hau egiteko, lehen kurtsoko Aljebra Linealeko azterketa erabili da. Azterketa horrek guztira 21 puntu balio zituen, hamar ariketetan banatuta. Azterketa horretan bi puntu balio zituen ariketa jakin batean (oinarri aldaketa) egindako akatsak aztertu eta sailkatu dira, eredu teorikoan azaldutako akatsen sailkapena erabilita. Ariketa hori, oinarri aldaketen ingurukoa da.

Erabilitako aldagaiak bi multzotan bana daitezke:

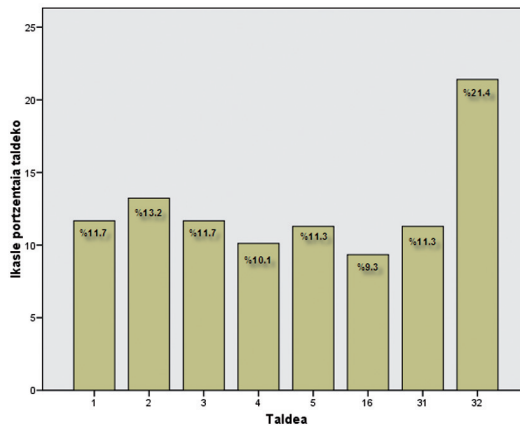
- Aldagai nagusiak: ariketan egindako akatsa, Hernández, Socas eta Camachoren (1998) arabera, ariketako nota (0tik 2ra) eta azterketa osoaren nota.
- Beste aldagaiak: sexua, errepikatzailea den edo ez, deialdia (1etik 5era), irakaslea (6 guztira), taldea (8 talde) eta hizkuntza (euskara, gaztelania).

### 5.2. Lagina

Ikerketa hau aurrera eramateko erabili den lagina 2006/2007 ikasturteko Bilboko Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoko Ingeniaritza Industrialeko lehen mailako Aljebra Linealeko ikasle multzoa da. Guztira, 305 ikasle

zeuden matrikulatuta ikasgai horretan, eta horietatik 257 (% 84.3) aurkeztu ziren otsaileko azterketara. Ikasle horiek taldeka banatuta zeuden, honela:

Taldea	Ikasle kopurua	%
1	30	11,7
2	34	13,2
3	30	11,7
4	26	10,1
5	29	11,3
16	24	9,3
31	29	11,3
32	55	21,4
<b>Guztira</b>	<b>257</b>	<b>100,0</b>



16. taldea arratsaldeko taldea da, eta 31 eta 32 taldeak euskarazkoak. Ikasleak zortzi talde eta bi hizkuntzatan banatzen dira, sei talde gazteleraz eta bi euskaraz. Gazteleraz bost irakasle daude, irakasle batek bi taldetan ematen ditu eskolak, eta euskaraz irakasle bakarrak ditu bi taldeak. Ikasleen arteko % 32.7k egin zuen azterketa euskaraz.

Urteetan zehar, mutilen ikasketa gisa ulertu izan da Ingeniaritza. Gaur egun ere aurkeztuen % 30.4 bakarrik ziren neskek. Datu horiek sailkatzerakoan, % 1.6 galdu da; izena ikusita ezin izan dugulako neska edo mutila zen bereiztu.

Aurkeztutako ikasleen gehiengoa, % 87.5, ez errepikatzailea da. Hori ikusita, badirudi otsaileko eta iraileko deialdietan ikasle gehienek ikasgaia gainditzen dutela. Baina kontuan hartu behar da Ingeniaritza Industrialeko



ikasketetan, asko direla lehen kurtsoko hainbat ikasgai (Algebra Lineala horien artean) ez gaintzera ikasketak uzten dituztenak. Errepikatzaileak taldeetan nola zeuden banatuta begiratzen bada, talde batean errepikatzaile bakarra dagoela ikus daiteke (% 3.8). Bestetik, badago beste talde bat non errepikatzaileak ikasle kopuru osoaren % 24a diren.

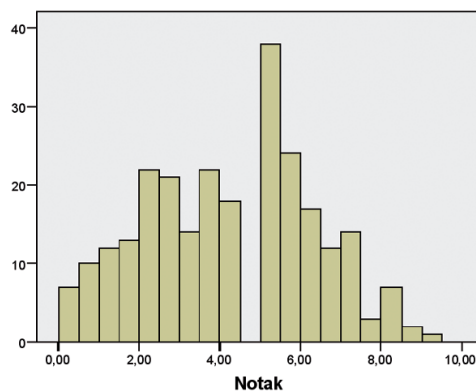
## 6. EMAITZAK

Kalkulu estatistiko guztiak egiteko SPSS 15.0 programa erabili da.

### 6.1. Notak

Erabiliko ditugun datuak deskribatuko ditugu. Esan bezala, irakasgai honetan guztira 305 ikasle zeuden, baina 257 ikasle aurkeztu ziren otsailko azterketara. Ikasleek azterketan ateratako notak hurrengo taulan eta grafikoan azaltzen dira:

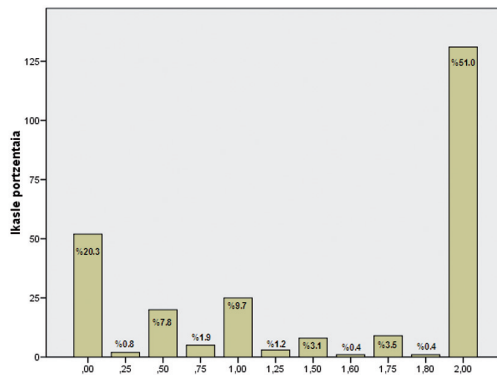
Nota	Maiztasuna
Gutxiegia	139
Nahikoa	91
Oso Ongi	26
Bikain	1
<b>Guztira</b>	<b>257</b>



Datu horien bitartez ikusten da ikasleen % 54.4k gainditzen duten arren, 27k baino ez dutela nota ona izan lortu —*oso ongi* edo *bikain*—, eta bat bakar iritsi dela *bikain* mailara. Beraz, gaindituen gehiengoak *nahikoa* atera zuen. Histograma horrekin ikusten da baita ez dagoela inor (4.5-5) nota-tartean, eta (5-5.5) tartea beste tartek baino beteagoa dela. Izan ere, daturik errepikatuena 5koa da, azterketen kasuan askotan gertatzen den bezala. 5etik hurbil egon baina iristen ez diren notei bultzada txiki bat ematen zaie, eta 5ekoa jarri, ikasleek gandi dezaten. Batez bestekoa  $\bar{x}=4.17$  da, 2.10eko desbideratze estandarrekin.

Aurretik esan bezala, oinarri aldaketaren inguruko ariketa jakin batean jarri dugu arreta, bertan ikasleek egin dituzten akatsak aztertzeko. Ariketa horrek bi puntu balio zituen (azterketak 21 puntu guztira) eta ariketa horretako notak nahiko sakabanatuak ( $\bar{x} = 1.31$ ,  $\sigma = 0.82$ ) egon zirela esan daiteke, hurrengo taulan eta grafikoan ikus daitekeen bezala:

Arik. nota	Maizt.	%
0,00	52	20,2
0,25	2	0,8
0,50	20	7,8
0,75	5	1,9
1,00	25	9,7
1,25	3	1,2
1,50	8	3,1
1,60	1	0,4
1,75	9	3,5
1,80	1	0,4
2,00	131	51,0
<b>Guztira</b>	<b>257</b>	<b>100</b>



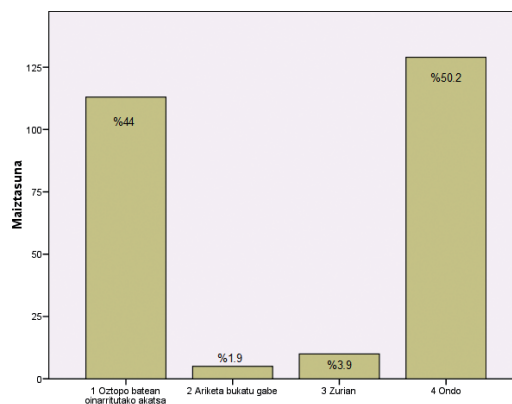
Hala ere, mugetan dago noten pisu handiena; ikasleen % 20.2k dute zeroko emaitza ariketan, eta % 51k lortu dute ariketak balio duen puntuazio guztia. Akatsen sailkapena begiratzeraoan ikusten da puntuazio osoa jaso dutenen artean % 63.46k ez duela guztiz ondo idatzi matematikoki, nahiz emaitza zuzena izan, eta puntuazio altuena eman ariketa zuzendu duen irakasleak.

Ariketa jakin horretan ateratako notak azterketan ateratako notarekin erlazioa duen ere aztertu da. Hau da, ariketa horretako nota ona izan bada, azterketako nota ere ona izan dela pentsa zitekeen; ikasleak ez duela ariketa hori zoriz ondo egin, oro har azterketa osoa ere zuzen egin duela. Ariketaren nota eta azterketaren notaren artean lortutako korrelazioa  $r=0.565$  (\*\*) da. Beraz, ariketaren eta azterketaren noten arteko erlazioa ez da handia, baina bai esanguratsua.

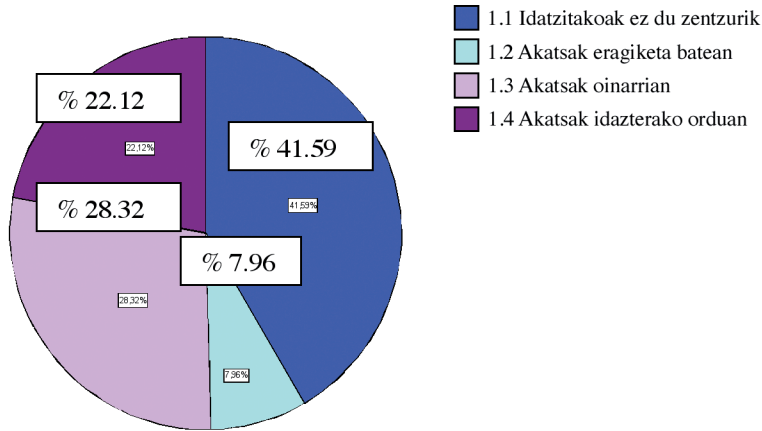
## 6.2. Akatsak

Ikasleek oinarri aldaketen ariketan egin dituzten akatsak sailkatu eta aztertzea da ikerketa honen helburu nagusia. Horretarako, oinarri aldaketako ariketan jarri da arreta oraingo honetan. Hurrengo taulan azaltzen den moduan sailkatu dira ariketa horretako akatsak, azaldutako sailkapena erabiliz:

	Maiztasuna	%
1 Oztopo batean	113	44,0
2 Bukatu gabe	5	1,9
3 Zuri, erantzun gabe	10	3,9
4 Ondo	129	50,2
<b>Guztira</b>	<b>257</b>	<b>100</b>



Akatsak egin dituzten ikasleak, lehen motako ikasleak dira, hau da, oztopo jakin batean oinarritutako akatsa egin dute. Beraz, akatsak egin dituzten ikasleak (113) eta erabili den akatsen sailkapena kontuan hartzen bada, horrela banatzen dira ikasle horiek:



### 6.3. Kontraste estatistikoak

Atal honetan, hainbat aldagairen artean ezberdintasun adierazgarririk ba al dagoen aztertu dugu.

*Ariketaren nota, sexuarekiko*

Ez dago ezberdintasun esanguratsurik antzematen, *t-test* proba egin ondoren ( $p=0.868$ ).

*Ariketaren nota, hizkuntzarekiko*

Ez dago ezberdintasun adierazgarririk antzematen, *t-test* proba egin ondoren ( $p=0.849$ ).

*Ariketaren nota, deialdiarekiko*

Hasiera batean, pentsa genezake lehen deialdian dagoen ikasleak beste mota bateko akatsak egin ditzakeela. Beraz, ariketaren nota eta deialdiaren artean ezberdintasunik ote dagoen aztertu da. Baina Kruskal-Wallis ( $N<30$ ) proba egin ondoren, ondoriozta daiteke ez dagoela ezberdintasun adierazgarririk ariketaren notan, deialdiarekiko ( $p=0.862$ ).

### *Ariketaren nota, taldearekiko*

Taldearen arabera ere Kruskal-Wallis ( $N < 30$ ) kontrastea erabili da, eta ezberdintasun adierazgarriak daudela ikusi,  $p = 0.019$  balioarekin. Zein bi talderen artean dagoen ezberdintasuna aztertzeko, taldeak binaka hartu dira eta Mann-Whitney-ren proba estatistikoa erabili da. Ezberdintasun esanguratsuak lortu dira 4. taldearentzat: 2. taldearekiko ( $p = 0.03$ ); 3. taldearekiko ( $p = 0.038$ ), eta 32. taldearekiko ( $p = 0.03$ ).

### *Ariketaren nota, akats motarekiko*

Ikus dezagun orain ea ariketaren notaren eta akats motaren arteko ezberdintasunik ba ote dagoen. Kasu honetan akatsen bat egin duten ikasleak bakarrik hartuko dira kontuan, hau da, 113 ikasleak.

Ariketaren nota eta akats motaren artean ezberdintasuna esanguratsua den edo ez aztertzeko Kruskal Wallisen ( $N < 30$ ) proba estatistikoa erabili da. Horrekin ikusi da ariketaren notan ezberdintasun adierazgarria dagoela ( $p = 0.044$ ) akats motarekiko. Orduan, zein bi akatsen artean dagoen ezberdintasuna aztertzeko, akats motak binaka hartu dira eta Mann-Whitneyren proba estatistikoa erabili da:

1.1 idatzitakoak ez du zentzua	1.2 akatsak eragiketa jakin batean 1.3 akatsak oinarrian 1.4 akatsak idazterako orduan	$p = 0.0 < 0.01$ $p = 0.0 < 0.01$ $p = 0.0 < 0.01$
1.2 akatsak eragiketa jakin batean	1.3 akatsak oinarrian	$p = 0.01 < 0.05$

### *Azterketako nota, akats motarekiko*

Ariketa jakin batean egindako akatsak besterik ez dira sailkatu. Baina ariketa horretan egin duten akatsaren eta azterketa osoko notaren artean ea ezberdintasun adierazgarririk dagoen aztertu da Kruskal-Wallisen ( $N < 30$ ) proba estatistikoa erabiliz. Hori egin ondoren, ikusi da azterketako notan ez dagoela ezberdintasun adierazgarririk akats motarekiko:  $p = 0.065$ .

## **7. ONDORIOAK**

Ariketako notan sexuarekiko, hizkuntzarekiko eta deialdiarekiko ezberdintasun esanguratsurik ez dagoela ikusi dugu. Hala ere, taldearekiko badago ezberdintasun adierazgarria. Beraz, irakasle bakoitzak erabilitako metodologia garrantzitsua izan daiteke horrelako azterketa bat egiteko orduan, eta hurrengo ikerketetan kontuan hartu beharreko zerbait izango da.

Lortu diren emaitzetatik, ariketako nota eta akats motaren arabera sailkatu direnak dira aztertzeko moduko ezberdintasun adierazgarri benetan interesgarriak. Kasu horretan ikusten da zentzuaren faltan oinarria duten akatsek, beste akats motak egiterakoan lortu den ariketa notarekiko ezberdintasuna guttiz adierazgarria dela.

Horren arrazoia ariketa zuzendu duen irakasleak akatsen sailkapen hori ezagutu gabe, bere buruan antzeko sailkapen bat izatea izan daiteke, eta puntuak akatsen sailkapen horren arabera eman izatea puntuak ariketa horretan. Izan ere, ariketa bat zuzentzen denean, ariketaren balioa desberdina izango da, egiten den akatsaren arabera. Gainera, direla esan daiteke aztertutako ariketa horretan akats larrienak zentzuaren faltan oinarria dutenak direla. Hori dela eta, akats hori egitearen garrantzia kontuan hartuta, akats hori egin duten ikasleen nota beste akats mota bat egin dutenena baina okerragoa izan da.

Ariketako nota eta akatsaren mota konparatzerakoan, beste ezberdintasun adierazgarri bat ikusi da: akatsak eragiketa batean eta oinarrian egingako akatsen artekoa. Gutxi egin dute eragiketa batean akats (% 7.96k); izan ere, ariketak ez zuen eragiketa aritmetiko askoren beharrik. Ariketa horren helburua beste jakintza bat aztertzea zen. Beraz, akatsa eragiketa batean eta oinarrian egin dutenen artean ezberdintasun adierazgarria dagoela ikusi da. Prozedurak garrantzi handiagoa zuenez, ikasleak gehiagok egin zuten akats mota hori, eta gehiago zigortu zen.

Lortu diren emaitzak datozen urteetako metodologia aldatzeko erabilgarriak izatea espero da. Hori eginez, ikasleek egiten dituzten akats kopurua gutxitzea lortu nahi da. Izan ere, akats nagusia idatzitakoak zentzurik ez duenekoak izan da. Gainera, gehien errepikatu den akatsa izan da. Beraz, datorren urteetarako akats mota hori klasean gehiago lantzea izango da helburu nagusia. Hau da, Aljebra oinarrizko kontzeptuak azaltzen denbora gehiago egin beharko da, eta oinarrizko Aritmetikako eragiketei garrantzi gutxiago eman beharko zaie. Oinarriko akatsak murriztea ere izango da helburu, baina akats mota honek eta zentzuaren faltan oinarria duen akatsak harreman zuzena dute. Datorren urteetan bi akats mota horiek murriztea izango da helburu nagusia, bi akats mota horien artean ikasleen % 69.71 baitago. Dena den, kontuan hartu beharko dugu baita beste akats motak egiten dituzten ikasle kopurua ez handitzea.

Ikerketa honetatik abiatuta, bide ugari azter daiteke aurrerago. Lehenik eta behin, kontuan hartu behar da lehen mailako lehen partzialeko irakasgaia dela. Beraz, azter daiteke ea erlazioa dagoen Aljebra Linealean atera duten nota eta zero kurtsoa egin izanarekin. Azter daiteke baita Aljebra Lineala eta Kalkulu Infinitesimala (Matematikako beste irakasgai bat) irakasgaien arteko noten artean korrelaziorik ba al dagoen edo ez, akatsak Aljebra beste ariketetan errepikatzen diren, beste irakasgaietan errepikatzen diren... Hurrengo ikasturteetan akats mota horiek errepikatzen diren edo ez ere azter daiteke, baita ikasleek zein akats mota egiten dituzten ere. Hori

eginez, ikerketa balioztatu eta erabilitako ikerketak ikasleen porrot-maila gutxitzen lagundu ote duen jakingo genuke.

Jasotze-data: 2009/02/01  
Onartze-data: 2009/06/24

### *Abstract*

---

*This report describes on-going research on the study of the errors made in a first year university linear algebra exercise concerning «base change» in vector spaces. To do this, we firstly look at the importance of this type of study in research into Mathematics Education. Then, there is an exhaustive bibliographic review of how Maths teaching-learning errors have been classified. For this report, we have chosen the classification by Hernández, Socas and Camacho (1998) as it adapts best to the study of university level algebra errors. Secondly, analysis is presented on a «base change» in vector spaces exercise from the February exam for the 2006/2007 academic year where the errors made by 257 students have been classified according to the chosen classification model. The results obtained show that there are no significant differences in errors due to gender, language or teacher. However, there is a significant difference in the mark obtained according to the type of error made in this exercise. This leads us to verify that the teacher correcting the exercise, without knowing about the classification beforehand, had structured a quite similar classification to score the exercise being studied. This means that the student got a different mark depending on the importance of the error or the type of error. Once we know the most frequent type of errors and the errors that are considered to be the most serious in this type of exercise, we are in a position to incorporate this analysis into our classes in order to minimise these errors in the years to come.*

**Keywords:** *Mathematics. Didactics. Errors. Statistical analysis. Higher education.*

---

*Este informe describe una investigación en curso acerca del estudio de los errores cometidos en un ejercicio de álgebra lineal de primer curso de universidad de tipo «cambio de base» en espacios vectoriales. Para ello, en primer lugar, se constata la importancia de este tipo de estudios en la investigación en Educación Matemática. A continuación, se hace una revisión bibliográfica exhaustiva de cómo se han clasificado los errores de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Para este informe se ha optado por la clasificación de Hernández, Socas y Camacho (1998) por ser la que mejor se adapta al estudio de los errores de*

álgebra a nivel universitario. En segundo lugar, se presenta el análisis de un ejercicio de «cambio de base» en espacios vectoriales del examen de febrero del curso 2006/2007 donde se clasifican los errores de 257 alumnos según el modelo de clasificación elegido. Los resultados obtenidos muestran que no hay diferencias significativas en los errores debidas al género, idioma o profesor. Sin embargo, sí se obtiene una diferencia significativa en la nota obtenida según el tipo de error cometido en dicho ejercicio. Esto nos lleva a verificar que el profesor que corrigió el ejercicio, sin conocer de antemano la clasificación, había estructurado una clasificación más o menos análoga para puntuar el ejercicio estudiado. Es decir, según la importancia del error o el tipo de error, el alumno/la obtuvo una nota diferente. Una vez conocidos los tipos de errores más frecuentes y los errores que se consideran más graves en este tipo de ejercicios, estamos en condiciones de incorporar este análisis a nuestras clases con el objetivo de minimizar dichos errores en los próximos años.

**Palabras clave:** Matemáticas. Didáctica. Errores. Análisis estadístico. Enseñanza universitaria.

---

*Ce rapport décrit un cycle de recherche en cours sur l'analyse des erreurs commises lors d'un exercice d'algèbre linéaire de première année d'université de type « changement de base » sur des espaces vectoriels. En premier lieu, on relève pour ce faire l'importance de ce type d'études dans la recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Puis on procède à une révision bibliographique exhaustive du classement des erreurs dans l'enseignement-apprentissage des Mathématiques. Pour ce rapport, on a opté pour le classement d'Hernández, Socas et Camacho (1998) celui-ci étant le mieux adapté à l'étude des erreurs d'algèbre au niveau universitaire. En second lieu, on présente l'analyse d'un exercice de 'Changement de base' sur espaces vectoriels lors de l'examen de février 2006/2007 au cours duquel ont été classés les erreurs de 257 élèves en fonction du modèle de classement choisi. Les résultats obtenus montrent qu'il n'y a pas de différences significatives sur les erreurs en fonction du sexe de l'élève, de la langue ou du professeur. Néanmoins, on relève effectivement une différence significative sur la note obtenue en fonction du type d'erreur commise sur cet exercice. Ceci nous conduit à vérifier que le professeur ayant corrigé l'exercice, sans avoir connaissance à l'avance du classement, avait organisé un classement plus ou moins analogue pour pointer l'exercice étudié. En fonction de l'importance de l'erreur ou du type d'erreur, l'élève obtient une note différente. Une fois que les types d'erreurs les plus fréquentes et les erreurs les plus graves sont connues dans ce type d'exercice, nous sommes en situation d'appliquer cette analyse en classe afin de minimiser ces erreurs dans les années à venir.*

**Mots clés:** Mathématique. Didactique. Erreurs. Analyse estadística. Educación superior.



## BIBLIOGRAFIA

- Azarquiel Taldea (1994): «Estrategias utilizadas en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico», in *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 16, 48-53 orr.
- Cooper, T.; Boulton-Lewis, G.; Atweh, B. (1996): «Direcciones futuras para el estudio sobre la enseñanza-aprendizaje del álgebra. Lecciones del pasado», in *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 9, 33-42 orr.
- Crowley, L.; Thomas M.; Tall D. (1994): «Algebra, symbols, and translation of meaning», in *Proceedings of PME18*, Lisbon, II, 240-247 orr.
- Fernández, F. et al. (1996): El lenguaje matemático, in Romero, A. (Ed.): *Lenguajes y enseñanza*. Granada: Fundación Educación y Futuro.
- Gallardo, A.; Rojano, T. (1988): «Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico», in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (2), 155-188 orr.
- Gonzalez, F.; Díez, M. M. (2002): «Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en álgebra. Propuesta para la interacción didáctica», in *Revista Complutense de Educación*, 13 (1), 281-302 orr.
- Hernández, E. (1995): «Métodos y contenidos en la enseñanza de la matemática en la Universidad», in *Tarbiya: Revista de investigación e innovación educativa*, 10, 55-64 orr.
- Hernández, J.; Socas, M. M.; Camacho, M. (1998): «Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria», in *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 32, 73-86 orr.
- Matz, M. (1982): «Towards a process model for high school algebra errors», in Sleeman, D.; Brown, J. I.: *Intelligent Tutoring Systems*. Academic Press.
- Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O.; Inbar, S. (1987): «An Empirical Classification model for errors in High School mathematics», in *Journal for research in mathematics Education*, 18 (1), 3-14 orr.
- Palarea, M. (1998): *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. (Doktorego tesia). La Lagunako Unibertsitatea.
- Rico, L. (1997): «Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas», in *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»*, 38, 185-198 orr.
- Rojano, T. (1994): «La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza», in *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 12 (1), 45-56 orr.
- Socas, M. (1997): «Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria», in Rico L. (Koord.): *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Universitat de Barcelona, ICE.
- Socas, M. M.; Palarea, M. M. (1994): «Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico», in *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 16, 91-98 orr.
- Torralbo, M. et al. (2007): «Formación del profesorado en Educación matemática en España. Producción de tesis doctorales y de artículos», in *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 1 (4), 161-178 orr.
- Wess Roberts (*Las mejores citas de inspiración de todos los tiempos*). Eskurgarri: <http://www.reikimediterraneo.com/LinkClick.aspx?fileticket=D5yCQGuvlSQ%3D&tabid=82&mid=449>