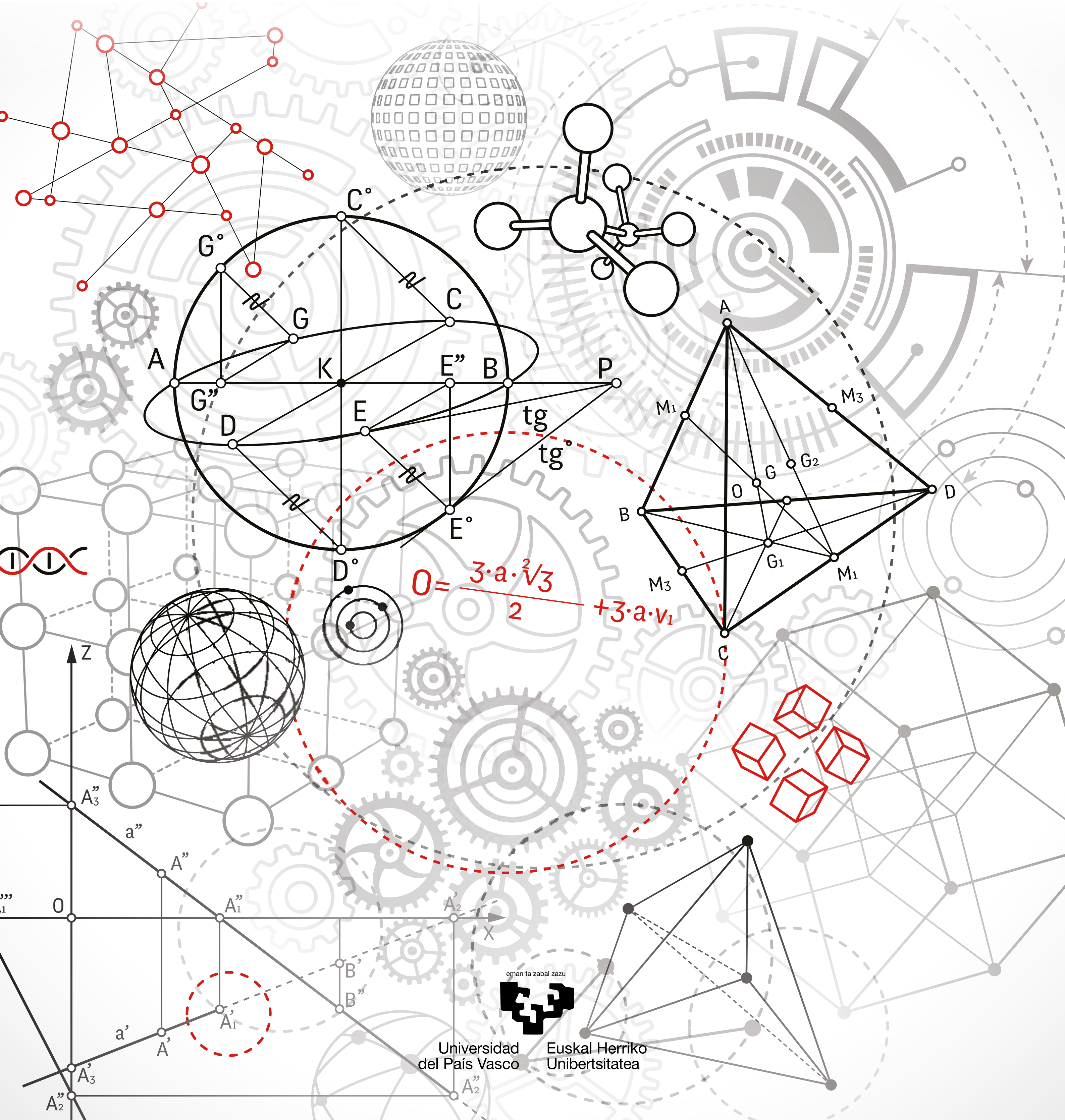
Ekuazio diferentzialak

Naiara Arrizabalaga
Judith Rivas



eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Ekuazio Diferentzialak

Naiara Arrizabalaga eta Judith Rivas

Matematika Saila
Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Arrizabalaga Uriarte, Naiara

Ekuazio diferentzialak [Recurso electrónico] / Naiara Arrizabalaga eta Judith Rivas. – Datos. – Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2020]. – 1 recurso en línea : PDF (269 p.)
Modo de acceso: World Wide Web
ISBN: 978-84-1319-274-1.

1. Ecuaciones diferenciales. I. Rivas Ulloa, Judith, coaut.

(0.034)517.9

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiaren bitartez.

ISBN: 978-84-1319-274-1

Aurkibidea

Sarrera

Ekuazio diferentzialak funtzioak eta haien deribatuak erlazionatzen dituzten ekuazio matematikoak dira. Ezezagunak aldagai bateko funtzioak badira, ekuazio diferentzialak arruntak direla esaten da; aldiz, ezezagunak aldagai anitzeko funtzioak badira deribatu partzialetako ekuazioak ditugu.

Liburu honetan jorratzen diren gaiak Euskal Herriko Unibertsitateko Matematika graduko *Ekuazio diferentzialak* irakasgaiaren programa jarraituz aukeratu dira, baina testua lagungarria izan daiteke beste zenbait ikasketetan.

Lehen kapituluan oinarrizko definizioak ematen dira, zenbait adibiderekin hornituta, definizio horiek hobeto ulertzeko eta ekuazio diferentzialek beste zientzietan, bereziki Fisikan, dituzten aplikazioen zertzelada batzuk erakusteko.

Bigarren kapituluan lehen ordenako ekuazio diferentzialen eredu batzuetarako ebazpen-metodo analitikoak azaltzen dira. Bigarren ordenako ekuazio diferentzial berezi batzuk ere aztertzen dira. Hala ere, gehienetan oso zaila izango da ekuazio diferentzial baten soluzioak aurkitzea metodo analitikoen bidez. Horregatik, metodo kualitatiboen sarrera bat ere aurkezten da.

Ekuazio diferentzial linealak garrantzi handikoak dira, bai ikuspuntu teoriko soil batetik eta baita aplikazio anitzetan agertzen direlako ere. Hori dela eta, testuaren parte handi bat ekuazio horien azterketara dedikatzen da. Hirugarren kapituluan ekuazio diferentzial linealen soluzioak nola kalkulatu eta haien propietateak ikusten dira, koefiziente konstanteetako ekuazioetan arreta berezia jarriz. Laugarren kapituluan azaltzen da bigarren ordenako ekuazio diferentzial linealen berretura-serieen bidezko ebazpena. Azkenik, bostgarren kapituluan ekuazio linealetako sistemak lantzen dira, hemen ere, koefiziente konstanteetako sistemen kasua kontuan hartuz.

Seigarren kapituluan hasierako balioetako problemaren soluzioaren existentzia eta bakartasuna bermatzen duten teorema nagusiak enuntziatu eta frogatzen dira.

Zazpigarren kapitulua sistema autonomoen analisira dedikatzen da, puntu kritikoak eta haien egonkortasuna aztertuz. Bi ekuazioko sistema autonomo ez-linealetan jartzen da arreta, eta haien azterketarako tresnak ematen dira.

Deribatu partzialetako zenbait ekuazio ebazteko aldagaien banantze-metodoa erabiltzen denean, bigarren ordenako ekuazio diferentzial linealak agertzen dira berriro, mugalde-baldintza egokiekin osatuta, Sturm-Liouville-ren problemak sorraraziz. Hori da, hain zuzen ere, zortzigarren kapituluaren helburua: problema horiek ebazten ikastea eta haien soluzioen oinarrizko propietateak aurkeztea.

Azkenik, bederatzigarren eta hamargarren kapituluetan, deribatu partzialetako ekuazioetarako sarrera bat egiten da. Alde batetik, ebazpen-metodo batzuk garatzen dira, hemen ere, ekuazio linealen kasua bereziki kontuan hartuz. Beste aldetik, fisika matematikoaren ekuazio aipagarri batzuk sakonago aztertzen dira, aplikazioetan agertzen diren problema zehatz batzuk ebatziz.

Leioa, 2019ko otsaila

Naiara Arrizabalaga eta Judith Rivas

1. gaia

Ekuazio diferentzialak: lehendabiziko definizioak

Gai honetan, ekuazio diferentzialekin erlazionatutako oinarrizko definizio batzuk emango ditugu. Lehenengo eta behin, ikus dezagun zer den ekuazio diferentzial bat.

Definizioa. Funtzio ezezagun bat eta haren deribatu batzuk erlazionatzen dituen ekuazioa, funtzio guztiek betetzen ez dutena, *ekuazio diferentziala* dela esaten da.

Ekuazio diferentzialen adibideak zientzia guztietan agertzen dira. Arlo anitzetan ditugu fenomeno ezagunak, zeinen modelizazio matematikoak ekuazio diferentzialen bidez gauzatzen diren. Esate baterako, Biologian, populazioen hazkundea; Kimikan, desintegrazio erradiaktiboa, nahasketak; Ekonomian, interes konposatu jarraitua. Hala ere, ziurrenik aplikazio ezagunenak fisikan topatzen ditugu. Ikus ditzagun horietako batzuk.

Adibidea. *Erortzen ari den objektu baten higidura.* Objektu bat erortzen uzten da altuera batetik, eta haren higidura deskribatu nahi da. Izan bitez t denbora eta $v(t)$ objektuaren abiadura t unean; hots, v t-rekin aldatuko da, $v = v(t)$ funtzioa sorraraziz.

Newtonen bigarren legearen arabera, objektuaren masaren eta azelerazioaren arteko biderkadura eta objektuak jasaten duen indarra berdinak dira:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

non $\vec{F}$ indarra, m masa eta $\vec{a}$ azelerazioa diren. $\vec{F}$ eta $\vec{a}$ magnitude bektorialak dira, baina kasu honetan higidura lineala dela suposatuko dugu, eta, ondorioz, $\vec{F}$-k eta $\vec{a}$-k osagai ez-nulu bakarra izango dute, higiduraren norabidearena.

Azelerazioa abiaduraren deribatua denez,

$$F = m\frac{dv}{dt} = mv'.$$

Orokorrean, indarra denborarekin eta abiadurarekin alda daiteke, $F = F(t, v(t))$ eta, horrela, ekuazio diferentzial bat agertzen da:

$$mv' = F(t, v(t)).$$

Objektuak grabitatearen indarra jasaten du, eta hori objektuaren pisuaren berdina da, mg, non g grabitateak sortzen duen azelerazioa den, $g \sim 9,8m/s^2$. Suposatzen badugu objektua hutsean erortzen ari dela, hori izango da indar bakarra, eta ekuazio diferentziala $mv' = mg$ da, hots,

$$v' = g.$$

Aldiz, objektua atmosferan erortzen dela suposatzen badugu, aire-erresistentzia ere kontuan izan behar dugu, eta hori abiadurarekiko proportzionala dela onartu ohi da, $F_d = \gamma v$, $\gamma > 0$ konstantea izanik. Gainera, aire-erresistentziak eta grabitate-indarrak aurkako noranzkoa dute; beraz, ekuazio diferentziala, bigarren kasu horretan, honako hau da:

$$mv' = mg - \gamma v. \tag{1.0.1}$$

Adibidea. *Fisika matematikoko oinarrizko ekuazioak.* Gehienetan, fisikako prozesuetan aztertzen diren magnitudeak aldagai anitzeko funtzioen bidez adierazi behar dira. Adibidez, $u(t, x, y, z)$ (x, y, z) koordenatu kartesiarrak dituen espazioko puntu batean t unean dagoen tenperatura izan daiteke; edo lamina elastiko baten deformazioa neur daiteke hiru aldagaiko funtzio baten bidez, u, non $u(t, x, y)$-k (x, y) koordenatuetako laminaren puntuaren altuera t unean adierazten duen. Maiz agertzen diren ekuazioak honako hauek dira:

Laplaceren ekuazioa:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

non $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ den; hau da, u n aldagaiko funtzioa da.

Beroaren ekuazioa: $\alpha > 0$ konstantea emanda,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta_x u = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right),$$

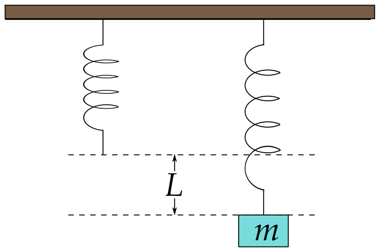
non $u = u(t, x_1 \ldots, x_n)$ $n + 1$ aldagaiko funtzioa den. Bereziki, $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ beroaren ekuazio unidimentsionala, $u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$ beroaren ekuazioa bi dimentsiotan, eta $u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ beroaren ekuazioa espazioan dira.

Uhin-ekuazioa: $a > 0$ konstantea emanda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right),$$

non $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$ $n + 1$ aldagaiko funtzioa den.

Adibidea. *Malguki batetik zintzilikatuta dagoen objektu baten higidura.* Malguki bertikal batetik m masa duen objektu bat zintzilikatzen bada, L luzerako elongazio bat eragiten du malgukian.



Aztertu nahi da objektuaren higidura. Izan bedi $u(t)$ objektuaren desplazamendua haren pausagune-posiziotik t unean. Desplazamendu hori soilik norabide bertikalean gertatzen dela onartzen da, eta noranzko positiboa beherakoa da. Lehenengo eta behin, suposatuko dugu objektuaren gainean eragiten duten indarrak pisua, $F_g = mg$, eta malgukiaren errekuperazio-indarra, F_s, direla. Hook-en legearen arabera, F_s elongazioarekiko proportzionala da, eta kontrako noranzkoa du; hau da, $F_s(t) = -k(L + u(t))$ da, k konstante positibo bat izanik. Oreka-posizioan, pisua eta malgukiaren errekuperazio-indarra berdinak dira; hau da, $mg = kL$; beraz, Newtonen legea kontuan izanik,

$$mu''(t) = F_g + F_s = mg - k(L + u(t)) = -ku(t).$$

Onartzen bada airearen erresistentziak edo bestelako indargetze-indar batek eragiten duela, orduan, beste gai bat gehitu behar da ekuazioko eskuineko atalean, F_d. Lehen bezala, indar hau abiadurarekiko proportzionala izan ohi da, eta higiduraren kontrako noranzkoa du, $F_d = -\gamma u'(t)$, $\gamma > 0$ izanik. Gainera, suposa daiteke kanpoko beste indar batek ere parte hartzen duela objektuaren higiduran, F_e. Elementu hauekin guztiekin, malgukiaren dinamika deskribatzen duen ekuazio diferentziala honako hau da:

$$u'' + \alpha u' + \kappa u = F_e(t), \tag{1.0.2}$$

non $\alpha = \gamma/m$ eta $\kappa = k/m$ konstante positiboak diren eta F_e, kanpoko indarra, gehienetan periodikoa den, $F_e(t) = A\sin(\beta t)$ modukoa, adibidez, A eta β konstante errealak izanik.

Adibidea. *Populazioen dinamika: espezieen arteko lehia.* Izan bedi $x(t)$ espezie baten banakoen kopurua t unean. Populazioen dinamikaren eredu esponentzialak onartzen du espezie baten hazkuntza espeziearen populazioarekiko proportzionala dela, hots,

$$x' = \alpha x,$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ hazkuntza-tasa konstantea izanik. Hala ere, populazioa handia bada, eredu esponentziala ez da onargarria. Banakoen arteko lehia kontuan izan behar da, eragin negatiboa duena eta elkartzeekiko proportzionala izango dena, eredu logistikoa sorraraziz. Banakoen arteko elkartzeak $x(t)(x(t)-1)/2$ direnez, eredu logistikoak honako ekuazio diferentzial hau jarraitzen du:

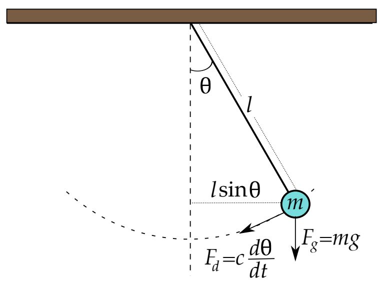
$$x' = \epsilon x - \sigma x^2, \quad \epsilon > 0, \sigma > 0.$$

Demagun orain ingurune itxi batean bi espezie elkarren artean lehiatzen direla elikagaia lortzeko; adibidez, elkar harrapatzen ez duten bi arrain mota urmael batean. Izan bitez x eta y bi espezie horien populazioak; hau da, $x(t)$ espezie baten banakoen kopurua t unean eta $y(t)$ beste espeziearena. Onartzen da espezie horien populazioek eredu logistikoa jarraituko dutela beste espeziea ez egotekotan, eta haien arteko lehia kaltegarria dela bi populazioen hazkuntzarako, eta proportzionala dela bi espezieen banakoen elkartzeekiko. Honako ekuazio hauek modelizatzen dute egoera hori:

$$\begin{cases} x' = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y), \\ y' = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x), \end{cases} \tag{1.0.3}$$

non ϵ_1, ϵ_2, σ_1, σ_2, α_1 eta α_2 konstante positiboak diren, honako hau adierazten dutenak: ϵ_1 eta ϵ_2 bi espezieen hazkunde-tasak; ϵ_1/σ_1 eta ϵ_2/σ_2 bi espezieen asetasun-mailak; α_1 bigarren espeziearen eraginaren neurria lehen espeziearen populazioan, eta α_2 lehen espeziearen eraginaren neurria bigarren espeziearen populazioan.

Adibidea. *Pendulu baten higidura.* m masako gorputz bat l luzera duen hagatxo batetik zintzilikatuta dago. Hagatxoak t unean bertikalarekin osatzen duen angelua $\theta(t)$ izendatuko dugu, eta radianetan neurtuko dugu.



Objektuak egiten duen distantzia $l\theta(t)$ da, eta, ondorioz, azelerazioa, $l\theta''(t)$. Bestalde, jasaten dituen indarrak grabitate-indarra eta marruskadura-indarra direla onartuko dugu. Grabitate-indarraren osagaia higiduraren norabidean $mg \sin\theta(t)$ da. Marruskadura-indarra, aldiz, θ-ren aldakuntzarekiko proportzionala dela jo ohi da. Horrela, Newtonen legaren arabera, penduluaren higiduraren ekuazio diferentziala honako hau da:

$$ml\theta'' = -c\theta' - mg\sin\theta,$$

hots,

$$\theta'' + \frac{c}{ml}\theta' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{1.0.4}$$

1.1 Ekuazio diferentzialen sailkapena

Ekuazio diferentzialak zenbait ezaugarriren arabera sailka daitezke. Lehenengo eta behin, aldagai independenteen kopurua har daiteke kontuan.

Definizioa. Ekuazio diferentzial baten funtzio ezezaguna aldagai batekoa bada, *ekuazio diferentzial arrunta* esaten zaio ekuazioari, eta aldagai anitzekoa bada, *deribatu partzialetako ekuazioa.*

Lehenago aurkeztu diren fisika matematikoko Laplaceren ekuazioa, beroaren ekuazioa eta uhin-ekuazioa deribatu partzialetako ekuazioak dira. Beste adibideetan ekuazio diferentzial arruntak agertu dira. Kurtso honen hasierako gaietan ekuazio diferentzial arruntak aztertuko ditugu eta azkeneko bi gaietan, aldiz, deribatu partzialetako ekuazioak.

Ekuazio diferentzial arruntak sailkatzeko kontuan hartzen den beste ezaugarri bat da zein den agertzen den ordena nagusiko deribatuaren ordena.

Definizioa. Ekuazio diferentzial arruntaren *ordena* $n \in \mathbb{N}$ da, ekuazioan ezezagunaren n-garren deribatua agertzen bada eta ez badago ordena altuagoko deribaturik.

Erortzen ari den objektu baten higidura aztertzean, (1.0.1) lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunta erabili dugu. Aldiz, malguki batetik zintzilikatuta dagoen objektuaren higiduraren analisian eta penduluaren kasuan, (1.0.2) eta (1.0.4) bigarren ordenako ekuazio diferentzialak agertu dira, hurrenez hurren.

Definizioa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \tag{1.1.1}$$

n-garren ordenako ekuazio diferentziala *era esplizituan* adierazita dagoela esaten da.

Aldiz, $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ bada,

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \tag{1.1.2}$$

n-garren ordenako ekuazio diferentziala *era inplizituan* adierazita dagoela esaten da.

Bistakoa denez, era esplizituan emandako ekuazio diferentzialak era inplizituan idatz daitezke, baina kontrakoa orokorrean ez da egia.

Ekuazio diferentzial arruntak sailkatzeko, kontuan hartzen da, baita ere, ezezagunen eta ekuazioen kopurua.

Definizioa. Izan bitez $f_i\colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ funtzioak. Lehen ordenako n ekuazio diferentzialeko eta n ezezaguneko *sistema diferentziala*, era esplizituan idatzita, honako forma honetakoa da:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \quad \dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Oharra. $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ eta $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$ izendatuz, goiko sistema diferentziala notazio bektorialez adieraz daiteke, ekuazio diferentzial bektorial bakar bat lortzen delarik:

$$\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}).$$

Oharra. n ordenako ekuazio diferentzial arrunt bat lehen ordenako n ekuazio diferentzialen bidez berridatz daiteke. (1.1.1) ekuazio esplizituan, $x_1 = x$, $x_2 = x'$, ..., $x_n = x^{(n-1)}$ izendatzen baditugu, honako sistema baliokide hau lortzen dugu:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \quad \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Horregatik, sistemen kasuan, lehen ordenakoak aztertu ohi dira soilik.

Populazioen dinamikan aztertu dugun lehiaketaren modelizazioan, (1.0.3) lehen ordenako bi ekuazioko sistema diferentziala agertu da.

Ikusiko dugun bezala, (1.1.1) ekuazioan agertzen den f funtzioa lineala bada aldagai guztiekiko, agian t-rekiko izan ezik, ekuazio diferentzialak eta haren soluzioek ezaugarri bereziak izango dituzte, eta irakasgaian zehar arreta handia jarriko dugu ekuazio diferentzial mota horretan.

Definizioa. Izan bitez $a_1, \dots, a_n, b \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = b(t),$$

n-garren ordenako ekuazio diferentzial *lineala* dela esaten dugu.

Erortzen den objektu baten higiduraren kasuan eta malgukiaren higiduraren kasuan ekuazio diferentzial linealak agertu dira, (1.0.1) eta (1.0.2). Aldiz, penduluaren higidura deskribatzen duen (1.0.4) ekuazioa ez-lineala da, $\sin\theta$ gaia agertzen delako, eta populazioen dinamikaren (1.0.3) sistema ere ez-lineala da, xy moduko gaiak agertzen direlako sistemaren bi ekuazioetan.

1.2 Ekuazio diferentzialen soluzioak

Ekuazio diferentzial bat ebaztea, edo integratzea, ekuazioa betetzen duten funtzio guztiak aurkitzea da.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eta $x\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esango dugu x funtzioa (1.1.1) ekuazio diferentzial esplizituaren soluzioa dela, baldin eta

(i) $(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \in D$ bada $t \in I$ guztietarako eta

(ii) $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$ bada $t \in I$ guztietarako.

Adibidea. Izan bitez k konstante erreala eta

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

ekuazio diferentziala. Hemen $x(t) = Ce^{kt}$ funtzioak, C edozein konstante erreal izanik, ekuazio diferentzialaren soluzioak dira, deribatuz erraz egiazta daitekeen bezala; eta alderantziz, x ekuazio diferentzialaren soluzioa bada, existituko da $C \in \mathbb{R}$ non $x(t) = Ce^{kt}$ den $t \in \mathbb{R}$ guztietarako. Izan ere, $x' = kx$ bada, $\dfrac{x'(t)}{x(t)} = k$. Berdintza horren ezkerreko atala $\ln x(t)$ funtzioaren deribatua denez, existituko da $\alpha \in \mathbb{R}$ non $\ln x(t) = kt + \alpha$ den eta, beraz, $x(t) = e^{kt+\alpha} = Ce^{kt}$, $C = e^{\alpha} \in \mathbb{R}$ izanik.

Adibidea. Izan bedi

$$x'' + x = 0$$

bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineala. $x(t) = \cos t$ eta $x(t) = \sin t$ haren soluzioak dira, eta $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ ere soluzioak dira, C_1, C_2 edozein bi konstante erreal izanik. Alderantzizkoa ere egia da, hau da, x ekuazio diferentzialaren soluzioa bada, existituko dira $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ non $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ den, 3. gaian frogatuko dugun bezala.

Oharra. Sarritan, ekuazio diferentzialaren soluzioak forma inplizituan definituta agertzen dira, hots, ezin ditugu aldagai independentearekiko esplizituki adierazi. Adibidez, $tx = \ln x + C$ ekuazioaren bidez inplizituki definitutako $x = x(t)$ funtzioak ezin dira esplizituki kalkulatu, baina funtzio horiek

$$x' = \frac{x^2}{1 - xt}$$

ekuazio diferentzialaren soluzioak dira. Izan ere, inplizituki deribatuz, hau da, x t-ren menpekoa dela onartuz,

$$x + tx' = \frac{x'}{x} \implies x^2 + txx' = x' \implies x^2 = (1 - tx)x'.$$

Definizioak. Izan bitez $F\colon D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ eta $x\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esango dugu x funtzioa era inplizituan idatzitako (1.1.2) ekuazio diferentzialaren soluzioa dela, baldin eta

(i) $(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) \in D$ bada $t \in I$ guztietarako eta

(ii) $F(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}) = 0$ bada $t \in I$ guztietarako.

Existitzen bada (1.1.2) n ordenako ekuazio diferentzialaren soluzioen familia bat, n konstanteren menpekoa dena, funtzio-familia hori ekuazio diferentzialaren *soluzio orokorra, jatorrizkoa* edo *integral sorta* dela diogu. (1.1.2) ekuazioaren soluzio orokorra $x = x(t, C_1, \ldots, C_n)$ moduan adierazten bada, *era esplizituan* dagoela esaten da; aldiz, $h(t, x, C_1, \ldots, C_n) = 0$ ekuazioaren bidez adierazten bada, *era inplizituan* dagoela diogu.

Soluzio orokorrean konstanteen balioak finkatuz lortzen den soluzioari ekuazio diferentzialaren *soluzio partikular* esan ohi zaio.

(1.1.2) ekuazio diferentzialaren soluzio bat ez bada lortzen soluzio orokorrean konstanteei balioak emanez, orduan, *soluzio singular* deritzo.

Ekuazio diferentzialaren soluzioen adierazpide geometrikoei, $\mathbb{R}^2$ planoan, ekuazio diferentzialaren *kurba integral* esan ohi zaie.

Esan bezala, n ordenako ekuazio diferentzial arrunt baten soluzio partikular bat lortzeko, ekuazioaren soluzio orokorrean agertzen diren n konstanteei balioak eman behar zaizkie. Sarritan, hori egiteko soluzioaren eta haren deribatuen balioak finkatzen dira aldagai independentearen t_0 balio baterako.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ eta $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$. Honako problema honi:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) = \xi_0, \\ x'(t_0) = \xi_1, \\ \quad \ldots, \\ x^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}, \end{cases}$$

(1.1.1) ekuazio diferentzialaren *Cauchyren problema* esaten zaio.

Ekuazio diferentzial baten ordena n bada, baldintza egoki batzuk betez gero, n parametroko soluzio-familia bat existituko da, haren soluzio orokorra, lehenago esan den bezala. Bereziki, lehen ordenako ekuazio diferentzial baten soluzio orokorra parametro bateko kurba-familia bat da, $h(t, x; C) = 0$ ekuazio inplizituaren bidez adieraziko dena.

Alderantziz ere, $g(t, x; C) = 0$ ekuazioak $x = x(t; C)$ funtzio-familia bat definitzen badu, $g \in C^1$ izanik, orduan, funtzio-familia hori ekuazio diferentzial arrunt baten soluzio orokorra da. Ekuazio diferentziala lortzeko, $g(t, x; C) = 0$ ekuazioan inplizituki deribatzen da,

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0.$$

Orain,

$$\begin{cases} g(t, x; C) = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial x}x' = 0 \end{cases}$$

ekuazio-sistematik C desagerraraziz,

$$F(t, x, x') = 0$$

moduko ekuazio diferentzial arrunt batera heltzen da.

Adibidea. $x^2 + y^2 = C^2$ ekuazioak jatorrian zentratutako zirkunferentzien familia adierazten du. Kurba-familia honi dagokion ekuazio diferentziala lortzeko, x-rekiko deribatu behar dugu, $y = y(x)$ modukoa dela suposatuz. Horrela, ekuazio diferentzial honetara heltzen da:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Adibidea. $x^2 + y^2 = 2Cx$ ekuazioak OX ardatzean zentroa duten eta jatorritik pasatzen diren zirkunferentzien familia adierazten du. Kurba-familia honi dagokion ekuazio diferentziala lortuko dugu x-rekiko deribatuz,

$$2x + 2yy' = 2C,$$

x-rekin biderkatuz azken berdintza horretan, eta kontuan hartuz $2Cx = x^2 + y^2$ dela,

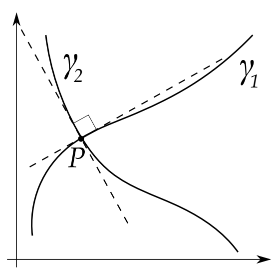
$$2x^2 + 2xyy' = 2Cx = x^2 + y^2;$$

hau da,

$$2xyy' = y^2 - x^2.$$

1.3 Kurba-familia baten ibilbide ortogonalak

Definizioa. Izan bitez γ_1, γ_2 planoko bi kurba, $P \in \mathbb{R}^2$ puntuan elkar ebakitzen dutenak. γ_1 eta γ_2 P puntuan ortogonalak direla diogu, haien zuzen ukitzaileak P puntuan ortogonalak badira.



Definizioa. Izan bedi $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ $\mathbb{R}^2$ planoko kurba-familia. Γ planoko kurba $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ familiaren ibilbide ortogonala dela diogu Γ eta γ_i kurbak ortogonalak badira haien arteko ebaki-puntuetan, $i \in I$ guztietarako.

Definizioa. Izan bitez $\gamma = \{\gamma_i\}_{i\in I}$ eta $\Gamma = \{\Gamma_j\}_{j\in J}$ planoko bi kurba-familia. Γ γ-ren ibilbide ortogonalen familia da, Γ-ren kurba guztiak γ-ren ibilbide ortogonalak badira eta γ-ren ibilbide ortogonal guztiak Γ familiakoak badira.

Kurba-familia baten ibilbide ortogonalak nola kalkulatu ikusiko dugu, kurba-familia koordenatu kartesiarretan zein koordenatu polarretan emanda dagoenean.

1.3.1 Koordenatu kartesiarretan

$y = y(x)$ kurbaren malda $P_0 = (x_0, y(x_0))$ puntuan $y'(x_0)$ da. $\eta = \eta(x)$ $y = y(x)$ kurbarekiko ortogonala bada P_0 puntuan, orduan, $\eta'(x_0)y'(x_0) = -1$ da; hau da, $y'(x_0) = -1/\eta'(x_0)$.

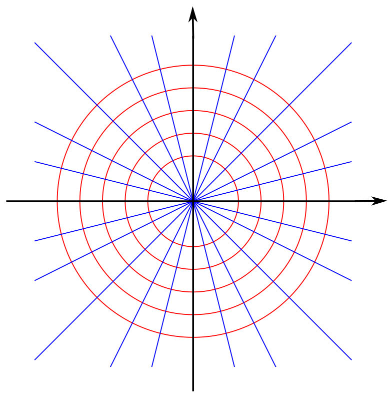
Aurkitu nahi ditugu kurba-familia baten ibilbide ortogonalak. Aurrekoaren arabera, honako urrats hauek jarraitu behar dira:

(1) Aurkitu kurba-familiaren ekuazio inplizitua, $g(x, y; C) = 0$.

(2) $g(x, y; C) = 0$ ekuaziotik abiatuz, lortu kurba-familiak betetzen duen lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunta, $F(x, y, y') = 0$.

(3) Ebatzi $F\big(x, y, -1/y'\big) = 0$ ibilbide ortogonalek bete behar duten ekuazio diferentziala. Ekuazio horren soluzio orokorra, $h(x, y; C) = 0$, ibilbide ortogonalen ekuazio inplizitua da.

Adibidea. Aurkitu jatorrian zentratutako zirkunferentzien familiaren ibilbide ortogonalak.



Jatorrian zentratutako zirkunferentziak honela deskriba daitezke: $x^2 + y^2 = C^2$, $C \in \mathbb{R}$ izanik. Ekuazio horretan inplizituki deribatuz, $y = y(x)$ dela kontuan izanik,

$$2x + 2yy' = 0 \iff x + yy' = 0.$$

Orduan, honako hau da ibilbide ortogonalek betetzen duten ekuazio diferentziala:

$$x + y\Big(-\frac{1}{y'}\Big) = 0.$$

Ekuazio diferentzial berri hau ebatzi behar dugu.

$$x - \frac{y}{y'} = 0 \iff xy' - y = 0 \iff \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \iff \ln|y| = \ln|x| + k = \ln(C|x|).$$

Beraz, gure zirkunferentzien ibilbide ortogonalak $y = Cx$ moduko kurbak dira, $C \in \mathbb{R}$ izanik, hots, jatorritik pasatzen diren zuzenak.

1.3.2 Koordenatu polarretan

Izan bitez (θ, r) planoko puntuen koordenatu polarrak, $r = r(\theta)$ polarretan adierazitako kurba, eta $y = y(x)$ kurba horren adierazpena koordenatu kartesiarretan. Koordenatu kartesiar eta polarren arteko erlazioaren arabera,

$$x = r(\theta)\cos\theta, \quad y = r(\theta)\sin\theta,$$

honako era honetan berridatz dezakegu ekuazioa:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}.$$

Izan bedi $\rho = \rho(\theta)$ gure kurbarekiko ortogonala $\theta = \theta_0$ balioari dagokion puntuan, eta izan bedi $\eta = \eta(x)$ haren adierazpena koordenatu kartesiarretan. $y'(x_0)\eta'(x_0) = -1$ izan behar denez

$$\begin{aligned}
&\frac{r'(\theta_0)\sin\theta_0 + r(\theta_0)\cos\theta_0}{r'(\theta_0)\cos\theta_0 - r(\theta_0)\sin\theta_0} \cdot \frac{\rho'(\theta_0)\sin\theta_0 + \rho(\theta_0)\cos\theta_0}{\rho'(\theta_0)\cos\theta_0 - \rho(\theta_0)\sin\theta_0} = -1 \implies \\
&\qquad r'(\theta_0)\rho'(\theta_0)\sin^2\theta_0 + r'(\theta_0)\rho(\theta_0)\sin\theta_0\cos\theta_0 \\
&\qquad + r(\theta_0)\rho'(\theta_0)\cos\theta_0\sin\theta_0 + r(\theta_0)\rho(\theta_0)\cos^2\theta_0 = \\
&\qquad - r'(\theta_0)\rho'(\theta_0)\cos^2\theta_0 + r'(\theta_0)\rho(\theta_0)\sin\theta_0\cos\theta_0 \\
&\qquad + r(\theta_0)\rho'(\theta_0)\cos\theta_0\sin\theta_0 - r(\theta_0)\rho(\theta_0)\cos^2\theta_0 \\
&\qquad\qquad \implies r'(\theta_0)\rho'(\theta_0) + r(\theta_0)\rho(\theta_0) = 0.
\end{aligned}$$

Beraz, $r = r(\theta)$ eta $\rho = \rho(\theta)$ kurba ortogonalak badira $\theta = \theta_0$ balioari dagokion puntuan, $r(\theta_0) = \rho(\theta_0)$ denez, $r'(\theta_0) = -\dfrac{(\rho(\theta_0))^2}{\rho'(\theta_0)}$ da.

Arestian azaldutakoaren arabera, polarretan emandako kurba-familia baten ibilbide ortogonalak topatzeko, urrats hauek jarraituko ditugu:

(1) Aurkitu $g(\theta, r; C) = 0$ kurba-familiaren adierazpen inplizitua koordenatu polarretan.

(2) $g(\theta, r; C) = 0$ ekuaziotik abiatuz, lortu kurba-familiaren lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunta, $F(\theta, r, r') = 0$;

(3) Ebatzi $F\big(\theta, r, -\dfrac{r^2}{r'}\big) = 0$ ibilbide ortogonalek bete behar duten ekuazio diferentziala. Azken ekuazio diferentzial horren soluzio orokorra, $h(\theta, r; C) = 0$, ibilbide ortogonalen ekuazio inplizitua da.

Adibidea. $r = C(1-\sin\theta)$ ekuazioko kurba-familiaren ibilbide ortogonalak topatu, $C > 0$ izanik.

Ardatz bertikalarekiko simetrikoak diren kardioideak ditugu. Deriba dezagun emandako ekuazio inplizituan, kurben ekuazio diferentziala lortzeko:

$$r' = -C\cos\theta.$$

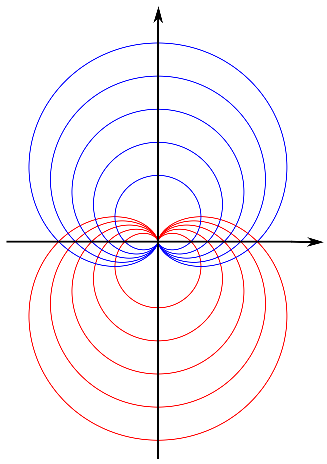
C konstantea desagertarazteko, zati dezagun r lortu dugun deribatuarekin. Horrela,

$$\frac{r}{r'} = -\frac{C(1-\sin\theta)}{C\cos\theta} = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}$$

ekuazio diferentziala lortzen dugu.

Orain, ibilbide ortogonalen ekuazio diferentziala behar dugu. Horretarako, r'-ren ordez, $-\frac{r^2}{r'}$ jarri behar dugu ekuazio diferentzialean:

$$-\frac{r}{\frac{r^2}{r'}} = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta} \iff \frac{r'}{r} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}.$$



Berdintzaren bi atalak integratuz,

$$\begin{aligned}
\ln r(\theta) &= \int \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} d\theta \\
&= \int \frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}\cos\theta d\theta \\
&= \int \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} d\theta \\
&= \ln(1+\sin\theta) + k.
\end{aligned}$$

Beraz, ibilbide ortogonalen ekuazioa $r(\theta) = C(1+\sin\theta)$ da. Hauek ere ardatz bertikalarekiko simetrikoak diren kardioideak dira, hasierakoen simetrikoak OX ardatzarekiko.

1.4 Ariketak

1. Zein da honako ekuazio diferentzial hauen ordena? Zein dira linealak?

   (i) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+t\dfrac{dx}{dt}+2x=\sin t$ *Em.:* 2 ordenakoa, lineala

   (ii) $(1+x^2)\dfrac{d^2x}{dt^2}+t\dfrac{dx}{dt}+x=e^t$ *Em.:* 2 ordenakoa, ez lineala

   (iii) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+\dfrac{d^3x}{dt^3}+\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+x=1$ *Em.:* 4 ordenakoa, lineala

   (iv) $\dfrac{dx}{dt}+tx^2=0$ *Em.:* 1 ordenakoa, ez lineala

   (v) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\sin(t+x)=\sin t$ *Em.:* 2 ordenakoa, ez lineala

2. Aztertu eskuineko funtzioak honako ekuazio diferentzial hauen soluzioak diren:

   (i) $x'-2tx=1;$ $x(t)=e^{t^2}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2}ds+e^{t^2}$

   (ii) $t^2x''+5tx'+4x=0,\ t>0;$ $x_1(t)=t^{-2},\ \ x_2(t)=t^{-2}\ln t$

   (iii) $(x')^2-tx'+x=0;$ $x_1(t)=ct-c^2,\ \ x_2(t)=3(t-3),\ \ x_3(t)=\dfrac{t^2}{4}$

   (iv) $x''=1+(x')^2;$ $x_1(t)+\ln(\cos(t+B))=A,\ \ x_2(t)=1+\ln(\sec t)$

3. Kalkula itzazu r-ren balioak, $x(t)=e^{rt}$ motako funtzioak honako ekuazio diferentzial hauen soluzioak izan daitezen:

   (i) $x'+2x=0$ *Em.:* $r=-2$

   (ii) $x''+x'-6x=0$ *Em.:* $r=-3,2$

   (iii) $x'''-3x''+2x'=0$ *Em.:* $r=0,1,2$

4. Kalkula itzazu r-ren balioak, $x(t)=t^r$, $t>0$, erako funtzioak honako ekuazio diferentzial lineal hauen soluzioak izan daitezen:

   (i) $t^2x''+4tx'+2x=0$ *Em.:* $r=-2,-1$

   (ii) $t^2x''-4tx'+4x=0$ *Em.:* $r=1,4$

5. Froga ezazu $x^2+t-3=0$ berdintzak inplizituki definitzen duela $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2x}$ ekuazio diferentzialaren soluzio bat.

6. Froga ezazu $tx^3-tx^3\sin t=1$ berdintzak inplizituki definitzen duela

   $$\frac{dx}{dt}=\frac{(t\cos t+\sin t-1)x}{3t(1-\sin t)}$$

   ekuazio diferentzialaren soluzio bat.

7. Integrazio-metodoak erabiliz, kalkula itzazu ekuazio diferentzial hauen soluzio orokorrak:

   (i) $tx' = 1$ *Em.:* $x(t) = \ln(Ct)$

   (ii) $x' = \arcsin t$ *Em.:* $x(t) = t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C$

   (iii) $(1+t^3)x' = t$ *Em.:* $x(t) = \dfrac{1}{6}\ln\Big(C\dfrac{t^3+1}{(t+1)^3}\Big) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$

   (iv) $txx' = x - 1$ *Em.:* $(x-1)e^x = Ct$

   (v) $t^5x' + x^5 = 0$ *Em.:* $\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{t^4} = C$

   (vi) $tx' = (1-2t^2)\tan x$ *Em.:* $\sin x = Cte^{-t^2}$

   (vii) $x' = 2tx$ *Em.:* $x(t) = Ce^{t^2}$

   (viii) $x' \sin x = t^2$ *Em.:* $3\cos x = C - t^3$

   (ix) $x' + x\tan t = 0$ *Em.:* $x(t) = C\cos t$

   (x) $x' - x\tan t = 0$ *Em.:* $x(t) = C\sec t$

   (xi) $(1+t^2)dx + (1+x^2)dt = 0$ *Em.:* $\arctan x(t) + \arctan t = C$

   (xii) $x' - 6tx = 3t$ *Em.:* $x(t) = Ce^{3t^2} - \dfrac{1}{2}$

   (xiii) $x' + x\cos t = \sin t \cos t$ *Em.:* $x(t) = \sin t - 1 + Ce^{-\sin t}$

   (xiv) $\dfrac{1}{t}x' - \dfrac{2}{t^2}x = t\cos t$ *Em.:* $x(t) = t^2 \sin t + Ct^2$

   (xv) $(3x^2+t)dx + xdt = 0$ *Em.:* $x^3 + xt = C$

   (xvi) $(2x+t)dx + (2t+x)dt = 0$ *Em.:* $x^2 + tx + t^2 = C$

   (xvii) $r'(\theta) - 2\sin\theta = 0$ (r, θ koordenatu polarrak) *Em.:* $r(\theta) = C - 2\cos\theta$

8. Izan bitez C planoko kurba bat, P kurba horren edozein puntu eta P_1 P puntuko kurbaren zuzen normalaren eta abzisa-ardatzaren arteko ebaki-puntua. P_1-etik P-ra dagoen distantzia eta P-tik jatorrira dagoena berdinak badira P guztietarako, aurki ezazu kurbaren ekuazio diferentziala.

   Em.: $(yy')^2 = x^2$.

9. Aurki ezazu jatorritik pasatzen diren zuzenek ω angelu konstante batez ebakitzen duten ibilbideen ekuazioa. (Erabili koordenatu polarrak).

   Em.: $r = r' \tan\omega$.

10. Izan bedi C planoko kurba bat. Kurbaren P puntuko zuzen ukitzaileak eta abzisa-ardatzak osatzen duten angelua jatorritik eta P-tik pasatzen den zuzenak eta abzisa-ardatzak osatzen duten angeluaren bikoitza da, kurbaren P puntu guztietarako. Aurkitu kurbaren ekuazio diferentziala.

    Em.: Koordenatu kartesiarretan: $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$; koordenatu polarretan: $r = r' \tan\theta$.

11. Izan bedi C planoko kurba bat. Kurba horren P puntuko zuzen ukitzaileak eta koordenatu-ardatzek osatzen duten triangeluaren azalera A konstantea da kurbaren P guztietarako. Aurkitu kurbaren ekuazio diferentziala.

    Em.: $2Ay' + (y - xy')^2 = 0$.

12. Erréktangelu batek erpin bat dauka jatorrian, beste bat absiza-ardatzean, hirugarren bat ordenatu-ardatzean, eta azken erpina lehenengo kuadrantean dago, eta $y = y(x)$ kurban zehar mugitzen da. Errektangeluaren azaleraren x-rekiko aldaketa-erritmoa azalerarekiko proportzionala dela jakinda, kalkula ezazu kurbaren ekuazioa.

    Em.: $y' = \alpha y - \dfrac{y}{x}$, α proportzionaltasun konstantea izanik.

13. Herri bateko populazioak eredu esponentziala jarraitzen du, haren batez besteko hazkunde-tasa urteko $\dfrac{1}{50}$ izanik. Kalkulatu zenbat urte barru bikoiztuko den gaurko populazioa.

    Em.: $50 \ln 2$ urte

14. Froga ezazu $x = t^3$ eta $t^2 + 3x^2 = 4$ ekuazioen bidez definitutako γ_1 eta γ_2 kurbak ortogonalak direla ebaki-puntuetan.

15. Bilatu honako kurba-familia hauen ibilbide ortogonalak:

    (i) $xy = c$ — *Em.:* $y^2 - x^2 = C$

    (ii) $y = \dfrac{cx}{1+x}$ — *Em.:* $3(x^2 + y^2) + 2x^3 = C$

    (iii) $x + y + 1 = ce^x$ — *Em.:* $x + y - 1 = Ce^{-y}$

    (iv) $y^3 = cx^2$ — *Em.:* $3x^2 + 2y^2 = C$

    (v) $3xy^2 = 2 + 3cx$ — *Em.:* $y = Ce^{x^3}$

    (vi) $r = c\cos\theta$ — *Em.:* $r(\theta) = C\sin\theta$

    (vii) $r^2 = c\cos 2\theta$ — *Em.:* $r^2 = C\sin 2\theta$

2. gaia

Lehen ordenako ekuazio diferentzialak: ebazpen-metodo elementalak

Aurreko gaian esan zen bezala, ekuazio diferentzial arruntak lehen ordenakoak dira ezezagunaren ordena nagusiko deribatua lehenengoa bada, x'. Ekuazio diferentzial horiek zenbait modutan idatz daitezke:

Forma inplizitua: $F(t,x,x')=0$, $F\colon D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ izanik.

Forma esplizitua: $x'=f(t,x)$, $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ izanik.

Forma diferentziala: $M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$, $M,N\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ izanik.

Adibideak. (i) $x'=f(t)$, $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ izanik.

Hori da lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunt sinpleena. Soluzioak f-ren jatorrizko funtzioak dira.

$$x'=f(t) \quad\Longrightarrow\quad x(t)=\int f(t)\,dt=F(t)+k,$$

non $F'(t)=f(t)$ den, $t\in\operatorname{Dom}(f)$ guztietarako. Beraz, soluzio orokorra konstante baten menpeko funtzio-familia bat da. Hasierako baldintza bat ezartzen bada, $x(t_0)=x_0$, orduan,

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds.$$

(ii) $(x'(t))^2+1=0$ lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunta da. Ekuazio horrek ez du soluziorik.

(iii) $(x'(t))^2+(x(t))^2=0$ lehen ordenako ekuazio diferentzial arrunta da eta haren soluzio bakarra $x\equiv 0$ funtzio nulua da.

Oharra. Nahiz eta aurreko adibideetako azken kasuetan ekuazio diferentzialak soluziorik ez duen edo soluzio bakarra duen, oro har, existituko da lehen ordenako ekuazio diferentzialaren soluzio-familia bat, soluzio orokorra, $h(t, x; C) = 0$ motako ekuazio baten bidez inplizituki definitzen dena, C parametroa hautazko zenbaki erreala izanik. Maiz, soluzioaren adierazpen esplizitua topatzea ez da posible izango.

2.1 Lehen ordenako ekuazio diferentzialak ebazteko metodo analitikoak

Atal honetan, lehen ordenako ekuazio diferentzialen eredu batzuen soluzioak aurkitzeko metodoak emango ditugu.

2.1.1 Aldagai bananduetako ekuazio diferentzialak

Definizioa. Izan bitez $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x'(t) = f(t)g(x), \tag{2.1.1}$$

aldagai bananduetako ekuazio diferentziala dela esaten da.

Ebazpen-metodoa.

$g(\xi) = 0$ bada, $x(t) = \xi$ funtzio konstantea (2.1.1) ekuazio diferentzialaren soluzioa da.

$g(x) \neq 0$ bada, aldiz, (2.1.1) ekuazioa $\dfrac{dx}{g(x)} = f(t)dt$ moduan berridatz daiteke, beraz,

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

integral mugagabeen arteko berdintzak (2.1.1) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra adieraziko du, forma inplizituan.

Cauchyren problemaren soluzioa, hau da, $x(t_0) = x_0$ baldintza betetzen duen (2.1.1) ekuazio diferentzialaren x soluzio partikularra, honako era honetan adieraz daiteke, integral mugatuak erabiliz:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$$

Adibidea. Izan bedi $x' = \dfrac{t^2}{1 + x^2}$. Orduan,

$$\int (1 + x^2)\, dx = \int t^2\, dt$$

eta, integratuz,

$$x + \frac{x^3}{3} = \frac{t^3}{3} + C \quad \iff \quad x^3 - t^3 + 3x = C$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorraren adierazpen inplizitua lortzen da.

2.1.2 Aldagai bananduetako bihur daitezkeen ekuazio diferentzialak

Aldagai-aldaketa egoki baten bidez, ekuazio diferentzial batzuk aldagai banaduetako ekuazio bihur daitezke.

(1) Izan bitez $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstanteak.

$$x' = f(at + bx + c)$$

ekuazio diferentzialean

$$z = at + bx + c$$

aldagai-aldaketa egiten bada, t-rekiko deribatuz, $z' = a + bx'$ da eta

$$z' = a + bf(z)$$

aldagai bananduetako ekuazio diferentziala lortzen da.

Adibidea. Izan bedi $x' = \dfrac{a^2}{(t+x)^2}$ ekuazio diferentziala, $a > 0$ izanik. $z = t+x$ aldagai-aldaketa eginez,

$$z' = 1 + x' = 1 + \frac{a^2}{z^2} = \frac{z^2 + a^2}{z^2}$$

aldagai bananduetako ekuazioa dugu, honela berridatz daitekeena,

$$\frac{z^2\,dz}{z^2 + a^2} = dt$$

eta, integratuz,

$$z - a \arctan \frac{z}{a} = t + C$$

dugu. Aldagai-aldaketa deseginez, $z = t + x$ denez,

$$x - a \arctan \frac{t + x}{a} = C.$$

(2) Izan bedi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x' = f\Big(\frac{x}{t}\Big)$$

ekuazio diferentzialean $z = \dfrac{x}{t}$ aldaketa egiten badugu, hau da, $x = tz$, t-rekiko deribatuz,

$$x' = z + tz',$$

Ekuazioan ordezkatuz, $z + tz' = f(z)$ lortzen da, hots,

$$z' = \frac{1}{t}\big(f(z) - z\big)$$

aldagai bananduetako ekuazio diferentziala lortzen da.

2.1.3 Ekuazio diferentzial homogeneoak

Definizioa. Izan bitez $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eta $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. f *homogeneoa* dela diogu, baldin eta existitzen bada $\alpha \in \mathbb{R}$ non

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

α f-ren *homogeneotasun-maila* da.

Definizioa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zero mailako funtzio homogeneoa. Orduan,

$$x' = f(t, x)$$

ekuazio diferentzial homogeneoa dela esaten da.

Modu berean, $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogeneotasun-maila bereko funtzio homogeneoak badira, orduan,

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$$

ekuazio diferentziala *ekuazio diferentzial homogeneoa* dela esaten da.

Oharra. Izan bitez $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogeneotasun-maila bereko funtzio homogeneoak. Orduan, $f(t, x) = -\dfrac{M(t, x)}{N(t, x)}$ zero mailako funtzio homogeneoa da; beraz, aurreko definizioak baliokideak dira.

Ekuazio diferentzial homogeneoek kalkulu aldakorrean eta brakistokronean dituzte aplikazioak.

Ebazpen-metodoa.

f zero mailako funtzio homogeneoa bada, orduan,

$$f(t, x) = f\big(t \cdot 1, t\frac{x}{t}\big) = f\big(1, \frac{x}{t}\big) = \tilde{f}\big(\frac{x}{t}\big),$$

eta, lehen ikusi dugunaren arabera,

$$z = \frac{x}{t}$$

aldagai-aldaketa eginez, z funtzio ezezagun berria aldagai bananduetako ekuazio diferentzial baten soluzioa da.

Adibidea. $x' = \dfrac{x-t}{x}$ ekuazio homogeneoa da. $z = x/t$ aldagai-aldaketa eginez, $x' = z + tz'$ eta ekuazioan ordezkatuz

$$z + tz' = 1 - \frac{1}{z} \implies z' = \frac{1}{t}\Big(1 - \frac{1}{z} - z\Big) = \frac{z-1-z^2}{zt}$$

aldagai bananduetako ekuazioa lortzen dugu. Berrantolatuz,

$$\frac{z\,dz}{z-1-z^2} = \frac{dt}{t}$$

da, eta integratuz,

$$\frac{1}{2}\ln|z^2 - z + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z-1}{\sqrt{3}} = -\ln|t| + C.$$

Azkenik, aldagai-aldaketa desegingo dugu, emandako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra lortzeko,

$$\frac{1}{2}\ln\Big|\Big(\frac{x}{t}\Big)^2 - \frac{x}{t} + 1\Big| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\frac{x}{t} - 1}{\sqrt{3}} = -\ln|t| + C,$$

hau da,

$$\frac{1}{2}\ln\big|x^2 - xt + t^2\big| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-t}{\sqrt{3}t} = C,$$

hain zuzen ere.

2.1.4 Homogeneo bihur daitezkeen ekuazio diferentzialak

Izan bitez $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ non $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ den. Orduan,

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right)$$

lehen ordenako ekuazio diferentziala homogeneo bihur daiteke aldagai-aldaketa egoki baten bidez. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ denez,

$$\begin{cases} a_1t + b_1x + c_1 = 0, \\ a_2t + b_2x + c_2 = 0, \end{cases}$$

sistemak soluzio bat eta bakarra dauka, (t_0, x_0). Orduan,

$$\begin{cases} a_1t + b_1x + c_1 = a_1(t - t_0) + b_1(x - x_0), \\ a_2t + b_2x + c_2 = a_2(t - t_0) + b_2(x - x_0), \end{cases}$$

eta $s = t - t_0$, $y = x - x_0$ aldaketa eginez, ekuazio diferentzial homogeneoa lortuko dugu $y = y(s)$ funtzio ezezagunerako,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1s + b_1y}{a_2s + b_2y}\right).$$

Adibidea. $x' = \dfrac{t-x+5}{t+x-1}$ ekuazio diferentziala ebatzi nahi dugu. Lehenengo eta behin,

$$\begin{cases} t-x+5=0, \\ t+x-1=0, \end{cases}$$

ekuazio-sistemaren soluzioa lortu behar dugu. Bi ekuazioen batura eginez, $t_0=-2$ izan behar duela lortzen dugu, eta, lehen ekuazioan ordezkatuz, $x_0=3$ dugu. Beraz,

$$s=t+2, \qquad y=x-3$$

aldagai-aldaketa eginez,

$$\frac{dy}{ds}=\frac{s-y}{s+y}$$

ekuazio homogeneoa lortzen dugu. Hemen, $z=y/s$ aldaketa berria egiten badugu, hots, $y=sz$,

$$y'=z+sz'=\frac{1-z}{1+z}$$

da, eta hemendik

$$z'=\frac{1}{s}\Big(\frac{1-z}{1+z}-z\Big)=\frac{1-2z-z^2}{s(1+z)}$$

aldagai bananduetako ekuaziora heltzen da.

$$\frac{(1+z)\,dz}{1-2z-z^2}=\frac{ds}{s}$$

berdintzaren bi ataletan integratuz,

$$\frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1|=-\ln|s|+C,$$

hau da,

$$s^2(z^2+2z-1)=C_1$$

eta bi aldaketak deseginez, emandako ekuazioaren soluzio orokorra lortuko dugu, era inplizituan idatzita:

$$(x-3)^2+2(x-3)(t+2)-(t+2)^2=C.$$

2.1.5 Ekuazio diferentzial zehatzak

Definizioa. Izan bitez $M,N\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzioak. Esaten da

$$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0 \tag{2.1.2}$$

ekuazio diferentziala *zehatza* dela, existitzen bada $U\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, zeinaren diferentzial osoa $dU(t,x)=M(t,x)dt+N(t,x)dx$ den, hots, $\dfrac{\partial U}{\partial t}=M$ eta $\dfrac{\partial U}{\partial x}=N$.

Kasu horretan, (2.1.2) ekuazio diferentziala

$$dU(t,x) = 0$$

moduan adieraz daiteke, eta ekuazio diferentzial horren soluzio orokorra honako hau da:

$$U(t,x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Oharra. Izan bitez $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Aldagai anitzeko kalkuluan frogatzen da existitzen dela U funtzio bat non $\dfrac{\partial U}{\partial t} = M$ eta $\dfrac{\partial U}{\partial x} = N$ diren baldin eta soilik baldin $\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial x}$ bada. Beraz, kasu horretan, (2.1.2) ekuazio diferentzial zehatza da.

Ekuazio zehatzek astronomian eta radioteleskopioen diseinuan dituzte aplikazioak.

Adibidea. Izan bedi $x' = \dfrac{tx^2 - \cos t \sin t}{x(1-t^2)}$. Ekuazio diferentzial hori zehatza da. Ikus dezagun. Ekuazio diferentzialaren forma diferentziala honako hau da:

$$x(1-t^2)\,dx + (\cos t \sin t - tx^2)\,dt = 0.$$

$M(t,x) = \cos t \sin t - tx^2$ eta $N(t,x) = x(1-t^2)$ izendatuz,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -2tx = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Beraz, aurreko oharraren arabera, ekuazioa zehatza da. Funtzio potentzial bat, U, aurkitu behar dugu, non $\dfrac{\partial U}{\partial x} = N(t,x) = x(1-t^2)$ eta $\dfrac{\partial U}{\partial t} = M(t,x) = \cos t \sin t - tx^2$ diren. Bigarren berdintza t-rekiko integratuz,

$$U(t,x) = \frac{1}{2}\sin^2 t - x^2\frac{t^2}{2} + g(x)$$

da, eta lehen ekuazioan ordezkatuz lortutako U-ren adierazpena,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -xt^2 + g'(x) = x - xt^2 \implies g'(x) = x \implies g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Orduan,

$$U(t,x) = \frac{\sin^2 t}{2} - \frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

eta honako hau da ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra:

$$\sin^2 t + x^2(1-t^2) = C.$$

2.1.6 Zehatz bihur daitezkeen ekuazio diferentzialak: integrazio-faktoreak

Definizioa. Izan bitez $M, N\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Existitzen bada $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non

$$u(t,x)M(t,x)dt + u(t,x)N(t,x)dx = 0 \tag{2.1.3}$$

ekuazio diferentzial zehatza den, orduan, esaten da u funtzioa

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \tag{2.1.4}$$

ekuazio diferentzialaren *integrazio-faktorea* dela.

Integrazio-faktore bat ezagutzen badugu, (2.1.3) ekuazio diferentzial zehatzaren soluzio orokorra aurki dezakegu, eta hau izango da (2.1.4) ekuazio ez-zehatzaren soluzio orokorra ere.

Adibidea. Frogatuko dugu $u(t,x) = \dfrac{1}{tx^2}$ funtzioa

$$(x^2 + xt)\, dt - t^2\, dx = 0 \tag{2.1.5}$$

ekuazio diferentzialaren integrazio-faktorea dela, eta ebatziko dugu ekuazioa.

(2.1.5) ekuazioa u-rekin biderkatuz, honako ekuazio diferentzial berri hau lortzen dugu:

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x}\right)dt - \frac{t}{x^2}dx = 0.$$

Egiaztatu behar dugu ekuazio hori zehatza dela.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{t}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x}\right)$$

denez, ekuazioa zehatza da, hots, u hori (2.1.5) ekuazio diferentzialaren integrazio-faktorea da. Bila dezagun U non

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{t}{x^2}$$

diren. Lehen ekuazioan t-rekiko integratuz,

$$U(t,x) = \ln|t| + \frac{t}{x} + g(x)$$

eta bigarren ekuazioan ordezkatuz,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{t}{x^2} + g'(x) = -\frac{t}{x^2} \implies g'(x) = 0.$$

Beraz, $g \equiv 0$ har daiteke eta

$$U(t,x) = \ln|t| + \frac{t}{x},$$

honako hau izanik (2.1.5) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra:

$$\ln|t| + \frac{t}{x} = C.$$

Ekuazio diferentzial baten integrazio-faktorea lortzea, oro har, ez da problema erraza izango. u (2.1.4) ekuazio diferentzialaren integrazio-faktorea izan dadin

$$\frac{\partial u}{\partial t}N + u\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}M + u\frac{\partial M}{\partial x}. \tag{2.1.6}$$

bete behar da, eta ez dago metodo orokorrik deribatu partzialetako ekuazio hori ebazteko, ez eta ziurtatzeko integrazio-faktorerik existituko ote den ere.

Hori dela eta, gehienetan mota bereziko integrazio-faktoreak bilatuko ditugu: $u = u(x)$, $u = u(t)$, $u = u(t+x)$, $u = u(t/x)$, $u = u(tx)$, motetakoen artean, hain zuzen ere.

(1) $u(t,x) = u(t)$ motako integrazio-faktore bat existi dadin, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ denez, (2.1.6) honela berridazten da:

$$\frac{du}{dt}N + u\frac{\partial N}{\partial t} = u\frac{\partial M}{\partial x},$$

beraz, u-k honako hau egiaztatu behar du:

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right),$$

eta hau beteko da berdintzaren eskuineko atala ez bada x-ren menpekoa, hots, existitzen bada $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = g(t)$$

den. $\dfrac{u'}{u} = g(t)$ aldagai bananduetako ekuazio diferentziala integratuz lortzen da u integrazio-faktorea.

(2) $u(t,x) = u(x)$ moduko integrazio-faktore bat existitzen bada, aurreko kasuan bezala arrazoituz, (2.1.6) honela geratzen da

$$u\frac{\partial N}{\partial t} = u\frac{\partial M}{\partial x} + M\frac{du}{dx} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right).$$

Ondorioz, $\dfrac{N_t - M_x}{M}$ soilik x-ren menpeko funtzioa bada, h, $\dfrac{u'}{u} = h(x)$ aldagai bananduetako ekuazioa ebatziz lortzen da bilatzen den integrazio-faktorea.

Adibidea. Izan bedi

$$x' = -\frac{2tx^4e^x + 2tx^3 + x}{t^2x^4e^x - t^2x^2 - 3t}. \tag{2.1.7}$$

$u = u(x)$ motako integrazio-faktore bat duen aztertu nahi dugu. Izenda ditzagun $M(t,x) = 2tx^4e^x + 2tx^3 + x$ eta $N(t,x) = t^2x^4e^x - t^2x^2 - 3t$. Horrela, (2.1.7) ekuazio diferentzialaren adierazpen diferentziala $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ da, eta $u = u(x)$ moduko integrazio-faktore bat existi dadin, aurretik ikusi dugunaren arabera, $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)$ adierazpenak x-ren menpeko funtzioa izan behar du.

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) &= \frac{(2tx^4e^x - 2tx^2 - 3) - (8tx^3e^x + 2tx^4e^x + 6tx^2 + 1)}{2tx^4e^x + 2tx^3 + x} \\ &= \frac{-8tx^3e^x - 8tx^2 - 4}{x(2tx^3e^x + 2tx^2 + 1)} \\ &= -\frac{4}{x}.\end{aligned}$$

Beraz, $u = u(x)$ motako integrazio-faktorea badago,

$$\frac{u'}{u} = -\frac{4}{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln|u| = -4\ln|x| \quad \Longrightarrow \quad u(x) = \frac{1}{x^4}.$$

(2.1.7) ekuazio diferentziala lortu dugun integrazio-faktorearekin biderkatuz, honako ekuazio diferentzial zehatz hau lortzen dugu:

$$\left(2te^x + \frac{2t}{x} + \frac{1}{x^3}\right)dt + \left(t^2e^x - \frac{t^2}{x^2} - \frac{3t}{x^4}\right)dx = 0.$$

Haren soluzio orokorra emateko U aurkitu behar dugu, non

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2te^x + \frac{2t}{x} + \frac{1}{x^3}, \qquad \text{eta} \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = t^2e^x - \frac{t^2}{x^2} - \frac{3t}{x^4}$$

diren. Bi horietako lehen ekuazioan t-rekiko integratuz,

$$U(t,x) = t^2e^x + \frac{t^2}{x} + \frac{t}{x^3} + g(x),$$

eta, bigarren ekuazioan ordezkatuz lortutako adierazpena,

$$t^2e^x - \frac{t^2}{x^2} - \frac{3t}{x^4} + g'(x) = t^2e^x - \frac{t^2}{x^2} - \frac{3t}{x^4},$$

beraz, $g \equiv 0$ har daiteke, eta (2.1.7) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra honako hau da:

$$t^2e^x + \frac{t^2}{x} + \frac{t}{x^3} = C.$$

2.1.7 Ekuazio diferentzial linealak

Definizioa. Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak.

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t),$$

lehen ordenako ekuazio diferentzial lineala dela diogu.

b funtzio nulua bada, hots, $b(t) = 0$ bada $t \in I$ guztietarako, *ekuazio diferentzial lineal homogeneoa* dela esaten da. b funtzio nulua ez bada, *ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoa* edo *betea* dela diogu.

Mota horretako ekuazioek balio dute arkeologian, Karbono-14 metodoaren bidez datak ezagutzeko eta medikuntzan pertsona bat zein ordutan hil den zehazteko.

Ekuazio lineal homogeneoa aldagai bananduetakoa da:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{x} = a(t)dt \quad \Longrightarrow \quad \ln x(t) = \int a(t)\, dt.$$

Beraz, soluzio orokorra honako hau da:

$$x(t) = C \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big), \quad t_0 \in I. \tag{2.1.8}$$

Ekuazio diferentzial linealen kasuan, edozein ordenatakoak izanik, soluzioak egitura aljebraiko ezagun bateko elementuak izango dira, eta, horren ondorioz, soluzioen hainbat propietate ezagutuko ditugu ekuazio diferentzial lineala ebatzi aurretik. Jarraian, lehen ordenako ekuazio diferentzial linealen soluzioen propietateak aztertuko ditugu. Hurrengo gaian ikusiko dira edozein ordenatako ekuazio diferentzial linealen soluzioen propietateak.

2.1 proposizioa. *Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jarraituak.*

(i) *x_1 eta x_2 funtzioak*

$$x' = a(t)x \tag{2.1.9}$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzioak badira, orduan, $\alpha x_1 + \beta x_2$ funtzioa ere (2.1.9) ekuazioaren soluzioa da $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ guztietarako; beraz, (2.1.9) ekuazioaren soluzio multzoa espazio bektoriala da.

(ii) *x_1 eta x_2 funtzioak*

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{2.1.10}$$

ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzioak badira, $x_1 - x_2$ funtzioa (2.1.9) ekuazio homogeneoaren soluzioa da.

Froga. (i) Izan bitez $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eta $x = \alpha x_1 + \beta x_2$. x_1 eta x_2 (2.1.9) ekuazioaren soluzioak direnez,

$$x' = \alpha x_1' + \beta x_2' = \alpha a(t)x_1 + \beta a(t)x_2 = a(t)(\alpha x_1 + \beta x_2) = a(t)x,$$

eta x ere (2.1.9) ekuazioaren soluzioa da.

(ii) Izan bedi $x = x_1 - x_2$. x_1 eta x_2 (2.1.10) ekuazioaren soluzioak direnez,

$$x' = x_1' - x_2' = a(t)x_1 + b(t) - a(t)x_2 - b(t) = a(t)(x_1 - x_2) = a(t)x;$$

beraz, x (2.1.9) ekuazioaren soluzioa da. □

Goiko proposizioaren arabera, (2.1.10) ekuazio lineal ez-homogeneoaren soluzio orokorra lortuko dugu (2.1.9) ekuazioaren soluzio orokorrari (2.1.10) ekuazioaren soluzio partikular bat gehituz; hau da, $x = x_h + x_p$, x_h (2.1.9) ekuazioaren soluzio orokorra eta x_p (2.1.10) ekuazioaren soluzio partikularra izanik.

Lehenago ikusi dugu (2.1.9) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio orokorra (2.1.8) dela; beraz, (2.1.10) ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio orokorra lortzeko, haren soluzio partikular bat kalkulatzea soilik falta zaigu, x_p.

2.2 korolarioa. *Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jarraituak. (2.1.10) ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio orokorra honako hau da:*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

non

$$x_h(t) = C \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big) \tag{2.1.11}$$

(2.1.9) ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra den eta

$$x_p(t) = \Big(\int_{t_0}^{t} b(s) \exp\big(-\int_{s_0}^{s} a(\tau)d\tau\big)ds\Big) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big) \tag{2.1.12}$$

(2.1.10) ekuazioaren soluzio partikular bat den.

Froga. (2.1.12) funtzioa (2.1.10) ekuazio ez-homogeneoaren soluzioa dela frogatzea soilik falta da. Idatz dezagun

$$x_p(t) = C(t) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big)$$

eta bila dezagun C funtzioa horrela definitutako x_p (2.1.10) ekuazioaren soluzioa izan dadin. Deribatuz,

$$x_p'(t) = C'(t) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big) + C(t)a(t) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big),$$

eta (2.1.10) ekuazioan ordezkatuz,

$$C'(t)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big) = b(t),$$

hau da,

$$C'(t) = b(t)\exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big)$$

eta, integratuz, (2.1.12) lortzen da. $\square$

Adibidea. $x' + \dfrac{x}{t} = 3t$ ekuazio diferentziala ebatziko dugu, arestian azaldutako metodoa erabiliz. Lehenengo eta behin, ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra kalkulatu behar dugu.

$$x' + \frac{x}{t} = 0 \iff \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t} \iff \ln|x(t)| = -\ln|t| + \tilde{C} = \ln\Big|\frac{C}{t}\Big| \implies x_h(t) = \frac{C}{t}.$$

Orain, ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat bilatuko dugu, $x_p = \dfrac{C(t)}{t}$ modukoa. Ekuazio diferentzialean ordezkatuz,

$$x_p'(t) + \frac{x_p(t)}{t} = \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t^2} = 3t,$$

beraz,

$$C'(t) = 3t^2 \implies C(t) = t^3$$

eta, ondorioz, $x_p(t) = t^2$. Emandako ekuazioaren soluzio orokorra, orduan, honako hau da:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{C}{t} + t^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.1.8 Lineal bihur daitezkeen ekuazio batzuk: Bernouilli-ren ekuazioa eta Riccati-ren ekuazioa

Definizioa. Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jarraituak eta $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0, 1$.

$$x' = a(t)x + b(t)x^r \tag{2.1.13}$$

Bernouilliren ekuazioa dela diogu.

Ebazpen-metodoa.

$z = x^{1-r}$ aldaketa eginez, ekuazio diferentzial lineal bat lortuko dugu $z = z(t)$ funtzio ezezagunerako. Deribatuz,

$$z' = (1-r)x^{-r}x'$$

eta kontuan izanik x (2.1.13) ekuazioaren soluzioa dela,

$$\begin{aligned} z' = (1-r)x^{-r}(a(t)x + b(t)x^r) = (1-r)a(t)x^{1-r} + (1-r)b(t) \\ = (1-r)a(t)z + (1-r)b(t), \end{aligned}$$

hau da, z ekuazio lineal ez-homogeneo baten soluzioa da.

Adibidea. $x' + 2tx + tx^4 = 0$ Bernouilliren ekuazioa da $r = 4$ izanik; beraz,

$$z = x^{1-4} = x^{-3}$$

aldagai-aldaketa egingo dugu. Deribatuz,

$$z' = -3x^{-4}x' = 3x^{-4}(2tx + tx^4) = 6tx^{-3} + 3t = 6tz + 3t.$$

Ekuazio diferentzial lineal horren soluzio orokorra lortzeko, lehenengo eta behin, ekuazio homogeneoa ebatziko dugu.

$$z' = 6tz \implies \frac{dz}{z} = 6t\,dt \implies \ln|z| = 3t^2 + C \implies z_h(t) = Ce^{3t^2}.$$

Orain, ekuazio ez-homogeneoaren $z_p(t) = C(t)e^{3t^2}$ moduko soluzio partikular bat bilatuko dugu. Ekuazioan ordezkatuz,

$$C'(t)e^{3t^2} + C(t)6te^{3t^2} = 6tC(t)e^{3t^2} + 3t,$$

beraz, $C'(t) = 3te^{-3t^2}$, eta integratuz,

$$C(t) = \int 3te^{-3t^2}\,dt = -\frac{e^{-3t^2}}{2}.$$

Horrela,

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = Ce^{3t^2} - \frac{1}{2}$$

eta aldaketa deseginez,

$$x^3 = \frac{1}{z} = \frac{2}{Ce^{3t^2} - 1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Definizioa. Izan bitez $a, b, c\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jarraituak.

$$x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t) \tag{2.1.14}$$

Riccatiren ekuazioa dela diogu.

Ebazpen-metodoa.

(2.1.14) ekuazioaren soluzio partikular bat ezagutzen bada, x_p, orduan,

$$x = x_p + \frac{1}{z}$$

aldaketaren bidez, ekuazio lineal bat lortuko dugu $z = z(t)$ funtzio ezezagunerako. Deribatuz eta (2.1.14) ekuazioan ordezkatuz,

$$\begin{aligned} x' =& x_p' - \frac{z'}{z^2} \\ =& a(t)\Big(x_p + \frac{1}{z}\Big) + b(t)\Big(x_p + \frac{1}{z}\Big)^2 + c(t) \\ =& a(t)x_p + b(t)x_p^2 + c(t) + \frac{a(t)}{z} + \frac{2b(t)x_p}{z} + \frac{b(t)}{z^2}. \end{aligned}$$

x_p (2.1.14) ekuazioaren soluzioa denez, $x_p' = a(t)x_p + b(t)x_p^2 + c(t)$. Beraz, sinplifikatuz,

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{a(t)}{z} + \frac{2b(t)x_p}{z} + \frac{b(t)}{z^2},$$

hau da,

$$z' + \big(a(t) + 2b(t)x_p\big)z + b(t)$$

ekuazio lineal ez-homogeneoa lortzen da.

Riccatiren ekuazioa biologian eta populazioen hazkuntzak ikertzeko erabiltzen da.

Adibidea. Ebatziko dugu $x' = 2 - 2tx + x^2$ ekuazioa, $x_p = 2t$ funtzioa soluzio bat dela jakinez. Orduan,

$$\begin{aligned} x = 2t + \frac{1}{z} \implies& x' = 2 - \frac{z'}{z^2} = 2 - 2t\Big(2t + \frac{1}{z}\Big) + \Big(2t + \frac{1}{z}\Big)^2 \\ \implies& -\frac{z'}{z^2} = -4t^2 - \frac{2t}{z} + 4t^2 + \frac{4t}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{2tz+1}{z^2} \\ \implies& z' = -2tz - 1. \end{aligned}$$

Ekuazio lineal homogeneoa ebatzi behar dugu lehenengo.

$$z' = -2tz \implies z_h(t) = Ce^{-t^2}.$$

Orain, C funtzioa aurkitu behar dugu $z_p(t) = C(t)e^{-t^2}$ aurreko ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio partikular bat izan dadin. Ekuazioan ordezkatuz,

$$C'(t)e^{-t^2} + C(t)(-2t)e^{-t^2} = -2tC(t)e^{-t^2} - 1 \implies C'(t) = -e^{t^2}.$$

Kasu horretan, ezin da C idatzi oinarrizko funtzioen menpe; integral baten bidez eman behar dugu. Horrela,

$$z_p(t) = -e^{-t^2}\int_0^t e^{\tau^2} d\tau$$

eta ekuazio lineal ez-homogeneoaren soluzio orokorra honako hau da:

$$z(t) = \big(C - \int_0^t e^{\tau^2} d\tau\big)e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Azkenik, aldaketa deseginez,

$$x(t) = 2t + \frac{1}{z(t)} = 2t + \frac{e^{t^2}}{C - \int_0^t e^{\tau^2} d\tau}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.1.9 Ekuazio diferentzial inplizituak

Atal honetan lehen ordenako ekuazio diferentzial inplizitu batzuk aztertuko ditugu, $F(t,x,x')=0$ modukoak, alegia.

(1) F x'-rekiko faktoriza badaiteke, hau da, existitzen badira $f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,m$, non

$$F(t,x,x') = (x'-f_1(t,x))(x'-f_2(t,x))\cdot\ldots\cdot(x'-f_m(t,x))$$

den, orduan, m ekuazio diferentzial esplizitu ditugu,

$$x' = f_i(t,x), \qquad i = 1,\dots,m.$$

Ekuazio horien soluzio orokorrak $G_i(t,x,C) = 0$ adierazpen inplizituen bidez emanda badaude, $i = 1,\dots,m$ bakoitzerako, honako hau da hasierako ekuazio diferentzial inplizituaren soluzio orokorra:

$$G_1(t,x,C)G_2(t,x,C)\cdot\ldots\cdot G_m(t,x,C) = 0, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Adibidea. $x(x')^2 + (t-x)x' - t = 0$ ekuazio diferentzialaren ezkerreko atala bigarren mailako polinomioa da x' aldagaian. Polinomioa faktorizatzeko, erroak bilatu behar ditugu.

$$x' = \frac{x-t\pm\sqrt{(t-x)^2+4tx}}{2x} = \frac{x-t\pm\sqrt{x^2+t^2+2tx}}{2x} = \frac{x-t\pm(x+t)}{2x}.$$

Beraz, erroak 1 eta $-t/x$ direnez, bi ekuazio diferentzial esplizitu ditugu x funtziorako:

$$x' = 1 \implies x(t) = t + C;$$

eta

$$x' = -\frac{t}{x} \implies xdx = -tdt \implies x^2 = -t^2 + C.$$

Hauxe da emandako ekuazio diferentzial inplizituaren soluzio orokorra:

$$(x-t-C)(x^2+t^2-C) = 0.$$

(2) $x = f(t,x')$ egiturako ekuazio diferentzialak.

$x' = z$ izendatuz, $x = f(t,z)$ ekuazioa dugu; t-rekiko deribatuz,

$$z = x' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}z'.$$

Lortutako ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $h(t,z,C) = 0$ bada, ekuazio horrek eta $x = f(t,z)$ ekuazioak osatzen duten sistemaren x soluzioa izango da hasierako ekuazio diferentzialaren soluzioa.

Adibidea. Izan bedi $2(x')^2 - 2tx' - 2x + t^2 = 0$. Hemendik, x-rako adierazpen esplizitu bat lor daiteke,

$$x = (x')^2 - tx' + \frac{t^2}{2}.$$

Orain $x' = z$ izendatuz,

$$x = z^2 - tz + \frac{t^2}{2}$$

berdintza dugu. t-rekiko deribatuz,

$$z = x' = 2zz' - z - tz' + t \implies 2z - t = z'(2z - t) \implies (2z - t)(z' - 1) = 0.$$

Bi aukera ditugu:

$$\begin{aligned}
2z - t = 0 \implies z = \frac{t}{2} \implies x =& z^2 - tz + \frac{t^2}{2} = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - t\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{4}, \\
z' = 1 \implies z = t + C \implies x =& z^2 - tz + \frac{t^2}{2} = (t + C)^2 - t(t + C) + \frac{t^2}{2} \\
=& \frac{t^2}{2} + Ct + C^2.
\end{aligned}$$

(3) $t = f(x, x')$ erako ekuazio diferentzialak.

$x' = z$ izendatuko dugu, $z = z(x)$ dela suposatuz. Orduan, $t = f(x, z)$ ekuazioan x-rekiko deribatuz:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

hau da, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x'}$ denez,

$$\frac{1}{z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}z'$$

ekuazio diferentziala dugu. Azken ekuazio diferentzial horren soluzio orokorra $h(x, z, C) = 0$ bada, ekuazio horrek eta $t = f(x, z)$ ekuazioak osatzen duten sistema erabiliko dugu hasierako ekuazio diferentzial inplizituaren soluzioa kalkulatzeko.

Adibidea. Izan bedi $x(x')^2 - 2tx' + x = 0$. Ekuazio horretatik t-ren adierazpen esplizitua lor daiteke x eta x'-ren menpe,

$$t = \frac{x(x')^2 + x}{2x'}.$$

Orain $x' = z$ izendatuz, $t = \dfrac{xz^2 + x}{2z}$ dugu, hots,

$$t = \frac{xz}{2} + \frac{x}{2z}.$$

x-rekiko deribatuz,

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{z} = \frac{z}{2} + \frac{xz'}{2} + \frac{1}{2z} - \frac{xz'}{2z^2} \implies \\ \frac{1}{z} - \frac{z}{2} - \frac{1}{2z} = \frac{x}{2}z'\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big) \implies \\ \frac{1-z^2}{2z} = \frac{xz'}{2z^2}(z^2-1) \implies (z^2-1)\Big(\frac{xz'}{z}+1\Big) = 0.\end{aligned}$$

Beraz, hiru ekuazio berri ditugu:

$$\begin{aligned} z = 1 &\implies t = \frac{xz^2+x}{2z} = x, \\ z = -1 &\implies t = \frac{xz^2+x}{2z} = -x, \\ \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x} &\implies z = \frac{C}{x} \implies t = \frac{xz^2+x}{2z} = \frac{\frac{C^2}{x}+x}{\frac{2C}{x}} = \frac{x^2+C^2}{2C} \\ &\implies x^2 + C^2 - 2Ct = 0 \end{aligned}$$

2.2 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial batzuk

Atal honetan, bigarren ordenako $F(t, x, x', x'') = 0$ ekuazio diferentzialaren kasu berezi batzuk aztertuko ditugu. Horien soluzioak aurkitzeko, lehen ordenako bi ekuazio diferentzialen bidez berridatziko ditugu eta azken hauek ebatziko ditugu.

(1) $F(t, x', x'') = 0$ motako ekuazio diferentzialak.

x agertzen ez bada ekuazioan, $x' = z$ eginez, $z = z(t)$ funtzio ezezagunerako $F(t, z, z') = 0$ lehen ordenako ekuazioa dugu. Hori ebatziz, z ezagutuko dugu, eta, $x'(t) = z(t)$ berdintza integratuz, hasierako bigarren ordenako ekuazio diferentzialaren soluzioa lortuko dugu.

Adibidea. $tx'' - x' = 3t^2$ ebatziko dugu. x agertzen ez denez, $x' = z$ izendatuz, honako lehen ordenako ekuazio diferentzial lineal hau dugu:

$$tz' - z = 3t^2.$$

Lehenengo eta behin, ekuazio homogeneoa ebatzi behar dugu,

$$z' - \frac{z}{t} = 0 \implies \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t} \implies z_h(t) = Ct.$$

Orain, ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat aurkitu behar dugu, $z_p(t) = C(t)t$ motakoa. Ekuazioan ordezkatuz,

$$t(C'(t)t + C(t)) - C(t)t = 3t^2 \implies C'(t) = 3 \implies C(t) = 3t.$$

Beraz,

$$z(t) = 3t^2 + Ct,$$

eta, $x' = z$ dela kontuan izanik, integratuz,

$$x' = 3t^2 + Ct \implies x(t) = t^3 + C_1 t^2 + C_2.$$

(2) $F(x, x', x'') = 0$.

t agertzen ez bada ekuazioan, $x' = z$ izendatuko dugu, x aldagai independentetzat hartuz, hau da, $z = z(x)$ dela suposatuko dugu. Horrela,

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} = z\frac{dz}{dx}$$

dugunez,

$$F\big(x, z, z\frac{dz}{dx}\big) = 0$$

lehen ordenako ekuazio diferentziala lortzen dugu. Ekuazio diferentzial hori ebatzi eta gero, $x' = z(x)$ ekuazio diferentziala ere ebatzi beharko dugu hasierako ekuazioaren soluzioak kalkulatzeko.

Adibidea. $x'' + x = 0$ bigarren ordenako ekuazioa ebatziko dugu. t agertzen ez denez, $x' = z$ egingo dugu, x aldagai independentetzat hartuz. Horrela, goian ikusi dugun bezala, $x'' = zz'$ eta ekuazioan ordezkatuz, aldagai bananduetako lehen ordenako ekuazio bat lortzen dugu,

$$zz' + x = 0.$$

Integratuz,

$$zz' = -x \implies \frac{z^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \implies x^2 + z^2 = C^2 \implies z = \pm\sqrt{C^2 - x^2}.$$

Aldaketa deseginez:

$$x'(t) = \pm\sqrt{C^2 - x^2} \implies \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \pm dt \implies \arcsin\frac{x}{C} = \pm t + C_1$$
$$\implies x = C\sin(t + C_1).$$

2.3 Lehen ordenako ekuazio diferentzialen kurba integralak: metodo kualitatiboa

Ekuazio diferentziala forma inplizituan emanda badago, gerta daiteke soluziorik ez izatea, baina forma esplizituan emanda badago eta eskuineko atalak baldintza egokiak betetzen baditu, soluzioaren existentzia ziurta daiteke.

2.3 teorema. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $(t_0, x_0) \in D$. f eta $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ jarraituak badira (t_0, x_0) puntuaren ingurune batean, orduan, badago funtzio bakar bat, $x(t)$, $x' = f(t, x)$ ekuazio diferentziala eta $x(t_0) = x_0$ hasierako baldintza betetzen dituena.*

Teoremaren esanahi geometrikoa honako hau da: aurreko teoremaren hipotesiak egiaztatzen direnean, OTX planoan $P_0 = (t_0, x_0)$ puntutik ekuazio diferentzialaren kurba integral bat eta bakar bat igarotzen da.

2.3.1 Euler-en lerro poligonala

Atal honetan azalduko dugu nola hurbil daitekeen (t_0, x_0) puntutik igarotzen den kurba integral bakar hori. Eulerrek lortu zuen hurbilketa geometriko sinple bat, Eulerren poligonala, deribatuaren esanahi geometrikoan oinarrituta.

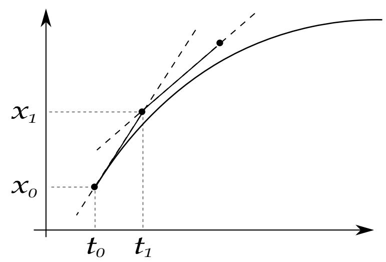
$x = x(t)$ $P_0 = (t_0, x_0)$ puntutik pasatzen den kurba integrala bada,

$$x'(t_0) = f(t_0, x_0),$$

beraz, P_0 puntuan, kurba integralaren zuzen ukitzailearen malda $f(t_0, x_0)$ da. Zuzenki txiki bat marraztuko dugu, (t_0, x_0) puntuan hasten dena eta $f(t_0, x_0)$ malda duena. Zuzenki txiki horren amaiera-puntua $P_1 = (t_1, x_1)$ bada, prozedura puntu horretan errepika dezakegu.

$$x'(t_1) = f(t_1, x_1)$$

denez, P_1 puntuan hasten den eta $f(t_1, x_1)$ malda duen zuzenki txiki bat marraz dezakegu. Horrela jarraituz, kurba integrala hurbiltzen duen lerro poligonal bat lortzen da, eta, zuzenkien luzera gero eta txikiagoa hartuz, hurbilketa gero eta zehatzagoa izango da.



2.3.2 Kurba isoklinoak

Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, eta demagun D multzoko edozein puntutatik $x' = f(t, x)$ ekuazio diferentzialaren kurba integral bakarra pasatzen dela. Kurba integral horiek aurkitu nahi ditugu, f funtzioaren propietateak aztertuz eta ekuazio diferentziala analitikoki ebatzi gabe.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $\alpha \in \mathbb{R}$. $f(t, x) = \alpha$ ekuazioko kurbari α-ri dagokion $x' = f(t, x)$ ekuazio diferentzialaren *kurba isoklino* deritzo.

$f(t,x) = \alpha$ kurba isoklinoaren puntu guztietatik kurba integral bana igarotzen da, eta puntu horietan α da kurba integralen malda.

$f(t,x) = \alpha$ ekuazioko kurba isoklinoaren gainean α maldako zuzenki txiki batzuk marraztuz, ekuazio diferentzialaren norabide-eremua lortzen da. Beraz, kurba isoklinoak eta, ondorioz, ekuazio diferentzialaren norabide-eremua erabil daitezke $x' = f(t,x)$ ekuazio diferentzialaren kurba integralak marrazteko. Honako urrats hauek baliagarriak izan daitezke:

(i) Ekuazio diferentzialaren kurba integral horizontalak bilatu, hau da, soluzio konstanteak, $f(t,x) = 0$ berdintza betetzen dutenak.

(ii) Kurba isoklino batzuk aurkitu eta horiei dagozkien norabide-eremuko bektore batzuk marraztu. Aztertu kurba isoklinoren bat kurba integrala ote den.

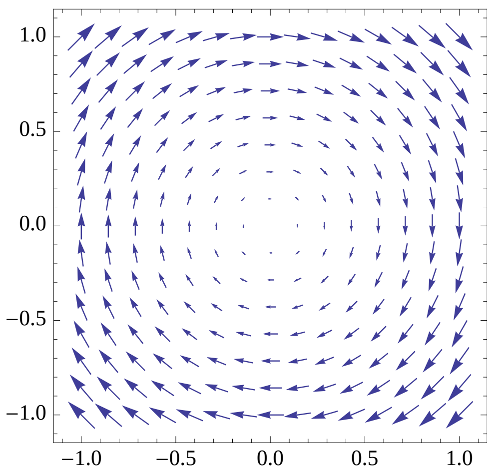
(iii) Kurba integralen gorakortasuna eta beherakortasuna aztertu, f-ren zeinuaren arabera.

(iv) Kurba integralen inflexio-puntuak, ahurtasuna eta ganbiltasuna aztertu.

(v) Kurba integralen simetriak aztertu:

- $f(t,x) = -f(-t,x)$ bada $(t,x) \in \mathrm{Dom}(f)$ guztietarako, orduan, $x = x(t)$ soluzioa OX ardatzarekiko simetrikoa da.
- $f(t,x) = -f(t,-x)$ bada $(t,x) \in \mathrm{Dom}(f)$ guztietarako, orduan, $x = x(t)$ soluzioa OT ardatzarekiko simetrikoa da.
- $f(t,x) = f(-t,-x)$ bada $(t,x) \in \mathrm{Dom}(f)$ guztietarako, orduan, $x = x(t)$ soluzioa jatorriarekiko simetrikoa da.

Adibidea. Izan bedi $x' = -\dfrac{t}{x}$. Kurba isoklinoak $-\dfrac{t}{x} = \alpha$ ekuazioko kurbak dira. α ez-nulua bada, jatorritik pasatzen diren zuzenak dira, $x = -\dfrac{t}{\alpha}$, eta $\alpha = 0$ bada, $t = 0$ zuzen bertikala.



x gorakorra da bigarren eta laugarren koadranteetan, hor $-t/x > 0$ delako, eta beherakorra lehen eta hirugarren koadranteetan, $-t/x < 0$ delako.
Bestalde,

$$x'' = -\frac{x - tx'}{x^2} = \frac{-x - t\frac{t}{x}}{x^2} = -\frac{x^2 + t^2}{x^3}$$

beraz, x ahurra da $x < 0$ bada, eta ganbila $x > 0$ bada.
Azkenik, $f(t,x) = -\dfrac{t}{x}$-k simetria guztiak dituenez, soluzioak simetrikoak izango dira bi ardatzekiko eta jatorriarekiko.

Irudia begiratuz, jatorrian zentratutako zirkunferentziak direla ikus dezakegu.

Adibidea. Izan bedi $x' = 2t - x$. Kurba isoklinoak $2t - x = \alpha$ ekuazioko kurbak dira; hau da, $x = 2t - \alpha$ zuzenak, $x = 2t$ zuzenarekiko paraleloak direnak, hain zuzen ere.

Saia gaitezen topatzen ekuazio diferentzialaren soluzioak diren isoklinoak. $x = 2t - \alpha$ ekuazioan ordezkatuz,

$$x' = 2t - x \implies 2 = 2t - (2t - \alpha) \implies \alpha = 2.$$

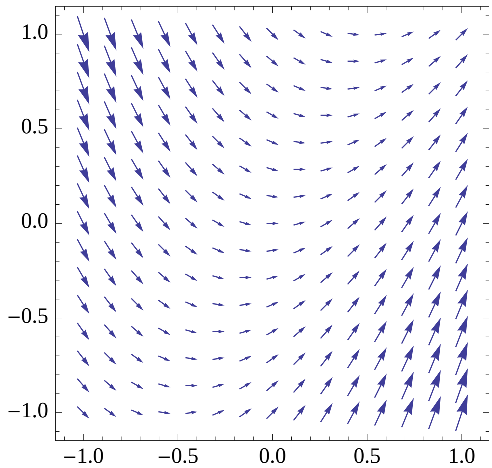
Beraz, $x = 2t - 2$ isoklinoa ere ekuazioaren soluzioa da.

Gainera, $x' = 2t - x > 0$ da $x < 2t$ bada, eta, horren ondorioz, soluzioak gorakorrak dira $x < 2t$ planoerdian eta beherakorrak $x > 2t$ planoerdian. $x = 2t$ zuzenaren gainean deribatua zero denez, soluzioek minimo lokala dute.

Horrez gain, ekuazio diferentziala deribatuz,

$$x'' = 2 - x' = 2 - (2t - x) = 2 - 2t + x,$$

beraz, $x > 2t - 2$ planoerdian kurba integralak ahurrak dira, eta $x < 2t - 2$ planoerdian, aldiz, ganbilak.
$x = 2t - 2$ zuzenaren puntuetan, kurba integralek inflexio-puntua dute.



2.4 Ariketak

1. Izan bitez $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta
$$\frac{dy}{dx} = \frac{yf(xy)}{xg(xy)}$$
ekuazio diferentziala. Egiaztatu, $z = xy$ aldagai-aldaketa eginez, z aldagai bananduetako ekuazio diferentzial baten soluzioa dela. Erabili metodo hori ekuazio hauek ebazteko:

   (i) $y' = \dfrac{y - xy^2}{x + x^2y}$ *Em.:* $ye^{xy} = Cx$

   (ii) $(t^2 - t^3x)dx + (tx - 1 - t^2x^2)dt = 0$ *Em.:* $t^2x^2 - 2tx + \ln t^2 = C$

2. Ekuazio diferentzial hauek homogeneoak dira edo homogeneo bihur daitezke. Ebatzi.

   (i) $(xy + y^2 + x^2)dx - x^2dy = 0$ *Em.:* $y = x\tan\bigl(\ln|x| + C\bigr)$

   (ii) $(-3x + y + 6)dx + (x + y + 2)dy = 0$ *Em.:* $y^2 - 3x^2 + 2xy + 12x + 4y = C$

   (iii) $tx' = \sqrt{t^2 + x^2}$ *Em.:* $\ln\left|\dfrac{x + \sqrt{x^2 + t^2}}{t^3}\right| + \dfrac{x\sqrt{t^2 + x^2}}{t^2} + \dfrac{x^2}{t^2} = C$

   (iv) $tdx = (x + te^{-x/t})dt$ *Em.:* $x = t\ln\bigl(\ln(Ct)\bigr)$

   (v) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$ *Em.:* $\arctan\dfrac{y + 5}{x - 1} - \ln\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 5)^2} = C$

3. Ekuazio diferentzial hauek zehatzak dira edo integrazio-faktore bat dute. Ebatzi:

   (i) $(2xy - \sec^2 x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$ *Em.:* $x^2y + y^2 - \tan x = C$

   (ii) $(1 + e^xy + xe^xy)dx + (xe^x + 2)dy = 0$ *Em.:* $xye^x + 2y + x = C$

   (iii) $(x + 3x^3\sin y)dx + (x^4\cos y)dy = 0$, $\left(u(x) = \dfrac{1}{x}\right)$ *Em.:* $x + x^3\sin y = C$

   (iv) $(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0$, $(u(x,y) = xy^2)$ *Em.:* $x^2y^3 - 2x^3y^2 = C$

4. Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak. Aurkitu $u = u(t)$ funtzio bat, non
$$u(t)x' + a(t)u(t)x = (u(t)x)'$$
den eta erabili hori
$$x' + a(t)x = b(t)$$
lehen ordenako ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio orokorra kalkulatzeko.

5. Ebatzi honako ekuazio diferentzial lineal edo lineal bihur daitezkeen hauek:

   (i) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$ *Em.:* $e^x + Ce^{-2x}$

   (ii) $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x^2} = x\cos x,\ y(\pi/2) = \pi^2$ *Em.:* $y = x^2\big(\sin x + 3\big)$

   (iii) $(t\ln t)y' + y = 3t^3$ *Em.:* $y = \dfrac{t^3 + C}{\ln t}$

   (iv) $t = (tx' + x)\sqrt{1+t^2}$ *Em.:* $\dfrac{C + \sqrt{1+t^2}}{t}$

   (v) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$ *Em.:* $y^2 = \dfrac{20e^{10x}}{C + (10x-1)e^{10x}}$

6. (i) Ebatzi $x' + x^2 + (2t+1)x + 1 + t + t^2 = 0$ ekuazio diferentziala, haren soluzio bat $x = -t$ dela jakinda.

   Em.: $x = \dfrac{1}{Ce^t - 1} - t$

   (ii) Ebatzi $2x'\cos t - x^2 = 2\cos^2 t - \sin^2 t$ ekuazio diferentziala, haren soluzio bat $x = \sin t$ dela jakinda.

   Em.: $x = \sin t + \dfrac{2}{C\cos t - \sin t}$

7. Ebatzi ekuazio diferentzial inplizitu hauek:

   (i) $y = (1+y')t + (y')^2$ *Em.:* $(2 \pm \sqrt{t^2 + 4t + 4y})^2 e^{-t} e^{\pm\sqrt{t^2-4t+4y}} = C$

   (ii) $(x')^2 - (2t+x)x' + (t^2 + tx) = 0$ *Em.:* $(x + t + 1 - Ce^t)(2x - t^2 - C) = 0$

   (iii) $(y')^3 + (x+2)e^y = 0$ *Em.:* $x + 2 + (C + 4e^{-y/3})^{3/4} = 0$

   (iv) $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$ *Em.:* $y = -x,\ y = C^2 + 2C\sqrt{x}$

8. Ebatzi bigarren ordenako ekuazio diferentzial hauek:

   (i) $yy'' = (y')^2$ *Em.:* $y = C,\ y = Ae^{Bt}$

   (ii) $t^2x'' = x'(3t - x')$ *Em.:* $x = t^2 - A\ln(t^2 + A) + B$

   (iii) $yy'' = y^2y' + (y')^2,\ \ y(0) = -1/2,\ \ y'(0) = 1$ *Em.:* $y = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1 - 4e^{3t/2}}$

   (iv) $y'' + y'e^y = 0$ *Em.:* $y = C,\ \dfrac{e^y}{A - e^y} = Be^{Ax}$

9. Ebatzi ekuazio diferentzial hauek:

(i) $y'\sin y = (2\cos y - \sin^2 x)\cos x$ *Em.:* $(2\sin^2 x - 2\sin x + 1 - 4\cos y)e^{2\sin x} = C$

(ii) $(x' - \sin t)(t+1) = -x$ *Em.:* $x = \dfrac{C + \sin t - (t+1)\cos t}{t+1}$

(iii) $x' = \sin^2(t - x + 1)$ *Em.:* $\tan(t - x + 1) - t = C$

(iv) $yy'' = (y')^2 - y'$ *Em.:* $y = C$, $y = Be^{Ax} - \dfrac{1}{A}$

(v) $tx^2x' + x^3 = t\cos t$ *Em.:* $x^3t^3 + 9(2 - t^2)\cos t + 3t(6 - t^2)\sin t = C$

(vi) $x' = (x-1)(x+t)$ *Em.:* $x(t) = 1 + \dfrac{e^{\frac{(t+1)^2}{2}}}{C - \displaystyle\int_0^t e^{\frac{(s+1)^2}{2}}\,ds}$

(vii) $(x')^3 - x(x')^2 - t^2x' + t^2x = 0$ *Em.:* $(x - Ce^t)(2x - t^2 - C)(2x + t^2 - C) = 0$

(viii) $t\,x'\,x'' - (x')^2 - t^3 = 0$ *Em.:* $\dfrac{1}{10}(2t + A)^{5/2} - \dfrac{A}{6}(2t + A)^{3/2} + B$

(ix) $y' = \dfrac{y}{e^y + 2x}$ *Em.:* $x = \big(C + \displaystyle\int \frac{e^\xi}{\xi^3}\,d\xi\big)y^2$

(x) $dx + (tx - 2tx^3e^{-t^2})dt = 0$ *Em.:* $x^2 = \dfrac{e^{t^2}}{1 + Ce^{2t^2}}$

(xi) $x'\cos x + \sin x - t = 0$ *Em.:* $\sin x = Ce^{-t} + t - 1$

(xii) $tx' = \sqrt{t^2 - x^2} + x$ *Em.:* $x = t\sin\big(\ln(Ct)\big)$

(xiii) $y^2dt = (t^3 - ty)dy$ *Em.:* $Cy^3t^2 + 2t^2 - 3y = 0$

(xiv) $(t + x)x' = x + 3$ *Em.:* $\ln(x + 3) - \dfrac{t-3}{x+3} = C$

(xv) $(x + t + 1)dt + (2x + 2t + 1)dx = 0$ *Em.:* $(x + t)e^{2x+t} = C$

(xvi) $y'' = y'e^y,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2$ *Em.:* $y = \ln\dfrac{e^x}{2 - e^x}$

(xvii) $\dfrac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}$ *Em.:* $(x - y + 2)^2 = Ce^{2x} + 1$

(xviii) $3(1 + t^2)x' = 2tx(x^3 - 1)$ *Em.:* $x^3 = \dfrac{1}{1 - C(1 + t^2)}$

(xix) $x'' + 2xx' = 0$ *Em.:* $x = C$; $x = A + \dfrac{2A}{2ABe^{2At} - 1}$

(xx) $t = (tx' + x)\sqrt{1 + t^2}$ *Em.:* $x = \dfrac{\sqrt{1 + t^2} + C}{t}$

10. Erabili metodo kualitatiboa honako ekuazio diferentzial hauen kurba integralak marrazteko:

    (i) $x' = \dfrac{t}{x}$

    (ii) $x' = t + x$

    (iii) $x' = (x - 1)t$

    (iv) $x' = t - x$

    (v) $x' = t^2 - x$

3. gaia

Ekuazio diferentzial linealak

3.1 Sarrera. Lehendabiziko propietateak

Ekuazio diferentzial linealak garrantzi handiko ekuazio diferentzialak dira, bai matematikan eta baita beste zientzietan ere. Gai honetan ikusiko ditugun teorema gehienetan, n ordenako ekuazio diferentzialaren $x^{(n)}$ gaiaren koefizientea 1 izango da; hau da, honela idazten diren ekuazio diferentzial linealak aztertuko ditugu:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t), \tag{3.1.1}$$

$a_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ eta $b \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak izanik.

(3.1.1) ekuazio diferentzial linealean $b(t) = 0$ bada $t \in I$ guztietarako, esaten da ekuazioa lineal homogeneoa dela. Aldiz, b funtzio nulua ez bada, esaten da ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoa edo lineal betea dela.

Definizioa. $\dfrac{d}{dt} = D$ eta $\dfrac{d^n}{dt^n} = D^n$ eragile diferentzialak erabiliz, (3.1.1) ekuazioaren honako adierazpen hau dugu:

$$P(t, D)x = b(t),$$

non

$$P(t, D) = D^n + a_1(t)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)D + a_n(t)$$

eragileari *polinomio diferentzial eragile* deritzon. $P(t, D) \colon C^n(I) \to C(I)$ eragilea lineala da.

3.1 teorema (Existentzia eta bakartasunaren teorema)**.** *Izan bitez $a_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ eta $b \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak, $t_0 \in I$ eta $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$. Orduan,*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t)$$

ekuazio diferentzialaren soluzio bat eta bakarra existitzen da, x, t_0 puntuaren ingurune batean definituta, n aldiz deribagarria, eta honako n hasierako baldintza hauek egiaztatzen dituena:

$$x(t_0) = \xi_0,\ x'(t_0) = \xi_1, \ldots,\ x^{n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}.$$

Oharra. Existitzen bada i-ren bat non a_i funtzioa jarraitua ez den, aurreko problemaren soluzioak ez du zertan existitu eta, soluzioa egon arren, ez da beti bakarra izango. Adibidez,

$$\begin{cases} t^2\, x'' - 2t\, x' + 2x = 6, \\ x(0) = 3, \\ x'(0) = 1, \end{cases}$$

problemaren soluzioak $x(t) = C\, t^2 + t + 3$ formako funtzio polinomiko guztiak dira, C edozein konstante erreal izanik.

3.2 proposizioa. *Izan bitez $a_i, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak, $i = 1, \ldots, n$ izanik. Orduan,*

(i) $x_1, x_2 \in C^n(I)$ *funtzioak*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \tag{3.1.2}$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzioak badira, orduan, $\alpha x_1 + \beta x_2$ funtzioa ere (3.1.2) ekuazioaren soluzioa da $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ guztietarako. Beraz, (3.1.2) ekuazio homogeneoaren soluzio multzoa espazio bektoriala da.

(ii) x *(3.1.2) ekuazio lineal homogeneoaren soluzioa bada eta existitzen bada $t_0 \in I$ non $x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$ diren, orduan, $x(t) = 0$ da $t \in I$ guztietarako.*

(iii) $x_1, x_2 \in C^n(I)$ *funtzioak*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t) \tag{3.1.3}$$

ekuazio ez-homogeneoaren soluzioak badira, orduan, $x_1 - x_2$ funtzioa (3.1.2) ekuazio homogeneoaren soluzioa da.

Beraz, (3.1.3) ekuazio ez-homogeneoaren soluzio orokorra x, $x_h + x_p$ forman adieraz daiteke, non x_h ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra eta x_p ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat diren.

Froga. Izan bedi $P(t, D) = D^n + a_1(t)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)D + a_n(t)$ (3.1.2) ekuazio diferentzialaren polinomio diferentziala.

(i) Izan bitez $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eta $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, non x_1 eta x_2 (3.1.2) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzioak diren, hau da, $P(t, D)x_i = 0$, $i = 1, 2$. Orduan, $P(t, D)$ eragile lineala denez,

$$P(t, D)x = P(t, D)(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P(t, D)x_1 + \beta P(t, D)x_2 = 0, \quad \forall\, t \in I.$$

(ii) Argi denez, $x \equiv 0$ soluzio nulua (3.1.2) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzioa da, eta betetzen ditu emandako n hasierako baldintza nuluak. Existentzia eta bakartasunaren teoremaren arabera, Cauchyren problemaren soluzioa bakarra denez, soluzio hori, derrigorrez, soluzio nulua da.

(iii) Izan bedi $x = x_1 - x_2$, non x_1 eta x_2 (3.1.3) ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzioak diren, hau da, $P(t,D)x_i = b(t)$, $i = 1, 2$. Lehen bezala, $P(t,D)$ lineala denez,

$$P(t,D)x = P(t,D)(x_1 - x_2) = P(t,D)x_1 - P(t,D)x_2 = b(t) - b(t) = 0, \quad \forall\, t \in I.$$

□

3.2 Ekuazio diferentzial lineal homogeneoak

Izan bitez $a_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak, $i = 1, \ldots, n$ izanik. Ikusi dugu

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0, \tag{3.2.1}$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio multzoa espazio bektoriala dela, $E \subset C^n(I)$. E multzoko dimentsioa aurkitu nahi dugu.

Definizioa. Izan bitez $x_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ funtzioak *linealki independenteak* dira baldin eta $C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_kx_k(t) = 0$ izateak $t \in I$ guztietarako $C_1 = C_2 = ... = C_k = 0$ inplikatzen badu.

Adibideak. (i) $1, t, t^2, \ldots, t^k$ $C^\infty(\mathbb{R})$ klaseko funtzioak linealki independenteak dira, $k \in \mathbb{N}$ guztietarako. Izan ere,

$$C_1 + C_2t + \cdots + C_kt^k = 0$$

polinomioa anulatzen da $\mathbb{R}$ osoan, baldin eta soilik baldin koefiziente guztiak nuluak badira.

(ii) Izan bitez $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$, $r_i \neq r_j$ izanik $i \neq j$ bada. Orduan, $e^{r_1t}, e^{r_2t}, \ldots, e^{r_kt}$ $C^\infty(\mathbb{R})$ klaseko funtzioak linealki independenteak dira, $k \in \mathbb{N}$ edozein izanik.

(iii) $\sin t, \cos t$ $C^\infty(\mathbb{R})$ klaseko funtzioak linealki independenteak dira.

E funtzio-espaziorako independentzia lineala egiaztatzeko oso lagungarria den ezaugarri bat emango dugu jarraian. Horretarako, definizio betekin hasiko gara.

Definizioa. Izan bitez $I \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ eta $x_i \in C^{k-1}(I)$ $i = 1, \ldots, k$ guztietarako. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ funtzioen *wronskiarra*, $W(x_1, x_2, \ldots, x_k) \colon I \to \mathbb{R}$, honako determinante honen bidez definitzen da:

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_k)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \ldots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

3.3 lema. *Izan bitez $I \subset \mathbb{R}$ eta $x_1, \dots, x_k \in C^{k-1}(I)$. $x_1, \dots, x_k$ funtzioak ez badira linealki independenteak, orduan, $W(x_1, x_2, \dots, x_k)(t) = 0$ da $t \in I$ guztietarako.*

Froga. $x_1, \dots, x_k$ ez direnez linealki independenteak, existitzen dira $C_1, \dots, C_k$ konstanteak, denak aldi berean nuluak ez direnak, non $C_1 x_1(t) + \cdots + C_k x_k(t) = 0$ den $t \in I$ guztietarako. Deribatuz,

$$\begin{aligned}
&C_1 x_1(t) + \cdots + C_k x_k(t) = 0,\\
&C_1 x_1'(t) + \cdots + C_k x_k'(t) = 0,\\
&\dots\\
&C_1 x_1^{(k-1)}(t) + \cdots + C_k x_k^{(k-1)}(t) = 0.
\end{aligned}$$

Berdintza hauek k ekuazioko sistema lineal homogeneo bezala har ditzakegu, soluzio nulua ez duena, $C_1, \dots, C_k$. Beraz, elkartutako matrizearen determinanteak nulua izan behar du, $t \in I$ edozein izanik; baina determinante hori $W(x_1, \dots, x_k)(t)$ da, hain zuzen ere; beraz, $W(x_1, \dots, x_k)(t) = 0$ da $t \in I$ guztietarako. □

3.4 korolarioa. *Izan bitez $I \subset \mathbb{R}$ eta $x_1, \dots, x_k \in C^{k-1}(I)$. Existitzen bada $t_0 \in I$ non $W(x_1, x_2, \dots, x_k)(t_0) \neq 0$ den, orduan, $x_1, x_2, \dots, x_k$ funtzioak linealki independenteak dira.*

Oharra. 3.3 lemaren alderantzizkoa ez da egia; wronskiarra nulua izan daiteke, nahiz eta funtzioak linealki independenteak izan. Adibidez, $x_1(t) = t^2$ eta $x_2(t) = t|t|$ linealki independenteak dira, $x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R})$ eta

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2\,\mathrm{sgn}(t) t \end{vmatrix} = \begin{cases} \begin{vmatrix} t^2 & -t^2 \\ 2t & -2t \end{vmatrix} = 0, & t < 0 \\ \begin{vmatrix} t^2 & t^2 \\ 2t & 2t \end{vmatrix} = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Hala ere, hurrengo teoreman ikusiko dugun bezala, $x_1, \dots, x_k$ funtzioak ekuazio diferentzial lineal homogeneo baten soluzioak badira, orduan, 3.3 lemaren alderantzizkoa betetzen da.

3.5 teorema. *Izan bitez $a_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, funtzio jarraituak eta $x_1, x_2, \dots, x_n$ (3.2.1) ekuazio diferentzial linealaren soluzioak. Orduan, $x_1, x_2, \dots, x_n$ soluzioak linealki independenteak dira, baldin eta soilik baldin*

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \neq 0 \ , \quad \forall t \in I.$$

Froga. $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \neq 0$ bada $t \in I$ guztietarako, 3.4 korolarioaren arabera, $x_1, \dots, x_n$ linealki independentak dira. Beraz, beste inplikazioa frogatu behar dugu, soilik.

Izan bitez $x_1, \dots, x_n$ (3.2.1) ekuazioaren n soluzio eta, absurdura eramanez, demagun existitzen dela $t_0 \in I$ non $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0) = 0$ den. Orduan, existitzen dira $C_1, \dots, C_n$ konstanteak, $|C_1| + \cdots + |C_n| \neq 0$ izanik, non

$$\begin{cases} C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + \cdots + C_n x_n(t_0) = 0, \\ C_1 x_1'(t_0) + C_2 x_2'(t_0) + \cdots + C_n x_n'(t_0) = 0, \\ \dots \\ C_1 x_1^{(n-1)}(t) + C_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + C_k x_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Izan bedi $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_n x_n(t)$. x (3.2.1) ekuazioaren soluzioa da, haren soluzioen konbinazio lineal bat delako. Gainera,

$$\begin{cases} x(t_0) = C_1 x_1(t_0) + C_2 x_2(t_0) + \cdots + C_n x_n(t_0) = 0, \\ x'(t_0) = C_1 x_1'(t_0) + C_2 x_2'(t_0) + \cdots + C_n x_n'(t_0) = 0, \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) = C_1 x_1^{(n-1)}(t) + C_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + C_n x_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Beraz, $x \equiv 0$; hau da, $x_1, \dots, x_n$ ez dira linealki independenteak. $\square$

3.6 teorema (Abel-Liouvilleren formula)**.** *Izan bitez $a_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, funtzio jarraituak, $t_0 \in I$ eta $x_1, x_2, \dots, x_n$ (3.2.1) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzioak. Orduan,*

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t_0) \exp\Big(- \int_{t_0}^{t} a_1(s)\ ds \Big), \quad \forall\, t \in I.$$

Ondorioz, $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = 0$ da $t \in I$ guztietarako, edo $W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \neq 0$ da $t \in I$ guztietarako.

Froga. Ikus dezagun, lehenengo eta behin, nola kalkulatu determinante baten deribatua. Izan bedi $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^{n}$ $n \times n$ ordenako funtzio matriziala. Orduan,

$$\begin{aligned} \det A(t) &= \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)}(t) a_{2\sigma(2)}(t) \dots a_{n\sigma(n)}(t) \end{aligned}$$

non S_n $\{1, 2, \dots, n\}$ multzoaren permutazioen taldea den eta $\sigma \in S_n$ bada, $\epsilon(\sigma)$ σ-ren signatura den. Biderkaduraren deribatuaren formularen arabera,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(\det A(t)\big) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a'_{1\sigma(1)}(t) a_{2\sigma(2)}(t) \dots a_{n\sigma(n)}(t) \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)}(t) a'_{2\sigma(2)}(t) \dots a_{n\sigma(n)}(t) \\
&\quad + \dots + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{1\sigma(1)}(t) a_{2\sigma(2)}(t) \dots a'_{n\sigma(n)}(t) \\
&= \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \\
&\quad + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Aurrekoaren arabera,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \\
&= \begin{vmatrix} x'_1(t) & x'_2(t) & \dots & x'_n(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & \dots & x_{n'}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x''_1(t) & x''_2(t) & \dots & x''_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \\
&+ \dots + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & \dots & x'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & \dots & x'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Lehen $n - 1$ determinanteak aurreko baturan nuluak dira, errenkada bana errepikatzen delako. Azken determinantean, aldiz,

$$
x_i^{(n)} = -\big(a_1(t) x_i^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t) x'_i + a_n(t) x_i\big)
$$

denez, $i = 1, \dots, n$ guztietarako, eskuineko batugaiak, lehenengoa izan ezik, beste errenkaden elementuen multiploak direnez, determinanteen propietateak erabiliz,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W(x_1,x_2,\ldots,x_n)(t) &= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \ldots & x_n^{(n-2)}(t) \\ -a_1(t)x_1^{(n-1)}(t) & -a_1(t)x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & -a_1(t)x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \\ &= -\,a_1(t)W(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

Hau da, $W = W(x_1,\ldots,x_n)$ lehen ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneo baten soluzioa da. Ekuazio hau integratuz,

$$\frac{dW}{dt} = -a_1(t)W \implies \int_{t_0}^{t}\frac{dW}{W} = -\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds \implies \ln\frac{W(t)}{W(t_0)} = -\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds,$$

eta hemendik lortzen da teoremaren enuntziatuaren formula. □

3.7 teorema (Dimentsioaren teorema)**.** *Izan bitez $a_i\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, funtzio jarraituak. Orduan, (3.2.1) n ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzioen multzoa n dimentsioko espazio bektoriala da.*

Froga. Jadanik ikusi dugu (3.2.1) ekuazioaren soluzioen multzoa espazio bektoriala dela. Frogatu nahi dugu haren dimentsioa n dela, eta, horretarako, n soluzioz osaturiko oinarri bat bilatuko dugu.

Izan bedi $t_0 \in I$. Existentzia eta bakartasunaren teoremagatik, $i = 1,\ldots,n$ bakoitzerako, badakigu existitzen dela x_i bat eta bakarra, (3.2.1) ekuazioaren soluzioa dena eta honako hasierako baldintza hauek betetzen dituena:

$$x_i^{(j-1)}(t_0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ bada}, \\ 0, & i \neq j \text{ bada}. \end{cases}$$

Orduan,

$$\begin{aligned} W(x_1,\ldots,x_n)(t_0) &= \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) & \ldots & x_n(t_0) \\ x_1'(t) & x_2'(t_0) & \ldots & x_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & x_2^{(n-1)}(t_0) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Beraz, 3.5 teoremaren arabera, $x_1,\ldots,x_n$ linealki independenteak dira. Azkenik, x (3.2.1) ekuazioaren edozein soluzio bada, frogatu behar dugu $x_1,\ldots,x_n$ funtzioen konbinazio lineal bat dela. Izan bedi

$$z(t) = x(t_0)x_1(t) + x'(t_0)x_2(t) + \cdots + x^{(n-1)}(t_0)x_n(t).$$

z $x_1, \ldots, x_n$ funtzioen konbinazio lineal bat denez, (3.2.1) ekuazioaren soluzioa da. Gainera,

$$z^{(j)}(t_0) = x(t_0)x_1^{(j)}(t_0) + x'(t_0)x_2^{(j)}(t_0) + \cdots + x^{(n-1)}(t_0)x_n^{(j)}(t_0) = x^{(j)}(t_0).$$

Existentzia eta bakartasunaren teoremaren ondorioz, $z = x$, hots, x $x_1, \ldots, x_n$ funtzioen konbinazio lineal bat da. □

Definizioa. Izan bitez $a_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, funtzio jarraituak. (3.2.1) ekuazio diferentzialaren n soluzio linealki independentez osatutako multzoari ekuazio diferentzialaren *oinarrizko sistema* deritzo.

Beraz, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (3.2.1) ekuazioaren oinarrizko sistema bat bada, ekuazioaren soluzio orokorra, x_h, honela adieraziko da:

$$x_h(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_nx_n(t), \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

3.2.1 Ordenaren beherapena ekuazio lineal homogeneoetan

Atal honetan ikusiko dugu, (3.2.1) ekuazioaren soluzio bat ezagutzen bada, soluzio orokorra kalkulatu ahal izango dugula $n-1$ ordenako ekuazio diferentzial bat ebatziz. Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren kasuan, behin soluzio bat topatuta, lehen ordenako ekuazio lineal homogeneo bat ebatzi beharko dugu. Ordena, n, 2 baino handiagoa bada, n aldiz errepikatu beharko da metodoa.

Izan bitez $a_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak, $i = 1, \ldots, n$, eta suposa dezagun (3.2.1) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio bat ezagutzen dela, x_1. Orduan, $x = x_1z$ aldaketa eginez eta biderkaduraren deribatuetarako Leibnizen erregela erabiliz,

$$x^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_1^{(k-j)}\, z^{(j)}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

(3.2.1) ekuazio diferentzialean ordezkatuz eta batugaiak berrordenatuz, honako ekuazio diferentzial hau lortuko dugu z funtzio ezezagunerako:

$$x_1z^{(n)}+(a_1(t)x_1+nx_1')z^{(n-1)}+\cdots+(x_1^{(n)}+a_1(t)x_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x_1'+a_n(t)x_1)z = 0.$$

x_1 (3.2.1) ekuazio diferentzialaren soluzioa denez, z-ren koefizientea nulua da azken ekuazioan. $z' = y$ idatziz,

$$x_1y^{(n-1)} + (a_1(t)x_1 + nx_1')y^{(n-2)} + \cdots + \alpha_{n-1}(t)y = 0,$$

hau da, y $n-1$ ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneo baten soluzioa da.

Demagun azken ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra ezaguna dela. Orduan, t-rekiko integratuz z lortuko da, eta hori, x_1 faktorearekin biderkatuz, hasierako (3.2.1) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra izango dugu.

x_1 soluzio partikularra lortzeko, funtzio sinpleekin probatuko dugu: polinomioak, esponentzialak...

Esan bezala, $n = 2$ bada, metodo hau oso erabilgarria da, ebazten dakigun lehen ordenako ekuazio diferentzial batera eramaten gaituelako. Izan bitez $a_1, a_2 \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jarraituak, eta demagun

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{3.2.2}$$

ekuazioaren soluzio partikular bat ezagutzen dugula, $x_p \not\equiv 0$. Soluzio multzoa bi dimentsioko espazio bektoriala denez, problema ebazteko beste soluzio linealki independente bat behar dugu. Ordenaren beherapena erabiliz, izan bedi $x = x_p z$. Deribatuz:

$$\begin{aligned} x' &= x_p' z + x_p z', \\ x'' &= x_p'' z + 2x_p' z' + x_p z'', \end{aligned}$$

eta ekuazioan ordezkatuz:

$$x_p'' z + 2x_p' z' + x_p z'' + a_1(t)(x_p' z + x_p z') + a_2(t) x_p z = 0.$$

Batugaiak berrantolatuz:

$$x_p z'' + (2x_p' + a_1(t)x_p)z' + (x_p'' + a_1(t)x_p' + a_2(t)x_p)z = 0,$$

hau da,

$$x_p z'' + (2x_p' + a_1(t)x_p)z' = 0.$$

Orain, $z' = y$ aldaketa eginez, $z'' = y'$ da, eta ekuazio honetara heltzen gara

$$x_p y' + (2x_p' + a_1(t)x_p)y = 0.$$

Azken ekuazio hori lehen ordenakoa eta lineala da. Faren soluzio bat aurkitu behar dugu.

$$\frac{dy}{y} = \left(-a_1(t) - \frac{2x_p'}{x_p}\right) dt \implies \ln|y| = -\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds - 2\ln x_p,$$

hau da,

$$y = \frac{1}{x_p^2} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\ ds\right).$$

$z' = y$ denez, goiko adierazpenaren eskuineko atala integratuz, z eta, ondorioz, x lortuko ditugu. (3.2.2) ekuazioaren soluzio orokorra idatzi ahal izateko, frogatu behar dugu x_p eta $x = x_p z$ linealki independenteak direla. Horretarako, wronskiarra kalkulatuko dugu.

$$\begin{aligned} W(x_p, x_p z) &= \begin{vmatrix} x_p & x_p z \\ x_p' & (x_p' z + x_p z') \end{vmatrix} \\ &= x_p x_p' z + x_p^2 z' - x_p x_p' z = x_p^2 \frac{1}{x_p^2} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\ ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(s)\ ds\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Beraz, $\{x_p, x_p z\}$ (3.2.2) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren oinarrizko sistema da, eta soluzio orokorra honako hau da:

$$x(t) = C_1 x_p(t) + C_2 x_p(t) z(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Adibidea. Ebatziko dugu

$$(1+t^2)x'' + tx' - x = 0$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoa, $x_p(t) = t$ soluzio partikular bat dela jakinik. Izan ere,

$$x_p'(t) = 1,\ x_p''(t) = 0 \implies (1+t^2)x_p'' + tx_p' - x_p = 0 + t - t = 0.$$

Bila dezagun beste soluzio bat $x = tz$ idatziz. Deribatuak honako hauek dira:

$$\begin{aligned} x' =& z + tz', \\ x'' =& 2z' + tz''. \end{aligned}$$

Ekuazioan ordezkatuz:

$$\begin{aligned} (1+t^2)x'' + tx' - x =& (1+t^2)(2z' + tz'') + t(z + tz') - tz \\ =& t(1+t^2)z'' + (2(1+t^2) + t^2)z' + tz - tz \\ =& t(1+t^2)z'' + (2+3t^2)z' = 0. \end{aligned}$$

$z' = y$ aldaketa eginez, honako ekuazio diferentzial berri hau lortuko dugu:

$$t(1+t^2)y' + (2+3t^2)y = 0 \implies \frac{y'}{y} = -\frac{2+3t^2}{t(1+t^2)} = -\left(\frac{2}{t} + \frac{t}{1+t^2}\right).$$

Integratuz:

$$\ln|y| = -2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \implies y = \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}.$$

Hau da, $y = z'$ denez, integratuz,

$$z = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}} = \cdots = -\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}.$$

Beraz,

$$x = tx_p = -\sqrt{1+t^2}$$

eta soluzio orokorra honako hau da:

$$x(t) = C_1 t + C_2\sqrt{1+t^2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3 Ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoak

Izan bitez $a_i\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ eta $b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak. Atal honetan

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t), \qquad (3.3.1)$$

ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio orokorra aurkitu nahi dugu. Dakigunez, soluzio orokor horrek honako egitura hau du:

$$x(t) = C_1x_1(t) + \cdots + C_nx_n(t) + x_p(t),$$

non $x_h = C_1x_1 + \cdots + C_nx_n$ elkartutako (3.2.1) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio orokorra den eta x_p (3.3.1) ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat.

3.3.1 Ordenaren beherapena ekuazio lineal ez-homogeneoetan

Izan bedi x_1 (3.2.1) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio bat. Aurreko atalean bezala, $x = x_1z$ aldaketa eginez eta (3.3.1) ekuazio diferentzialean ordezkatuz, z funtziorako ekuazio diferentzial bat lortuko dugu, non z-ren koefizientea nulua den. Ekuazio berri horretan $z' = y$ idatziz, y funtziorako $n-1$ ordenako ekuazio lineal ez-homogeneo bat izango dugu. Azken ekuazio diferentzial horren soluzioa ezagutzen badugu, t-rekiko integratuz eta emaitza x_1 funtzioarekin biderkatuz, (3.3.1) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra lortuko dugu.

3.3.2 Koefizienteen aldakuntzaren metodoa edo Lagrange-ren metodoa

Demagun ezaguna dela (3.3.1) ekuazioarekin elkartutako (3.2.1) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio orokorra,

$$x_h = C_1x_1 + \cdots + C_nx_n, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

(3.3.1) ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat lortzeko, honako adierazpen honetatik abiatuko gara:

$$x_p(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \cdots + C_n(t)x_n(t), \qquad (3.3.2)$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ funtzio ezezagunak izanik. $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funtzioak aurkitzeko, x_p-ren lehen $n-1$ deribatuei $n-1$ baldintza ezarriko dizkiegu, eta n-garren baldintza lortuko dugu (3.3.2) adierazpena (3.3.1) ekuazio diferentzialean ordezkatuz.

Deribatuz,

$$x_p'(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)x_i'(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)x_i(t).$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)x_i(t) = 0$ izatea eskatuko dugu. Hori kontuan hartuz eta berriro deribatuz:

$$x_p''(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i''(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i'(t).$$

Orain, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)x_i'(t) = 0$ izatea eskatuko dugu. Prozedura errepikatuz:

$$x_p^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{(n-2)}(t).$$

Azkenik, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{(n-2)}(t) = 0$ izan dadin eskatuko dugu eta, horrela,

$$x_p^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{(n-1)}(t).$$

(3.3.1) ekuazioan x_p-ren deribatuak ordezkatuz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{(n-1)} + a_1(t)\sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i^{(n-1)}&\\ + \cdots + a_{n-1}(t)\sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i' + a_n(t)\sum_{i=1}^{n} C_i(t)\, x_i &= b(t).\end{aligned}$$

Berrordenatuz:

$$\begin{aligned}C_1(t)\left(x_1^{(n)} + a_1(t)x_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x_1' + a_n(t)x_1\right)&\\ + \cdots + C_n(t)\left(x_n^{(n)} + a_1(t)x_n^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x_n' + a_n(t)x_n\right)&\\ + \sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{(n-1)} &= b(t),\end{aligned}$$

$x_1, \ldots, x_n$ ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzioak direnez, goiko berdintza honela geratuko da:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{(n-1)} = b(t).$$

Orduan, $C_1', C_2', \dots, C_n'$ deribatuek honako sistema hau egiaztatzen dute $t \in \mathbb{R}$ guztietarako:

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) + \cdots + C_n'(t)x_n(t) = 0, \\ C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) + \cdots + C_n'(t)x_n'(t) = 0, \\ C_1'(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2''(t) + \cdots + C_n'(t)x_n''(t) = 0, \\ \dots, \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = b(t). \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_n$ linealki independenteak direnez, sistema horren determinantea

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$$

da; beraz, sistema aljebraiko lineal bateragarri determinatua dugu, eta, ondorioz, soluzio bakarra du. Azkenik, soluzio horren $C_1', \dots, C_n'$ funtzioak t-rekiko integratuz, $C_1(t), \dots, C_n(t)$ lortuko ditugu, eta, (3.3.2) adierazpenean ordezkatuz, (3.3.1) ekuazio diferentzialaren x_p soluzio partikular bat.

Adibidea. Ebatziko dugu $x'' + x = \sec t$ ekuazioa, jakinik $\{\cos t, \sin t\}$ ekuazio homogeneoaren oinarrizko sistema dela, erraz egiazta daitekeen bezala.

Izan bedi

$$x_p(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t,$$

non

$$\begin{cases} C_1'\cos t + C_2'\sin t = 0 \\ -C_1'\sin t + C_2'\cos t = \sec t \end{cases}$$

bete behar den. Lehenengo ekuazioa $\sin t$ funtzioarekin biderkatuz eta bigarrena $\cos t$-rekin:

$$\begin{cases} C_1'\cos t\sin t + C_2'\sin^2 t = 0 \\ -C_1'\sin t\cos t + C_2'\cos^2 t = 1. \end{cases}$$

Bi ekuazio hauek batuz:

$$C_2'(t) = 1 \implies C_2(t) = t.$$

Bestalde,

$$C_1'(t) = -C_2'(t)\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t \implies C_1(t) = \ln|\cos t|.$$

Orduan, ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat

$$x_p(t) = \cos t \ln|\cos t| + t\sin t$$

da, eta soluzio orokorra:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = \cos t\ln|\cos t| + t\sin t + C_1\cos t + C_2\sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.4 Koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial linealak

Izenak esaten duen bezala, koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial linealen kasuan, a_i funtzioak konstante errealak izango dira. Atal honetan ikusiko dugu ekuazio hauen soluzioek forma berezia dutela.

3.4.1 Ekuazio homogeneoa

Definizioa. Izan bitez $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Honako ekuazio diferentzial hau:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = 0, \tag{3.4.1}$$

koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa dela diogu.

(3.4.1) ekuazioaren polinomio diferentzial eragilea t-rekiko independentea da:

$$P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n.$$

2. gaian ikusi genuen $x' + a_1 x = 0$ lehen ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren soluzio orokorra $x(t) = Ce^{-a_1 t}$ dela, $C \in \mathbb{R}$ izanik. Orain ikusiko dugu e^{rt} funtzio esponentzialak (3.4.1) ekuazio homogeneoaren soluzioak izango direla r-ren balio batzuetarako. Izan ere, e^{rt} (3.4.1) ekuazioaren soluzioa izateko

$$P(D)(e^{rt}) = \big(r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n\big)e^{rt} = 0$$

behar dugu.

Definizioa. Izan bitez $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n$$

(3.4.1) koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren *polinomio karakteristikoa* da.

Ikusitakoaren arabera, e^{rt} (3.4.1) ekuazioaren soluzioa izango da, baldin eta r haren polinomio karakteristikoaren erroa bada,

$$P(D)(e^{rt}) = 0 \iff P(r) = 0.$$

P polinomioaren koefizienteak zenbaki errealak direnez, P-k n erro konplexu ditu (errealak izan daitezke), anizkoiztasunak kontuan izanik. (3.4.1) ekuazioaren soluzio orokorra lortzeko, n soluzio linealki independente behar ditugu. Gogora dezagun $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ badira, $r_1 \neq r_2$, orduan, $e^{r_1 t}$ eta $e^{r_2 t}$ linealki independenteak direla.

(i) $r \in \mathbb{R}$ zenbakia P polinomioaren erroa bada, orduan, e^{rt} funtzioa (3.4.1) ekuazioaren soluzioa da.

Gainera, r P-ren m ordenako erroa bada, $t^k e^{rt}$ ere (3.4.1) ekuazioaren soluzioa da, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ guztietarako. Ikus dezagun:

$$\begin{aligned} P(D)(t^k e^{rt}) =& P(D)\Big(\frac{\partial^k}{\partial r^k}(e^{rt})\Big) = \frac{\partial^k}{\partial r^k}\big(P(D)(e^{rt})\big) \\ =& \frac{\partial^k}{\partial r^k}\big(P(r)e^{rt}\big) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} P^{(j)}(r) t^{k-j} e^{rt}. \end{aligned}$$

r P-ren m ordenako erroa denez, $P^{(j)}(r) = 0$ da $j = 0, \ldots, m-1$ guztietarako; beraz, $P(D)(t^k e^{rt}) = 0$ da, hots, $t^k e^{rt}$ ekuazio diferentzialaren soluzioa da. Hau da, r P-ren m ordenako erroa bada, orduan,

$$e^{rt},\ te^{rt}, \ldots, t^{m-1}e^{rt}$$

funtzioak (3.4.1) ekuazio diferentzialaren soluzioak dira, eta erraz frogatzen da linealki independenteak direla, gainera.

(ii) r P polinomioaren erro konplexua bada, hau da, existitzen badira $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, non $r = \alpha + i\beta$ den, orduan, P-ren koefizienteak errealak direlako, $\overline{r} = \alpha - i\beta$ ere P-ren erroa da.

$$\begin{aligned} e^{rt} &= e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\big), \\ e^{\overline{r}t} &= e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)\big), \end{aligned}$$

(3.4.1) ekuazio diferentzialaren soluzioak dira, eta haien arteko konbinazio linealak (koefizienteak errealak zein konplexuak izanik) ere, bereziki,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(e^{rt}) = e^{\alpha t} \cos \beta t =& \frac{1}{2} e^{rt} + \frac{1}{2} e^{\overline{r}t}, \\ \mathrm{Im}(e^{rt}) = e^{\alpha t} \sin \beta t =& \frac{1}{2i} r^{rt} - \frac{1}{2i} e^{\overline{r}t}. \end{aligned}$$

Gainera, bi funtzio hauek linealki independenteak dira.

$r = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, zenbaki konplexua $P(r)$ polinomioaren m ordenako erro konplexua bada, aurreko atalean bezala, $t^k e^{rt} = t^k e^{\alpha t} e^{i\beta t}$ ere (3.4.1) ekuazioaren soluzioa da, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ guztietarako. $\overline{r}$ ere m ordenako erroa izango denez, $2m$ soluzio erreal linealki independente ditugu:

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t} \cos \beta t,\ te^{\alpha t} \cos \beta t, \ldots,\ t^{m-1} e^{\alpha t} \cos \beta t \\ &e^{\alpha t} \sin \beta t,\ te^{\alpha t} \sin \beta t, \ldots,\ t^{m-1} e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

Adibidea. $x'' - 5x' + 6x = 0$ koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa da. Bere polinomio karakteristikoaren erroak aurkitu behar ditugu.

$$P(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0 \iff r = 2 \ \text{ edo } \ r = 3$$

eta, ondorioz, $x_1(t) = e^{2t}$ eta $x_2(t) = e^{3t}$ ekuazio diferentzialaren soluzio linealki independenteak dira. Horrela, soluzio orokorra honako hau da:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Adibidea. $x'' + x' + x = 0$ ekuazioaren polinomio karakteristikoaren erroak konplexuak dira.

$$P(r) = r^2 + r + 1 = 0 \iff r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

eta, ondorioz, honako hauek soluzio linealki independenteak dira:

$$\begin{aligned} x_1(t) =& e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}, \\ x_2(t) =& e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}. \end{aligned}$$

Ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, beraz, hau da:

$$x(t) = C_1 e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + C_2 e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Adibidea. $x^{(7)} + 3x^{(6)} + 5x^{(5)} + 7x^{(4)} + 7x''' + 5x'' + 3x' + x = 0$ ekuazioaren polinomio karakteristikoa hau da

$$P(r) = r^7 + 3r^6 + 5r^5 + 7r^4 + 7r^3 + 5r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3(r^2+1)^2.$$

Erroak $r = -1$, hirukoitza, eta $r = \pm i$, biak bikoitzak, dira. Honako soluzio linealki independente hauek ditugu:

$$\begin{aligned} &x_1(t) = e^{-t}, \quad x_2(t) = te^{-t}, \quad x_3(t) = t^2 e^{-t}, \\ &x_4(t) = \cos t, \quad x_5(t) = t\cos t, \\ &x_6(t) = \sin t, \quad x_7(t) = t \sin t, \end{aligned}$$

eta soluzio orokorra honako hau da:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + C_3 t^2 e^{-t} + C_4 \cos t + C_5 t \cos t + C_6 \sin t + C_7 t \sin t,$$

$C_1, \ldots, C_7$ konstante errealak izanik.

3.4.2 Ekuazio ez-homogeneoa: koefiziente zehaztugabeen metodoa

Izan bitez $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, M, N polinomioak eta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Har dezagun honako koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneo hau:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = e^{\alpha t}(M(t)\cos\beta t + N(t)\sin\beta t). \tag{3.4.2}$$

Izan bitez d M eta N polinomioen mailen artean, handiena eta k $\alpha \pm i\beta$ zenbakiaren anizkoiztasuna P polinomio karakteristikoaren erro bezala ($\alpha \pm i\beta$ P-ren erroa ez bada, $k = 0$ hartuko da).

Orduan, forma honekin bilatuko dugu (3.4.2) ekuazio diferentzial ez-homogeneoaren soluzio partikular bat:

$$x_p(t) = t^k e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t), \tag{3.4.3}$$

non R eta Q polinomioak diren, gehienez d mailakoak. R eta Q-ren koefizienteak kalkulatzeko, (3.4.3) adierazpena (3.4.2) ekuazio diferentzialean ordezkatu behar da.

Adibidea. Izan bedi $P(D)x = b(t)$ koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoa, $P(r)$ polinomio karakteristikoaren erroak $r = 0$ bakuna, $r = 1$ bikoitza, $r = -2 \pm i$ bakunak eta $r = \pm i$ hirukoitzak izanik eta

$$b(t) = 2 - t^3 - 3\sin t - 2t\cos t + e^{-2t}\sin t.$$

Ekuazio diferentzialaren soluzio partikular bat aurkitzeko modua aztertuko dugu. Lehenengo eta behin, kontuan izango dugu $b(t) = b_1(t) + \cdots + b_s(t)$ bada, eta $P(D)x_i = b_i(t)$ bada $i = 1, \ldots, s$ bakoitzerako, $x = x_1 + \cdots + x_s$ deituz, orduan,

$$P(D)x = P(D)(x_1 + \cdots + x_s) = P(D)x_1 + \cdots + P(D)x_s = b_1(t) + \cdots + b_s(t) = b(t).$$

Horren arabera, $b(t)$ batura bezala adieraziko dugu, batugai horietako bakoitza koefiziente zehaztugabeen metodora egokitzen delarik. Gure kasuan, $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + b_3(t)$, non

$$\begin{array}{lllll}
b_1(t) = 2 - t^3 & \Longrightarrow\ d = 3, & \alpha = 0, & \beta = 0, & k = 1, \\
b_2(t) = 3\sin t - 2t\cos t & \Longrightarrow\ d = 1, & \alpha = 0, & \beta = 1, & k = 3 \\
b_3(t) = e^{-2t}\sin t & \Longrightarrow\ d = 0, & \alpha = -2, & \beta = 1, & k = 1
\end{array}$$

Orduan, $x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t) + x_{p3}(t)$, non

$$\begin{aligned}
x_{p1}(t) =& t(A + Bt + Ct^2 + Dt^3) \\
x_{p2}(t) =& t^3\big((E + Ft)\cos t + (G + Ht)\sin t)\big) \\
x_{p3}(t) =& te^{-2t}\big(K\cos t + L\sin t)\big)
\end{aligned}$$

diren eta $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L \in \mathbb{R}$ konstanteak lortzeko x_i funtzioa ordezkatu behar den $P(D)x_i = b_i(t)$ ekuazioan, $i = 1, 2, 3$.

3.5 Eulerren ekuazio diferentzialak

Definizioa. Izan bitez $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ eta $b \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = b(t), \quad t > 0, \tag{3.5.1}$$

ekuazio diferentzial lineala *Eulerren ekuazio diferentziala* dela esaten dugu.

3.5.1 Eulerren ekuazio diferentzial homogeneoak

Izan bitez $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ eta

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0 \tag{3.5.2}$$

Eulerren ekuazio homogeneoa. (3.5.2) ekuazioaren koefizienteak t-ren berreturen multiploak direnez, haren soluzioak aurkitzeko, $x(t) = t^r$ motako funtzioekin probatuko dugu. Deribatuz,

$$\begin{aligned} &t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} t x' + a_n x \\ &\qquad = t^r \big(r(r-1)\dots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\dots(r-n+2) + \cdots + a_{n-1} r + a_n \big) \end{aligned}$$

Beraz, $x(t) = t^r$ (3.5.2) ekuazio homogeneoaren soluzioa da, baldin eta soilik baldin

$$r(r-1)\dots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\dots(r-n+2) + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{3.5.3}$$

bada. Azter ditzagun aukerak:

(i) $r \in \mathbb{R}$ zenbakia (3.5.3) ekuazio polinomikoaren m ordenako erro erreala bada, orduan,

$$t^r,\ t^r \ln t,\ t^r \ln^2 t, \dots, t^r \ln^{m-1} t$$

(3.5.2) ekuazioaren m soluzio dira, linealki independenteak direnak.

(ii) $r = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, (3.5.3) ekuazio polinomikoaren erro konplexua bada, orduan, $\overline{r} = \alpha - i\beta$ ere bai. Gainera,

$$\begin{aligned} t^r &= t^{\alpha + i\beta} = t^\alpha e^{i\beta \ln t} = t^\alpha \big(\cos(\beta \ln t) + i \sin(\beta \ln t) \big), \\ t^{\overline{r}} &= t^{\alpha - i\beta} = t^\alpha e^{-i\beta \ln t} = t^\alpha \big(\cos(\beta \ln t) - i \sin(\beta \ln t) \big); \end{aligned}$$

beraz, $\mathrm{Re}(t^r) = t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ eta $\mathrm{Im}(t^r) = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$ (3.5.2) ekuazioaren soluzioak dira. Gainera, r (3.5.3) ekuazioaren m ordenako erroa bada, honako $2m$ soluzio linealki independente hauek ditugu:

$$\begin{aligned} &t^\alpha \cos(\beta \ln t),\ t^\alpha \cos(\beta \ln t) \ln t,\ t^\alpha \cos(\beta \ln t) \ln^2 t, \dots, t^\alpha \cos(\beta \ln t) \ln^{m-1} t \\ &t^\alpha \sin(\beta \ln t),\ t^\alpha \sin(\beta \ln t) \ln t,\ t^\alpha \sin(\beta \ln t) \ln^2 t, \dots, t^\alpha \sin(\beta \ln t) \ln^{m-1} t. \end{aligned}$$

Adibidea. Eulerren honako ekuazio diferentzial homogeneo hau ebatziko dugu:

$$t^2 x'' - t x' + 2x = 0.$$

Soluzio orokorra kalkulatuko dugu $x(t) = t^r$ moduko bi soluzio linealki independente bilatuz. Ekuazioan ordezkatuz:

$$\begin{aligned} t^2 x'' - t x' + 2x = t^2 r(r-1) t^{r-2} - t r t^{r-1} + 2 t^r = t^r \big(r(r-1) - r + 2 \big) = 0 \\ \iff r^2 - 2r + 2 = 0 \iff r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i. \end{aligned}$$

Horren arabera, honako hau da ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra:

$$x(t) = C_1 t \cos(\ln t) + C_2 t \sin(\ln t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.5.2 Aldagai-aldaketa Eulerren ekuazio diferentzialetan

(3.5.1) Eulerren ekuazio diferentzialean $t = e^s$, hots, $s = \ln t$ aldagai-aldaketa egin ondoren, koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal bat lortzen da $y(s) = x(e^s)$ funtzio ezezagunerako. Ikus dezagun:

$$\begin{aligned}
&x(t) = x(e^s) = y(s),\\
x'(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{1}{t} \Longrightarrow tx'(t) = y'(s)\\
x''(t) &= \frac{d}{dt}(x') = \frac{d}{dt}\Big(\frac{y'(s)}{t}\Big) = \frac{1}{t}\frac{d(y')}{dt} - \frac{1}{t^2}y' = \frac{1}{t^2}y'' - \frac{1}{t^2}y'\\
&\Longrightarrow t^2x''(t) = y'' - y' = \frac{d}{ds}\Big(\frac{d}{ds} - 1\Big)y\\
&\dots\\
x^{(n)}(t) &= \frac{d}{dt}(x^{(n-1)}(t)) \Longrightarrow t^n x^{(n)}(t) = \frac{d}{ds}\Big(\frac{d}{ds} - 1\Big)\dots\Big(\frac{d}{ds} - n + 1\Big)y.
\end{aligned}$$

Hau da, $t^k x^{(k)}$ y-ren deribatuen koefiziente konstanteetako konbinazio lineal baten bidez idatz daiteke, $k = 0, 1, \dots, n$ guztietarako, eta, ondorioz, koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal bat lortzen da y ezezagunerako. Behin ekuazio hori ebatzita, aldaketa deseginez, x errekuperatzen da.

Adibidea. Ebatziko dugu honako Eulerren ekuazio diferentzial ez-homogeneo hau:

$$t^2x'' - tx' + 2x = t\ln t.$$

Bi modutan egingo dugu: Lagrangeren metodoa erabiliz ekuazio horren soluzio partikular bat aurkitzeko, eta arestian azaldutako aldagai-aldaketa aplikatuz.

Lehenago ikusi dugu elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra

$$x_h(t) = C_1 t\cos(\ln t) + C_2 t\sin(\ln t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

dela; beraz, ekuazio ez-homogeneoaren soluzio orokorra idazteko ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat soilik falta zaigu, eta hori Lagrangeren metodoa erabiliz lor daiteke. Hots,

$$x_p(t) = C_1(t)t\cos(\ln t) + C_2(t)t\sin(\ln t)$$

bilatuko dugu, non

$$\begin{cases} C_1'(t)t\cos(\ln t) + C_2'(t)t\sin(\ln t) = 0\\ C_1'(t)\big(\cos(\ln t) - \sin(\ln t)\big) + C_2'(t)\big(\sin(\ln t) + \cos(\ln t)\big) = \dfrac{t\ln t}{t^2}. \end{cases}$$

Lehen ekuazioan t sinplifkatuz eta lehenengoa bigarrenean ordezkatuz:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos(\ln t) + C_2'(t)\sin(\ln t) = 0\\ -C_1'(t)\sin(\ln t) + C_2'(t)\cos(\ln t) = \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$$

Azken sistema horretan, lehen ekuazioa $\sin(\ln t)$-rekin biderkatuz, bigarrena $\cos(\ln t)$-rekin eta azken bi berdintza hauek batuz,

$$C_2'(t) = \frac{\ln t}{t}\cos(\ln t) \Longrightarrow C_2(t) = \int \frac{\ln t}{t}\cos(\ln t)dt = \cdots = \ln t \sin(\ln t) + \cos(\ln t),$$

eta

$$\begin{aligned} C_1'(t) = -C_2'(t)\frac{\sin(\ln t)}{\cos(\ln t)} &= -\frac{\ln t}{t}\sin(\ln t) \\ &\Longrightarrow C_1(t) = -\int \frac{\ln t}{t}\sin(\ln t)dt = \cdots = \ln t\cos(\ln t) - \sin(\ln t). \end{aligned}$$

Beraz:

$$\begin{aligned} x_p(t) = t\ln t\cos^2(\ln t) - t\cos(\ln t)\sin(\ln t) + t\ln t\sin^2(\ln t) + t\sin(\ln t)\cos(\ln t) \\ = t\ln t \end{aligned}$$

eta, ondorioz:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 t\cos(\ln t) + C_2\sin(\ln t) + t\ln t.$$

Esan bezala, beste metodo bat erabil dezakegu proposatutako Eulerren ekuazio ez-homogeneoa ebazteko, $t = e^s$ aldagai-aldaketa eginez, hain zuzen ere. Horrela, $s = \ln t$ da eta $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{t}$, beraz:

$$\begin{aligned} x(t) &= y(\ln t) = y(s) \\ x'(t) &= \frac{d}{dt}\big(y(\ln t)\big) = y'(\ln t)\frac{1}{t} \\ &\Longrightarrow tx'(t) = y'(\ln t) = y'(s) \\ x''(t) &= \frac{d}{dt}\Big(y'(\ln t)\frac{1}{t}\Big) = y''(\ln t)\frac{1}{t^2} - y'(\ln t)\frac{|}{t^2} \\ &\Longrightarrow t^2x'(t) = y''(\ln t) - y'(\ln t) = y''(s) - y'(s). \end{aligned}$$

Ordezkatuz:

$$t^2x'' - tx' + 2x = t\ln t \iff y'' - y' - y' + 2y = e^s s \iff y'' - 2y' + 2y = se^s.$$

Ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra lortzeko, polinomio karakteristikoaren erroak behar ditugu:

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \Longleftrightarrow r = r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Orduan:

$$y_h(s) = C_1 e^s \cos s + C_2 es \sin s.$$

Ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikular bat lortzeko, koefiziente zehaztugabeen metodoa erabil daiteke. Ekuazioaren eskuineko atala $b(s) = se^s$ denez, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ dira; beraz, $k = 0$ eta $d = 1$. Orduan,

$$y_p(s) = (As + B)e^s,$$

eta y_p ekuazio ez-homogeneoaren soluzioa izatera behartzen badugu:

$$y_p'' - 2y_p' + 2y_p = e^s(As + B + 2A) - 2e^s(As + B + A) + 2e^s(As + B) = se^s$$
$$\Longrightarrow As + B = s \quad \Longrightarrow \quad A = 1,\ B = 0.$$

Beraz, soluzio orokorra

$$y(s) = y_p(s) + y_h(s) = se^s + C_1 e^s \cos s + C_2 e^s \sin s$$

da, eta, aldaketa deseginez,

$$x(t) = t \ln t + C_1 t \cos(\ln t) + C_2 t \sin(\ln t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.6 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial linealen soluzioen propietate kualitatiboak

Atal honetan, bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoen soluzioen propietateak aztertuko ditugu, ekuazio diferentziala ebatzi gabe. Ekuazio horien adibide fisiko batzuk dira RCL motako zirkuituak eta oszilatzaileak.

Definizioa. (i) Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneo baten *adierazpen estandarra* edo *kanonikoa* honako hau da:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0. \tag{3.6.1}$$

non $p, q\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jarraituak diren.

(ii) Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneo baten *adierazpen autoadjuntua* honako hau da:

$$(r(t)x')' + q_1(t)x = 0, \tag{3.6.2}$$

non $r \in C^1([a, b])$ eta $q_1 \in C([a, b])$ diren, eta $r(t) > 0$, $t \in [a, b]$ guztietarako.

(iii) Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneo baten *adierazpen normala* honako hau da:

$$x'' + q_2(t)x = 0, \tag{3.6.3}$$

non $q_2\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua den.

Orain, adierazpen batetik bestera nola pasatu ikusiko dugu.

(3.6.1)-etik (3.6.3)-ra. Izan bedi

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

eta idatz dezagun $x(t) = u(t)v(t)$. Orduan.

$$\begin{aligned} x' =& uv' + u'v, \\ x'' =& uv'' + 2u'v' + u''v \end{aligned}$$

eta, ekuazioan ordezkatuz,

$$\begin{aligned} &(uv'' + 2u'v' + u''v) + p(t)(uv' + u'v) + q(t)uv \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad vu'' + (2v' + pv)u' + (v'' + pv' + qv)u = 0 \end{aligned}$$

dugu. Aukeratuko dugu v u'-ren koefizientea zero izan dadin, hots,

$$2v' + p(t)v = 0 \implies \frac{v'}{v} = -\frac{p(t)}{2} \implies v(t) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\Big).$$

Beraz, $x(t) = \exp\big(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\big)u(t)$ aldaketa (3.6.1) ekuazioan egin ondoren, u funtzioak (3.6.3) ekuazioa betetzen du, non

$$\begin{aligned} q_2(t) =& \frac{v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t)}{v(t)} = \frac{v''(t)}{v(t)} + p(t)\frac{v'(t)}{v(t)} + q(t) \\ =& -\frac{1}{2}\frac{(pv)'}{v} + p(t)\Big(-\frac{p(t)}{2}\Big) + q(t) \\ =& -\frac{1}{2}\frac{p'(t)v(t) + p(t)v'(t)}{v(t)} - \frac{\big(p(t)\big)^2}{2} + q(t) \\ =& -\frac{p'(t)}{2} + \frac{\big(p(t)\big)^2}{4} - \frac{\big(p(t)\big)^2}{2} + q(t) = q(t) - \frac{p'(t)}{2} - \frac{\big(p(t)\big)^2}{4} \end{aligned}$$

den.

(3.6.1)-etik (3.6.2)-ra. Ekuazioaren forma autoadjuntuaren ezkerreko atala garatuz,

$$(r(t)x')' + q_1(t)x = rx'' + r'x' + q_1(t)x = r(t)\big(x'' + \frac{r'}{r}x' + \frac{q_1}{r}x\big).$$

Hori kontuan izanda, r eta q_1 funtzioak aurkitu nahi ditugu, non

$$p(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} \quad \text{eta} \quad q(t) = \frac{q_1(t)}{r(t)}$$

diren, hots,

$$\begin{aligned} r(t) =& \exp\Big(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big) > 0, \\ q_1(t) =& q(t)\exp\Big(\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big). \end{aligned}$$

(3.6.2)-tik (3.6.3)-ra. Beste aldagai independente bat hartuko dugu, $s = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{r(\tau)}$.

Orduan, $x(t) = y(s(t))$ eginez,

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{1}{r(t)} = \frac{y'(s)}{r(t)},$$

beraz, $r(t)x'(t) = y'(s)$ da, eta berriro deribatuz t-rekiko,

$$(r(t)x')' = \frac{d}{dt}\big(y'(s(t))\big) = y''(s)\frac{ds}{dt} = \frac{y''}{r(t)};$$

ondorioz, y funtzioak

$$y'' + q_1(t(s))r(t(s))y = 0$$

ekuazioa egiaztatzen du, hots, $q_2(s) = q_1(t(s))r(t(s))$ da.

3.8 lema. *Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak eta*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{3.6.4}$$

bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa.

(i) Existitzen bada $t_0 \in (a,b)$ non (3.6.4) ekuazio diferentzialaren soluzio bat eta haren deribatua t_0 puntuan anulatzen diren, orduan, soluzio hori soluzio nulua da.

(ii) (3.6.4) ekuazio diferentzialaren edozein soluzio ez-nuluk $[a,b]$ tartean dituen zeroen kopurua finitua da.

(iii) Existitzen bada $t_0 \in (a,b)$ non (3.6.4) ekuazio diferentzialaren bi soluzio t_0 puntuan anulatzen diren, orduan, soluzio horiek linealki dependenteak dira.

Froga. (i) Izan bitez $t_0 \in \mathbb{R}$ eta x honako Cauchyren problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t) = 0, \\ x(t_0) = x'(t_0) = 0. \end{cases}$$

Existentzia eta bakartasunaren teoremaren arabera, problema horrek soluzio bakarra du, eta funtzio nuluak betetzen ditu hiru berdintzak, beraz, $x \equiv 0$.

(ii) Absurdura eramanez, demagun x (3.6.4) ekuazioaren soluzioa dela eta infinitu zero dituela $[a,b]$ tartean. Izan bedi $\{t_n\} \subset [a,b]$ x-ren zeroen segida gorakor bat, hots, $x(t_n) = 0$ $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $t_i < t_j$, $i < j$ bada. $\{t_n\}$ segida gorakor eta goitik bornatua denez, konbergentea da, Izan bedi $t_0 = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. x jarraitua denez,

$$\begin{aligned} x(t_0) =& x\big(\lim_{n\to\infty} t_n\big) = \lim_{n\to\infty} x(t_n) = 0, \\ x'(t_0) =& \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} = 0. \end{aligned}$$

Beraz, (i) atalaren arabera, $x \equiv 0$.

(iii) Izan bitez x_1, x_2 (3.6.4) ekuazioaren soluzioak, eta demagun existitzen dela $t_0 \in [a,b]$ non $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ diren. Orduan,

$$W(x_1,x_2)(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

eta, 3.5 teoremaren arabera, horrek inplikatzen du x_1, x_2 ez direla linealki independenteak. □

3.9 teorema (Sturmen banantze-teorema)**.** *Izan bitez $p, q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jarraituak, eta x_1 eta x_2 (3.6.4) bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren bi soluzio linealki independente. Orduan, x_1 soluzioaren ondoz ondoko bi zeroren artean x_2 soluzioaren zero bat eta bakarra dago.*

Froga. Lehenengo eta behin, existentzia frogatuko dugu. Izan bitez $\alpha, \beta \in [a,b]$ non $x_1(\alpha) = x_1(\beta) = 0$ eta $x_1(t) \neq 0$ den $t \in (\alpha, \beta)$ guztietarako. Orokortasuna galdu gabe, suposa dezakegu $x_1'(\alpha) > 0$ dela, eta, orduan, $x_1'(\beta) < 0$ izango da. x_1 eta x_2 linealki independenteak direnez, $W(x_1,x_2)(t) \neq 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako, eta zeinua mantentzen da.

$$W(x_1,x_2)(\alpha) = \begin{vmatrix} x_1(\alpha) & x_2(\alpha) \\ x_1'(\alpha) & x_2'(\alpha) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2(\alpha) \\ x_1'(\alpha) & x_2'(\alpha) \end{vmatrix} = -x_1'(\alpha)x_2(\alpha),$$
$$W(x_1,x_2)(\beta) = \begin{vmatrix} x_1(\beta) & x_2(\beta) \\ x_1'(\beta) & x_2'(\beta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2(\beta) \\ x_1'(\beta) & x_2'(\beta) \end{vmatrix} = -x_1'(\beta)x_2(\beta).$$

$x_1'(\alpha)x_1'(\beta) < 0$ denez, $x_2(\alpha)x_2(\beta) < 0$ da, eta x_2 jarraitua denez, Bolzanoren teoremaren arabera, x_2-k zero bat dauka (α, β) tartean.

Demagun orain existitzen direla $\alpha < \tau_1 < \tau_2 < \beta$ non $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0$ diren. Orduan, existituko da $\tau_0 \in (\tau_1, \tau_2)$ non $x_1(\tau_0) = 0$ den, eta hori ez da posible. Beraz, x_2-k zero bakarra du (α, β) tartean. □

3.10 teorema (Sturmen konparazio-teorema)**.** *Izan bitez $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ izanik $t \in [a,b]$ guztietarako, eta $q_1, q_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jarraituak, $q_1(t) \leq q_2(t)$ izanik $t \in [a,b]$ guztietarako. Izan bitez x_1, x_2 funtzio ez-nuluak, non*

$$(r(t)x_i')' + q_i(t)x_i = 0 \quad t \in [a,b], \quad i = 1,2,$$

eta α eta β x_1 funtzioaren ondoz ondoko bi zero; hau da, $a < \alpha < \beta < b$, $x_1(\alpha) = x_1(\beta) = 0$ eta $x_1(t) \neq 0$ $t \in (\alpha, \beta)$ guztietarako. Orduan, x_2 funtzioak $[\alpha, \beta]$ tartean gutxienez zero bat izango du.

Horrez gain, existitzen bada $t_0 \in [a,b]$ non $q_1(t_0) < q_2(t_0)$ den, orduan, x_2 funtzioak (α, β) tartean gutxienez zero bat izango du.

Sturmen konparazio-teoremak ziurtatzen du bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneo baten x-ren koefizientea gero eta handiagoa hartzen bada, soluzioen oszilazioak gero eta gehiago izango direla.

3.11 korolarioa. *(i) Izan bitez* $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ $t \in [a,b]$ *guztietarako, eta* $q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jarraitua,* $q(t) < 0$ *izanik* $t \in [a,b]$ *guztietarako. Orduan,* x *funtzioa*

$$(r(t)x')' + q(t)x = 0$$

ekuazio diferentzialaren soluzio ez-nulua bada, x*-k gehienez zero bat izango du* $[a,b]$ *tartean.*

(ii) Izan bitez $r \in C^1([a,\infty))$, $r(t) > 0$ $t \in [a,\infty)$ *guztietarako, eta* $q\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ *jarraitua,* $q(t) < 0$ *izanik* $t \in [a,\infty)$ *guztietarako. Orduan,* x *funtzioa*

$$(r(t)x')' + q(t)x = 0$$

ekuazio diferentzialaren soluzio ez-nulua bada, x*-k gehienez zero bat izango du* $[a,\infty)$ *tartean.*

3.7 Ariketak

1. (i) Izan bitez $A, B, C\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jarraituak. Froga ezazu e^{rt} funtzioa

$$A(t)x'' + B(t)x' + C(t)x = 0$$

ekuazio diferentzialaren soluzioa dela, baldin eta soilik baldin

$$r^2A(t) + rB(t) + C(t) = 0, \quad \forall\, t \in I.$$

(ii) Aurki ezazu $(t-t^2)x''+(2t-1)x'+(t^2-3t+1)x = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra.

Em.: $C_1e^t + C_2t^2e^{-t}$

(iii) Azken ekuazioaren soluzio ez-nulu bat, x, existitzen da, $x(0) = x'(0) = 0$ izanik. Hau eta bakartasunaren teorema kontrajarriak al dira?

2. Aurkitu a parametroaren balioak

$$(t + 1)x'' - atx' + (1 - 2a)x = 0$$

ekuazio diferentzialak $x(t) = e^{at}$ moduko soluzioak izan ditzan, eta aurkitu soluzio orokorrak parametroaren balio horietarako.

Em.: $a = 1$, $x(t) = e^t\Big(C_1 + C_2 \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\tau + 1}\, d\tau\Big)$

3. Kalkula ezazu

$$(1 + t)x'' + (4t + 5)x' + (4t + 6)x = e^{-2t}$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, ekuazio homogeneoa ebazteko e^{rt} motako funtzioa erabiliz.

Em.: $\big(t + C_1 + C_2 \ln(t + 1)\big)e^{-2t}$

4. Kalkula ezazu

$$tx'' + 2x' + tx = 1$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, $\dfrac{\sin t}{t}$ elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzioa dela jakinik.

Em.: $\dfrac{1 + C_1 \sin t + C_2 \cos t}{t}$

5. Kalkula ezazu

$$y'' - 2y' \tan x + 3y = 2 \sec x$$

ekuazio diferentzial hauen soluzio orokorra, $y = \sin x$ elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzioa dela jakinik.

Em.: $\dfrac{C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + 1}{2 \cos x}$

6. Izan bedi honako ekuazio diferentzial hau:

$$x'' - \Big(\frac{2}{t} + \operatorname{cotan} t\Big)x' + \frac{1}{t}\Big(\frac{2}{t} + \operatorname{cotan} t\Big)x = -t \operatorname{cotan} t.$$

   (i) Aurkitu $x(t) = t^n + \alpha t$ motako bi soluzio partikular.

   (ii) Aurkitu soluzio orokorra.

Em.: $t(C_1 + C_2 \cos t + t)$

7. Aurkitu

$$t^2x'' - t(2t+3)x' + (t^2+3t+3)x = (6-t^2)e^t$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, jakinda $x(t) = te^t$ elkartutako ekuazio homogeneoaren soluzioa dela.

Em.: $x(t) = (C_1t^3 + t^2 + C_2t + 2)e^t$

8. Izan bedi $tx''+(2-3t)x'-3x = 20t^3-15t^4$ ekuazio diferentziala. t^4 eta $\dfrac{t^5-7}{t}$ funtzioak emandako ekuazio diferentzialaren bi soluzio direla jakinik, kalkula ezazu ekuazioaren soluzio orokorra.

Em.: $x(t) = \dfrac{C_1 + C_2e^{3t} + t^5}{t}$

9. Kalkulatu $t^2x'' - 2tx' + (t^2+2)x = t^3e^t$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, bere ekuazio diferentzial homogeneo elkartuaren bi soluzio partikularren arteko zatidura $\tan t$ dela jakinik.

Em.: $x(t) = C_1 t \sin t + C_2 t \cos t + \dfrac{te^t}{2}$

10. Honako ekuazio diferentzial honetarako:

$$x'' + \big(\tan t - \frac{2}{t}\big)x' + \frac{f(t)}{t^2}x = t \tan t,$$

   (i) aurkitu f funtzioa, elkartutako ekuazio diferentzial homogeneoak bi soluzio partikular baditu, haien arteko zatidura $\sin t$ izanik;

Em.: $f(t) = 2 - t\tan t$

   (ii) Aurreko atalean lortu duzun f funtzioarekin, eta ekuazio ez-homogeneoak $x(t) = t^n$ motako soluzio partikular bat duela jakinda, kalkulatu ekuazio ez-homogeneoaren soluzio orokorra.

Em.: $t(C_1 + C_2 \sin t + t)$

11. Aurkitu

$$x'' + x'(\tan t - 3\operatorname{cotan} t) + 3x \operatorname{cotan}^2 t = 3\tan^3 t$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, jakinda elkartutako ekuazio homogeneoak badituela bi soluzio partikular, bata bestearen kuboa dena.

Em.: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \sin^3 t + \tan t$

12. Kalkulatu koefiziente konstanteetako eta ordena minimoko ekuazio lineal homogeneo bat, honako funtzio hauek haren soluzioak izan daitezen:

    (i) t^2, $e^t \cos 3t$, $t^3 \sin t$ *Em.:* $y^{(13)} - 2y^{(12)} + 14y^{(11)} - 8y^{(10)} + 46y^{(9)} - 12y^{(8)}$ $+64y^{(7)} - 8y^{(6)} + 41y^{(5)} - 2y^{(4)} + 10y''' = 0$

    (ii) $t^2e^t - 3e^{-t}\cos 2t + \cos t + t^3 + 1$
    Em.: $y^{(11)} - y^{(10)} + 3y^{(9)} - 11y^{(8)} + 15y^{(7)} - 15y^{(6)} + 13y^{(5)} - 5y^{(4)} = 0$

13. Koefiziente konstanteetako $P(D)x = 0$ ekuazio lineal homogeneoaren ekuazio karakteristikoak, hots, $P(r) = 0$ ekuazioak, honako soluzio hauek ditu: $r = 0$ bakuna, $r = 1$ bikoitza, $r = -2 \pm i$ bakunak eta $r = \pm i$ hirukoitzak. Nolakoa izango da

$$P(D)x = 2 + t^3 + t\cos t + t^2 \sin 2t + (1+t)e^t + e^{2t}\sin t + e^{-2t}\sin t$$

    ekuazio diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzio baten adierazpena? (Erabili koefiziente zehaztugabeen metodoa).

14. $P(r)$ polinomioaren erroak $r = 0$ bikoitza, $r = 2$ bakuna, $r = 1 \pm 3i$ hirukoitza, $r = \pm i$ bikoitza eta $r = 4 \pm i$ bakuna dira. Nola bilatuko da

$$P(D)x = 2 + t^2 - 3\sin t + 2t\cos t + (2 - \sin t)e^{2t} - (t\cos 2t - \sin 3t)e^t$$

    ekuazio diferentzial ez-homogeneoaren soluzio bat?

15. Ebatz itzazu:

    (i) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ *Em.:* $C_1\cos t + C_2 t\cos t + C_3 \sin t + C_4 t\sin t$

    (ii) $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^t + e^{-t} + \sin t - \cos t$
    Em.: $C_1e^t + C_2te^t + C_3\cos t + C_4\sin t + \dfrac{t^2e^t}{4} + \dfrac{e^{-t}}{8} + \dfrac{t}{4}(\sin t - \cos t)$

    (iii) $y'' + 4y' + 4y = 2e^t(\sin t + 7\cos t)$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ *Em.:* $e^t(\sin t + \cos t)$

    (iv) $y'' - y = \dfrac{1}{e^t + 1}$ *Em.:* $C_1e^t + C_2e^{-t} + \ln(e^t + 1)\sinh t - \dfrac{te^t + 1}{2}$

    (v) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec 2x$
    Em.: $y(x) = e^{-x}\big((C_1 + \frac{x}{2})\sin 2x + (C_2 + \frac{1}{4}\ln\cos 2x)\cos 2x\big)$

    (vi) $y'' + y = xe^{-x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}$ *Em.:* $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{x+1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{2\cos x}$

16. Ebatzi honako ekuazio diferentzial hauek:

    (i) $(t+2)^2y'' + 3(t+2)y' - 3y = 0$ *Em.:* $C_1(t+2) + \dfrac{C_2}{(t+2)^3}$

    (ii) $(2t+1)^2y''' + 2(2t+1)y'' + y' = 0$
    Em.: $C_1 + C_2(2t+1)\cos(\ln\sqrt{2t+1}) + C_3(2t+1)\sin(\ln\sqrt{2t+1})$

    (iii) $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^3e^t$ *Em.:* $C_1t^2 + C_2t + te^t$

17. (i) Izan bedi $y' = p(t) + q(t)y + r(t)y^2$ Riccatiren ekuazio diferentziala, p, q, r funtzioak I tartean jarraituak izanik. Froga ezazu emandako ekuazio diferentzialean, $t_0 \in I$ hartuz,

$$w = \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} q(s)ds\Big)y$$

ordezkapena eginez, $w' = a(t) + b(t)w^2$ ekuazioa lortzen dela.

Azken ekuazio diferentzialean, $-bw = \frac{z'}{z}$ aldaketa eginez, frogatu honako era autoadjuntuan idatzitako ekuazio diferentzial lineal hau dugula:

$$\Big(\frac{1}{b}z'\Big)' + az = 0.$$

(ii) Alderantziz, froga ezazu $(ry')' + py = 0$ ekuazio diferentzialean $z = -r\frac{y'}{y}$ ordezkapena eginez, Riccatiren $z' - \frac{|}{r}z^2 - p = 0$ ekuazioa lortuko dela.

(iii) Ebatz itzazu honako ekuazio hauek (i) atala erabiliz:

(a) $y' + y^2 - 1 = 0$ *Em.:* $y(t) = 1$, $y(t) = \dfrac{Ce^t - e^{-t}}{Ce^t + e^{-t}}$

(b) $t^2y' - 2ty + t^2y^2 + 2 = 0$ *Em.:* $y(t) = 1/t$, $y(t) = \dfrac{C + 2t}{Ct + t^2}$

18. Izan bedi $y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$ ekuazio diferentziala. Teorian ikusi den bezala, $y = uz$ idatziz eta u egoki bat aukeratuz, z forma normalean idatzitako bigarren ordenako ekuazio diferentzial baten soluzioa da, hots, $z'' + q(t)z = 0$ motako ekuazio baten soluzioa. Hori erabiliz, ebatz itzazu honako ekuazio hauek:

(i) $y'' - 2ty' + (t^2 + 1)y = e^{\frac{t^2+2t}{2}}$ *Em.:* $y(t) = e^{t^2/2}\big(C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t + \frac{1}{3}e^t\big)$

(ii) $t^2y'' - t(2t + 3)y' + (t^2 + 3t + 3)y = (6 - t^2)e^t$

Em.: $y(t) = e^t(C_1t^3 + t^2 + C_2t + 2)$

4. gaia

Ekuazio diferentzialen ebazpena berretura-serieen bidez

4.1 Berretura-serieak. Funtzio analitikoak

Lehenengo eta behin, berretura-serieen konbergentziari buruzko emaitza ezagun batzuk errepasatuko ditugu.

Definizioa. Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zenbaki errealen segida.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{4.1.1}$$

funtzio-seriea x_0 *puntuan zentratutako berretura-seriea* dela diogu.

4.1 proposizioa. *Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ eta $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Orduan,*

(i) $\Lambda = 0$ *baldin bada, (4.1.1) berretura-seriea absolutuki konbergentea da $\mathbb{R}$ osoan eta uniformeki konbergentea $\mathbb{R}$-ren azpimultzo trinkoetan.*

(ii) $\Lambda = +\infty$ *bada, (4.1.1) berretura-seriea dibergentea da $x \neq x_0$ guztietarako.*

(iii) $0 < \Lambda < \infty$ *baldin bada, (4.1.1) berretura-seriea absolutuki konbergentea da $\left(x_0 - \frac{1}{\Lambda}, x_0 + \frac{1}{\Lambda}\right)$ tartean, absolutuki uniformeki konbergentea da $|x - x_0| \leq \rho$ tartean, $\rho < \frac{1}{\Lambda}$ guztietarako, eta dibergentea da $|x - x_0| > \frac{1}{\Lambda}$ bada.*

Definizioa. Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ eta $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$. $r = \frac{1}{\Lambda}$ (4.1.1) berretura-seriearen *konbergentzia-erradioa* dela esaten da, eta $(x_0 - r, x_0 + r)$ seriearen *konbergentzia-tartea* da.

4.2 proposizioa. *Izan bitez* $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $r > 0$ *(4.1.1) berretura-seriearen konbergentzia-erradioa eta*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Orduan,

(i) f *funtzioa jarraitua da* $|x - x_0| < r$ *tartean.*

(ii) f *nahi den bezainbeste aldiz deribagarria da* $|x - x_0| < r$ *tartean, eta* $k \in \mathbb{N}$ *guztietarako*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k}, \quad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Ondorioz,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall\, n = 0, 1, \dots$$

(iii) f *integragarria da* $[x_0, x]$ *edo* $[x, x_0]$ *tartean* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ *guztietarako eta*

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}, \quad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Izan bedi orain f funtzioa x_0 puntuan nahi den bezainbeste aldiz deribagarria. Orduan, f-ren x_0 puntuko Taylorren seriea idatz dezakegu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Serie hau konbergentea izan daiteke $|x - x_0| < r$ moduko tarte batean, baina bere baturak ez du zertan f funtzioa izan.

Definizioa. Izan bitez $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $x_0 \in I$. f funtzioa x_0 *puntuan analitikoa* dela esaten da. baldin eta existitzen badira $r > 0$ eta $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ non

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

den.

Modu berean, izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $(t_0, x_0) \in D$. f funtzioa (t_0, x_0) *puntuan analitikoa* dela esango dugu, baldin eta existitzen badira $r > 0$ eta $A_{n,m} \in \mathbb{R}$, $n, m = 0, 1, \dots,$ non

$$f(t, x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m}\, (t - t_0)^n (x - x_0)^m, \quad \forall\, (t, x)\colon |t - t_0| < r, |x - x_0| < r$$

den.

Adibidez, polinomioak, e^x , $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioak analitikoak dira puntu guztietan. $\dfrac{1}{1-x}$ analitikoa da $(-1,1)$ tarteko puntuetan.

Argi denez, f analitikoa bada x_0 puntuan, f haren Taylorren seriearen batura izango da; hau da, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ da $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako.

4.3 proposizioa. *Funtzio analitikoek propietate hauek dituzte:*

(i) Izan bitez $f, g\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitikoak $x_0 \in I$ puntuan. Orduan, $f+g$ eta fg analitikoak dira x_0-n, eta $g(x_0) \neq 0$ bada, f/g analitikoa da x_0 puntuan.

(ii) g funtzioa x_0 puntuan eta f funtzioa $g(x_0)$ puntuan analitikoak badira, orduan, $f \circ g$, analitikoa da x_0 puntuan.

(iii) Berretura-serie baten batura funtzioa analitikoa da bere konbergentzia-tartearen puntu guztietan.

4.2 Lehen ordenako ekuazio diferentzialak

Har dezagun honako Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} x' = 1 + \dfrac{t}{1-x}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Suposa dezagun problema horren soluzioa $t_0 = 0$ puntuan zentratutako berretura-serie baten bidez adieraz daitekeela; hau da, existitzen dela $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ non

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

problemaren soluzioa den. $x(0) = 0$ denez, $a_0 = 0$ da. Gainera, berretura-seriearen deribatua deribatuen seriea denez,

$$x' = a_1 + 2a_2 t + 2a_3 t^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

Bestalde, $|x| < 1$ bada,

$$\begin{aligned} \frac{t}{1-x} =& t(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ =& t + t(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots) + t(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)^2 + \dots \end{aligned}$$

Beraz, $x' = 1 + \dfrac{t}{1-x}$ bete dadin,

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots \\ & \quad = 1 + t + t(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots) + t(a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots)^2 + \dots \end{aligned}$$

eta t^n-ren bi ataletako koefizienteak berdinduz $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako,

$$\begin{aligned}
a_1 =& 1,\\
2a_2 =& 1 \implies a_2 = 1/2,\\
3a_3 =& a_1 \implies a_3 = 1/3,\\
4a_4 =& a_2 + a_1^2, \implies a_4 = \frac{1/2+1}{4} = \frac{3}{8},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hori ikusita, badirudi seriearen koefiziente guztiak aurki ditzakegula, eta horrela x soluzioa lortu. Baina emandako pausoak justifikatu egin behar dira.

Izan bedi honako Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} y' = g(t,y),\\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

non g analitikoa den (t_0, y_0) puntuan. Honako aldaketa hau eginez:

$$x(t) = y(t+t_0) - y_0,$$

eta

$$f(t,x) = g(t+t_0, x+y_0)$$

izendatuz,

$$\begin{cases} x' = f(t,x),\\ x(0) = 0, \end{cases}$$

Cauchyren problema lortzen dugu, non f funtzioa $(0,0)$ puntuan analitikoa den.

Hau da, Cauchyren problema batean translazio egoki bat eginez, $x(0) = 0$ hasierako baldintza duen beste Cauchyren problema baliokide bat lor daiteke.

4.4 teorema. *Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analitikoa $(0,0)$ puntuan. Orduan,*

$$\begin{cases} x' = f(t,x),\\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Cauchyren problemaren soluzio bakarra analitikoa da $t_0 = 0$ puntuan.

(4.2.1) problemaren soluzioa analitikoa denez, existitzen dira $\delta > 0$ eta $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ non

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < \delta \text{ bada.}$$

Gainera, $a_0 = x(0) = 0$ da eta

$$a_n = \frac{x^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Kontuan izanda x (4.2.1) problemaren soluzioa dela,

$$\begin{aligned} x'(t) = f(t,x(t)) &\implies a_1 = x'(0) = f(0,x(0)) = f(0,0), \\ x''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) &\implies a_2 = \frac{x''(0)}{2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, f(0,0)\Big) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bestalde, f funtzioa $(0,0)$ puntuan analitikoa denez, existituko dira $A_{n,m}$, $n,m = 0,1\ldots$ eta $\rho > 0$ non

$$f(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m}\, t^n x^m, \quad |t| < \rho, |x| < \rho \text{ badira.}$$

Hemen,

$$A_{n,m} = \frac{1}{n!m!}\frac{\partial^{n+m} f}{\partial t^n \partial x^m}(0,0), \quad \forall\, n,m = 0,1,\ldots,$$

beraz, x funtzioaren a_n koefizienteak f-ren $A_{n,m}$ koefizienteen bidez kalkula daitezke.

Oharra. Aurreko metodoak x-ren koefizienteak kalkulatzeko modu bat ematen digu, baina praktikan hasierako koefiziente batzuk kalkulatu ahal izango ditugu soilik, eta, horrela, x-ren hurbilketa bat eman;

$$x(t) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n t^n.$$

4.3 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa. Puntu erregularrak

Definizioa. Izan bitez $a,b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitikoak $t_0 \in I$ puntuan. Orduan, t_0 puntua

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{4.3.1}$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren *puntu erregularra* dela esaten da. Bestela, t_0 (4.3.1) ekuazioaren *puntu singularra* da.

Definizioa. Izan bitez $a,b,A,B\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak $t_0 = 0 \in I$ puntuan analitikoak, eta izan bedi $r > 0$ non $|t| < r$ bada

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, & A(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \\ b(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, & B(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n \end{aligned}$$

diren, $\{a_n\}, \{b_n\}, \{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathbb{R}$ izanik. Baldin eta

$$|a_n| \leq A_n, \quad |b_n| \leq B_n, \quad \forall\, n = 0, 1, \ldots$$

badira, orduan,

$$x'' - A(t)x' - B(t) = 0$$

ekuazio diferentziala (4.3.1) ekuazioaren *maiorantea* dela diogu.

4.5 lema. *Izan bitez $a, b, A, B\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak $t_0 = 0 \in I$ puntuan analitikoak eta $x'' - A(t)x' - B(t)x = 0$ (4.3.1) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren maiorantea. Izan bitez $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$, x funtzioa*

$$\begin{cases} x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \\ x(0) = c_0, \ x'(0) = c_1 \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Cauchyren problemaren soluzioa eta y funtzioa

$$\begin{cases} y'' - A(t)y' - B(t)y = 0, \\ y(0) = |c_0|, \ y'(0) = |c_1| \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Cauchyren problemaren soluzioa. Baldin eta y analitikoa bada $t_0 = 0$ puntuan, orduan, x ere analitikoa da $t_0 = 0$ puntuan.

Froga. A eta B analitikoak direnez $t_0 = 0$ puntuan, existitzen dira $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ eta $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ zenbaki errealen segidak eta $R > 0$ non

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n, \quad |t| < R \text{ bada.}$$

y (4.3.3) problemaren soluzio analitikoa denez $t_0 = 0$ puntuan, existitzen da $\{d_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ non

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \quad |t| < R \text{ bada.}$$

Orduan,

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n d_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} t^n, \\
y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) d_{n+2} t^n, \\
A(t)y'(t) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n\Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} t^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} A_k (n+1-k) d_{n+1-k}\Big) t^n, \\
B(t)y(t) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n\Big) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} B_k d_{n-k}\Big) t^n,
\end{aligned}$$

Ekuazio diferentzialean ordezkatuz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)d_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} A_k(n+1-k)d_{n+1-k}\Big)t^n$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} B_k d_{n-k}\Big)t^n = 0.$$

Berretura-seriea nulua izan dadin, koefiziente guztiek nuluak izan behar dute. Horrela:

$$d_{n+2} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\big(A_k(n+1-k)d_{n+1-k} + B_k d_{n-k}\big)}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 0.$$

Izan bitez, orain,

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad |t| < r \text{ bada},$$

eta $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ izanik eta

$$c_{n+2} = -\frac{\sum_{k=0}^{n}\big(a_k(n+1-k)c_{n+1-k} + b_k c_{n-k}\big)}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 0.$$

$|a_n| \leq A_n$ eta $|b_n| \leq B_n$ direnez $n = 0, 1 \ldots$ guztietarako,

$$|c_0| = d_0, \quad |c_1| = d_1 \ \text{ eta } \ |c_{n+2}| \leq |d_{n+2}|, \quad \forall\, n = 0, 1, \ldots$$

Orduan, $\sum d_n t^n$ konbergentea denez $|t| < R$ tartean, $\sum c_n t^n$ ere konbergentea da $|t| < R$ tartean; hau da, x analitikoa da $t_0 = 0$ puntuan, eta, aurreko kalkuluaren arabera, x (4.3.2) problemaren soluzioa da. □

4.6 teorema. *Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio analitikoak $t_0 \in I$ puntuan, haien t_0 puntuan zentratutako berretura-serieen konbergentzia-erradioak r_1 eta r_2 izanik, hurrenez hurren. Orduan, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ guztietarako,*

$$\begin{cases} x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \\ x(t_0) = c_0, \\ x'(t_0) = c_1 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Cauchyren problemak t_0 puntuan analitikoa den soluzio bat eta bakarra du; hau da, existitzen da $\{c_n\}_{n=2}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ non

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n, \quad |t-t_0| < R = \min\{r_1, r_2\} \text{ bada.}$$

Froga. Orokortasunik galdu gabe, suposa dezakegu $t_0 = 0$ dela. Izan bitez

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < r_1 \text{ bada,}$$
$$b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad |t| < r_2 \text{ bada.}$$

Existentzia eta bakartasunaren teoremak ziurtatzen du (4.3.4) problemak soluzio bat eta bakarra duela, x. Frogatu behar dugu x analitikoa dela $t_0 = 0$ puntuan, eta, horretarako, ekuazio diferentzialaren soluzio analitikoa duen maiorante bat bilatuko dugu.

Izan bedi T non $0 < T < \min\{r_1, r_2\}$. $\sum a_n T^n$ eta $\sum b_n T^n$ absolutuki konbergenteak direnez, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n T^n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n T^n = 0$ eta, ondorioz, existitzen da $M > 0$ non

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{M}{T^n}, \quad \forall\, n \geq 0. \tag{4.3.5}$$

Izan bedi t non $|t| < T$ den. Orduan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\Big(\frac{t}{T}\Big)^n = M\frac{1}{1-\dfrac{t}{T}} = \frac{MT}{T-t}, \quad |t| < T \text{ bada.}$$

Deribatuz eta T-rekin biderkatuz:

$$T\Big(\frac{MT}{T-t}\Big)' = \frac{MT^2}{(T-t)^2} = T\Big(\sum_{n=0}^{\infty} M\Big(\frac{t}{T}\Big)^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} M(n+1)\Big(\frac{t}{T}\Big)^n.$$

(4.3.5) desberdintzatik ondorioztatzen da

$$y'' - \frac{MT}{T-t}y' - \frac{MT^2}{(T-t)^2}y = 0$$

gure ekuazio diferentzialaren maiorante bat dela. Ikus dezagun maiorante horrek soluzio analitiko bat duela. $s = T - t$ aldagai-aldaketa eginez, eta $u(s) = y(T-s) = y(t)$ izendatuz,

$$u'' + \frac{MT}{s}u' - \frac{MT^2}{s^2}u = 0 \iff s^2u'' + MTsu' - MT^2u = 0$$

Eulerren ekuazio homogeneoa dugu; beraz, haren soluzioak s^α modukoak dira, non

$$\alpha(\alpha-1) + MT\alpha - MT^2 = 0 \iff \alpha^2 + (MT-1)\alpha - MT^2 = 0$$
$$\iff \alpha = \frac{1 - MT \pm \sqrt{(MT-1)^2 + 4MT^2}}{2}.$$

$(MT-1)^2 + 4MT^2 > 0$ denez, bi erro erreal ditugu, α_1, α_2, eta soluzio orokorra honako hau da:

$$y(t) = C_1(T-t)^{\alpha_1} + C_2(T-t)^{\alpha_2}.$$

$(T-t)^\alpha$ funtzioa analitikoa da $t_0 = 0$ puntuan, haren berretura-seriezko garapena konbergentea delarik $|t| < T$ tartean, $\alpha \in \mathbb{R}$ guztietarako; beraz, y ere analitikoa da $t_0 = 0$ puntuan.

4.5 lemaren arabera, ekuazio diferentzial maioranteak soluzio analitiko bat duenez, (4.3.4) problemak ere $t_0 = 0$ puntuan analitikoa den soluzioa du, eta aurrekoa $T < \min\{r_1, r_2\}$ guztietarako egin daitekeenez, soluzio analitiko horren konbergentzia-erradioa $\min\{r_1, r_2\}$ da. □

4.7 teorema. *Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio analitikoak $t_0 \in I$ puntuan, haien t_0 puntuan zentratutako berretura-serieen konbergentzia-erradioen minimoa $r > 0$ izanik. Orduan, existitzen dira t_0 puntuan analitikoak diren*

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{4.3.6}$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren bi soluzio linealki independente, eta, ondorioz, (4.3.6) ekuazioaren soluzio guztiak analitikoak dira t_0 puntuan. Gainera, t_0 puntuan zentratutako soluzioen berretura-serieen konbergentzia-erradioa r da.

Froga. 4.6 teoremaren arabera, existitzen dira x_1 eta x_2 t_0 puntuan analitikoak non

$$\begin{cases} x_1'' + a(t)x_1' + b(t)x_1 = 0, \\ x_1(t_0) = 1, \\ x_1'(t_0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2'' + a(t)x_2' + b(t)x_2 = 0, \\ x_2(t_0) = 0, \\ x_2'(t_0) = 1. \end{cases}$$

Hau da, x_1 eta x_2 (4.3.6) ekuazio diferentzialaren soluzioak dira. Gainera,

$$W(x_1, x_2)(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

denez, linealki independenteak dira. □

Adibidea. Ebatziko dugu $x'' + x = 0$ ekuazio diferentziala $t_0 = 0$ puntuan zentratutako berretura-serieen bidez.

$a(t) = 0$ eta $b(t) = 1$ funtzio konstanteak $\mathbb{R}$ osoan analitikoak dira; beraz, $t_0 = 0$ puntua ekuazioaren puntu erregularra da. Topa ditzagun soluzioaren $t_0 = 0$ puntuan zentratutako berretura-seriearen koefizienteak.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \\ x'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n, \\ x''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} t^n. \end{aligned}$$

Ekuazioan ordezkatuz,

$$x'' + x = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0.$$

t^n-ren koefizientea 0-rekin berdinduz $n = 0, 1\ldots$ guztietarako, $\{c_n\}$ segidako elementuek egiaztatzen duten errepikapen-formula lortuko dugu:

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

hots, c_0, c_1 edozein bi zenbaki erreal izan daitezke, eta

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 0.$$

Indize bikoitiak eta bakoitiak desberdinduz, $k \geq 1$ guztietarako,

$$\begin{aligned} c_{2k} &= -\frac{c_{2k-2}}{2k(2k-1)} = \frac{c_{2k-4}}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)} = \cdots = (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!}, \\ c_{2k+1} &= -\frac{c_{2k-1}}{(2k+1)2k} = \frac{c_{2k-3}}{(2k+1)2k(2k-1)(2n-2)} = \cdots = (-1)^k \frac{c_1}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Bi soluzio linealki independenteak aurkitzeko, c_0 eta c_1 koefizienteen balioak finkatuko ditugu.

- $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ hartuz,

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad c_{2k+1} = 0, \quad \forall\, k \geq 1,$$

  beraz,

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cos t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

- $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ hartuz,

$$c_{2k} = 0, \quad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad \forall\, k \geq 1,$$

  eta, ondorioz,

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra honako hau da:

$$x(t) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + C_2 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Adibidea. Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$. Honako ekuazio diferentzial hau,

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + \lambda x = 0,$$

Legendreren ekuazioa da.

$$a(t) = -\frac{2t}{1-t^2}, \qquad b(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}$$

funtzioak $t_0 = 0$-n analitikoak dira, haien berretura-serieen konbergentzia-erradioa $r = 1$ izanik. Beraz, Legendreren ekuazioaren soluzioak analitikoak dira $t_0 = 0$ puntuan, haien berretura-serieak, gutxienez, $|t| < 1$ tartean konbergenteak izanik. Izan bedi

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \\
x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}, \\
x''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n.
\end{aligned}$$

Ekuazio diferentzialean ordezkatuz,

$$\begin{aligned}
&(1-t^2)x'' + 2tx' + \lambda x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n - t^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n t^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0.
\end{aligned}$$

t^n-ren koefizientea 0-rekin berdinduz $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako,

$$\begin{aligned}
t^0 &: \ 1 \cdot 2 \cdot c_2 + \lambda c_0 = 0, \\
t^1 &: \ 2 \cdot 3\, c_3 - 2 \cdot 1 c_1 + \lambda c_1 = 0, \\
t^n, n \geq 2 &: \ (n+1)(n+2) c_{n+2} - (n-1) n c_n - 2n c_n + \lambda c_n = 0.
\end{aligned}$$

Hau da,

$$\begin{cases}
c_2 = -\dfrac{\lambda c_0}{2}, \\
c_3 = \dfrac{(2-\lambda) c_1}{6}, \\
c_{n+2} = \dfrac{(n^2+n-\lambda) c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0.
\end{cases}$$

$c_0 = 1$ eta $c_1 = 0$ badira, seriearen indize bakoitiko koefizienteak nuluak dira, eta $c_0 = 0$ eta $c_1 = 1$ badira, aldiz, indize bikoitikoak anulatzen dira. Horrela, bi soluzio linealki independente lortzen dira: batean, soilik t-ren berretura bikoitiak agertzen dira berretura-seriezko adierazpenean, eta bestean, berretura bakoitiak. Bi serieak konbergenteak dira, gutxienez, $|t| < 1$ tartean.

Existitzen bada $k \in \mathbb{N}$ non $\lambda = k(k+1)$ den, orduan,

$$c_{k+2} = \frac{k^2 + k - k(k+1)}{(k+1)(k+2)} = 0.$$

Beraz, k bikoitia bada, $c_{2n} = 0$ izango da $2n \geq k+2$ guztietarako, eta berretura bikoitien seriea $c_0 + c_2 t^2 + c_4 t^4 + \cdots + c_k t^k$ k mailako polinomioa da. Era berean, k bakoitia bada, soluzio polinomiko bat existitzen da, $c_1 t + c_3 t^3 + \ldots, + c_k t^k$. Legendreren ekuazioaren soluzio polinomikoei *Legendreren polinomioak* esaten zaie.

$\lambda \neq k(k+1)$ bada, $k \in \mathbb{N}$ guztietarako, Legendreren ekuazioaren soluzioei *Legendreren funtzioak* deritze, eta ez dira funtzio elementalak.

Adibidea. Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$. Honako ekuazio diferentzial hau

$$x'' - 2tx' + \lambda x = 0$$

Hermite-ren ekuazioa da.

$a(t) = -2t$ eta $b(t) = \lambda$ funtzioak analitikoak direnez $\mathbb{R}$ osoan, $t_0 = 0$ Hermiteren ekuazioaren puntu erregularra da. Aurreko adibidean bezala,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

bada, ekuazioan ordezkatuz,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0.$$

t^0-ren koefizientea 0-rekin berdinduz,

$$2 \cdot 1 \cdot c_2 + \lambda c_0 = 0 \implies c_2 = -\frac{\lambda}{2} c_0,$$

eta t^n-ren koefizienteak ere nulua izan behar duenez $n \geq 1$ guztietarako,

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} + (\lambda - 2n) c_n = 0 \implies c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Horrela, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ hartuz, berretura bikoitietako serie bat lortzen da; eta $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ hartuz, soluzioaren seriean berretura bakoitiak soilik agertzen dira.

Existitzen bada $k \in \mathbb{N}$ non $\lambda = 2k$ den, $c_{2k+2} = 0$ denez, soluzio polinomikoak agertzen dira; *Hermiteren polinomioak*, hain zuzen ere.

4.4 Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoa. Puntu singular erregularrak

Definizioa. Izan bitez $a, b \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $t_0 \in \mathbb{R}$

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{4.4.1}$$

ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren puntu singularra. Baldin eta $(t - t_0)a(t)$ eta $(t - t_0)^2 b(t)$ funtzioak t_0 puntuan analitikoak badira, orduan, t_0 puntua (4.4.1) ekuazio diferentzialaren *puntu singular erregularra* dela esaten da.

Adibidea. $t_0 = 0$ Eulerren bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren puntu singularra da. Izan ere, Eulerren bigarren ordenako ekuazioa honako hau da:

$$t^2 x'' + a_1 t x' + a_2 x = 0, \quad t > 0,$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ izanik. Kasu horretan, $ta(t) = a_1$ eta $t^2 b(t) = a_2$ funtzio konstanteak dira, beraz, analitikoak $t_0 = 0$ puntuan. Dakigunez, ekuazio horren soluzioak $x(t) = t^m$ edo $x(t) = t^m \ln t$ modukoak dira, $t > 0$ bada. m zenbakia erreala bada, soluzio horiek errealak dira.

Oro har, $t_0 = 0$ puntua (4.4.1) ekuazio diferentzial lineal homogeneoaren puntu singular erregularra bada, (4.4.1) ekuazioa t^2-rekin biderkatuz, honako hau dugu:

$$t^2 x'' + t^2 a(t) x' + t^2 b(t) x = 0.$$

$ta(t)$ eta $t^2 b(t)$ analitikoak direnez $t_0 = 0$ puntuan, existituko dira $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eta $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ zenbaki errealezko segidak eta $\delta > 0$ non

$$ta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad \text{eta} \qquad t^2 b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

diren $|t| < \delta$ bada. $t << 1$ bada,

$$ta(t) \sim a_0, \qquad t^2 b(t) \sim b_0$$

eta (4.4.1) ekuazio diferentziala konpara daiteke Eulerren ekuazio honekin

$$t^2 x'' + a_0 t x' + b_0 x = 0.$$

Beraz, pentsa dezakegu (4.4.1) ekuazioaren soluzioek Eulerren ekuazioen soluzioen antza izan dezaketela. Ikusiko dugu

$$x(t) = t^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad \text{edo} \qquad x(t) = t^m \ln t \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

moduko soluzioak izango ditugula, $m \in \mathbb{R}$ izanik.

Definizioa. Izan bitez $m \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ eta $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$ izanik.

$$x(t) = (t-t_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^{n+m}$$

adierazpenari t_0 puntuko *Frobenius-en serie* edo *berretura-serie orokortu* deritzo.

Oharra. Izan bitez $m \in \mathbb{R}$ eta $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$ berretura-seriea konbergentea bada $|t-t_0| < r$ moduko tarte batean, orduan, $(t-t_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$ Frobeniusen seriea konbergentea izango da $t_0 < t < t_0 + r$ bada. Izan ere, $m \in \mathbb{R}$ denez, $(t-t_0)^m$ ondo definituta egoteko, $|t-t_0| > 0$ izan behar da. Normalean, $t > t_0$ jotzen da.

Hala ere, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bada, $(t-t_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$ Frobeniusen seriea konbergentea da $|t-t_0| < r$ bada, $(t-t_0)^m$ ondo definituta dagoelako $t \in \mathbb{R}$ guztietarako.

4.8 teorema. *Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $t_0 \in \mathbb{R}$ (4.4.1) ekuazioaren puntu singular erregularra; hots, existitzen dira $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ eta $r > 0$ non, $|t-t_0| < r$ bada,*

$$(t-t_0)a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \qquad eta \qquad (t-t_0)^2 b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (t-t_0)^n. \tag{4.4.2}$$

Demagun existitzen direla $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_2 \leq m_1$ izanik non

$$m_i(m_i - 1) + m_i a_0 + b_0 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Orduan, (4.4.1) ekuazio diferentzialak Frobeniusen serie baten bidez adieraz daitekeen soluzio bat du, gutxienez; hau da, existitzen da $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$ izanik, non $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$ seriea $|t-t_0| < r$ tartean konbergentea den eta

$$x_1(t) = (t-t_0)^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n,$$

(4.4.1) ekuazioaren soluzioa den $t_0 < t < t_0 + r$ bada.

Izan bedi x_2 x_1-ekiko linealki independentea den (4.4.1) ekuazio diferentzialaren bigarren soluzio bat.

(i) *$m_1 - m_2 \neq 0, 1, 2, \ldots$ bada, x_2 Frobeniusen serie baten bidez adierazgarria da; hau da, existitzen da $\{d_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $d_0 \neq 0$ izanik, non $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(t-t_0)^n$ seriea $|t-t_0| < r$ tartean konbergentea den eta*

$$x_2(t) = (t-t_0)^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (t-t_0)^n,$$

(4.4.1) ekuazioaren soluzioa den $t_0 < t < t_0 + r$ bada.

(ii) $m_1 - m_2 = 0$ *bada, hots,* $m_2 = m_1 = m$*, ez da existitzen Frobeniusen serierik (4.4.1) ekuazio diferentzialaren soluzioa dena eta* x_1 *soluzioarekin linealki independentea. Kasu horretan,* x_2*-ren adierazpena mota honetakoa da:*

$$x_2(t) = x_1(t)\ln(t-t_0) + (t-t_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t-t_0)^n, \quad t_0 < t < t_0 + r, \tag{4.4.3}$$

$\{d_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *izanik,* $d_0 \neq 0$*.*

(iii) $m_1 - m_2 \in \mathbb{N}$ *bada, oro har, ezin da erabaki* x_2 *Frobeniusen serie baten bidez adierazgarria den. Batzuetan,* x_2 *Frobeniusen serie bat izango da, eta beste batzuetan ez. Bigarren kasu horretan,* x_2*-ren adierazpena (4.4.3) motakoa izango da. Beraz, orokorrean,* $m_1 - m_2 \in \mathbb{N}$ *bada,*

$$x_2(t) = Cx_1(t)\ln(t-t_0) + (t-t_0)^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t-t_0)^n, \quad t_0 < t < t_0 + r,$$

dugu, $d_0 \neq 0$ *izanik. Batzuetan* $C = 0$ *izango da, eta beste batzuetan* $C = 1$*.*

Froga. Orokortasunik galdu gabe, suposa dezakegu $t_0 = 0$ dela. Bilatuko ditugu Frobeniusen serieen bidez adieraz daitezkeen (4.4.1) ekuazio diferentzialaren soluzioak. Izan bitez $m \in \mathbb{R}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$ izanik, eta

$$x(t) = t^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m}. \tag{4.4.4}$$

(4.4.1) ekuazio diferentziala t^2-rekin biderkatuz,

$$t^2x'' + t^2a(t)x' + t^2b(t)x = 0.$$

(4.4.2) eta (4.4.4) erabiliz,

$$\begin{aligned}
t^2b(t)\,x(t) =&\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m}\Big) = t^m \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\Big)t^n,\\
t^2a(t)x' =&ta(t)\,tx' = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)t\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m}\Big)'\\
=&\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)c_n t^{n+m}\Big) = t^m \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k(m+n-k)c_{n-k}\Big)t^n\\
t^2x'' =&t^2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m}\Big)'' = t^m \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)c_n t^n.
\end{aligned}$$

(4.4.1) ekuazioan ordezkatuz,

$$
\begin{aligned}
t^2x'' + t^2a(t)x' + t^2b(t)x = t^m \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1)c_n t^n \\
+ t^m \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k(m+n-k)c_{n-k} \Big) t^n + t^m \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} \Big) t^n = 0,
\end{aligned}
$$

hau da,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+m)(n+m-1)c_n + \sum_{k=0}^{n} a_k(m+n-k)c_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k} \Big) t^n = 0.$$

t^0-ren koefizientea 0-rekin berdinduz,

$$m(m-1)c_0 + a_0 m c_0 + b_0 c_0 = 0$$

bete behar da, eta $c_0 \neq 0$ denez, m-k honako ekuazio honen soluzioa izan behar du:

$$f(m) = m(m-1) + a_0 m + b_0 = 0.$$

Bestalde, t^n-ren koefizienteak ere nulua izan behar du, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz,

$$
\begin{aligned}
\big((n+m)(n+m-1) + (m+n)a_0 + b_0 \big) c_n \\
+ \sum_{k=1}^{n} a_k(m+n-k)c_{n-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k} = 0. \quad (4.4.5)
\end{aligned}
$$

Izan bitez m_1, m_2 non $f(m_1) = f(m_2) = 0$ eta $m_1 \geq m_2$ diren. Orduan, $m = m_1$ hartuz (4.4.5) berdintzan, honako hau dugu:

$$f(m_1+n)c_n + \sum_{k=1}^{n} a_k(m_1+n-k)c_{n-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k} = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$f(m_1+n) \neq 0$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$c_n = -\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k(m+n-k)c_{n-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k}}{f(m_1+n)}, \qquad (4.4.6)$$

hau da,

$$x_1(t) = t^{m_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

non c_n (4.4.6) errepikapen-formularen bidez kalkulatzen den, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, (4.4.1) ekuazioaren soluzio bat da.

Orain, x_1-ekiko linealki independentea den beste soluzio bat aurkitu nahi dugu, eta horretarako m_2-rekin errepikatu nahi izango genuke m_1 balioarekin egindako prozesua. Zenbait kasu desberdindu behar ditugu.

(i) $m_1 - m_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ bada, $m_2 + n \neq m_1$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, beraz, $f(m_2+n) \neq 0$ eta $x_2(t) = t^{m_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n$ non $d_0 \neq 0$ den eta

$$d_n = -\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k(m_2 + n - k)c_{n-k} + \sum_{k=1}^{n} b_k c_{n-k}}{f(m_2 + n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(4.4.1) ekuazioaren soluzioa da. Gainera, x_1, x_2 linealki independenteak dira.

(ii) $m_1 = m_2$ bada, errepikapen-formularen bidez ezin da beste Frobeniusen serierik lortu, x_1-ekiko linealki independentea dena. Kasu horretan, x_2 (4.4.3) motako funtzioen artean bilatuko dugu.

(iii) $m_1 - m_2 = l \in \mathbb{N}$ bada, $f(m_2 + l) = 0$ da eta (4.4.5) errepikapen-formulan $m = m_2$ eta $n = l$ hartuz,

$$f(m_2 + l)d_l + \sum_{k=1}^{l} a_k(m_2 + l - k)c_{l-k} + \sum_{k=1}^{l} b_k c_{l-k} = 0$$

dugu. Bi gauza gerta daitezke:

- $\sum_{k=1}^{l} a_k(m_2 + l - k)c_{l-k} + \sum_{k=1}^{l} b_k c_{l-k} = 0$ bada, d_l edozein izan daiteke eta x_2 Frobeniusen serie bat da.
- $\sum_{k=1}^{l} a_k(m_2 + l - k)c_{l-k} + \sum_{k=1}^{l} b_k c_{l-k} \neq 0$ bada, d_l ezin da definitu eta x_2 ez da Frobeniusen serie bat; x_2 (4.4.3) itxurakoa izango da. $\square$

Oharra. Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $t_0 \in \mathbb{R}$ (4.4.1) ekuazio diferentzialaren puntu singular erregularra. Esan dugun bezala, existitzen dira $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eta $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ non

$$(t - t_0)a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots$$

eta

$$(t - t_0)^2 b(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \ldots.$$

Argi denez,

$$a_0 = \lim_{t \to t_0} (t - t_0)a(t) \quad \text{eta} \quad b_0 = \lim_{t \to t_0} (t - t_0)^2 b(t).$$

Definizioa. Izan bitez $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ (4.4.1) ekuazio diferentzialaren puntu singular erregularra, $a_0 = \lim_{t \to t_0} (t - t_0)a(t)$ eta $b_0 = \lim_{t \to t_0} (t - t_0)^2 b(t)$.

$$m(m - 1) + a_0 m + b_0 = 0$$

(4.4.1) ekuazio diferentzialaren t_0 puntuko *ekuazio erakuslea* dela diogu.

Adibidea. Ebatz dezagun

$$tx'' + (t - 6)x' - 3x = 0 \tag{4.4.7}$$

ekuazio diferentziala $t_0 = 0$ puntuaren inguruan.

$t_0 = 0$ (4.4.7) ekuazioaren puntu singular erregularra da, zeren eta $a(t) = \dfrac{t-6}{t}$ eta $b(t) = -\dfrac{3}{t}$ baitira; beraz $ta(t)$ eta $t^2b(t)$ lehen mailako polinomioak dira, analitikoak $t_0 = 0$-n. Ebatz dezagun (4.4.7) ekuazio diferentziala Frobeniusen serieen bidez. Izan bedi

$$x(t) = t^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m}.$$

Orduan,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) c_n t^{n+m-1}, \\ x''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) c_n t^{n+m-2}. \end{aligned}$$

(4.4.7) ekuazio diferentzialean ordezkatuz,

$$\begin{aligned} &tx'' + (t-6)x' - 3x \\ &\quad = \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)c_n t^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)c_n t^{n+m} \\ &\qquad\quad - 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)c_n t^{n+m-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m} \\ &\quad = t^m \Big(\big(m(m-1)c_0 - 6mc_0\big)t^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+m)(n+m-1)c_n t^{n-1} \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)c_n t^n - 6\sum_{n=1}^{\infty}(n+m)c_n t^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \Big) \\ &\quad = t^m \Big(m(m-7)c_0 t^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+m+1)(n+m)c_{n+1} t^n \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)c_n t^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+m+1)c_{n+1} t^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \Big) = 0. \end{aligned}$$

Lehenengo eta behin, topatuko ditugu m-ren balio onargarriak. t^{-1}-en koefizientea nulua izan dadin, m-k ekuazio erakuslearen soluzioa izan behar du:

$$m(m-7) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 = 7, m_2 = 0.$$

Beste koefizienteak nuluak izateko, $n \geq 0$ guztietarako,

$$\begin{aligned} &(n+m+1)(n+m)c_{n+1} + (n+m)c_n - 6(n+m+1)c_{n+1} - 3c_n \\ &\qquad\qquad = (n+m+1)(n+m-6)c_{n+1} + (n+m-3)c_n = 0 \end{aligned}$$

izan behar du. $m = m_1 = 7$ bada,

$$(n+8)(n+1)c_{n+1} + (n+4)c_n = 0 \implies c_{n+1} = -\frac{n+4}{(n+8)(n+1)}c_n, \quad \forall n \geq 0,$$

hau da, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako

$$\begin{aligned}
c_n =& -\frac{n+3}{(n+7)n}c_{n-1} = \dots \\
=&(-1)^n \frac{(n+3)(n+2)\dots 4}{(n+7)(n+6)\dots 8 \cdot n(n-1)\dots 2 \cdot 1}c_0 \\
=&(-1)^n \frac{(n+3)!7!}{3!(n+7)!n!}c_0.
\end{aligned}$$

$c_0 = \dfrac{3!}{7!}$ hartuz, (4.4.7) ekuazioaren lehen soluzio bat dugu:

$$x_1(t) = t^7 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{(n+7)!n!}t^n, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

$m_1 - m_2 = 7 \in \mathbb{N}$ denez, ezin dugu ziurtatu existitzen denik Frobeniusen serie baten bidez adieraz daitekeen beste soluzio bat, x_1-ekiko linealki independentea. Idatz dezagun $m = m_2 = 0$ baliorako errepikapen-formula.

$$(n+1)(n-6)d_{n+1} + (n-3)d_n = 0, \quad \forall\, n \geq 0$$

behar dugu. n-ri balioak emanez,

$$\begin{aligned}
n = 0\colon &\quad -6d_1 - 3d_0 = 0 \implies d_1 = -\frac{d_0}{2}, \\
n = 1\colon &\quad -10d_2 - 2d_1 = 0 \implies d_2 = -\frac{d_1}{5} = \frac{d_0}{10}, \\
n = 2\colon &\quad -12d_3 - d_2 = 0 \implies d_3 = -\frac{d_2}{12} = -\frac{d_0}{120}, \\
n = 3\colon &\quad -12d_4 = 0 \implies d_4 = 0, \\
n = 4\colon &\quad -10d_5 + d_4 = 0 \implies d_5 = \frac{d_4}{10} = 0, \\
n = 5\colon &\quad -6d_6 + 2d_5 = 0 \implies d_6 = \frac{d_5}{3} = 0, \\
n = 6\colon &\quad 0 \cdot d_7 + 3d_6 = 0.
\end{aligned}$$

$d_6 = 0$ denez, azken berdintza hori beti da egia, d_7 edozein izanik; beraz, $d_7 = 0$ har dezakegu eta, berriro errepikapen-formulan oinarrituta, $d_n = 0$ da $n \geq 7$ guztietarako; hau da, x_1-ekiko linealki independentea den bigarren soluzio bat honako hau da:

$$x_2(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 = d_0\Big(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{10} - \frac{t^3}{120}\Big), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ondorioz, (4.4.7) ekuazioaren soluzio orokorra hau da:

$$x(t) = c_0 t^7 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{(n+7)!n!} t^n + d_0 \Big(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{10} - \frac{t^3}{120} \Big), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

(4.4.7) ekuazioaren soluzio batzuk berretura-serieen bidez adieraz daitezke, eta beste batzuk soluzio polinomikoak dira.

4.4.1 Bessel-en ekuazioa

Definizioa. Izan bedi $p \geq 0$. Honako ekuazio hau:

$$x'' + \frac{1}{t} x' + \frac{t^2 - p^2}{t^2} x = 0, \tag{4.4.8}$$

Besselen p *ordenako ekuazio diferentziala* da.

Besselen ekuazioa fisika matematikoaren aplikazio anitzetan agertzen da.

$t_0 = 0$ Besselen ekuazioaren puntu singularra da, baina $ta(t) = 1$ eta $t^2 b(t) = t^2 - p^2$ analitikoak dira $t_0 = 0$-n, beraz, $t_0 = 0$ puntu singular erregularra da. Bila ditzagun soluzioak Frobeniusen serieen bidez. Izan bedi

$$x(t) = t^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m}, \quad c_0 \neq 0.$$

Orduan,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) c_n t^{n+m-1}, \\ x''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) c_n t^{n+m-2} \end{aligned}$$

adierazpenak (4.4.8) ekuazioan ordezkatuz,

$$\begin{aligned} x'' &+ \frac{1}{t} x' + \Big(1 - \frac{p^2}{t^2}\Big) x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) c_n t^{n+m-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) c_n t^{n+m-2} \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+m-2} = 0. \end{aligned}$$

t^m errepikatzen denez batugai guztietan, sinplifika daiteke. Gainera, t^{-2} eta t^{-1} berreturei dagozkien gaiak bereizita idatziz,

$$\begin{aligned}\big(m(m-1)c_0 + mc_0 - p^2c_0\big)t^{-2} + \big((m+1)mc_1 + (m+1)c_1 - p^2c_1\big)t^{-1} \\ + \sum_{n=2}^{\infty}\big((n+m)(n+m-1) + (n+m) - p^2\big)c_n t^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \\ = (m^2 - p^2)c_0 t^{-2} + \big((m+1)^2 - p^2\big)c_1 t^{-1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\big((n+m+2)^2 - p^2\big)c_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0\end{aligned}$$

bete behar da. $c_0 \neq 0$ denez, t^{-2}-ren koefizientea nulua izan dadin $m^2 - p^2 = 0$ izan behar du; hau da, $m_1 = p$ eta $m_2 = -p$ ekuazio erakuslearen soluzioak dira.

$m_1 = p$ balioari dagokion Frobeniusen seriearen koefizienteek honako hau bete behar dute:

$$\begin{aligned}&\big((p+1)^2 - p^2\big)c_1 = (2p+1)c_1 = 0 \implies c_1 = 0, \\ &\big((n+p+2)^2 - p^2\big)c_{n+2} + c_n = 0 \implies c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2p+2)}, \quad n \geq 0.\end{aligned}$$

$c_1 = 0$ denez, $c_n = 0$ da n bakoiti guztietarako. Aldiz, n bikoitia bada, $n = 2k - 2$,

$$\begin{aligned}c_{2k} &= -\frac{c_{2k-2}}{(2k)(2k+2p)} = \dots \\ &= (-1)^k \frac{c_0}{2k(2k-2)\dots 4\cdot 2(2k+2p)(2k+2p-2)\dots(2+2p)} \\ &= (-1)^k \frac{c_0}{2^k k(k-1)\dots 2\cdot 1\cdot 2^k(k+p)(k+p-1)\dots(1+p)} \\ &= (-1)^k \frac{c_0}{2^{2k}k!(p+k)(p+k-1)\dots(p+1)}, \qquad \forall k \geq 1.\end{aligned}$$

$p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bada, $c_0 = \dfrac{1}{2^p p!}$ hartuz, soluzio hau lortzen da:

$$\begin{aligned}J_p(t) &= t^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+p}k!(p+k)(p+k-1)\dots(p+1)p!} t^{2k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+p}, \quad \forall\, t > 0.\end{aligned}$$

eta p *ordenako eta lehen klaseko Besselen funtzio* deritzo. Besselen funtziorik erabilgarrienak $p = 0$ eta $p = 1$ ordenakoak dira,

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n} \qquad \text{eta} \qquad J_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+1}.$$

J_0 deribatuz,

$$\begin{aligned}
J_0'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2n\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n-1}\frac{1}{2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}(n+1)\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!n!}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+1} = -J_1(t).
\end{aligned}$$

$p!$ adierazpena soilik dago definituta p zenbaki osoa eta ez-negatiboa bada. Gainerako balioetarako, Eulerren Gamma funtzioaren bidez adierazten dira Besselen funtzioen adierazpenetan agertzen diren biderkadurak.

Definizioa. Izan bedi $p \geq 0$.

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt$$

Eulerren Gamma funtzioa dela diogu.

Erraz froga daiteke $\Gamma(1) = 1$ dela eta $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Bereziki, $n \in \mathbb{N}$ bada,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!.$$

Beraz, $p > 0$ bada, honela idazten da (4.4.8) ekuazioaren lehen soluzioa, hau da, Besselen p ordenako eta lehen klaseko funtzioa:

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n+p}, \quad \forall\, t > 0.$$

$m_2 = -p$ denez, $m_1 - m_2 = 2p$; beraz, J_p-rekiko linealki independentea den bigarren soluzioa, $m_2 = -p$ balioari dagokiona, Frobeniusen seriea izango dela ziurta dezakegu $p \neq 0$ eta $2p$ zenbaki arrunta ez bada, soilik.

- $2p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ bada, $m = -p$ hartuz errepikapen-formulan,

  $$\begin{aligned}
  &\big((1-p)^2 - p^2\big)c_1 = (1-2p)c_1 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0, \\
  &\big((n-p+2)^2 - p^2\big)c_{n+2} + c_n = 0 \;\Rightarrow\; c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n-2p+2)}, \; n \geq 0.
  \end{aligned}$$

  Beraz, bigarren soluzioa hau da:

  $$J_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-p+1)}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{2n-p}, \quad \forall\, t > 0.$$

- $p = 0$ bada, ezin da lortu J_0-rekiko linealki independentea den beste soluziorik. Besselen bigarren klaseko funtzioak forma hau du

$$Y_0(t) = J_0(t) \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \quad \forall\, t > 0.$$

Deribatuz,

$$\begin{aligned}
Y_0'(t) =& J_0'(t) \ln t + J_0(t) \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n t^{n-1} \\
Y_0''(t) =& J_0''(t) \ln t + 2J_0'(t) \frac{1}{t} - J_0(t) \frac{1}{t^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n t^{n-2},
\end{aligned}$$

eta Besselen $p = 0$ ordenako ekuazioan ordezkatuz, eta kontuan izanik J_0 ekuazio horren soluzioa dela,

$$\begin{aligned}
t^2 Y_0'' + tY_0' + t^2 Y_0 = & \; t^2 J_0''(t) \ln t + 2tJ_0'(t) - J_0(t) + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n t^n \\
& + tJ_0'(t) \ln t + J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n t^n + J_0(t) \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^{n+2} \\
= & \; 2tJ_0'(t) + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n d_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} t^n = 0.
\end{aligned}$$

Berdintza horretatik d_n koefizienteetarako errepikapen-formula lor daiteke.

- $p = 1/2$ bada, koefizienteetarako ekuazioak honako hauek dira:

$$\begin{aligned}
&(1 - 2p)c_1 = 0 \iff 0 = 0, \\
&(n + 2)(n + 2 - 2p)c_{n+2} + c_n = (n + 2)(n + 1)c_{n+2} + c_n = 0.
\end{aligned}$$

Beraz, c_1 edozein izan daiteke. $c_1 = 0$ hartuz, $c_n = 0$ izango da n bakoitia bada, eta $n = 2k - 2$ bada,

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{2k(2k-1)} = \cdots = (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!},$$

hau da, bigarren Frobeniusen serie bat lortu dugu, $J_{1/2}$-rekiko linealki independentea,

$$J_{-1/2}(t) = t^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}, \quad \forall\, t > 0.$$

Kontura gaitezen

$$J_{1/2}(t) = t^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}, \quad \forall\, t > 0.$$

dela.

- $p = 1$ bada, $(1-2p)c_1 = 0$ ekuazioa $-c_1 = 0$ gelditzen da; hots, $c_1 = 0$ izan behar dugu nahitaez. Bestalde,

  $$(n+2)(n+2-2p)c_{n+2} + c_n = (n+2)nc_{n+2} + c_n = 0, \quad \forall n \geq 0$$

  ere bete behar da, baina $n = 0$ baliorako $c_0 = 0$ geratzen zaigu, eta kontraesan batera heltzen gara. Ondorioz, $p = 1$ baliorako ez dago J_1-ekiko linealki independentea den bigarren soluzio bat, Frobeniusen serie baten bidez adieraz daitekeena.

Orokorrean, $2p$ bakoitia bada, $p = 1/2$ kasurako gertatu den bezala, existitzen dira bi soluzio linealki independente, Frobeniusen serieen bidez adieraz daitezkeenak; eta $2p$ bikoitia bada, bakarrik soluzio bat aurkituko dugu Frobeniusen serie modura idatz daitekeena.

4.5 Infinituaren inguruko garapenak

Batzuetan,

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

ekuazio diferentzialaren soluzioak t aldagaiaren balio handietarako aztertu nahi dira, hau da, $|t| > r$ balioetarako. Kasu horretan, $s = \dfrac{1}{t}$ aldagai-aldaketa eginez, ekuazio diferentzial berriaren soluzioak s-ren balio txikietarako aztertu beharko dira, hau da, $s_0 = 0$ puntuaren inguruan.

$y(s) = x(1/s) = x(t)$ izendatuz,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = y'(s)\Big(-\frac{1}{t^2}\Big) = -s^2y'(s), \\ x'' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}\big(-s^2y'(s)\big) = -2s\frac{ds}{dt}y'(s) - s^2y''(s)\frac{ds}{dt} = 2s^3y'(s) + s^4y''(s), \end{aligned}$$

beraz,

$$\begin{aligned} x'' + a(t)x' + b(t)x &= s^4y'' + 2s^3y' + a(1/s)(-s^2y') + b(1/s)y \\ &= s^4y'' + \big(2s^3 - s^2a(1/s)\big)y' + b(1/s)y = 0 \\ &\iff y'' + \left(\frac{2}{s} - \frac{a(1/s)}{s^2}\right)y' + \frac{b(1/s)}{s^4}y = 0. \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bitez $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Honako ekuazio diferentzial lineal honetan:

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \tag{4.5.1}$$

$t = 1/s$ aldagai-aldaketa eginez, eta $y(s) = x(1/s)$ definituz, arestian ikusi dugun bezala, existitzen dira $A, B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non

$$y'' + A(s)y' + B(s)y = 0. \tag{4.5.2}$$

Infinituko puntua (4.5.1) ekuazioaren *puntu erregularra* dela diogu $s_0 = 0$ (4.5.2) ekuazioaren puntu erregularra bada.

Era berean, infinituko puntua (4.5.1) ekuazioaren *puntu singular erregularra* dela diogu $s_0 = 0$ (4.5.2) ekuazioaren puntu singular erregularra bada.

4.6 Ariketak

1. Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$. Ebatz ezazu

$$\begin{cases} (t^2+1)x'' + tx' - x = 0, \\ x(0) = a, \\ x'(0) = b \end{cases}$$

problema t-ren berretura-serieen bidez.

Em.: $x(t) = a + bt + a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}t^{2n}$

2. Ebatz ezazu berretura-serieen bidez

$$x'' - (1+t)x = 0$$

ekuazio diferentziala $t = 0$ puntuaren ingurune batean.

Em.: $x(t) = a_0\Big(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{30} + \dots\Big) + b_0\Big(t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{120} + \dots\Big)$

3. Kalkula ezazu

$$x'' + tx' + (2t-1)x = 0$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $t = 1$ balioaren ingurune batean.

Em.: $x(t) = a_0\big(1 - \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{(t-1)^3}{6} + \frac{(t-1)^4}{6} + \frac{(t-1)^5}{20} + \dots\big)$
$+b_0\big((t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{(t-1)^3}{6} + \frac{(t-1)^5}{12} + \dots\big)$

4. Aurki ezazu, berretura-serieen bidez,

$$(t^2+4)x'' + tx = 0$$

ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $t = 0$ puntuaren ingurune batean.

Em.: $x(t) = a_0\Big(1 - \frac{t^3}{24} + \frac{t^5}{320} + \frac{t^6}{2880} + \dots\Big) + a_1\Big(t - \frac{t^4}{48} + \frac{t^6}{480} + \dots\Big)$

5. *Chebyshev-en ekuazio diferentziala.* Izan bedi $\alpha \in \mathbb{R}$. Honako bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal honi,

$$(1-t^2)x'' - tx' + \alpha^2 x = 0,$$

Chebysheven ekuazioa esaten zaio.

(i) Kalkula itzazu ekuazioaren bi soluzio linealki independente $t = 0$ puntuaren inguruan (adierazi konbergentzia-eremua).

Em.: $x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\big(\frac{2k-\alpha}{2}\big)\Gamma\big(\frac{2k+\alpha}{2}\big)}{(2k)!}t^{2k}$, $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\big(\frac{2k+1-\alpha}{2}\big)\Gamma\big(\frac{2k+1+\alpha}{2}\big)}{(2k+1)!}t^{2k+1}$

(ii) Zehaztu α-ren balioak zeinentzat ekuazio diferentzialak soluzio polinomiko ez-nuluren bat duen. *Em.:* $\alpha \in \mathbb{Z}$

6. Aurkitu honako ekuazio diferentzial hauen puntu singularrak eta singular erregularrak:

   (i) $(t^2-4)^2x'' + (t-2)x' + x = 0$ *Em.:* $t = 2$ s. er.; $t = -2$ s. ez-er.

   (ii) $t^2(t+1)^2x'' + (t^2-1)x' + 2x = 0$ *Em.:* $t = -1$ s. er.; $t = 0$ s. ez-er.

   (iii) $(1-t^2)x'' - 2tx' + 30x = 0$ *Em.:* $t = -1$ s. er.; $t = 1$ s. er.

   (iv) $tx'' - 2tx' + 5x = 0$ *Em.:* $t = 0$ s. er.

7. *Laguerreren ekuazioa.* Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$tx'' + (1-t)x' + \lambda x = 0$$

   Laguerreren ekuazio diferentziala da.

   (i) Aztertu zenbat soluzio linealki independente adieraz daitezkeen $t_0 = 0$ puntuan zentratutako Frobeniusen serieen bidez, λ parametroaren balioen arabera.

   (ii) λ zenbakia osoa eta ez-negatiboa denean, Laguerreren ekuazioak soluzio polinomiko bat du. Aurki ezazu soluzio hori $\lambda = 2, 3$ balioetarako.

Em.: $L_2(t) = 1 - 2t + \dfrac{t^2}{2}$, $L_3(t) = 1 - 3t + \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{6}t^3$

8. Ebatz itzazu honako ekuazio diferentzial hauek $0 < t < r$ moduko tarte batean:

   (i) $3tx'' + x' - x = 0$

Em.: $x(t) = a_0\Big(t^{2/3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+2/3}}{n!5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}\Big) + b_0\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}\Big)$

   (ii) $tx'' + 3x' - x = 0$

Em.: $x(t) = (a_0 + \ln t)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2t^n}{n!(n+2)!} - \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t} + b_2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n-2}$,

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{n(n-2)} - \frac{2(n-1)}{n(n-2)n!(n-2)!},\ n \geq 3$$

   (iii) $2tx'' + (1+t)x' + x = 0$ *Em.:* $x(t) = a_0\sqrt{t}e^{-t/2} + b_0\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n n!}{(2n)!}t^n$

9. Aurki ezazu, $t_0 = 0$ puntuan zentratutako berretura-serieen bidez,

$$8t^2x'' + 10tx' + (t-1)x = 0$$

   ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra.

$$Em.:\ x(t) = a_0\sqrt[4]{t}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n n!(4n+3)(4n-1)\cdot\cdots\cdot 7}\Big)$$
$$+\frac{a_1}{\sqrt{t}}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n n!(4n-3)(4n-7)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 1}\Big)$$

10. *Besselen ekuazio diferentzial hiperbolikoa.* Izan bedi $\alpha \geq 0$.

$$x'' + \frac{1}{t}x' - \left(1 + \frac{\alpha^2}{t^2}\right)x = 0$$

ekuazio diferentziala Besselen ekuazio diferentzial hiperbolikoa da.

Zehaztu zenbat soluzio linealki independente adieraz daitezkeen $t_0 = 0$ puntuan zentratutako Frobeniusen serie bidez, $\alpha \geq 0$ parametroaren balioen arabera.

5. gaia

Sistema diferentzial linealak

5.1 Sarrera

Gai honetan, lehen ordenako n ekuazio diferentzialetako sistema linealen ebazpena aztertuko dugu, $n \in \mathbb{N}$ izanik.

Definizioa. Izan bitez $f_i \colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, jarraituak. Honako hau da *lehen ordenako n ekuazio diferentzialetako sistema* era esplizituan:

$$\begin{cases} x_1'(t) = & f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x_2'(t) = & f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ & \dots \\ x_n'(t) = & f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \tag{5.1.1}$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ eta $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ idatziz, sistema diferentzialaren forma bektoriala eman daiteke:

$$\vec{x}' = f(t, \vec{x}(t)).$$

Oharra. Forma esplizituan emandako n-garren ordenako ekuazio diferentzial bat badugu,

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

lehen ordenako n ekuazioko sistema diferentzial baliokide bat lor daiteke $x_i = y^{(i-1)}$ izendatuz. Horrela lortzen den sistema honako hau da:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Gauza bera egin daiteke ordena altuagoko sistema diferentzial bat baldin badugu.

Gai honetan, sistema diferentzial linealak aztertuko ditugu soilik, hau da, f_i funtzioak linealak izango dira $x_1, \dots, x_n$ aldagaietan.

Definizioa. Izan bitez $a_{ij}, b_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak $i, j = 1, \dots, n$ guztietarako.

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \tag{5.1.2}$$

n ekuazioko sistema diferentzial lineala dela diogu. $b_j \equiv 0$ bada, $j = 1, \dots, n$ guztietarako, sistema diferentziala *homogeneoa* dela diogu.

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^t$ eta

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

izendatuz, sistema diferentzialaren forma bektoriala honako hau da:

$$\vec{x}' = A(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}(t).$$

Adibidea. Honako hau:

$$\begin{cases} x' = 4tx - y + 2t - 1, \\ y' = (t+5)x + 2y - 7, \\ x(0) = 0, \ y(0) = 1, \end{cases}$$

bi ekuazioko sistema diferentzial lineal baten Cauchyren problema da. Forma bektoriala hau da:

$$\begin{cases} \vec{x}' = \begin{pmatrix} 4t & -1 \\ t+5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 2t-1 \\ -7 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

5.1 teorema. *Izan bitez $a_{ij}, b_i \colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak $i, j = 1, \dots, n$ guztietarako, $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^n$, $\vec{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^t$, $t \in I$ guztietarako, $t_0 \in I$ eta $\vec{\xi_0} \in \mathbb{R}^n$. Orduan,*

$$\begin{cases} \vec{x}' = A(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}(t), \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\xi_0} \end{cases}$$

Cauchyren problemak soluzio bat eta bakarra dauka I tartean definituta. Soluzio hori $\vec{x} = \vec{x}(t; t_0, \vec{\xi_0})$ idatzi ohi da, hasierako baldintzekiko menpekotasuna esplizituki adierazteko.

5.2 Sistema diferentzial lineal homogeneoak

Lehenengo eta behin, sistema diferentzial lineal homogeneoak nola ebazten diren ikusiko dugu. Izan bitez $\mathcal{M}(n)$ $n \times n$ ordenako matrize errealen multzoa eta $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ funtzio matriziala. Honako hau da lehen ordenako sistema diferentzial lineal homogeneo baten adierazpen bektoriala:

$$\vec{x}' = A(t) \cdot \vec{x}. \tag{5.2.1}$$

5.2 teorema. *Izan bedi $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ $n \times n$ ordenako funtzio matrizial e-rreal jarraitua. Orduan, (5.2.1) sistema diferentzial lineal homogeneoaren soluzioen multzoa n dimentsioko espazio bektoriala da, $V \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

Froga. Nabaria da (5.2.1) sistemaren soluzioen multzoa espazio bektoriala dela. Izan ere, $\vec{x}$ eta $\vec{y}$ (5.2.1) sistemaren soluzioak badira eta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ izendatuz,

$$\vec{z}' = \alpha\vec{x}' + \beta\vec{y}' = \alpha A(t) \cdot \vec{x} + \beta A(t) \cdot \vec{y} = A(t) \cdot \big(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\big) = A(t) \cdot \vec{z}.$$

Ikus dezagun V-ren dimentsioa n dela. Horretarako, n soluzio linealki independente aurkituko ditugu, eta ikusiko dugu beste edozein soluzio haien konbinazio lineala dela.

Izan bitez $t_0 \in I$ eta $\vec{e_i}$ $\mathbb{R}^n$-ren oinarri kanonikoko i-garren bektorea, $\vec{e_i} = (\delta_{ji})_{j=1}^n$, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako. Existentzia eta bakartasunaren toeremagatik, existitzen dira $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ non $i = 1, \ldots, n$ guztietarako

$$\begin{cases} \vec{x}_i' = A(t) \cdot \vec{x}_i, \\ \vec{x}_i(t_0) = \vec{e}_i. \end{cases}$$

$C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ badira,

$$\begin{aligned} & C_1\vec{x}_1(t) + \cdots + C_n\vec{x}_n(t) = 0, \quad \forall\, t \in I \\ & \qquad \Longrightarrow C_1\vec{x}_1(t_0) + \cdots + C_n\vec{x}_n(t_0) = 0 \\ & \qquad\quad \Longrightarrow C_1\vec{e}_1 + \cdots + C_n\vec{e}_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \ldots C_n = 0. \end{aligned}$$

Beraz, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ linealki independenteak dira. Bestalde, $\vec{x}$ (5.2.1) sistema diferentzialaren soluzioa bada, existitzen dira $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\xi}_0 = \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n.$$

Izan bedi $\vec{z} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n$. $\vec{z}$ sistema diferentzialaren soluzioa da, soluzioen konbinazio lineala delako. Gainera,

$$\vec{z}(t_0) = \alpha_1\vec{x}_1(t_0) + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n(t_0) = \alpha_1\vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{x}(t_0).$$

Hau da, $\vec{x}$ eta $\vec{z}$ Cauchyren problema beraren soluzioak dira. Existentzia eta bakartasunaren teoremaren arabera, $\vec{x} = \vec{z} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n$ eta, ondorioz, $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ V-ren oinarri bat da, $\dim V = n$ izanik. □

Definizioa. Izan bitez $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ jarraitua eta V (5.2.1) sistema diferentzial lineal homogeneoaren soluzioen multzoa. $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ V espazio bektorialaren oinarria bada, (5.2.1) sistema lineal homogeneoaren *oinarrizko soluzio-sistema* dela diogu, eta oinarrizko soluzio-sistemaren bektoreak zutabe gisa hartuz osatzen den matrizeari (5.2.1) sistema diferentzial homogeneoaren *oinarrizko matrize* deritzo.

$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ (5.2.1) sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema bada, eta $\vec{x}_i = (x_{1i}\ x_{2i}\ \ldots\ x_{ni})^t$ bada, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, orduan, $X\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ funtzio matriziala, non

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = (\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t))$$

den, (5.2.1) sistema diferentzialaren oinarrizko matrize bat da.

$\vec{x}$ (5.2.1) sistema diferentzialaren beste soluzio bat bada, orduan, existituko dira $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ non

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) =& C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + \cdots + C_n\vec{x}_n(t) \\ =& C_1 \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} + \cdots + C_n \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = X(t) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beraz, (5.2.1) sistema diferentzial lineal homogeneoaren soluzio orokorra honako hau da:

$$\vec{x}(t) = X(t) \cdot \vec{C}, \quad \vec{C} \in \mathbb{R}^n.$$

Definizioa. Izan bitez $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ jarraitua eta $t_0 \in I$. X (5.2.1) sistema diferentzial lineal homogeneoaren oinarrizko matrize bat bada eta $X(t_0) = I_n = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$ identitate-matrizea bada, X (5.2.1) sistema diferentzialaren t_0 *puntuko oinarrizko matrize nagusia* dela esaten da.

5.3 teorema. *Izan bitez $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ jarraitua eta $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ (5.2.1) sistema diferentzial lineal homogeneoaren n soluzio. Orduan, $\{\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)\}$ (5.2.1) sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema da, baldin eta soilik baldin existitzen bada $t_0 \in I$, non*

$$\det X(t_0) = \det(\vec{x}_1(t_0)\ \vec{x}_2(t_0) \ldots \vec{x}_n(t_0)) \neq 0$$

den.

Froga. Lehenengo eta behin, suposa dezagun existitzen dela $t_0 \in I$ non $\det X(t_0) \neq 0$ den. Orduan, $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ bektoreak linealki independenteak dira, eta, ondorioz, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ funtzioak ere bai; beraz, oinarrizko soluzio-sistema osatzen dute.

Beste inplikazioa frogatzeko, demagun $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ (5.2.1) sistemaren oinarrizko soluzio-sistema dela. Orduan, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ funtzioak linealki independenteak dira. Ikusiko dugu $t \in I$ guztietarako $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ bektoreak linealki independenteak direla.

Izan bitez $t_0 \in I$ edozein eta $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non $\alpha_1\vec{x}_1(t_0) + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n(t_0) = 0$ den. Orduan, $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n$

$$\begin{cases} \vec{x}' = A(t) \cdot \vec{x}, \\ \vec{x}(t_0) = \alpha_1\vec{x}_1(t_0) + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n(t_0) = 0 \end{cases}$$

Cauchyren problemaren soluzioa da. Existentzia eta bakartasunaren teoremaren arabera, $\vec{x}(t) = 0$ da $t \in I$ guztietarako; hau da, $\alpha_1\vec{x}_1(t) + \cdots + \alpha_n\vec{x}_n(t) = 0$ da $t \in I$ guztietarako, baina $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ linealki independenteak direnez, derrigorrean, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$; hau da, $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ linealki independenteak dira eta, beraz, $\det X(t_0) \neq 0$. $\square$

Definizioa. Izan bitez $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ jarraitua eta $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ (5.2.1) sistema diferentzial lineal homogeneoaren n soluzio.

$$W(t) = W(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)) = \det(\vec{x}_1(t)\ \vec{x}_2(t) \ldots\ \vec{x}_n(t))$$

funtzioari $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ funtzioen *wronskiar* deritzo.

5.4 teorema (Jacobi-Liouvilleren formula)**.** *Izan bitez $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ jarraitua, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ (5.2.1) sistema diferentzial lineal homogeneoaren n soluzio eta $t_0 \in I$. Orduan,*

$$W'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)\right) W(t), \quad \forall t \in I.$$

Ondorioz,

$$W(t) = W(t_0) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(s)\, ds\Big)$$

da, non $\operatorname{Tr} A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ *A matrizearen aztarna den.*

Beraz, $\{\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)\}$ (5.2.1) sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema da, baldin eta soilik baldin $W(t) \neq 0$ bada $t \in I$ guztietarako.

Froga. Egingo dugu froga $n = 2$ kasurako. Kasu orokorreko froga berdin egiten da. Izan bitez

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

$\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ (5.2.1) sistema diferentzialaren soluzioak direnez, $i = 1, 2$ bada,

$$\vec{x}_i'(t) = \begin{pmatrix} x_i'(t) \\ y_i'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)x_i(t) + a_{12}(t)y_i(t) \\ a_{21}(t)x_i(t) + a_{22}(t)y_i(t) \end{pmatrix}.$$

Orduan, determinanteen propietateak erabiliz,

$$\begin{aligned}
W'(t) =& \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)y_1(t) & a_{11}(t)x_2(t) + a_{12}(t)y_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)y_1(t) & a_{21}(t)x_2(t) + a_{22}(t)y_2(t) \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} a_{11}(t)x_1(t) & a_{11}(t)x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ a_{22}(t)y_1(t) & a_{22}(t)y_2(t) \end{vmatrix} \\
=& a_{11}(t)W(t) + a_{22}(t)W(t) = \operatorname{Tr} A(t)W(t).
\end{aligned}$$

Ekuazio diferentzial hau integratuz,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \frac{W'(\tau)}{W(\tau)}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(\tau)\, d\tau \Longrightarrow \ln \frac{W(t)}{W(t_0)} = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(\tau)\, d\tau \\
\Longrightarrow W(t) = W(t_0) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr} A(\tau)\, d\tau\Big). \quad \square
\end{aligned}$$

Adibidea. Izan bedi honako sistema diferentzial lineal homogeneo hau:

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Egiaztatuko dugu $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ eta $\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$ funtzio bektorialek sistemaren oinarrizko soluzio-sistema osatzen dutela. Lehenengo eta behin, ikusiko dugu $\vec{x}_1$ eta $\vec{x}_2$ sistemaren soluzioak direla.

$$\begin{pmatrix} 4x_1 - y_1 \\ 2x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{3t} - e^{3t} \\ 2e^{3t} + e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} = \vec{x}_1',$$
$$\begin{pmatrix} 4x_2 - y_2 \\ 2x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} + 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} = \vec{x}_2'.$$

Orain, $\vec{x}_1$ eta $\vec{x}_2$ linealki independenteak direla frogatuko dugu eta, horretarako, wronskiarra kalkulatuko dugu.

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{5t} - e^{5t} = e^{5t} \neq 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Wronskiarra nulua ez denez, $\vec{x}_1$ eta $\vec{x}_2$ linealki independenteak dira. Beraz, sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema osatzen dute, eta hau da soluzio orokorra:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{3t} + C_2e^{2t} \\ C_1e^{3t} + 2C_2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Oharrak. Izan bitez $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ jarraitua, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ (5.2.1) sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema, eta X elkartutako oinarrizko matrizea.

(i) X matrizearen zutabeak (5.2.1) sistema diferentzialaren soluzioak direnez,

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t),$$

hau da, X sistema diferentzial matrizial baten soluzioa da.

(ii) Izan bitez $B \in \mathcal{M}(n)$ matrize konstante bat eta $Y(t) = X(t) \cdot B$. Orduan,

$$Y'(t) = X'(t) \cdot B = (A(t) \cdot X(t)) \cdot B = A(t) \cdot (X(t) \cdot B) = A(t) \cdot Y(t).$$

Beraz, $\det B \neq 0$ bada, Y ere (5.2.1) sistemaren oinarrizko matrize bat da.

Alderantzizkoa ere egia da. $Y\colon [a,b] \to \mathcal{M}(n)$ (5.2.1) sistema diferentzialaren beste oinarrizko matrize bat bada, orduan, existitzen da $B \in \mathcal{M}(n)$ matrize konstante ez-singular bat non $Y(t) = X(t) \cdot B$ den.

Izan ere, $B(t) = X^{-1}(t) \cdot Y(t)$ bada, $Y(t) = X(t) \cdot B(t)$ dugu. Deribatuz eta kontuan izanik X eta Y (5.2.1) sistema diferentzialaren oinarrizko matrizeak direla,

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X'(t) \cdot B(t) + X(t) \cdot B'(t) \\ &\Longrightarrow \quad A(t) \cdot Y(t) = A(t) \cdot X(t) \cdot B(t) + X(t) \cdot B'(t) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \quad X(t) \cdot B'(t) = 0. \end{aligned}$$

Beraz, $B'(t)$ matrize nulua da, eta, ondorioz, B matrize konstantea.

(iii) Izan bedi $t_0 \in I$. t_0 puntuko oinarrizko matrize nagusia Φ bada, aurrekoaren arabera, existituko da $B \in \mathcal{M}(n)$ matrize konstante bat non $\Phi(t) = X(t) \cdot B$ den. $\Phi(t_0) = I_n$ izan behar duenez,

$$\Phi(t_0) = X(t_0) \cdot B = I_n \iff B = X^{-1}(t_0).$$

hau da, t_0 puntuko oinarrizko matrize nagusia $\Phi(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0)$ da.

(iv) Izan bitez $t_0 \in I$, $\vec{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$. Lehenago esan dugun bezala,

$$\begin{cases} \vec{x}' = A(t) \cdot \vec{x}, \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\xi}_0 \end{cases}$$

Cauchyren problemaren soluzioa $\vec{x}(t) = X(t) \cdot \vec{C}$ erakoa da, $\vec{C}$ bektore konstante bat izanik. Hasierako baldintza bete dadin,

$$\vec{x}(t_0) = X(t_0) \cdot \vec{C} = \vec{\xi}_0,$$

beraz, $\vec{C} = X^{-1}(t_0) \cdot \vec{\xi}_0$ eta

$$\vec{x}(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot \vec{\xi}_0 = \Phi(t) \cdot \vec{\xi}_0,$$

non Φ t_0 puntuko oinarrizko matrize nagusia den.

5.3 Sistema diferentzial lineal ez-homogeneoak

5.5 teorema. *Izan bitez* $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$, $\vec{b}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *jarraituak eta* $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$

$$\vec{x}' = A(t) \cdot \vec{x} + \vec{b}(t), \quad \forall\, t \in I \tag{5.3.1}$$

sistema diferentzial lineal ez-homogeneoaren bi soluzio. Orduan, $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$\vec{x}' = A(t) \cdot \vec{x} \tag{5.3.2}$$

sistema homogeneo elkartuaren soluzioa da. Horren ondorioz, (5.3.1) sistema diferentzial ez-homogeneoaren soluzio orokorra honako hau da:

$$\vec{x} = X(t) \cdot \vec{C} + \vec{x}_p,$$

non X *(5.3.2) sistema homogeneoaren oinarrizko matrizea eta* $\vec{x}_p$ *sistema ez-homogeneoaren soluzio bat diren.*

Froga. $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ izendatuz,

$$\vec{x}' = \vec{x}_1' - \vec{x}_2' = A(t) \cdot \vec{x}_1 + \vec{b}(t) - (A(t) \cdot x_2 + \vec{b}(t)) = A(t) \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A(t) \cdot \vec{x},$$

beraz, $\vec{x}$ (5.3.2) sistema homogeneoaren soluzioa da.

$\vec{x}_p$ eta $\vec{x}$ (5.3.2) sistemaren soluzioak badira, existituko da $\vec{x}_h$ (5.3.2) sistemaren soluzio bat non $\vec{x} - \vec{x}_p = \vec{x}_h$ den, eta aurreko atalean ikusi dugun bezala, existitzen da $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$ non $\vec{x}_h(t) = X(t) \cdot \vec{C}$ den. Ondorioz,

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) = X(t) \cdot \vec{C} + \vec{x}_p(t). \qquad \square$$

Aurreko teoremaren arabera, (5.3.2) sistema diferentzial homogeneoaren oinarrizko soluzio-sistema bat ezagutzen bada, (5.3.1) sistema ez-homogeneoaren soluzio orokorra lortzeko, nahikoa da soluzio bat aurkitzen bada, eta, horretarako, koefizienteen aldakuntzaren metodoa, edo Lagrangeren metodoa, erabiliko dugu.

5.6 teorema (Koefizienteen aldakuntzaren edo Lagrangeren metodoa)**.** *Izan bitez* $A\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ *eta* $\vec{b}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *jarraituak,* $t_0 \in I$ *eta* X *(5.3.2) sistema homogeneoaren oinarrizko matrize bat. Orduan,*

$$\vec{x}_p = X(t) \cdot \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \cdot \vec{b}(\tau)\, d\tau$$

(5.3.1) sistema ez-homogeneoaren soluzioa da.

Froga. Bila dezagun $\vec{x}_p(t) = X(t) \cdot \vec{C}(t)$ moduko soluzio bat (5.3.1) sistemarako. Deribatuz:

$$\vec{x}_p'(t) = X'(t) \cdot \vec{C}(t) + X(t) \cdot \vec{C}'(t) = A(t) \cdot X(t) \cdot \vec{C}(t) + X(t) \cdot \vec{C}'(t).$$

Beraz, (5.3.1) sisteman ordezkatuz, $X(t) \cdot \vec{C}'(t) = \vec{b}(t)$ izan behar du, eta, $\det X(t) \neq 0$ denez,

$$\vec{C}'(t) = X^{-1}(t) \cdot \vec{b}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{C}(t) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \cdot \vec{b}(\tau)\, d\tau,$$

eta

$$\vec{x}_p(t) = X(t) \cdot \vec{C}(t) = X(t) \cdot \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau) \cdot \vec{b}(\tau)\, d\tau. \qquad \square$$

Adibidea. Ebatz dezagun

$$\begin{cases} x' = 4x - y + e^{-t}, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$$

sistema diferentzial lineal ez-homogeneoa. Lehenago ikusi dugun bezala,

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \qquad \text{eta} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

elkartutako sistema diferentzial lineal homogeneoaren soluzio linealki independenteak dira, eta sistema homogeneoaren soluzio orokorra honako hau da:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Sistema ez-homogeneoaren soluzio partikular bat lortzeko,

$$\vec{x}_p(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = X(t) \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

moduko funtzio bektoriala ordezkatuko dugu sisteman. Kontuan izanik $X'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X(t)$ dela,

$$\begin{aligned} \vec{x}_p' &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_p + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad X'(t) \cdot \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + X(t) \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_p + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ e^{3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} C_1'(t)e^{3t} + C_2'(t)e^{2t} = e^{-t}, \\ C_1(t)e^{3t} + 2C_2'(t)e^{2t} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Bi ekuazioen arteko kenketa eginez,

$$C_2'(t)e^{2t} = 1 - e^{-t} \implies C_2(t) = \int e^{-2t}(1 - e^{-t})\, dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t},$$

eta bigarren ekuazioan $C'(t)$-ren adierazpena ordezkatuz,

$$C_1'(t)e^{3t} = 1 - 2(1 - e^{-t}) \implies C_1(t) = \int e^{-3t}(2e^{-t} - 1)\,dt = -\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t}.$$

Beraz:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_p(t) &= \begin{pmatrix} C_1(t)e^{3t} + C_2(t)e^{2t} \\ C_1(t)e^{3t} + 2C_2(t)e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Big(-\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\Big)e^{3t} + \Big(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\Big)e^{2t} \\ \Big(-\frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\Big)e^{3t} + 2\Big(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} Bigr)e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1+e^{-t}}{6} \\ \dfrac{e^{-t}-4}{6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Azkenik, sistema ez-homogeneoaren soluzio orokorra hau da:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + \vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} C_1e^{3t} + C_2e^{2t} - \dfrac{1+e^{-t}}{6} \\ C_1e^{3t} + 2C_2e^{-2t} + \dfrac{e^{-t}-4}{6} \end{pmatrix}.$$

5.4 Koefiziente konstanteetako sistema diferentzial lineal homogeneoak

Atal honetan

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.4.1}$$

moduko sistema diferentzial lineal homogeneoak aztertuko ditugu, non $A \in \mathcal{M}(n)$ $n \times n$ ordenako matrize erreal konstantea den; hau da, (5.4.1) honela idazten da:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ , \ i = 1, \ldots, n,$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ izanik $i, j = 1, \ldots, n$ guztietarako.

5.4.1 Bi ekuazioko sistemak

Lehenengo eta behin, koefiziente konstanteetako bi ekuazioko sistema homogeneoa aztertuko dugu; hau da,

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y, \\ y' = a_2x + b_2y, \end{cases} \tag{5.4.2}$$

non $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ diren. Koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial linealen soluzioak esponentzialen bidez adierazten direnez, koefiziente konstanteetako sistemen kasuan, saiatuko gara $x(t) = \alpha e^{mt}$, $y(t) = \beta e^{mt}$ moduko soluzioak bilatzen. (5.4.2) sisteman ordezkatuz:

$$\begin{cases} \alpha m e^{mt} = a_1\alpha e^{mt} + b_1\beta e^{mt} \\ \beta m e^{mt} = a_2\alpha e^{mt} + b_2\beta e^{mt} \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1 - m)\alpha + b_1\beta = 0 \\ a_2\alpha + (b_2 - m)\beta = 0. \end{cases}$$

Azken sistema aljebraiko homogeneo horrek soluzio ez-nuluak izan ditzan, $\det(A - mI) = 0$ behar dugu, non

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

den. Hau da, m-k A matrizearen balio propioa izan behar du, eta $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ bektorea m balio propioarekin elkartutako bektore propio ez-nulua:

$$(A - mI) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matrizearen balio propioak haren polinomio karakteristikoaren erroak dira, hots,

$$m^2 - (a_1 + b_2)m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

ekuazio koadratikoaren soluzioak. Hiru kasu daude.

(i) A matrizeak bi balio propio erreal desberdin baditu, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 \neq m_2$, honako hau da (5.4.2) sistemaren soluzio orokorra:

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{v}_1 e^{m_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{m_2 t},$$

non $\vec{v}_i$ m_i balio propioaren betore propioa den, $i = 1, 2$ eta C_1, C_2 edozein bi konstante erreal.

Adibidea. Ebatz dezagun

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$$

koefiziente konstanteetako sistema diferentziala. Elkartutako matrizea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

da. Aurki ditzagun A-ren balio propioak.

$$\begin{aligned} \det(A - mI) =& \begin{vmatrix} 1 - m & 1 \\ 4 & -2 - m \end{vmatrix} \\ =& (m - 1)(m + 2) - 4 = m^2 + m - 6 = (m + 3)(m - 2). \end{aligned}$$

Beraz, bi balio propio erreal desberdin ditugu, $m_1 = -3$ eta $m_2 = 2$. Orain, bektore propioak topatu behar ditugu.

$m = m_1 = -3$ bada,

$$(A + 3I) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 4\alpha + \beta = 0.$$

$\vec{v}_1 = (1 \ \ -4)^t$ hartuko dugu.

$m = m_2 = 2$ bada,

$$(A-2I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff -\alpha+\beta = 0,$$

eta $\vec{v}_2 = (1\ 1)^t$ har dezakegu. Beraz, soluzio orokorra honako hau da:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} =& C_1\vec{v}_1 e^{m_1 t} + C_2\vec{v}_2 e^{m_2 t}\\ =& \begin{pmatrix}C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}\\ -4C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}\end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(ii) A matrizeak bi balio propio konplexu baditu, $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$, A-ren polinomio karakteristikoa koefiziente errealetakoa denez, $m_1 = a + bi$ eta $m_2 = \overline{m}_1 = a - bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ izanik. Gainera, $\vec{v}_1 = (\alpha\ \beta)^t$ m_1 balio propioaren bektore propioa bada, $\vec{v}_2 = (\overline{\alpha}\ \overline{\beta})^t$ m_2-ren bektore propioa da. $\vec{v}_1 e^{m_1 t}$ eta $\vec{v}_2 e^{m_2 t}$ (5.4.2) sistemaren soluzio linealki independenteak dira, baina balio errealetako soluzioak nahi ditugunez,

$$\vec{x}_1(t) = \mathrm{Re}(\vec{v}_1 e^{m_1 t}), \quad \vec{x}_2(t) = \mathrm{Im}(\vec{v}_1 e^{m_1 t})$$

hartuko ditugu sistemaren oinarrizko soluzio-sistema osatzeko.

Adibidea. Ebatz dezagun

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y,\\ y' = -5x + 3y\end{cases}$$

koefiziente konstanteetako sistema diferentziala. Sistema horren elkartutako matrizea

$$A = \begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

da, eta A-ren balio propioak aurkitzeko polinomio karakteristikoaren erroak lortu behar ditugu.

$$\det(A - mI) = \begin{vmatrix}3-m & 5\\ -5 & 3-m\end{vmatrix} = (m-3)^2 + 25$$

denez, bi balio propio konplexu konjugatu ditugu, $m_1 = 3+5i$ eta $m_2 = 3-5i$. m_1 balio propioaren bektore propio bat behar dugu.

$$(A-(3+5i)I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}-5i & 5\\ -5 & -5i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff -5\alpha i + 5\beta = 0.$$

$\vec{v}_1 = (1\ i)^t$ hartuko dugu, eta, horrela,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 e^{m_1 t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(3+5i)t} = \begin{pmatrix} e^{3t}(\cos(5t) + i\sin(5t)) \\ ie^{3t}(\cos(5t) + i\sin(5t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t}\cos(5t) \\ -e^{3t}\sin(5t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{3t}\sin(5t) \\ e^{3t}\cos(5t) \end{pmatrix};\end{aligned}$$

beraz, soluzio orokorra honako hau da:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 \operatorname{Re}(\vec{v}_1 e^{m_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(\vec{v}_1 e^{m_1 t}) \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t}(C_1\cos(5t) + C_2\sin(5t)) \\ e^{3t}(-C_1\sin(5t) + C_2\cos(5t)) \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(iii) A matrizeak balio propio erreal bikoitza badu, $m_1 \in \mathbb{R}$, eta m_1-ek bi bektore propio linealki independente baditu, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, orduan, soluzio orokorra

$$\vec{x}(t) = (C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2)e^{m_1 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

da. Baina m_1 balio propioaren bektore propioen espazioaren dimentsioa 1 bada eta $\vec{v}_1$ bektore propioa bada, $\vec{v}_1 e^{m_1 t}$ soluzioarekiko linealki independentea den beste soluzio bat $\vec{x}_2(t) = (\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)e^{m_1 t}$ modukoa izango da. Ikus dezagun zer bete behar duen $\vec{v}_2$ bektoreak. $\vec{x}_2$ (5.4.2) sisteman ordezkatuz:

$$\begin{aligned}&\vec{x}_2'(t) = A \cdot \vec{x}_2(t) \\ &\iff \big(\vec{v}_1 + m_1(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)\big)e^{m_1 t} = A \cdot \big(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\big)e^{m_1 t} = \big(A\vec{v}_2 + m_1 t\vec{v}_1\big)e^{m_1 t} \\ &\qquad \iff \vec{v}_1 + m_1\vec{v}_2 = A \cdot \vec{v}_2 \iff (A - m_1 I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.\end{aligned}$$

Hau da, $\vec{v}_2$ m_1 balio propioaren bektore propio orokortua da. Beraz, $\vec{x}_2$ soluzioa lortzeko $\vec{v}_2 \in \ker(A - m_1 I)^2 - \ker(A - m_1 I)$ eta $\vec{v}_1 = (A - m_1 I)\vec{v}_2$ hartuko ditugu, eta soluzio orokorra honako hau da:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{v}_1 e^{m_1 t} + C_2(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)e^{m_1 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Adibidea. Ebatz dezagun

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - y \end{cases}$$

koefiziente konstanteetako sistema diferentziala. Koefizienteen matrizea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da. Aurki ditzagun A-ren balio propioak.

$$\det(A - mI) = \begin{vmatrix} 3-m & -4 \\ 1 & -1-m \end{vmatrix} = (m-3)(m+1)+4 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2.$$

$m_1 = 1$ A-ren balio propio bikoitza da. m_1 balioaren bektore propioen espazioa, $\ker(A-I) = \ker\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \{(\alpha\ \beta)^t \colon \alpha - 2\beta = 0\}$, dimentsio bateko espazioa denez, bektore propio orokortu bat behar dugu soluzio orokorra osatzeko.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\vec{v}_2 = (1\ 0)^t \in \ker(A-I)^2 - \ker(A-I)$ hartuko dugu eta

$$\vec{v}_1 = (A-I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beraz, sistema diferentzialaren soluzio orokorra honako hau da:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1\vec{v}_1 e^t + C_2(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)e^t \\ &= \begin{pmatrix} (2C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^t \\ (C_1 + C_2 t)e^t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5.4.2 n ekuazioko sistema homogeneoa, $n \geq 2$

Izan bedi orain $A \in \mathcal{M}(n)$ matrize erreal konstantea, $n \geq 2$ izanik, eta ebatz dezagun

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.4.3}$$

koefiziente konstanteetako sistema lineal homogeneoa.

5.7 teorema (Jordanen teorema)**.** *Izan bedi $A \in \mathcal{M}(n)$ zenbaki errealetako matrizea. Orduan, existitzen da $P \in \mathcal{M}(n)$ matrize konplexu ez-singularra non $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ den, $J \in \mathcal{M}(n)$ matrizea blokez diagonala izanik, honako adierazpen hau duelarik:*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_h \end{pmatrix}.$$

0 elementuek matrize nuluak adierazten dituzte, eta J_k mota honetako matrizea da, $k = 1, \dots, h$,

$$J_k = \begin{pmatrix} m_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m_k \end{pmatrix},$$

m_k A matrizearen balio propioa izanik.

J Jordanen matrizea dela diogu, eta bakarra da blokeen ordenagatik izan ezik. J-k h bloke baditu eta $\dim J_k = l_k$ *izendatzen badugu, $k = 1, \dots, h$, orduan, $1 \leq l_k \leq n$ eta $l_1 + \cdots + l_h = n$ dira.*

J_k blokea A matrizearen m_k balio propioari dagokio, m_k erreala edo konplexua izanik eta J_k bloke bakoitzarekin loturik $\mathbb{C}^n$-ko l_k bektore linealki independente existitzen dira, $\vec{v}_1^k, \vec{v}_2^k, \dots, \vec{v}_{l_k}^k$, honako l_k baldintza hauek egiaztatzen dituztenak:

$$
\begin{aligned}
&(A - m_k I) \cdot \vec{v}_1^k = \vec{0}, \\
&(A - m_k I) \cdot \vec{v}_2^k = \vec{v}_1^k \quad \Longrightarrow \quad (A - m_k I)^2 \vec{v}_2^k = \vec{0}, \\
&(A - m_k I) \cdot \vec{v}_3^k = \vec{v}_2^k \quad \Longrightarrow \quad (A - m_k I)^3 \vec{v}_3^k = \vec{0}, \\
&\dots \\
&(A - m_k I) \cdot \vec{v}_{l_k}^k = \vec{v}_{l_k-1}^k \quad \Longrightarrow \quad (A - m_k I)^{l_k} \vec{v}_{l_k}^k = \vec{0}.
\end{aligned}
$$

$V_k = \{\vec{v}_1^k, \vec{v}_2^k, \dots, \vec{v}_{l_k}^k\}$ idatziz, $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_h$ bektore-sistema askea da.

Jordanen teoreman agertzen diren balio propioen bektore propio eta bektore propio orokortuak erabiliko ditugu koefiziente konstanteetako n ekuazioko sistema diferentzial lineal homogeneoen oinarrizko sistemak osatzeko, $n = 2$ kasuan ikusi duguna orokortuz.

5.8 korolarioa. *Izan bitez $A \in \mathcal{M}(n)$ zenbaki errealetako matrizea eta J haren Jordanen matrizea. Jordanen teoremaren notazioa erabiliz, $k = 1, \dots, h$ guztietarako (5.4.3) sistema diferentzialaren l_k soluzio linealki independente hauek ditugu:*

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_1^k e^{m_k t}, \\
&(\vec{v}_2^k + t\vec{v}_1^k) e^{m_k t}, \\
&(\vec{v}_3^k + t\vec{v}_2^k + \frac{t^2}{2!}\vec{v}_1^k) e^{m_k t}, \\
&\dots \\
&(\vec{v}_{l_k}^k + t\vec{v}_{l_k-1}^k + \cdots + \frac{t^{l_k-1}}{(l_k-1)!}\vec{v}_1^k) e^{m_k t}.
\end{aligned}
$$

Horrela, $k = 1, 2, \dots, h$ guztietarako lortutako soluzioen multzoa $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema da. Soluzio horietako batzuk konplexu ez-errealak izan daitezke, baina A matrizearen elementu guztiak errealak direnez, soluzio konplexu horien konjugatuak ere soluzioak izango dira, eta, ondorioz, (5.4.3) sistema diferentzialaren soluzio errealak lortzeko soluzioen parte errealak eta parte irudikariak hartuko dira.

5.4.3 Hiru ekuazioko sistemak

Aztertuko dugu 3×3 ordenako A matrizeen kasuan zein diren ager daitezkeen Jordanen matrizeak eta elkartutako bektoreak, $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ sistema diferentzialaren soluzio orokorra idazteko beharko ditugunak. $\det(A - mI) = 0$ polinomio karakteristikoak hiru erro izango ditu, eta horietatik bat beti izango da erreala.

(i) A-ren hiru balio propioak desberdinak, m_1, m_2, m_3 non $m_i \neq m_j$, $i \neq j$ guztietarako. Kasu horretan,

$$J = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

eta hiru bektore propio ditugu, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ non $A \cdot \vec{v}_i = m_i \, \vec{v}_i$ den, $i = 1, 2, 3$.

(a) $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ badira, orduan, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ eta $\left\{\vec{v}_1 e^{m_1 t}, \vec{v}_2 e^{m_2 t}, \vec{v}_3 e^{m_3 t}\right\}$ (5.4.3) sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema da.

(b) $m_1 \in \mathbb{R}$ eta $m_2 = a + bi$, $m_3 = a - bi$ badira, $b \neq 0$ izanik, orduan, $\left\{\vec{v}_1 \, e^{m_1 t}, \mathrm{Re}\left(\vec{v}_2 \, e^{(a+bi)t}\right), \mathrm{Im}\left(\vec{v}_2 \, e^{(a+bi)t}\right)\right\}$ (5.4.3) sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema da.

(ii) A-ren balio propioak errealak, bat sinplea eta bestea bikoitza, $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$, $m_2 = m_3$ eta $m_1 \neq m_2$ badira, Jordanen matrizea bi motatakoa izan daiteke:

$$J = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \text{edo} \quad J = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 1 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

Lehen kasuan, m_2 balio propioak bi bektore propio linealki independente ditu, $\vec{v}_2, \vec{v}_3$, eta oinarrizko soluzio-sistema $\left\{\vec{v}_1 e^{m_1 t}, \vec{v}_2 e^{m_2 t}, \vec{v}_3 e^{m_2 t}\right\}$ da.

Bigarren kasuan, m_2 balio propiorako ez dira existitzen bi bektore propio linealki independente, eta bektore propio orokortu bat bilatu behar da:

$$\begin{aligned} &\vec{v}_3 \in \ker(A - m_2 I)^2 - \ker(A - m_2 I), \\ &\vec{v}_2 = (A - m_2 I)\vec{v}_3. \end{aligned}$$

Sistema diferentzialaren oinarrizko soluzio-sistema honako hau da:

$$\{\vec{v}_1 e^{m_1 t}, \vec{v}_2 e^{m_2 t}, (\vec{v}_3 + t\vec{v}_2) e^{m_2 t}\}.$$

(iii) A matrizeak balio propio erreal hirukoitza badu, $m_1 = m_2 = m_3 = m \in \mathbb{R}$, Jordanen matrizea hiru motatakoa izan daiteke:

$$J = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{edo} \quad J = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Lehenengo kasuan, m_1 balio propioak hiru bektore propio linealki independente ditu, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, non $A \cdot \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, eta sistema diferentzialaren oinarrizko sistema $\{e^{m_1 t}\vec{v}_1, e^{m_1 t}\vec{v}_2, e^{m_1 t}\vec{v}_3\}$ da.

Bigarren kasuan, m_1-ek bi bektore propio linealki independente ditu, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, eta $\vec{v}_3$ bektore propio orokortua da; beraz, honela aukeratuko ditugu:

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_3 \in \ker(A - m_1 I)^2 - \ker(A - m_1 I),\\
&\vec{v}_2 = (A - m_1 I)\vec{v}_3,\\
&\vec{v}_1 \ : \ (A - m_1 I)\vec{v}_1 = 0, \text{ eta } \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ bektoreekiko l.i.}
\end{aligned}$$

Sistema diferentzialaren oinarrizko sistema honako hau da:

$$\{\vec{v}_1 e^{m_1 t}, \vec{v}_2 e^{m_1 t}, (\vec{v}_3 + t\vec{v}_2)e^{m_1 t}\}.$$

Azkenik, hirugarren kasuan, m_1-ek bektore propio bat dauka: $\vec{v}_1$, eta $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ bektore propio orokortuak dira, honela aukeratzen direnak,

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_3 \in \ker(A - m_1 I)^3 - \ker(A - m_1 I)^2,\\
&\vec{v}_2 = (A - m_1 I)\vec{v}_3,\\
&\vec{v}_1 = (A - m_1 I)\vec{v}_2,
\end{aligned}$$

eta sistema diferentzialaren oinarrizko sistema honako hau da:

$$\{e^{m_1 t}\vec{v}_1, e^{m_1 t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1), e^{m_1 t}\Big(\vec{v}_3 + t\vec{v}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{v}_1\Big)\}.$$

Adibidea. Ebatz dezagun hiru ekuazioko sistema diferentzial hau:

$$\begin{cases} x' = x - y + 4z,\\ y' = 3x + 2y - z,\\ z' = 2x + y - z. \end{cases}$$

Sistema horren koefizienteen matrizea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

da. A-ren balio propioak kalkulatu behar ditugu, hau da, A-ren polinomio karakteristikoaren erroak.

$$\begin{aligned}
\det(A - mI) = &\begin{vmatrix} 1-m & -1 & 4\\ 3 & 2-m & -1\\ 2 & 1 & -1-m \end{vmatrix}\\
=&(m-1)(m+1)(2-m) + 2 + 12 - 8(2-m) + (1-m) - 3(m+1)\\
=&-m^3 + 2m^2 + 5m - 6 = -(m-3)(m-1)(m+2).
\end{aligned}$$

Beraz, A-k hiru balio propio erreal desberdin ditu, $m_1 = 3$, $m_2 = 1$ eta $m_3 = -2$, eta sistema diferentzialaren soluzio orokorra idazteko elkartutako bektore propioak behar ditugu.

- $m_1 = 3$

$$(A-3I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-2\alpha-\beta+4\gamma=0,\\ 3\alpha-\beta-\gamma=0,\\ 2\alpha+\beta-4\gamma=0.\end{cases}$$

  Azken ekuazioa lehenengoaren berdina da. Azken bi ekuazioak batuz, $5\alpha - 5\gamma = 0$ lortzen dugu; eta bigarrenetik, $\beta = 3\alpha - \gamma$; beraz, $\vec{v}_1 = (1\ 2\ 1)^t$ aukera dezakegu.

- $m_2 = 1$

$$(A-I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}-\beta+4\gamma=0,\\ 3\alpha+\beta-\gamma=0,\\ 2\alpha+\beta-2\gamma=0.\end{cases}$$

  Kasu horretan, lehen bi ekuazioak batuz, $3\alpha + 3\gamma = 0$ lortzen dugu, hau da, $\alpha + \gamma = 0$, eta lehenengotik, $\beta = 4\gamma$. $\vec{v}_2 = (1\ -4\ -1)^t$ hartuko dugu.

- $m_3 = -2$

$$(A+2I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}3\alpha-\beta+4\gamma=0,\\ 3\alpha+4\beta-\gamma=0,\\ 2\alpha+\beta+\gamma=0.\end{cases}$$

  Hemen, sistema aljebraikoa $5\alpha + 5\beta = 0, \gamma = 3\alpha + 4\beta$ ekuazioetara labur daiteke, eta, beraz, $\vec{v}_3 = (1\ -1\ -1)^t$ aukera daiteke.

Aurrekoaren arabera, sistema diferentzialaren soluzio orokorra honako hau da:

$$\vec{x}(t) = C_1e^{3t}\vec{v}_1 + C_2e^t\vec{v}_2 + C_3e^{-2t}\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}C_1e^{3t}+C_2e^t+C_3e^{-2t}\\ 2C_1e^{3t}-4C_2e^t-C_3e^{-2t}\\ C_1e^{3t}-C_2e^t-C_3e^{-2t}\end{pmatrix},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Adibidea. Hiru ekuazioko sistema diferentzial hau ebatziko dugu:

$$\begin{cases}x' = 3x - y - z,\\ y' = x + y - z,\\ z' = x - y + z.\end{cases}$$

Sistema horren koefizienteen matrizea

$$A = \begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

da, eta A-ren polinomio karakteristikoa

$$\begin{aligned}\det(A - mI) =& \begin{vmatrix} 3-m & -1 & -1 \\ 1 & 1-m & -1 \\ 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} \\ =&(m-1)^2(3-m) + 1 + 1 + (1-m) + (m-3) + (1-m) \\ =& -m^3 - 5m^2 - 8m + 4 = -(m-1)(m-2)^2.\end{aligned}$$

Beraz, A-k bi balio propio erreal ditu, $m_1 = 1$ sinplea eta $m_2 = 2$ bikoitza. Sistema diferentzialaren soluzio orokorra lortzeko, elkartutako bektore propioak edo propio orokortuak behar ditugu.

- $m_1 = 1$

$$(A-I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases}$$

  Orduan, $\vec{v}_1 = (1\ 1\ 1)^t$ aukera dezakegu.

- $m_2 = 2$

$$(A-I)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

  m_2-k bi bektore propio linealki independente ditu, adibidez, $\vec{v}_2 = (1\ 0\ 1)^t$ eta $\vec{v}_3 = (1\ 1\ 0)^t$.

Sistema diferentzialaren soluzio orokorra, beraz, honako hau da:

$$\vec{x}(t) = C_1e^t\vec{v}_1 + C_2e^{2t}\vec{v}_2 + C_3e^{2t}\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{2t} \\ C_1e^t + C_3e^{2t} \\ C_1e^t + C_2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

5.5 Funtzio esponentzial matriziala

Definizioa. Izan bedi $A \in \mathcal{M}(n)$ $n \times n$ ordenako matrize erreala. *Funtzio esponentzial matriziala* honela definitzen da:

$$e^{At} = \exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \dots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A matrizea diagonala bada, A^n matrizea ere diagonala da, eta erraza da e^{At} funtzio esponentzialaren kalkulua.

5.9 proposizioa. *Izan bitez* $A, B \in \mathcal{M}(n)$ $n \times n$ *ordenako matrize errealak eta* $t, s \in \mathbb{R}$. *Orduan,*

(i) $e^{A \cdot 0} = I$;

(ii) $A \cdot B = B \cdot A$ *bada,* $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$;

(iii) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{Bs}$;

(iv) $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$;

(v) $e^{It} = e^{t} I$.

5.10 proposizioa. *Izan bedi* $A \in \mathcal{M}(n)$ $n \times n$ *ordenako matrize erreala. Orduan,*

$$\left(e^{At}\right)' = A \cdot e^{At}.$$

5.11 korolarioa. *Izan bedi* $A \in \mathcal{M}(n)$ $n \times n$ *ordenako matrize erreala.* e^{At} *funtzio esponentzial matriziala* $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ *sistema diferentzial linealaren oinarrizko matrize nagusia da* $t_0 = 0$ *puntuan, eta, ondorioz, honako hau da* $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ *sistema diferentzialaren soluzio orokorra:*

$$\vec{x}(t) = e^{At} \cdot \vec{C}, \quad \vec{C} \in \mathbb{R}^n.$$

Gainera, $X \colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}(n)$ *funtzio matriziala* $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ *sistema diferentzial linealaren oinarrizko matrize bat bada,*

$$e^{At} = X(t)\big(X(0)\big)^{-1}.$$

5.6 Ariketak

1. Kalkula ezazu
$$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = 5x + 3y, \end{cases}$$
sistema diferentzialaren soluzio orokorra. Aurki ezazu oinarrizko matrize nagusia $t = 0$ puntuan.
$$\textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1e^{6t} + C_2e^{-2t} \\ 5C_1e^{6t} - C_2e^{-2t} \end{pmatrix};\ \mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}e^{6t} + \frac{5}{8}e^{-2t} & \frac{3}{8}e^{6t} - \frac{3}{8}e^{-2t} \\ \frac{5}{8}e^{6t} - \frac{5}{8}e^{-2t} & \frac{5}{8}e^{6t} + \frac{3}{8}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

2. Ebatz itzazu honako sistema diferentzial hauek:

(i) $\begin{cases} x' = -3x + 4y, \\ y' = -2x + 3y. \end{cases}$ $\qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{t} + 2C_2e^{-t} \\ C_1e^{t} + C_2e^{-t} \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$ $\qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\big(C_1(\cos 2t - \sin 2t) + C_2(\cos 2t + \sin 2t)\big) \\ -\big(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\big) \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = -\dfrac{1}{2}x + y. \end{cases}$ $\qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}(2C_1 \sin t - 2C_2 \cos t) \\ e^{t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3y. \end{cases}$ $\qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{3t} \\ C_2e^{3t} \end{pmatrix}$

(v) $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$ $\qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}(2C_1 + C_2 + C_2t) \\ -(C_1 + C_2t)e^{3t} \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{cases} x' = 3x - 18y, \\ y' = 2x - 9y. \end{cases}$ $\qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t}(6C_1 + C_2 + 6C_2t)) \\ e^{-3t}(2C_1 + 2C_2t) \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{cases} x' = x + y - 5t + 2, \\ y' = 4x - 2y - 8t - 8. \end{cases}$ $\qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} + 3t + 2 \\ C_1e^{2t} - 4C_2e^{-3t} + 2t - 1 \end{pmatrix}$

(viii) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$
$$\textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-2t} + C_2e^{-5t} + \frac{60t-27}{50} + \frac{e^{-t}}{4} \\ C_1e^{-2t} - 2C_2e^{-5t} + \frac{30t+3}{50} + \frac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

3. Ebatzi honako sistema diferentzial lineal homogeneo hau, a eta b parametroen balioen arabera, $a^2 - b^2 = 1$ izanik:

$$\begin{cases} x' + ax - by = 0, \\ y' - ay + bx = 0. \end{cases}$$

4. *Eulerren sistema diferentziala.* Izan bedi $t\vec{x}' = A\vec{x}$ sistema diferentziala, A $n \times n$ ordenako matrize karratuaren elementuak zenbaki errealak izanik. Froga ezazu $\vec{x} = \vec{C}t^r$, $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$, sistema diferentzialaren soluzioa dela baldin eta soilik baldin $(A - rI) \cdot \vec{C} = \vec{0}$ bada. Horri kontuan izanda, ebatzi honako sistema diferentzial hauek, $t > 0$ izanik:

(i) $t\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 t + C_2 t^{-1} \\ C_1 t + 3C_2 t^{-1} \end{pmatrix}$

(ii) $t\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \frac{\cos(\sqrt{2}\ln t)}{t} + C_2 \frac{\sin(\sqrt{2}\ln t)}{t} \\ C_1\sqrt{2}\frac{\sin(\sqrt{2}\ln t)}{t} - C_2\sqrt{2}\frac{\cos(\sqrt{2}\ln t)}{t} \end{pmatrix}$

(iii) $t\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 t + C_2 t + 2C_2 t \ln t \\ C_1 t + C_2 t \ln t \end{pmatrix}$

5. Ebatz itzazu honako sistema diferentzial hauek:

(i) $\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4z \\ y' = -x - 2y \\ z' = -x - 2z \end{cases}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} 2(C_2 + C_3)\cos 2t - 2(C_2 - C_3)\sin 2t \\ e^{-2t} - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t \\ -e^{-2t} - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} 10C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-3t} + C_3 e^{5t} \\ -C_1 e^{-4t} + 8C_3 e^{5t} \\ C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-3t} + C_3 e^{5t} \end{pmatrix}$

(iii) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} e^{2t}(5C_1 + 6C_2 + 5C_2 t + 6C_3 t + \frac{5C_3}{2}t^2) \\ e^{2t}(5C_2 + 5C_3 t) \\ C_3 e^{2t} \end{pmatrix}$

(iv) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} e^{2t}(-C_2 + C_3 - C_3 t) \\ e^{2t}(-C_1 + 2C_2 - (C_2 - 2C_3)t - \frac{C_2 t^2}{2}) \\ e^{2t}(C_1 - 3C_2 + (C_2 - 3C_3)t + \frac{C_3 t^2}{2}) \end{pmatrix}$

(v) $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$ *Em.:* $\begin{pmatrix} e^t(C_1 + 4C_2 + C_3 + 4C_3 t) \\ e^t(3C_2 + 8C_3 t) \\ e^t(2C_1 - 4C_2 + C_3 - 4C_3 t) \end{pmatrix}$

6. Ebatzi honako Cauchyren problema hau:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

7. Ebatzi sistema diferentzial lineal ez-homogeneo hauek:

$$\text{(i)} \ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} C_1e^{5t} + (C_2 + C_3)e^{-t} + \frac{3}{4}e^t - \frac{6}{5} \\ -C_1e^{5t} + C_3e^{-t} + \frac{3}{4}e^t + \frac{6}{5} \\ C_1e^{5t} - C_2e^{-t} + \frac{3}{4}e^t + \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)} \ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \textit{Em.:} \begin{pmatrix} C_1e^t + (C_2 + C_3 + 2 - 2t)e^{2t} - \frac{2t+3}{4} \\ C_1e^t + (C_3 + 2)e^{2t} - \frac{2t+3}{4} \\ C_1e^t + (C_2 + 2 - 2t)e^{2t} - t - 1 \end{pmatrix}$$

8. Ebatz ezazu honako sistema diferentzial hau a parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} x' = 2y + z \\ y' = z \\ z' = ay. \end{cases}$$

9. Izan bitez

$$\begin{pmatrix} 2+t \\ 1+t^2 \\ -1-t+t^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2+t^2 \\ 2t+t^2 \\ -3-t^2+t^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t^2 \\ -t+t^3 \end{pmatrix}$$

funtzio bektorialak $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ koefiziente konstanteetako sistema diferentzial lineal ez-homogeneoaren soluzioak.

(i) Kalkula ezazu elkartutako sistema diferentzial homogeneoaren oinarrizko matrize bat.

(ii) Kalkula itzazu A-ren balio propioak eta bektore propioak edo bektore propio orokortuak.

Em.: $m = 0$; $\vec{v}_1 = (1\ 0\ -1)^t$, $\vec{v}_2 = (0\ 1\ 0)^t$, $\vec{v}_3 = (0\ 1\ 1)^t$

10. Izan bedi honako sistema diferentzial hau:

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0 \\ x' - 2x + y' + y = 0. \end{cases}$$

(i) Kalkula ezazu sistema horren soluzio orokorra.

(ii) Aurkitu $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$ baldintzak betetzen dituen sistemaren soluzioa.

$$\textit{Em.:} \text{ (i)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2e^t + C_3e^{2t} \\ 2C_1 + C_2e^t \end{pmatrix}; \ \text{(ii)} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t} \\ 1 - e^t \end{pmatrix}$$

11. Aurkitu sistema diferentzial honen soluzio orokorra:

$$\begin{cases} x'' + 4x - 3y' = 0 \\ 3x' + y'' + 4y = 0. \end{cases}$$

Em.: $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t,\ y(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t$

12. Ebatzi Cauchyren problema diferentzial hau:

$$\begin{cases} x'' + x - y = 0, \\ y'' + y - x = 0, \\ x(0) = 0, x'(0) = 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Em.: $x(t) = \frac{3t}{2} + \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{2\sqrt{2}},\ y(t) = \frac{3t}{2} - \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{2\sqrt{2}}$

6. gaia

Hasierako balioetako problema. Existentzia-teoria

6.1 Problema diferentziala eta problema integrala

Aurreko gaietan aipatu dira existentzia eta bakartasunaren teoremak, baina ez dira frogatu. Gai honetan, lehen ordenako ekuazio diferentzial bektorial esplizituen hasierako balioetako problemen soluzioaren existentzia eta bakartasuna frogatuko ditugu, baldintza egokiak eskatuz, eta lehenago aipatu diren teoremak korolario modura ondorioztatuko ditugu.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta $(t_0, \vec{\xi_0}) \in D$. *Cauchyren problema* edo *hasierako balioetako problema diferentziala* honako hau da: aurkitu $\vec{x} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$, I t_0 puntuko ingurunea izanik, non

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = f(t, \vec{x}(t)), \ \forall\, t \in I, \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\xi_0}. \end{cases} \tag{6.1.1}$$

Oharra. Notazioa arintzeko, hemendik aurrera, $\vec{x}$ idatzi beharrean x idatziko dugu, eta ulertuko dugu funtzio bektoriala dela, $x\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

(6.1.1) hasierako balioetako problema era bektorialean idatzita dago; lehen ordenako ekuazio diferentzial bektorial esplizitua dugu, eta n hasierako baldintza. 5. Gaian aztertu diren sistema diferentzial linealetarako Cauchyren problemak (6.1.1) motakoak dira. 3. gaian ikusi diren n-garren ordenako ekuazio diferentzial linealetarako Cauchyren problemak ere berridatz daitezke (6.1.1) ereduan sartzeko, sistema diferentzial baliokide baten bidez emanez.

(6.1.1) problema diferentziala da, ekuazio diferentzial bat agertzen delako enuntziatuan. Hala ere, bere soluzioaren existentzia eta bakartasuna frogatzeko, erabilgarriagoa izango da problema integral baliokide baten bidez adieraztea.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta $(t_0, \xi_0) \in D$. Honako problema honi *problema integral* esaten diogu: aurkitu $x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, I t_0 puntuko ingurunea izanik, non

$$x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{6.1.2}$$

Oharra. $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ (6.1.1) problema diferentzialaren soluzioa bada, $x' = f(t, x(t))$ denez,

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \implies x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

eta hasierako baldintza kontuan izanik, x (6.1.2) problema integralaren soluzioa da.

Alderantziz, x (6.1.2) problema integralaren soluzioa bada, x funtzio jarraitu baten integralaren bidez definituta dagoenez, $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ da, eta, deribatuz;

$$x'(t) = \Big(\xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\Big)' = f(t, x(t)).$$

Gainera,

$$x(t_0) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))\, ds = \xi_0,$$

Hau da, (6.1.2) problemaren soluzio jarraituak (6.1.1) problemaren soluzioak dira.

Izan bedi $T \colon \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ aplikazioa, non $x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ funtzioaren irudia T-ren bidez, $T(x) = T_x$, honela definitzen den:

$$\begin{aligned} T_x \colon I &\to \mathbb{R}^n \\ t &\rightsquigarrow T_x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \end{aligned}$$

(6.1.2) problema integrala ebaztea T eragilearen puntu finkoak $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ espazioan kalkulatzea da; hots, aurkitzea $x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ non $T_x = x$ den.

Definizioa. Izan bitez (X, d_X) eta (Y, d_Y) espazio metrikoak eta $f \colon X \to Y$. f *uzkurkorra* dela diogu, existitzen bada $0 < \gamma < 1$ non

$$d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le \gamma d_X(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

6.1 teorema (Banachen puntu finkoaren teorema)**.** *Izan bitez (E, d) espazio metriko osoa eta $F \colon E \to E$ aplikazio uzkurkorra d metrikarekiko. Orduan, F aplikazioak puntu finko bat eta bakarra du (E, d) espazio metrikoan; hots,*

$$\exists! x \in E \ : \ F(x) = x.$$

Gainera, $x_0 \in E$ guztietarako, $x_n = F(x_{n-1})$ definituz $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ segida konbergentea da, eta bere limitea F-ren puntu finkoa da.

Froga. Izan bitez $x_0 \in E$ edozein eta $x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Frogatuko dugu, lehenengo eta behin, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchyren segida dela. F uzkurkorra denez, existitzen da $0 < \gamma < 1$ non

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \gamma d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \gamma^n d(x_1, x_0).$$

Orokorrean, $r \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &\leq d(x_{n+r}, x_{n+r-1}) + d(x_{n+r-1}, x_{n+r-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \gamma^{n+r-1} d(x_1, x_0) + \gamma^{n+r-2} d(x_1, x_0) + \cdots + \gamma^n d(x_1, x_0) \\ &= \gamma^n(\gamma^{r-1} + \gamma^{r-2} + \cdots + 1) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

$0 < \gamma < 1$ denez, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma^n = 0$ da eta, ondorioz, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchyren segida da. (E, d) espazio osoa da, beraz Cauchyren segidak konbergenteak dira. Izan bedi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. F uzkurkorra denez, jarraitua da eta, orduan,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x;$$

hau da, x F-ren puntu finkoa da. Azkenik, ikus dezagun F-ren puntu finkoa bakarra dela. Izan bitez $x, y \in E$ non $F(x) = x$ eta $F(y) = y$ diren. Orduan,

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq \gamma d(x, y).$$

$0 < \gamma < 1$ denez, derrigorrez $d(x, y) = 0$, hots, $x = y$. □

6.2 Cauchyren problemaren soluzio globalak

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(i) f funtzioak D multzoan x aldagaiarekiko *Lipschitzen baldintza uniformea* egiaztatzen duela, edo D multzoan x-rekiko *uniformeki lipschitziarra* dela diogu existitzen bada $L > 0$ non

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall\, (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

(ii) f funtzioak D multzoan x aldagaiarekiko *Lipschitzen baldintza lokala* egiaztatzen duela, edo D multzoan x-rekiko *lokalki lipschitziarra* dela diogu $(\tau, \xi) \in D$ guztietarako, existitzen badira $U_{(\tau,\xi)}$ (τ, ξ)-ren ingurune bat eta $L_{(\tau,\xi)} > 0$ non

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_{(\tau,\xi)}|x_1 - x_2|, \quad \forall\, (t, x_1), (t, x_2) \in U_{(\tau,\xi)}.$$

Oharrak. (i) Aurreko definizioan, $|\cdot|$ $\mathbb{R}^n$ espazioko norma euklidestarra da, hots, $|x| = |(x_1, \ldots, x_n)| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, baina gogoratu behar da $\mathbb{R}^n$ espazioan norma guztiak baliokideak direla.

(ii) Argi denez, Lipschitzen baldintza uniformeak inplikatzen du Lipschitzen baldintza lokala eta kontrakoa, orokorrean, ez da egia. Hala ere, D trinkoa bada, baliokideak dira Lipschitzen baldintza lokala eta uniformea.

6.2 teorema (Picard-Lindelofen teorema globala)**.** *Izan bitez $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta x-rekiko uniformeki lipschitziarra $[a,b]\times\mathbb{R}^n$-n, $t_0\in[a,b]$ eta $\xi_0\in\mathbb{R}^n$. Orduan,*

$$\begin{cases} x' = f(t,x(t)), & \forall\, t\in[a,b], \\ x(t_0)=\xi_0 \end{cases} \tag{6.2.1}$$

Cauchyren problemak soluzio bat eta bakarra dauka. Gainera, soluzio hori globala da, hots, x $[a,b]$ tarte osoan definituta dago.

Froga. Izan bedi $T\colon \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$, non $x\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ guztietarako

$$T_x(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds, \quad \forall t\in[a,b].$$

Ikusi dugun bezala, Cauchyren problema diferentzialak soluzio bat eta bakarra izango du baldin eta soilik baldin T eragileak puntu finko bat eta bakarra badu. Beraz, azkeneko hau frogatuko dugu, Banachen puntu finkoaren teorema erabiliz.

Lehenengo eta behin, distantzia bat definitu behar dugu $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ funtzio jarraituen espazioan. $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ normarekin $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ Banachen espazioa da, hots, normak induzitzen duen distantziarekin espazio metriko osoa dugu. Hala ere, T ez da uzkurkorra distantzia horrekiko eta beste distantzia bat definitu behar dugu.

f x-rekiko uniformeki lipschitziarra denez, existitzen da $L>0$ non

$$|f(t,\xi_1)-f(t,\xi_2)| \le L|\xi_1-\xi_2|, \quad \forall\, t\in[a,b],\ \forall\,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^n.$$

Izan bedi $K>L$. Orduan, $x\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ bada,

$$\|x\|_B = \sup_{t\in[a,b]} e^{-K|t-t_0|}|x(t)|$$

definituz, $\|\cdot\|_B$ norma bat da $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ espazioan, *Bialecki-ren norma*, hain zuzen ere, eta $\|\cdot\|_\infty$ normarekiko baliokidea da. Izan ere,

$$\min\{e^{-K(b-t_0)}, e^{-K(t_0-a)}\}\|x\|_\infty \le \|x\|_B \le \|x\|_\infty, \quad \forall x\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n),$$

beraz, $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_B)$ Banachen espazioa da.

Frogatuko dugu T uzkurkorra dela $\|\cdot\|_B$ normak induzitzen duen distantziarekiko. Izan bitez $x_1, x_2 \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ eta $t \in [t_0, b]$. Orduan,

$$
\begin{aligned}
e^{-K(t-t_0)}|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)| \leq & e^{-K(t-t_0)}\Big|\int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))\, ds\Big| \\
\leq & e^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \big|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\big|\, ds \\
\leq & e^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|\, ds \\
\leq & e^{-K(t-t_0)} L \int_{t_0}^{t} e^{K(s-t_0)} e^{-K(s-t_0)}|x_1(s) - x_2(s)|\, ds \\
\leq & e^{-K(t-t_0)} L \|x_1 - x_2\|_B \int_{t_0}^{t} e^{K(s-t_0)}\, ds \\
= & e^{-K(t-t_0)} L \|x_1 - x_2\|_B \frac{e^{K(t-t_0)} - 1}{K} \\
= & \frac{L}{K}\big(1 - e^{-K(t-t_0)}\big)\|x_1 - x_2\|_B \\
\leq & \frac{L}{K}\|x_1 - x_2\|_B.
\end{aligned}
$$

Desberdintza bera forgatzen da $t \in [a, t_0]$ bada. Beraz, existitzen da $\gamma = \dfrac{L}{K} \in (0,1)$ non

$$
e^{-K(t-t_0)}|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|_B, \quad \forall\, t \in [a,b],
$$

eta, ondorioz,

$$
\|T_{x_1} - T_{x_2}\|_B = \sup_{t \in [a,b]} e^{-K(t-t_0)}|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|_B;
$$

hau da, T uzkurkorra da, eta, Banachen puntu finkoaren teoremaren arabera, T-k puntu finko bat eta bakarra du, $x \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$, (6.2.1) Cauchyren problema diferentzialaren soluzioa dena.

Gainera,

$$
\begin{cases}
x_0(t) = \xi_0, \\
x_{n+1}(t) = T_{x_n}(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},
\end{cases}
$$

funtzio-segida definituz, Banachen puntu finkoaren teoremaren frogan ikusi dugun bezala, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ Bialeckiren normarekiko. Bialeckiren norma eta supremoaren norma baliokideak direnez, x $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ segidaren limite uniformea da, eta, ondorioz, puntuz puntuko limitea ere bai; hau da:

$$
x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \xi_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\, ds, \quad \forall\, t \in [a,b]. \qquad \square
$$

Definizioa (Picarden ondoz ondoko hurbilketak)**.** Izan bitez $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta x-rekiko uniformeki lipschitziarra $[a,b]\times\mathbb{R}^n$-n, $t_0 \in [a,b]$ eta $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ eta

$$\begin{cases} x_0(t) = \xi_0, \\ x_n(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))\,ds, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ segidaren funtzioak (6.2.1) Cauchyren problema diferentzialaren x soluzio bakarraren *Picarden ondoz ondoko hurbilketak* direla diogu.

Adibidea. Kalkula ditzagun honako Cauchyren problema diferentzial honen soluzioaren Picarden ondoz ondoko hurbilketak:

$$\begin{cases} x' = 2tx, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{6.2.2}$$

$f(t,x) = 2tx$ definituta dago $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ osoan, eta x-rekiko uniformeki lipschitziarra da $[-T,T]\times\mathbb{R}$ multzoan $T > 0$ guztietarako, zeren eta

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |2tx_1 - 2tx_2| \le 2T|x_1 - x_2|, \quad \forall\, t \in [-T,T], \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

baita. Beraz, Picard-Lindelofen teoremaren arabera, badakigu (6.2.2) Cauchyren problema diferentzialak soluzio bat eta bakarra duela, $[-T,T]$ tartean definituta, $T > 0$ edozein izanik. Hots, soluzio hori definituta dago $\mathbb{R}$ osoan, eta haren Picarden ondoz ondoko hurbilketen limite puntuala izango da. Kalkula ditzagun hurbilketa horiek.

$$\begin{aligned}
&x_0(t) = \xi_0 = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}; \\
&x_1(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t 2s\,dx = 1 + t^2; \\
&x_2(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s))\,ds = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2)\,ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}; \\
&x_3(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_2(s))\,ds = 1 + \int_0^t 2s\big(1 + s^2 + \frac{s^4}{2}\big)\,ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}.
\end{aligned}$$

Froga dezagun, indukzioz, $x_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{k!}$ dela $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(t) =& 1 + \int_{t_0}^t 2s x_n(s)\,ds = 1 + \int_0^t 2s \sum_{k=0}^{n} \frac{s^{2k}}{k!}\,ds \\
=& 1 + \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{2s^{2k+1}}{k!}\,ds = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^{2k+2}}{(2k+2)k!} \\
=& 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k+2}}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^{2k}}{k!}.
\end{aligned}$$

Beraz,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = e^{t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

6.3 korolarioa. *Izan bitez $A\colon [a,b] \to \mathcal{M}(n)$ funtzio matrizial jarratua, $\vec{c}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ funtzio bektorial jarraitua, $t_0 \in [a,b]$ eta $\vec{\xi_0} \in \mathbb{R}^n$. Orduan,*

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = A(t)\cdot\vec{x}(t) + \vec{c}(t), \\ \vec{x}(t_0) = \vec{\xi_0} \end{cases}$$

Cauchyren problemak soluzio bat eta bakarra dauka, $[a,b]$ tartean definituta dagoena.

Froga. Egiazta dezagun $f(t,\vec{x}) = A(t)\cdot\vec{x} + \vec{c}(t)$ funtzioak Picard-Lindelofen teorema globalaren hipotesiak betetzen dituela. A eta $\vec{c}$ jarraituak direnez, f jarraitua da $[a,b]\times\mathbb{R}^n$ multzoan. Egiaztatu behar dugu f-k Lipschitzen baldintza uniformea betetzen duela x aldagaiarekiko, haren definizio-eremuan. Izan bitez $\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2} \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(t,\vec{\xi_1}) - f(t,\vec{\xi_2})| = |(A(t)\cdot\vec{\xi_1} + \vec{c}(t)) - (A(t)\cdot\vec{\xi_2} + \vec{c}(t))| = |A(t)\cdot(\vec{\xi_1} - \vec{\xi_2})|.$$

Izan bedi $\|A(t)\| = \sup\limits_{|\vec{x}|=1} |A(t)\cdot\vec{x}|$ $A(t)$ matrizearen norma. Orduan,

$$|f(t,\vec{\xi_1}) - f(t,\vec{\xi_2})| \leq \|A(t)\| |\vec{\xi_1} - \vec{\xi_2})|, \quad \forall t \in [a,b],\ \forall \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

A funtzio matrizial jarraitua denez $[a,b]$ tartean, $||A(\cdot)||$ ere jarraitua da $[a,b]$ tarte trinkoan, eta, ondorioz, bornatua; hau da, existitzen da $L > 0$ non $||A(t)|| \leq L$ den $t \in [a,b]$ guztietarako. Hots, f-k Lipschitzen baldintza uniformea betetzen du $L = \max\limits_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$ konstantearekin. □

6.4 korolarioa. *Izan bitez $a_n, c\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraituak, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $t_0 \in [a,b]$ eta $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$. Orduan,*

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = c(t), \\ x^{(k)}(t_0) = \xi_k,\ k = 0, 1\ldots, n-1, \end{cases}$$

Cauchyren problemak soluzio bat eta bakarra dauka, $x \in \mathcal{C}^n([a,b])$.

Froga. n ordenako ekuazio diferentzial lineala n ekuazioko lehen ordenako sistema diferentzial lineal bihur daiteke, eta, ondorioz, 6.3 korolarioa aplika daiteke. □

Picard-Lindelofen teoremak ziurtatzen ditu (6.2.1) Cauchyren problemaren soluzio globalaren existentzia eta bakartasuna; baina eskatzen den baldintza, Lipschitzen baldintza uniformea, hain zuzen ere, ez bada betetzen, emaitza ahulagoak ere froga daitezke.

6.5 teorema (Cauchy-Peanoren teorema)**.** *Izan bitez $f\colon [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta bornatua, $t_0 \in [a,b]$ eta $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Orduan,*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \ \forall\, t \in [a,b] \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

Cauchyren problemak gutxienez soluzio bat dauka. Gainera, soluzio hori globala da, hots, x $[a,b]$ tarte osoan definituta dago.

Oharra. f funtzioak ez badu Lipschitzen baldintza uniformea, baina Cauchy-Peanoren teoremaren baldintzak betetzen baditu, oraindik ziurta daiteke soluzioaren existentzia. Hala ere, soluzio hori topatzeko, ezin dira Picarden ondoz ondoko hurbilketak erabili. Gerta daiteke funtzio-segida horren limitea ez dela existitzen, eta, nahiz eta existitu, limite horrek ez du zertan Cauchyren problemaren soluzioa izan.

Adibidea (Mullerren kontraadibidea)**.** Izan bedi $f\colon [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ honela definituta:

$$f(t,x) = \begin{cases} 2t, & x \le 0 \text{ bada}, \\ -2t, & x \ge t^2 \text{ bada}, \\ 2\lambda t - 2(1-\lambda)t, & (t,x) = \lambda(t,0) + (1-\lambda)(t,t^2) \text{ bada}. \end{cases} \tag{6.2.3}$$

f funtzioa jarraitua eta bornatua da $[0,1]\times\mathbb{R}$ multzoan; beraz, Cauchy-Peanoren teoremak ziurtatzen du

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{6.2.4}$$

Cauchyren problema diferentzialak gutxienez soluzio bat duela. Ikusiko dugu Picarden ondoz ondoko hurbilketen limitea ez dela existitzen $x_0(t) = 0$ hartzen dugunean eta, ondorioz, ezin dugula Cauchyren problemaren soluzio bat aurkitu horiek erabiliz. Kasu horretan, $t_0 = \xi_0 = 0$, beraz,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t f(t, x_0(s))\, ds = \int_0^t f(s,0)\, ds = \int_0^t 2s\, ds = t^2, \\ x_2(t) &= \int_0^t f(t, x_1(s))\, ds = \int_0^t f(s,s^2)\, ds = -\int_0^t 2s\, ds = -t^2, \\ x_3(t) &= \int_0^t f(t, x_2(s))\, ds = \int_0^t f(s,-s^2)\, ds = \int_0^t 2s\, ds = t^2. \end{aligned}$$

Hasierako hurbilketak nolakoak diren ikusita, erraz frogatzen da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$x_{2n-1}(t) = t^2, \qquad x_{2n} = -t^2, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

direla. Argi denez, $\{x_n\}$ funtzio-segida ez da konbergentea; indize bakoitiko gaiek osatzen duten azpisegidaren limitea $x_{bak}(t) = t^2$ da, eta indize bikoitikoek osatzen dutenaren limitea, aldiz, $x_{bik}(t) = -t^2$. Erraz frogatzen da ez x_{bak} ez eta x_{bik} ere ez direla (6.2.4) problemaren soluzioak.

Cauchy-Peanoren teoremak ziurtatzen du Cauchyren problemaren soluzioaren existentzia. Ikus dezagun, nahiz eta Lipschitzen baldintza ez den betetzen, soluzio hori bakarra dela. Izan bitez x, y (6.2.4) problemaren soluzioak, f (6.2.3) formularen bidez emanda, eta izan bedi

$$g(t) = (x(t) - y(t))^2 \geq 0, \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Alde batetik, $g(0) = (x(0) - y(0))^2 = 0$ eta, bestetik, deribatuz,

$$g'(t) = 2(x(t) - y(t))(x'(t) - y'(t)) = 2(x(t) - y(t))(f(t, x(t)) - f(t, y(t))) \leq 0,$$

f funtzioa x aldagaiarekiko beherakorra delako. Ondorioz, $g(t) \leq 0$ t guztietarako, hau da, $x \equiv y$.

6.3 Cauchyren problemaren soluzio lokalak

Aurreko ataleko teoremetan, f funtzioak hipotesiak betetzen baditu $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ moduko eremu batean, Cauchyren problemaren soluzioen existentzia bermatuta dago $[a, b]$ tartean. f-k betetzen dituen hipotesiak ahulagoak baldin badira, batzuetan bakarrik ziurtatu ahal izango dugu soluzioen existentzia lokala. Has gaitezen adibide batzuekin.

Adibidea. Azter dezagun honako Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ x(0) = \xi_0 > 0. \end{cases}$$

$f(t, x) = x^2$ funtzioa jarraitua da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ osoan, baina ez da x aldagaiarekiko uniformeki lipschitziarra, zeren eta

$$|f(t, \xi_1) - f(t, \xi_2)| = |\xi_1^2 - \xi_2^2| = |\xi_1 + \xi_2|\, |\xi_1 - \xi_2|$$

baita, eta $|\xi_1 + \xi_2|$ ezin da bornatu ξ_1, ξ_2 edozein bi zenbaki erreal badira. Kasu horretan, ekuazio diferentziala aldagai bananduetakoa denez, zuzenean ebatz daiteke:

$$\begin{aligned} x' = x^2 \implies \frac{dx}{x^2} = dt \implies \int_0^t \frac{dx}{x^2} = \int_0^t ds \implies -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(0)} = t \\ \implies \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{\xi_0} - t = \frac{1 - \xi_0 t}{\xi_0}. \end{aligned}$$

Hau da, problema horren soluzioa $x(t) = \dfrac{\xi_0}{1 - \xi_0 t}$ da, eta soluzio hau ez dago definituta $\mathbb{R}$ osoan, $(-\infty, 1/\xi_0)$ tartean dago definituta soilik. Beraz, kasu horretan, existentzia eta bakartasuna baditugu, baina soluzioa ez da globala.

Adibidea. Azter dezagun orain Cauchyren problema diferentzial hau:

$$\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

$f(t,x) = 2\sqrt{|x|}$ ez da x-rekiko uniformeki lipschitziarra, zeren eta $\xi_1, \xi_2 > 0$ hartuz,

$$|f(t,\xi_1) - f(t,\xi_2)| = 2\big|\sqrt{\xi_1} - \sqrt{\xi_2}\big| = 2\frac{|\xi_1 - \xi_2|}{\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2}}$$

baita, eta $\dfrac{1}{\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2}}$ ezin da bornatu ξ_1, ξ_2 jatorritik nahi den bezain hurbil egon daitezkeelako.

Kasu horretan, soluzioaren bakartasuna galtzen da. $x_1 \equiv 0$ problemaren soluzioa da, baina

$$x_2(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \text{ bada}, \\ 0, & t < 0 \text{ bada}, \end{cases}$$

ere soluzioa da. Izan ere,

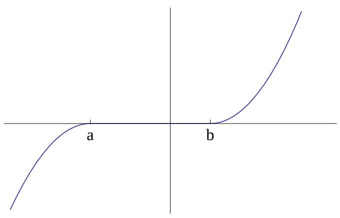
$$x_2'(t) = \begin{cases} 2t, & t \geq 0 \text{ bada}, \\ 0, & t < 0 \text{ bada}; \end{cases} \quad \text{eta} \quad 2\sqrt{|x_2(t)|} = \begin{cases} 2\sqrt{|t^2|} = 2|t| = 2t, & t \geq 0 \text{ bada}, \\ 0, & t < 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Antzera frogatzen da x_3 ere soluzioa dela, non

$$x_3(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \text{ bada}, \\ -t^2, & t < 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Are gehiago, $a, b \in \mathbb{R}$ guztietarako, $a < 0 < b$ izanik,

$$x_{a,b}(t) = \begin{cases} -(t-a)^2, & t \leq a \text{ bada}, \\ 0, & a < t < b \text{ bada}, \\ (t-b)^2, & t \geq b \text{ bada}, \end{cases}$$



Cauchyren problemaren soluzio globala da.

Sarritan, f funtzioak betetzen dituen propietateak, uniformeak izan beharrean, lokalak edo puntualak dira. Esate baterako, gerta daiteke f funtzioa jarraitua edo lipschitziarra dela soilik $(t_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ puntuko ingurune batean; hots, $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(\xi_0, r)$ moduko multzo batean, $\delta, r > 0$ izanik. Aztertuko dugu jarraian zer ondoriozta daitekeen Cauchyren problema diferentzialaren soluzioaren existentziari buruz egoera horretan.

6.6 teorema (Existentziaren teorema lokala)**.** *Izan bitez* $(t_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*,* $\delta > 0$*,* $r > 0$*,* $A = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(\xi_0, r)$ *multzo trinkoa eta* $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ *jarraitua. Orduan, existitzen da* h *non*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \tag{6.3.1}$$

Cauchyren problema diferentzialak gutxienez soluzio bat duen $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ *tartean definituta.*

Froga. f ez denez bornatua $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ moduko multzo batean, ezin dugu Cauchy-Peanoren teorema erabili. $\tilde{f}$ funtzio berri bat definituko dugu, Cauchy-Peanoren teoremaren hipotesiak betetzen dituena, eta $\tilde{f}$ funtzioarekin lotutako Cauchyren problema diferentzialaren soluzioa gure problemaren soluzioa ere badela frogatuko dugu.

Izan bedi $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \overline{B}(\xi_0, r)$ honela definituta:

$$\pi(\xi) = \begin{cases} \xi, & |\xi - \xi_0| \le r \text{ bada,} \\ \xi_0 + r\dfrac{\xi - \xi_0}{|\xi - \xi_0|}, & |\xi - \xi_0| > r \text{ bada.} \end{cases}$$

Hau da, $\xi \in \overline{B}(\xi_0, r)$ bada, π aplikazioak berdin uzten du, eta, bestela, ξ eta ξ_0 puntuak lotzen dituen zuzenkiaren eta $|\xi - \xi_0| = r$ zirkunferentziaren arteko ebakipuntura eramaten du. Beraz, $\mathbb{R}^n$ espazioko puntuak $\overline{B}(\xi_0, r)$ zirkulu itxian proiektatzen du. Argi denez, π funtzio jarraitua da.

Izan bedi, orain,

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (t, \xi) &\rightsquigarrow \tilde{f}(t, \xi) = f(t, \pi(\xi)). \end{aligned}$$

π eta f jarraituak direnez, $\tilde{f}$ jarraitua da $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \mathbb{R}^n$ bandan. Gainera, f jarraitua denez $A = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(\xi_0, r)$ multzo trinkoan, bornatua da; hau da, existitzen da $M > 0$ non $|f(t, \xi)| \le M$, $(t, \xi) \in A$ guztietarako. Baina $\pi(\xi) \in \overline{B}(\xi_0, r)$ denez,

$$|\tilde{f}(t, \xi)| = |f(t, \pi(\xi))| \le M, \quad \forall\, (t, \xi) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \mathbb{R}^n.$$

Orduan, $\tilde{f}$-k Cauchy-Peanoren teoremaren hipotesiak betetzen dituenez, honako Cauchyren problema diferentzial honek,

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{f}(t, \tilde{x}(t)), \\ \tilde{x}(t_0) = \xi_0, \end{cases}$$

gutxienez soluzio bat dauka; hau da, existitzen da $\tilde{x}\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ non

$$\tilde{x}(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{f}(s, \tilde{x}(s))\, ds$$

den. Frogatuko dugu $\tilde{x}$ (6.3.1) problemaren soluzioa dela ere, agian tarte txikiago batera murrizten dugunean bere definizio-eremua. $\tilde{x}$ jarraitua denez t_0 puntuan, existitzen da $h > 0$, $h \le \delta$, non

$$|\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_0)| = |\tilde{x}(t) - \xi_0| < r, \quad \forall\, t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Hau da, $\tilde{x}(t) \in \overline{B}(\xi_0, r)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ guztietarako eta, ondorioz, $\tilde{f}(t, \tilde{x}(t)) = f(t, \tilde{x}(t))$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ bada. Orduan, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ guztietarako,

$$\tilde{x}(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} \tilde{f}(s, \tilde{x}(s)\, ds = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}(s)\, ds$$

eta $\tilde{x}$ (6.3.1) problemaren soluzioa da. $\square$

Oharra. Aurreko teoremaren hipotesiekin, froga daiteke

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

Cauchyren problema diferentzialaren soluzioaren definizio-tartea, gutxienez, $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ dela, non $h = \min\{\delta, r/M\}$ den, eta $M = \sup\limits_{(t,\xi)\in A} |f(t, \xi)|$.

6.7 teorema (existentzia eta bakartasunaren teorema lokala)**.** *Izan bitez* $(t_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $r > 0$, $A = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(\xi_0, r)$ *multzo trinkoa eta* $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ *jarraitua eta* x *aldagaiarekiko* A *multzoan lipschitziarra. Orduan,*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \tag{6.3.2}$$

Cauchyren problema diferentzialak soluzio bat eta bakarra du $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ *tartean definituta,* $h = \min\{\delta, r/M\}$ *izanik, eta* $M = \sup\limits_{(t,\xi)\in A} |f(t, \xi)|$.

Froga. Soluzioaren existentzia ziurtatuta dago 6.6 teoremaren hipotesiak betetzen direlako; bakartasuna frogatu behar dugu soilik. Teorema horren frogaren notazioa mantenduz, x I tartean definitutako (6.3.2) problemaren soluzioa bada, orduan,

$$\begin{cases} x' = \tilde{f}(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases} \tag{6.3.3}$$

Cauchyren problemaren soluzioa ere bada, non $\tilde{f}(t, \xi) = f(t, \pi(\xi))$ den. Frogatuko dugu $\tilde{f}$-k Lipschitzen baldintza uniformea betetzen duela $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \mathbb{R}^n$ bandan, eta ondorioztatuko dugu, Picard-Lindelofen teorema globala kontuan hartuz, (6.3.3) Cauchyren problema diferentzial horren soluzioa bakarra dela eta, beraz, (6.3.2) problemarena ere bai.

f-k A multzoan x aldagaiarekiko Lipschitzen baldintza uniformea betetzen duenez, existitzen da $L > 0$ non

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B}(\xi_0, r).$$

Izan bitez $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$. Orduan,

$$|\tilde{f}(t, \xi_1) - \tilde{f}(t, \xi_2)| = |f(t, \pi(\xi_1)) - f(t, \pi(\xi_2))| \leq L|\pi(\xi_1) - \pi(\xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|$$

Hau da, $\tilde{f}$ uniformeki lipschitziarra da $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \mathbb{R}^n$ multzoan x-rekiko, eta, esan dugun bezala, (6.3.3) problemaren soluzioa bakarra da eta $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ tartean definituta dago. x I tartean definitutako (6.3.2) problemaren soluzio bat bada, $I \subset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ denez, x bakarra da. $\square$

6.8 korolarioa. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $(t_0, \xi_0) \in D$. f eta $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ jarraituak badira (t_0, ξ_0) puntuaren ingurune batean, orduan,*

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

Cauchyren problemak soluzio bat eta bakarra dauka, t_0 puntuaren ingurune batean definituta.

Froga. f eta $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ jarraituak badira (t_0, ξ_0) puntuaren ingurune batean, existitzen dira $\delta > 0$ eta $r > 0$ non f eta $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ jarraituak diren $A = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [\xi_0 - r, \xi_0 + r]$ multzo trinkoan, eta, ondorioz, bornatuak ere bai; hau da, existituko da $K > 0$ non

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi) \right| \leq K, \quad \forall\, (t, \xi) \in A.$$

Izan bitez $\xi_1, \xi_2 \in [\xi_0 - r, \xi_0 + r]$. Batez besteko balioaren teoremaren arabera, existitzen da $\eta \in [\xi_0 - r, \xi_0 + r]$ non

$$|f(t, \xi_1) - f(t, \xi_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \eta)(\xi_1 - \xi_2) \right| \leq K|\xi_1 - \xi_2|.$$

Hau da, f-k x aldagaiarekiko Lipschitzen baldintza betetzen du A multzoan, eta, horren ondorioz, aurreko teoremaren arabera, Cauchyren problemaren soluzioa existitzen da eta bakarra da. $\square$

6.9 teorema (bakartasuna). *Izan bitez $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ irekia eta $f\colon D \to \mathbb{R}$ jarraitua eta x aldagaiarekiko lokalki lipschitziarra D-n. Existitzen badira $x_i\colon I_i \to \mathbb{R}^n$, non $x_i' = f(t, x_i(t))$, $i = 1, 2$, eta $t_0 \in I_1 \cap I_2$ non $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ den, orduan, $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in I_1 \cap I_2$ guztietarako.*

6.4 Soluzioen luzapena

Aurreko atalean, Cauchyren problema diferentzialen soluzio lokalen existentzia eta bakartasunari buruzko emaitzak eman ditugu, baina soluzio lokal horiek non dauden definituta guztiz zehaztu gabe. Hasierako baldintza t_0 puntuan emanda, aurkitu ditugu f-rentzat baldintza nahikoak ziurtatu ahal izateko existitzen dela t_0-ren ingurune batean definituta dagoen soluzio bat.

Atal honetan aztertuko dugu zein den t_0-n zentratutako tarterik handiena, non Cauchyren problemaren soluzioa defini daitekeen. Horretarako, lagungarria izango da Cauchyren problema bi zatitan aztertzea, alde batetik t_0 baino handiagoak diren t-ren balioak hartuz eta bestetik t_0 baino txikiagoak direnak.

Definizioa. Izan bitez $f\colon U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, \xi_0) \in U$, $I \subset \mathbb{R}$, x

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in I \\ x(t_0) = \xi_0. \end{cases} \tag{6.4.1}$$

problemaren soluzioa eta $h > 0$.

(i) Izan bedi $I = [t_0, t_0 + h)$ edo $I = [t_0, t_0 + h]$. $x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ (6.4.1) Cauchyren problemaren *eskuin-soluzioa* dela diogu, eta (x, I) moduan idazten dugu, adierazteko zein den soluzio horren definizio-eremua.

(ii) Izan bedi $I = (t_0 - h, t_0]$ edo $I = [t_0 - h, t_0]$. $x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ (6.4.1) Cauchyren problemaren *ezker-soluzioa* dela diogu, eta (x, I) moduan idazten dugu, adierazteko zein den soluzio horren definizio-eremua.

Cauchyren problema baten soluzio lokalen multzoan ordena-erlazio partzial bat definituko dugu. Gogora dezagun problema diferentzialen adierazpide grafikoei kurba integral deritzela. Ikuspuntu geometriko batetik, kurba bat eta haren luzapenak edo murrizketak erlazionatuta daude, eta ideia hori zehazten duen ordena-erlazio bat emango dugu.

Definizioa. Izan bitez (x_1, I_1) eta (x_2, I_2) Cauchyren problema beraren eskuin-soluzioak. Honako ordena partzialeko erlazio hau definitzen dugu:

$$(x_1, I_1) \preceq (x_2, I_2) \iff I_1 \subset I_2 \ \text{ eta } \ x_{2|_{I_1}} = x_1.$$

Oharra. Ordena-erlazio hau defini daiteke Cauchyren problema diferentzialaren ezker-soluzioen multzoan ere. Jarraian ematen diren definizioetan, eskuin-soluzioak hartuko ditugu, baina antzeko enuntziatuak eman daitezke ezker-soluzioen kasuan.

Definizioa. Izan bedi (x, I) (6.4.1) Cauchyren problemaren eskuin-soluzioa. (x, I) *eskuinerantz luzagarria* dela esaten dugu, existitzen bada (x_1, I_1) (6.4.1) Cauchyren problema beraren beste eskuin-soluzio bat non $(x, I) \preceq (x_1, I_1)$. (x_1, I_1) (x, I) eskuin-soluzioaren *(eskuin-)luzapena* dela diogu, eta $I \subset I_1$ baina $I \neq I_1$ bada, *luzapen hertsia* dela esan ohi da.

Zornen leman oinarrituz, froga daiteke Cauchyren problema diferentzial baten eskuin-soluzioaren luzapenen multzoak elementu maximal bat duela, lehenago definitutako ordena-erlazioarekiko. Elementu maximal hori luzagarria ez den (x, I) soluzioaren luzapena da.

Definizioa. Izan bedi (x, I) Cauchyren problema baten eskuin-soluzioa. Luzagarria ez den (x, I)-ren luzapenari Cauchyren problemaren *eskuin-soluzio maximal* esaten diogu, eta (x^*, I^*) moduan adierazi ohi da.

6.10 teorema. *Izan bitez $K \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ multzo trinkoa, $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ funtzio jarraitua eta $(t_0, \xi_0) \in K$. Orduan,*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0 \end{cases}$$

Cauchyren problemaren eskuin-soluzio maximalak, (x^*, I^*), honako hau betetzen du:

(i) Existitzen da $t_1 \in \mathbb{R}$ non $I^* = [t_0, t_1]$ den.

(ii) $(t_1, x^*(t_1)) \in \partial K$.

Hau da, eskuin-soluzio maximalaren adierazpen grafikoa K-ren mugan bukatzen da.

Froga. Demagun, $I^* = [t_0, t_1)$ dela, eta izan bitez $\tau_1, \tau_2 \in I^*$, $\tau_1 < \tau_2$. Orduan,

$$\begin{aligned} |x^*(\tau_1) - x^*(\tau_2)| &= |\xi_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} f(s, x^*(s))\, ds - \xi_0 + \int_{t_0}^{\tau_2} f(s, x^*(s))\, ds| \\ &= \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(s, x^*(s))\, ds \right| \\ &\le \int_{\tau_1}^{\tau_2} |f(s, x^*(s))|\, ds. \end{aligned}$$

f jarraitua denez K multzo trinkoan, bornatua da, hots, existitzen da $M > 0$ non

$$|f(t, \xi)| \le M, \quad \forall\, (t, \xi) \in K.$$

Orduan, $|x^*(\tau_1) - x^*(\tau_2)| \le M|\tau_2 - \tau_1|$, hau da, x^* soluzioak Cauchyren baldintza betetzen du t_1 puntuko ezker-ingurune batean, eta, ondorioz, bere limitea t_1 puntuan existitzen da.

$$x^*(t_1) = \lim_{t\to t_1^-} x^*(t) = \xi_1$$

definituz, $x^*\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ jarraitua da, eta

$$x^*(t_1) = \lim_{t\to t_1^-} x^*(t) = \xi_0 + \lim_{t\to t_1^-} \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))\, ds = \xi_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x^*(s))\, ds;$$

beraz, x^* problema integralaren soluzioa da $[t_0, t_1]$ tarteko puntu guztietan, eta, ondorioz, problema diferentzialaren soluzioa ere bai. Hau da, $I^* = [t_0, t_1]$ modukoa izan behar du.

Gainera, $t \in (t_0, t_1)$ guztietarako, $(t, x^*(t)) \in K$ denez, eta K trinkoa,

$$(t_1, x^*(t_1)) = \lim_{t \to t_1^-} (t, x^*(t)) \in K.$$

Frogatu nahi dugu $(t_1, x^*(t_1)) \in \partial K$ dela. Absurdura eramanez, suposatuko dugu $(t_1, x^*(t_1)) \notin \partial K$ dela. Orduan,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x^*(t_1) \end{cases}$$

Cauchyren problemak eskuin-soluzioa dauka; hau da, existitzen dira $h > 0$ eta $\tilde{x}\colon [t_1, t_1 + h] \to \mathbb{R}^n$, aurreko problemaren soluzioa. Baina, kasu horretan, x^* luzagarria da $[t_0, t_1 + h]$ tartera, eta hori ezinezkoa da x^* soluzio maximala delako. Beraz, $(t_1, x^*(t_1)) \in \partial K$. □

f-ren definizio-eremua multzo trinkoa izan beharrean irekia bada, egoera konplikatuagoa da.

Definizioa. Izan bitez $y\colon (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ eta $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$. (t_1, ξ_1) puntua y-ren grafikoaren *limite-puntua* dela diogu $t \to t_1^-$ denean, baldin eta (t_1, ξ_1) puntuko edozein ingurunetan $(t, y(t))$ motako puntu bat badago, $t \in (t_0, t_1)$ izanik.

Oharra. (t_1, ξ_1) y-ren grafikoaren limite-puntua izateak ez du esan nahi y-k limitea duenik t_1 puntuan.

6.11 lema (Wintner)**.** *Izan bitez $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ multzo irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta $x\colon (t_0, t_1) \to \mathbb{R}^n$ non $x' = f(t, x(t))$ den. $(t_1, \xi_1) \in D$ x-ren limite-puntua bada, orduan, $\lim_{t \to t_1^-} x(t) = \xi_1$.*

6.12 teorema. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta $(t_0, \xi_0) \in D$. Orduan,*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0, \end{cases}$$

Cauchyren problemaren eskuin-soluzio maximalak, (x^*, I^*), honako hau betetzen du:

(i) $I^* = [t_0, t_1)$ *non* $t_1 \in \mathbb{R}$ *edo* $t_1 = +\infty$ *izan daitekeen;*

(ii) $\big(t_1, \lim_{t \to t_1^-} x^*(t)\big) \in \partial D$.

Froga. Lehenengo eta behin, I^* tartea eskuinetik irekia dela frogatuko dugu. Absurdura eramanez, demagun existitzen dela $t_1 \in \mathbb{R}$ non $I^* = [t_0, t_1]$ den. Orduan, $(t_1, x^*(t_1)) \in D$, baina D irekia da eta f jarraitua D-n; beraz, $x^*(t_1)$ hasierako balio modura hartzen badugu gure Cauchyren probleman, x^* luzagarria da, eta hori kontraesan bat da, x^* soluzio maximala delako. Orduan, $I^* = [t_0, \infty)$ edo existitzen da $t_1 \in \mathbb{R}$ non $I^* = [t_0, t_1)$.

Ikus dezagun orain $(t_1, \xi_1) \in \partial D$ dela, $\xi_1 = \lim\limits_{t \to t_1^-} x^*(t)$ izanik. $t_1 = +\infty$ bada, ez dugu ezer frogatu behar D bornatua ez delako t norabidean. $t_1 \in \mathbb{R}$ bada, $(t_1, \xi_1) \in \overline{D}$ x jarraitua delako. $(t_1, \xi_1) \in \mathring{D}$ balitz, x^* luzatu ahal izango genuke; beraz, $(t_1, \xi_1) \in \partial D$. □

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ jarraitua, $(t_0, \xi_0) \in D$ eta $I^* = [t_0, t_1)$

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0, \end{cases}$$

Cauchyren problemaren x^* eskuin-soluzio maximalaren definizio-tartea. $t_1 < +\infty$ bada eta $\lim\limits_{t \to t_1^-} |x^*(t)| = +\infty$ bada, orduan, x^*-k *lehertu* egiten duela esaten da.

Adibidea. Honako Cauchyren problema honetarako:

$$\begin{cases} x' = x(1 - x), \\ x(0) = \xi, \end{cases} \tag{6.4.2}$$

(i) Marraztu problemaren kurba integralak ξ-ren balioen arabera, ekuazio diferentziala analitikoki ebatzi gabe.

(ii) Aztertu problemaren soluzio maximalen existentzia-tartea, ξ-ren balioen arabera.

(iii) Frogatu $\lim\limits_{t \to \infty} x(t; 0, \xi) = 1$ dela, $0 < \xi < 1$ bada.

$f(t, x) = x(1-x)$ funtzioa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ espazioan jarraitua eta x-rekiko lokalki lipschitziarra da; beraz, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ espazioko puntu bakoitzetik problemaren kurba integral bat eta bakarra igarotzen da.

Lehendabizi, ekuazio diferentzialaren bi soluzio konstante aurkitzen ditugu (kurba integral horizontalak):

$$\begin{cases} x' = x(1 - x), \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

problemaren soluzioa $x(t) = 0$ $t \in \mathbb{R}$ guztietarako da, eta

$$\begin{cases} x' = x(1 - x), \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

problemarena, $x_2(t) = 1$ $t \in \mathbb{R}$ guztietarako.

Kurba integralek ezin dutenez elkar ebaki, ekuazio diferentzialaren beste kurba integralak ($\xi \neq 0, 1$ balioei dagokienak) ezin dira igaro bi kurba integral horizontal horiek mugatutako eremu batetik beste eremu batera.

(i) $\xi > 1$ bada, (6.4.2) problemaren soluzioak $x(t) > 1$ betetzen du $t \in \mathbb{R}$ guztietarako, eta, ondorioz, $f(t, x(t)) = x(t)(1 - x(t)) < 0$ denez, $x'(t) < 0$ da $t \in \mathbb{R}$ guztietarako. Beraz, x beherakorra da $\mathbb{R}$ osoan, eta $x = 1$ zuzenaren gainean dago grafikoa.

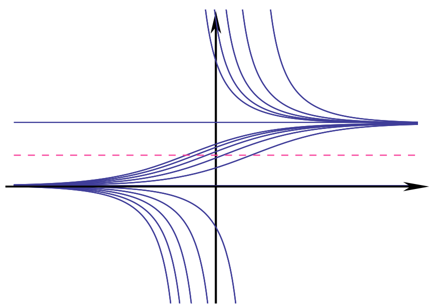
(ii) $\xi < 0$ bada, (6.4.2) problemaren soluzioak $x(t) < 0$ betetzen du $t \in \mathbb{R}$ guztietarako. Hemen ere $f(t, x(t)) < 0$ da, eta, aurreko kasuan bezala, x beherakorra da $\mathbb{R}$-n. x-ren grafikoa $x = 0$ zuzenaren azpian dago.

(iii) $0 < \xi < 1$ bada,(6.4.2) problemaren soluzioak $0 < x(t) < 1$ betetzen du $t \in \mathbb{R}$ guztietarako, eta $f(t, x(t)) = x(t)(1 - x(t)) > 0$ da $t \in \mathbb{R}$ guztietarako. Ondorioz, x gorakorra da $\mathbb{R}$ osoan, eta x-ren grafikoa $x = 0$ eta $x = 1$ zuzenen artean dago.

Horrez gain,

$$x''(t) = \big(x(t)(1 - x(t))\big)' = (1 - 2x(t))x'(t) = (1 - 2x(t))x(t)(1 - x(t))$$

denez, $x''(t) = 0$ da $x = 1/2$ bada. Beraz, problemaren kurba integralek inflexio-puntuak dituzte $(t, 1/2)$ puntuetan, eta, ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak aurkitzeko, x''-ren zeinua aztertu behar da.



Dakigunez, problemaren soluzio maximalen grafikoek planoko mugan bukatu behar dute. Hori dela eta, $0 < x(0) = \xi < 1$ hasierako baldintzari loturiko x soluzioak $\mathbb{R}$ osoan definitutako funtzioak dira; hau da, soluzio globalak dira. $x(0) = \xi > 1$ hasierako baldintzari loturiko eskuin-soluzioak $[0, \infty)$ tartean definiturik daude, baina ezin da ezer esan ezker-soluzioari buruz. Azkenik, $x(0) = \xi < 0$ bada, ezker-soluzioaren definizio-eremua $(-\infty, 0]$ da, baina ezin dugu ziurtatu eskuin-soluzioa globala izango den ala ez.

Bestalde, frogatuko dugu $0 < x(0) = \xi < 1$ hasierako baldintzari loturiko x soluzioak $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ egiaztatzen duela. Demagun, absurdura eramanez, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = l < 1$ dela, eta izan bedi $m = \inf_{x\in[\xi,l]} x(1-x) > 0$.

Problemaren ekuazio integral baliokidea erabiliz, hauxe dugu:

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(s, x(s))\, ds = \xi + \int_0^t x(s)(1 - x(s))\, ds \geq \xi + m\, t.$$

Orduan, $\lim_{t\to+\infty} x(t) \geq \lim_{t\to+\infty} (\xi + mt) = +\infty$, baina hori ezinezkoa da. Beraz, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ da. Antzera froga daiteke $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$ dela.

6.5 Soluzioen menpekotasuna hasierako baldintzekiko

Izan bitez $f\colon [t_0, t_1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Jo dezagun honako Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = \xi_0., \end{cases} \tag{6.5.1}$$

Askotan, zaila edo ezinezkoa da (6.5.1) problemaren ekuazio diferentziala ebaztea, baina f-ren hurbilketa ona existitzen da, f^*, f-ren ordez f^* jartzean, ekuazio diferentziala ebaztea posible delarik. Orduan, jakin nahi dugu

$$\begin{cases} x'(t) = f^*(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0, \end{cases}$$

problemaren soluzioa, x^*, (6.5.1) problemaren x soluzioaren hurbilketa ona ote den.

Beste batzuetan, ξ_0 hasierako baldintza zehatza ez da ezagutzen, eta hasierako balio hurbildu bat erabili behar da, ξ_0^*. Orain ere, jakin nahi dugu

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = \xi_0^*, \end{cases}$$

Cauchyren problemaren soluzioa (6.5.1) problemaren soluzioaren hurbilketa ona ote den.

6.13 teorema (Funtsezko desberdintza)**.** *Izan bitez $f\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta x-rekiko uniformeki lipschitziarra; hau da,*

$$\exists L > 0\colon\ |f(t, \xi_1) - f(t, \xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall t \in [t_0, t_1],\ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Izan bitez $x_1, x_2\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ funtzio deribagarriak, eta demagun existitzen direla $\delta, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ non

$$\begin{aligned} &|x_1(t_0) - x_2(t_0)| \leq \delta, \\ &|x_1'(t) - f(t, x_1(t))| \leq \epsilon_1, \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \\ &|x_2'(t) - f(t, x_2(t))| \leq \epsilon_2, \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

Orduan,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \delta e^{L(t-t_0)} + (\epsilon_1 + \epsilon_2)\frac{e^{L(t-t_0)} - 1}{L}.$$

Teorema horren bi kasu partikular aiparragarriak dira.

6.14 korolarioa. *Izan bitez $f, g\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraituak eta f uniformeki lipschitziarra x aldagaian; hau da,*

$$\exists\, L > 0 \ : \ |f(t, \xi_1) - f(t, \xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall\, (t, \xi_1), (t, \xi_2) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n.$$

Izan bitez $x_1, x_2\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eta $x_0 \in \mathbb{R}^n$ non

$$\begin{cases} x_1' = f(t, x_1), \\ x_1(t_0) = x_0; \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_2' = g(t, x_2), \\ x_2(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demagun existitzen direla $r > 0$ eta $\epsilon > 0$ non

$$|f(t, x) - g(t, x)| \leq \epsilon, \quad \forall\, (t, x) \in [t_0, t_1] \times B_r(x_0)$$

den. Orduan, existitzen da $\delta > 0$ non

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{\epsilon}{L}\big(e^{L(t-t_0)} - 1\big), \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

6.15 korolarioa (Hasierako balioekiko menpekotasuna)**.** *Izan bitez $f\colon [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua eta x-rekiko uniformeki lipschitziarra; hau da,*

$$\exists\, L > 0 \ : \ |f(t, \xi_2) - f(t, \xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|, \quad \forall\, t \in [t_0, t_1],\ \forall\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Izan bitez $x_1, x_2\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ eta $x_0, x_0^* \in \mathbb{R}^n$ non

$$\begin{cases} x_1' = f(t, x_1), \\ x_1(t_0) = x_0; \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_2' = f(t, x_2), \\ x_2(t_0) = x_0^*. \end{cases}$$

Orduan,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_0 - x_0^*| e^{L(t-t_0)}, \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

6.6 Ariketak

1. (a) Azter ezazu honako funtzio hauek jarraitutasun-eremuetan x-rekiko Lipschitzen baldintza (lokala) egiaztatzen duten.

   (b) Aztertu $[a,b]\times\mathbb{R}$ motako eskualdeetan x-rekiko Lipschitzen baldintza uniformea betetzen duten.

   (i) $f(t,x) = 1 + x^2$; (ii) $f(t,x) = 1 + t^2$;

   (iii) $f(t,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; (iv) $f(t,x) = \dfrac{t}{1+x^2}$.

2. Kalkulatu Cauchyren problema hauen soluzioetarako Picarden ondoz ondoko hurbilketak:

   (i) $\begin{cases} x' = x - 1, \\ x(0) = 2. \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x' + x^2 = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

   (iii) $\begin{cases} x' = 1 + x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} tx' = 2t - x, \\ x(1) = 2. \end{cases}$

3. Izan bedi honako Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1-x^2}, \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

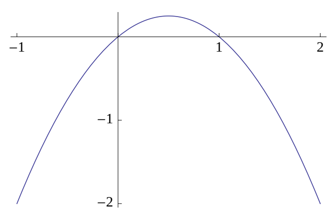
   (i) Marraztu ekuazio diferentzialaren kurba integralak, ekuazioa ebatzi gabe.

   (ii) Aztertu problemaren eskuin-soluzio maximalen definizio-eremua ξ-ren balioen arabera.

4. Izan bitez

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

   eta $f \in C^1(\mathbb{R})$ funtzioaren grafikoa:



   (i) Marraztu ekuazio diferentzialaren kurba integralak.

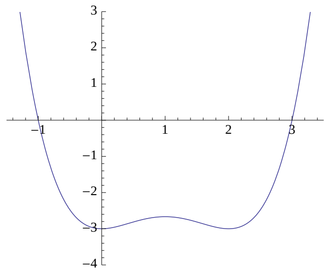
(ii) $0 < \xi < 1$ bada, problemaren soluzioak (maximalak) globalak al dira? Eta $\xi > 1$ edo $\xi < 0$ direnean?

(iii) Frogatu $0 < \xi < 1$ bada problemaren $x(t)$ soluzioak $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ baldintza egiaztatzen duela.

5. Izan bitez

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$

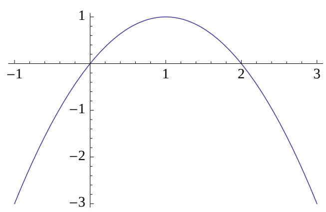
eta $f \in C^1(\mathbb{R})$ funtzioaren grafikoa honako hau:



(i) Marraztu ekuazio diferentzialaren kurba integralak, eta kalkulatu inflexio-puntuak.

(ii) Froga ezazu $-1 \leq \xi \leq 3$ bada problemaren soluzioa globala dela.

6. Izan bedi $x' = (1 - t)f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ funtzioaren grafikoa honako hau izanik:



(i) Marraztu kurba integralak.

(ii) Frogatu $0 < \xi < 2$ bada, $x(t; 0, \xi)$ soluzioa globala dela eta $\lim_{t\to+\infty} x(t; 0, \xi) = 0$ dela.

7. Marraztu honako Cauchyren problema honen kurba integralak $\xi \in \mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera. (Aztertu definizio-eremuak, gorakortasun-eremuak eta ahurtasun-eremuak):

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + t}{t - 2}, \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

8. Marraztu honako problema honen eskuin-soluzio maximalak, $\xi \in \mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera:
$$\begin{cases} x' = \dfrac{4-t}{x-2}, \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$
Kalkulatu soluzio horien limitea, aldagaia definizio-eremuko eskuin muturrerantz doanean.

9. Izan bedi
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-3}{x+t-5}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$
Azter ezazu eskuin-soluzio maximalaren definizio-eremua. Definizio-eremua $[0,b)$ adierazten bada, posible da $b=1$ izatea? Justifika ezazu erantzuna. Kalkula ezazu $\lim\limits_{t\to b^-} x(t;0,2)$.

10. Izan bedi
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x(2-x)(t-2)}{x+t-5}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$
Azter ezazu eskuin-soluzio maximala. Definizio-eremua $[0,b)$ adierazten bada, posible da $b=3$ izatea? Justifika ezazu erantzuna.

11. Izan bedi
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{1-t^2-x}, \\ x(0) = 1/2. \end{cases}$$
Azter ezazu problemaren eskuin-soluzio maximalaren definizio-eremua, eta kalkula ezazu soluzio horren limitea t definizio-eremuaren eskuin-muturrerantz doanean.

12. Honako Cauchyren problema honetarako,
$$\begin{cases} x' = \dfrac{2-x}{x(9-t^2-x^2)}, \\ x(0) = \xi, \end{cases}$$
izan bedi b eskuin-soluzio maximalaren definizio-eremuaren eskuin-muturra. Aurkitu goi- eta behe-borneak b-k har ditzakeen balioetarako, eta kalkulatu $\lim\limits_{t\to b^-} x(t)$ bi kasu hauetan:

   (i) $\xi = 1$ bada,

   (ii) $\xi = 5/2$ bada.

7. gaia

Sistema autonomoak

7.1 Sarrera

Orain arte ikusitako metodo gehienak ekuazio diferentzial linealak eta sistema diferentzial linealak ebazteko izan dira. Sarritan, aztertu behar diren sistema diferentzialak ez dira linealak, eta horien soluzioak aurkitzea zaila edo ezinezkoa izan daiteke. Gai honetan, sistema diferentzialen soluzioen informazio kualitatiboa lortzen saiatuko gara; hau da, sistema diferentziala ebatzi gabe, soluzioen propietateak ondorioztatuko ditugu. Bereziki, lehen ordenako sistema diferentzialak aztertuko ditugu, non eskuineko atala ez den t-ren menpeko funtzioa.

Definizioa. Izan bedi $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jarraitua.

$$\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$$

n ekuazioko sistema diferentzialari *sistema diferentzial autonomo* deritzo.

Adibidea. Izan bitez x eta y bi espezieren populazio-funtzioak: hau da, $x(t)$-k eta $y(t)$-k populazioen banakoen kopurua t unean adieraziko dute. Demagun espezie horiek elkarrekin norgehiagoka ari direla elikadura lortzeko eta bizigunea edukitzeko, honako sistema diferentzial honen arabera:

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y). \end{cases}$$

non f eta g funtzio jarraituak diren. Gehienetan, ezin izango dugu sistema diferentzial hori ebatzi, eta, beraz, ez dugu ezagutuko espezie bakoitzeko populazio-kideen kopuru zehatza t aldiunean. Baina, batzuetan, soluzioen propietate interesgarri batzuk ezagut daitezke sistema ebatzi gabe; esate baterako:

- Existitzen ote diren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, non $x \equiv \alpha$ eta $y \equiv \beta$ sistemaren soluzioak diren. Kasu horretan, $(x,y) \equiv (\alpha,\beta)$ sistema diferentzialaren soluzio konstantea oreka-soluzioa edo sistemaren puntu kritikoa dela diogu.

- Bi espezieak orekan bizi direnean, espezie bateko kide berriak sartzen baditugu t_0 aldiunean, jakin nahi dugu espezieen populazio kopuruak oreka-soluziotik hurbil jarraituko duten etorkizunean.
- t_0 aldiunean bi espezieen populazio kopuruak ezagutuz gero, etorkizunean nola aldatuko diren ezagutu nahi dugu: oreka-soluzioetarantz hurbilduko diren, oreka-balioak existitzen direnean, edo espezie batek irabaziko duen eta bestea desagertuko.

7.2 Sistema autonomo lauak. Fase planoa

Hemendik aurrera, bi ekuazioko sistema diferentzial autonomoak aztertuko ditugu.

Definizioa. Izan bitez $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 klaseko funtzioak.

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases} \tag{7.2.1}$$

sistema diferentzialari *sistema autonomo laua* deritzo. x eta y funtzioei sistema autonomoaren *egoera-aldagaiak* deritze.

Oharra. Bigarren ordenako ekuazio diferentzial esplizitu batean t aldagai independentea esplizituki idatzita agertzen ez bada, hau da, mota honetako ekuazio bat badugu,

$$x'' = f(x, x'),$$

non $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ den, bi ekuazioko sistema autonomo baliokide bat ager daiteke:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x, y). \end{cases}$$

Sistema autonomoen eta sistema ez-autonomoen arteko desberdintasunak erakusteko, bi adibide aztertuko ditugu.

Adibidea. Demagun partikula bat OXY planoan mugitzen dela honako lege honen arabera:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \end{cases}$$

eta $t = t_0$ aldiunean partikula hori $(1, 2)$ puntutik igarotzen dela; hau da, $x(t_0) = 1$, $y(t_0) = 2$ hasierako baldintzak eskatzen ditugula.

Jakin nahi dugu zein den partikula horrek jarraituko duen ibilbidea $t \geq t_0$ balioetarako. Hau da, ebatzi nahi dugu Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ x(t_0) = 1, \ y(t_0) = 2. \end{cases}$$

Bi ekuazio diferentzialak integratuz eta hasierako balioak ezarriz, honako hau dugu:

$$x = e^{t-t_0}, \quad y = 2e^{t-t_0}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Hauek dira partikulak jarraituko duen ibilbidearen ekuazio parametrikoak. Argi denez, ibilbidearen ekuazio esplizitua $y = 2x$ da, $x \geq 1$, $y \geq 2$ izanik; hots, ibilbidea zuzenerdi bat da. Partikularen ibilbidea, beraz, ez da t_0 balioaren menpekoa: $(1, 2)$ puntutik, edozein unetan, igarotzen den partikulak kurba bera deskribatzen du: $y = 2x$ zuzenerdia, $x \geq 1, y \geq 2$, $(1, 2)$ puntutik zer aldiunetan pasatzen den inporta gabe.

Adibidea. Demagun orain partikula OXY planoan mugitzen dela, autonomoa ez den honako sistema diferentzial honen arabera:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{t}, \\ y' = y, \end{cases}$$

eta, aurrean bezala, aztertu nahi dugu zein den partikula batek deskribatzen duen ibilbidea $t = t_0$ unean, partikula $(1, 2)$ puntutik pasatzen bada.

Ekuazio diferentzialak integratuz:

$$x = \frac{t}{t_0}, \quad y = 2e^{t-t_0}, \quad \forall\, t \geq t_0.$$

t parametroa desagerraraziz,

$$y = 2\, e^{t_0(x-1)}, \quad x \geq 1, y \geq 2$$

ekuazio esplizitua lortzen da; ekuazio hori t_0 balioaren menpe dagoenez, bigarren adibide horretan partikulak jarraitzen duen ibilbidea, $(1, 2)$ puntutik pasatu eta gero, puntu horretatik pasatzen den unearen menpekoa da.

Lehen adibideko sistema autonomorako

$$x = e^{t-t_0}, y = 2e^{t-t_0}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

sistemaren soluzioa da, baina

$$x = e^{t+c}, y = 2e^{t+c}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

ere sistemaren soluzioa da, c edozein zenbaki erreal izanik. Soluzio hori ere $(1, 2)$ puntutik pasatzen da, baina une desberdin batean. Horrela, soluzio guztiek kurba bera ematen dute, baina modu desberdinetan parametrizatuta. Ekuazio parametriko horien arteko erlazioa t parametroaren translazio batean datza. Ikusiko dugu propietate hori errepikatzen dela sistema autonomo guztietan.

7.1 proposizioa (Sistema autonomoen soluzioen propietateak)**.** *Izan bitez $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Orduan,* *(i)* $t_0 \in \mathbb{R}$ *eta* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *guztietarako*

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y), \\ x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

hasierako balioetako problemak soluzio bat eta bakar bat du, t_0 *puntuaren ingurune batean definituta.*

(ii) Izan bitez (x, y) *(7.2.1) sistema autonomoaren soluzioa,* $c \in \mathbb{R}$ *eta*

$$\tilde{x}(t) = x(t + c), \quad \tilde{y}(t) = y(t + c), \quad \forall\, t.$$

$(\tilde{x}, \tilde{y})$ *ere (7.2.1) sistema autonomoaren soluzioa da.*

(iii) Izan bitez (x, y) *eta* $(\tilde{x}, \tilde{y})$ *(7.2.1) sistema autonomoaren bi soluzio eta* $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$*,* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *non*

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \\ \tilde{x}(t_1) &= x_0, \quad \tilde{y}(t_1) = y_0. \end{aligned}$$

Orduan,

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_1 + t_0), \quad \tilde{y}(t) = y(t - t_1 + t_0), \quad \forall\, t.$$

(iv) Izan bedi (x, y) *(7.2.1) sistemaren soluzioa, eta demagun existitzen direla* $t_0, T \in \mathbb{R}$ *non*

$$(x(t_0), y(t_0)) = (x(t_0 + T), y(t_0 + T))$$

den. Orduan,

$$(x(t), y(t)) = (x(t + T), y(t + T)), \quad \forall\, t,$$

hots, (x, y) *(7.2.1) sistema autonomoaren soluzio periodikoa da.*

Froga. (i) Existentzia eta bakartasunaren teorema lokalaren ondorioa da.

(ii) (x, y) (7.2.1) sistemaren soluzioa bada, $c \in \mathbb{R}$ guztietarako,

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) =& x'(t + c) = f(x(t + c), y(t + c)) = f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \\ \tilde{y}'(t) =& y'(t + c) = g(x(t + c), y(t + c)) = g(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)), \end{aligned}$$

beraz, $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ere (7.2.1) sistemaren soluzioa da.

(iii) Izan bitez $u(t) = x(t - t_1 + t_0)$ eta $v(t) = y(t - t_1 + t_0)$, t guztietarako. (ii) atalaren arabera, (u, v) ere (7.2.1) sistemaren soluzioa da. Gainera, $u(t_1) = x(t_0) = x_0 = \tilde{x}(t_1)$ eta $v(t_1) = y(t_0) = y_0 = \tilde{y}(t_1)$.

(u, v) eta $(\tilde{x}, \tilde{y})$ Cauchyren problema beraren soluzioak direnez, (i) atalaren arabera, $(u, v) \equiv (\tilde{x}, \tilde{y})$.

(iv) Izan bitez $u(t) = x(t+T)$ eta $v(t) = y(t+T)$. Lehen bezala, (u,v) (7.2.1) sistema autonomoaren soluzioa da. Gainera, $u(t_0) = x(t_0+T) = x(t_0)$ eta $v(t_0) = y(t_0+T) = y(t_0)$ dira, hau da, (x,y) eta (u,v) Cauchyren problema beraren soluzioak dira, eta, bakartasunagatik, t guztietarako $(x(t),y(t)) = (u(t),v(t)) = (x(t+T),y(t+T))$ da. □

Definizioak. Izan bitez $f,g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ eta $x,y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (7.2.1) sistema autonomoaren soluzioa, non $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$ den. Orduan, OXY planoko $\{(x(t),y(t))\colon t \in I\}$ kurba (7.2.1) sistemaren (x_0,y_0) puntutik pasatzen den *ibilbidea* edo *orbita* dela diogu, eta $x = x(t)$, $y = y(t)$ ekuazioak ibilbidearen ekuazio parametrikoak dira.

OXY planoari sistema autonomo lauaren *fase plano* esaten zaio.

Ibilbide baten $(x(t),y(t))$ puntua finkatuz, $(x'(t),y'(t)) = (f(x(t),y(t)),g(x(t),y(t)))$ ibilbidearen bektore ukitzailea da $(x(t),y(t))$ puntuan. $\{(f(x,y),g(x,y))\}$ bektore multzoari sistema autonomoaren *norabide-eremu* deritzo.

7.2 proposizioa (Sistema autonomoen ibilbideen propietateak)**.** *Izan bitez $f,g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.*

(i) (x_0,y_0) puntutik (7.2.1) sistema autonomoaren ibilbide bat eta bakarra pasatzen da.

(ii) $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$ badira, (x_0,y_0) puntutik pasatzen den ibilbidea (x_0,y_0) puntua bera da.

(iii) $|f(x_0,y_0)| + |g(x_0,y_0)| \neq 0$ bada, (x_0,y_0) puntutik pasatzen den ibilbidea itxia da edo ez du bere burua ebakitzen.

Froga. (i) Izan bedi $t_0 \in \mathbb{R}$. Existentzia eta bakartasunaren teorema lokalaren arabera, badakigu existitzen dela (x,y) (7.2.1) sistemaren soluzio bat non $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$ den; beraz, $(x(t),y(t))$, $t \in I$ ibilbidea (x_0,y_0) puntutik pasatzen da. Demagun existitzen dela beste ibilbide bat, (x_0,y_0) puntutik pasatzen dena; hau da, existitzen direla $t_1 \in \mathbb{R}$ eta $(\tilde{x},\tilde{y})$ (7.2.1) sistemaren soluzioa, non $(\tilde{x}(t_1),\tilde{y}(t_1)) = (x_0,y_0)$ den. Orduan,

$$(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) = (x(t-t_1+t_0),y(t-t_1+t_0)), \quad \forall\, t.$$

hots, $(\tilde{x},\tilde{y})$ (x,y)-ren birparametrizazioa da, eta ibilbide bera deskribatzen du.

(ii) $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$ badira, $(x,y) \equiv (x_0,y_0)$ (7.2.1) sistemaren soluzio konstantea da, eta, ondorioz, (x_0,y_0) puntutik pasatzen den ibilbidea puntua bera da.

(iii) Izan bedi $t_0 \in \mathbb{R}$. $f(x_0,y_0) \neq 0$ edo $g(x_0,y_0) \neq 0$ badira, $(x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0)$ hasierako baldintza betetzen duen (7.2.1) sistemaren soluzioa ez da konstantea izango. Existitzen badira $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ non $(x(t_1),y(t_1)) = (x(t_2),y(t_2))$

den, orduan, (x, y) $T = t_2 - t_1$ periododun soluzio periodikoa izango da, eta elkartutako ibilbidea itxia izango da. Bestela, $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, t_1, t_2 guztietarako, hots, ibilbideak ez du bere burua ebakitzen. $\square$

Oharra. Batzuetan, sistema autonomoaren ibilbideen ekuazioa, esplizitua edo inplizitua, kalkula daiteke sistema bera ebatzi gabe.

Izan bedi (x, y) (7.2.1) sistema autonomoaren soluzio ez-konstantea. $f(x, y) \neq 0$ bada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Hau da, soluzio horrek definitzen duen ibilbideak $y' = \dfrac{g(x, y)}{f(x, y)}$ ekuazio diferentziala egiaztatzen du, non aldagai independentea x den orain, $y = y(x)$.

$f(x, y) = 0$ bada, orduan, $g(x, y) \neq 0$ da, eta

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

ekuazio diferentziala dugu ibilbiderako. Kasu horretan, $x = x(y)$ izango da.

Adibidea. Izan bedi honako sistema autonomo hau:

$$\begin{cases} x' = 2xy, \\ y' = y^2 - x^2. \end{cases}$$

$(x, y) \equiv (0, 0)$ sistemaren soluzio konstantea da. $x \neq 0$, $y \neq 0$ direnean, sistema autonomoaren ibilbideak

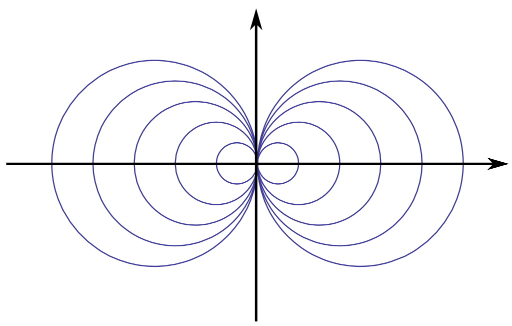
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzioak dira. $\dfrac{y}{x} = z$ aldagai-aldaketa eginez, $y = xz$ denez, $y' = z + xz'$; beraz:

$$\begin{aligned} z + xz' = \frac{z^2 - 1}{2z} &\implies xz' = \frac{z^2 - 1}{2z} - z = -\frac{z^2 + 1}{2z} \\ &\implies \frac{2z\,dz}{z^2 + 1} = -\frac{dx}{x} \\ &\implies \ln(z^2 + 1) = \ln\frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Aldaketa deseginez:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{C}{x} \iff x^2 + y^2 = Cx = 2ax.$$



Ibilbideak dira zentroa ardatz horizontaleko puntuetan dituzten eta jatorritik igarotzen diren zirkunferentziak.

7.3 Sistema autonomoen puntu kritikoak. Egonkortasuna

Aztertu nahi ditugu (7.2.1) sistema autonomoaren soluzioen propietate kualitatiboak; hau da, x eta y funtzioen balio zehatzak kalkulatu gabe, ibilbideen propietate geometrikoak ezagutu nahi ditugu.

Definizioa. Izan bitez $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ badira, (x_0, y_0) puntuari (7.2.1) sistema autonomoaren *puntu kritikoa* edo *oreka-puntua* edo *pausagune-puntua* deritzo.

Definizioa. Izan bitez $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta (x_0, y_0) (7.2.1) sistema autonomoaren puntu kritikoa. Esaten dugu (x_0, y_0) (7.2.1) sistemaren *puntu kritiko isolatua* dela (x_0, y_0) puntuaren ingurune bat existitzen bada non sistemaren beste puntu kritikorik ez dagoen; hots, existitzen bada $r > 0$ non $(f(x, y), g(x, y)) \neq (0, 0)$ den $0 < ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < r$ bada.

Oharra. (7.2.1) sistema autonomoak OXY planoan eremu bektorial bat du elkartuta: $\vec{F}(x, y) = (f(x, y)\, g(x, y))$. Lehen esan dugun bezala, (x, y) puntuan $\vec{F}(x, y)$ bektorea puntu horretatik pasatzen den ibilbidearen bektore ukitzailea da, eta puntu horretan ibilbidearen abiadura adierazten du, nulua ez bada.

Puntu kritikoetan $\vec{F}(x_0, y_0) = \vec{0}$ denez, fisikaren ikuspuntutik, sistema autonomoaren puntu kritikoak $\vec{F}(x, y)$ eremu bektorialaren oreka-puntuak dira.

Adibideak. Honako hiru adibide hauetako puntu kritikoak kalkulatuko ditugu:

(i) $\begin{cases} x' = 1 - y, \\ y' = x^3 + y \end{cases}$

sistema autonomoaren puntu kritikoak honako sistema algebraiko ez-lineal honen soluzioak dira:

$$\begin{cases} 1 - y = 0, \\ x^3 + y = 0. \end{cases}$$

Sistema horren lehen ekuazioa egiaztatzen da soilik $y = 1$ bada, eta balio hori bigarren ekuazioan ordezkatuz, $x^3 + 1 = 0$ bete behar da. Ekuazio horren soluzio erreal bakarra $x = -1$ denez, sistema autonomoak puntu kritiko bakar bat du, $(-1, 1)$ puntua, hain zuzen ere; eta, ondorioz, isolatua da.

(ii) $\begin{cases} x' = (1 - x)(1 - y), \\ y' = (x + 1)(y + 1) \end{cases}$

sistema autonomoaren puntu kritikoak topatzeko, honako sistema hau ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} (1 - x)(1 - y) = 0, \\ (x + 1)(y + 1) = 0. \end{cases}$$

Lehen ekuaziotik, $x = 1$ edo $y = 1$ izan behar dugu. $x = 1$ bada, bigarren ekuazioan ordezkatuz, $y = -1$ dugu; eta $y = 1$ bada, bigarren ekuaziotik $x = -1$ lortzen dugu. Beraz, sistema autonomo horrek bi puntu kritiko ditu, $(1, -1)$ eta $(-1, 1)$, biak isolatuak.

(iii) $\begin{cases} x' = x(1-y), \\ y' = x(y+1) \end{cases}$

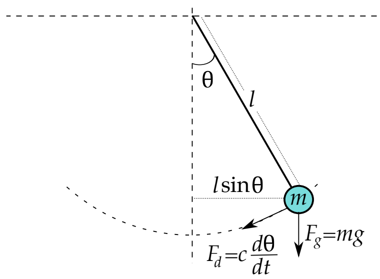
sistema autonomoaren puntu kritikoek honako hau bete behar dute:

$$\begin{cases} x(1-y) = 0, \\ x(y+1) = 0. \end{cases}$$

$x = 0$ bada, y edozein izan daiteke; beraz, $x = 0$ zuzeneko puntu guztiak, $(0, y)$ modukoak $y \in \mathbb{R}$ guztietarako, alegia, sistema autonomoaren puntu kritikoak dira. Puntu kritiko horiek ez dira isolatuak.

$y = 1$, lehen ekuazioaren beste soluzioa, bigarren ekuazioan ordezkatuz, $x = 0$ balioa ateratzen zaigu eta ez dugu puntu kritiko berririk lortzen.

Adibidea (Penduluaren problema)**.** m masako gorputz bat l luzera duen hagatxo batetik zintzilikatuta dago. Hagatxoak bertikalarekin osatzen duen angelua θ izendatuko dugu. Gorputzaren gainean eragiten dituzten indarrak grabitate-indarra eta marruskadura indarra direla onartuko dugu, azkeneko hori θ-ren aldakuntzarekiko proportzionala izanik.



Horrela, penduluaren higidura deskribatzen duen ekuazio diferentziala honako hau da:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{ml}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

$x = \theta$ eta $y = d\theta/dt$ izendatuz,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin x - \dfrac{c}{ml}y. \end{cases}$$

sistema diferentzial autonomo baliokidea dugu. Sistema diferentzial horren oreka-puntuak honako sistema honen soluzioak dira:

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{g}{l} \sin x + \dfrac{c}{ml} y = 0, \end{cases}$$

hots, $(k\pi, 0)$ puntuak, $k \in \mathbb{Z}$ izanik. $(0, 0)$ eta $(\pi, 0)$ puntu kritikoak aztertuko ditugu.

$(0, 0)$ puntuan, $x = \theta = 0$ eta $y = d\theta/dt = 0$ direnez, pendulua bertikalean dago, beherantz, eta geldi dago abiadura zero delako. $c > 0$ bada, egoera-baldintza bat, posizioa edo abiadura (edo biak) pixka bat aldatzen badugu, penduluak oszilazio gero eta txikiagoak izango ditu oreka-posizio horren ingurunean.

$c = 0$ bada, hau da, marruskadura-indarrik ez badago, $(0, 0)$ puntutik hurbil dagoen egoera-baldintza bat hartzen badugu, pendulua $(0, 0)$ puntuaren inguruan oszilatuko du baina inoiz ez da $(0, 0)$-n geldituko.

$(\pi, 0)$ puntuan, $x = \theta = \pi$ eta $y = d\theta/dt = 0$ direnez, pendulua bertikalean dago baita ere; baina orain gorantz, eta geldirik dago abiadura zero delako. Egoera-baldintzetan aldaketa txiki bat badago, pendulua eroriko da, eta ez da inoiz hurbilduko posizio horretara.

Definizioak. Izan bitez $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta (x_0, y_0) (7.2.1) sistema autonomoaren puntu kritiko isolatua.

(i) Esaten da (x_0, y_0) (7.2.1) sistema autonomoaren puntu kritiko *egonkorra* dela $R > 0$ guztietarako, existitzen bada $r > 0$ non (x, y) (7.2.1) sistemaren soluzioa den, eta existitzen bada $t_0 \in \mathbb{R}$ non $||(x(t_0), y(t_0)) - (x_0, y_0)|| < r$ den, orduan, $||(x(t), y(t)) - (x_0, y_0)|| < R$ bada $t > t_0$ guztietarako.

Hau da, (x_0, y_0) egonkorra da sistemaren edozein ibilbide uneren batean (x_0, y_0) puntutik hurbil pasatzen bada, (x_0, y_0)-tik hurbil mantentzen bada une horretatik aurrera.

(ii) Esaten da (x_0, y_0) (7.2.1) sistemaren puntu kritiko *asintotikoki egonkorra* dela egonkorra bada eta existitzen bada $r > 0$ non (x, y) (7.2.1) sistemaren soluzioa den, eta existitzen bada $t_0 \in \mathbb{R}$ non $||(x(t_0), y(t_0)) - (x_0, y_0)|| \leq r$ den, orduan, $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ bada.

Hau da, (x_0, y_0) asintotikoki egonkorra bada, sistemaren edozein ibilbide uneren batean (x_0, y_0) puntutik hurbil baldin badago, orduan, ibilbide horren limitea (x_0, y_0) puntua da $t \to \infty$ denean.

(iii) Esaten da (x_0, y_0) puntu kritiko *egongaitza* dela egonkorra ez bada.

Hau da, (x_0, y_0) egongaitza da uneren batean, handik hurbil dauden ibilbideak (x_0, y_0) puntutik urruntzen badira denbora pasatu ahala.

7.4 Sistema autonomo linealak

Atal honetan koefiziente konstanteetako bi ekuazioko sistema linealak aztertuko ditugu. Izan bedi A 2×2 ordenako matrize erreal ez-singularra, hots, $\det A \neq 0$. Orduan,

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x} \tag{7.4.1}$$

sistema autonomoaren puntu kritiko bakarra $(0,0)$ puntua da. Azter dezagun puntu horren egonkortasuna.

7.3 proposizioa. *Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-k bi balio propio erreal desberdin baditu, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, eta $\lambda_1\lambda_2 > 0$, orduan,*

(i) $\lambda_i > 0$ *badira,* $i = 1, 2$, $(0,0)$ *(7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritiko egongaitza da;*

(ii) $\lambda_i < 0$ *badira,* $i = 1, 2$, $(0,0)$ *(7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritiko asintotikoki egonkorra da.*

Froga. A matrizearen balio propioak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ badira eta $\lambda_1 \neq \lambda_2$, (7.4.1) sistemaren soluzio orokorra honako hau da:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

non $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ λ_1 eta λ_2 balio propioen bektore propioak diren, hurrenez hurren.

(i) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ badira, $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = \lim\limits_{t \to +\infty} |y(t)| = +\infty$; beraz, ibilbideak $(0,0)$-tik urruntzen dira, eta $(0,0)$ puntu kritiko egongaitza da.

(ii) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ badira, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$; hau da, ibilbideak $(0,0)$-rantz hurbiltzen dira, eta $(0,0)$ puntu kritiko asintotikoki egonkorra da. Gainera,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_2 t} \big(C_1 \vec{v}_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 \vec{v}_2 \big),$$

eta $C_2 \neq 0$ bada, lehen batugaia mespretxagarria da bigarrenarekin konparatuta, $t \to +\infty$ doanean; beraz, ibilbideak $\vec{v}_2$ bektoreak definitzen duen zuzenera hurbiltzen dira. $\square$

Definizioa. Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-k bi balio propio erreal desberdin baditu, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, eta $\lambda_1\lambda_2 > 0$, esaten da $(0,0)$ puntua (7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritikoa *nodoa* dela.

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -x + 2y. \end{cases}$$

Sistema horren koefizienteen matrizea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da, eta, $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)$ denez, A-ren balio propioak $\lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = 2$ dira.

$\lambda_1 = 1$ balio propioarekin elkartutako bektore propioa $\vec{v}_1 = (1\ 1)^t$ da, eta $\lambda_2 = 2$ balio propioari dagokiona $\vec{v}_2 = (0\ 1)^t$; beraz, sistemaren soluzioa honako hau da:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$C_1 = 0$ eta $C_2 \neq 0$ badira, $x(t) = 0$, $y(t) = C_2 e^{2t}$ dugu. Soluzio horiek bi ibilbide ematen dizkigute C_2 konstantearen zeinuaren arabera: $C_2 > 0$ bada, ardatzerdi bertikal positiboa dugu (gorantza doa $t \to \infty$ denean), eta $C_2 < 0$ bada, ardatzerdi bertikal negatiboa dugu (beherantza doa $t \to \infty$ denean).

$C_1 \neq 0$ eta $C_2 = 0$ badira, $x(t) = C_1 e^t$, $y(t) = C_1 e^t$ ditugu, hau da $x = y$ zuzenaren zati bat. $C_1 > 0$ bada, lehen koadranteko erdikaria dugu, jatorritik irtetzen den orientazioarekin, eta $C_1 < 0$ bada, hirugarren koadranteko erdikaria, hau ere jatorritik urruntzen dela.

$C_1 \neq 0$ eta $C_2 \neq 0$ badira, t parametroa desagerraraziz,

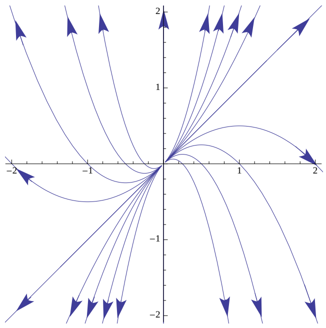
$$y = x + \frac{C_2}{C_1^2} x^2, \quad x \neq 0,$$

jatorrian hasten diren parabola-adarrak, jatorria bera izan ezik. $C_2 > 0$ kasuan, parabola ahurra da; $C_1 > 0$ bada, parabolaren eskuin-adarra dugu goranzko orientazioarekin, eta $C_1 < 0$ bada, parabolaren ezker-adarra dugu, hau ere goranzko orientazioarekin.

Aldiz, $C_2 < 0$ kasuan, parabola ganbila da; $C_1 > 0$ bada, parabolaren eskuin-adarra dugu, eta $C_1 < 0$ bada, parabolaren ezker-adarra dugu, bi kasuetan beheranzko orietazioarekin. Horrez gain,

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{C_2}{C_1^2} x = 1 + \frac{C_2}{C_1} e^t,$$

beraz, $\lim\limits_{t \to \infty} |y/x| = \infty$ eta $\lim\limits_{t \to -\infty} y/x = 1$. Balio propioak positiboak dira, eta ibilbide guztiak jatorritik urruntzen dira.



7.4 proposizioa. *Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-k balio propio bikoitza badu, $\lambda \in \mathbb{R}$, orduan,*

(i) $\lambda < 0$ bada, $(0,0)$ (7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritiko asintotikoki egonkorra da,

(ii) $\lambda > 0$ bada, $(0,0)$ (7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritiko egongaitza da.

Froga. λ A-ren balio propio bikoitza bada, bi egoera ager daitezke:

(a) λ-k bi bektore propio linealki independente ditu elkartuta, $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$. Orduan,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \big(C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2\big)e^{\lambda t},$$

hau da, existitzen da $k \in \mathbb{R}$ non $x = ky$ den.

$\lambda < 0$ bada, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, eta ibilbideak jatorrirantz hurbiltzen diren zuzenerdiak dira. Aldiz, $\lambda > 0$ bada, $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$ eta ibilbideak jatorritik urruntzen dira.

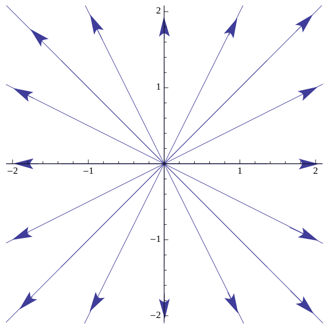
(b) λ-k ez baditu bi bektore propio linealki independente, orduan,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \big(C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 + C_2\vec{v}_1 t\big)e^{\lambda t},$$

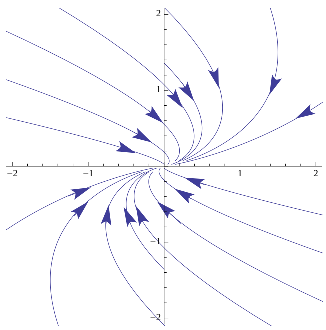
non $\vec{v}_2 \in \ker(A - \lambda I)^2 - \ker(A - \lambda I)$ eta $\vec{v}_1 = (A - \lambda I)\vec{v}_2$ diren. Kasu horretan, ibilbideak ez dira zuzenerdiak, baina, lehen bezala, $\lambda < 0$ bada, $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ eta ibilbideak jatorrirantz hurbiltzen dira; eta $\lambda > 0$ bada, $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = \lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$ eta ibilbideak jatorritik urruntzen dira. □

Definizioa. Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-k balio propio bikoitza badu, $\lambda \in \mathbb{R}$, orduan, $(0,0)$ puntua (7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritikoa *nodo inpropioa* dela diogu.

Adibidea. Izan bedi
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$
Sistema horren soluzioak $x(t) = C_1 e^t$, $y(t) = C_2 e^t$ dira; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, beraz, $y = \dfrac{C_1}{C_2} x$ zuzenerdiak ditugu, jatorritik urruntzen direnak.



Adibidea. Izan bedi
$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -y. \end{cases}$$
Sistema horren koefizienteen matrizea
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
da, eta balio propio bikoitza du, $\lambda = -1$. $\ker(A + I) = \{(\alpha\ 0) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$ eta $\ker(A + I)^2 = \mathbb{R}^2$ direnez, $\vec{v}_2 = (0\ 1)^t$ eta $\vec{v}_1 = (A + I)\vec{v}_2 = (1\ 0)^t$ aukera ditzakegu. Horrela, soluzio orokorra honako hau da:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda t} + C_2(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1) e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{-t} \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$



7.5 proposizioa. *Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-ren bi balio propioak errealak eta zeinu desberdinekoak badira, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, $(0, 0)$ (7.4.1) sistema linealaren puntu kritiko egongaitza da.*

Froga. A-ren balio propioak errealak eta sinpleak direnez, (7.4.1) sistemaren soluzio orokorra honako hau da:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

non $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ λ_1 eta λ_2 balio propioen bektore propioak diren, hurrenez hurren.

$C_2 = 0$ bada, ibilbideak jatorrian hasten diren eta $\vec{v}_1$ bektore zuzendaria duten zuzenerdiak dira. $\lambda_1 > 0$ denez, $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$.

$C_1 = 0$ bada, ibilbideak jatorrian hasten diren eta $\vec{v}_2$ bektore zuzendaria duten zuzenerdiak dira. $\lambda_2 < 0$ denez, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

$C_1 \neq 0$ eta $C_2 \neq 0$ direnean, $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = \lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$, eta soluzioak $\vec{v}_1$ bektore zuzendaria duten zuzenerdietara hurbiltzen dira asintotikoki $t \to +\infty$ doanean, eta $\vec{v}_2$ bektore zuzendaria duten zuzenerdietara $t \to -\infty$ doanean.

Beraz, $(0,0)$ egongaitza da. □

Definizioa. Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-ren bi balio propioak errealak eta zeinu desberdinekoak badira, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, (7.4.1) sistema linealaren $(0,0)$ puntu kritikoa *zeladura-puntua* dela esaten da.

Adibidea. Izan bedi

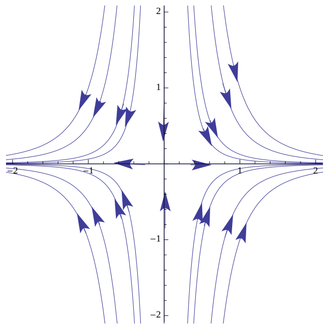
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -3y. \end{cases}$$

Elkartutako koefizienteen matrizearen balio propioak $\lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = -3$ dira, biak errealak eta kontrako zeinuak dituztenak. Sistema horren soluzioak $x(t) = C_1 e^t$, $y(t) = C_2 e^{-3t}$ dira, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ izanik.

- $C_1 = 0$ eta $C_2 \neq 0$ hartuz, $x(t) = 0$, $y(t) = C_2 e^{-3t}$ dugu: $C_2 > 0$ bada $x = 0$, $y > 0$ ardatzerdi bertikal positiboa, eta $C_2 < 0$ bada $x = 0$, $y < 0$ ardatzerdi bertikal negatiboa. $t \to \infty$ denean, bi ibilbideak jatorrirantz doaz.

- Baldin $C_1 \neq 0$ eta $C_2 = 0$ hautatzen badira, $x(t) = C_1 e^t$, $y(t) = 0$ dugu: $C_1 < 0$ bada $y = 0$, $x < 0$ ardatzerdi horizontal negatiboa, ezkerranzko orientazioarekin, eta $C_1 > 0$ bada $y = 0$, $x > 0$ ardatzerdi horizontal positiboa, eskuineranzko orientazioarekin.

- Oro har, $C_1 \neq 0$ eta $C_2 \neq 0$ hartuz, $x^3 y = C_1^3 C_2$ kurbak ditugu, hiperbolen antzekoak. $C_1^3 C_2 > 0$ bada, ibilbideak kurba horien lehenengo eta hirugarren koadranteetako adarrak dira; aurkako kasuan, bigarren eta laugarren koadranteetako adarrak dira. $t \to \infty$ denean, ibilbide horiek ez dira puntu kritikorantz hurbiltzen, ardatz koordenatuetarantz hurbiltzen dira asintotikoki.



7.6 proposizioa. *Izan bedi* A 2×2 *ordenako matrize konstante ez-singularra.* A*-ren bi balio propioak parte erreal nulua duten zenbaki konplexuak badira,* $(0,0)$ *(7.4.1) sistemaren puntu kritiko egonkorra da.*

Froga. A-ren balio propioak parte erreal nulua duten zenbaki konplexuak badira, $\lambda_1 = \mu i$ eta $\lambda_2 = -\mu i$ dira, $\mu > 0$ izanik. $\vec{v}_1 = (\alpha_1 + i\alpha_2, \beta_1 + i\beta_2)^t$ λ_1 balio propioaren bektore propioa bada, sistema diferentzialaren soluzio orokorra hau da:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 \operatorname{Re}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) \\ &= \begin{pmatrix} (C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2)\cos\mu t + (C_2\alpha_1 - C_1\alpha_2)\sin\mu t \\ (C_1\beta_1 + C_2\beta_2)\cos\mu t + (C_2\beta_1 - C_1\beta_2)\sin\mu t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Soluzio horiek periodikoak dira, eta ibilbideak jatorria inguratzen duten elipseak dira. Beraz, $(0,0)$ egonkorra da, baina ez asintotikoki egonkorra. □

Definizioa. Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-ren bi balio propioak parte erreal nulua duten zenbaki konplexuak badira, (7.4.1) sistemaren $(0,0)$ puntu kritikoa *zentroa* dela esaten da.

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Sistema diferentzial lineal horren koefizienteen matrizea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

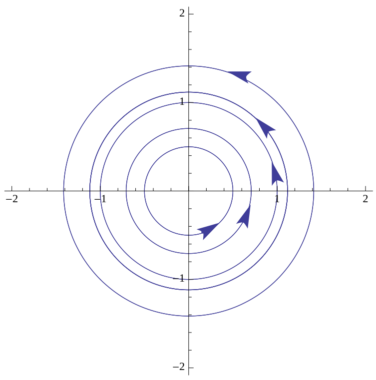
da, eta haren polinomio karakteristikoa $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$; beraz, A-k balio propio konplexuak ditu, parte erreal nulua dutenak, $\pm i$, hain zuzen ere. $\ker(A - iI) = \{(\alpha\ \beta)^t \in \mathbb{C}^2 \colon i\alpha + \beta = 0\}$ denez, har dezakegu $\vec{v}_1 = (1\ \ -i)^t$, eta, horrela, sistema diferentzialaren soluzioak hauek dira:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= C_1 \operatorname{Re}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) \\
&= C_1 \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \right) + C_2 \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \right) \\
&= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ C_1 \sin t - C_2 \cos t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ibilbideek

$$-xdx = ydy$$

ekuazio diferentziala egiaztatzen dute. Integratuz, jatorrian zentratutako zirkunferentziak direla ikusten da; $t > 0$ bada, erlojuaren orratzen aurkako noranzkoa dute, abiadura-bektorea $(-y, x)$ delako.



7.7 proposizioa. *Izan bedi A 2×2 ordenako matrize erreal ez-singularra. A-ren bi balio propioak parte erreal ez-nulua duten zenbaki konplexu konjugatuak badira, $\lambda_1 = \lambda + \mu i$, $\lambda_2 = \lambda - \mu i$, $\mu > 0$ izanik, orduan,*

(i) $\lambda > 0$ bada, $(0,0)$ (7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritiko egongaitza da;

(ii) $\lambda < 0$ bada, $(0,0)$ (7.4.1) sistema autonomoaren puntu kritiko asintotikoki egonkorra da.

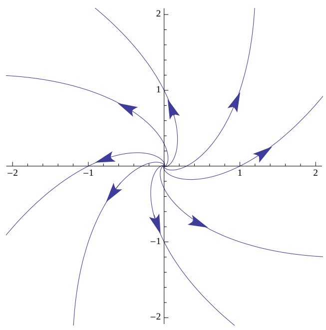
Froga. A-k balio propio konplexuak baditu, $\lambda_1 = \lambda + \mu i$, $\lambda \neq 0$ izanik, eta $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, orduan, (7.4.1) sistemaren soluzio orokorra mota honetakoa izango da:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} (C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2) \cos \mu t + (C_2\alpha_1 - C_1\alpha_2) \sin \mu t \\ (C_1\beta_1 + C_2\beta_2) \cos \mu t + (C_2\beta_1 - C_1\beta_2) \sin \mu t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Beraz, $\lambda > 0$ bada $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \lim_{t\to\infty} |y(t)| = +\infty$, eta $(0,0)$ puntu kritiko egongaitza da. Aldiz, $\lambda < 0$ bada, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, eta $(0,0)$ asintotikoki egonkorra da. □

Definizioa. Izan bedi A 2×2 ordenako matrize konstante ez-singularra. A-ren bi balio propioak parte erreal ez-nulua duten zenbaki konplexu konjugatuak badira, orduan, $(0,0)$ puntu kritikoa (7.4.1) sistemaren *espiral-puntua* dela esaten da.

Adibidea. Izan bedi
$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$
Koefizienteen matrizea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
da, eta haren polinomio karakteristikoa $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2 + 1$; beraz, A-ren balio propioak $\lambda_1 = 2 + i$ eta haren konjugatua dira. $\vec{v}_1 = (1 \quad -i)^t$ hartuz, sistema diferentzialaren soluzio orokorra hau da:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =& C_1 \operatorname{Re}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2 \operatorname{Im}(\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}) \\ =& \begin{pmatrix} e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ e^{2t}(C_1 \sin t - C_2 \cos t) \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Ibilbideak kalkulatuko ditugu ekuazio diferentzial hau ebatziz:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{2x - y} \quad \Longrightarrow \quad 4 \arctan \frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = C.$$
Koordenatu polarretan $4\theta - \ln r^2 = C$ ekuazioa dugu ibilbideetarako, $r = Ce^{2\theta}$, alegia. Kurba horiek espiral logaritmikoak dira, jatorritik urruntzen direnak.



7.8 proposizioa (Puntu kritikoaren sailkapena A matrizearen aztarnaren eta determinantearen arabera)**.** *Izan bedi A 2×2 ordenako matrize erreal ez-singularra eta izan bitez $T = \operatorname{Tr} A$ eta $D = \det A$. Orduan,*

(i) $T^2 - 4D < 0$ *eta* $T = 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren zentroa da, beraz, egonkorra.*

(ii) $T^2 - 4D < 0$ *eta* $T < 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren espiral-puntu asintotikoki egonkorra da.*

(iii) $T^2 - 4D < 0$ *eta* $T > 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren espiral-puntu egongaitza da.*

(iv) $T^2 - 4D = 0$ *eta* $T < 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren nodo inpropio asintotikoki egonkorra da.*

(v) $T^2 - 4D = 0$ *eta* $T > 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren nodo inpropio egongaitza da.*

(vi) $T^2-4D > 0$ *eta* $D < 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren zeladura-puntua da, beraz, egongaitza.*

(vii) $T^2 - 4D > 0$, $D > 0$ *eta* $T > 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren nodo egongaitza da.*

(viii) $T^2 - 4D > 0$, $D > 0$ *eta* $T < 0$ *badira,* $(0,0)$ *puntua (7.4.1) sistemaren nodo asintotikoki egonkorra da.*

Froga. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

non $\det A = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ den. A-ren balio propioak λ_1, λ_2,

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - b_1 a_2) = \lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

ekuazioaren soluzioak dira, hau da:

$$\lambda_1 = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

eta $T = \lambda_1 + \lambda_2$, $D = \lambda_1 \lambda_2$ dira. Beraz, aurreko proposizioetatik ondorioztatzen dira enuntziatuaren kasu guztiak. □

Oharra. Ikusi dugunez, A matrizearen balio propioek λ_1, λ_2, puntu kritikoaren mota eta egonkortasuna zehazten dituzte. Aldi berean, balio propioak A matrizearen elementuen menpe daude, hau da, sistema autonomo linealaren koefizienteen menpe. Praktikan, mundu fisikoan, koefiziente horiek askotan ez direnez datu zehatzak, jakin behar dugu datu horietan aldaketa txikiak (perturbazioak) izateak puntu kritikoaren egonkortasuna edo bere inguruko ibilbideen diagrama (nodo, zeladura-puntua, espiral-puntua edo zentroa) eraldatzen dituen; eta, hala izanez gero, zenbat edo nola aldatzen dituen.

Puntu kritikoa zentroa bada, hau da, $\operatorname{Tr} A = 0$ bada, egonkortasuna eta inguruko ibilbideen diagrama guztiz alda daitezke sistema autonomo linealaren koefizienteetan perturbazio txikiak ditugunean, matrize berriaren aztarna positiboa zein negatiboa izan daitekeelako, eta, ondorioz, puntu kritikoa espiral-puntu egongaitza edo asintotikoki egonkorra izan daiteke.

Bestalde, puntu kritikoa nodo inpropioa bada, hau da, $(\operatorname{Tr} A)^2 - 4\det A = 0$ bada, aldaketa nabarmenak ere egon daitezke.

Aldiz, beste kasuetan, ez da egonkortasuna ez eta puntu kritikoaren mota ere aldatuko, perturbazioak behar bezain txikiak badira.

7.5 Sistema autonomo ez-linealak: linealizazioa

Izan bitez $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{7.5.1}$$

sistema autonomoa, eta izan bedi (x_0, y_0) sistemaren puntu kritiko isolatua, hots, $(f(x_0,y_0), g(x_0,y_0)) = (0,0)$ eta $(f(x,y), g(x,y) \neq (0,0)$ (x_0,y_0)-ren ingurune batean. f, g funtzioek lehen ordenako deribatu partzial jarraituak badituzte (x_0,y_0) puntuaren ingurune batean, orduan,

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + r_1(x,y), \\ g(x,y) =& \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + r_2(x,y) \end{aligned}$$

non

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r_i(x,y)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0, \quad i = 1,2.$$

Beraz, (7.5.1) sistema honako modu honetan berridatz dezakegu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x,y) \\ r_2(x,y) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \vec{r}(x,y),$$

non A matrizea (f,g) eremu bektorialaren (x_0,y_0) puntuko matrize jacobiarra den,

$$A = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix},$$

eta $\vec{r}$ txikia (x_0,y_0) puntuaren ingurune batean. Horrela, $\vec{x} = (x,y)$ eta $\vec{x}_0 = (x_0,y_0)$ idatziz, $\vec{x}' = A(\vec{x} - \vec{x}_0)$ sistema lineala (7.5.1) sistema ez-linealaren hurbilketa bat da (x_0,y_0) puntuaren ingurune batean. Jakin nahi dugu ea berdinak diren sistema linealaren ibilbideen ezaugarriak eta (7.5.1) sistemaren ibilbidearenak (x_0,y_0) puntu kritikoaren inguruan.

$\vec{z} = \vec{x} - \vec{x}_0$ translazioa eginez, $\vec{z}' = A \cdot \vec{z}$ sistema lineala lortzen da, haren puntu kritikoa $(0,0)$ delarik. $\vec{x}' = A \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$ sistemaren (x_0,y_0) puntu kritikoaren izaera eta $\vec{z}' = A \cdot \vec{z}$ sistemaren $(0,0)$ puntu kritikoarena berdinak dira; lehen sistemaren (x_0,y_0) puntuaren inguruneko ibilbideak marrazteko, nahikoa da bigarren sistemaren $(0,0)$ puntuko inguruneko ibilbideen (x_0,y_0) punturako translazioa egitea.

7.9 lema. *Izan bitez* $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *eta* $A = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0)$ (f, g) *eremu bektorialaren* (x_0, y_0) *puntuko matrize jacobiarra.* $(0, 0)$ $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ *sistema linealaren puntu kritiko isolatua bada, hau da,* $\det A \neq 0$ *bada, orduan,* (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren puntu kritiko isolatua da.*

7.10 teorema (Poincaré-Liapunov-en linealizazio-teorema)**.** *Izan bitez* $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 *klaseko funtzioak,* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren puntu kritikoa, eta* $A = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0)$ (f, g) *eremu bektorialaren* (x_0, y_0) *puntuko matrize jacobiarra,* $\det A \neq 0$ *izanik. Orduan,*

(i) A matrizearen balio propioen parte errealak negatiboak badira, (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren puntu kritikoa asintotikoki egonkorra da.*

(ii) A matrizearen balio propio baten parte erreala positiboa bada, (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren puntu kritikoa egongaitza da.*

Horrez gain, A matrizearen balio propioak, λ_1, λ_2*, desberdinak direnean, honako propietate hauek egiaztatzen dira:*

(a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ *badira,* (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren nodo asintotikoki egonkorra da.*

(b) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ *badira,* (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren nodo egongaitza da.*

(c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ *badira,* (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren zeladura-puntua da, egongaitza.*

(d) $\operatorname{Im} \lambda_1 \neq 0$ *eta* $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$ *badira,* (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren espiral-puntu asintotikoki egonkorra da.*

(e) $\operatorname{Im} \lambda_1 \neq 0$ *eta* $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ *badira,* (x_0, y_0) *(7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren espiral-puntu egongaitza da.*

Oharrak. Izan bitez $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren puntu kritikoa eta $A = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0)$ (f, g) eremu bektorialaren (x_0, y_0) puntuko matrize jacobiarra, $\det A \neq 0$ izanik.

(i) A matrizeak balio propio bikoitza badu, (x_0, y_0) (7.5.1) sistema autonomo ez-linealaren puntu kritiko asintotikoki egonkorra izango da balio propio hori negatiboa bada, eta egongaitza balio propioa positiboa bada. Hala ere, ezin da ziurtatu (x_0, y_0) nodoa edo espiral-puntua izango den.

(ii) A matrizearen balio propioak parte erreal nulua duten zenbaki konplexuak badira, hau da, $(0,0)$ $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ sistema linealaren zentroa bada, linealizazio-teoremak ez du informaziorik ematen (x_0, y_0) puntuaren egonkortasunari buruz (7.5.1) sistemarako.

(iii) $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ sistemaren $(0,0)$ puntu kritikoa eta (7.5.1) sistemaren (x_0, y_0) puntu kritikoa mota berekoak direnean, ibilbideen grafikoak ez dira berdinak izango; baina, (x_0, y_0) puntuaren ingurune txiki batean, (7.5.1) sistemaren ibilbideak hurbil daitezke $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$ sistemaren $(0,0)$ puntuko ingurune baten ibilbideen bidez.

Adibidea. Izan bedi $\mu \in \mathbb{R}$ eta har dezagun honako sistema autonomo ez-lineal hau:

$$\begin{cases} x' = -y + \mu(x^2 + y^2)x, \\ y' = x + \mu(x^2 + y^2)y. \end{cases}$$

Sistema horren puntu kritiko bakarra $(0,0)$ puntua da, eta puntu horretako sistema linealizatua hau da:

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Elkartutako matrizearen balio propioak zenbaki konplexu irudikari hutsak dira, $\lambda = \pm i$; beraz, $(0,0)$ sistema linealizatuaren zentro bat da, egonkorra baina ez asintotikoki egonkorra. Kasu horretan, ezin da ezer ondorioztatu $(0,0)$ puntuaren izaerari buruz sistema ez-linealerako.

Hasierako sistema autonomoa koordenatu polarrez adieraziko dugu.

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{eta} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

direnez, t-rekiko deribatuz,

$$rr' = xx' + yy' \quad \text{eta} \quad \theta' = \frac{y'x - x'y}{r^2}.$$

Orduan,

$$\begin{aligned} rr' &= x\big(-y + \mu(x^2 + y^2)x\big) + y\big(x + \mu(x^2 + y^2)y\big) = \mu(x^2 + y^2)^2 = \mu r^4, \\ r^2\theta' &= \big(x + \mu(x^2 + y^2)y\big)x - \big(-y + \mu(x^2 + y^2)x\big)y = x^2 + y^2 = r^2, \end{aligned}$$

hau da, emandako sistema autonomoa honela idazten da koordenatu polarretan:

$$\begin{cases} r' = \mu r^3, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Lehen ekuazioa integratuz,

$$r' = \mu r^3 \implies \frac{r'}{r^3} = \mu \implies r^2 = \frac{1}{2(C_1 - \mu t)}, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

eta bigarrenaren soluzioa $\theta = t + C_2$ da, $C_2 \in \mathbb{R}$ izanik.

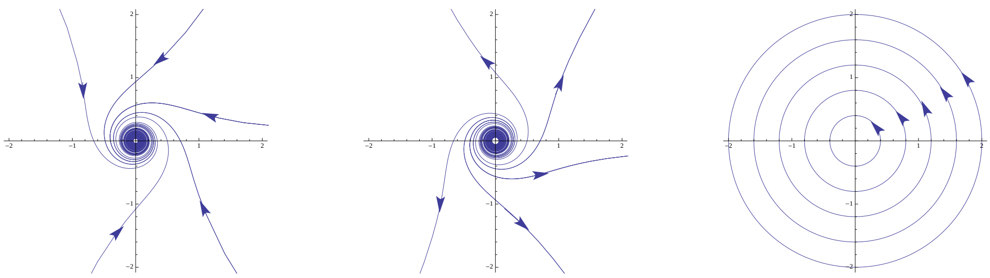
Orain, erraz ondorioztatzen ditugu honako emaitza hauek:

(i) $\mu < 0$ bada, $\lim\limits_{t\to\infty} ||(x(t), y(t))|| = \lim\limits_{t\to\infty} r(t) = 0$ da, beraz, $(0,0)$ puntua asintotikoki egonkorra da hasierako sistema autonomorako.

(ii) $\mu > 0$ bada, $\lim_{t\to C_1/\mu} ||(x(t), y(t))|| = \lim_{t\to C_1/\mu} r(t) = +\infty$ da, eta $(0,0)$ puntua egongaitza da.

(iii) $\mu = 0$ bada, hasierako sistema eta sistema linealizatua berdinak dira, eta, ondorioz, $(0,0)$ puntua zentroa da, egonkorra.

Aurreko hiru kasuen ibilbideak, puntu kritikoaren inguruan, honako hauek dira:



Adibidea. Har dezagun berriro penduluaren adibidea. Ikusi dugun bezala, honako sistema autonomo honek deskribatzen du penduluaren higidura:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\dfrac{g}{l}\sin x - \dfrac{c}{ml}y. \end{cases}$$

$f(x,y) = y$ eta $g(x,y) = -\dfrac{g}{l}\sin x - \dfrac{c}{ml}y$ funtzioak $C^1(\mathbb{R}^2)$ klasekoak dira, eta

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos x & -\dfrac{c}{ml} \end{pmatrix}.$$

$(0,0)$ puntu kritikorako, sistema linealizatuaren koefizienteen matrizea honako hau da:

$$A_0 = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{c}{ml} \end{pmatrix}.$$

Bila ditzagun A_0 matrizearen balio propioak.

$$\det(A_0 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{c}{ml} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{ml}\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$$\iff \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{ml} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2l^2} - \frac{4g}{l}}\right).$$

Orduan,

- $\dfrac{c^2}{m^2l^2} - \dfrac{4g}{l} > 0$ bada, A-k bi balio propio erreal desberdin ditu, biak negatiboak; beraz, $(0,0)$ sistema linealizatuaren nodo asintotikoki egonkorra da, eta $(0,0)$ hasierako sistema ez-linealerako ere.
- $\dfrac{c^2}{m^2l^2} - \dfrac{4g}{l} = 0$ bada, A-k balio propio erreal bikoitza du, eta $(0,0)$ sistema linealizatuaren nodo inpropio asintotikoki egonkorra da. $(0,0)$ ere asintotikoki egonkorra da hasierako sistema ez-linealerako, baina ezin da ziurtatu nodo inpropioa, nodoa edo espiral-puntua izango den.
- $\dfrac{c^2}{m^2l^2} - \dfrac{4g}{l} < 0$ bada, A-k balio propio konplexuak ditu, parte erreal negatiboa dutenak; beraz, $(0,0)$ sistema linealizatuaren espiral-puntu asintotikoki egonkorra da, eta gauza bera gertatzen da hasierako sistema ez-linealerako.

Aldiz, $(\pi,0)$ puntu kritikoaren kasuan, sistema linealizatuaren koefizienteen matrizea honako hau da:

$$A_\pi = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{c}{ml} \end{pmatrix}.$$

A_π matrizearen balio propioak kalkulatuko ditugu.

$$\det(A_\pi - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{c}{ml} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{ml}\lambda - \frac{g}{l} = 0$$

$$\iff \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{ml} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2l^2} + \frac{4g}{l}} \right).$$

$\dfrac{c^2}{m^2l^2} + \dfrac{4g}{l} > 0$ denez, A_π matrizeak bi balio propio erreal ditu, bata positiboa eta bestea negatiboa. Ondorioz, $(0,0)$ sistema linealizatuaren zeladura-puntua da, egongaitza, eta izaera bera du $(\pi,0)$ puntuak hasierako sistemarako.

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = -x - y - 3x^2y, \\ y' = -2x - 4y + y\sin x. \end{cases}$$

Aztertuko dugu $(0,0)$ puntu kritikoaren egonkortasuna. Sistema linealizatua

$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$$

da. Hemen, koefizienteen matrizearen determinantea $D = 2$ eta aztarna $T = -5$ dira. Horrek esan nahi du bi balio propioak desberdinak eta negatiboak direla, beraz, $(0,0)$ puntua sistema linealizatuaren puntu kritiko asintotikoki egonkorra da.

Linealizazio-teoremaren arabera, $(0,0)$ sistema ez-linealaren puntu kritiko asintotikoki egonkorra ere baita.

7.6 Liapunoven metodo zuzena

Izan bitez $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, eta har dezagun berriro

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{7.6.1}$$

sistema autonomo ez-lineala, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ haren puntu kritiko isolatua izanik. $\det \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0) = 0$ bada, ezin dugu linealizazio-teorema erabili haren egonkortasuna aztertzeko. Atal honetan, (7.6.1) sistemaren puntu kritiko isolatuen egonkortasuna aztertzeko bigarren metodo bat emango dugu. Lehenengo eta behin, definizio ezagun batzuk gogoratuko ditugu.

Definizioak. Izan bedi $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(i) E *positiboki definitua* dela esaten da, baldin eta $E(0,0) = 0$ bada eta $E(x,y) > 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ guztietarako.

(ii) E *positiboki erdidefinitua* dela esaten da $E(0,0) = 0$ bada eta $E(x,y) \geq 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ guztietarako.

(iii) E *negatiboki definitua* dela esaten da, baldin eta $E(0,0) = 0$ bada eta $E(x,y) < 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ guztietarako. Hau da, $-E$ funtzio positiboki definitua da.

(iv) E *negatiboki erdidefinitua* dela esaten da $E(0,0) = 0$ bada eta $E(x,y) \leq 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ guztietarako.

Adibideak. (i) Izan bedi $E(x,y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$ izanik. E positiboki definitua da.

(ii) Izan bedi $E(x,y) = ax^2$, $a > 0$ izanik. $E(0,0) = 0$ da eta $E(x,y) \geq 0$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ guztietarako, baina $E(0,y) = 0$ da $y \in \mathbb{R}$ guztietarako; beraz, E positiboki erdidefinitua da.

(iii) Izan bedi $E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ izanik. Argi denez, $E(0,0) = 0$ da. Frogatuko dugu E positiboki definitua dela baldin eta soilik baldin $a > 0$ eta $4ac - b^2 > 0$ badira.

Lehenengo eta behin, suposa dezagun E positiboki definitua dela. Orduan,

$$\begin{aligned} E(x,0) =& ax^2 > 0 \implies a > 0; \\ E(x,y) =& \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}y^2 > 0, \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ & \implies 4ac - b^2 > 0. \end{aligned}$$

Demagun, orain, $a > 0$ eta $4ac - b^2 > 0$ direla. Orduan,

$$E(x,y) = \left(\frac{2ax+by}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}y^2 \geq 0, \ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

eta

$$E(x,y) = 0 \implies y = 0 \ \text{ eta } \ 2ax + by = 0 \iff x = y = 0.$$

Beraz, E positiboki definitua da.

(iv) Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{R}$. $E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ negatiboki definitua da, baldin eta soilik baldin $a < 0$ eta $4ac - b^2 > 0$ badira.

Izan bitez $f, g, E \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta (x, y) (7.6.1) sistemaren soluzio bat, eta defini dezagun $h(t) = E(x(t), y(t))$. Orduan,

$$\begin{aligned} h'(t) =& \frac{\partial E}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial E}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) \\ =& \frac{\partial E}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot f(x(t),y(t)) + \frac{\partial E}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot g(x(t),y(t)). \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^2$ irekia non $(0,0) \in D$ den, $f, g \in C^1(D)$ non $f(0,0) = g(0,0) = 0$ diren, $E \in C^1(D)$ eta

$$E'(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x}f(x,y) + \frac{\partial E}{\partial y}g(x,y) = \nabla E \cdot (f,g). \tag{7.6.2}$$

E funtzioa positiboki definitua eta E' negatiboki erdidefinitua badira D-n, E (7.6.1) sistema autonomoaren *Liapunoven funtzioa* dela esaten da.

7.11 teorema (Liapunoven metodo zuzena)**.** *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^2$ irekia, $(0,0) \in D$ izanik, eta $f, g \in C^1(D)$ non $f(0,0) = g(0,0) = 0$ diren. Existitzen bada (7.6.1) sistema autonomoaren Liapunoven funtzio bat, $E \in C^1(D)$, orduan, $(0,0)$ (7.6.1) sistemaren puntu kritiko egonkorra da.*

Gainera, (7.6.2) adierazpeneko E' funtzioa negatiboki definitua bada, $(0,0)$ (7.6.1) sistemaren puntu kritiko asintotikoki egonkorra da.

7.12 teorema. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^2$ irekia, $(0,0) \in D$ izanik, eta $f, g \in C^1(D)$ non $f(0,0) = g(0,0) = 0$ diren. Existitzen bada $E \in C^1(D)$ non $E(0,0) = 0$ den, eta hauetako bat betetzen bada:*

(i) existitzen da (x,y) $(0,0)$ puntuko ingurune batean, non $E(x,y) > 0$ den eta (7.6.2) adierazpeneko E' funtzioa positiboki definitua da ingurune horretan;

edo

(ii) existitzen da (x,y) $(0,0)$ puntuko ingurune batean, non $E(x,y) < 0$ den eta (7.6.2) adierazpeneko E' funtzioa negatiboki definitua da ingurune horretan;

orduan, $(0,0)$ *puntua (7.6.1) sistema autonomoaren puntu kritiko egongaitza da.*

Jarraian aztertuko ditugun adibideetan nahiko erraz aurkituko dugu sistemaren Liapunoven funtzioa. Hala ere, orokorrean, Liapunoven metodo zuzenaren zailtasuna Liapunoven funtzioa aurkitzea izaten da.

Adibidea. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = -3x^3 - y, \\ y' = x^5 - 2y^3. \end{cases}$$

$(0,0)$ sistema horren puntu kritiko bakarra da. Izan ere, lehen ekuazioko eskuineko atala nulua da $y = -3x^3$ bada, eta hori bigarren ekuazioko eskuineko atalean ordezkatuz eta 0-rekin berdinduz, $x^5 + 54x^9 = x^5(1 + 54x^4) = 0$ bete behar da; hori soilik gertatzen da $x = 0$ bada.

Sistema autonomo ez-lineal horren $(0,0)$ puntuko sistema linealizatua

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 0 \end{cases}$$

da, eta elkartutako koefizienteen matrizea singularra da. Beraz, ezin dugu linealizazio-teorema erabili $(0,0)$ puntu kritikoaren egonkortasuna aztertzeko. Erabiliko dugu Liapunoven metodo zuzena.

Liapunoven funtzioa aurkitzeko, honako adierazpen hau duten funtzioen artean bilatuko dugu:

$$E(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}, \qquad a, b > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Argi denez, E positiboki definitua da. Bestalde,

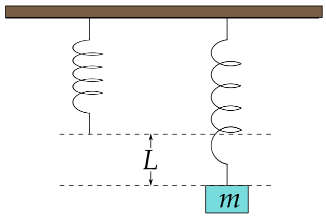
$$\begin{aligned} E'(x,y) =& \frac{\partial E}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial E}{\partial y} g(x,y) = 2max^{2m-1}(-3x^3 - y) + 2nby^{2n-1}(x^5 - 2y^3) \\ =& -(6max^{2m+2} + 4nby^{2n+2}) + (-2max^{2m-1}y + 2nby^{2n-1}x^5). \end{aligned}$$

Lehen batugaia negatiboa da. Bigarrena desagerrarazten saiatuko gara. Horretarako,

$$\begin{cases} 2m - 1 = 5, \\ 2n - 1 = 1, \\ 2ma = 2nb, \end{cases} \implies \begin{cases} m = 3, \\ n = 1, \\ 6a = 2b. \end{cases}$$

$a = 1$ eta $b = 3$ hartuz, adibidez, $E(x,y) = x^6 + 3y^2$ positiboki definitua da eta $E'(x,y) = -18x^2 - 12y^4$ negatiboki definitua; ondorioz, Liapunoven metodo zuzenaren arabera, $(0,0)$ puntu kritikoa asintotikoki egonkorra da.

Adibidea. m masa duen gorputz bat malguki batez finkatuta dago.



Malgukiaren higiduraren ekuazioa

$$mx'' + \alpha x' + kx = 0$$

da, $\alpha \geq 0$ konstanteak inguruneak eragiten duen moteltze-prozesua adierazten duela eta $k > 0$ malgukiaren errekuperazio-konstantea. Ekuazio diferentzial horren sistema baliokidea hau da:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\dfrac{k}{m}x - \dfrac{\alpha}{m}y. \end{cases}$$

Puntu kritiko bakarra $(0,0)$ da. Masaren energia zinetikoa eta potentziala

$$E_c = \frac{my^2}{2} \qquad \text{eta} \qquad E_p = \int_0^x kt dt = \frac{kx^2}{2}$$

dira, hurrenez hurren. Sistemaren energia totala, beraz,

$$E(x,y) = \frac{1}{2}(kx^2 + my^2)$$

da. Argi dago E funtzio positiboki definitua dela, eta

$$E'(x,y) = kxy + my\left(-\frac{k}{m} - \frac{\alpha}{m}y\right) = -\alpha y^2$$

negatiboki erdidefinitua da. Beraz, E sistema autonomoaren Liapunoven funtzioa da eta $(0,0)$ puntu kritiko egonkorra.

Izatez, $\alpha > 0$ bada, $(0,0)$ puntua asintotikoki egonkorra da. Sistema autonomoa lineala da, eta elkartutako koefizienteen matrizearen aztarna $T = -\alpha/m < 0$ eta determinantea $D = k/m > 0$ dira; beraz, matrizearen balio propioak erreal desberdinak eta biak negatiboak.

Liapunoven metodo zuzena eta sistema kontserbakorren printzipio fisikoa erlazionatuta daude. Liapunoven funtzioak sistema fisiko baten energia osoaren kontzeptuaren hedapenak dira. Sistema fisiko baten energia osoak oreka-puntu batean minimo lokal bat badu, puntu hori egonkorra izango da.

7.7 Ariketak

1. Kalkulatu honako sistema autonomo hauen puntu kritikoak:

(i) $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 5x - 7y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$

(ii) $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x - y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$

(iii) $\begin{cases} x' = \sin y \\ y' = x + y^2 \end{cases}$ *Em.:* $(-k^2\pi^2, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

(iv) $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$

(v) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x^2 - y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$, $(-1/2, 1/4)$

(vi) $\begin{cases} x' = e^{xy} \\ y' = x + y^2 \end{cases}$ *Em.:* $\nexists$

2. Aztertu honako sistema autonomo hauen puntu kritikoen egonkortasuna:

(i) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 3x - y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ zeladura-puntu egongaitza

(ii) $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ nodo asintotikoki egonkorra

(iii) $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ espiral-puntu asintotikoki egonkorra

(iv) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ nodo egongaitza

3. Marraztu honako sistema hauen fase-diagramak, eta aztertu puntu kritikoen egonkortasuna:

(i) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ nodo egongaitza

(ii) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ zeladura-puntu egongaitza

(iii) $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ zeladura-puntu egongaitza

(iv) $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -3x - 2y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ zentro egonkorra, ez asintotikoki egonkorra

(v) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -3x + y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ espiral-puntu egongaitza

4. Aztertu honako sistema ez-lineal hauen puntu kritiko isolatuen egonkortasuna linealizazio-teoremaren bidez, eta egin fase-diagrama hurbildua:

(i) $\begin{cases} x' = y \\ y' = y^2 + x \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ zeladura-puntua

(ii) $\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ zeladura-puntua

(iii) $\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ zeladura-puntua; $(1,1)$ espiral-puntu asint. egonkorra.

5. Aztertu honako sistema ez-lineal hauen puntu kritiko isolatuen egonkortasuna linealizazio-teoremaren bidez, posible denean:

(i) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x^2 + y \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ egongaitza

(ii) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{cases}$ *Em.:* $(0,0)$ ezin da erabaki; $(\pm 1, 0)$ zeladura-puntuak

6. Izan bedi

$$\begin{cases} x' = y - x^2, \\ y' = -x - 2y - y^2. \end{cases}$$

Aztertu $(0,0)$ puntu kritikoaren egonkortasuna linealizaio teoremaren bidez.

Em.: $(0,0)$ asintotikoki egonkorra

7. Aurkitu honako sistema honen puntu kritikoak, eta aztertu haien egonkortasuna:

$$\begin{cases} x' = y(2 - y), \\ y' = (x - 2)(y - 1). \end{cases}$$

Em.: $(2,0)$ eta $(2,2)$ zentroak

8. Izan bedi

$$x'' + x - \epsilon x'(1 - x^2) = 0$$

Van Der Pol-en ekuazio diferentziala. Idatzi sistema diferentzial baliokidea. Aurkitu eta sailkatu puntu kritikoak $\epsilon \in \mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera.

Em.: $\epsilon > 0$: $(0,0)$ egongaitza; $\epsilon = 0$: zentroa; $\epsilon < 0$: $(0,0)$ asint. egonkorra;

9. Egiaztatu honako kasu hauetan $E(x,y)$ funtzioak Liapunoven funtzioak direla, eta aztertu $(0,0)$ puntu kritikoaren egonkortasuna:

   (i) $\begin{cases} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{cases}, \; E(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$ *Em.:* $(0,0)$ egonkorra

   (ii) $\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = -x \end{cases}, \; E(x,y) = x^2 + y^2$ *Em.:* $(0,0)$ egonkorra

   (iii) $\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases}, \; E(x,y) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}y^2$ *Em.:* $(0,0)$ egonkorra

10. Izan bedi
$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\sin x. \end{cases}$$
Aurkitu sistema diferentzial autonomo ez-lineal horren puntu kritikoak, eta aztertu haien egonkortasuna.

    Argibidea. Frogatu $E(x,y) = 1 - \cos x + \dfrac{y^2}{2}$ emandako sistemaren Liapunoven funtzioa dela $(0,0)$ puntuan.

    Em.: $((2k+1)\pi, 0)$ egongaitza eta $(2k\pi, 0)$ egonkorra $k \in \mathbb{Z}$ guztietarako

8. gaia

Aldagaien banantze-metodoa. Sturm-Liouvilleren problemak

Gai honetan azalduko den aldagaien banantze-metodoaren bidez, ikusiko dugu deribatu partzialetako ekuazio batzuekin lotuta parametro baten menpeko ekuazio diferentzial linealak agertzen direla. Sturm-Liouvilleren problemak definitzen dira parametro baten menpeko bigarren ordenako ekuazio diferentzialak mugalde-baldintza aproposekin osatzean.

8.1 Bi aldagaiko deribatu partzialetako ekuazioak eta aldagaien banantze-metodoa

Atal honetan, fisika matematikoko deribatu partzialetako zenbait ekuazio ebazteko aldagaien banantze-metodoa azalduko da.

8.1.1 Beroaren ekuazioa

Dimentsio bateko beroaren hedapenaren problema homogeneoa aztertuko dugu. l luzerako hagatxo zuzen batean zehar beroa nola hedatzen den deskribatzeko, deribatu partzialetako ekuazio bat agertzen da. Suposatuko dugu hagatxo hori material homogeneoz eginda dagoela.

Hagatxoaren puntuak x aldagai errealaren bidez adieraziko ditugu, $0 \leq x \leq l$; t denbora da eta $u(x,t)$ balioak t aldiunean hagatxoko x puntuaren tenperatura adierazten du. Orduan,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \, t > 0, \tag{8.1.1}$$

ekuazioa egiaztatzen du u funtzioak. α^2 konstante positiboa bero-disipazioaren konstantea da, hagatxoaren materialarekin erlazionatuta. (8.1.1) ekuazioarekin batera, hasierako baldintzak eta mugalde-baldintzak eman behar dira, egoera fisikoak zehazten dituztenak.

Demagun hagatxoko puntuetan ezaguna dela hasierako tenperatura-banaketa, hots, ezagutzen dela $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{8.1.2}$$

den. Horrez gain, demagun hagatxoaren muturretako tenperatura konstante berdin zero mantentzen dela denboran zehar, hau da:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0. \tag{8.1.3}$$

(8.1.1) deribatu partzialetako ekuazioak, (8.1.2) hasierako baldintzak eta (8.1.3) mugalde-baldintzek osatzen duten honako problema hau dugu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{8.1.4}$$

Saiatuko gara (8.1.4) problemaren $u(x,t) = X(x)T(t)$ moduko soluzioak aurkitzen, u soluzio nulua ez izanik. Metodo horri (8.1.4) problema ebazteko *aldagaien-banantze metodo* esaten zaio.

$u(x,t) = X(x)T(t)$ adierazpena (8.1.1) deribatu partzialetako ekuzioan ordezkatuz,

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 \, X''(x) \, T(t)$$

dugu, hau da,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Berdintza horren ezkerreko atala x-ren funtzioa da soilik, eta eskuinekoa soilik t-ren funtzioa; beraz, berdinak izateko aukera bakarra bi atalak konstante erreal bera izatea da. Izan bedi $-\lambda$ konstante hori, *banantze-konstante* izenez ezagutzen dena, $\lambda \in \mathbb{R}$ izanik. Orduan,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

eta bi ekuazio diferentzial lortzen ditugu:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{8.1.5}$$

$$T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0. \tag{8.1.6}$$

Horrela, (8.1.1) ekuazioaren ordez, bi ekuazio diferentzial idatzi ditugu λ konstantearen balio bakoitzerako, eta (8.1.1) ekuazioaren soluzioak (8.1.5) eta (8.1.6) ekuazioen soluzioen biderkadurak izango dira. Gainera, (8.1.3) mugalde-baldintzak kontuan hartuz,

$$\begin{aligned} u(0,t) = 0 \implies X(0)T(t) = 0, \ \forall\, t \implies X(0) = 0, \\ u(l,t) = 0 \implies X(l)T(t) = 0, \ \forall\, t \implies X(l) = 0. \end{aligned}$$

Hau da, X funtziorako bigarren ordenako ekuazio diferentzial bat dugu, bi mugalde-baldintzarekin:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{8.1.7}$$

Aztertu behar dugu λ parametroaren zein baliotarako duen (8.1.7) problemak soluzio ez-nulua. λ-ren balio horiei (8.1.7) problemaren *balio propio* deritze.

$X'' + \lambda X = 0$ koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa da, haren polinomio karakteristikoa $r^2 + \lambda$ izanik.

(i) $\lambda < 0$ bada, $\lambda = -\mu^2$ idatz dezakegu, $\mu > 0$ izanik. Polinomio karakteristikoaren erroak, μ eta $-\mu$ dira, eta ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, $X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$, $C_1.C_2 \in \mathbb{R}$ izanik. Mugalde-baldintzak bete daitezen

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\mu l} + C_2 e^{-\mu l} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ C_1\left(e^{\mu l} - e^{-\mu l}\right) = 0, \end{cases}$$
$$\implies C_1 = C_2 = 0 \implies X(x) = 0, \ \forall x \in [0, l],$$

Beraz, soluzio bakarra soluzio nulua da.

(ii) $\lambda = 0$ bada, polinomio karakteristikoaren erro bakarra $r = 0$ denez, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $X(x) = C_1 + C_2 x$ da, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ izanik. Mugalde-baldintzak erabiliz,

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_1 + C_2 l = 0, \end{cases} \implies C_1 = C_2 = 0 \implies X(x) = 0, \ \forall x \in [0, l],$$

hau da, (8.1.7) problemaren soluzio bakarra funtzio nulua da kasu honetan ere.

(iii) $\lambda > 0$ bada, $\lambda = \mu^2$ idatziz, polinomio karakteristikoaren erroak konplexuak dira, $r_1 = \mu i$ eta $r_2 = -\mu i$, eta ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Mugalde-baldintzak kontuan izanda,

$$X(0) = C_1 = 0 \implies C_1 = 0$$
$$X(l) = C_1 \cos(\mu l) + C_2 \sin(\mu l) = 0 \implies C_2 \sin(\mu l) = 0.$$

Existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $\mu l = n\pi$ den, orduan, C_2 edozein konstante erreal izan daiteke eta soluzio ez-nuluak ditugu.

Hau da, (8.1.7) problemaren balio propioak hauek dira:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

eta $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, λ_n balio propioari dagokion soluzio ez-nuluak

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

eta haren multiploak dira. Funtzio horiei *funtzio propio* deritze.

Orain, T funtzioak egiaztatu behar duen (8.1.6) ekuazio diferentzialean $\lambda = \lambda_n$ balioa hartuz,

$$T'(t) + \frac{n^2\alpha^2\pi^2}{l^2} T(t) = 0,$$

eta ekuazio horren soluzioak $T_n(t) = \exp\Big(-\frac{n^2\alpha^2\pi^2}{l^2} t\Big)$ funtzioa eta haren multiploak dira.

(8.1.1) deribatu partzialetako ekuazioaren soluzioak ebatzi ditugun bi ekuazio diferentzialen soluzioen biderkadurak direnez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$u_n(x,t) = \exp\Big(-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2} t\Big) \sin \frac{n\pi x}{l};$$

haren multiploak (8.1.1) ekuazioaren soluzioak dira, eta gainera mugalde-baldintzak betetzen dituzte. Are gehiago, (8.1.1) lineala denez, soluzioen konbinazio linealak ere soluzioak dira, eta, formalki behintzat, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $c_n \in \mathbb{R}$ hartuz,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\Big(-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2} t\Big) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

(8.1.1) eta (8.1.3) betetzen dituen funtzioa da. c_n konstanteak finkatzeko, hasierako baldintza erabili behar dugu,

$$u(x,0) = f(x) \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

Adibidea. Izan bedi $f(x) = 3\sin \frac{4\pi x}{l}$. Orduan, honako hau da (8.1.4) deribatu partzialetako problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\Big(-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2} t\Big) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

non

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) = 3\sin \frac{4\pi x}{l}.$$

Azken berdintza horren bi atalen koefizienteak berdinduz, $c_4 = 3$ eta $c_n = 0$ $n \neq 3$ guztietarako, beraz,

$$u(x,t) = 3\exp\Big(-\frac{16\alpha^2\pi^2}{l^2} t\Big) \sin \frac{4\pi x}{l}.$$

Adibidea. Izan bitez $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ eta

$$f(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + ... + b_m \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Orduan, honako hau da (8.1.4) deribatu partzialetako problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = b_1 \exp\Big(-\frac{\alpha^2\pi^2}{l^2}t\Big) \sin \frac{\pi x}{l} + \ldots + b_m \exp\Big(-\frac{m^2\alpha^2\pi^2}{l^2}t\Big) \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Adibidea. Izan bitez $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Orduan, honako hau da (8.1.4) deribatu partzialetako problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \exp\Big(-\frac{n^2\alpha^2\pi^2}{l^2}t\Big) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Oharra. Azken adibidean f Fourierren sinuetako serie baten batura dela suposatu dugu.

8.1.2 Beroaren problema, hagatxoaren muturrak isolatuta daudenean

Aurreko atalean bezala, aztertu nahi dugu tenperatura-banaketa l luzerako hagatxo homogeneo batean, baina orain suposatuko dugu hagatxoaren muturrak isolatuta daudela. Horrek esan nahi du beroa ez dela sartzen, ez eta irteten ere hagatxoaren muturretatik, eta, beraz, mugalde-baldintza berriak ditugu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{8.1.8}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliko dugu hemen ere; hots, $u(x,t) = X(x)T(t)$ motako soluzioak bilatuko ditugu. Deribatu partzialetako ekuazioan ordezkatzean, lehen bezala, existitu behar da $\lambda \in \mathbb{R}$ non

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \tag{8.1.9}$$

den. Bestalde, mugalde-baldintza berriak bete behar direnez,

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = 0 &\implies X'(0)T(t) = 0, \ \forall\, t > 0 \implies X'(0) = 0, \\ u_x(l,t) = 0 &\implies X'(l)T(t) = 0, \ \forall\, t > 0 \implies X'(l) = 0. \end{aligned}$$

Hau da, X funtzioak honako mugalde-balioetako problemaren soluzio ez-nulua izan behar du, λ parametro erreala izanik:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases} \tag{8.1.10}$$

Aurkitu behar dugu λ parametroaren zein baliotarako duen (8.1.10) problemak soluzio ez-nulua. Ekuazio diferentzialaren polinomio karakteristikoa $r^2 + \lambda$ denez,

(i) $\lambda < 0$ bada, $\lambda = -\mu^2$ idatziz, $\mu > 0$ delarik, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$ da, eta $X'(x) = C_1 \mu e^{\mu x} - C_2 \mu e^{-\mu x}$. Mugalde-baldintzak erabiliz,

$$\begin{aligned} X'(0) =& C_1 - C_2 = 0, \\ X'(l) =& C_1 \mu e^{\mu l} - C_2 \mu e^{-\mu l} = 0 \end{aligned}$$

bete behar da; eta, $\mu \neq 0$ denez, hau bakarrik gertatzen da $C_1 = C_2 = 0$ direnean, hots, soluzio bakarra soluzio nulua da.

(ii) $\lambda = 0$ bada, soluzio orokorra $X(x) = C_1 + C_2 x$ da eta mugalde-baldintzetatik

$$X'(0) = X'(l) = C_2 = 0$$

lortzen dugu; beraz, $X \equiv 1$ funtzio konstantea eta horren multiploak mugalde-baldintzetako problemaren soluzioak dira.

(iii) $\lambda > 0$ bada, $\lambda = \mu^2$ idatziz, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$ da eta $X'(x) = -C_1 \mu \sin(\mu x) + C_2 \mu \cos(\mu x)$; beraz,

$$\begin{aligned} X'(0) =& C_2 \mu = 0, \\ X'(l) =& -C_1 \sin \mu l + C_2 \cos(\mu l) = 0. \end{aligned}$$

Orduan, existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $\mu l = n\pi$ den, (8.1.10) problemak soluzio ez-nulua du.

Hau da, $\lambda_n = \dfrac{n^2 \pi^2}{l^2}$ balio propioa da $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako, eta

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

funtzio propioak ditugu. T-k bete behar duen ekuazio diferentziala lehen bezala ebatziz, honako funtzio hauek (8.1.8) problemaren soluzioak dira:

$$\begin{aligned} &u_0(x,t) = 1, \\ &u_n(x,t) = \exp\Big(-\frac{n^2 \alpha^2 \pi^2}{l^2} t \Big) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

eta horien konbinazio lineal finituak edo infinituak ere bai, formalki. Beraz, $c_n \in \mathbb{R}$ badira $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako,

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\Big(-\frac{n^2\alpha^2\pi^2}{l^2}t\Big) \cos\frac{n\pi x}{l}$$

(8.1.8) problemaren deribatu partzialetako ekuazioaren soluzioa da, eta mugalde-baldintzak betetzen ditu.

Adibidea. Demagun ebatzi nahi dugun problemaren f funtzioa $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ funtzioetako serie baten bidez adieraz daitekeela; hau da, existitzen direla $b_0, b_1, \ldots$ koefiziente errealak non

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

den. Orduan, (8.1.8) problemaren soluzio formala honako hau da:

$$u(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\Big(-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}t\Big) \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

8.1.3 Dimentsio bateko uhin-ekuazioa: hari elastiko baten bibrazioak

Dimentsio bateko uhin-ekuazio homogeneoa aztertuko dugu. Izan bedi l luzerako hari elastikoa muturretatik finkatua. Muturrak 0 eta l dira, eta $u(x,t)$ funtzioak t momentuan hariko x puntuaren desplazamendu bertikala adierazten du. u funtzioak honako deribatu partzialetako ekuazio hau egiaztatzen du, $\alpha > 0$ konstante bat izanik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad 0 < x < l,\ t > 0. \tag{8.1.11}$$

Hariko muturrak finkaturik mantentzen direnez denboran zehar, honako mugalde-baldintza hauek ditugu:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{8.1.12}$$

Azkenik, suposatuko dugu hasierako posizioa eta abiadura ezagutzen direla hariko puntu guztietan, hots, existitzen direla $f, g\colon [0,l] \to \mathbb{R}$ non u-k honako hasierako baldintza hauek betetzen dituen:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < l, \tag{8.1.13}$$

(8.1.11) deribatu partizaletako ekuazioak (8.1.12) mugalde-baldintzek eta (8.1.13) hasierako baldintzek osatutako problema ebazteko, aldagaien banantze-metodoa erabiliko dugu; hots, bilatuko ditugu $u(x,t) = X(x)T(t)$ formako soluzio ez-nuluak. (8.1.11) ekuazioan ordezkatuz,

$$X(x)\, T''(t) = \alpha^2\ X''(x)\, T(t)$$

bete behar da, beraz, existitu behar da $\lambda \in \mathbb{R}$ non

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

diren. Gainera, (8.1.12) baldintzen ondorioz,

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(l,t),\ \forall\, t > 0 \quad &\Longrightarrow \quad X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0,\ \forall\, t > 0 \\ &\Longrightarrow \quad X(0) = X(l) = 0. \end{aligned}$$

Hau da, existitu behar da $\lambda \in \mathbb{R}$ non X funtzioek honako mugalde-balioetako problema honen soluzioak izan behar duten:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{8.1.14}$$

Problema hori beroaren ekuazioaren kasuan ebatzi dugun (8.1.7) problema bera da. Haren balio propioak $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ eta funtzio propioak $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ dira, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Orain T-k bete behar duen ekuazio diferentzialean $\lambda = \lambda_n$ hartuz,

$$T'' + \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{l^2}T = 0$$

ekuazioa dugu, haren soluzio orokorra honako hau delarik $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako:

$$T_n(t) = c_n \sin\frac{n\pi\alpha t}{l} + d_n \cos\frac{n\pi\alpha t}{l},$$

$c_n, d_n \in \mathbb{R}$ izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Formalki, uhin-ekuazioa lineala denez, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ guztietarako,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\Big(c_n \sin\frac{n\pi\alpha t}{l} + d_n \cos\frac{n\pi\alpha t}{l}\Big)$$

(8.1.12) mugalde-baldintzak betetzen dituzten (8.1.11) uhin-ekuazioaren soluzioak dira.

Orain, eskatuko dugu u-k hasierako baldintzak bete ditzan. Lehenengo eta behin, f funtzioa $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ funtzioen serie baten bidez adieraz badaiteke, hau da, existitzen badira $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, non

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

den, $u(x,0) = f(x)$ bete behar denez,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \Longrightarrow \quad d_n = a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Bestalde, g funtzioa ere $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ funtzioen serie baten batura bada, hau da, existitzen badira $b_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, non

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

den, $u_t(x,0) = g(x)$ bete behar denez,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi\alpha}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{l}{n\pi\alpha} b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ondorioz, (8.1.11), (8.1.12) eta (8.1.13) osatzen duten problemaren soluzioa, bete behar diren konbergentzia-baldintzak betetzen badira, honako hau da:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\Big(\frac{l}{n\pi\alpha} b_n \sin\frac{n\pi\alpha t}{l} + a_n \cos\frac{n\pi a t}{l}\Big)$$

non a_n zenbakia f funtzioaren Fourierren sinuetako seriearen n-garren koefizientea den, eta b_n zenbakia, g-rena, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

8.1.4 Laplaceren ekuazioa errektangelu baten gainean

Aldagaien banantze-metodoa erabil daiteke honako problema hau ebazteko ere:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, & 0 < x < l,\ 0 < y < L, \\ u(0,y) = u(l,y) = 0, & 0 < y < L, \\ u(x,0) = f_1(x), & 0 < x < l, \\ u(x,L) = f_2(x), & 0 < x < l. \end{cases} \tag{8.1.15}$$

Suposa dezagun problema horren soluzioa $u(x,y) = X(x)Y(y)$ moduan idatz daitekeela. Deribatuz eta Laplaceren ekuazioan ordezkatuz,

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

lortzen da, beraz, existitu behar da $\lambda \in \mathbb{R}$ non

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

den. Mugalde-baldintzak, $u(0,y) = u(l,y) = 0$, bete daitezen, X funtzioak honako Sturm-Liouvilleren problema honen soluzioa izan behar du:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{8.1.16}$$

Problema hau lehenago ebatzi dugu, eta ikusi dugu $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ eta $\sin \dfrac{n\pi x}{l}$ direla balio propioak eta funtzio propioak, hurrenez hurren, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

$\lambda = \lambda_n$ baliorako, Y-k bete behar duen ekuazio diferentziala honako hau da:

$$Y'' - \frac{n^2\pi^2}{l^2} Y = 0.$$

Polinomio karakteristikoak, $r^2 - \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$, bi erro erreal desberdin ditu, $r_1 = \dfrac{n\pi}{l}$ eta $r_2 = -\dfrac{n\pi}{l}$; beraz, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzeko, λ_n-ri dagokion ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra honako hau da:

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi y}{l}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{l}}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R},$$

edo, kontuan izanda $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ eta $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ direla,

$$Y_n(y) = \alpha_n \sinh \frac{n\pi y}{l} + \beta_n \cosh \frac{n\pi y}{l}, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Hau guztia kontuan harturik, hasierako baldintzak betetzen dituen Laplaceren ekuazioaren soluzioa

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(\alpha_n \cosh \frac{n\pi y}{l} + \beta_n \sinh \frac{n\pi y}{l} \right)$$

da, non α_n eta β_n koefizienteak kalkulatu beharko diren mugalde-baldintzak bete daitezen. f_1 eta f_2 funtzioak Fourierren sinuetako serieen bidez adierazgarriak badira, hau da, existitzen badira $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ non

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

diren, $u(x,0) = f_1(x)$ izan behar denez eta $\sin h0 = 0$, $\cosh 0 = 1$ direnez,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \Longrightarrow \quad \alpha_n = a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

eta $u(x, L) = f_2(x)$ izan behar denez,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(\alpha_n \cosh\frac{n\pi L}{l} + \beta_n \sinh\frac{n\pi L}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$
$$\Longrightarrow\ b_n = a_n \cosh\frac{n\pi L}{l} + \beta_n \sin h\frac{n\pi L}{l}$$
$$\Longrightarrow\ \beta_n = \frac{b_n - a_n \cosh\frac{n\pi L}{l}}{\sinh\frac{n\pi L}{l}},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

α_n eta β_n ordezkatuz soluzio orokorrean, (8.1.15) Laplaceren problemaren soluzioa dugu.

8.2 Fourierren serieak. Errepasoa

Definizioa. Izan bitez $L > 0$ eta $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako. Orduan,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

adierazpena *serie trigonometrikoa* dela diogu.

Izan bedi f serie trigonometriko baten batura, hau da, existitzen dira $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako non

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{8.2.1}$$

den. Kontuan izanda

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0. & m \neq n \text{ bada,} \\ L, & m = n \neq 0 \text{ bada,} \\ 2L, & m = n = 0 \text{ bada;} \end{cases} \tag{8.2.2}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0. & m \neq n, \text{ bada,} \\ L, & m = n \text{ bada,} \end{cases} \tag{8.2.3}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{m\pi x}{L} dx = 0, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N} \tag{8.2.4}$$

direla, biderkatuz (8.2.1) berdintzaren bi atalak $\cos\dfrac{m\pi x}{L}$ funtzioarekin eta $[-L, L]$ tartean integratuz,

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{m\pi x}{L}\, dx = a_m, \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

eta $\sin\dfrac{m\pi x}{L}$-rekin biderkatuz eta integratuz,

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = b_m, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Definizioa. Izan bedi $f\colon [-L,L] \to \mathbb{R}$ integragarria. f-ren *Fourierren seriea* honako hau da:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{8.2.5}$$

non a_n eta b_n, f-ren *Fourierren koefizienteak*, honela definitzen diren:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad \forall\, n = 0,1,2,\dots \tag{8.2.6}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad \forall\, n = 1,2,\dots \tag{8.2.7}$$

Oharra. Kontuan izanda $\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ eta $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ direla $t \in \mathbb{R}$ guztietarako, $f\colon [-L,L] \to \mathbb{R}$ funtzioaren Fourierren serie konplexua idatz daiteke,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}, \qquad \text{non } c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{i\frac{n\pi x}{L}}\,dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Adibidea. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \text{ bada.} \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

$L = 1$ dela kontuan hartuz,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

eta $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,dx \\ &= \frac{x^2\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx\right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2} - \frac{2}{(n\pi)^2}\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx = \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)\,dx \\
&= -\frac{x^2\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left(\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2}\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

Oharra. Izan bedi $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$ integragarria.

(i) f funtzio bikoitia bada, $b_n = 0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta, beraz, f-ren Fourierren seriea kosinuetako seriea da. Gainera,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad \forall\, n = 0, 1, \dots$$

(ii) f funtzio bakoitia bada, $a_n = 0$ da $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako; hau da, f-ren Fourierren seriea sinuetako seriea da eta

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad \forall\, n = 1, 2, \dots$$

Definizioa. Izan bedi $f\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ integragarria.

(i) f-ren $[-L, L]$ tarteko *luzapen bikoitia*, $f_{bik}\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$, honela definitzen da:

$$f_{bik}(x) = \begin{cases} f(-x), & -L \le x < 0 \text{ bada.} \\ f(x), & 0 \le x \le L \text{ bada.} \end{cases}$$

f-ren *Fourierren kosinuetako seriea* f_{bik} luzapenaren Fourierren seriea da, hots,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

non $a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$ den $n = 0, 1, 2, \dots$ guztietarako.

(ii) f-ren $[-L, L]$ tarteko *luzapen bakoitia*, $f_{bak}\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$, honela definitzen da:

$$f_{bak}(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \le x < 0 \text{ bada.} \\ f(x), & 0 \le x \le L \text{ bada.} \end{cases}$$

f-ren *Fourierren sinuetako seriea* f_{bak} luzapenaren Fourierren seriea da, hots,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

non $b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$ den $n = 1, 2, \ldots$ guztietarako.

Definizioa. Izan bedi $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$. f *karratu integragarria* duela diogu eta $f \in L^2(-L, L)$ idatzi, baldin eta

$$\int_{-L}^{L} \big(f(x)\big)^2\,dx < +\infty$$

bada. $||f|| = \Big(\displaystyle\int_{-L}^{L} \big(f(x)\big)^2\,dx\Big)^{1/2}$ norma bat da $L^2(-L, L)$ espazioan.

8.1 teorema (Besselen desberdintza)**.** *Izan bitez $f \in L^2(-L, L)$ eta a_n, b_n (8.2.6) eta (8.2.7) formulen bidez definitutako f-ren Fourierren koefizienteak, $n = 0, 1, \ldots$ guztietarako. Orduan,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \big(f(x)\big)^2\,dx = \frac{1}{L}||f||^2.$$

Froga. Izan bitez $N \in \mathbb{N}$ eta

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Orduan,

$$\begin{aligned}&\int_{-L}^{L} \big(f(x) - S_N(x)\big)^2\,dx\\ &\qquad = \int_{-L}^{L} \big(f(x)\big)^2\,dx - 2\int_{-L}^{L} f(x)S_N(x)\,dx + \int_{-L}^{L} \big(S_N(x)\big)^2\,dx. \qquad (8.2.8)\end{aligned}$$

Alde batetik,

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)S_N(x)\,dx =& \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{N} a_n\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\\ &+ \sum_{n=1}^{N} b_n\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\\ &= \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right)L.\end{aligned}$$

Beste aldetik, (8.2.2), (8.2.3) eta (8.2.4) berdintzak gogoratuz:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\big(S_N(x)\big)^2\,dx &= \int_{-L}^{L}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx\\ &= \int_{-L}^{L}\frac{a_0^2}{4}\,dx+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}\,dx+b_n^2\int_{-L}^{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\,dx\right)\\ &= \left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)L.\end{aligned}$$

Beraz, (8.2.8) berdintzan ordezkatuz:

$$\int_{-L}^{L}\big(f(x)-S_N(x)\big)^2\,dx=\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx-\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)L.$$

Ezkerreko atala positiboa denez,

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx,\quad \forall N\in\mathbb{N}.$$

Azkenik, limitea hartuz N infinitura doanean:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx.\qquad\square$$

8.2 korolarioa. *Izan bedi $f\in L^2(-L,L)$. Orduan,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=0,\\ \lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=0.\end{aligned}$$

Froga. $f\in L^2(-L,L)$ denez, $\displaystyle\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx<+\infty$ da; beraz, Besselen desberdintzaren arabera, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<+\infty$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<+\infty$. Ondorioz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}b_n^2=0$, eta berdintza horiek inplikatzen dute frogatu nahi duguna. $\square$

Jakin nahi dugu noiz ziurta daitekeen f eta haren Fourierren seriearen batura berdinak direla; hots, noiz den Fourierren seriea puntualki konbergentea, bere batura f izanik.

8.3 teorema. *Izan bedi f deribagarria $[-L, L]$ tartean, $f(-L) = f(L)$ eta $f'(-L) = f'(L)$ izanik. Orduan,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad \forall\, x \in [-L, L],$$

non a_n eta b_n (8.2.6) eta (8.2.7) formulek definitzen dituzten f-ren Fourierren koefizienteak diren, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako.

Definizioa. Izan bedi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Esaten dugu f $[a, b]$ tartean *zatika jarraitua* dela jarraitua bada $[a, b]$ tarteko puntu guztietan, agian puntu kopuru finitu batean izan ezik, puntu horietan albo-limiteak finituak izanik (hau da, f-ren etenguneetan jauzia finitua da).

8.4 teorema. *Izan bedi $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$, f eta f' zatika jarraituak izanik $[-L, L]$ tartean, eta izan bitez a_n, b_n (8.2.6) eta (8.2.7) formulen bidez definitutako f-ren Fourierren koefizienteak, $n = 0, 1, \ldots$ guztietarako. Orduan,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad \forall\, x \in (-L, L),$$

non $f(x+) = \lim\limits_{\xi \to x^+} f(\xi)$ eta $f(x-) = \lim\limits_{\xi \to x^-} f(\xi)$ diren. Gainera,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi) = \frac{f(-L) + f(L)}{2}.$$

Oharrak. (i) f jarraitua bada x puntuan, albo-limiteak berdinak dira, beraz, $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{2} = f(x)$ eta 8.3 teoremaren emaitza errekuperatzen da. Era berean, $f(-L) = f(L)$ bada, $x = L$ eta $x = -L$ balioetarako 8.3 teoremaren emaitza dugu.

(ii) f-k bete behar dituen hipotesiak ahultzen badira, konbergentzia puntualaren beste emaitza batzuk lor daitezke.

(iii) f jarraitua bada $[-L, L]$ tartean, $f(-L) = f(L)$ bada eta f' zatika jarraitua $[-L, L]$ tartean, froga daiteke S_N Fourierren seriearen batura partzialen limite uniformea, $N \to \infty$ denean, f dela.

f ez bada hain erregularra, Fourierren seriearen konbergentzia puntuala f-rantz gal daiteke puntu kopuru infinitu batean. Hala ere, $f \in L^2(-L, L)$ bada, L^2 normarekiko konbergentzia f-rantz froga daiteke.

8.5 teorema. *Izan bitez $f \in L^2(-L, L)$ eta S_N f-ren Fourierren seriearen N-garren batura partziala. Orduan,*

$$\lim_{N \to \infty} ||f - S_n||^2 = \lim_{N \to \infty} \int_{-L}^{L} \big(f(x) - S_N(x)\big)^2\, dx = 0.$$

8.6 korolarioa (Parsevalen berdintza)**.** *Izan bitez $f \in L^2(-L, L)$ eta a_n, b_n (8.2.6) eta (8.2.7) formulen bidez definitutako f-ren Fourierren koefizienteak, $n = 0, 1, \ldots$ guztietarako. Orduan,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\big(f(x)\big)^2\,dx = \frac{1}{L}||f||^2.$$

Oharra. Parsevalen berdintza eta Fourierren serieen konbergentzia puntuala oso lagungarriak dira zenbaki-serieen baturak kalkulatzeko.

Adibidea. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \text{ bada,} \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

f bakoitia denez, haren Fourierren seriea sinuetako Fourierren seriea da, hau da, $a_n = 0$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ guztietarako. Bestalde,

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_{0}^{1}\sin(n\pi x)\,dx \\ &= -\,2\,\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_0^1 = 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hau da, f-ren Fourierren seriea honako hau da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)\pi x).$$

f zatika $C^1([-1, 1])$ denez,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)\pi x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \text{ bada,} \\ 1, & 0 < x < 1 \text{ bada.} \\ 0, & x = -1, 0, 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

$x = 1/2$ hartuz, $\sin((2k-1)\pi x) = \sin\big(\frac{2k-1}{2}\pi\big) = (-1)^{k+1}$, beraz,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin\Big(\frac{(2k-1)\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

Gainera, Parsevalen berdintza erabiliz,

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{16}\int_{-1}^{1}\big(f(x)\big)^2\,dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

8.3 Sturm-Liouvilleren mugalde-problemak

Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal batek eta bi mugalde-baldintzek osatutako problema diferentzialak aztertu nahi ditugu tarte finitu batean; hots, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ emanda, honako mota honetako problemak aztertuko ditugu atal honetan:

$$\begin{cases} x'' + \alpha(t)x' + \beta(t)x = f(t), & t \in [a,b], \\ a_1\, x(a) + b_1\, x(b) + c_1\, x'(a) + d_1\, x'(b) = A_1, & \\ a_2\, x(a) + b_2\, x(b) + c_2\, x'(a) + d_2\, x'(b) = A_2. & \end{cases}$$

Mugalde-problema horietako soluzioen kopurua nahiko irregularra da.

Adibidea. Izan bedi honako mugalde-baldintzetako problema hau:

$$\begin{cases} x'' + x = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0. & \end{cases}$$

Ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ da. Mugalde-baldintzak bete daitezen

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\Longrightarrow\ C_1 = 0, \\ x(1) = 0 &\Longrightarrow C_2 \sin 1 = 0 \ \Longrightarrow C_2 = 0. \end{aligned}$$

Beraz, soluzio bakarra soluzio nulua da.

Adibidea. Izan bedi honako mugalde-baldintzetako problema hau:

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0. & \end{cases}$$

Orain, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 \cos(\pi t) + C_2 \sin(\pi t)$ da, eta mugalde-baldintzak bete daitezen

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\ \Longrightarrow\ C_1 = 0, \\ x(1) = 0 &\ \Longrightarrow\ C_2 \sin \pi = 0. \end{aligned}$$

Azken baldintza $C_2 \in \mathbb{R}$ guztietarako betetzen denez, mugalde-problemak infinitu soluzio ditu, $x(t) = C_2 \sin(\pi t)$, $C_2 \in \mathbb{R}$ edozein izanik.

Adibidea. Izan bedi honako mugalde-baldintzetako problema hau:

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) + x(1) = 0, & \\ x'(0) + x'(1) = 0. & \end{cases}$$

Ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra, lehen bezala, $x(t) = C_1 \cos(\pi t) + C_2 \sin(\pi t)$ da. Mugalde-baldintzak bete daitezen:

$$\begin{aligned} x(0) + x(1) = 0 &\implies C_1 - C_1 = 0, \\ x'(0) + x'(1) = 0 &\implies \pi C_2 - \pi C_2 = 0. \end{aligned}$$

Bi mugalde-baldintzak betetzen dira C_1 eta C_2 edozein bi konstante erreal izanik; beraz, mugalde-problemaren soluzioen multzoa bi parametroko familia da:

$$x(t) = C_1 \cos(\pi t) + C_2 \sin(\pi t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sarritan, mugalde-balioetako problemetan parametro bat agertzen da, eta parametroaren balio guztietarako aztertu behar da problema. Hori gertatu da aldagaien banantze-metodoa erabili dugunean deribatu partzialetako ekuazio batzuk ebazteko. λ parametro baten menpeko bigarren ordenako ekuazio diferentzial batera heldu gara.

8.3.1 Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularra

Definizioa. Izan bitez $p, q, r\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a, b])$, $r \in C^1([a, b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a, b]$ guztietarako, eta $\mathcal{L}\colon C^2([a, b]) \to C([a, b])$ honako modu honetan definitutako eragile diferentziala:

$$\mathcal{L}x(t) = (r(t)x'(t))' + p(t)x(t), \quad \forall t \in [a, b]. \tag{8.3.1}$$

Izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ non $|a_1| + |a_2| \neq 0$ eta $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b\colon C^1([a, b]) \to \mathbb{R}$ honela definituta:

$$\mathcal{B}_a(x) = a_1 x(a) + a_2 x'(a), \tag{8.3.2}$$

$$\mathcal{B}_b(x) = b_1 x(b) + b_2 x'(b). \tag{8.3.3}$$

Orduan, $\lambda \in \mathbb{R}$ parametroa emanda,

$$\begin{cases} \mathcal{L}x + \lambda q(t)x = 0, \quad t \in [a, b], \\ \mathcal{B}_a(x) = 0, \\ \mathcal{B}_b(x) = 0, \end{cases} \tag{8.3.4}$$

Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularra dela diogu.

λ parametroaren balio baterako (8.3.4) problemak soluzio ez-nulua badu, balio hori problemaren *balio propioa* edo *autobalioa* dela diogu, eta soluzio ez-nuluak *funtzio propioak* edo *autofuntzioak* dira.

Oharra. Izan bitez $p, q, r\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a, b])$, $r \in C^1([a, b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a, b]$ guztietarako, eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenaren bidez definitutako eragile diferentziala. Definitzen dugu $A\colon C^2([a, b]) \to C([a, b])$ eragile berria, non

$$Ax(t) = -\frac{1}{q(t)}\mathcal{L}x(t), \quad \forall t \in [a, b]. \tag{8.3.5}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ A eragilearen *balio propioa* dela esaten da

$$Ax = \lambda x$$

ekuazioak soluzio ez-nulua badu. Soluzio ez-nulu horiek A-ren *funtzio propioak* dira.

Beraz, (8.3.2) eta (8.3.3) mugalde-baldintzak betetzen dituzten A eragilearen funtzio propioak (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problemaren funtzio propioak dira, eta A-ren balio propioak Sturm-Liouvilleren problemarenak dira. Hortik, izena.

Adibidea. Beroaren ekuazioa, muturren tenperatura konstante mantentzen denean, aldagaien banantze-metodoaren bidez ebaztean, honako Sturm-Liouvilleren problema honetara heldu gara:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

Hor, $r(x) = 1$, $p(x) = 0$ eta $q(x) = 1$ $x \in [0, l]$ guztietarako. Ikusi dugu $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ balio propioa dela, eta $C \sin \dfrac{n\pi x}{l}$ funtzioak λ_n balio propioari loturiko funtzio propioak, $C \in \mathbb{R}$ edozein izanik.

Bestalde, beroaren ekuazioa ebaztean, muturrak isolatuta mantentzen direnean, beste Sturm-Liouvilleren problema honetara heldu gara:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

Kasu horretan, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako, $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ balio propioa da, eta funtzio propioak $X_0(x) = C$ eta $X_n(x) = C \cos \dfrac{n\pi x}{l}$ dira, $C \in \mathbb{R}$ edozein izanik.

8.7 proposizioa (Lagrangeren berdintza)**.** *Izan bitez $r, p\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $p \in C([a, b])$, $r \in C^1[(a, b])$ izanik eta $r(t) > 0$ $t \in [a, b]$ guztietarako; eta izan bedi $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenaren bidez definitutako eragile diferentziala. Orduan, $x, y \in C^2([a, b])$ guztietarako*

$$x\mathcal{L}y - y\mathcal{L}x = \frac{d}{dt}\big(r(t)(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\big) = \frac{d}{dt}(r(t)W(x, y)(t)), \tag{8.3.6}$$

eta, ondorioz,

$$\int_a^b (x(t)\mathcal{L}y(t) - y(t)\mathcal{L}x(t))\, dt = r(b)W(x, y)(b) - r(a)W(x, y)(a). \tag{8.3.7}$$

Froga. $\mathcal{L}$ eragilearen definizioaren arabera:

$$\begin{aligned}x\mathcal{L}y - y\mathcal{L}x =& x(t)\big((r(t)y'(t))' + p(t)y(t)\big) - y(t)\big((r(t)x'(t))' + p(t)x(t)\big)\\ =& x(t)(r(t)y'(t))' - y(t)(r(t)x')'.\end{aligned}$$

Biderkaduraren deribatuaren formula kontuan hartuz:

$$\begin{aligned}\big(x(t)r(t)y'(t)\big)' &= x'(t)r(t)y'(t) + x(t)\big(r(t)y'(t)\big)',\\ \big(y(t)r(t)x'(t)\big)' &= y'(t)r(t)x'(t) + y(t)\big(r(t)x'(t)\big)'.\end{aligned}$$

Orduan:

$$\begin{aligned}x\mathcal{L}y - y\mathcal{L}x =& \big(x(t)r(t)y'(t)\big)' - x'(t)r(t)y'(t) - \big(y(t)r(t)x'(t)\big)' + y'(t)r(t)x'(t)\\ =& \big(x(t)r(t)y'(t) - y(t)r(t)x'(t)\big)'\\ =& \big(r(t)W(x,y)(t)\big)'.\end{aligned}$$

□

8.8 proposizioa. *Izan bitez $p, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenaren bidez definitutako eragile diferentziala; izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ non $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenen bidez definituta. Izan bitez $x, y \in C^2([a,b])$ non $\mathcal{B}_a(x) = \mathcal{B}_b(x) = \mathcal{B}_a(y) = \mathcal{B}_b(y) = 0$ diren. Orduan,*

$$W(x,y)(a) = W(x,y)(b) = 0$$

dira eta, ondorioz,

$$\int_a^b (x(t)\mathcal{L}y(t) - y(t)\mathcal{L}x(t))\,dt = 0.$$

Froga. $\mathcal{B}_a(x) = \mathcal{B}_a(y) = 0$ badira,

$$\begin{cases} a_1x(a) + a_2x'(a) = 0,\\ a_1y(a) + a_2y'(a) = 0,\end{cases}$$

$|a_1| + |a_2| \neq 0$ denez, nahitaez,

$$\det\begin{pmatrix} x(a) & x'(a)\\ y(a) & y'(a)\end{pmatrix} = W(x,y)(a) = 0.$$

Era berean, $\mathcal{B}_b(x) = \mathcal{B}_b(y) = 0$ badira,

$$\begin{cases} b_1x(b) + b_2x'(b) = 0,\\ b_1y(b) + b_2y'(b) = 0,\end{cases}$$

eta $|b_1| + |b_2| \neq 0$ denez, nahitaez,

$$\det\begin{pmatrix} x(b) & x'(b)\\ y(b) & y'(b)\end{pmatrix} = W(x,y)(b) = 0.$$

Azkenik, Lagrangeren berdintza kontuan hartuz,

$$\int_a^b \big(x(t)\mathcal{L}y(t) - y(t)\mathcal{L}x(t)\big)\,dt = r(b)W(x,y)(b) - r(a)W(x,y)(a) = 0.$$

□

Oharra. $C^2([a,b])$ espazioan, honako biderkadura eskalar hau hartzen badugu:

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)\, dt,$$

$C^2([a,b])$ espazioan definitutako $\mathcal{L}$ eragile diferentzial bat *autoadjuntua* dela diogu, baldin eta

$$< x, \mathcal{L}y >=< \mathcal{L}x, y >, \quad \forall\, x, y \in C^2([a,b]).$$

Aurreko proposizioaren arabera, (8.3.1) adierazpenaren bidez definitutako eragilea autoadjuntua da, Sturm-Liouvilleren problemaren mugalde-baldintza homogeneoak betetzen dituzten funtzioetara murrizten bada.

(8.3.4) Sturm-Liouvilleren problemaren funtzio propioen propietateak aztertzeko, $[a,b]$ tartean definitutako funtzio-espazio euklidear egoki bat erabiliko dugu.

Definizioak. Izan bedi $q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $q(t) > 0$ izanik $t \in [a,b]$ guztietarako. Orduan, q-k $\mu(t) = \int_a^t q(u)\, du$ neurri monotono gorakorra definitzen du, $d\mu = q(t)dt$. q funtzio positiboa *pisua* dela diogu.

$f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ μ neurriarekiko integragarriak badira,

$$< f, g >_q = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, q(t)\, dt, \tag{8.3.8}$$

f eta g funtzioen arteko biderkadura eskalarra da, eta norma bat induzitzen du

$$||f||_q = \left(\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\, q(t)\, dt \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, q(t)\, dt \right)^{1/2}.$$

$[a,b]$ tartean definitutako eta $||\cdot||_q$ norma finituko funtzioek $L^2(a,b;d\mu) = L^2_q(a,b)$ espazioa osatzen dute:

$$L^2_q(a,b) = \{ f\colon [a,b] \to \mathbb{C} \,:\, \int_a^b |f(t)|^2 q(t)\, dt < +\infty \}.$$

$q \equiv 1$ bada, $d\mu = dt$ dugu, eta notazioa laburtzeko $L^2(a,b)$ eta $< f, g >$ ikurrak erabiltzen dira.

Izan bitez $f, g \in L^2_q(a,b)$. Esaten da f eta g funtzioak *ortogonalak* direla, baldin eta $< f, g >_q = 0$ bada.

Izan bitez I indizeen multzo bat eta $g_i \in L^2_q(a,b)$, $i \in I$ guztietarako. $\{g_i\}_{i\in I}$ $L^2_q(a,b)$ espazioaren *sistema ortogonala* dela esaten dugu, baldin eta $< g_i, g_j >_q = 0$ bada $i \neq j$ guztietarako. Horrez gain, $||g_i||_q = 1$ bada $i \in I$ guztietarako, $\{g_i\}_{i\in I}$ familiari $L^2_q(a,b)$ espazioaren *sistema ortonormala* esan ohi zaio. Hau da, $\{g_i\}_{i\in I}$ sistema ortonormala da honako hau betetzen bada:

$$< g_i, g_j >_q = \int_a^b g_i(t)\overline{g_j(t)}\, q(t)\, dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ bada,} \\ 1, & i = j \text{ bada.} \end{cases}$$

Adibidea. $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi t}{l}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ $L^2(0,l)$ espazioko sistema ortonormala da, zeren eta

$$\int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi t}{l}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{m\pi t}{l}\,dt = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{m\pi t}{l}\,dt = \delta_{nm}$$

baita $n, m \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Adibidea. $\left\{\cos\frac{n\pi t}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $L^2(0,l)$ espazioko sistema ortogonala da (8.2.2) berdintzaren arabera.

8.9 teorema (Sturm-Liouvilleren problemen balio propioen eta funtzio propioen propietateak)**.** *Izan bitez* $p, q, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ *eta* $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ *guztietarako eta* $\mathcal{L}$ *(8.3.1) adierazpenean definitutako eragile diferentziala, eta izan bitez* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *non* $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ *diren eta* $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ *(8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta.*

(i) *(8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularraren balio propioek zenbaki errealen segida gorakor dibergente bat osatzen dute,* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *non* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ \ldots$ *eta* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ *den.*

(ii) *(8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularraren funtzio propioak funtzio errealak dira, eta balio propio bakoitzari esleituriko funtzio propioen multzoa dimentsio bateko espazio bektoriala da.*

(iii) $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako, izan bedi* ϕ_n λ_n *balio propioari esleituriko funtzio propioa. Orduan,*

$$< \phi_i, \phi_j >_q = \int_a^b \phi_i(t)\,\phi_j(t)\,q(t)\,dt = 0, \quad \forall\, i \neq j.$$

Hau da, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $L_q^2(a,b)$ *espazioaren sistema ortogonala da.*

(iv) $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako, izan bedi* φ_n λ_n *balio propioari esleituriko funtzio propio normalizatua, hots,* $||\varphi_n||_q = 1$ *betetzen duen funtzio propioa. Orduan,* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $L_q^2(a,b)$ *espazioaren sistema ortonormala da.*

(v) $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako,* λ_n *balio propioari esleituriko funtzio propioek* $n-1$ *zero dituzte* (a,b) *tartean. Bereziki,* φ_1 *funtzio propioak ez du zeinu-aldaketarik* (a,b) *tartean.*

Froga. Soilik (iii) atala frogatuko dugu. (8.3.1) adierazpenaren bidez definitutako $\mathcal{L}$ eragilea erabiliz, λ_i eta λ_j Sturm-Liouvilleren problemaren balio propioak badira, haien elkartutako funtzio propioak ϕ_i eta ϕ_j izanik, hurrenez hurren, orduan:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\phi_i + \lambda_i q(t)\phi_i &= 0,\\ \mathcal{L}\phi_j + \lambda_j q(t)\phi_j &= 0.\end{aligned}$$

Lehen ekuazioa ϕ_j-rekin eta bigarrena ϕ_i-rekin biderkatuz, eta haien arteko kendura $[a,b]$ tartean integratuz,

$$\int_a^b (\phi_j(t)\mathcal{L}\phi_i(t) - \phi_i(t)\mathcal{L}\phi_j(t))\,dt + (\lambda_i - \lambda_j)\int_a^b \phi_i(t)\phi_j(t)q(t)\,dt = 0.$$

Lagrangeren berdintza eta mugalde-baldintzak kontuan hartuz, lehen batugaia nulua da, beraz, $\lambda_i \neq \lambda_j$ bada

$$\int_a^b \phi_i(t)\phi_j(t)q(t)\,dt = 0. \qquad \square$$

8.10 teorema. *Izan bitez* $p, q, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ *eta* $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ *guztietarako, eta izan bitez* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *non* $|a_1|+|a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ *diren.*

Izan bitez $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(8.3.4) Sturm-Liouvilleren problemaren funtzio propioen sistema ortonormala,* $f \in L^2_q(a,b)$ *eta*

$$b_k =< f, \varphi_k >_q = \int_a^b f(t)\,\varphi_k(t)\,q(t)\,dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Izan bedi

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(t).$$

Orduan,

$$\lim_{n\to\infty} ||f - S_n||_q^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - S_n(t)|^2\; q(t)\,dt = 0.$$

Hau da, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $L^2_q(a,b)$ *espazioko oinarri ortonormala da, eta*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n >_q \varphi_n$$

$||\cdot||_q$ *normarekiko. Gainera, Parsevalen identitatea egiaztatzen da, hots,*

$$||f||_q^2 = \int_a^b |f(t)|^2 q(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2.$$

Froga. Ez dugu $\sum b_n\varphi_n$ seriearen konbergentzia $||\cdot||_q$ normarekiko frogatuko. Bakarrik ikusiko dugu nola kalkulatu b_n koefizienteak, onartuz f funtzioa $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzioen serie baten bidez adieraz daitekeela. Hau da, onartuko dugu $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $L^2_q(a,b)$ espazioaren oinarri ortonormala dela, eta, ondorioz, existitzen dela $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ non

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n(t)$$

den. Berdintza hori φ_k-rekin biderkatuz eta $[a,b]$ tartean integratuz q pisuarekiko,

$$\int_a^b f(t)\varphi_k(t)q(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_k(t)q(t)\,dt.$$

$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $L_q^2(a,b)$ espazioko sistema ortonormala denez, $\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_k(t)q(t)\,dt = \delta_{nk}$ eta, horren ondorioz,

$$\int_a^b f(t)\varphi_k(t)q(t)\,dt = < f, \varphi_k >_q = b_k.$$

Parsevalen berdintza frogatuko dugu orain:

$$\begin{aligned} ||f||_q^2 &= \int_a^b |f(t)|^2 q(t)\,dt \\ &= \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n(t)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k(t)\Big) q(t)\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_n b_k \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_k(t)q(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2. \end{aligned}$$

□

Oharra. $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, ϕ_n (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problemaren funtzio propioak badira, ez nahitaez normalizatuak, orduan $\varphi_n = \dfrac{\phi_n}{||\phi_n||_q}$ funtzio propio normalizatuak izango dira. Orduan,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \varphi_n >_q \varphi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< f, \phi_n >_q}{||\phi_n||_q} \frac{\phi_n(t)}{||\phi_n||_q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< f, \phi_n >_q}{< \phi_n, \phi_n >_q} \phi_n(t).$$

8.11 teorema (Puntuz puntuko konbergentzia)**.** *Izan bitez* $p, q, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ *eta* $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ *guztietarako, eta izan bitez* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *non* $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ *diren.*

$n \in \mathbb{N}$ *guztietarako, izan bedi* λ_n *(8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa eta* ϕ_n *elkartutako funtzio propioa.*

Izan bedi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f *eta* f' *funtzioak* $[a,b]$ *tartean zatika jarraituak izanik, eta* $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako, izan bedi* b_n f*-ren* $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *oinarri ortogonalarekiko Fourierren seriearen* n*-garren koefizientea:*

$$b_n = \frac{< f, \phi_n >_q}{||\phi_n||_q^2}.$$

Orduan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\phi_n(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}, \quad \forall\, t \in (a,b),$$

non $f(t+) = \lim_{\xi \to t^+} f(\xi)$ *eta* $f(t-) = \lim_{\xi \to t^-} f(\xi)$ f*-ren* t *puntuko eskuin-limitea eta ezker-limitea diren, hurrenez hurren.*

f *funtzioa* t *puntuan jarraitua bada, orduan,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \phi_n(t) = f(t).$$

Adibidea. Izan bedi $f(t) = t$, $t \in [0,\pi]$ guztietarako, eta har dezagun honako Sturm-Liouvilleren problema erregular homogeneo hau:

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = x(\pi) = 0. \end{cases}$$

Kalkulatuko ditugu Sturm-Liouvillerren problema horren balio propioak eta funtzio propioak, eta adieraziko dugu f funtzio propio horien Fourierren seriearen bidez.

(i) $\lambda < 0$ bada, $\lambda = -\mu^2$, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t}$ da, eta $x(0) = x(\pi) = 0$ mugalde-baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra soluzio nulua da; beraz, ez dago balio propio negatiborik.

(ii) $\lambda = 0$ bada, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 + C_2 t$ da, eta, kasu honetan ere, mugalde-baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra $x \equiv 0$ da.

(iii) $\lambda > 0$ bada, $\lambda = \mu^2$, $x(t) = C_1 \cos(\mu t) + C_2 \sin(\mu t)$ da ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra. Orain, mugalde-baldintzak bete daitezen:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\implies C_1 = 0 \\ x(\pi) = 0 &\implies C_2 \sin(\mu\pi) = 0 \implies \mu\pi = n\pi,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hau da, emandako problemaren balio propioak $\lambda_n = n^2$ dira, eta elkartutako funtzio propioak $\phi_n(t) = \sin(nt)$ eta haren multiploak, $n \in \mathbb{N}$ izanik.

$f \in C^1([0,\pi])$ denez,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< f, \phi_n >}{||\phi_n||^2} \phi_n(t), \quad \forall\, t \in (0,\pi).$$

Kalkula ditzagun koefizienteak:

$$\begin{aligned} < f, \phi_n > = \int_0^\pi t \sin(nt)\, dt &= -\frac{t\cos(nt)}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n}\, dt \\ &= -\frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2}\Big|_0^\pi = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}; \end{aligned}$$

$$||\phi_n||^2 = \int_0^\pi \sin^2(nt)\, dt = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2nt)}{2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Beraz:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} \frac{2}{\pi} \sin(nt) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt), \quad \forall\, t \in (0,\pi).$$

8.3.2 Sturm-Liouvilleren problema periodikoa

Definizioa. Izan bitez $p, q, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako, eta $r(a) = r(b)$. Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (r(t)\, x')' + p(t)\, x + \lambda q(t)\, x = 0, \quad t \in [a,b] \\ x(a) = x(b), \\ x'(a) = x'(b) \end{cases} \tag{8.3.9}$$

Sturm-Liouvilleren problema periodikoa dela diogu.

λ parametroaren balio baterako (8.3.9) problema periodikoak soluzio ez-nulua badu, balio hori problemaren *balio propioa* edo *autobalioa* dela esaten da. Balio propio bakoitzerako problemaren soluzio ez-nuluak *funtzio propioak* edo *autofuntzioak* dira.

Izan bedi $\mathcal{L}\colon C^2([a,b]) \to C([a,b])$ (8.3.1) adierazpenaren bidez definitutako eragile deiferentziala. Lehenago ikusi dugun bezala, $x, y \in C^2([a,b])$ guztietarako

$$\begin{aligned} < x, \mathcal{L}y > - < y, \mathcal{L}x > =& \int_a^b (x(t)\mathcal{L}y(t) - y(t)\mathcal{L}x(t))\, dt \\ =& r(b)W(x,y)(b) - r(a)W(x,y)(a) \end{aligned}$$

da. Gainera, x eta y funtzioek mugalde-baldintza periodikoak egiaztatzen badituzte, hots,

$$\begin{aligned} x(a) = x(b), &\quad y(a) = y(b), \\ x'(a) = x'(b), &\quad y'(a) = y'(b) \end{aligned}$$

badira, orduan,

$$W(x,y)(a) = x(a)y'(a) - x'(a)y(a) = x(b)y'(b) - x'(b)y(b) = W(x,y)(b).$$

$r(a) = r(b)$ denez, $< x, \mathcal{L}y > = < y, \mathcal{L}x >$, hau da, $\mathcal{L}$ eragilea autoadjuntua da mugalde-baldintza periodikoak betetzen dituzten $C^2([a,b])$ klaseko funtzioen multzoan.

Adibidea. Izan bedi $L > 0$ eta har dezagun honako Sturm-Liouvilleren problema periodiko hau:

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda\, x(t) = 0, \\ x(-L) = x(L), \\ x'(-L) = x'(L). \end{cases}$$

Kalkula ditzagun problema horren balio propioak eta funtzio propioak.

(i) $\lambda < 0$ bada, $\lambda = -\mu^2$, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t}$ da, eta mugalde-baldintzak kontuan hartuz:

$$\begin{aligned} x(-L) = x(L) &\implies C_1 e^{-\mu L} + C_2 e^{\mu L} = C_1 e^{\mu L} + C_2 e^{-\mu L} \\ &\implies C_1\big(e^{-\mu L} - e^{\mu L}\big) = C_2\big(e^{-\mu L} - e^{\mu L}\big) \\ x'(-L) = x'(L) &\implies \mu C_1 e^{-\mu L} - \mu C_2 e^{\mu L} = \mu C_1 e^{\mu L} - \mu C_2 e^{-\mu L} \\ &\implies \mu C_1\big(e^{-\mu L} - e^{\mu L}\big) = -\mu C_2\big(e^{-\mu L} - e^{\mu L}\big). \end{aligned}$$

Beraz, $C_1 = C_2$ eta $C_1 = -C_2$ bete behar dira, eta, ondorioz, soluzio bakarra soluzio nulua da.

(ii) $\lambda = 0$ bada, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 + C_2 t$ da. $x'(t) = C_2$ denez, soluzio guztiek betetzen dute bigarren mugalde-baldintza. Bestalde:

$$x(-L) = x(L) \implies C_1 - C_2 L = C_1 + C_2 L \implies C_2 = 0.$$

Beraz, $\lambda_0 = 0$ gure problema periodikoaren balio propioa da eta funtzio propioak funtzio konstante ez-nuluak dira, hots, $x_0 \equiv 1$ eta haren multiploak.

(iii) $\lambda > 0$ bada, $\lambda = \mu^2$ idatziz, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 \cos(\mu t) + C_2 \sin(\mu t)$ da, eta $x'(t) = -\mu C_1 \sin(\mu t) + \mu C_2 \cos(\mu t)$. Orduan, mugalde-baldintzak bete daitezen:

$$\begin{aligned} x(-L) = x(L) &\implies C_1 \cos(\mu L) - C_2 \sin(\mu L) = C_1 \cos(\mu L) + C_2 \sin(\mu L) \\ &\implies C_2 \sin(\mu L) = 0; \\ x'(-L) = x'(L) &\implies \mu C_1 \sin(\mu L) + \mu C_2 \cos(\mu L) = -\mu C_1 \sin(\mu L) + \mu C_2 \cos(\mu L) \\ &\implies \mu C_1 \sin(\mu L) = 0. \end{aligned}$$

Existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $\mu L = n\pi$ den, goiko berdintzak betetzen dira C_1 eta C_2 edozein izanik. Beraz, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ balio propioa da, eta elkartutako funtzio propioak $\sin\dfrac{n\pi t}{L}$ eta $\cos\dfrac{n\pi t}{L}$ funtzioak eta horien konbinazio linealak dira.

Hau da, kasu honetan, balio propio positibo bakoitzaren funtzio propioen espazio bektoriala bi dimentsiokoa da. Funtzio propioek,

$$\{1, \sin\frac{n\pi t}{L}, \cos\frac{n\pi t}{L} : n \in \mathbb{N}\},$$

$L^2(-L, L)$ espazioaren oinarri ortogonala osatzen dute.

8.3.3 Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo erregularra

Definizioa. Izan bitez $p, q, r, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q, f \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenean definitutako eragile diferentziala, eta izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren, eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta. Orduan, $\lambda \in \mathbb{R}$ parametroa emanda,

$$\begin{cases} \mathcal{L}x + \lambda q(t)x = f(t), & t \in [a,b], \\ \mathcal{B}_a(x) = \alpha, \\ \mathcal{B}_b(x) = \beta, \end{cases} \tag{8.3.10}$$

Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo erregularra dela diogu.

8.12 proposizioa. *Izan bitez $p, q, r, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q, f \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenean definitutako eragile diferentziala, eta izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren, eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta.*

Izan bitez $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $y, u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, non

$$\begin{cases} \mathcal{L}y + \lambda q(t)y = f(t), & t \in [a,b], \\ \mathcal{B}_a(y) = 0, \\ \mathcal{B}_b(y) = 0, \end{cases}$$

eta

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + \lambda q(t)u = 0, & t \in [a,b], \\ \mathcal{B}_a(u) = \alpha, \\ \mathcal{B}_b(u) = \beta. \end{cases}$$

Orduan, $x = y + u$ (8.3.10) Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoaren soluzioa da.

Froga. Lehenengo eta behin, froga dezagun $x = y + u$ ekuazio diferentzialaren soluzioa dela. $\mathcal{L}$ eragile diferentziala lineala denez,

$$\mathcal{L}x + \lambda q(t)x = \mathcal{L}(y+u) + \lambda q(t)(y+u) = \mathcal{L}y + \mathcal{L}u + \lambda q(t)y + \lambda q(t)u = f(t) + 0 = f(t).$$

Bestalde, $\mathcal{B}_a$ eta $\mathcal{B}_b$ ere eragile linealak direnez,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_a x = \mathcal{B}_a(y+u) = \mathcal{B}_a y + \mathcal{B}_a u = 0 + \alpha = \alpha, \\ \mathcal{B}_b x = \mathcal{B}_b(y+u) = \mathcal{B}_b y + \mathcal{B}_b u = 0 + \beta = \beta. \end{aligned}$$

Beraz, x (8.3.10) problemaren soluzioa da. □

8.13 teorema (Mugalde-baldintza ez-homogeneoak)**.** *Izan bitez* $p, q, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $p, q \in C([a,b])$*,* $r \in C^1([a,b])$*,* $r(t) > 0$ *eta* $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ *guztietarako, eta* $\mathcal{L}$ *(8.3.1) adierazpeneko eragile diferentziala; eta izan bitez* $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *non* $|a_1| + |a_2| \neq 0$*,* $|b_1| + |b_2| \neq 0$ *eta* $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ *diren, eta* $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ *(8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta. Orduan,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *emanda,*

$$\begin{cases} \mathcal{L}x + \lambda q(t)x = 0, & t \in [a,b], \\ \mathcal{B}_a(x) = \alpha, \\ \mathcal{B}_b(x) = \beta, \end{cases} \tag{8.3.11}$$

mugalde-balidntza ez-homogeneoak dituen problemak soluzio bakarra du, baldin eta soilik baldin λ *ez bada (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneo erregularraren balio propioa.*

Froga. Izan bitez $\lambda \in \mathbb{R}$ eta x_1, x_2 λ balioari dagozkion ekuazio diferentzialaren bi soluzio linealki independente. Orduan, ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

da. x (8.3.11) problemaren soluzioa da, baldin eta soilik baldin mugalde-baldintza ez-homogeneoak betetzen baditu, hots:

$$\begin{cases} a_1\big(C_1x_1(a) + C_2x_2(a)\big) + a_2\big(C_1x_1'(a) + C_2x_2'(a)\big) = \alpha, \\ b_1\big(C_1x_1(b) + C_2x_2(b)\big) + b_2\big(C_1x_1'(b) + C_2x_2'(b)\big) = \beta. \end{cases}$$

Batugaiak berrantolatuz, x (8.3.11) problemaren soluzioa da, baldin eta soilik baldin

$$\begin{cases} C_1\big(a_1x_1(a) + a_2x_1'(a)\big) + C_2\big(a_1x_2'(a) + a_2x_2'(a)\big) = \alpha, \\ C_1\big(b_1x_1(b) + b_2x_1'(b)\big) + C_2\big(b_1x_2(b) + b_2x_2'(b)\big) = \beta. \end{cases}$$

Sistema horrek (C_1, C_2) soluzio bat eta bakarra dauka edozein $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ baliotarako, non $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ diren, baldin eta soilik baldin

$$\begin{vmatrix} a_1x_1(a) + a_2x_1'(a) & a_1x_2'(a) + a_2x_2'(a) \\ b_1x_1(b) + b_2x_1'(b) & b_1x_2(b) + b_2x_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

bada. Aldiz, λ (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa da, baldin eta soilik baldin goiko determinantea nulua bada. □

8.12 proposizioaren arabera, ezagutzen badugu baldintza ez-homogeneoak dituen Sturm-Liouvilleren problemaren soluzio bat, nahikoa izango da ekuazio diferentzial ez-homogeneoak eta mugalde-baldintza homogeneoek osatzen duten Sturm-Liouvilleren problema ebaztea (8.3.10) problemaren soluzioa lortzeko.

8.14 teorema (Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoaren ebazpena funtzio propioen bidez)**.** *Izan bitez $p, q, r, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q, f \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenaren bidez definitutako eragile diferentziala, eta izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda \in \mathbb{R}$ non $|a_1|+|a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren, eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetako eragileak. Izan bedi honako Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo hau:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}x + \lambda q(t)x = f(t), & t \in [a,b], \\ \mathcal{B}_a(x) = 0, \\ \mathcal{B}_b(x) = 0. \end{cases} \tag{8.3.12}$$

Orduan,

(i) λ (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa ez bada, (8.3.12) problemak soluzio bakarra du.

(ii) λ (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propio bat bada, hau da, existitzen bada $N \in \mathbb{N}$ non $\lambda = \lambda_N$ den, (8.3.12) problemak soluzioak ditu baldin eta soilik baldin $< f/q, \varphi_N >_q = 0$ bada, φ_N λ_N balio propioari dagokion funtzio propioa izanik. Kasu horretan, soluzioa ez da bakarra.

Froga. Izan bitez $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema erregular homogeneoaren balio propioen segida eta funtzio propio normalizatuen sistema, hurrenez hurren; hau da, $\mathcal{L}\varphi_n + \lambda_n q(t)\varphi_n = 0$ eta $\mathcal{B}_a\varphi_n = \mathcal{B}_b\varphi_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Izan bedi $d_n =< f/q, \varphi_n >_q$, $n \in \mathbb{N}$ guztitetarako, hau da:

$$\frac{f(t)}{q(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(t).$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ guztietarako, aurkitu nahi dugu $x(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \varphi_n(t)$ moduan idatz daitekeen Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoaren soluzioa. Ekuazio diferentzialean ordezkatuz, $\mathcal{L}\varphi_n = -\lambda_n q(t)\varphi_n$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x + \lambda q(t)x = \mathcal{L}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n + \lambda q(t)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\mathcal{L}\varphi_n + \lambda q(t)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \\ &= q(t)\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda - \lambda_n)\varphi_n = f(t). \end{aligned}$$

Hau da, honako hau bete behar da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda - \lambda_n)\varphi_n(t) = \frac{f(t)}{q(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\varphi_n(t),$$

eta bi serieen koefizienteak berdinduz,

$$c_n(\lambda - \lambda_n) = d_n, \quad \forall\, n = 1, 2, \dots$$

Orduan,

(i) λ (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa ez bada, hots, $\lambda \neq \lambda_n$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t).$$

(ii) λ (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa bada, hau da, existitzen bada $N \in \mathbb{N}$ non $\lambda = \lambda_N$ den, bi egoera ager daitezke:

(a) $d_N =< f, \varphi_N >_q \neq 0$ bada, problema homogeneoak ez du soluziorik c_N-k bete behar duen ekuazioak soluziorik ez duelako.

(b) $d_N =< f, \varphi_N >_q = 0$ bada, c_N edozein zenbaki erreal izan daiteke dagokion ekuazioa $0 = 0$ delako. Beraz, kasu honetan, Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoak infinitu soluzio ditu:

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{\infty} \frac{d_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) + C\varphi_N, \quad \forall\, C \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

8.15 teorema (Fredholmen teorema)**.** *λ-ren balio finko baterako, (8.3.10) Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoak soluzio bakarra du, edo (8.3.4) problema homogeneoak soluzio ez-nulua du.*

Adibidea. Izan bedi $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Ebatzi nahi dugu

$$\begin{cases} x'' + 2x = f(t), \\ x'(0) = x'(\pi) = 0 \end{cases}$$

mugalde-baldintzetako problema ez-homogeneoa, elkartutako Sturm-Liouvilleren problemaren funtzio propioen bidez.

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x'(0) = x'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Sturm-Liouvilleren problemaren balio propioak eta funtzio propioak $\lambda_n = n^2$ eta $\phi_n(t) = \cos(nt)$ dira, hurrenez hurren, $n = 0, 1, \dots$ izanik. Funtzio propio normalizatuak lortuko ditugu ϕ_n bere normarekin zatituz:

$$||\phi_0||^2 = \int_0^{\pi} dt = \pi \implies \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$||\phi_n||^2 = \int_0^{\pi} \cos^2(nt)\, dt = \frac{\pi}{2} \implies \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nt), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\lambda = 2$ Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propio bat ez denez, emandako problema ez-homogeneoak soluzio bat eta bakarra du, modu honetan adieraz daitekeena:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \varphi_n(t).$$

Ekuazio diferentzialean ordezkatuz,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \varphi_n''(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \varphi_n(t) = f(t)$$

bete behar da- $\varphi_n''(t) + \lambda_n \varphi_n(t) = 0$ denez, $n = 0, 1, \dots$ guztietarako, $\lambda_n = n^2$ izanik,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (2 - n^2) \varphi_n(t) = f(t).$$

$f(t) = 3$ bada $t \in [0, \pi]$ guztietarako,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (2 - n^2) \varphi_n(t) = 3 = 3\sqrt{\pi} \varphi_0(t);$$

beraz, koefizienteak berdinduz,

$$\begin{aligned} c_0(2 - 0^2) = 3\sqrt{\pi} &\implies c_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}, \\ c_n(2 - n^2) = 0, \ \forall n \geq 1 &\implies c_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hau da, problema ez-homogeneoaren soluzioa, $f \equiv 3$ bada, honako hau da:

$$x(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \varphi_0(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{3}{2}.$$

Izan bedi, orain, $f(t) = \cos(2t)$. Hemen ere,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$$

moduan idazten dugu, eta ekuazio diferentzialean ordezkatu, honako hau lortzeko:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (2 - n^2) \varphi_k(t) = \cos(2t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varphi_2(t).$$

Beraz, bi serieen koefizienteak berdinduz:

$$\begin{aligned} c_2(2 - 2^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} &\implies c_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ c_n(2 - n^2) = 0, \ \forall n \neq 2 &\implies c_n = 0, \ \forall n \neq 2. \end{aligned}$$

Hau da:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(2t) = -\frac{\cos(2t)}{2}.$$

8.3.4 Green-en funtzioa

Atal honetan, mugalde-baldintzetako problema ez-homogeneoa ebazteko beste metodo bat azalduko dugu, λ konstantea problema homogeneo elkartuaren balio propioa ez den kasurako.

8.16 lema. *Izan bitez $p, q, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenean definitutako eragile diferentziala, eta izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, non $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta.*

λ (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa ez bada, existitzen dira $x_1, x_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ linealki independenteak, non

$$\begin{cases} \mathcal{L}x_1 + \lambda q(t) x_1 = 0, \\ \mathcal{B}_a(x_1) = 0; \end{cases} \qquad \textit{eta} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}x_2 + \lambda q(t) x_2 = 0, \\ \mathcal{B}_b(x_2) = 0. \end{cases}$$

Froga. Demagun $a_1 \neq 0$ dela eta izan bedi $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$. Orduan, existentzia eta bakartasunaren teoremagatik, badakigu existitzen dela

$$\begin{cases} \mathcal{L}x_1 + \lambda q(t) x_1 = 0, \\ x_1(a) = -\dfrac{a_2}{a_1}\xi, \\ x_1'(a) = \xi \end{cases}$$

Cauchyren problemaren soluzio bat eta bakarra, nulua ez dena. Argi denez, $\mathcal{B}_a(x_1) = 0$. $a_1 = 0$ balitz, $a_2 \neq 0$ izango litzateke, eta antzera frogatuko genuke x_1-en existentzia, $x_1(a) = \xi$ eta $x_1'(a) = -\dfrac{a_1}{a_2}\xi$ hasierako baldintzak eskatuz.

Era berean frogatzen da x_2-ren existentzia. Demagun, absurdura eramanez, x_1 eta x_2 ez direla linealki independenteak; hau da, existitzen dela $A \in \mathbb{R}$ non $x_2 = Ax_1$ den. Orduan:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x_2 + \lambda q(t) x_2 = 0, \\ \mathcal{B}_a(x_2) = A\mathcal{B}_a(x_1) = 0, \\ \mathcal{B}_b(x_2) = 0. \end{cases}$$

Hau da, x_2 (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren soluzio ez-nulua da, eta hori ezinezkoa da λ ez baita problema horren balio propio bat. Beraz, x_1 eta x_2 linealki independenteak dira. □

8.17 proposizioa. *Izan bitez $p, q, r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p, q \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenean definitutako eragile diferentziala, eta izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ non $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren, eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta. Izan bitez $\lambda \in \mathbb{R}$, (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa ez dena,* *eta* $x_1, x_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *linealki independenteak non*

$$\begin{cases} \mathcal{L}x_1 + \lambda q(t)x_1 = 0, \\ \mathcal{B}_a(x_1) = 0; \end{cases} \qquad \textit{eta} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}x_2 + \lambda q(t)x_2 = 0, \\ \mathcal{B}_b(x_2) = 0. \end{cases}$$

Izan bedi

$$C(t) = r(t)(x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)) = r(t)W(x_1,x_2)(t). \tag{8.3.13}$$

C funtzio konstante ez-nulua da.

Froga. Lagrangeren identitatearen arabera,

$$\begin{aligned} C'(t) =& \frac{d}{dt}\big(r(t)W(x_1,x_2)(t)\big) \\ =& x_1(t)\mathcal{L}x_2(t) - x_2(t)\mathcal{L}x_1(t) \\ =& x_1(t)\big(\mathcal{L}x_2(t) + \lambda q(t)x_2(t)\big) - x_2(t)\big(\mathcal{L}x_1(t) + \lambda q(t)x_1(t)\big) = 0. \end{aligned}$$

Beraz, C funtzio konstante bat da. Gainera, x_1, x_2 linealki independenteak direnez, $W(x_1,x_2)(t) \neq 0$ eta $r(t) > 0$ da $t \in [a,b]$ guztietarako; beraz, C ez da nulua. □

Definizioa. Izan bitez $p,q,r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p,q \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenean definitutako eragile diferentziala, eta izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ non $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$ diren, eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta. Izan bitez $\lambda \in \mathbb{R}$, (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa ez dena, eta $x_1, x_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ linealki independenteak, non

$$\begin{cases} \mathcal{L}x_1 + \lambda q(t)x_1 = 0, \\ \mathcal{B}_a(x_1) = 0; \end{cases} \qquad \text{eta} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}x_2 + \lambda x_2 = 0, \\ \mathcal{B}_b(x_2) = 0. \end{cases}$$

Izan bedi $C = r(t)(x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)) = r(t)W(x_1,x_2)(t)$ konstante ez-nulua. Orduan, $G\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzioa, non

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{x_1(t)x_2(s)}{C}, & t < s \text{ bada}, \\ -\dfrac{x_2(t)x_1(s)}{C}. & t \geq s \text{ bada}, \end{cases} \tag{8.3.14}$$

(8.3.4) Sturm-Liouvilleren problemaren *Greenen funtzioa* dela diogu.

Adibidea. Kalkula dezagun honako mugalde-baldintzetako problema honen Greenen funtzioa:

$$\begin{cases} x'' + x = 0, \\ x(0) = x(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

Lehenengo eta behin, aurkitu behar ditugu x_1, x_2 non

$$\begin{cases} x_1'' + x_1 = 0, \\ x_1(0) = 0; \end{cases} \qquad \text{eta} \qquad \begin{cases} x_2'' + x_2 = 0, \\ x_2(\pi/2) = 0. \end{cases}$$

$x'' + x = 0$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ da. Argi da $x_1(t) = \sin t$ eta $x_2(t) = \cos t$ har daitezkeela. Orduan,

$$C = r(t)W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1.$$

Beraz,

$$G(t,s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & t < s \text{ bada}, \\ \cos t \sin s, & t \geq s \text{ bada}. \end{cases}$$

8.18 proposizioa (Greenen funtzioaren propietateak)**.** *Izan bedi G (8.3.14) adierazpenaren bidez definitutako (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problemaren Greenen funtzioa.*

(i) *G funtzio jarraitua da $[a,b] \times [a,b]$ multzoan.*

(ii) *$G(t,s) = G(s,t)$ $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ guztietarako.*

(iii) $\displaystyle \frac{\partial G}{\partial t}(t_0, t_0+) - \frac{\partial G}{\partial t}(t_0, t_0-) = \lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0) \\ t<s}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0) \\ t>s}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \frac{1}{r(t_0)}$, *$t_0 \in [a,b]$ guztietarako, hots, $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ deribatuak salto finitua du $t = s$ zuzenaren puntuetan.*

(iv) *$s \in [a,b]$ guztietarako, $\mathcal{L}G(t,s) + \lambda q(t)G(t,s) = 0$ da, $t \neq s$ bada.*

Froga. (i) x_1 eta x_2 jarraituak direnez, argi dago G jarraitua dela $t < s$ edo $t > s$ bada. Gainera, $t_0 \in [a,b]$ bada,

$$\lim_{(t,s)\to(t_0,t_0)} G(t,s) = -\frac{x_1(t_0)x_2(t_0)}{C} = G(t_0,t_0);$$

beraz, G jarraitua da $t = s$ zuzenaren puntuetan ere.

(ii) Nabaria da.

(iii) x_1 eta x_2 deribagarriak direnez,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{x_1'(t)x_2(s)}{C}, & t < s \text{ bada}, \\ -\dfrac{x_2'(t)x_1(s)}{C}, & t > s \text{ bada}. \end{cases}$$

Izan bedi $t_0 \in [a,b]$. $x_1, x_2 \in C^1([a,b])$ direnez,

$$\lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0)\\ s>t}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = -\lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0)\\ s>t}} \frac{x_1'(t)x_2(s)}{C} = -\frac{x_1'(t_0)x_2(t_0)}{C},$$

$$\lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0)\\ s<t}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = -\lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0)\\ s<t}} \frac{x_2'(t)x_1(s)}{C} = -\frac{x_2'(t_0)x_1(t_0)}{C}.$$

Beraz,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t}(t_0,t_0+) - \frac{\partial G}{\partial t}(t_0,t_0-) & \lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0)\\ s>t}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \lim_{\substack{(t,s)\to(t_0,t_0)\\ s<t}} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\\ &= -\frac{x_1'(t_0)x_2(t_0) - x_2'(t_0)x_1(t_0)}{C} = \frac{W(x_1,x_2)(t_0)}{C}\\ &= \frac{W(x_1,x_2)(t_0)}{r(t_0)W(x_1,x_2)(t_0)} = \frac{1}{r(t_0)}.\end{aligned}$$

(iv) $\mathcal{L}x_1 + \lambda q(t)x_1 = 0$ denez, $t < s$ bada,

$$\mathcal{L}G(t,s) + \lambda q(t)G(t,s) = \frac{x_2(s)}{C}\big(\mathcal{L}x_1 + \lambda q(t)x_1\big) = 0$$

eta $\mathcal{L}x_2 + \lambda q(t)x_2 = 0$ denez, $t > s$ bada

$$\mathcal{L}G(t,s) + \lambda q(t)G(t,s) = \frac{x_1(s)}{C}\big(\mathcal{L}x_2 + \lambda q(t)x_2\big) = 0. \qquad \square$$

8.19 teorema. *Izan bitez $p,q,r,f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $p,q,f \in C([a,b])$, $r \in C^1([a,b])$, $r(t) > 0$ eta $q(t) > 0$ $t \in [a,b]$ guztietarako eta $\mathcal{L}$ (8.3.1) adierazpenean definitutako eragile diferentziala; eta izan bitez $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ non $|a_1|+|a_2| \neq 0$, $|b_1|+|b_2| \neq 0$ diren, eta $\mathcal{B}_a, \mathcal{B}_b$ (8.3.2) eta (8.3.3) adierazpenetan definituta. Izan bitez $\lambda \in \mathbb{R}$, (8.3.4) Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa ez dena, eta G (8.3.14) adierazpeneko Greenen funtzioa. Orduan,*

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)\,f(s)\,ds \tag{8.3.15}$$

honako mugalde-baldintzetako problema honen soluzioa da:

$$\begin{cases}\mathcal{L}x + \lambda q(t)x = -f(t), \quad a < t < b,\\ \mathcal{B}_a(x) = 0,\\ \mathcal{B}_b(x) = 0.\end{cases}$$

Froga. Lehenengo eta behin, egiaztatuko dugu x-k ekuazio diferentziala betetzen duela. G-ren definizioaren arabera,

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds = \int_a^t G(t,s)f(s)\,ds + \int_t^b G(t,s)f(s)\,ds.$$

Deribatuz,

$$\begin{aligned}x'(t) =& G(t,t)f(t) + \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\,ds - G(t,t)f(t) + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\,ds\\ =& \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\,ds + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\,ds.\end{aligned}$$

r-rekin biderkatuz eta berriro deribatuz,

$$\begin{aligned}(r(t)x')' =& \Big(\int_a^t r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\,ds + \int_t^b r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\,ds\Big)'\\ =& r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,t-)f(t) + \int_a^t \big(r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big)'f(s)\,ds\\ &- r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,t+)f(t) + \int_t^b \big(r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big)'f(s)\,ds\\ =& r(t)f(t)\Big(\frac{\partial G}{\partial t}(t,t-) - \frac{\partial G}{\partial t}(t,t+)\Big) + \int_a^b \big(r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big)'f(s)\,ds\\ =& r(t)f(t)\Big(-\frac{1}{r(t)}\Big) + \int_a^b \big(r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big)'f(s)\,ds.\end{aligned}$$

Azken pausoan 8.18 proposizioaren (iii) atala erabili da. Beraz,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x(t) + \lambda q(t)x(t) =& (r(t)x')' + p(t)x + \lambda q(t)x\\ =& -f(t) + \int_a^b \big(r(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\big)'f(s)\,ds + \int_a^b p(t)G(t,s)f(s)\,ds\\ &+ \lambda\int_a^b q(t)G(t,s)f(s)\,ds\\ =& -f(t) + \int_a^b \big(\mathcal{L}G(t,s) + \lambda q(t)G(t,s)\big)\,ds\end{aligned}$$

eta, 8.18 proposizioaren (iv) atalaren arabera, azken integral hori nulua da; beraz, x-k betetzen du ekuazio diferentzial ez-homogeneoa. Orain, x-k mugalde-baldintzak betetzen dituela frogatu behar dugu. $\mathcal{B}_a(x_1) = 0$ denez,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_a(x) =& a_1x(a) + a_2x'(a)\\ =& a_1\int_a^b G(a,s)f(s)\,ds + a_2\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(a,s)f(s)\,ds\\ =& -\frac{a_1x_1(a) + a_2x_1'(a)}{C}\int_a^b x_2(s)f(s)\,ds = 0;\end{aligned}$$

eta $\mathcal{B}_b(x_2) = 0$ denez,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_b(x) =& b_1 x(b) + b_2 x'(b)\\ =& b_1 \int_a^b G(b,s) f(s)\, ds + b_2 \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(b,s) f(s)\, ds\\ =& -\frac{b_1 x_2(b) + a_2 x_2'(a)}{C} \int_a^b x_1(s) f(s)\, ds = 0.\end{aligned}$$ □

Adibidea. Honako mugalde-balioetako problema hau ebatzi nahi dugu:

$$\begin{cases} x'' - 4\,x = 3,\\ x'(0) = x'(\pi) = 0.\end{cases}$$

$\lambda = -4$ ez denez elkartutako Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren balio propioa, Greenen funtzioa existitzen da. Aurkitu behar ditugu x_1 eta x_2 ekuazio diferentzial homogeneoaren soluzioak, bakoitzak mugalde-baldintza bat betetzen duena. Ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$ da, eta $x'(t) = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}$.

$$x_1'(0) = 0 \implies 2C_1 - 2C_2 = 0 \implies C_1 = C_2.$$

Orduan, $x_1(t) = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \cosh(2t)$ hartuko dugu. Bestalde,

$$x_2'(\pi) = 0 \implies 2C_1 e^{2\pi} - 2C_2 e^{-2\pi} = 0,$$

eta $x_2(t) = \dfrac{e^{-2\pi} e^{2t} + e^{2\pi} e^{-2t}}{2} = \cosh(2t - 2\pi)$ har dezakegu. Orain, C konstantea kalkulatu behar da. $t = 0$ hartuz,

$$\begin{aligned} C = r(0)(W(x_1, x_2)(0) =& x_1(0) x_2'(0) - x_1'(0) x_2(0)\\ =& \cosh(2t) 2\sinh(2t - 2\pi) - 2\sinh(2t)\cosh(2t - 2\pi)|_{t=0}\\ =& -2\sinh(2\pi).\end{aligned}$$

Beraz, (8.3.14) formularen arabera,

$$G(t,s) = \left\{\begin{matrix} -\dfrac{x_1(t) x_2(s)}{C}, & t < s\\ -\dfrac{x_2(t) x_1(s)}{C}, & t \geq s\end{matrix}\right\} = \begin{cases} \dfrac{\cosh(2t)\cosh(2s - 2\pi)}{2\sinh(2\pi)}, & t < s,\\ \dfrac{\cosh(2s)\cosh(2t - 2\pi)}{2\sinh(2\pi)}, & t \geq s.\end{cases}$$

Ikusi dugun bezala, problema ez-homogeneoaren soluzioa hau da:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^\pi G(t,s)f(s)ds \\
&= -3\int_0^t \frac{\cosh(2s)\cosh(2t-2\pi)}{2\sinh(2\pi)}\,ds - 3\int_t^\pi \frac{\cosh(2t)\cosh(2s-2\pi)}{2\sinh(2\pi)}\,ds \\
&= -3\frac{\cosh(2t-2\pi)}{2\sinh(2\pi)}\left.\frac{\sinh(2s)}{2}\right|_0^t - 3\frac{\cosh(2t)}{2\sinh(2\pi)}\left.\frac{\sinh(2s-2\pi)}{2}\right|_t^\pi \\
&= \frac{3}{4\sinh(2\pi)}\big(\cosh(2t)\sinh(2t-2\pi) - \cosh(2t-2\pi)\sinh(2t)\big) \\
&= \frac{3}{4\sinh(2\pi)}\big(\sinh(2t-2\pi-2t)\big) = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

8.4 Ariketak

1. Ebatzi aldagaien banantze-metodoaren bidez:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(l,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

   (i) $l = \pi$ eta $f(x) = 4 + 5\cos 3x$ direnean; *Em.:* $u(x,t) = 4 + 5e^{9\alpha^2 t}\cos(3x)$

   (ii) $l = 3\pi$ eta $f(x) = 4 + 5\cos 3x$ direnean; *Em.:* $u(x,t) = 4 + 5e^{9\alpha^2 t}\cos(3x)$

2. Ebatzi aldagaien banantze-metodoaren bidez:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(l,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

   (i) $l = \pi$, $f(x) = 4\sin x + 5\sin 3x$ eta $g \equiv 0$ direnean;
   Em.: $u(x,t) = 4\sin x\cos(\alpha t) + 5\sin(3x)\cos(3\alpha t)$

   (ii) $l = 3\pi$, $f(x) = 4\sin\dfrac{x}{3} + 5\sin 3x$ eta $g(x) = 2\sin\dfrac{2x}{3}$ direnean;
   Em.: $u(x,t) = \dfrac{3}{\alpha}\sin\dfrac{2x}{3}\sin\dfrac{2\alpha t}{3} + 4\sin\dfrac{x}{3}\cos\dfrac{\alpha t}{3} + 5\sin(3x)\cos(3\alpha t)$

3. Kalkulatu honako Stuem-Liouvilleren problema homogeneo hauen balio propioak, funtzio propioak eta funtzio propio normalizatuak:

   (i) $\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x'(1) = 0 \end{cases}$ *Em.:* $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}$, $\phi_n(t) = \sin\frac{(2n-1)\pi t}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) $\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x'(0) = 0, \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{cases}$ *Em.:* $\lambda_n > 0$, non $\sqrt{\lambda_n} = \cot\sqrt{\lambda_n}$;
   $\phi_n(t) = \cos(\sqrt{\lambda_n}t)$, $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) $\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{cases}$ *Em.:* $\lambda_n > 0$ non $\sqrt{\lambda_n} = -\tan\sqrt{\lambda_n}$;
   $\phi_n(t) = \sin(\sqrt{\lambda_n}t)$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Froga ezazu

$$\begin{cases} x'' - 2x' + (1+\lambda)x = 0, \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

Sturm-Liouvilleren problema erregular homogeneoa dela; kalkulatu haren balio propioak, funtzio propioak eta funtzio propio normalizatuak.

Em.: $\lambda_n = n^2\pi^2$; $\phi_n(t) = e^t \sin(n\pi t)$, $n \in \mathbb{N}$.

5. (i) Adierazi $f(t) = t$ funtzioa

$$\begin{cases} x'' + \lambda\, x = 0 \\ x'(0) = x'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren funtzio propioen serie baten bidez. *Em.:* $t = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2}$, $0 < t < \pi$ bada.

(ii) Adierazi $f(t) = t + \pi$ funtzioa

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(-\pi) = x(\pi) = 0, \end{cases}$$

Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren funtzio propioen serie baten bidez. *Em.:* $t + \pi = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n}(-1)^{n+1} \sin\Big(\dfrac{n}{2}(t+\pi)\Big)$, $-\pi < t < \pi$ bada.

6. Adierazi $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2 \\ 0, & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$ funtzioa

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = x'(1) = 0 \end{cases}$$

Sturm-Liouvilleren problema homogeneoren funtzio propioen serie baten bidez. Zenbat balio du serie horren baturak $t = 1/4$, $t = 1/2$ eta $t = 2/3$ puntuetan?

Em.: $f(t) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2} - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2n-1} \sin \dfrac{(2n-1)\pi t}{2}$, $t \in (0,1) - \{1/2\}$ bada.

7. Aldagaien banantze-metodoa erabiliz, ebatzi:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases} \end{cases}$$

Em.: $u(x,t) = \sqrt{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 4}{\pi(2n-1)^2} - \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2n-1} \Big) \sin\Big(\dfrac{2n-1}{2} x\Big) e^{-\frac{(2n-1)^2}{4}\alpha^2 t}$

8. Ebatz ezazu
$$\begin{cases} x'' + \lambda x = -t, \\ x(0) = x(l) = 0 \end{cases}$$
Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneoa λ parametroaren balioen arabera.
$$\textit{Em.: } x(t) = \begin{cases} \dfrac{2l^3}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(l^2\lambda - n^2\pi^2)} \sin \dfrac{n\pi t}{l}, & \lambda \neq \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} \text{ bada } \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \nexists, & \exists n \in \mathbb{N} \,:\, \lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} \end{cases}$$

9. Ebatz ezazu Sturm-Liouvilleren honako problema ez-homogeneo hau, $\lambda \in \mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera:
$$\begin{cases} x'' + \lambda\, x = 3 \sin \dfrac{5\pi t}{2}, \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases}$$
$$\textit{Em.: } x(t) = \begin{cases} \frac{12}{4\lambda - 25\pi^2} \sin \frac{5\pi t}{2}, & \lambda \neq \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4} \text{ bada } \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \frac{3}{(N^2-N-6)\pi^2} \sin \frac{5\pi t}{2} + C \sin\big(\frac{(2N-1)\pi t}{2}\big), & \lambda = \frac{(2N-1)^2\pi^2}{4},\ N \in \mathbb{N} - \{3\} \\ \nexists, & \lambda = \dfrac{25\pi^2}{4}. \end{cases}$$

10. Izan bedi:
$$\begin{cases} tx'' + x' + \dfrac{\lambda}{t} x = \dfrac{1}{t}, \\ x(1) = x'(e^{\pi}) = 0. \end{cases}$$
Kalkulatu elkartutako Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren funtzio propioetako sistema normalizatua. Kalkulatu emandako problema ez-homogeneoaren soluzioak, $\lambda \in \mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera.
$$\textit{Em.: } \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4};\ \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\Big(\frac{2n-1}{2} \ln t\Big),\ n \in \mathbb{N};$$
$$x(t) = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(4\lambda - (2n-1)^2)} \sin\Big(\frac{2n-1}{2} \ln t\Big),\ \lambda \neq \frac{(2n-1)^2}{4} \text{ bada } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

11. Aurkitu mugalde-balioetako problema honetarako Greenen funtzioa, $k \in \mathbb{N}$ izanik:
$$\begin{cases} x'' - k^2 x = f(t), \\ x(0) = 0, \\ x(\pi) = 0. \end{cases}$$
$$\textit{Em.: } G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{\sinh(kt)\sinh(k(s-\pi))}{k\sinh(k\pi)}, & t < s \\ -\dfrac{\sinh\big(k(t-\pi)\big)\sinh(ks)}{k\sinh(k\pi)}, & t \geq s. \end{cases}.$$

12. Ebatzi Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo hau, bi metodoren bidez:

$$\begin{cases} x'' + 2x = -t, \\ x(0) = 0, \\ x(1) + x'(1) = 0. \end{cases}$$

Em.: $x(t) = -\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sin\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\sin\alpha_n \sin(\alpha_n t)}{\alpha_n^2(2-\alpha_n^2)(1+\cos^2\alpha_n)}$,

$(\alpha_n + \tan\alpha_n = 0,\ n \in \mathbb{N})$.

13. Ebatzi Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo hau:

$$\begin{cases} x'' - x = \sin\dfrac{t}{2}, \\ x'(0) = x'(\pi) = 0, \end{cases}$$

Em.: $x(t) = -\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(4n^2-1)(1+n^2)}\cos(nt) = -\dfrac{2\cosh(t-\pi)}{5\sinh\pi} - \dfrac{4}{5}\sin\dfrac{t}{2}$.

14. Ebatz ezazu honako mugalde-balioetako problema hau:

$$\begin{cases} x'' + 3x = \cos t, \\ x'(0) = x'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Em.: $\dfrac{1}{2}\cos t$

15. Aurkitu Sturm-Liouvilleren problema ez-homogeneo honen soluzioa:

$$\begin{cases} x'' - x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ x(0) = 0, \\ x(\pi) = 0, \end{cases}$$

Em.: $x(t) = -\dfrac{4}{5}\cos\dfrac{t}{2} + \dfrac{4}{5}\dfrac{\sinh(t-\pi)}{\sinh\pi}$

9. gaia

Deribatu partzialetako ekuazioak

Deribatu partzialetako ekuazio bat- (DPE)- da aldagai bi edo gehiagoko funtzio ezezagun bat eta funtzio horren deribatu partzial batzuk erlazionatzen dituen ekuazio diferentziala. Ekuzio hauek erabiltzen dira aldagai anitzeko funtzioak tartean sartzen dituzten problemak formulatzeko, eta eskuz ebatzi edo eredu konputazional bat sortzeko erabiltzen dira. Ekuazio diferentzial arruntak- (EDA)- deribatu partzialetako ekuazioen kasu partikular bat dira, zeinetan funtzioak aldagai bakarrekoak baitira. Deribatu partzialetako ekuazioak fenomeno ugari deskribatzeko erabil daitezke, hala nola, soinua, beroa, difusioa, elektrostatika, fluido dinamikoak, elastizitatea edo mekanika kuantikoa.

Oro har, deribatu partzialetako ekuazioak analitikoki ebaztea ekuazio diferentzial arruntak ebaztea baino zailagoa izaten da. DPE-ak ebazteko karakteristiken metodoa, Greenen funtzioa, integralaren transformatua edo aldagaien banantze-metodoa erabil daitezke, besteak beste. Irakasmaterial honetan DPE-en sarrera bat landuko da. 9. gai honetan lehen eta bigarren ordenako DPE linealak aztertuko dira, eta 10. gaian DPE nagusiak landuko, aldagaien banantze-metodoarekin ebatziz.

9.1 Fisika matematikoaren ekuazioak: ohiko adibideak

Izan bitez $x, y \in \mathbb{R}$; hauek dira $u(x, y)$ funtzioaren bigarren ordenarainoko deribatu partzialak:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{yx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{xy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}.$$

Definizioa. Izan bedi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eta $u(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Orduan, honela adieraziko dugu m ordenako *deribatu partzialetako ekuazioa*:

$$F(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^m u) = 0$$

non $u(x)$ funtzio ezezaguna den eta $D^m u$ ikurrak u-ren m. ordenako deribatu partzial guztiak adierazten dituen. Honela, bada:

$$D^m u = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_m^{j_m}}, \quad m = j_1 + \dots + j_n, \quad j_n \in \mathbb{N}.$$

Deribatu partzialetako ekuazioaren *ordena* u-ren deribatuen ordena nagusiak finkatzen du, eta, gure kasuan, m da.

Definizioa. Deribatu partzialetako ekuazio bat *lineala* dela esango dugu, baldin eta x aldagaia izan ezik beste guztiak, $u, Du, D^2u, \dots, D^m u$, linealak badira.

Adibidea. Izan bedi $u(x,t)$ funtzioa, non $t, x \in \mathbb{R}$ diren. Orduan,

$$u_t - \sin(x^2 t) u_{xx} = 0$$

ekuazioa lineala da, u_t eta u_{xx} linealak direlako.

Definizioa. Deribatu partzialetako ekuazio bat *kuasi-lineala* dela esango dugu, baldin eta ekuazioaren ordena bereko u-ren deribatu guztiak linealak badira.

Adibidea. Izan bedi $u(x,t)$ funtzioa, non $t, x \in \mathbb{R}$ diren. Orduan,

$$u_{tt} - u_x + \sin(u) = 0$$

ekuazioa ez da lineala, u-ren sinua agertzen delako eta sinua ez delako funtzio lineala. Aldiz, kuasi-lineala da, 2. ordenako gaia, u_{tt}, lineala delako.

Gai honetan ekuazio linealak aztertuko ditugu, eta, gehienez, 2. ordenakoak izango dira.

Definizioa. Izan bitez $x, y \in \mathbb{R}$. *Lehen ordenako ekuazio lineal orokorra*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$$

definitzen da. $f(x,y) = 0$ denean, ekuazioa *homogeneoa* dela esaten da.

Definizioa. *Bigarren ordenako ekuazio lineal orokor* bat

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + h(x,y)u = f(x,y)$$

definitzen da.

9.1.1 Adibide nagusiak

Ez da ezagutzen deribatu partzialetako ekuazio guztiak ebazten dituen teoria orokorrik. Eta horrelako teoria bat nekez existituko da, DPE-en bidez modeliza daitezkeen fenomeno fisiko, geometriko eta probabilistikoen aukera zabala kontuan izanik. Teoria orokor baten faltan, ikerkuntza DPE partikular batzuen ebazpenean zentratzen da; matematikan eta matematikatik kanpo aplikazio garrantzitsuak dituzten ekuazioetan, hain zuzen. Ekuazio partikular hauen ebazpenek beste ekuazio batzuen ebazpenerako ideiak emango dituzten itxaropenarekin.

Izan bitez $t \in \mathbb{R}$ denbora, $x \in \mathbb{R}^n$ aldagai espaziala, $u(x,t)$ funtzio ezezaguna eta $\Delta u = u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}$ bere laplacearra. Hauek dira DPE linealen adibide nagusietako batzuk:

Uhin-ekuazioa:

$$u_{tt} - c^2\Delta u = F(x,t),$$

non c fisikatik datorren konstante bat eta F datu ezaguna diren. Dimentsio bateko kasu partikularrean, $n=1$, ekuazioa $u_{tt} - c^2u_{xx} = F$ izango da.

Beroaren ekuazioa:

$$u_t - \Delta u = F(x,t).$$

$n=1$ denean $u_t - u_{xx} = F$.

Potentzialaren ekuazioa:

$$\Delta u = F(x).$$

$n=2$ denean, $u_{xx} + u_{yy} = F$.

Aurreko hiru ekuazio horiek aztertuko ditugu gai honetan, baina badaude beste batzuk ere; hala nola:

Schrödinger-en ekuazioa: Izan bitez $t \in \mathbb{R}$ eta $x \in \mathbb{R}^n$,

$$iu_t - \Delta u = F(x,t).$$

Cauchy-Riemann-en ekuazioak: $\mathbb{R}^2$-n definitutako $u(x,y)$ eta $v(x,y)$ funtzioak kalkulatu behar dira,

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x, \end{cases}$$

ekuazio-sistema egiaztatzen dutenak.

9.2 Aldagai-aldaketa

Deribatu partzialetako ekuazioetan aldagai-aldaketa egin daiteke u funtzio ezezagunean edo x aldagai askean. Aldagai-aldaketa aldagai askearekiko egin nahi bada, katearen erregela erabili behar da.

9.1 teorema (Katearen erregela)**.** *Izan bedi* $v\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^m *klaseko funtzio bat eta* $\varphi\colon D' \subset \mathbb{R}^n \to D$ *bijektiboa eta* C^m *klasekoa; definituko dugu* $u(x) = v(\varphi(x))$*. Orduan,*

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_i}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x), \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Bestalde, φ-ren alderantzizko funtzioarekin $v(y) = u(\varphi^{-1}(y))$ idatz daiteke, eta v-ren deribatuak u-ren menpe adieraz daitezke.

Adibideak. (a) Izan bedi $u(x, y)$ funtzioa eta $x, y \in \mathbb{R}$. Aurkitu $u_x + u_y = 0$ ekuazioaren soluzioa. Honako aldagai-aldaketa hau eginez:

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y, \end{cases}$$

funtzio berri bat lortuko dugu $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ non

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ u_y &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

diren. Deribatuak kalkulatuz eta ekuazioan ordezkatuz, $v_\xi = 0$ lortzen da. Beraz, $v(\xi, \eta) = \varphi(\eta)$, eta aldagai-aldaketa deseginez,

$$u(x, y) = \varphi(x - y)$$

lortzen da edozein φ funtziotarako.

(b) Dimentsio bateko uhin-ekuazio homogeneorako, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$\begin{cases} \xi = x + ct, \\ \eta = x - ct. \end{cases}$$

Orduan, $v(\xi, \eta) = u(t, x)$ izango da, eta

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_\xi + v_\eta, \\ u_t &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = c v_\xi - c v_\eta, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{\eta\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_{\eta\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_{\xi\xi} + 2 v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \\ u_{tt} &= c(v_{\xi\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_{\xi\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} - v_{\eta\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} - v_{\eta\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}) = c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Uhin-ekuazioan ordezkatuz $-4c^2 v_{\xi\eta} = 0$, beraz, $v_{\xi\eta} = 0$. Ondorioz, $v_\xi(\xi, \eta) = f(\xi)$ izango da, eta ξ-rekiko integratuz

$$v(\xi, \eta) = \int f(\xi)\, d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

lortzen da φ, ψ funtzio batzuetarako. Aldagai-aldaketa deseginez:

$$u(t, x) = v(\xi, \eta) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

Uhin-ekuazio homogeneoak infinitu soluzio ditu. Soluzio bat lortuz gero, soluzio horri edozein konstante gehituz soluzio berri bat lortuko dugu. Bestalde, ekuazio ez-homogeneo baten bi soluzio baditugu, beren arteko kendura ekuazio homogeneoaren soluzioa izango da.

(c) Laplacearra $\mathbb{R}^2$-n koordenatu polarretan. Honako aldagai-aldaketa honen bidez:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

non $r > 0$ eta $-\pi < \theta < \pi$ diren, $v(r, \theta) = u(x, y)$ lortzen da, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

(d) Laplacearra $\mathbb{R}^3$-n koordenatu zilindriko eta esferikoetan. Koordenatu zilindrikoetarako aldagai-aldaketa:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

non $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ eta $-\infty < z < +\infty$ diren. Aldaketa hori eginez, $u(x, y, z) = v(r, \theta, z)$ lortzen da, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + v_{zz}.$$

Koordenatu esferikoetarako aldaketa:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \sin\varphi, \\ y = r\sin\theta \sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

non $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$ diren. Horrela, $u(x, y, z) = v(r, \theta, \varphi)$ dugu, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = v_{rr} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} + \frac{\cot\varphi}{r^2} v_\varphi.$$

Adibideak. (a) Izan bedi $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ bigarren ordenako ekuazio ez-lineala, $u = u(x,t)$ izanik. Ekuazioan $v = e^u$ aldagai-aldaketa eginez, gai ez-lineala desagertu egingo da, eta emaitza $v_t - v_{xx} = 0$ izango da.

(b) Izan bedi $u_t - u_{xx} - \alpha u = 0$ ekuazioa. Honako aldagai-aldaketa hau eginez:

$$v(x,t) = e^{-\alpha t} u(x,t),$$

v-rentzat beroaren ekuazioa lortzen da: $v_t - v_{xx} = 0$.

Hemendik aurrera, u funtzioak eta beren deribatuak behar beste erregularrak izango direla suposatuko dugu; hau da, funtzio horiek eta beren deribatuak jarraikiak izango dira haien definizio-eremuetan.

9.3 Lehen ordenako eta koefiziente konstanteetako deribatu partzialetako ekuazio linealak

Demagun funtzio ezezaguna, u, bi aldagairen menpekoa dela, hau da, $u(x,y)$. Orduan, lehen ordenako eta koefiziente konstanteetako deribatu partzialetako ekuazio linealak honako adierazpen hau du:

$$au_x + bu_y + cu = f(x,y), \tag{9.3.1}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $|a| + |b| > 0$ eta $f(x,y)$ ezagunak izanik.

Hasteko, suposa dezagun $a = 0$ eta $b \neq 0$ direla, beraz, (9.3.1)

$$bu_y + cu = f(x,y) \tag{9.3.2}$$

izango da. Finko dagoen x bakoitzerako, lehen ordenako ekuazio diferentzial lineal bat bezala ikus dezakegu. Mota horretako ekuazioak ebazten ikasi dugu jadanik. Kontuan hartu y-rekiko konstanteak x-ren funtzioak izango direla.

$bu_y + cu = 0$ ekuazio homogeneoaren soluzioa

$$u_H(x,y) = K(x)e^{-cy/b}$$

da. Ekuazio ez-homogeneoaren soluzio partikularra, aldiz,

$$u_p(x,y) = C(y)e^{-cy/b} = e^{-cy/b} \int_i^y \frac{1}{b} f(x,r) e^{cr/b} dr.$$

Beraz, hau izango da (9.3.2) ekuazioaren soluzioa:

$$u(x,y) = e^{-cy/b}\Big(K(x) + \int_i^y \frac{1}{b} f(x,r)e^{cr/b}\, dr\Big), \tag{9.3.3}$$

non i delakoa y bizi den definizio-eremuko puntu bat eta K edozein funtzio diren.

Kasu orokorra aztertzeko, hau da, $a \neq 0, b \neq 0$, beste aldagai bat definituko dugu:

$$\xi = bx - ay.$$

Beraz, funtzio berria $v(\xi, y) = u(x, y)$ izango da. Ekuazioa v-rekiko idazten badugu,

$$bv_y + cv = f\Big(\frac{\xi + ay}{b}, y\Big)$$

lortuko dugu. Hau da, (9.3.2) motako ekuazio bat lortuko dugu. Ekuazioa ξ finko baterako ebazten badugu

$$v(\xi, y) = e^{-cy/b}\left(K(\xi) + \int_i^y \frac{1}{b} f\Big(\frac{\xi + ar}{b}, r\Big) e^{cr/b}\, dr\right)$$

lortuko da, eta aldagai-aldaketa deseginez

$$u(x, y) = e^{-cy/b}\left(K(bx - ay) + \int_i^y \frac{1}{b} f\Big(x + \frac{a(r - y)}{b}, r\Big) e^{cr/b}\, dr\right) \qquad (9.3.4)$$

dugu, K edozein funtzio izanik. Honako mota honetako zuzenei,

$$bx - ay = k,$$

deribatu partzialetako ekuazioen *zuzen karakteristiko* deritze. Ekuazioan agertzen diren bi deribatu partzialetako bat desagerraraztea da horren helburua, ekuazio diferentzial arrunt bilakatuz.

Lehen u_x ezabatu dugun antzera ezaba dezakegu u_y aldagai-aldaketa berdina eginez, baina, oraingoan, $v(x, \xi) = u(x, y)$ idatziko dugu. Ekuazioa v-rekiko idazten badugu

$$av_x + cv = f\Big(x, \frac{bx - \xi}{a}\Big)$$

lortuko dugu. Orain, ξ finko bakoitzerako ekuazioa ebatzi eta aldagai-aldaketa deseginez,

$$u(x, y) = e^{-cx/a}\left(K_1(bx - ay) + \int_j^x \frac{1}{a} f\Big(r, y + \frac{b(r - x)}{a}\Big) e^{cr/a}\, dr\right) \qquad (9.3.5)$$

lortuko dugu. Bi aldagai-aldaketetan lortutako soluzioek ezberdinak dirudite, eta, berdinak izan daitezen, erlazioren bat egon behar da K eta K_1 funtzioen artean. Soluzioak berdinduz eta x edo y-ri balio zehatzak emanez lortuko dugu bien arteko erlazio hori.

Oharra. (x, y) puntua $bx - ay = k$ karakteristikan badago, $u(x, y)$-n agertzen den $f(x, y)$ funtzioa definituta dagoen balio guztiak karakteristika berdinean daude. Beraz, u soluzioa f-k karakteristiken gainean hartzen dituen balioen menpekoa da.

Ariketa. Froga ezazu $3u_x - 2u_y + u = 1$ ekuazioaren soluzio orokorra $u(x,y) = 1 + K(-2x-3y)e^{y/2}$ dela, non K edozein funtzio den. Aurkitu soluzio partikularrak, K modu ezberdinetan aukeratuz. Frogatu, baita ere, soluzioa $u(x,y) = 1 + K_1(-2x-3y)e^{-x/3}$ bezala adieraz daitekeela, K_1 edozein funtzio izanik. Horrez gain, adierazpen biek bat egiten dute baldin eta soilik baldin $K(-2x-3y)e^{y/2} = K_1(-2x-3y)e^{-x/3}$, $x, y \in \mathbb{R}$ bakoitzerako; $x = 0$ eginez, adibidez, $K(-3y)e^{y/2} = K_1(-3y)$ lortzen da, edo baliokidea dena, $K(r)e^{-r/6} = K_1(r)$. Ohartu $u(x,y)$-ren aurreko bi adierazpenak bat direla K eta K_1 modu horretan erlazionaturik badaude.

Aplikazio batzuetarako interesgarria izan daiteke $u(x,\varphi(x)) = g(x)$ bezalako baldintza gehigarri bat betetzen duen deribatu partzialetako ekuazio baten soluzio partikular bat zehaztea, non φ eta g funtzioak ezagunak diren. Baliokideki, ekuazioak $u(\varphi(y), y) = g(y)$ betetzen badu. Askotan, baldintza gehigarri hau nahikoa da K funtzioa modu bakar batean zehazteko. $y = \varphi(x)$ (baliokideki $x = \varphi(y)$) deribatu partzialetako ekuazioaren zuzen karakteristikoa bada, g funtzio batzuetarako bakarrik existituko da baldintza gehigarria betetzen duen soluzioa. Horrez gain, nahiz eta g-k eskatzen den forma izan, baldintza hori betetzen duten infinitu K existituko dira. Hori frogatzeko, nahikoa da $u(x,\varphi(x)) = g(x)$ x-rekiko deribatzea; horrela,

$$u_x(x,\varphi(x)) + u_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = g'(x)$$

lortzen da. Orain, a-rekin biderkatuz,

$$au_x(x,\varphi(x)) + a\varphi'(x)u_y(x,\varphi(x)) = ag'(x).$$

Eta deribatu partzialetako ekuazioan $y = \varphi(x)$ eginez:

$$au_x(x,\varphi(x)) + bu_y(x,\varphi(x)) + cu(x,\varphi(x)) = f(x,\varphi(x)).$$

Beraz, $a\varphi'(x) = b$ bada, bistakoa da adierazpen biak bat direla soilik

$$ag'(x) + cg(x)) = f(x,\varphi(x))$$

gertatzen bada.

Adibidea. Aurreko ariketako $3u_x(x,y) - 2u_y(x,y) + u(x,y) = 1$ ekuazioaren soluzio bakarra, $u(x,0) = x^2$ betetzen duena, $u(x,y) = 1 + \Big(\dfrac{(2x+3y)^2}{4} - 1\Big)e^{y/2}$ da. Bestalde, deribatu partzialetako ekuazioaren soluzio batek ere ez du $u\Big(x, 1 - \dfrac{2x}{3}\Big) = x$ betetzen. Aldiz, infinitu soluzio daude $u\Big(x, -\dfrac{2x}{3}\Big) = 1 + e^{-x/3}$ betetzen dutenak; horiek $K_1(0) = 1$ betetzen duten guztiak izango dira. Ohartu $y = 0$ zuzena ez dela deribatu partzialetako ekuazioaren karakteristikoa; bai, ordea, $y = 1 - \dfrac{2x}{3}$ eta $y = -\dfrac{2x}{3}$.

9.4 Lehen ordenako eta koefiziente aldakorretako deribatu partzialetako ekuazio linealak

Aurreko atalean bezala, lehen ordenako ekuazioak aztertuko ditugu; baina, hemen, deribatu partzialen koefizienteak x-ren eta y-ren menpeko funtzioak izango dira. Izan bedi

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u(x,y) = f(x,y) \tag{9.4.1}$$

ekuazioa, non $a(x,y), b(x,y), c(x,y)$, $|a(x,y)| + |b(x,y)| > 0$ eta $f(x,y)$ funtzio ezagunak diren.

(9.4.1) ekuazioa ebazteko, aurreko atalean jarraitutako pausoen antzekoak emango ditugu. Izan bitez $a(x,y) = 0$ eta $b(x,y) \neq 0$, beraz,

$$b(x,y)\ u_y + c(x,y)\ u = f(x,y). \tag{9.4.2}$$

(9.4.2) ekuazioa lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazioa da x finko bakoitzerako, eta bere soluzioa

$$u(x,y) = \exp\Big(-\int_i^y \frac{c(x,r)}{b(x,r)}\ dr\Big)\left(K(x) + \int_i^y \frac{f(x,r)}{b(x,r)} \exp\Big(\int_j^r \frac{c(x,s)}{b(x,s)} ds\Big) dr\right) \tag{9.4.3}$$

izango da edozein K funtziotarako.

Oro har, $a(x,y) \neq 0$ eta $b(x,y) \neq 0$, beste aldagai bat definituko dugu

$$\xi = \xi(x,y), \tag{9.4.4}$$

$v(\xi,y) = u(x,y)$ funtzio ezezagunak, (9.4.2) bezalako ekuazio bat egiazta dezan. Ikus dezagun nola aukeratu behar den ξ:

$$u_x(x,y) = v_\xi(\xi,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}(x,y), \quad u_y(x,y) = v_\xi(\xi,y)\frac{\partial\xi}{\partial y}(x,y) + v_y(\xi,y),$$

eta, ekuazioan ordezkatuz,

$$a(x,y)v_\xi(\xi,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}(x,y) + b(x,y)\Big(v_\xi(\xi,y)\frac{\partial\xi}{\partial y}(x,y) + v_y(\xi,y)\Big) + c(x,y)v(\xi,y) = f(x,y)$$

lortzen da. Beraz, v_ξ ekuazioan ager ez dadin

$$a(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial x}(x,y) + b(x,y)\frac{\partial\xi}{\partial y}(x,y) = 0 \tag{9.4.5}$$

izan behar da; hau da, $\xi(x,y)$ hori (9.4.1) ekuazioaren soluzioa izan behar da $c(x,y) = 0$ eta $f(x,y) = 0$ diren kasuetarako. Hori lortzeko $\xi(x,y) = kte$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \tag{9.4.6}$$

ekuazioaren soluzio inplizitua izan behar da, $\xi(x,y) = kte$ x-rekiko deribatuz

$$0 = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \xi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \xi}{\partial y}(x,y)\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

lortzen delako. Horrela,

$$b(x,y)\ v_y(\xi,y) + c(x,y)v(\xi,y) = f(x,y)$$

lortzen da. (9.4.4) ekuaziotik x askatuz, $x = h(\xi,y)$ adierazpena dugu, eta ekuazioan ordezkatuz:

$$b(h(\xi,y),y)\ v_y(\xi,y) + c(h(\xi,y),y)v(\xi,y) = f(h(\xi,y),y).$$

Ezaguna da, jadanik, azken ekuazioa nola ebazten den, eta, bukatzeko, aldagai-aldaketa deseginez $u(x,y) = v(\xi(x,y),y)$ lortuko dugu.

Ariketa. Froga ezazu $xu_x - yu_y + yu = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra $u(x,y) = K(xy)e^y$ funtzioa dela. Aurkitu soluzio partikularrak, K-ri balio desberdinak emanez.

Aurrean aztertutako (9.4.6) ekuazioaren soluzioei, $\xi(x,y) = k$, k konstante bat izanik, (9.4.1) deribatu partzialetako ekuazioaren *kurba karakteristiko* deritze. $a(x,y)$ eta $b(x,y)$ koefizienteak konstanteak direnean (9.4.6) ekuazioaren soluzioak $y = \frac{b}{a}x + k$ zuzenak dira, hau da, $\xi(x,y) = bx - ay = k$ (aurreko atalean aztertutako zuzen karakteristikoak).

Praktikan, zaila izan daiteke ξ kurba karakteristikoa kalkulatzea, eta, bestalde, oso zaila gertatzen da, oro har, h-ren alderantzizko funtzioaren adierazpen esplizitua ematea. Hori dela eta, nahiko zail bihur daiteke aldagai aldakorretako deribatu partzialetako ekuazioen ebazpena.

Berriz ere, $u(x,\varphi(x)) = g(x)$ (baliokideki $u(\varphi(y),y) = g(y)$) bezalako baldintza gehigarri bat lagungarri izan daiteke K modu bakarrean zehazteko. Baina posible da baldintza gehigarri hori deribatu partzialetako ekuazioarekin bateraezina izatea, edo baldintza betetzen duten infinitu K funtzio egotea. $u(x,\varphi(x)) = g(x)$ funtzioa x-rekiko deribatzen badugu, honako hau lortuko dugu:

$$u_x(x,\varphi(x)) + u_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = g'(x).$$

Orain, $a(x,\varphi(x))$ konstantearekin biderkatuz:

$$a(x,\varphi(x))u_x(x,\varphi(x)) + a(x,\varphi(x))\varphi'(x)u_y(x,\varphi(x)) = a(x,\varphi(x))g'(x).$$

Deribatu partzialetako ekuazioan $y = \varphi(x)$ eginez:

$$a(x,\varphi(x))u_x(x,\varphi(x)) + b(x,\varphi(x))u_y(x,\varphi(x)) + c(x,\varphi(x))u(x,\varphi(x)) = f(x,\varphi(x)).$$

Beraz, $a(x,\varphi(x))\varphi'(x) = b(x,\varphi(x))$ denean, adierazpen biak bat dira, baldin eta

$$a(x,\varphi(x))g'(x) - c(x,\varphi(x))u(x,\varphi(x)) = f(x,\varphi(x))$$

bada. Ohar zaitez gerta daitekeela deribatu partzialetako ekuazioaren eta baldintza gehigarriaren arteko bateraezintasuna honako kasu honetan:

$$\varphi'(x) = \frac{b(x,\varphi(x))}{a(x,\varphi(x))},$$

hau da, baldintza gehigarria kurba karakteristiko baten gainean emanda dagoenean.

Adibidea. $u(x,1) = x^2$ baldintza betetzen duen $xu_x - yu_y + yu = 0$ ekuazioaren soluzio bakarra $u(x,y) = (xy)^2 e^{y-1}$ da. Bestalde, deribatu partzialetako ekuazio horren soluzio batek ere ez du $u(x,0) = x$ baldintza betetzen. Aldiz, $u(x,0) = 1$ betetzen duten infinitu soluzio daude, $K(0) = 1$ betetzen duten guztiak, hain zuzen ere.

9.5 Bigarren ordenako eta koefiziente konstanteetako deribatu partzialetako ekuazio linealak

Izan bedi **koefiziente konstanteetako** bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazioa:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Gu = f(x,y)$$

non $A, B, C, D, E, G \in \mathbb{R}$ eta f ezagunak diren. Honako aldagai-aldaketa hau eginez:

$$\xi = ax + by, \qquad \eta = cx + dy,$$

a, b, c, d konstanteak izanik, $u(x,y) = v(\xi,\eta)$ lortuko da. Katearen erregela erabiliz:

$$\begin{aligned}
u_x &= av_\xi + cv_\eta, \\
u_y &= bv_\xi + dv_\eta, \\
u_{xx} &= a^2 v_{\xi\xi} + 2acv_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}, \\
u_{xy} &= abv_{\xi\xi} + (bc + ad)v_{\xi\eta} + cdv_{\eta\eta}, \\
u_{yy} &= b^2 v_{\xi\xi} + 2bdv_{\xi\eta} + d^2 v_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Eta ekuazioan ordezkatzean, honako hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
&(Aa^2 + Bab + Cb^2)v_{\xi\xi} + (2Aac + (bc + ad)B + 2Cbd)v_{\xi\eta} \\
&\qquad + (Ac^2 + Bcd + Cd^2)v_{\eta\eta} + (aD + bE)v_\xi + (Dc + Ed)v_\eta + Gv = F(\xi,\eta).
\end{aligned}$$

Azken ekuazioa errazteko, nahiko genuke $v_{\xi\xi}, v_{\xi\eta}$ edo $v_{\eta\eta}$-ren koefizienteak zero izatea. Lehenengo eta hirugarren batugaiak zero izango dira, baldin eta

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0, \quad Ac^2 + Bcd + Cd^2 = 0$$

badira; hau da,

$$A + B\Big(\frac{b}{a}\Big) + C\Big(\frac{b}{a}\Big)^2 = 0, \quad A + B\Big(\frac{d}{c}\Big) + C\Big(\frac{d}{c}\Big)^2 = 0.$$

Ekuazio horiek $A + B\alpha + C\alpha^2 = 0$ itxurako ekuazio aljebraikoak dira, eta mota horretako ekuazioen erroak

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

dira. Ekuazio horiek $D = B^2 - 4AC$ diskriminatzailearen arabera sailka daitezke:

(a) $B^2 - 4AC > 0$ denean, ekuazioak bi erro erreal izango ditu: α_1, α_2. Goiko bi ekuazioak egiaztatzen dituzten a, b, c, d parametroen balioak aurkitu nahi ditugu; hau da, α_1, α_2 erroak berdinak izan behar dira bi ekuazioetarako. Kasu horretan, $a = c = 1$ eta $b = \alpha_1$, $d = \alpha_2$ hartzen baditugu, $v_{\xi\xi}$ eta $v_{\eta\eta}$-ren koefizienteak zero izango dira, eta hau da geratzen den ekuazioa:

$$(2A + (\alpha_1 + \alpha_2)B + 2C\alpha_1\alpha_2)v_{\xi\eta} + (D + \alpha_1 E)v_\xi + (D + E\alpha_2)v_\eta + Gv = F(\xi, \eta).$$

Azken motako ekuazioei *hiperboliko* deritze. Adibide bat uhin-ekuazioa da.

(b) $B^2 - 4AC = 0$ denean, ekuazioak erro erreal bikoitza izango du: α. Hemen $a = 1$, $b = \alpha$, $c = 0$ eta $d = 1$ hartuz, $v_{\xi\xi}$-ren koefizientea zero izango da, eta baita $v_{\xi\eta}$-rena ere,

$$2Aac + (bc + ad)B + 2Cbd = B + 2C\alpha = 0$$

delako. Beraz, honako hau da geratzen den ekuazioa:

$$Cv_{\eta\eta} + (D + \alpha E)v_\xi + Ev_\eta + Gv = F(\xi, \eta).$$

Mota horretako ekuazioei *paraboliko* deritze. Beroaren ekuazioa da adibide bat.

(c) $B^2 - 4AC < 0$ denean, ekuazioak bi erro konplexu ditu: $\beta \pm \gamma i$. Kasu horretan, $a = 1$, $b = \beta$, $c = 0$ eta $d = \gamma$ hartuz, $v_{\xi\eta}$-ren koefizientea zero izango da, eta $v_{\xi\xi}$ eta $v_{\eta\eta}$-ren koefizienteak berdinak izango dira:

$$(A + B\beta + C\beta^2)v_{\xi\xi} + C\gamma^2 v_{\eta\eta} + (D + \beta E)v_\xi + E\gamma v_\eta + Gv = F(\xi, \eta).$$

Mota horretako ekuazioei *eliptiko* deritze. Adibidez, Laplaceren ekuazioa.

9.6 Bigarren ordenako eta koefiziente aldakorretako deribatu partzialetako ekuazio linealak

Azter dezagun, orain, koefizienteak konstanteak ez direneko kasu orokorra.

Definizioa. Izan bedi

$$Lu = A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + G(x,y)u.$$

L eragilea (x_0, y_0) puntuan *hiperbolikoa*, *parabolikoa* edo *eliptikoa* izango da, baldin eta puntu horretako diskriminatzailea

$$B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0)$$

positiboa, nulua edo negatiboa bada, hurrenez hurren. Horrez gain, L eragilea eremu batean hiperbolikoa, parabolikoa edo eliptikoa izango da, baldin eta eremu horretako puntu guztietan diskriminatzailea positiboa, nulua edo negatiboa bada, hurrenez hurren.

Adibidea. Izan bedi $Lu = u_{xx}+(5+2y^2)u_{xy}+(1+y^2)(4+y^2)u_{yy} = 0$. Kasu honetan, $A(x,y) = 1, B(x,y) = 5+2y^2, C = (1+y^2)(4+y^2)$ dira, eta diskriminatzailea,

$$B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y) = 9 > 0,$$

positiboa da x, y guztietarako; beraz, L eragile hiperbolikoa da puntu guztietan.

Koefiziente konstanteetako bigarren ordenako deribatu partzialetako ekuazioak aztertzerakoan, aldagai-aldaketa lineala aukeratu dugu. Oro har, aldiz, beste aldagai-aldaketa bat aukeratu beharko dugu, eta ez da beti lineala izango.

Izan bedi honako aldagai-aldaketa hau:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y), \end{cases}$$

non ξ, η jacobiarra ez-nulua duten funtzio erregularrak diren. Aldaketaren ondorioz, $u(x,y) = v(\xi,\eta)$ izango da. Katearen erregela erabiliz, u-ren deribatu partzialak v-ren deribatu partzialen bidez idatz daitezke, honela:

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x. \\
u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + v_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}, \\
u_{yy} &= v_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2v_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + v_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}, \\
u_{xy} &= v_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + v_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + v_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}.
\end{aligned}$$

Eta aldagai-aldaketa $Lu = 0$ adierazpenean ordezkatuz,

$$\alpha_1 v_{\xi\xi} + \alpha_2 v_{\xi\eta} + \alpha_3 v_{\eta\eta} + \alpha_4 v_\xi + \alpha_5 v_\eta + \alpha_6 v = 0$$

dugu,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 =& A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,\\
\alpha_2 =& 2A\ \xi_x\eta_x + B\xi_x\eta_y + B\xi_y\eta_x + 2C\xi_y\eta_y,\\
\alpha_3 =& A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2,\\
\alpha_4 =& A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y,\\
\alpha_5 =& A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y,\\
\alpha_6 =& G
\end{aligned}$$

izanik.

(1) Demagun L eragile hiperbolikoa dela, hau da, α_1, α_3 zero direla. Hori gertatzen da, baldin eta

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

badira. Baina problema hori ebaztea eta, aldi berean, $\xi(x, y) = K$ kurbak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ekuazio diferentzialaren soluzioak izatea eta $\eta(x, y) = k$ kurbak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ekuazioaren soluzioak izatea problema baliokideak dira. Hori frogatzeko, hartu $\xi(x, y) = K$ kurba eta bere deribatua x-rekiko eginez, $\xi_x + \xi_y \dfrac{dy}{dx} = 0$ dugu, hau da, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\xi_x}{\xi_y}$. Kurba horiek kurba karakteristikoak dira. Horrela, aukeratu dugun aldagai-aldaketarekin $Lu = 0$ ekuazioa bigarren ordenako gai bakarra, $v_{\xi\eta}$, duen ekuazio bihurtu da.

Adibidea. Izan bedi $Lu = u_{xx} + (5+2y^2)u_{xy} + (1+y^2)(4+y^2)u_{yy} = 0$. Ekuazio horren kurba karakteristikoak honako ekuazio hauen soluzioak dira:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad \frac{dy}{dx} = 4 + y^2,$$

hau da, $x - \arctan y = k$ eta $x - \arctan \frac{y}{2} = k$ kurbak, hain zuzen. Kasu honetan,

$$\xi(x, y) = x - \arctan y, \quad \eta(x, y) = x - \frac{1}{4}\arctan\frac{y}{2}$$

aldagai-aldaketarekin α_1, α_3 zero izango dira.

(2) Demagun L eragile parabolikoa dela; hau da, $B^2 - 4AC = 0$ dela. Orduan, $\xi(x,y) = K$ kurbak
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$$
ekuazio diferentzialaren soluzioak badira eta aurreko kasuko aldagai-aldaketa bera egiten badugu, η edozein funtziotarako, $\alpha_1, \alpha_2 = 0$ lortuko dugu. Beraz, ekuazioan $v_{\eta\eta}$-ri dagokion deribatu partziala soilik agertuko da.

(3) Izan bedi L eragile eliptikoa. Kasu honetan
$$B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y) < 0$$
ekuazioaren erroak konplexuak izango dira, $\alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$. Orain, $\overline{\xi}(x,y)$ ξ-ren konjugatua izanik,
$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \overline{\xi}(x,y), \end{cases}$$
aldagai-aldaketa eginez, honako aldagai erreal hauek lortzen dira:
$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2}(\xi + \overline{\xi}), \\ s = \dfrac{1}{2i}(\xi - \overline{\xi}). \end{cases}$$
Azken aldagai-aldaketa egin ondoren, deribatu partzialetako ekuazioan $v_{\xi\eta}$ delakoaren koefizientea zero da, eta $v_{\xi\xi}$-ren koefizientea eta $v_{\eta\eta}$-renak berdinak dira.

Ariketa. Aztertu
$$u_{xx} - 6u_{xy} + 12u_{yy} = 0$$
ekuazioa zein motatako ekuazioa den, eta egin dagokion aldagai-aldaketa ekuazioa laburtzeko.

9.7 Hasierako baldintzak, mugalde-baldintzak eta ondo planteaturiko problema

Oro har, ekuazio batek hainbat soluzio izan ditzake. Horietako soluzio bat finkatzeko ze datu behar dugun jakin nahi dugu. Ekuazio diferentzial arruntetarako, datu hori izan daiteke puntu bateko funtzioaren eta bere ondoz ondoko deribatuen balioen multzoa. Baina deribatu partzialetako ekuazioetarako, datu hori ez da nahikoa. Testu honetan ez dugu gai hori aztertuko, Deribatu Partzialetako Ekuazioak irakasgaiari dagokiolako. Hala ere, zenbait ideia komentatuko ditugu.

Uhin-ekuazioak eta beroaren ekuazioak aztertuko ditugu $D \times (0,\infty)$ eremuan, $D \subset \mathbb{R}^n$ izanik. Potentzialaren ekuazioa aztertuko dugu $D \subset \mathbb{R}^n$ eremuan. Datuak

$t = 0$ baliorako ematen dira: beroaren ekuazioaren kasuan $u(x, 0)$, eta uhinen kasuan $u(x, 0)$ eta $u_t(x, 0)$. Horiek dira hasierako baldintzak.

Ekuazioak eta hasierako baldintzak osatutako problemari *Cauchyren problema* deritzo.

Horrez gain, beharrezkoak dira x aldagaiaren D eremuari lotutako baldintzak. Baldintza horiek hiru motatakoak izan daitezke: 1) *Dirichlet-en baldintza*, hau da, D-ren mugan u-ren balioa ematea; 2) *Neumann-en baldintza*, hots, u-ren deribatu normalaren mugako balioa ematea; 3) *bien nahasketa bat*, hau da, Dirichlet motakoa mugan eta Neumann motakoa gainerakoan. Horiek mugalde-baldintzak dira. Uhinen eta beroaren problemetan, baldintza horiek eman behar dira D-ren mugan eta edozein t-tarako.

J. Hadamard (1850-1945) matematikariak sortu zuen ondo planteaturiko problemaren kontzeptua. Problema ondo planteaturik dagoela esaten da, hiru baldintza hauek aldi berean egiaztatzen direnean: soluzioa existitzen da, bakarra da, eta hasierako datuetatik menpekotasun jarraitua du.

Oharra. Problema ondo planteatuta egotea soluzioen espazioaren aukeraren araberakoa da. Hau da, problema batek soluzio bat baino gehiago izan arren, soluzioa bakarra izan daiteke funtzio mota konkretu batera mugatzen garenean.

9.8 Ariketak

1. Ebatzi honako ekuazio hauek, koordenatu polarretara pasatuz:

$$(a)\ xu_y - yu_x = 0 \qquad\qquad (b)\ y^{-1}u_y - x^{-1}u_x = x^2 + y^2.$$

2. Idatzi $\mathbb{R}^3$ espazioan laplacearra koordenatu zilindriko eta esferikoetan.

3. Aurkitu Cauchyren problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} 2u_x + 3u_y = 0, \\ u(x,0) = |x|. \end{cases}$$

   $u(x,y)$ funtzioa $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ espaziokoa da? Deskribatu u_x-ren singulartasunak. $|x|$ funtzioaren ordez $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ funtzioa hartzen badugu, zer esan dezakegu u funtzioaren erregulartasunari buruz?

4. Izan bedi u, $\mathbb{R}^n$ espazioan definituriko funtzio erradiala, hau da, $u(x) = f(\|x\|)$ non f funtzioa $(0,+\infty)$-n definituriko edozein funtzio den.

   (i) Idatz ezazu u-ren laplacearra f-ren deribatuen bidez. Koordenatu polarretako eta esferikoetako adierazpenak erabiliz, egiaztatu erantzuna $n=2$ eta $n=3$ kasuetarako.

   (ii) Idatz ezazu u-ren bilaplacearra f-ren deribatuen bidez (u-ren bilaplacearra honela definitzen da: $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$).

5. Izan bedi u honako lehen ordenako ekuazio honen soluzioa:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

   eta $(x(t),y(t))$ kurba bat, non $u(x(t),y(t)) = c$ den, c konstantea izanik. Idatz ezazu kurba horrek egiaztatzen duen ekuazio diferentziala. Ebatzi 1.(a) ariketarako, eta konparatu lehen aurkitutako emaitzarekin.

6. Aurki ezazu honako problema honen $u(x,t)$ soluzioa:

$$\begin{cases} u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = t^2,\ u(1,t) = 1, & t > 0. \end{cases}$$

7. Aurki ezazu $u_{xy} + 3u_x = 1$ ekuazioaren soluzio orokorra. Oharra: egin $v = u_x$ aldaketa.

8. Aurkitu $xu_{xx} - 4u_{xt} = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra, honako aldagai-aldaketa hau eginez: $\tau = t$, $\xi = t + 4\log x$.

9. Egiaztatu $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ ekuazio ez-lineala ekuazio lineal bihurtzen dela $v = e^u$ aldaketa egitean.

10. Idatzi honako ekuazio honen soluzioa:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

10. gaia

Uhin-, beroaren eta potentzialaren ekuazioak

10.1 Dimentsio bakarreko uhin-ekuazioa

Uhin-ekuazioari loturik, hainbat problema aztertuko ditugu. Uhin-ekuazioaren Cauchyren problema, ekuazio ez-homogeneoa, uhinak zuzenerdi batean, eta uhinak hari finitu batean, besteak beste. Irakurleak gogoratu behar du ikasmaterial hau deribatu partzialetako ekuazioen sarrera bat direla, eta problema hauek beren osotasunean ebazteko kontuan izan behar direla mendekotasun-eremuak eta eragin-eremuak, problema ondo planteatuta dagoela ziurtatzeaz gain.

Jadanik aztertu dugu 8.1.3 atalean luzera finitua duen hari baten bibrazioaren problema. Hariaren bi muturrak finko daudela suposatuz, hariaren bibrazioak $u(x,t)$ funtzio baten bidez adieraz daitezke, eta u-k honako ekuazio, hasierako baldintza eta mugalde-baldintza hauek beteko ditu:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(x,0) = f(x);\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Gogoratu problema hau ebazteko aldagaien banantze-metodoa erabili izan dela.

Bestalde, 9.2 ataleko b) adibidean ikusi dugu, zehazki, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ekuazioaren soluzio orokorra

$$u(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

dela.

10.1.1 Uhin-ekuazioaren Cauchyren problema

Honako hasierako balio hauetako problemaren soluzioa aurkitu nahi dugu:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzio orokorreko, $u(t,x) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$, φ eta ψ funtzioak aurkitu behar dira. Horretarako, u eta u_t delakoak ebaluatu behar ditugu $t = 0$ puntuan. Hau da:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \qquad u_t(x,0) = c\varphi'(x) - c\psi'(x) = g(x).$$

Lehenengo ekuazioan, x-rekiko deribatuz, $\varphi'(x) + \psi'(x) = f'(x)$ ondorioztatzen da, eta hiru ekuazioko sistema hori ebatziz, honako hau lortzen da:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + k \quad \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds - k,$$

k konstante baterako, konstante hori zero har dezakegu. Beraz, hau da problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Adibidea. Izan bedi uhin-ekuazioaren honako Cauchyren problema hau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Problema horren soluzioa $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-(x+2t)^2} + e^{-(x-2t)^2}\right)$ da.

10.1.2 Ekuazio ez-homogeneoa

Atal honetan, uhin-ekuazio ez-homogeneoaren problema aztertuko dugu, hau da:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = F(x,t), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{10.1.1}$$

(10.1.1) problema honako bi hauen konbinazio bat da:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = F(x,t), & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{10.1.2}$$

eta

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{10.1.3}$$

(10.1.2)-ren eta (10.1.3)-ren soluzioak $u_1(x,t)$ eta $u_2(x,t)$ badira, hurrenez hurren, orduan, (10.1.1)-en soluzioa $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ izango da. (10.1.3) problema 10.1.1 atalean ebatzi dugu, eta, horren ondorioz, nahikoa da (10.1.2) problemaren soluzioa aurkitzea. Horretarako,

$$v(\xi,\eta) = u_1\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\Big)$$

aldagai-aldaketa eginez, honako hau lortzen da:

$$-4c^2 v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = F\Big(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\Big).$$

Orain, $u(x,0) = 0$ baldintzatik $v(\xi,\xi) = 0$ ondorioztatzen da, eta hori deribatuz $v_\xi(\xi,\xi) + v_\eta(\xi,\xi) = 0$. Bestalde, $u_t(x,0) = 0$-tik, $v_\xi(\xi,\xi) - v_\eta(\xi,\xi) = 0$ dugu, eta, ondorioz,

$$v(\xi,\xi) = v_\xi(\xi,\xi) = v_\eta(\xi,\xi) = 0.$$

Beraz, v eta v-ren lehen ordenako bi deribatuak zero dira $\xi = \eta$ diagonalean. Kalkulu infinitesimalaren oinarrizko teoremaren arabera:

$$\begin{aligned} v_\xi(\xi,\eta) - v_\xi(\xi,\xi) &= -\int_\eta^\xi v_{\xi\eta}(\xi,s)\,ds; \\ v(\xi,\eta) - v(\eta,\eta) &= \int_\eta^\xi v_\xi(r,\eta)\,dr = \int_\eta^\xi \int_\eta^r -v_{\xi\eta}(r,s)\,ds\,dr. \end{aligned}$$

Orduan,

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{4c^2}\int_\eta^\xi \int_\eta^r F\Big(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\Big)\,ds\,dr.$$

eta

$$u_1(x,t) = \frac{1}{4c^2}\int_{x-ct}^{x+ct} \int_{x-ct}^r F\Big(\frac{r+s}{2}, \frac{r-s}{2c}\Big)\,ds\,dr.$$

Aurreko integral bikoitzean aldagai-aldaketa egokia eginez, $\dfrac{r+s}{2} = y$ eta $\dfrac{r-s}{2c} = z$, honako adierazpen hau lortuko dugu:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-z)}^{x+c(t-z)} F(y,z)\,dy\,dz = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(r,s)\,dr\,ds.$$

Ondorioz, honako hau da (10.1.1) problemaren soluzioa:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) &+ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(r,s)\,dr\,ds. \end{aligned}$$

10.1.3 Uhinak zuzenerdian

Dirichlet motako mugalde-baldintzak. Har dezagun problema hau:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, & x > 0,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = g(x)\,, & x > 0\,, \\ u(0,t) = h(t)\,, & t > 0. \end{cases}$$

Soluzio orokorra $u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$ da. Orduan,

- $x - ct > 0$ denean, hasierako baldintzak ezarriz $\varphi(x)$ eta $\psi(x)$ funtzioak kalkulatzen ditugu, eta, beraz, aurreko atalean kalkulatutakoa izango da soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

- $x - ct < 0$ denean, soluzio orokorrean $x = 0$ eginez, $\varphi(ct) + \psi(-ct) = h(t)$ lortuko dugu. Horrela, hauexek dira ψ-ren balioak $s < 0$ eremuan:

$$\psi(s) = -\varphi(-s) + h\Big(\frac{-s}{c}\Big),$$

orduan,

$$\psi(x-ct) = -\varphi(ct-x) + h\Big(\frac{ct-x}{c}\Big).$$

Beraz, hauxe da soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(ct-x)] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)\,ds + h\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

u-ren erregulartasuna f, g eta h funtzioen erregulartasunetik ondorioztatzen da $x - ct > 0$ eta $x - ct < 0$ eremuetan.

$x = ct$ zuzenean, beharrezkoak dira bateragarritasunezko baldintzak: u jarraitua da, baldin eta $f(0) = h(0)$ bada; eta $u \in \mathcal{C}^2$ izango da, baldin eta $f, h \in \mathcal{C}^2([0,+\infty))$, $g \in \mathcal{C}^1([0,+\infty))$ eta $f(0) = h(0)$, $g(0) = h'(0)$ eta $h''(0) = c^2 f''(0)$ badira.

Neumann motako mugalde-baldintzak. Har dezagun honako problema hau:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x), & x > 0\,, \\ u_t(x,0) = g(x), & x > 0\,, \\ u_x(0,t) = h(t), & t > 0. \end{cases}$$

- $x - ct > 0$ denean, hauxe da problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

- $x - ct < 0$ denerako, soluzio orokorrean x-rekiko deribatuz, $u_x(x,t) = \varphi'(x+ct) + \psi'(x-ct)$ dugu, eta $x = 0$ eginez, $\varphi'(ct) + \psi'(-ct) = h(t)$ dugu, $t > 0$ balioetarako. Horrela, H funtzioa h-ren jatorrizko funtzioa bada, hots, $H'(s) = h(s)$, honako adierazpen hau egiaztatzen da:

$$\psi(s) = \varphi(-s) - cH\left(\frac{-s}{c}\right) + k_1, \quad s < 0,\ k_1 \text{ konstantea}$$

eta adierazpen horren bidez, soluzioa kalkulatuko dugu aipaturiko eremuan:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x+ct) + \varphi(ct-x) - c\int_0^{t-\frac{x}{c}} h(s)\,ds + k_1 \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(ct-x)\big) + \frac{1}{2c}\Big(\int_0^{x+ct} g(s)\,ds + \int_0^{ct-x} g(s)\,ds\Big) \\ &- c\int_0^{t-\frac{x}{c}} h(s)\,ds + 2k + k_1. \end{aligned}$$

$x = ct$ zuzenean u soluzioa jarraitua izan dadin, $2k + k_1 = 0$ izan behar da. Hala eta guztiz ere, u-ren deribatuak ez dute zertan jarraituak izan.

Oharra. $h = 0$ bada, u soluzioa honela ere kalkula daiteke: uhin-ekuazioa zuzen osora luzatzen da, eta hasierako datuen hedapen bikoitia egiten da ($f(x) = f(-x)$, eta $g(x) = g(-x)$). (Islapenen metodoa).

10.1.4 Uhinak hari finitu batean

Aldagaien banantze-metodoa. Azter dezagun uhin-ekuazioaren honako problema hau:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l\,, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = 0\,, u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliz, honela idatz daiteke problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Soluzio hori uhin-ekuazioan ordezkatuz,

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

dugu. Hau da:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Berdintzaren ezkerraldekoa x aldagaiaren menpe dagoenez eta eskuinaldekoa t aldagaiaren menpe soilik, berdintza hori emateko aukera bakarra biak konstante izatea da. Eta konstante horri $-\lambda$ deituko diogu. Beraz, alde batetik

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

sistema dugu eta, 8.1.1 atalean ikusi denez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $\lambda_n = (n\pi/l)^2$ balio propioak eta $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ funtzio propioak ditu. Bestalde,

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

ekuazioaren soluzio orokorra

$$T_n(t) = k_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + c_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), \quad k_n, c_n \in \mathbb{R},$$

da. Beraz, hauek dira deribatu partzialetako ekuazioa eta mugalde-baldintzak egiaztatzen dituzten u funtzioak:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + c_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Eta u-k hasierako baldintzak ere egiaztatu behar dituenez:

$$\begin{aligned} u(x,0) =& f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \\ u_t(x,0) =& g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

izan behar dira, non k_n eta $\frac{n\pi c}{l}c_n$, f eta g funtzioen Fourierren sinuetako seriearen koefizienteak diren, hurrenez hurren; beraz,

$$\begin{aligned} k_n =& \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \\ c_n =& \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx. \end{aligned}$$

Ekuazio ez-homogeneoa. Izan bedi honako problema ez-homogeneo hau:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Problema horren soluzioa

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) X_n(x) \tag{10.1.4}$$

da, X_n Sturm-Liouvilleren problema homogeneo baten funtzio propioak izanik. Lehen hasierako baldintza erabiliz,

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(0) X_n(x) = 0$$

da, beraz, $C_n(0) = 0$ da n guztietarako. Bestalde, u-ren deribatua eginez,

$$u_t(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n'(t) X_n(x)$$

lortzen da, eta hasierako baldintza erabiliz

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n'(0) X_n(x) = 0$$

dugu; beraz, $C_n'(0) = 0$, n guztietarako. Orain, (10.1.4) problema ez-homogeneoaren ekuazioan ordezkatuz:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n''(t) X_n(x) - c^2 C_n(t) X_n''(x) = F(x,t).$$

Bestalde, $X_n'' + \lambda_n X_n = 0$ ekuaziotik lortutako $X_n'' = -\lambda_n X_n$ adierazpena aurreko berdintzan ordezkatzerakoan, honako ekuazio hau lortuko dugu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_n'' + c^2 \lambda_n C_n) X_n(x) = F(x,t).$$

Eta $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t) X_n(x)$ bada, non

$$B_n(t) = \frac{\int_0^l F(x,t) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}$$

den, hasierako problema ez-homogeneoa honako Cauchyren problema honetara murriztu da:

$$\begin{cases} C_n''(t) + c^2 \lambda_n C_n(t) = B_n(t), \\ C_n(0) = 0 = C_n'(0). \end{cases}$$

Aurreko gaietan aztertu da problema horren ebazpena.

Adibidea. Ebatzi uhin-ekuazio ez-homogeneoa $F(x,t) = 50 \sin 5t \sin 5x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$ eta hasierako baldintza eta mugalde-baldintza nuluak izanik.

Kasu honetan $l = \pi$ denez, $\lambda_n = n^2$ eta $X_n = \sin nx$ izango dira. Hasierako baldintzetatik, $C_n(0) = 0$ eta $C_n'(0) = 0$ direla lortuko dugu n-ren balio guztietarako. Eta ekuazioaren termino ez-homogeneoa, $F(x,t)$, sinuen serie bezala emanda dagoenez, $B_5(t) = 50 \sin 5t$ izango da, eta $B_n(t) = 0, \forall n \neq 5$. Beraz, $C_n(t)$ kalkulatzeko, Sturm-Liouvilleren bi problema ebatzi behar ditugu. Bata $n = 5$ kasuari dagokiona eta bestea $n = 0$-ri dagokiona. Azken problema horren soluzioa nulua izango da, eta, aldiz, $C_5 = \sin 5t - 5t \cos 5t$. Beraz, $u(x,t) = (\sin 5t - 5t \cos 5t) \sin 5x$.

Beste alde batetik, aurreko problema berdina baina hasierako baldintza ez-homogeneoen kasua aztertu nahi dugu, hau da:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l\,, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < l\,, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Orduan, $f(x)$ modu honetan adierazi behar da:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n X_n(x).$$

Beraz, soluzio orokorraren adierazpenean $t = 0$ egin ondoren, lortutako $u(x,0)$-ren adierazpen biak berdinduz $C_n(0) = B_n$ izango dugu. Horrez gain,

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x)$$

baldintzarekin berdina eginez gero, $C_n'(0) = A_n$ izango dugu. Ondorioz, ebatzi beharreko problema honako hau da:

$$\begin{cases} C_n''(t) + c^2 \lambda_n C_n(t) = B_n(t), \\ C_n(0) = B_n, C_n'(0) = A_n. \end{cases}$$

Mugalde-baldintzak ez-homogeneoak diren kasua aztertuko dugu orain:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = h_1(t),\ u(l,t) = h_2(t), & t > 0. \end{cases}$$

Kasu honetan, mugalde-baldintza nuluak dituen beste problema bat eraikiko dugu. Horretarako, honako funtzio hau definituko dugu:

$$v(x,t) = h_1(t) \frac{l-x}{l} + \frac{x}{l} h_2(t).$$

Definitu dezagun $z(x,t)$ funtzio berria modu honetan:

$$u(x,t) = z(x,t) + v(x,t) \Longrightarrow z(x,t) = u(x,t) - v(x,t).$$

Eta $z(x,t)$ funtzioarentzat Cauchyren problema eraikiko dugu. $u(x,t)$ funtzioaren definizio berria uhin-ekuazioan ordezkatuz,

$$z_{tt} - c^2 z_{xx} = F(x,t) - (v_{tt} - c^2 v_{xx})$$

izango dugu. Hasierako baldintzak eta mugalde-baldintzak aztertuz:

$$\begin{aligned} z(x,0) =& f(x) - \Big(h_1(0)\frac{l-x}{l} + \frac{x}{l}h_2(0)\Big), \\ z_t(x,0) =& g(x) - \Big(h_1'(0)\frac{l-x}{l} + \frac{x}{l}h_2'(0)\Big), \\ z(0,t) =& 0 = z(l,t). \end{aligned}$$

Beraz, mugalde-baldintzak zero dituen honako Cauchyren problema honetara murriztu gara:

$$\begin{cases} z_{tt} - c^2 z_{xx} = F(x,t) - (v_{tt} - c^2 v_{xx}), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ z(x,0) = f(x) - \Big[h_1(0)\dfrac{l-x}{l} + \dfrac{x}{l}h_2(0)\Big], & 0 < x < l, \\ z_t(x,0) = g(x) - \Big[h_1'(0)\dfrac{l-x}{l} + \dfrac{x}{l}h_2'(0)\Big], & 0 < x < l, \\ z(0,t) = 0 = z(l,t), & t > 0. \end{cases}$$

Jadanik ikusi dugu nola ebazten diren mota horretako problemak.

10.2 Dimentsio bakarreko beroaren ekuazioa

Gogoratu 8.1.1 atalean beroaren ekuazio homogeneoa ebazten ikasi dugula aldagaien banantze-metodoa erabiliz. Mugalde-baldintza nuluak, hasierako baldintza ez-nulua eta aldagai espaziala tarte finitu batean mugitzen den kasua, hain zuzen.

$$\begin{cases} \alpha^2\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Gogoratu $\alpha \in \mathbb{R}$ fisikatik datorren konstante bat dela. Problema horren ebazpenean oinarrituko gara, hurrengo azpiataletan aipatzen diren kasu orokorragoak aztertzeko.

10.2.1 Beroaren problema, mugalde-baldintza ez-homogeneoekin

Izan bedi beroaren ekuazio homogeneoa mugalde-baldintza ez-nuluekin, $x \in (0,l)$ tartean mugitzen denean eta $t > 0$ denean. Hau da,

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = h_1,\ u(l,t) = h_2, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \end{cases} \tag{10.2.1}$$

$h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ izanik. Mugalde-baldintza ez-homogeneoen uhin-problemarako jarraitu dugun ideia berbera jarraituz, (10.2.1) problema mugalde-baldintza homogeneoak dituen problema bihurtuko dugu, $v(x)$ funtzio baten bidez. Funtzio hori, $v(x)$, honako problema honen soluzioa izango da:

$$\begin{cases} v''(x) = 0, & 0 < x < l, \\ v(0) = h_1, \ v(l) = h_2. & \end{cases} \tag{10.2.2}$$

Problema horren soluzioa $v(x) = \dfrac{(h_2 - h_1)x}{l} + h_1$ da. Defini dezagun, orain, $z(x,t)$ honela:

$$u(x,t) = v(x) + z(x,t). \tag{10.2.3}$$

$u(x,t)$ funtzioak bete behar dituen baldintzak kontuan hartuz eta $v(x)$ funtzioak betetzen dituen baldintzei esker, $z(x,t)$ mugalde-baldintza homogeneoak dituen beroaren problema homogeneo baten soluzioa izango da. Hau da, $u(x,t)$ funtzioak $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ egiaztatu behar duenez, $z(x,t)$ funtzioak baldintza hauek egiaztatzen ditu:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \ (v+z)_{xx} = (v+z)_t \ &\Longrightarrow \ \alpha^2 \ z_{xx} = z_t, \\ u(0,t) = h_1 \ &\Longrightarrow \ z(0,t) = 0, \\ u(l,t) = h_2 \ &\Longrightarrow \ z(l,t) = 0. \end{aligned}$$

Beraz, mugalde-baldintza homogeneoak dituen honako problema hau ebatzi behar da:

$$\begin{cases} \alpha^2 \ z_{xx} = z_t, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ z(x,0) = f(x) - \dfrac{(h_1 - h_2)x}{l} - h_1, & 0 < x < l, \\ z(0,l) = z(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Eta

$$f(x) - \frac{(h_1 - h_2)x}{l} - h_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sin \frac{n\pi x}{l}$$

bada, orduan, 8.1.1 atalean ikusi dugun bezala, azken problema horren soluzioa

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \exp\Big(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\Big) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

da. Ondorioz, honako hau da (10.2.1) problemaren soluzioa:

$$u(x,t) = \frac{(h_1 - h_2)x}{l} + h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\Big(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\Big) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{10.2.4}$$

10.2.2 Beroaren problema ez-homogeneoa mugalde-baldintza homogeneoekin

Azter dezagun, orain, beroaren problema ez-homogeneoa mugalde-baldintza homogeneoekin:

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = F(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{10.2.5}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliz, era honetan idatz daitekeen soluzio bat aurkitu nahi dugu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi x}{l}$ funtzioak elkartutako Sturm-Liouvilleren problema homogeneoaren funtzio propioak direlako. Demagun $f(x)$ eta $F(x,t)$ funtzioak honela gara daitezkeela:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

non

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad \text{eta} \quad b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

diren. Adierazpen hauek guztiak beroaren ekuazioan ordezkatuz,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(T_n'(t) + \Big(\frac{n\pi\alpha}{l}\Big)^2 T_n(t) \Big) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

eta, ondorioz,

$$T_n'(t) + \Big(\frac{n\pi\alpha}{l}\Big)^2 T_n(t) = b_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bestalde, $u(x,0) = f(x)$ hasierako baldintzatik eta soluzio orokorrean $t = 0$ egindakoan lortzen den adierazpenetik, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $T_n(0) = a_n$ izan behar dela lortzen da. Guztia kontuan hartuz, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako hasierako balioetako honako problema hau lortzen da:

$$\begin{cases} T_n'(t) + \Big(\dfrac{n\pi\alpha}{l}\Big)^2 T_n(t) = b_n(t) \\ T_n(0) = a_n, \end{cases}$$

bere soluzioa

$$T_n(t) = a_n \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi\alpha}{l}\Big)^2 t\Big) + \int_0^t b_n(s) \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi\alpha}{l}\Big)^2 (t-s)\Big) ds$$

izanik. Eta azken emaitza $u(x,t)$-ren aurreko adierazpenean ordezkatuz, (10.2.5) problemaren soluzioa dugu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi\alpha}{l}\Big)^2 t \Big) + \int_0^t b_n(s) \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi\alpha}{l}\Big)\Big)^2 (t-s) \Big) ds \Big] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Adibidea. Ebatzi mugalde-baldintza nuluak dituen beroaren ekuazio ez-homogeneoa, $F(x,t) = 1$, $f(x) = \sin \pi x$, $0 < x < 1$ eta $t > 0$ izanik.

Kasu honetan, $l = 1$ eta $\alpha = 1$ direnez, $\lambda_n = (n\pi)^2$ eta $X_n = \sin n\pi x$ izango dira. Bestalde, $f(x) = \sin \pi x$ denez, berehala ikusten da $a_1 = 1$ eta $a_n = 0$ direla $n \neq 1$ guztietarako. Horrez gain, $F(x,t) = 1$ denez, $b_n(t)$ kalkulatzeko formula aplikatuz, $b_n(t) = \dfrac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$ izango da. Ondorioz, $T_n(t)$ kalkulatzeko bi problema ebatzi behar ditugu. Lehena $n \neq 1$ kasuari dagokiona, hau da:

$$\begin{cases} T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t) = \dfrac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n), \\ T_n(0) = 0. \end{cases}$$

Problema horren soluzioa honako hau izanik:

$$T_n(t) = \frac{2}{n^3\pi^3}[1 - (-1)^n](1 - e^{-(n\pi)^2 t}), \quad \forall n \neq 1.$$

Bestalde, $n = 1$ denean ebatzi beharreko problema hau da:

$$\begin{cases} T_1'(t) + \pi^2 T_1(t) = \dfrac{4}{\pi} \\ T_1(0) = 1. \end{cases}$$

Beraz, $C_1(t) = \dfrac{4}{\pi^3} + e^{-\pi^2 t}(1 - 4/\pi^3)$ eta, ondorioz,

$$u(x,t) = \Big(\frac{4}{\pi^3} + e^{-\pi^2 t}\big(1 - \frac{4}{\pi^3}\big) \Big) \sin \pi x + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3\pi^3} (1 - e^{-(n\pi)^2 t}) \sin n\pi x.$$

10.2.3 Beroaren problema ez-homogeneoa mugalde-baldintza ez-homogeneoekin

Har dezagun, azkenik, honako beroaren ekuazio orokor hau; hau da, ekuazio ez-homogeneoa mugalde-baldintza ez-homogeneoekin:

$$\begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xx} = F(x,t), & 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0,t) = h_1(t), \ u(l,t) = h_2(t), & t > 0. \end{cases}$$

Izan bedi $v(x,t) = h_1(t)\dfrac{l-x}{l} + \dfrac{x}{l}h_2(t)$. Orduan, $z(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$ da baldintza homogeneoak dituen problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} z_t - \alpha^2 z_{xx} = F(x,t) - h_1'(t) - \dfrac{x}{l}[h_2'(t) - h_1'(t)], & 0 < x < l,\ t > 0, \\ z(x,0) = f(x) - h_1(0) - \dfrac{x}{l}\big(h_2(0) - h_1(0)\big), & 0 < x < l, \\ z(0,t) = 0,\ z(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

z funtzioa ezagutuz, u funtzioa kalkulatuta dugu.

10.3 Laplaceren ekuazioa koordenatu polarretan

Jadanik, 8.1.4 atalean aztertu dugu nola ebazten den Laplaceren ekuazioa erréktangelu batean aldagaien banantze-metodoa erabiliz; hau da:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0, & 0 < x < l, \quad 0 < y < L, \\ u(0,y) = u(l,y) = 0, & 0 < y < L, \\ u(x,0) = f_1(x), & 0 < x < l, \\ u(x,L) = f_2(x), & 0 < x < l. \end{cases}$$

Bestalde, aurreko gaian ikusi dugu nola idazten den funtzio baten laplacearra koordenatu polarretan. Adierazpen hori erabiliko dugu Laplaceren ekuazioa eremu zirkularretan aztertzeko. Aztertuko ditugun kasuen artean, zirkulua, koroa zirkularra edo honako mota honetako eremuak daude:

$$\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) :\ 0 < r_0 \le r < r_1 \quad \text{eta} \quad \alpha \le \theta \le \beta\},$$

non $r_0, r_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ diren. Horrelako eremuetan, komeni da laplacearra koordenatu polarretan idaztea. Gogoratu honako hau dela Laplaceren ekuazioa koordenatu polarretan:

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Izan bedi Laplaceren ekuazioa Ω bezalako eremu batean, $\alpha = 0$ izanik. Hau da,

$$\begin{cases} u_{rr}(r,\theta) + r^{-1}u_r(r,\theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & 0 < r_0 < r < r_1,\ 0 < \theta < \beta \\ u(r,0) = u(r,\beta) = 0, & r_0 < r < r_1, \\ u(r_0,\theta) = f(\theta),\ u(r_1,\theta) = g(\theta), & 0 < \theta < \beta. \end{cases}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliko dugu. Horretarako, $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ motako soluzioak aurkitu nahi ditugu. Deribatuz, Laplaceren ekuazioan ordezkatuz eta mugalde-baldintzak kontuan hartuz, $\Theta(\theta)$ funtzioa honako Sturm-Liouvilleren problema honen soluzioa izan behar da:

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ \Theta(0) = \Theta(\beta) = 0. \end{cases} \tag{10.3.1}$$

Eta $R(r)$ funtzioa honako ekuazio honen soluzioa izan behar da:

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \tag{10.3.2}$$

Sturm-Liouvilleren (10.3.1) problemaren balio propioak $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2$ dira, eta funtzio propioak $\Theta(\theta) = \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}$. (10.3.2) ekuazioa Eulerren ekuazio ezagunaren kasu partikular bat da. Eulerren bigarren ordenako ekuazio orokorra

$$r^2f''(r) + arf'(r) + bf(r) = 0$$

itxurakoa da, $a, b \in \mathbb{R}$ izanik. Eulerren ekuazio orokorraren soluzio bezala $f(r) = r^\mu$ funtzioa proposatzen da. Honako funtzio hau aurreko ekuazioan ordezkatuz:

$$\big(\mu(\mu-1) + a\mu + b\big)r^\mu = 0$$

izango dugu. Beraz, μ_1 eta μ_2 $\mu(\mu-1)+a\mu+b=0$ polinomioaren bi erro erreal desberdin badira, orduan, Eulerren ekuazioaren soluzio orokorra $f(r) = c_1r^{\mu_1}+c_2r^{\mu_2}$ da. Ondorioz, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2$ balioetarako, (10.3.2) ekuazioaren soluzio orokorra aurkitzeko, honako polinomio honen erroak bilatu behar ditugu:

$$\mu(\mu-1) + \mu - \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 = 0.$$

Polinomioaren erroak $\mu_1 = \frac{n\pi}{\beta}$ eta $\mu_2 = -\frac{n\pi}{\beta}$ dira; beraz, (10.3.2) ekuazioaren soluzio orokorra

$$R(r) = a_nr^{n\pi/\beta} + b_nr^{-n\pi/\beta}$$

da. Ondorioz, Laplaceren problemaren soluzioak adierazpen hau du:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}\big(a_nr^{n\pi/\beta} + b_nr^{-n\pi/\beta}\big).$$

Oraindik, a_n eta b_n koefizienteak zehaztu behar dira $u(r_0,\theta) = f(\theta)$ eta $u(r_1,\theta) = g(\theta)$ mugalde-baldintzak bete daitezen. Horretarako, $f(\theta)$ eta $g(\theta)$ funtzioen Fourierren sinuetako serieen garapenak kalkulatuko ditugu:

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}, \qquad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}.$$

Mugalde-baldintzak egiaztatzera behartuz, hau bete behar da:

$$a_nr_0^{n\pi/\beta} + b_nr_0^{-n\pi/\beta} = c_n \quad \text{eta} \quad a_nr_1^{n\pi/\beta} + b_nr_1^{-n\pi/\beta} = d_n$$

eta hemendik a_n eta b_n kalkulatuko dira.

10.4 Ariketak

1. Kalkulatu Cauchyren problema honen soluzioa:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

honako kasu hauetan:

(i) $f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = 0.$

(ii) $f(x) = A \sin \omega\, x, \quad g(x) = B \cos \mu\, x.$

(iii) $f(x) = 0, \quad g(x) = 1$ $|x| \leq \epsilon$ denean, $g(x) = 0$ $|x| > \epsilon$ bada.

2. Har dezagun uhin-ekuaziorako Cauchyren problema ez-homogeneoa:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), & x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aurkitu soluzioa kasu hauetan:

(i) $F(x,t) = 1, \quad f(x) = \sin \omega\, x, \quad g(x) = 0.$

(ii) $F(x,t) = A \cos \omega\, t \sin \omega\, x, \quad f(x) = g(x) = 0.$

(iii) $F(x,t) = x^2, \quad f(x) = x, \quad g(x) = 0.$

3. Kalkula ezazu $u(1/2, 1)$, problema honen soluzioa $u(x,t)$ funtzioa bada:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin 4\pi x, & 0 < x < 1, \\ u_t(x,0) = \sin^2 \pi x, & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Aldagaien banantze-metodoa erabiliz, aurkitu honako problema hauen soluzioak:

4. Ebatzi:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 2, \\ u_t(x,0) = 1 - 2x, & 0 < x < 2, \\ u(0,t) = t,\ u(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

5. Ebatzi:
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0,t) = T_1, \ u(\pi,t) = T_2, & t > 0, \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$
Zenbat da $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$?

6. Ebatzi:
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2e^{3x}, & 0 < x < 1/2, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(1/2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{2}{9}(1 - e^{3x}), & 0 < x < 1/2. \end{cases}$$
(Laguntza: aurkitu lehenengo t-gandik independente den v soluzio geldikor bat, egin $u - v$, eta aurkitu problema berriaren soluzioa).

7. Ebatzi:
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x\cos t, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

8. Ebatzi:
$$\begin{cases} u_{rr}(r,\theta) + r^{-1}u_r(r,\theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & 1 < r < 2, \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u(r,0) = u(r,\frac{\pi}{2}) = 0, & 1 < r < 2, \\ u(1,\theta) = \sin 4\theta, \quad u(2,\theta) = \frac{5}{2}\sin 4\theta, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bibliografia

[1] N. Arrizabalaga, M.J. de Velasco eta M.J. Zarate, *Ekuazio Diferentzialak*, Euskararen Arloko Errektoreordetzaren Sare Argitalpena, UPV/EHU, 2014.

[2] W.E. Boyce eta R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 9. argit., Wiley, 2009.

[3] M. Braun, *Differential Equations and their applications*, Springer-Verlag, 1978.

[4] A. Dou, *Ecuaciones en derivadas parciales*, Dossat, 1970.

[5] G.B. Folland, *Fourier analysis and applications*, 2.ed., Wadsworth& Brooks, 1992.

[6] M.W. Hirsch eta S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Editorial, 1983.

[7] F. John, *Partial differential equations*, 4., Springer-Verlag, 1982.

[8] A. Kiseliov, M. Krasnov eta G. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, 4. argit., MIR, 1984.

[9] R. K. Naggle eta E.B. Saff, *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales*, 2. argit., Adisson-Wesley Iberoamericana, 1992.

[10] I. Peral Alonso, *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*, Adisson-Wesley Iberoamericana, 1995.

[11] F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*, McGraw-Hill, 1977.

[12] D.G. Zill, *Ecuaciones diferenciales con Aplicaciones*, 2. argit., Grupo Editorial Iberoamérica, 1986.

Unibertsitateko eskuliburuak
Manuales universitarios

INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea