Kalkuluan barreneko ibilbidea

Mathematica erabilita I

M.ª Josefa González Gómez
Elisabete Alberdi Celaya

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Kalkuluan barreneko ibilbidea

Mathematatica erabilita I

M.ª Josefa González Gómez
Elisabete Alberdi Celaya

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

González Gómez, María Josefa

Kalkuluan barreneko ibilbidea Mathematica erabilita [Recurso electrónico] /Mª Josefa González Gómez, Elisabete Alberdi Celaya. – Datos. – Bilbao: Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2021]. – 1 recurso en línea: PDF (295 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)
Modo de acceso: World Wide Web
ISBN: 978-84-1319-337-3.

1. Cálculo. 2. Análisis matemático. 3. Mathematica (Programa de ordenador) I. Alberdi Celaya, Elisabete, coautor

(0.034)517

ISBN: 978-84-1319-337-3

Gaien aurkibidea

Irudien zerrenda

Taulen zerrenda

Sarrera

Zientzia, ingeniaritza, ekonomia, eta beste hainbat esparrutan gertatzen diren fenomenoak formulen bidez deskribatu nahi direnean, elementu edo tresna matematikoak agertzen dira. Deskribatu nahi den fenomeno horretan aldagai bakarra agertzen denean, aldagai bakarreko funtzioa izango dugu. Aldiz, gertakari horretan aldagai batek baino gehiagok eragiten dutenean, aldagai anitzeko funtzioa izango dugu esku artean.

Problema errealen ebazpenak kontzeptu eta teknika matematiko askoren ezagutza eskatzen du. Gerta daiteke problemaren enuntziatu matematikoa deribatuak agertzen diren ekuazio bat edo ekuazio-sistema bat izatea ere. Horrelakoetan, ekuazio diferentzialak edo ekuazio diferentzialen sistemak ebatzi beharko ditugu problemaren soluzioa aurkitzeko. Problema errealen ebazpenak, kontzeptu eta teknika matematiko askoren ezagutza eskatzen du.

Liburu honetan, aldagai bakarreko funtzioekin lan eginez hasiko gara, eta, behin horiekin trebatu ostean, aldagai anitzeko funtzioetara salto egingo dugu. Besteak beste, funtzioen limiteak, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta optimizazioa izango ditugu mintzagai.

Lan honetan, jarraitu beharreko prozedurak eskuz egiten irakasteaz gain, ordenagailuan nola egiten diren ere irakatsiko da. Horretarako, beharrezko aginduak zein diren azalduko da, eta oinarrizko programazioko prozedurak ere garatuko dira. Ordenagailu bidez ariketak ebazteko, Wolfram Mathematica softwarea erabiliko da. Mathematica kalkulurako eta programaziorako ingurune interaktiboa da. Software horrek, besteak beste, aljebra linealeko hainbat problema ebazteko tresnak ditu, ekuazioen erroak aurki ditzake, funtzioen deribatuak eta integralak kalkula ditzake, polinomioekin lan egin dezake, ekuazio diferentzialak ebatz ditzake, etab.

Software hori aukeratzeko beste arrazoietako bat izan da grafikoak bistaratzeko duen gaitasuna. Aldagai bakarreko funtzioen grafikoak, deribatuen interpretazioak edota integral mugatuen adierazpenak eskuz egitea posible den arren, ikusgarriago geratzen dira ordenagailuaren laguntzaz egiten direnean. Aldagai anitzeko funtzioekin lanean ari garenean, grafikoak eskuz irudikatzea ez da berehalako lana izaten; ordenagailuz nahiko erraz egin daitezke, ordea. Horrelakoetan, ordenagailu bidezko matematikak eta irudigintzak aldagai bakarraren kasuan baino garrantzi handiagoa hartzen du, eta ia ezinbesteko tresna bihurtzen da. Kontuan izan behar da, gainera, problemaren bistaratze geometrikoak asko laguntzen duela problemaren ebazpen matematikoan.

Egiturari dagokionez, liburua hamaika gaitan banatuta dago. Gai horietako bakoitzean teoria azaltzen da, eta ariketak ebazten dira bai eskuz eta baita ordenagailuaren laguntzaz ere.

1. kapitulua

Aldagai bakarreko funtzio erreala

Funtzio kontzeptua funtsezkoa da lege naturalak zehatz formulatzeko. Fisikan, geometrian eta, oro har, zientziaren adar guztietan, zenbait magnituderen balioa beste batzuen menpekoa da. Adibide batzuk aipatzearren: lauki baten azalera bere aldearen luzeraren araberakoa da, higikari batek denbora-tarte batean egiten duen espazioa bere abiaduraren araberakoa da, produktu baten salmenta kopurua haren prezioaren araberakoa da, etab. Kapitulu honetan, aldagai bakarreko funtzioak izango ditugu aztergai.

1.1 Aldagai bakarreko funtzio errealen definizioa eta propietateak

Definizioa. Aldagai bakarreko funtzio erreala zenbaki errealen azpimultzoen arteko korrespondentzia bat da. Korrespondentzia horrek zenbaki erreal bakoitzari zenbaki bakarra egokitzen dio. *Funtzioaren domeinu* deritzo korrespondentzia aplikatzen den zenbaki multzoari, $D \subset \mathbb{R}$. *Funtzioaren irudi* deritzo korrespondentziaren bidez D domeinuarekin lotutako balioen multzoari. Era honetan adierazten da f aldagai bakarreko funtzio erreala:

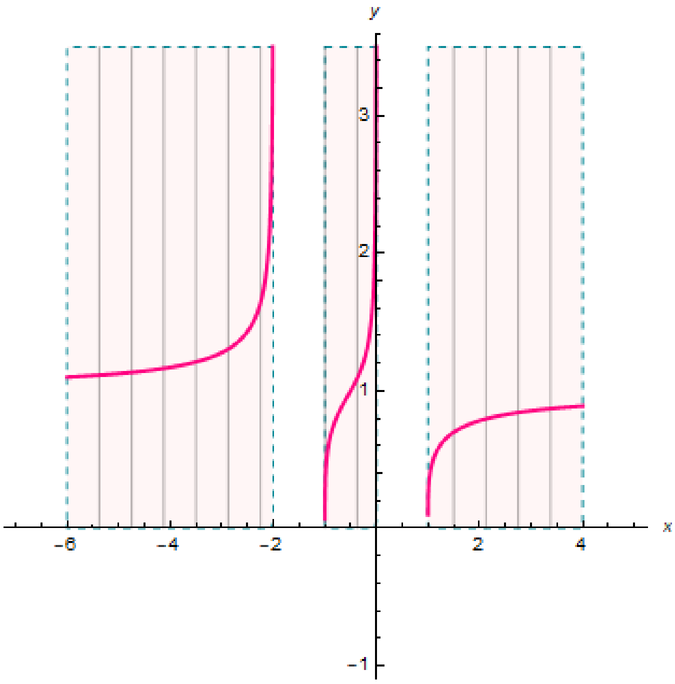
$$\begin{aligned} f\colon D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1 adibidea
Honako funtzio hau emanik:

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{x(x+2)}}, \tag{1.2}$$

bere domeinua eta irudia honako bi multzo hauek osatzen dute:

$$\begin{aligned} &D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee -1 \leq x < 0 \vee x \geq 1\}, \\ &Ir(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}. \end{aligned}$$



1.1 irudia. 1.1 adibidea.

Funtzio enpirikoa. Batzuetan, funtzio bateko irudien multzoa ez dator lege matematiko baten bidez definituta, baizik era enpirikoan lortutako datuen taula gisa. Horrelakoetan, aldagai errealeko funtzio erreal enpirikoa daukagu. Horren adibidea da 1.1 taulako datu multzoa, zeinek aldiune batzuetako tenperaturaren neurketa adierazten baitu.

Denbora	Tenperatura
1	27
2	30
3	29
4	28

1.1 taula. Era enpirikoan definitutako funtzioa.

Zatika definitutako funtzioa. $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai bakarreko funtzio erreala zatika definitua dago, D domeinuko puntu guztiei lege matematiko bera egokitzen ez badie. Hau da, D domeinuko kokapenaren arabera, lege matematiko ezberdinen bidez emana badago f funtzioa.

Adibidez, honako funtzio hau zatika definitua dago:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0, \\ 2sin^2(x), & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ tan(x) - cos(x+\pi), & x > 2\pi. \end{cases} \tag{1.3}$$

1.2 Funtzio-eragiketak

$f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $g\colon B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzio errealak emanik, honako eragiketa hauek defini daitezke:

- Funtzioen arteko batuketa:

$$\begin{aligned}(f+g)\colon D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)\end{aligned}$$

  non $D = A \cap B$.

- Funtzioen arteko kenketa:

$$\begin{aligned}(f-g)\colon D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f-g)(x) = f(x)-g(x)\end{aligned}$$

  non $D = A \cap B$.

- Funtzioen arteko biderketa:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)\colon D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)\end{aligned}$$

  non $D = A \cap B$.

- Funtzioen arteko zatiketa:

$$\begin{aligned}\frac{f}{g}\colon D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

  non $D = A \cap B - \{x \in B : g(x) = 0\}$.

- Funtzioen arteko konposaketa:

$$\begin{aligned}g\circ f\colon D \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto g(f(x))\end{aligned}$$

  non $D = \{x \in A : f(x) \in B\}$.

Lehenengo lau eragiketei *eragiketa aljebraiko* deritze, eta zenbaki errealen eragiketen propietate berdinak betetzen dituzte (elkartze-propietatea, trukatze-propietatea, etab.). Funtzioen konposaketak, aldiz, ez ditu propietate horietako batzuk betetzen; adibidez, ez du trukatze-propietatea betetzen.

1.2 adibidea

Honako funtzio hauek emanik, $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$ eta $g(x) = x^2 - 1$, kalkulatu: $f^3(x)\cdot g(x)$, $(f\circ g)(x)$ eta $(g\circ f)(x)$.

$$\begin{aligned}f^3(x)\cdot g(x) &= (x+3)\cdot(x^2-1)\\ (f\circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt[3]{x^2+2}\\ (g\circ f)(x) &= g(f(x)) = (x+3)^{2/3}-1\end{aligned}$$

1.3 Alderantzizko funtzioa

Funtzio injektibo bat zer den esango dugu alderantzizko funtzioa definitu aurretik.

Funtzio injektiboa. $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiboa da, edozein bi balio ezberdin hartuta haien irudiak ezberdinak badira. Hau da: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Edo gauza bera dena, bi irudi berdinak badira, puntu berari dagozkio: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

1.3 adibidea

$f(x) = x^2$ funtzioa ez da injektiboa, edozein $c \in \mathbb{R}$ hartuta $f(c) = f(-c) = c^2$ betetzen baita. $f(x) = (x-3)(x-5)$ funtzioa parabola bat da, eta ez da injektiboa. Adibidez, $f(3) = f(5) = 0$ betetzen da. Gainera, $x = 4$ zuzenarekiko simetrikoa da parabola hau. Ondorioz, edozein $a \in \mathbb{R}$ zenbaki errealetarako $x_1 = 4 - a$ eta $x_2 = 4 + a$ puntuek irudi bera dute, $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x) = x^3$ funtzioa injektiboa da, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ betetzen baita.

Honaino iritsita, geure buruari galdetzen diogu $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio baten irudia, $f(A)$, ezagututa, ea posible den $g\colon f(A) \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ funtzioa aurkitzea $g(y) = x$ beteko duena, baldin eta $f(x) = y$ betetzen bada. Hau da, $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(f(x)) = x$ beteko duen g funtzioa ea aurki daitekeen. Aurreko adibideetatik ondorioztа daiteke, baldintza hori beteko duen g funtzioa existitzeko f funtzioak injektiboa izan beharko duela.

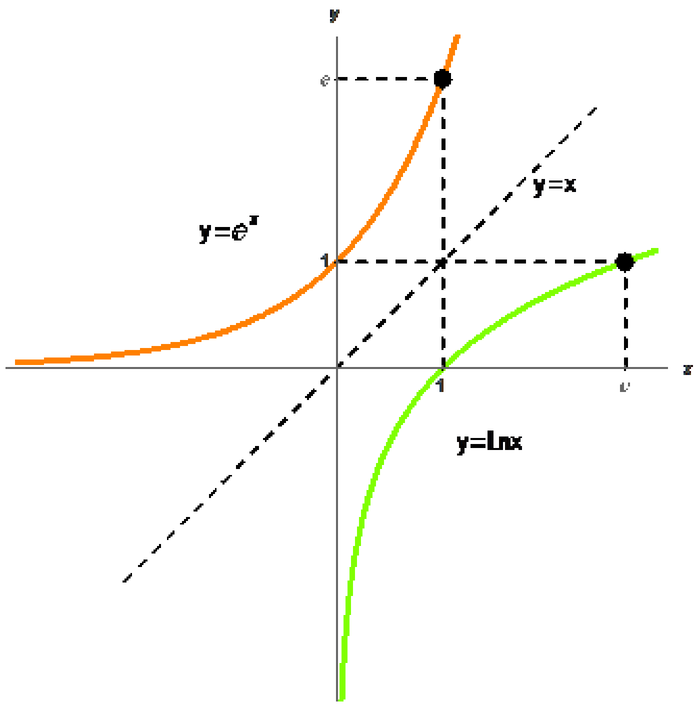
Alderantzizko funtzioa. $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio injektiboa emanik, existitzen da $g\colon f(A) \subset \mathbb{R} \to A \subset \mathbb{R}$ funtzioa $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ betetzen duena. g funtzioari f-ren alderantzizko deritzo, eta $g = f^{-1}$ adierazten da. Alderantzizko funtzioak honako berdintza hauek betetzen ditu:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x. \tag{1.4}$$

Funtzio baten eta bere alderantzizkoaren grafikoak simetrikoak dira $y = x$ zuzenarekiko.

1.4 adibidea

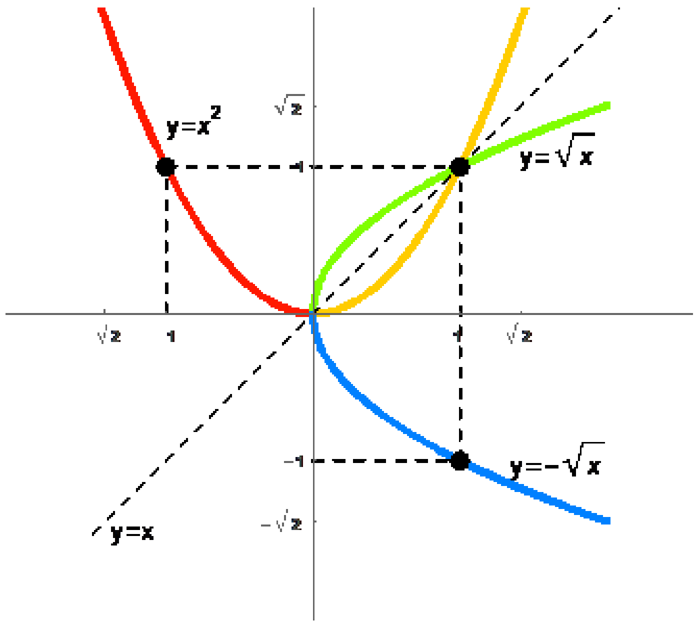
$f(x) = e^x$ funtzioaren alderantzizkoa $f^{-1}(x) = lnx$ funtzioa da. Bi funtzio horien grafikoak $y = x$ zuzenarekiko simetrikoak dira; ikus 1.2 irudia.



1.2 irudia. 1.4 adibidea.

1.5 adibidea

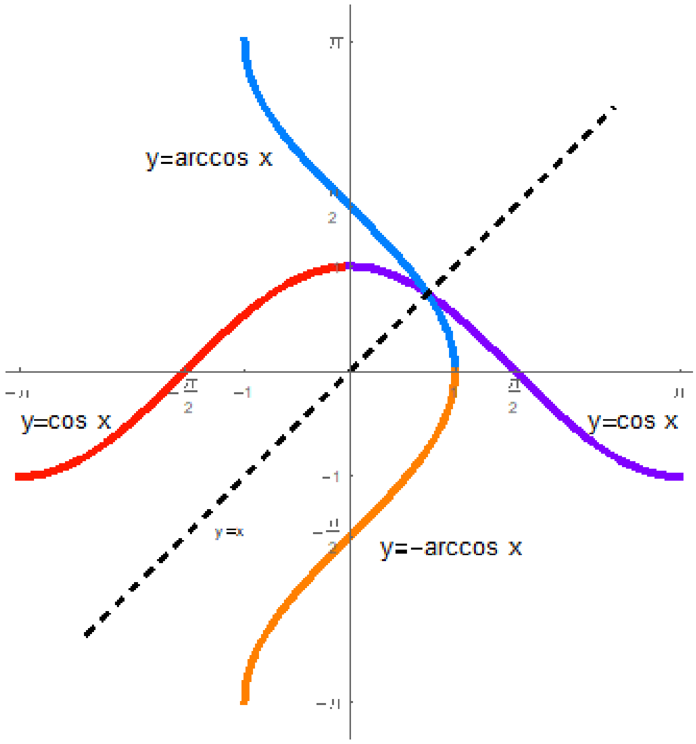
$f(x) = x^2$ funtzioak ez dauka alderantzizko funtziorik, ez baita injektiboa. Hala ere, f funtzioaren domeinua $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ multzora mugatzen badugu, $y_1 = \sqrt{x}$ da bere alderantzizkoa. Era berean, funtzioaren domeinua $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ multzora mugatzen badugu, $y_2 = -\sqrt{x}$ da bere alderantzizkoa. y_1 eta y_2 funtzioei f *funtzioaren pseudoalderantzizko* deritze.



1.3 irudia. 1.5 adibidea.

1.6 adibidea

$f(x) = \cos x$ funtzioa ere ez da injektiboa. Funtzioa $[0, \pi]$ tartera murrizten badugu, orduan injektiboa da. Funtzio horren irudia $[-1, 1]$ tartea da, eta tarte hori izango da alderantzizko funtzioaren domeinua.



1.4 irudia. 1.6 adibidea.

1.4 Ordenagailuko praktikak

1.1 ariketa. Aztertu eta irudikatu grafikoki honako funtzio hauen domeinua eta irudien multzoa:

a) $y(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y(x) = \frac{x}{\sqrt{x(1-x^2)}}$

c) $y(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{x(x+2)}}$

d) $y(x) = ln(x^3 - 3x + 2)$

a) ataleko funtzioa:

$$f[\text{x\_}] = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{ie1} = \text{FunctionDomain}[f[x], x]$$

$$-1 < x < 1$$

$\text{irudi1} = \text{FunctionRange}[f[x], x, y]$

True

$\text{g1} = \text{RegionPlot}[\text{ie1\&\&irudi1}, \{x, -1.2, 1.2\}, \{y, -3.5, 3.5\},$

$\text{Axes->True}, \text{Frame} \to \text{False},$

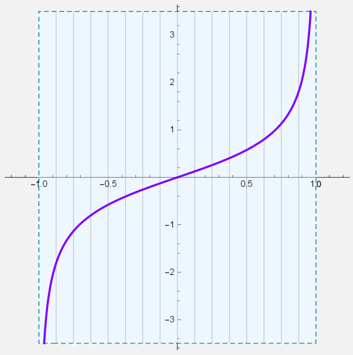
$\text{PlotStyle} \to \text{Directive}[\text{Opacity}[0.5], \text{LightBlue}], \text{Mesh} \to \{15, 0\},$

$\text{BoundaryStyle} \to \text{Directive}[\text{Thickness}[\text{Medium}], \text{Dashed}]];$

$\text{g2} = \text{Plot}[\{f[x]\}, \{x, -1, 1\}, \text{PlotRange} \to \{\{-3.5, 3.5\}\},$

$\text{PlotStyle} \to \{\{\text{Thickness}[0.006], \text{RGBColor}[0.5, 0, 1]\}\}];$

$\text{Show}[\text{g1}, \text{g2}]$



b) ataleko funtzioa:

$f[\text{x\_}] = \frac{x}{\sqrt{x(1-x^2)}};$

$\text{ie2} = \text{FunctionDomain}[f[x], x]$

$x < -1 \| 0 < x < 1$

$\text{irudi2} = \text{FunctionRange}[f[x], x, y]$

$y < 0 \| y > 0$

$\text{g1} = \text{RegionPlot}[\text{ie2\&\&irudi2}, \{x, -3, 1.2\}, \{y, -3.5, 3.5\},$

$\text{Axes->True}, \text{Frame} \to \text{False},$

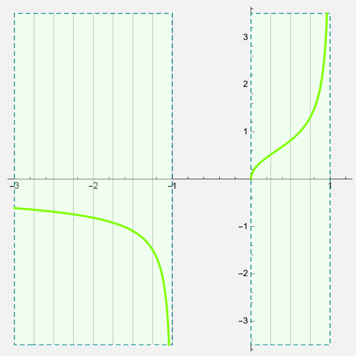
$\text{PlotStyle} \to \text{Directive}[\text{Opacity}[0.5], \text{LightGreen}], \text{Mesh} \to \{15, 0\},$

BoundaryStyle → Directive[Thickness[Medium], Dashed]];

g2 = Plot[{f[x]}, {x, −3, 1}, PlotRange → {{−3.5, 3.5}},

PlotStyle → {{Thickness[0.006], RGBColor[0.5, 1, 0]}}];

Show[g1, g2]



c) ataleko funtzioa:

f[x_] = $\left(\frac{x^2-1}{x(x+2)}\right)^{1/4}$;

ie3 = FunctionDomain[f[x], x]

$x < -2 \| -1 \leq x < 0 \| x \geq 1$

irudi3 = FunctionRange[f[x], x, y]

$y \geq 0$

g1 = RegionPlot[ie3&&irudi3, {x, −6, 4}, {y, −1, 3.5}, Axes->True, Frame → False,

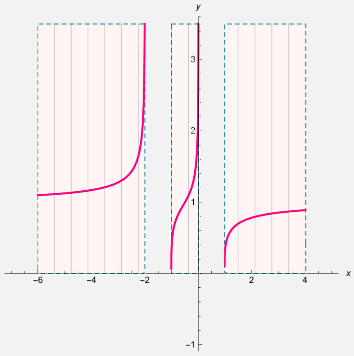
PlotStyle → Directive[Opacity[0.5], LightPink], Mesh → {15, 0},

BoundaryStyle → Directive[Thickness[Medium], Dashed]];

g2 = Plot[{f[x]}, {x, −6, 4}, PlotRange → {{−7, 5}, {−1, 3.5}},

PlotStyle → {{Thickness[0.006], RGBColor[1, 0, 0.5]}}];

Show[g1, g2, PlotRange → {{−7, 5}, {−1, 3.5}}, AxesLabel → {x, y}]



d) ataleko funtzioa:

$f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Log}\left[x^3 - 3x + 2\right];$

$\mathrm{ie4} = \mathrm{FunctionDomain}[f[x], x]$

$-2 < x < 1 \| x > 1$

$\mathrm{irudi4} = \mathrm{FunctionRange}[f[x], x, y]$

True

g1 = RegionPlot[ie4&&irudi4, {x, −3, 5}, {y, −5, 5}, Axes->True, Frame → False,

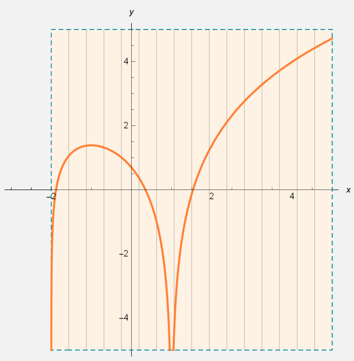
PlotStyle → Directive[Opacity[0.5], LightOrange], Mesh → {15, 0},

BoundaryStyle → Directive[Thickness[Medium], Dashed]];

g2 = Plot[{$f[x]$}, {x, −3, 5}, PlotRange → {{−3, 5}, {−5, 5}},

PlotStyle → {{Thickness[0.006], RGBColor[1, 0.5, 0.2]}}];

Show[g1, g2, PlotRange → {{−3, 5}, {−5, 5}}, AxesLabel → {x, y}]



1.2 ariketa. Honako funtzio hauek emanik:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \qquad \text{eta} \qquad g(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$$

a) Irudikatu honako funtzio hauek: $h_1(x) = f(x) \cdot g(x)$, $h_2(x) = (f \circ g)(x)$ eta $h_3(x) = (g \circ f)(x)$.

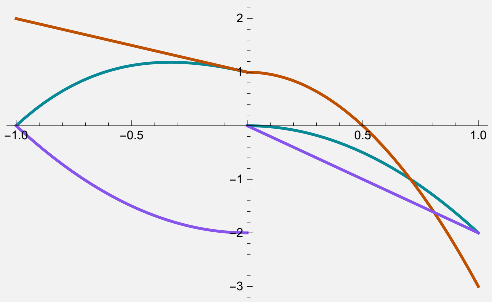
b) Kalkulatu funtzio horien irudiak $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ eta $x = 2$ puntuetan.

a) atala: Funtzioak definituko ditugu:

```
f[x_] = Piecewise[{{1 − x², x ≤ 0}, {x, x > 0}}];

g[x_] = Piecewise[{{1 − x, x < 0}, {−2x, x ≥ 0}}];
```

Kalkulatu beharreko funtzioak definituko ditugu, eta adierazpen grafikoak egingo ditugu:

```
h1[x_] = f[x] * g[x];

h2[x_] = f[g[x]];

h3[x_] = g[f[x]];

Plot[{h1[x], h2[x], h3[x]}, {x, −1, 1}, PlotStyle → {Thickness[0.006]}]
```



b) atala. Eskatzen dizkiguten datuak kalkulatuko ditugu:

```
b = Table[x, {x, −2, 2, 1}]

{−2, −1, 0, 1, 2}
```

h1/@*b*

$\{-9, 0, 0, -2, -8\}$

h2/@*b*

$\{3, 2, 1, -3, -15\}$

h3/@*b*

$\{4, 0, -2, -2, -4\}$

1.3 ariketa. Eraikin bateko hiru solairu lotuko dituen arrapala mekaniko bat egin nahi da. Solairu bakoitza 3 metroko zati horizontal bat da. Bi solairuren arteko altuera 5 metrokoa da, eta arrapalaren malda %25ekoa.

a) Definitu funtzio bat, x aldagaiaren menpe y altuera emango diguna. Egin haren adierazpen grafikoa.

b) Kalkulatu arrapalaren luzera osoa.

a) atala. Lehenengo solairua $(x, y) = (0, 0)$ puntutik $(x, y) = (3, 0)$ puntura doa. Arrapalaren lehenengo zatia $(x, y) = (3, 0)$ puntuan hasten da, eta $y = 5$ metroko altuerara iristen da %25eko maldarekin.

f1[x_] = $\mathbf{\frac{25(x-3)}{100}}$

$\frac{1}{4}(-3 + x)$

Solve[f1[*x*] == 5]

$\{\{x \to 23\}\}$

Bigarren solairuko zatia $(x, y) = (23, 5)$ puntutik $(x, y) = (26, 5)$era doa, eta hortxe hasten da arrapalaren bigarren zatia. Zati hori $y = 10$ altueraraino %25eko maldarekin iristen da:

f2[x_] = $\mathbf{\frac{25(x-26)}{100}}$ **+ 5//Simplify**

$\frac{1}{4}(-6 + x)$

Solve[f2[x] == 10]

$\{\{x \to 46\}\}$

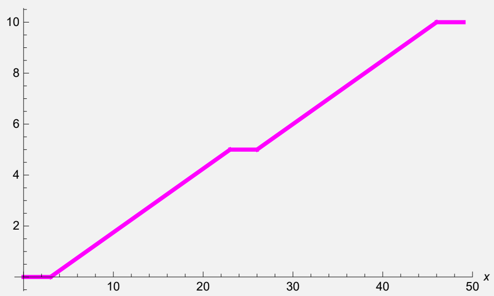
Azken zatia 3. solairuan dago, eta $(46, 10)$ puntutik $(49, 10)$era doa:

f[x_] = Piecewise $\left[\left\{\{0, 0 \leq x \leq 3\}, \left\{\frac{x-3}{4}, 3 < x < 23\right\}, \{5, 23 \leq x \leq 26\}, \left\{\frac{x-6}{4}, 26 < x < 46\right\}, \{10, 46 \leq x \leq 49\}\right\}\right]$

$$\begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{4}(-3+x) & 3 < x < 23 \\ 5 & 23 \leq x \leq 26 \\ \frac{1}{4}(-6+x) & 26 < x < 46 \\ 10 & 46 \leq x \leq 49 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Bukatzeko, funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

Plot[f[x], $\{x, 0, 49\}$, AxesLabel $\to \{x, y\}$, PlotStyle $\to$ {Magenta, Thickness[0.009]}]



b) atala. Arrapalaren distantzia osoa honako hau da:

$d = 2\sqrt{20^2 + 5^2} + 3 * 3$

$9 + 10\sqrt{17}$

$N[d]$

50.2311

1.4 ariketa. Zenbaki erreal baten parte osoa honako era honetan definitzen da: $n \leq x$ betetzen duen n zenbaki arruntik handiena. Hau da: $h(x) = \max\{n : n \leq x \text{ eta } n \in \mathbb{N}\}$.

a) Erabili funtzio hori nazioarteko dei baten kostua, C, kalkulatzeko, hitz egiten emandako t minutuen arabera. Deiaren balioa $1,4$ €-koa da bigarren minutura arte, eta $0,8$ € gehitu behar zaizkio gainerako minutu bakoitzeko (minutu oso zein minutu parte bakoitzeko).

b) Irudikatu deiaren kostu-funtzioaren grafikoa.

c) Kalkulatu 10 minutu eta 15 segundoko iraupena izan duen dei baten kostua.

a) atala. Funtzioaren definizioa:

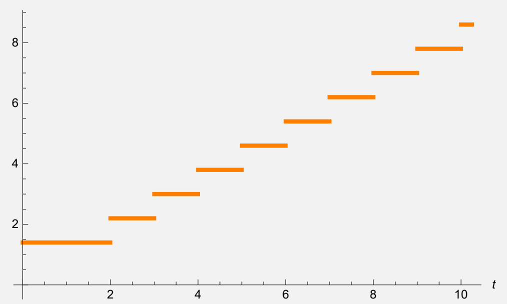
c[t_] = Piecewise[{{1.4, 0 ≤ t < 2}, {1.4 + 0.8Floor[t − 1], t ≥ 2}}]

$$\begin{cases} 1.4 & 0 \leq t < 2 \\ 1.4 + 0.8(-1 + \text{Floor}[t]) & t \geq 2 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

b) atala. Funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

Plot[c[t], {t, 0, 10.25}, AxesLabel → {t, c}, AxesOrigin → {0, 0},

PlotStyle → {Orange, Thickness[0.009]}]



c) atala. 10 minutu eta 15 segundoko iraupena izan duen dei baten kostua honako era honetan kalkulatzen da:

15/60//*N*

0.25

***c*[10.25]**

8.6

1.5 ariketa. Idatzi $P(1,5,\ 2,5)$ puntuaren eta $y = \sqrt{x}$ kurbako edozein punturen arteko distantziari dagokion adierazpena. Irudikatu distantzia horri dagokion funtzioa, eta erabili grafiko hori P puntutik hurbilen dagoen puntua zein den zehazteko.

Puntua, funtzioa eta haien arteko distantzia definituko ditugu:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \sqrt{x}}$

$\sqrt{x}$

$\mathbf{P1 = \{1.5, 2.5\}}$

$\{1.5, 2.5\}$

$\mathbf{P2} = \boldsymbol{\{a, \sqrt{a}\}}$

$\{a, \sqrt{a}\}$

$\boldsymbol{d[\mathrm{a\_}] = \sqrt{(a - 1.5)\text{^}2 + (\sqrt{a} - 2.5)\text{^}2}}$

$\sqrt{\left(-2.5 + \sqrt{a}\right)^2 + (-1.5 + a)^2}$

Manipulate agindua erabilita, kurbako edozein punturen eta P puntuaren arteko distantzia irudikatuko eta kalkulatuko dugu:

Manipulate[

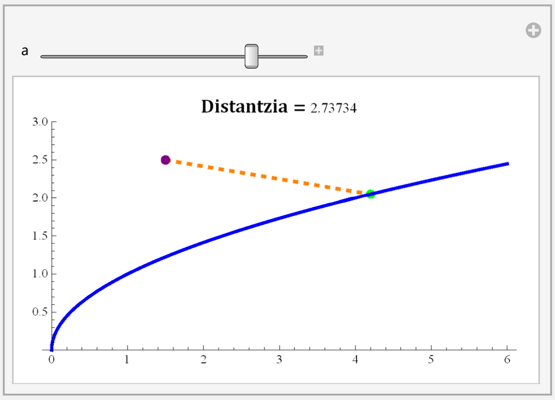
Show [Graphics [{Orange, Dashed, Thickness[0.008], Line [{{1.5, 2.5}, {*a*, $\sqrt{a}$}}] ,

PointSize[0.02], Point [{{1.5, 2.5}, {*a*, $\sqrt{a}$}} , VertexColors → {Purple, Green}]}] ,

Plot [{$\sqrt{x}$} , {*x*, 0, 6}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.007]}] , PlotRange → {0, 3},

```
Axes->True, PlotLabel → Row [{"Distantzia= ", d[a]}]] ,
{a, 0.5, 5, 0.1}]
```

Out[=]=



P puntutik hurbilen dagoen grafikoko puntua distantzia honetara dago:

```
d[1.9]
```

1.19079

```
Table[d[a], {a, 0.5, 5, 0.1}]
```

{2.05292, 1.94603, 1.84572, 1.75153, 1.6633, 1.58114, 1.50531, 1.43624, 1.37445, 1.32058, 1.27526, 1.23913, 1.21276, 1.19658, 1.19079, 1.19538, 1.21009, 1.23442, 1.26772, 1.30921, 1.35805, 1.41342, 1.4745, 1.54058, 1.611, 1.68515, 1.76255, 1.84275, 1.92537, 2.01009, 2.09663, 2.18476, 2.27427, 2.365, 2.45678, 2.54951, 2.64306, 2.73734, 2.83227, 2.92778, 3.02381, 3.12029, 3.21718, 3.31445, 3.41204, 3.50994}

1.6 ariketa. Egin honako eragiketa hauek:

a) $\sin 30°$, $\tan 45°$, $\cot 0°$.

b) $\arccos 0$, $\arctan 1$.

c) Eman 14 hamartarreko emaitza honako adierazpen hauetako bakoitzerako: $\exp 10$, $\ln 100$, $|-5|$, $\sqrt{0.004}$.

a) ataleko eragiketak era honetan egiten dira:

Sin[30 * Degree]

$\frac{1}{2}$

Cot[0 * Degree]

ComplexInfinity

Tan[45 * Degree]

1

b) atalekoak:

ArcTan[1]

$\frac{\pi}{4}$

%/(Pi/180)

45

ArcCos[0]

$\frac{\pi}{2}$

%/(Pi/180)

90

c) atalekoak:

***E*^100**

e^{100}

***N*[*E*^100, 14]**

$2.6881171418161 \times 10^{43}$

Log[10]

Log[10]

***N*[Log[10.], 14]**

2.30259

Abs[−5]

5

Sqrt[0.04]

0.2

1.7 ariketa. Aztertu eta irudikatu honako funtzio honen izate-eremua eta irudien multzoa:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\right).$$

$$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Log}\left[\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right];}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{ie} = \mathrm{FunctionDomain}[f[x], x]}$$

$-1 < x < 1 \| x > 2$

$$\boldsymbol{\mathrm{irudi} = \mathrm{FunctionRange}[f[x], x, y]}$$

True

g1 = RegionPlot[ie&&irudi, {x, −1, 6}, {y, −5, 3.5}, Axes->True,

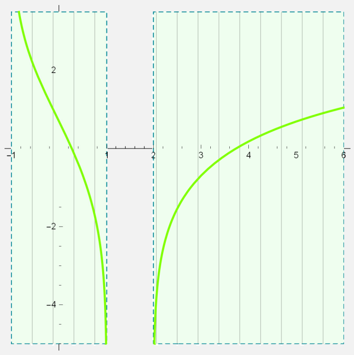
Frame → False, PlotStyle → Directive[Opacity[0.5], LightGreen],

Mesh → {15, 0}, BoundaryStyle → Directive[Thickness[Medium], Dashed]];

g2 = Plot[{f[x]}, {x, −1, 6}, PlotRange → {{−5, 3.5}},

PlotStyle → {{Thickness[0.006], RGBColor[0.5, 1, 0]}}];

Show[g1, g2]



1.8 ariketa. Honako bi funtzio hauek emanik, $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$ eta $g(x) = x^2 - 1$:

a) Definitu funtzioak eta irudikatu grafiko berean.

b) Zein baliotan dira berdinak $f(x)$ eta $g(x)$?

c) Definitu honako funtzio hauek, eta egin haien adierazpen grafikoa: $h_1(x) = (f(x))^3 \cdot g(x)$, $h_2(x) = (f \circ g)(x)$ eta $h_3(x) = (g \circ f)(x)$.

a) Funtzioen definizioa:

$\boldsymbol{f(\text{x\_}) = \sqrt[3]{x+3}}$

$(3+x)^{1/3}$

$\boldsymbol{g(\text{x\_}) = x^2 - 1}$

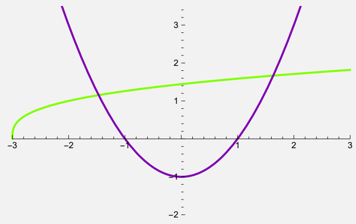
$-1 + x^2$

Adierazpen grafikoak egingo ditugu:

Plot[{f[x], g[x]}, {x, −3, 3}, PlotRange → {{−3, 3}, {−2, 3.5}},

PlotStyle → {{Thickness[0.006], RGBColor[0.5, 1, 0]},

{Thickness[0.006], RGBColor[0.5, 0, 0.7]}}, PlotLegends → "Expressions"]



b) Ikus dezagun zein puntutan diren berdinak bi funtzioak:

NSolve[{f[x]==g[x]}, x]

$\{\{x \to 1.63312\}, \{x \to -1.4673\}\}$

c) Eskatzen dizkiguten funtzioak definituko ditugu, eta haien adierazpen grafikoak egingo ditugu:

h1(x_) = $f(x)^3 g(x)$

$(x+3)\left(x^2-1\right)$

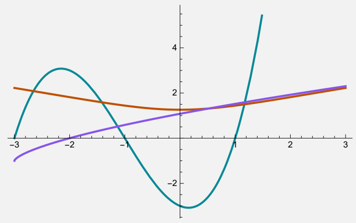
h2(x_) = $f(g(x))$

$\sqrt[3]{x^2+2}$

h3(x_) = $g(f(x))$

$(x+3)^{2/3}-1$

Plot[{h1[x], h2[x], h3[x]}, {x, −3, 3}, PlotStyle → {Thickness[0.006]}]



1.9 ariketa. Honako funtzio hau emanik:

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin^2 x, & 0 \le x \le 2\pi, \\ \tan x + \cos(x+\pi), & x > 2\pi, \\ 3, & \text{gainontzeko kasuetan.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Definitu funtzioa bi era ezberdinetan, eta ebaluatu honako puntu multzo honetan: $\{k\pi : k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Honako bi era hauetan definituko dugu funtzioa:

```
f[x_] = Which[x < 0, 3, x > 2Pi, Tan[x] + Cos[x + Pi], True, 2 * (Sin[x])^2]
```

Which $[x < 0, 3, x > 2\pi, \mathrm{Tan}[x] + \mathrm{Cos}[x + \pi], \mathrm{True}, 2\mathrm{Sin}[x]^2]$

```
g[x_] = Piecewise[{{3, x < 0}, {2 * (Sin[x])^2, 0 <= x <= 2Pi},
{Tan[x] + Cos[x + Pi], True}}]
```

$$\begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2\sin^2(x) & 0 \leq x \leq 2\pi \\ \tan(x) - \cos(x) & \text{True} \end{cases}$$

Esaten dizkiguten balioetan balioztatuko dugu funtzioa:

```
b = Table[k * π, {k, -3, 3}]
```

$\{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$

```
f/@b
```

$\{3, 3, 3, 0, 0, 0, 1\}$

```
N[%]
```

$\{3., 3., 3., 0., 0., 0., 1.\}$

```
g/@b
```

$\{3, 3, 3, 0, 0, 0, 1\}$

```
N[%]
```

$\{3., 3., 3., 0., 0., 0., 1.\}$

Funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

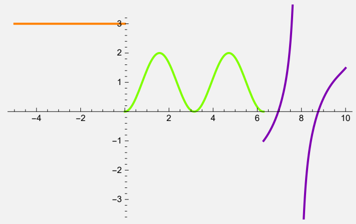
$\mathrm{g1} = \mathrm{Plot}[g[x], \{x, -5, 0\}, \mathrm{PlotStyle} \to \{\mathrm{Thickness}[0.006], \mathrm{RGBColor}[1, 0.5, 0]\}];$

$\mathrm{g2} = \mathrm{Plot}[g[x], \{x, 0, 2 * \pi\}, \mathrm{PlotStyle} \to \{\mathrm{Thickness}[0.006], \mathrm{RGBColor}[0.5, 1, 0]\}];$

$\mathrm{g3} = \mathrm{Plot}[g[x], \{x, 2 * \pi, 10\},$

$\mathrm{PlotStyle} \to \{\mathrm{Thickness}[0.006], \mathrm{RGBColor}[0.5, 0, 0.7]\}];$

$\mathrm{Show}[\mathrm{g1}, \mathrm{g2}, \mathrm{g3}, \mathrm{PlotRange} \to \{\{-5, 10\}, \{-3.5, 3.5\}\}]$



1.10 ariketa. *Table* agindua erabilita, sortu honako puntu hauek:

$$\left\{(n, n^3) : 0 < n \leq 20 \text{ eta } n \text{ bikoitia}\right\}.$$

Irudikatu puntu multzo horri dagokion grafikoa. Kalkulatu, $0 < n \leq 20$ izanik, bikoitiak diren zenbakien kuboen batura eta biderkadura.

Taula definituko dugu:

tabla = Table[{k, k^3}, {k, 0, 20, 2}]

$\{\{0,0\},\{2,8\},\{4,64\},\{6,216\},\{8,512\},\{10,1000\},\{12,1728\},\{14,2744\},$
$\{16,4096\},\{18,5832\},\{20,8000\}\}$

TableForm[tabla, TableHeadings → {None, {n, "n^3"}}]

n	n^3
0	0
2	8
4	64
6	216
8	512
10	1000
12	1728
14	2744
16	4096
18	5832
20	8000

Eskatzen dizkiguten batura eta biderkadura kalkulatuko ditugu:

Sum[n^3, {n, 2, 20, 2}]

24200

Product[n^3, {n, 2, 20, 2}]

51308458682644093206528000000

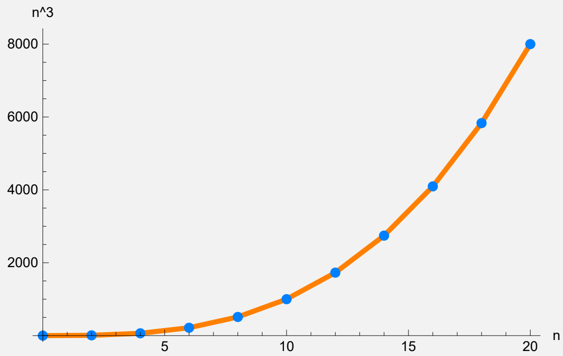
Bukatzeko, adierazpen grafikoa egingo dugu:

g1 = ListPlot[tabla, PlotStyle → {PointSize[0.02], RGBColor[0, 0.5, 1]}];

g2 = ListPlot[tabla, Joined → True,

PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0.5, 0]}];

Show[g2, g1, AxesLabel → {n, "n^3"}]



2. kapitulua

Kurben adierazpide grafikoa planoan

Funtzioen adierazpide grafikoa garrantzitsua da hainbat problema matematikoren soluzioak aurkitu ahal izateko; besteak beste, azalerak eta bolumenak kalkulatzeko, maximoak eta minimoak zehazteko, etab. Kapitulu honetan, bi dimentsiotan kurbak adierazteko dauden erak aztertuko ditugu: forma esplizitua, forma inplizitua, koordenatu polarrak eta parametrikoak. Era berean, hainbat kurbaren adibideak jarriko ditugu.

2.1 Funtzio esplizituen adierazpide grafikoa

2.1.1 Funtzio arrazionalak

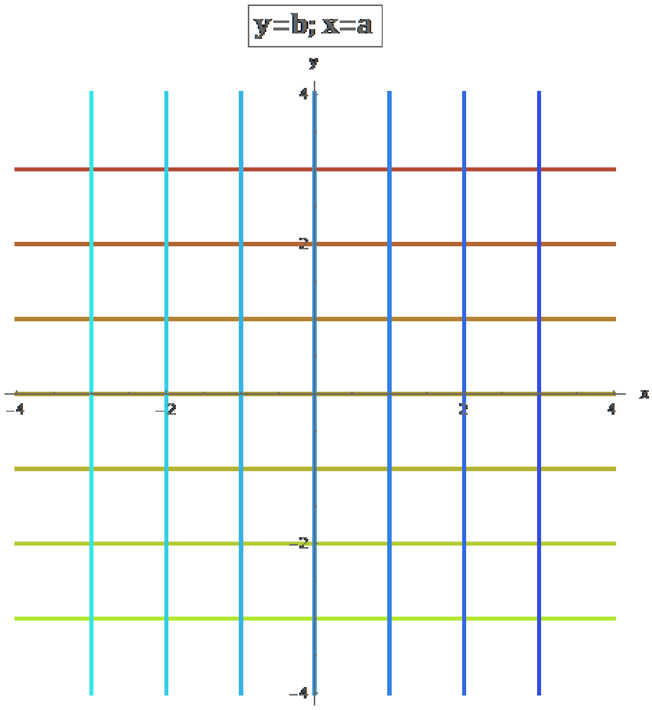
Funtzio arrazional bat $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ eta $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ $a_0, a_1, \cdots a_n, b_0, b_1, \cdots b_n \in \mathbb{R}$ funtzio polinomikoen zatiketa da:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{2.1}$$

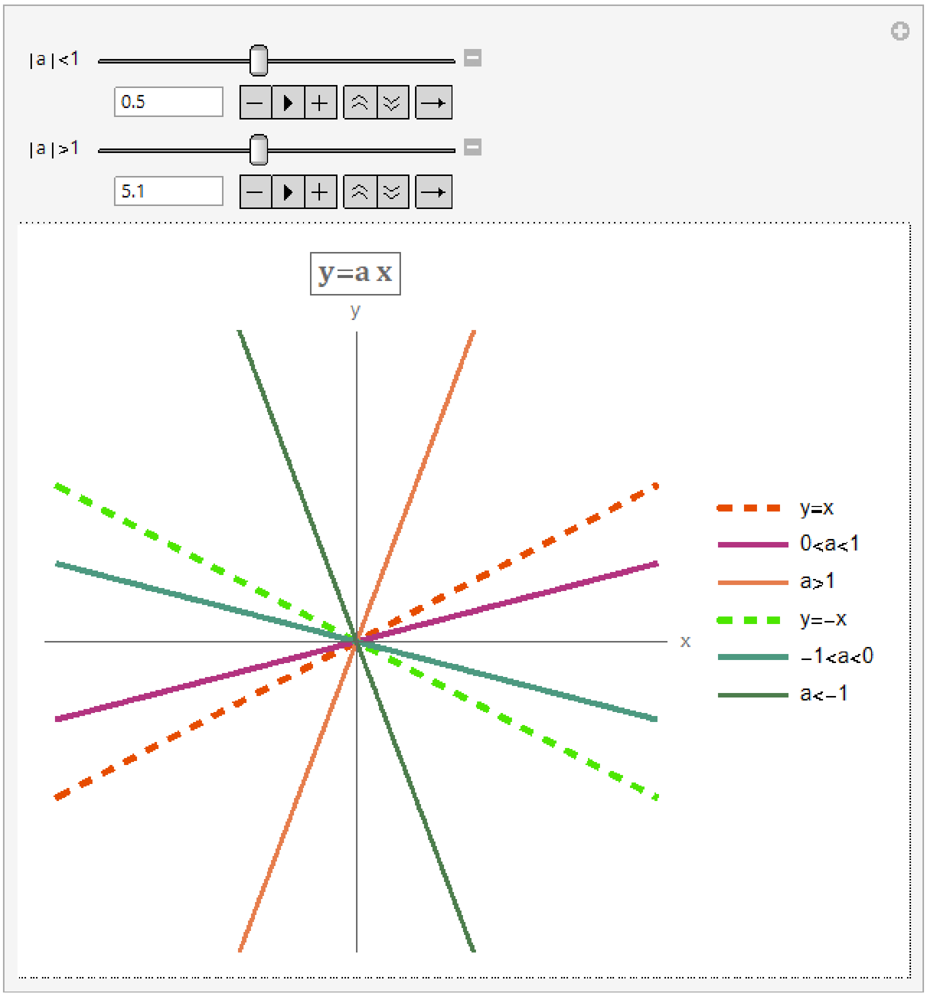
Funtzio arrazionalak dira: zuzenak, parabolak, funtzio potentzialak, etab.

Zuzenak

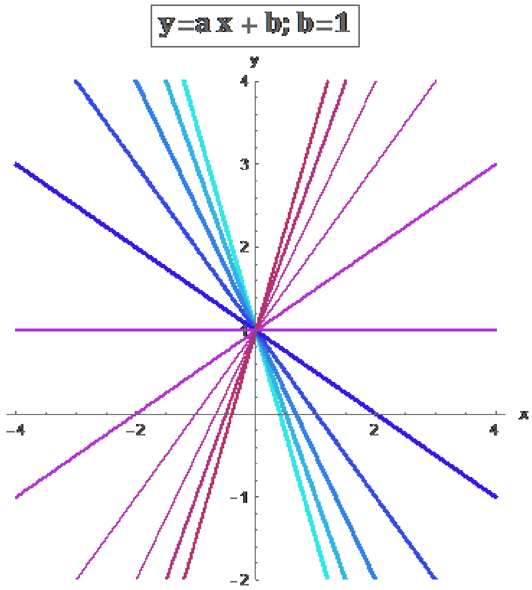
Zuzen baten ekuazioa $y = ax + b$ da, $a, b \in \mathbb{R}$ izanik. Zuzen horizontala daukagu $a = 0$ denean, eta zuzen bertikala $x = a$ denean; ikus 2.1 irudia. $b = 0$ denean, $(0, 0)$ puntutik pasatzen da zuzena, eta $b \neq 0$ denean $(0, b)$ eta $(-\frac{b}{a}, 0)$ izango dira ardatzetako ebaki-puntuak; ikus 2.2 eta 2.3 irudiak.



2.1 irudia. Zuzen horizontalak eta bertikalak.



2.2 irudia. $y = ax$ motako zuzenak.

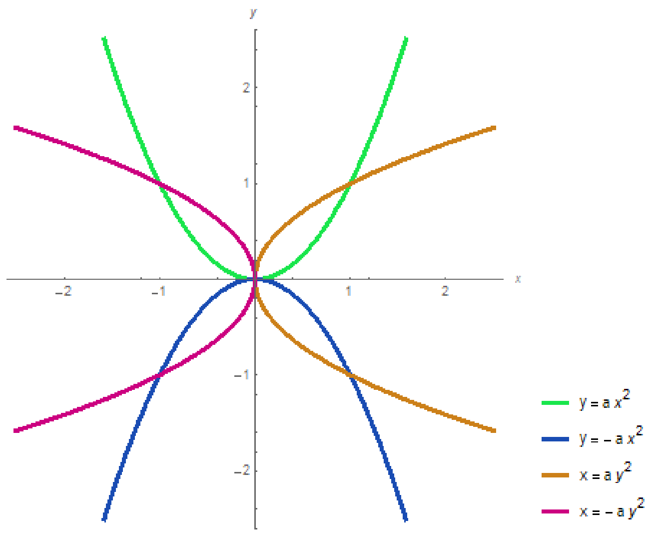


2.3 irudia. $y = ax + b$ motako zuzenak, $b \neq 0$ izanik.

Parabolak

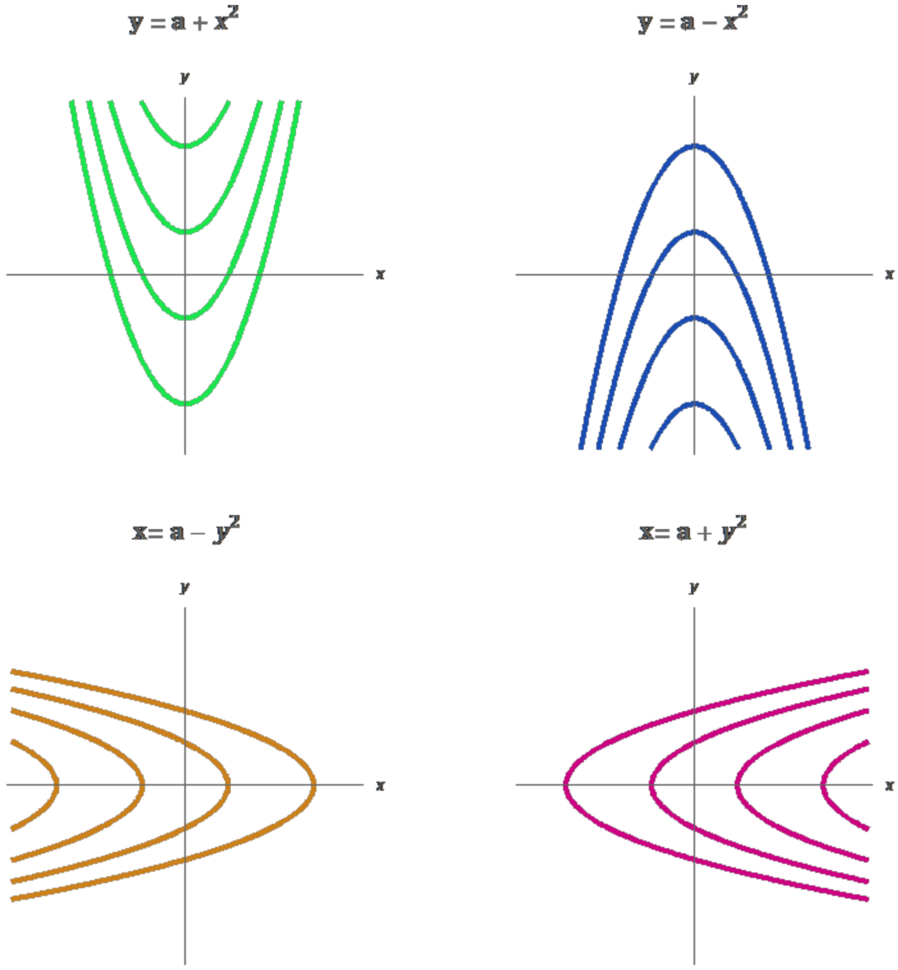
Ardatz bertikaleko parabola baten ekuazioa $y = ax^2 + bx + c$ da, $a, b, c \in \mathbb{R}$ izanik. Parabolaren ardatza horizontala denean, bere ekuazioa $x = ay^2 + by + c$ da, $a, b, c \in \mathbb{R}$ izanik.

Parabolaren erpina jatorria denean ($(0, 0)$ puntua) eta parabola OY ardatzarekiko simetrikoa denean, bere ekuazioa $y = ax^2$ da. Aldiz, parabolaren erpina jatorria izanik parabola OX ardatzarekiko simetrikoa denean, bere ekuazioa $x = ay^2$ da. Ikus 2.4 irudia.

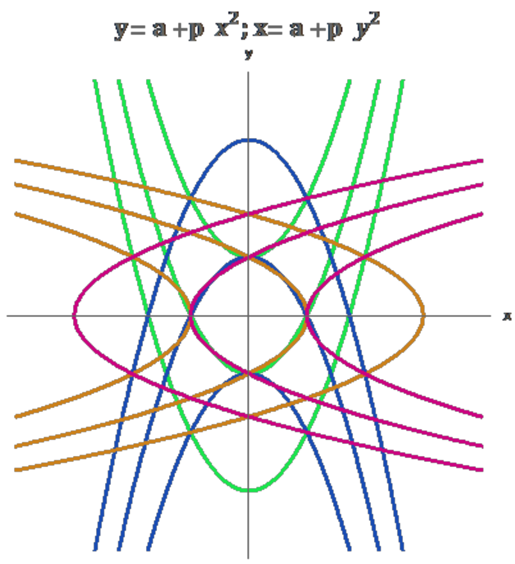


2.4 irudia. $y = ax^2$ eta $x = ay^2$ motako parabolak.

Parabolaren erpina jatorria ez denean, $y = ax^2 + c$ (ardatz bertikala) edo $x = ay^2 + c$ da haren ekuazioa; ikus 2.5 eta 2.6 irudiak.



2.5 irudia. Parabola bertikal eta horizontalak, erpina jatorria ez denean (banaka).

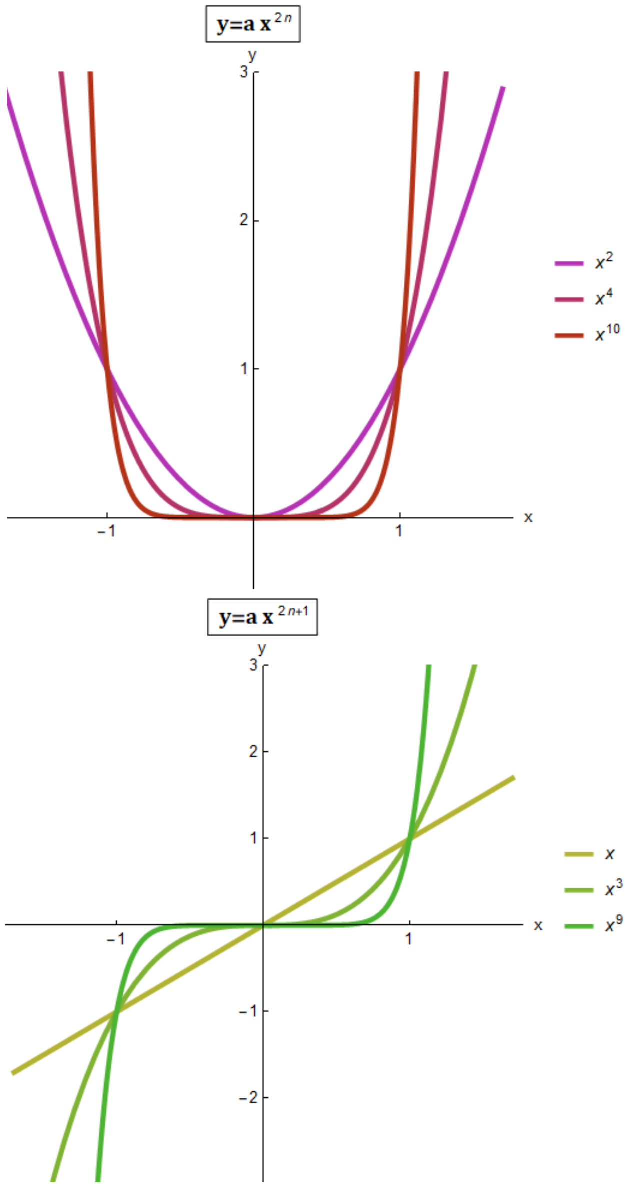


2.6 irudia. Parabola bertikal eta horizontalak, erpina jatorria ez denean (batera).

Funtzio potentzialak

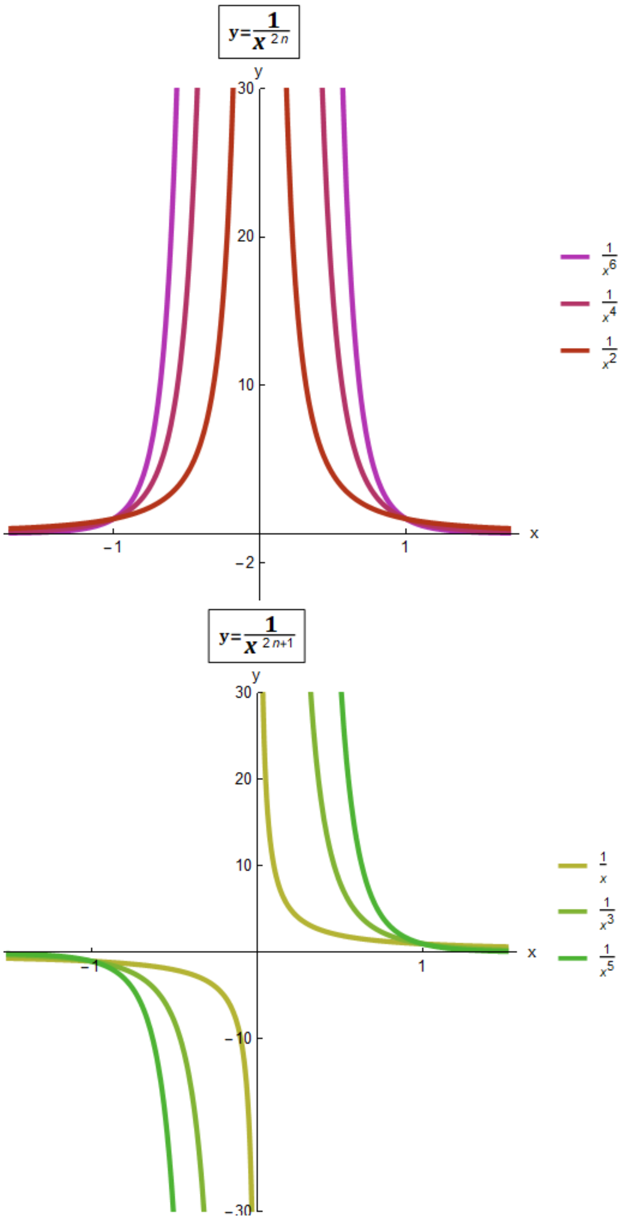
Funtzio potentzial deritzo $y = x^m$ motako funtzioari, m zenbaki osoa izanik, $m \in \mathbb{Z}$. m berretzailea positiboa denean, berretzaile positiboko funtzio potentzialak ditugu; m negatiboa denean, berretzaile negatibokoak.

m positiboa eta bikoitia denean, $y = x^{2n}$ funtzio potentziala daukagu, eta m positiboa eta bakoitia denean, $y = x^{2n+1}$ motakoa, $n \in \mathbb{N}$ izanik. Eta bi funtzio horien ezaugarriak eta irudiak ezberdinak dira; ikus 2.7 irudia.



2.7 irudia. Funtzio potentzialak, berretzaile positiboa.

Berretzaile negatiboko funtzio potentzialak ere honako era honetan idazten dira, m bikoitia edo bakoitia den kontuan hartuz: $y = \frac{1}{x^{2n}}$ eta $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$. Funtzio horien ezaugarriak ere ezberdinak dira; ikus 2.8 irudia.

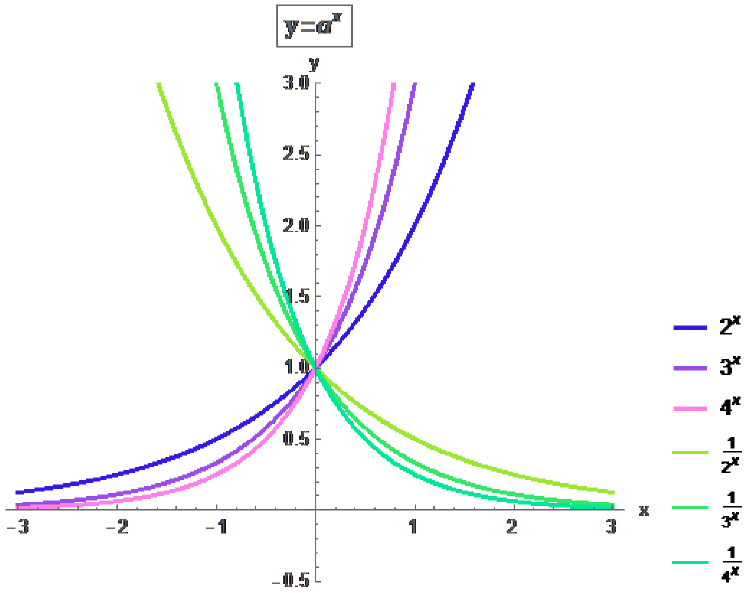


2.8 irudia. Funtzio potentzialak, berretzaile negatiboa.

2.1.2 Funtzio traszendentalak

Funtzio esponentzialak

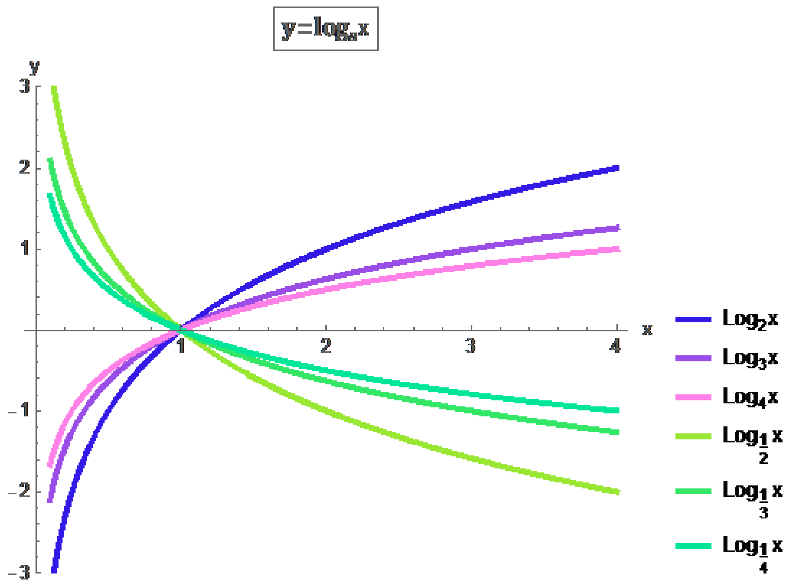
Funtzio esponentzial deritzo $y = a^x$ motako funtzioari, $a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ baita. a zenbakiari *oinarri* deitzen zaio. Funtzio esponentziala beti da positiboa, eta bere grafikoa ezberdina da $a > 1$ edo $a < 1$ kasuen arabera; ikus 2.9 irudia. Funtzio esponentzialen kasu berezia $a = \exp = 2.718281...$ da.



2.9 irudia. Funtzio esponentzialak.

Funtzio logaritmikoak

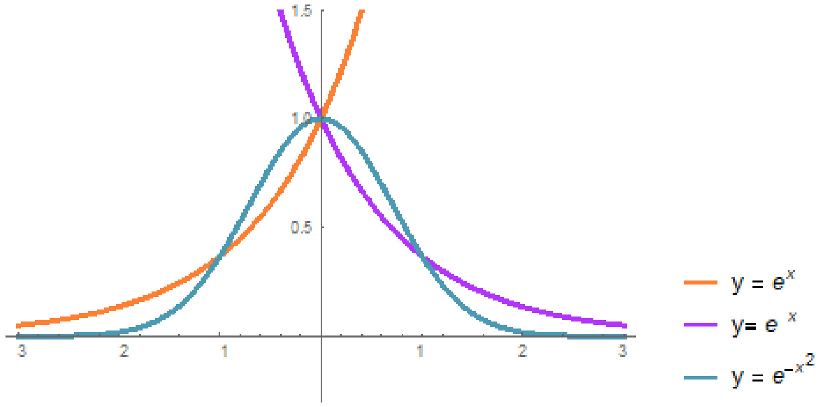
n zenbaki positibo baten a oinarriko logaritmoa z dela esaten da, honako berdintza hau betetzen bada: $\log_a n = z \Longleftrightarrow a^z = n$. *Funtzio logaritmiko* deritzo $y = \log_a x$ motako funtzioari. Kasu berezia logaritmo nepertarra da, non $a = \exp$ baita. Funtzio logaritmikoak ez dira existitzen zenbaki negatiboentzat. Eta a oinarriaren balioaren arabera bere grafikoa ezberdina da ($a > 1$ edo $a < 1$ kasuen arabera); ikus 2.10 irudia.



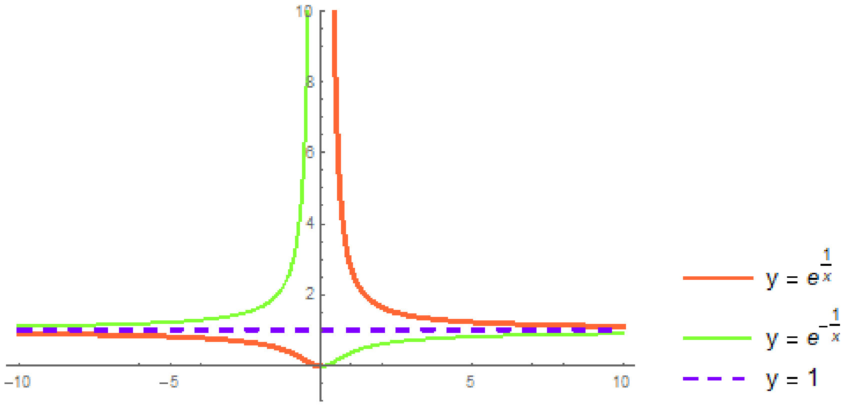
2.10 irudia. Funtzio logaritmikoak.

Oinarri naturaleko funtzio esponentziala

Oinarri naturaleko funtzio esponentzial deritzo $y = e^{f(x)}$ motako funtzioari. Berdinak dira funtzio esponentzialaren domeinua eta $f(x)$ funtzioarena; ikus 2.11 eta 2.12 irudiak.



2.11 irudia. Oinarri naturaleko funtzio esponentzialak.



2.12 irudia. Zenbait puntutan definitu gabeko oinarri naturaleko funtzio esponentzialak.

Funtzio hiperbolikoak

Funtzio hiperbolikoak funtzio esponentzialetan dute oinarria. Honako hauek dira funtzio hiperbolikoak:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{2.2}$$

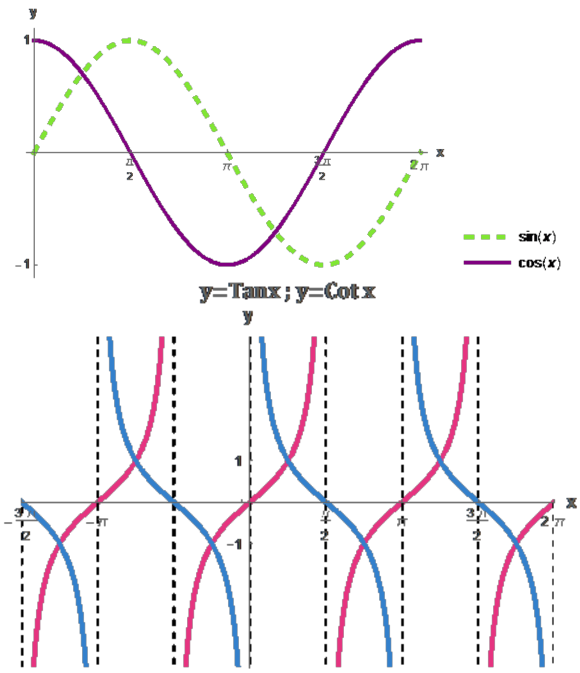
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{2.3}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \tag{2.4}$$

2.1.3 Funtzio trigonometrikoak

Oinarrizko funtzio trigonometrikoak

Oinarrizko funtzio trigonometrikoak dira $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ eta $y = \cot x$. Ikus 2.13 irudia.

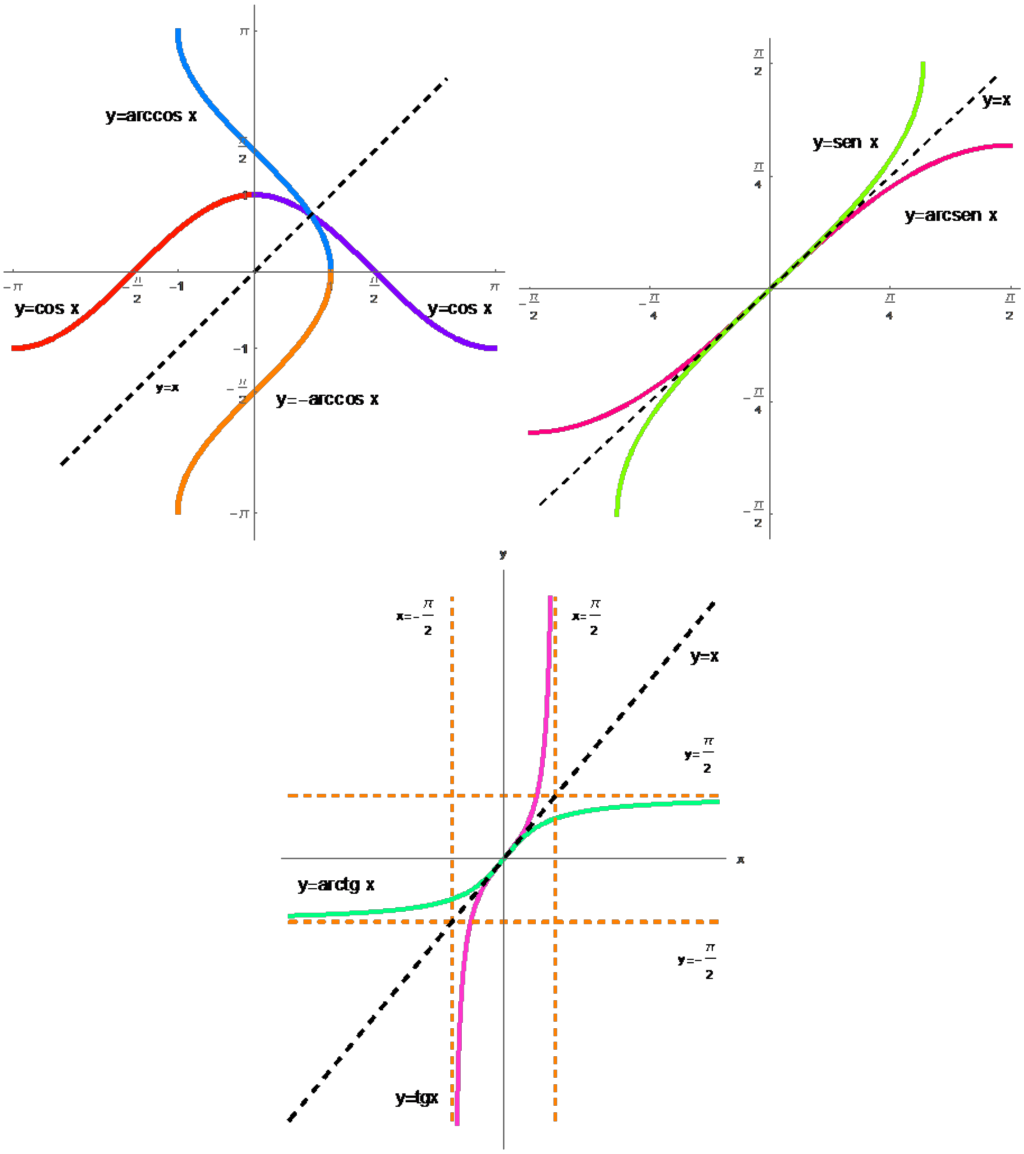


2.13 irudia. Funtzio trigonometrikoak.

Oinarrizko funtzio trigonometrikoen alderantzizkoak

$y = \cos x$ funtzioa injektiboa da $[0, \pi]$ tartean. Eta tarte horretan $y = \arccos x$ da bere alderantzizkoa. $y = \cos x$ funtzioa $[-\pi, 0]$ tartean ere injektiboa da, eta tarte horretan definituta dagoenean bere alderantzizkoa $y = -\arccos x$ da. Ikus 2.14 irudia.

Arrazonamendu bera erabil daiteke $y = \sin x$ eta $y = \tan x$ funtzioen alderantzizkoak definitzeko. Funtzio horiek injektiboak dira $[-\pi/2, \pi/2]$ tartean, eta tarte horretan haien alderantzizkoak existitu egingo dira. Hain zuzen, $y = \arcsin x$ eta $y = \arctan x$ funtzioak. Ikus 2.14 irudia.



2.14 irudia. Funtzio trigonometrikoen alderantzizkoak.

Konstanteen eragina funtzio trigonometrikoetan

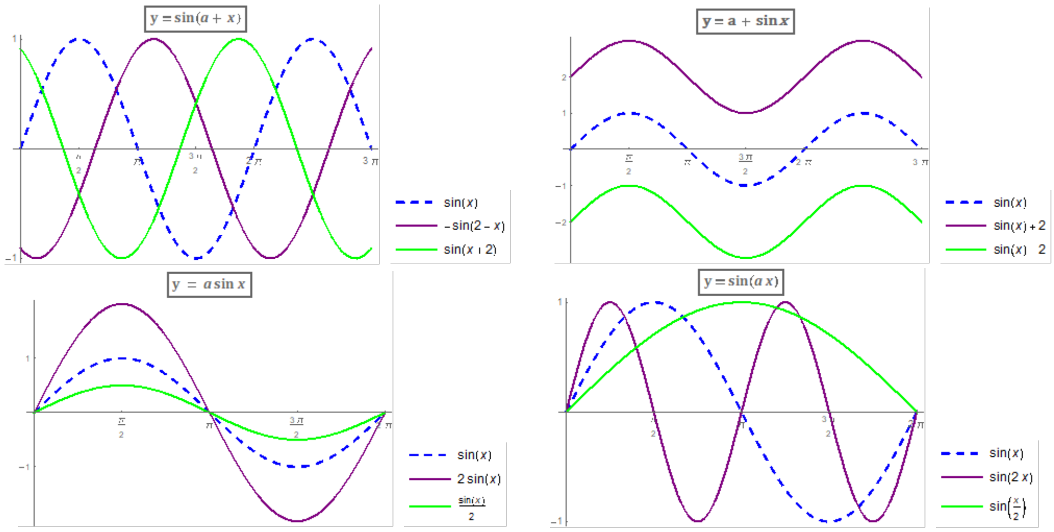
Oinarrizko funtzio trigonometrikoetan eransten diren konstanteen eragina aztertuko dugu ondoren.

- Angeluari a konstante bat gehitzen zaionean, funtzioaren grafikoa OX ardatzean a kantitatea desplazatzen da. Hau da, adibidez $y = \sin x$ funtzioko angeluari a kantitatea gehitzen bazaio, $y = \sin(a+x)$ funtzioa daukagu. Eta bigarren funtzio horren grafikoa izango da lehenengo grafikoa a kantitatea desplazatuz lortzen dena; ikus 2.15.

- Funtzioari konstante bat gehitzean (adibidez $y = \sin x + b$), funtzioa $y = b$ kantitatea desplazatzen da OY ardatzean.

- Funtzioa konstante batez biderkatzen denean, uhinaren anplitudea aldatu egiten da. Horrela, $a > 1$ zenbaki batez biderkatzen dugunean, anplitudea handitu egiten da, eta $0 < a < 1$ zenbakiaz biderkatzean anplitudea txikitu egiten da.

- Funtzioaren angelua konstante batez biderkatzean, uhinaren frekuentzia ere konstante horretaz biderkatzen da.



2.15 irudia. Konstanteen eragina funtzio trigonometrikoetan.

2.2 Funtzio inplizituen adierazpide grafikoa

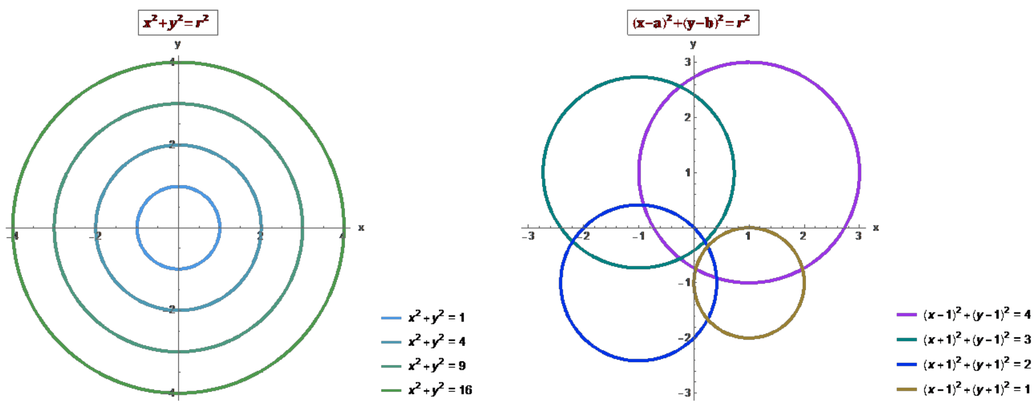
Atal honetan, zirkunferentziak, elipseak eta hiperbolak aztertuko ditugu.

2.2.1 Zirkunferentziak

Honako hau da (a, b) zentrodun eta r erradiodun zirkunferentziaren ekuazioa:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Ikus zirkunferentzien zenbait adibide 2.16 irudian.



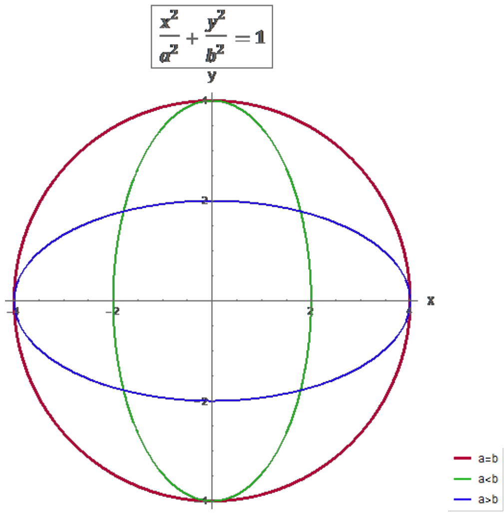
2.16 irudia. Zirkunferentziak.

2.2.2 Elipseak

Jatorrian zentratutako, eta a eta b ardatzerdiak dituen elipsearen ekuazioa honako hau da:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ikus elipseen zenbait adibide 2.17 irudian.



2.17 irudia. Elipseak.

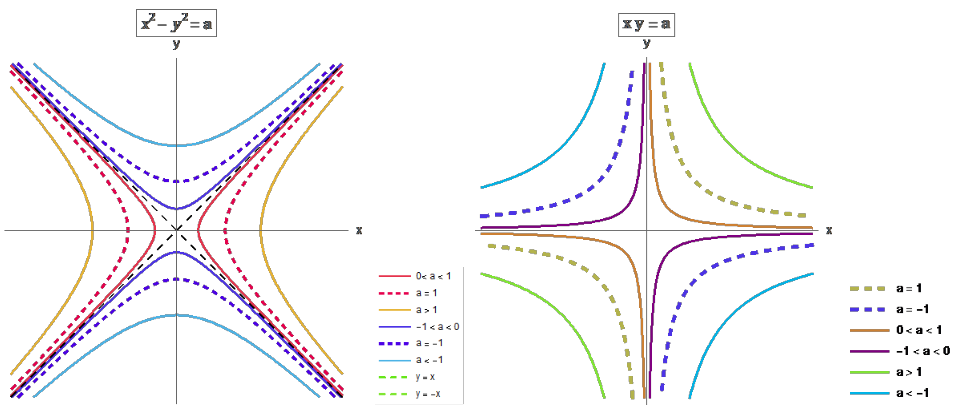
2.2.3 Hiperbolak

Jatorrian zentroa duen eta foku-ardatza $y = 0$ zuzena duen hiperbola baten ekuazioa honako hau da:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bi ardatzekiko simetrikoa da, eta $x = \pm by$ asintota bertikalak ditu.

$xy = a$ ekuaziodun hiperbolei *hiperbola aldekide* deritze. Ikus hiperbolen zenbait adibide 2.18 irudian.



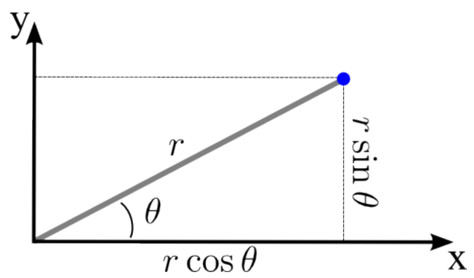
2.18 irudia. Hiperbolak.

2.3 Koordenatu polarretan emandako funtzioen adierazpide grafikoa

Ardatz koordenatu errektangeluarreko bi dimentsioko sistema batean, edozein puntu $P(x, y)$ guztiz zehaztuta geratzen da bere koordenatu kartesiarren bidez. Koordenatu kartesiarrak P puntuaren ardatzetako proiekzioak dira. P puntu hau guztiz zehaztuta geratzen da, (ρ, θ) bere koordenatu polarren bidez ere; $\rho > 0$ balioa P puntutik koordenatu jatorrira dagoen distantzia izanik eta θ angelua $\overrightarrow{OP}$ bektoreak OX ardatzaren alde positiboarekin osatzen duen angelua izanik. Koordenatu kartesiarren eta polarren arteko erlazioa honako hau da:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \text{ eta } \theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$\theta \in [-\pi, \pi]$ izanik.



2.19 irudia. Puntu baten koordenatu polarrak planoan.

Koordenatu polarretan emandako kurba baten adierazpide grafikoa egitea (ρ, θ) koordenatuen bidez emanda dauden puntuak OXY planoan irudikatzea da, $\rho = f(\theta)$ izanik, eta:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

Koordenatu-jatorriari *polo* deritzo, eta OX ardatzaren alde positiboari *ardatz polar* deitzen zaio.

Koordenatu polarretan emandako funtzio baten periodoa T da, honako bi baldintza hauek betetzen badira:

$$\begin{cases} x(\theta + T) = x(\theta), \\ y(\theta + T) = y(\theta). \end{cases}$$

Edo goiko adierazpenen baliokideak diren honako bi adierazpen hauek betetzen badira:

$$\begin{cases} \rho(\theta + T)\cos(\theta + T) = \rho(\theta)\cos(\theta), \\ \rho(\theta + T)\sin(\theta + T) = \rho(\theta)\sin(\theta). \end{cases}$$

Horrela, $\rho(\theta)$ funtzioaren periodoa T_1 baldin bada, $x(\theta+T) = x(\theta)$ eta $y(\theta+T) = y(\theta)$ berdintzak bete daitezen, T periodoa T_1 eta 2π zenbakien multiploa izan beharko da.

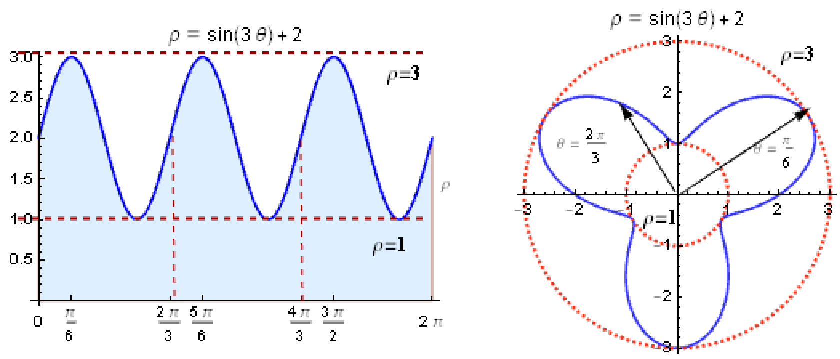
Ohartu $\rho = f(\theta)$ funtzioak balio negatiboak har ditzakeela. Berdintza hauek kontuan izanik:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) = -\rho(\theta)\cos(\theta+\pi), \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) = -\rho(\theta)\sin(\theta+\pi), \end{cases}$$

$\rho = f(\theta) < 0$ duen (ρ, θ) puntua $(-\rho, \theta+\pi)$ bezala adieraziko da planoan.

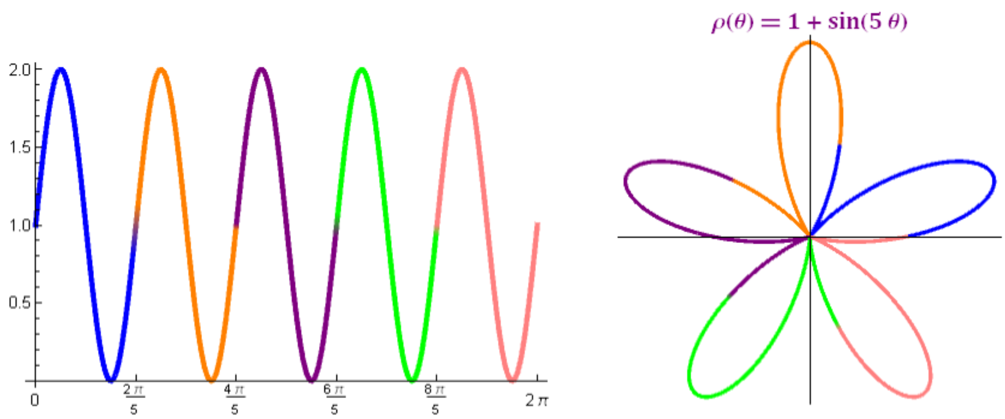
Adibideak

2.1 adibidea. Koordenatu polarretan emandako $\rho(\theta) = 2+\sin(3\theta)$ funtzioaren adierazpen grafikoaren itxura zehazteko, $\rho(\theta)$ irudika dezakegu OXY ardatzetan; OX ardatza erabiliko dugu θ aldagaiarentzat, eta OY ardatza ρ-rentzat. Horrela, $\rho(\theta)$ adierazpenean θ angeluari balioak emanez, funtzioaren grafikoa egin dezakegu. Adibide honetan ohartzen gara puntu batetik jatorrirainoko distantziak, hau da ρ aldagaiak, $[1, 3]$ tartean hartzen dituela balioak. Horrek esan nahi du, grafikoa koordenatu polarrak erabiliz marrazten dugunean, $\rho = 1$ eta $\rho = 3$ erradioko zirkunferentzien barnean eroriko dela.



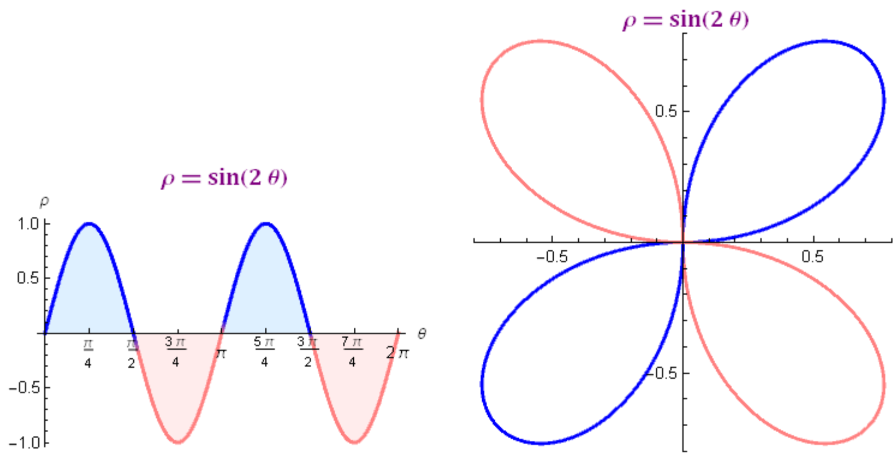
2.20 irudia. 2.1 adibidea.

2.2 adibidea. Koordenatu polarretan emandako $\rho(\theta) = 1+\sin(5\theta)$ funtzioaren adierazpen grafikoa ikus daiteke 2.21 irudian, koordenatu kartesiarretan eta koordenatu polarretan. $\rho(\theta)$ funtzioaren periodoa $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ da, eta grafikoa osatuta geratuko da $T = 3 \cdot T_1 = 2\pi$ betetzen denean.



2.21 irudia. 2.2 adibidea.

2.3 adibidea. Koordenatu polarretan emandako $\rho(\theta) = \sin(2\theta)$ funtzioaren adierazpen grafikoa ikus daiteke 2.22 irudian. Ohartu $\rho < 0$ dela $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ eta $\left[3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tarteko puntuak $\left[3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ tartean adieraziko dira plano polarrean; eta $\left[3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ tartekoak $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tartean adieraziko dira plano polarrean.



2.22 irudia. 2.3 adibidea.

Ondorengo ataletan, koordenatu polarretan emandako kurba batzuen adierazpen matematikoak eta grafikoak aztertuko ditugu.

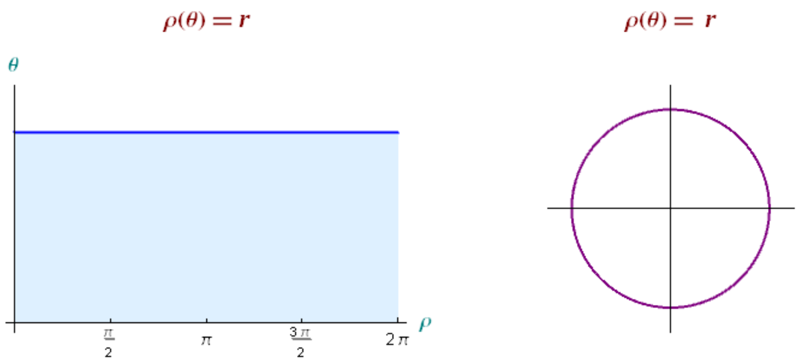
2.3.1 Zirkunferentziak

Aurretik ikusi dugu (a, b) zentrodun eta r erradiodun zirkunferentziaren ekuazioa honako hau dela:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

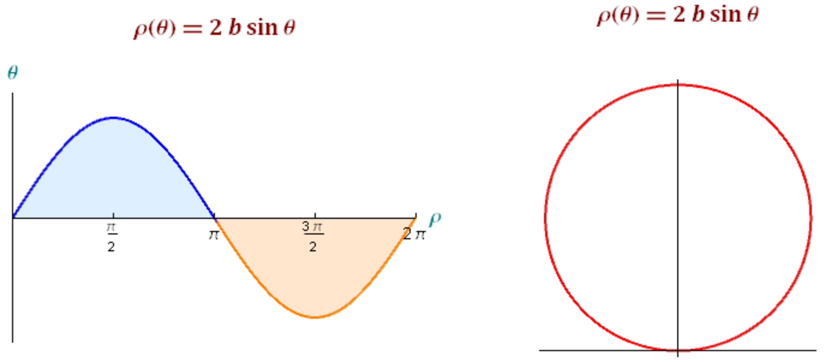
Zirkunferentziaren ekuazio polarra lortzen da $x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta)$ eta $y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta)$ adierazpenak bertan ordezkatuta.

- Zentroa jatorrian duen, $(a, b) = (0, 0)$, eta r erradiodun zirkunferentziaren ekuazioa $x^2 + y^2 = r^2$ da koordenatu kartesiarretan, eta koordenatu polarretan $\rho(\theta) = r$. Ikus 2.23 irudia.



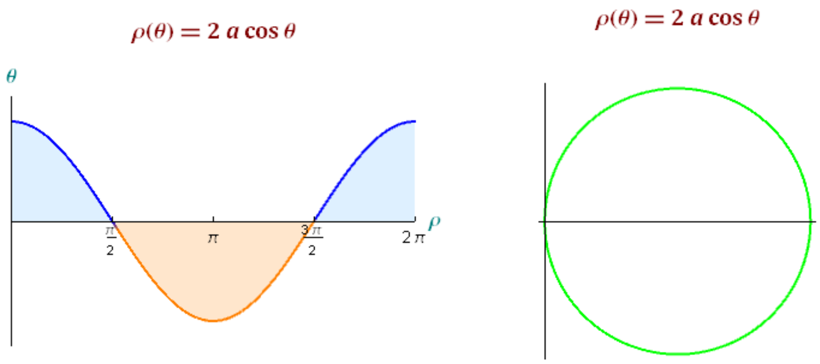
2.23 irudia. Zentroa jatorrian duen zirkunferentzia.

- $(a, b) = (0, b)$ zentrodun eta $r = b$ erradiodun zirkunferentziaren ekuazioa koordenatu kartesiarretan $x^2 + (y - b)^2 = b^2$ da, eta polarretan $\rho(\theta) = 2b \sin\theta$. Ikus 2.24 irudia.



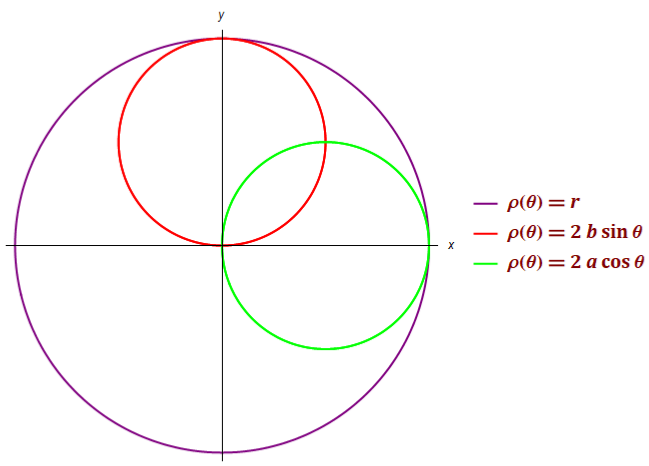
2.24 irudia. Zentroa $(0, b)$ puntuan duen zirkunferentzia.

- $(a, b) = (a, 0)$ zentrodun eta $r = a$ erradiodun zirkunferentziaren ekuazioa $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ da koordenatu kartesiarretan, eta polarretan $\rho(\theta) = 2a \cos\theta$. Ikus 2.25 irudia.



2.25 irudia. Zentroa $(a, 0)$ puntuan duen zirkunferentzia.

Kasu horiek guztiak batera irudikatu dira 2.26 irudian.



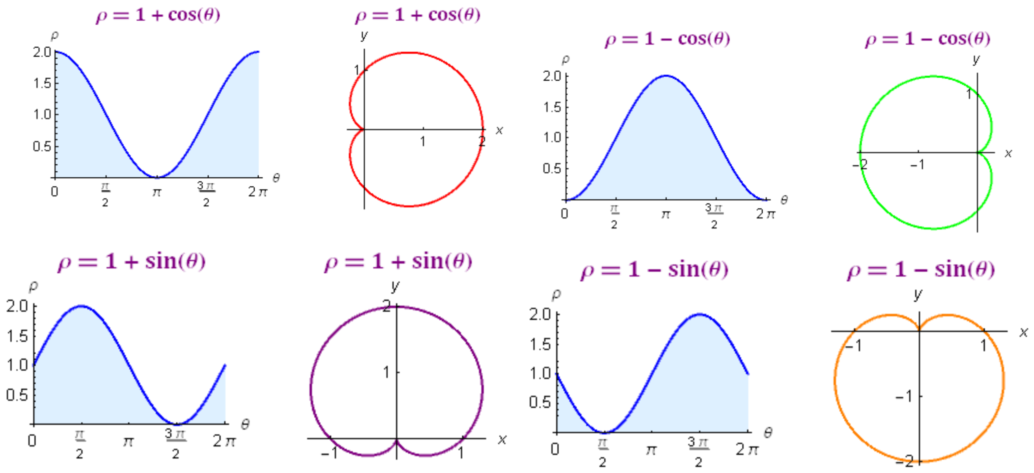
2.26 irudia. Zentro ezberdineko zirkunferentziak.

2.3.2 Kardioideak

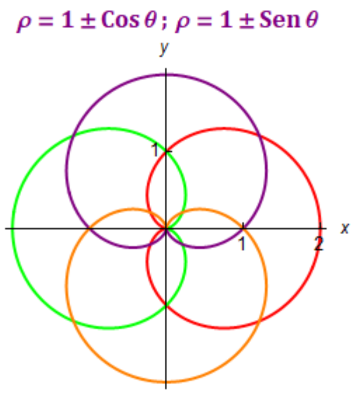
Kardioidearen ekuazioak honako hauek dira koordenatu polarretan:

$$\rho = a(1 \pm \cos\theta)\ \text{edo}\rho = a(1 \pm \sin\theta). \tag{2.6}$$

Ikus 2.27 eta 2.28 irudiak.



2.27 irudia. Kardioideak.



2.28 irudia. Kardioide ezberdinak batera.

2.3.3 Pseudokardioideak: Pascalen karakola

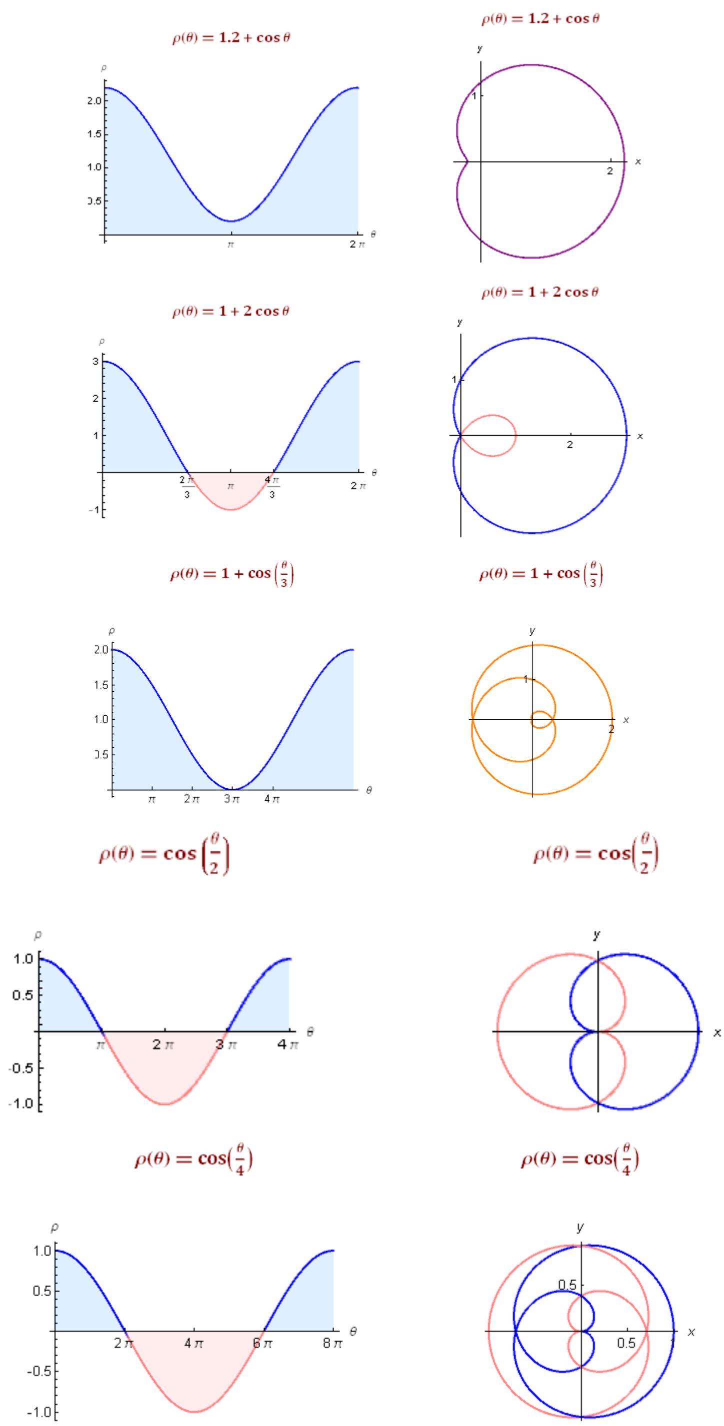
Pascalen karakolaren ekuazioa honako hau da koordenatu kartesiarretan:

$$\left(-2ax + x^2 + y^2\right)^2 = b^2(x^2 + y^2). \tag{2.7}$$

Eta koordenatu polarretan honela idazten da:

$$\rho = b + 2a\cos\theta. \tag{2.8}$$

Ikus 2.29 irudia.



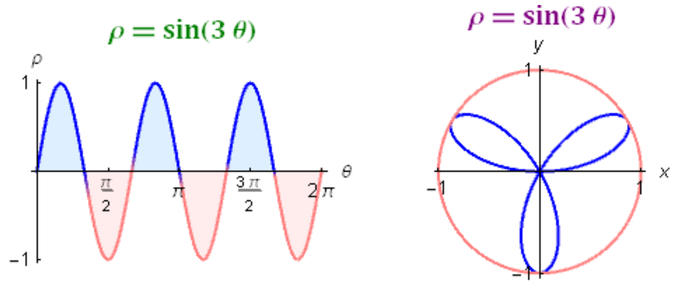
2.29 irudia. Pseudokardioideak.

2.3.4 Errosazeak

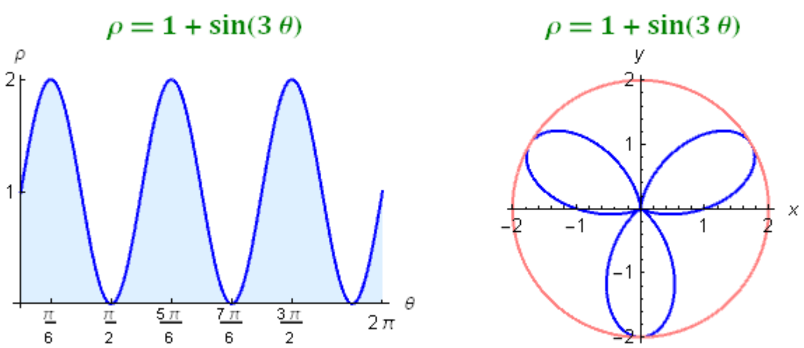
Errosazeen ekuazioak koordenatu polarretan honako hauek dira:

$$\rho = a + b\sin(n\theta) \text{ edo } \rho = a + b\sin(n\theta), \tag{2.9}$$

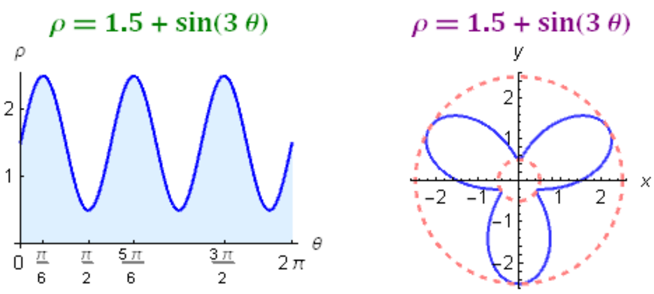
n zenbaki arrunta izanik. Ikus n bakoitia den kasuan lortzen diren errosazea ezberdinen grafikoak (2.30, 2.31, 2.32 eta 2.33 irudiak) eta n bikoitia denean lortzen direnak (2.34, 2.35, 2.36 eta 2.37 irudiak).



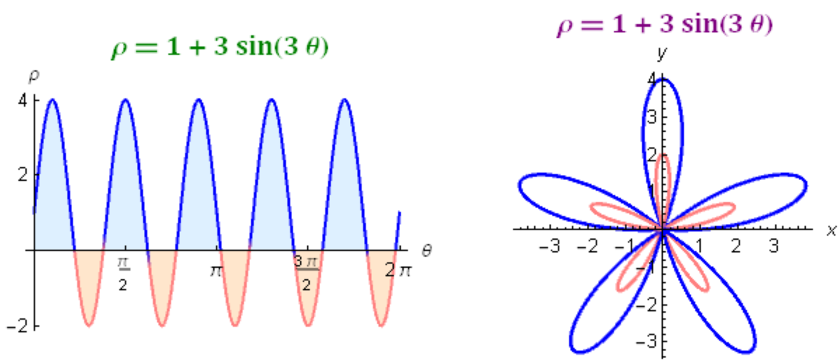
2.30 irudia. Errosazea: n bakoitia, $a = 0$, $b = 1$.



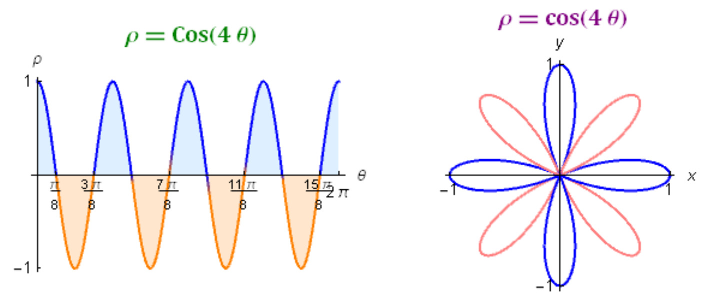
2.31 irudia. Errosazea: n bakoitia, $0 < a = b$.



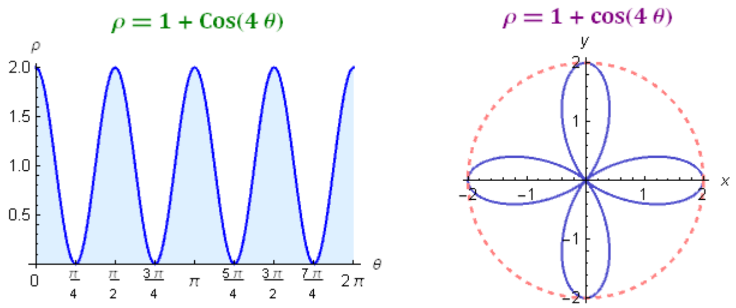
2.32 irudia. Errosazea: n bakoitia, $a > b > 0$.



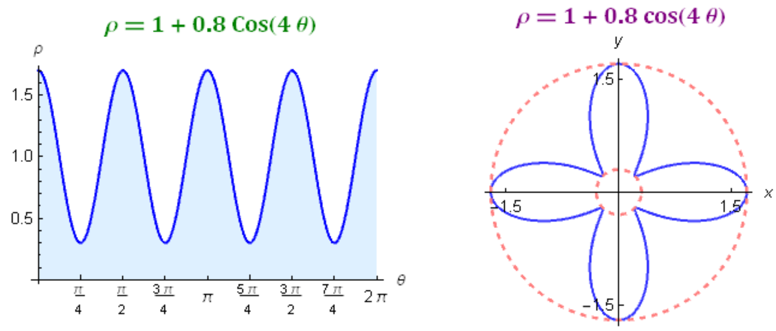
2.33 irudia. Errosazea: n bakoitia, $0 < a < b$.



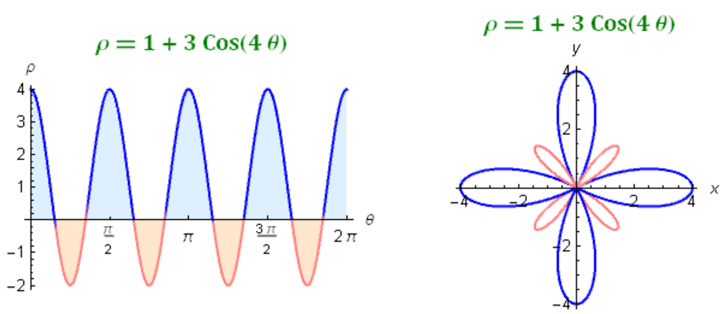
2.34 irudia. Errosazea: n bikoitia, $a = 0$, $b = 1$.



2.35 irudia. Errosazea: n bikoitia, $0 < a = b$.



2.36 irudia. Errosazea: n bikoitia, $a > b > 0$.



2.37 irudia. Errosazea: n bikoitia, $0 < a < b$.

2.3.5 Lemniskatak

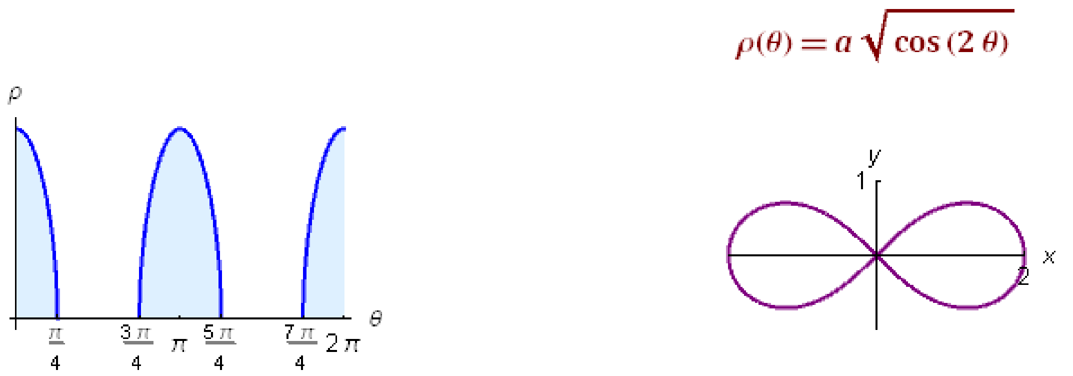
Mota ezberdinetako lemniskatak daude. Honako hau da Bernouilli-ren lemniskataren ekuazioa koordenatu kartesiarretan:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right). \tag{2.10}$$

Eta koordenatu polarretan honako hau daukagu:

$$\rho(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}. \tag{2.11}$$

Ikus 2.38 irudia.



2.38 irudia. Lemniskata.

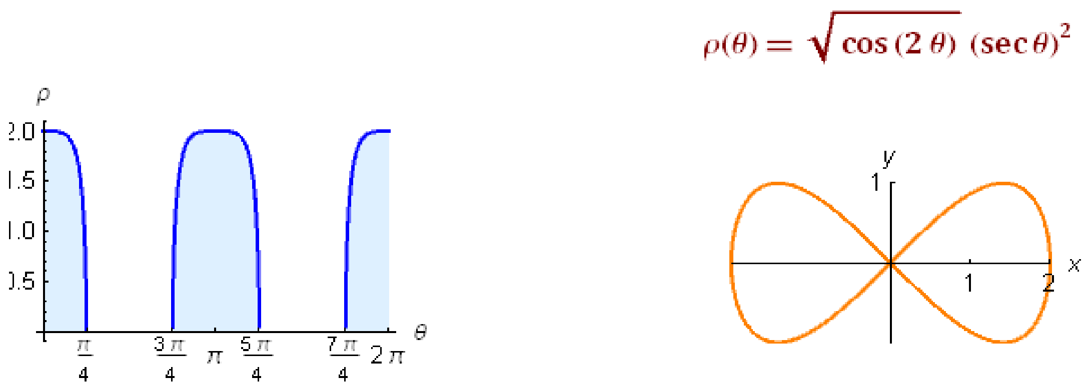
Aldiz, Garonoren lemniskataren ekuazioa koordenatu kartesiarretan honako hau da:

$$x^4 = a^2\left(x^2-y^2\right). \tag{2.12}$$

Eta koordenatu polarretan honako era honetan idazten da:

$$\rho(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\,(\sec\theta)^2. \tag{2.13}$$

Ikus 2.39 irudia.



2.39 irudia. Garonoren lemniskata.

2.3.6 Estrafoidea

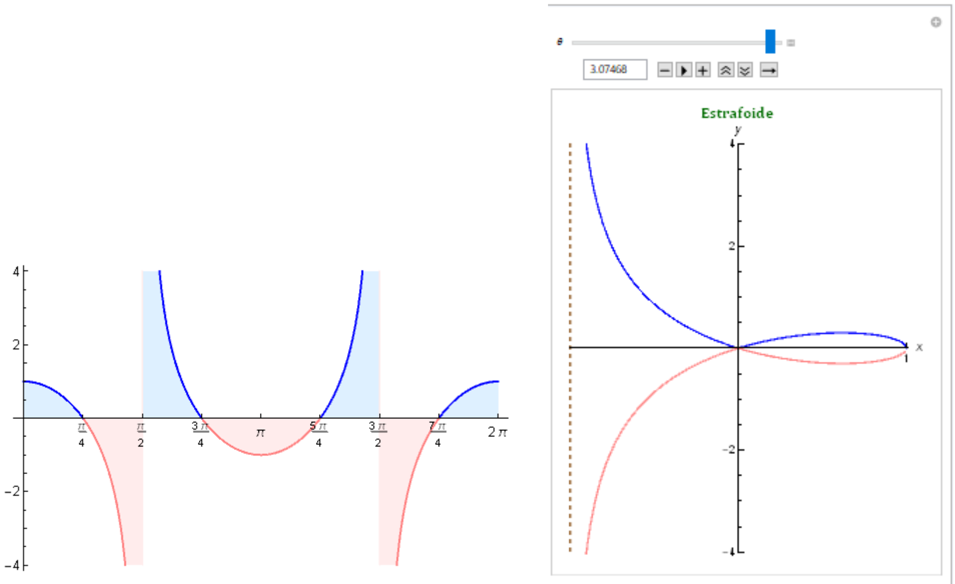
Estrafoidearen ekuazioa koordenatu kartesiarretan honako hau da:

$$y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}. \tag{2.14}$$

Eta koordenatu polarretan honako hau daukagu:

$$\rho(\theta) = a \cos(2\theta) \sec\theta. \tag{2.15}$$

Ikus 2.40 irudia.



2.40 irudia. Estrafoidea.

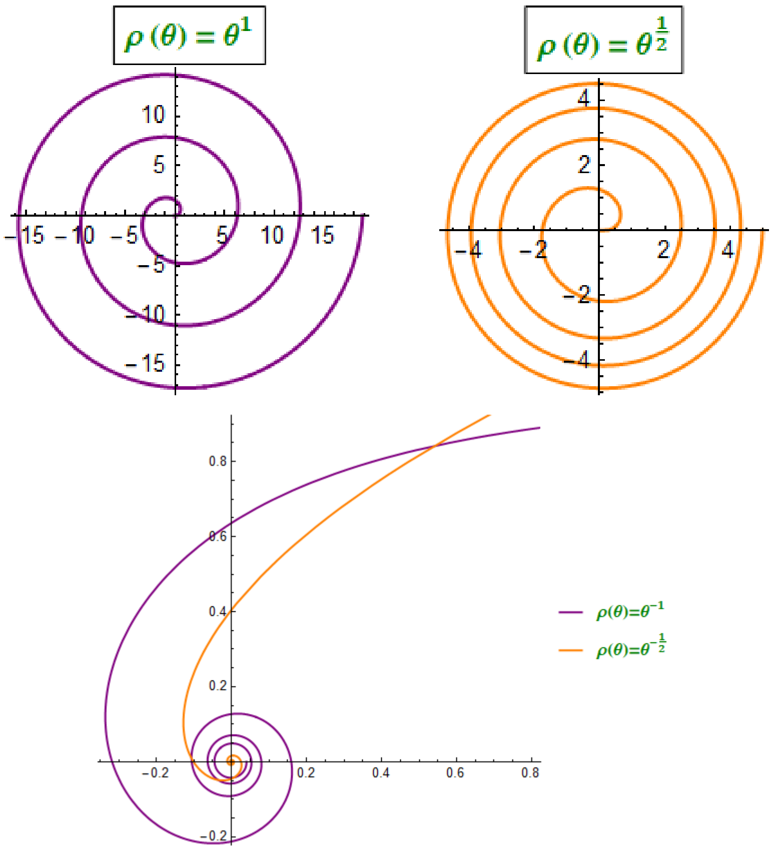
2.3.7 Espiralak

Mota ezberdinetako espiralak daude:

- Arkimedesen-en espirala honako era honetan emana dator koordenatu polarretan:

  $$\rho(\theta) = a + b\theta^m. \tag{2.16}$$

  Ikus 2.41 irudia.

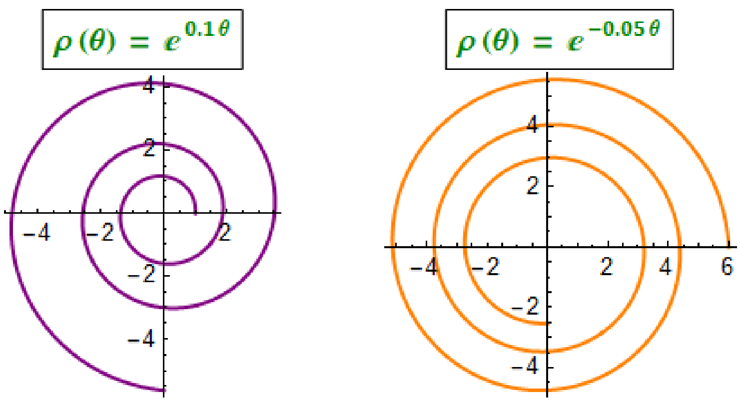


2.41 irudia. Arkimedesen espiralak.

- Espiral logaritmikoa honako era honetan emana dator koordenatu polarretan:

$$\rho(\theta) = a + e^{b\theta}. \tag{2.17}$$

  Ikus 2.42 irudia.

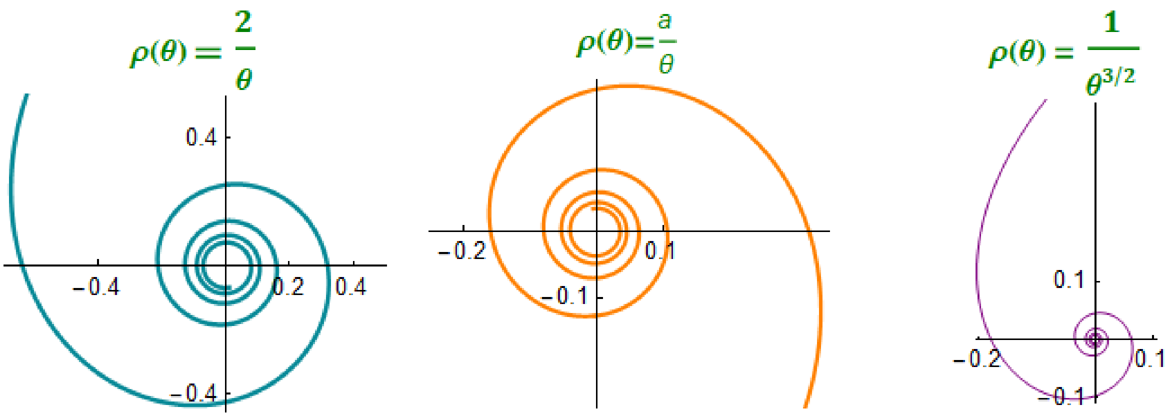


2.42 irudia. Espiral logaritmikoa.

- Alderantzizko espirala honako era honetan emana dator koordenatu polarretan:

$$\rho(\theta) = \frac{a}{\theta}. \tag{2.18}$$

Ikus 2.43 irudia.

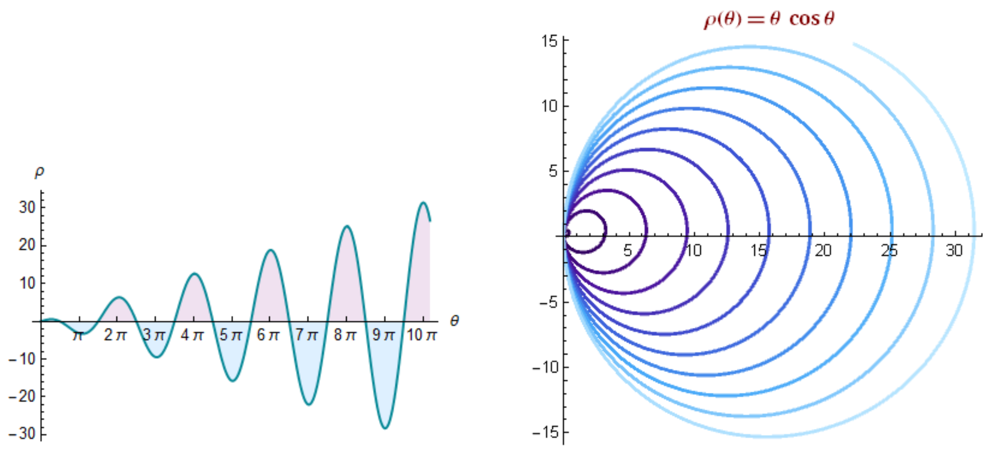


2.43 irudia. Alderantzizko espirala.

- Espiral zirkularra honako era honetan emana dator koordenatu polarretan:

$$\rho(\theta) = \theta \cos\theta. \tag{2.19}$$

Ikus 2.44 irudia.



2.44 irudia. Espiral zirkularra.

2.4 Koordenatu parametrikoetan emandako funtzioen adierazpide grafikoa

Koordenatu parametrikoetan emandako kurba bat edozein puntu $P(x, y)$ OXY plano kartesiarrean adieraztea da, $x = x(t)$ eta $y = y(t)$ izanik, eta t aldagaia $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioen domeinuko puntua izanik. Aldagai horri *parametro* deritzo.

$y = f(x)$ funtzio esplizitua beti idatz daiteke koordenatu parametrikoetan. Horretarako, nahikoa da honako hau egitea:

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = f(x(t)) = f(t). \end{cases} \tag{2.20}$$

Kordenatu polarretan emandako $\rho = f(\theta)$ funtzioa honako era honetan idatz daiteke koordenatu parametrikoetan:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta. \end{cases} \tag{2.21}$$

Koordenatu parametrikoetan emandako funtzio baten periodoa $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioen periodoen multiplo komunetako txikiena da, eta, beraz, honako bi berdintza hauek beteko dira:

$$\begin{cases} x(t) = x(t+T) \\ y(t) = y(t+T) \end{cases}$$

T periodoa izanik.

Ondorengo ataletan, koordenatu parametrikoetan emandako kurba batzuen adierazpen matematikoak eta grafikoak aztertuko ditugu.

2.4.1 Zirkunferentziak

(a, b) zentrodun eta r erradiodun zirkunferentzia honako era honetan ematen da koordenatu parametrikoetan:

$$\begin{cases} x(t) = a + r\cos t, \\ y(t) = b + r\sin t. \end{cases} \tag{2.22}$$

2.4.2 Elipseak

(x_0, y_0) zentrodun, eta a eta b ardatzerdiak dituen elipsearen ekuazio parametrikoak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + a\cos t, \\ y(t) = y_0 + b\sin t. \end{cases} \tag{2.23}$$

2.4.3 Astroidea

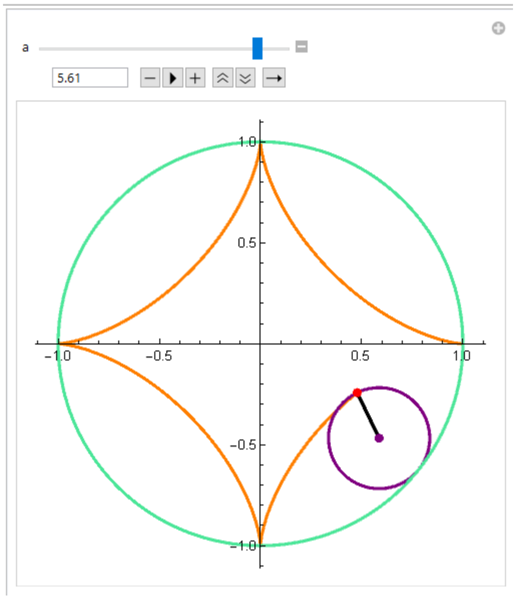
Astroide deritzo zirkunferentzia bateko (zirkunferentzia sortzailea) P puntu bat $r = a$ erradioko beste zirkunferentzia baten barruan zehar higitzen denean (zirkunferentzia gidatzailea) sortzen duen ibilbideari. Honako hau da astroidearen ekuazioa koordenatu kartesiarretan:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \tag{2.24}$$

Eta haren ekuazio parametrikoak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t, \\ y(t) = \sin^3 t. \end{cases} \tag{2.25}$$

Ikus 2.45 irudia.



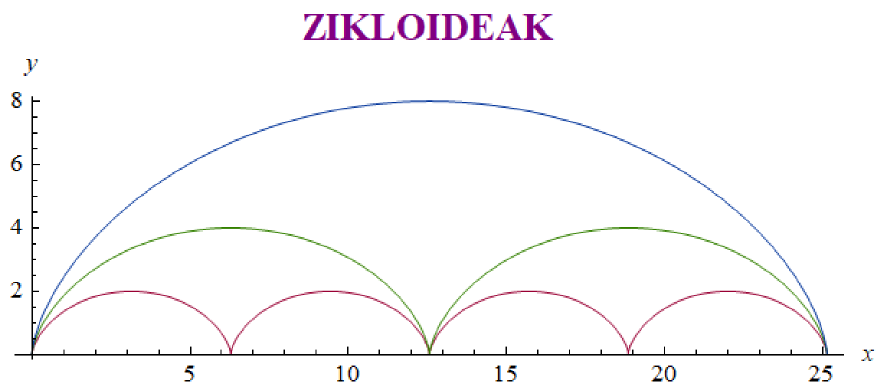
2.45 irudia. Astroidea.

2.4.4 Zikloidea

Zikloide deritzo r erradiodun zirkunferentzia bateko puntu batek biratzean sortzen duen kurbari. Haren ekuazio parametrikoak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x(t) = r\,(t - \sin t)\,, \\ y(t) = r\,(1 - \cos t)\,. \end{cases} \tag{2.26}$$

Ikus 2.46 irudia.



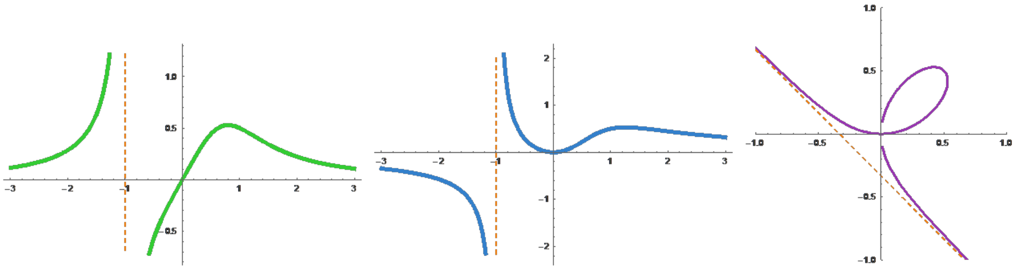
2.46 irudia. Zikloidea.

2.4.5 Descartesen foliuma

Descartesen foliumaren ekuazio parametrikoak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3}, \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Ikus 2.47 irudia.



2.47 irudia. Descartesen foliumak.

2.5 Ordenagailuko praktikak

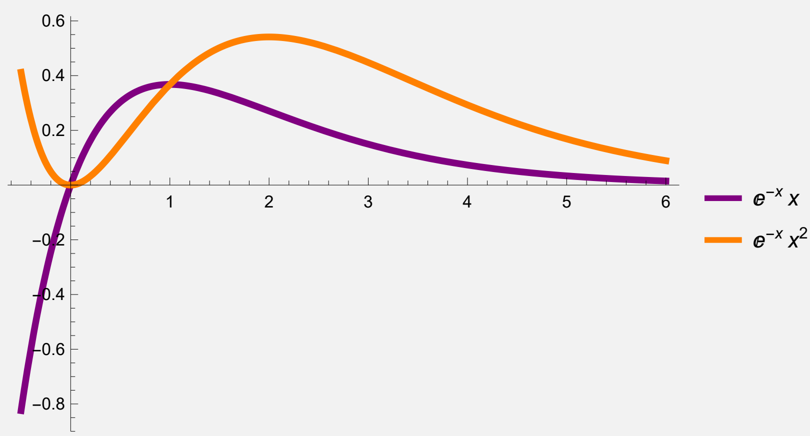
2.1 ariketa. Honako bi funtzio hauek emanik: $f_1(x) = xe^{-x}$ eta $f_2(x) = x^2e^{-x}$:

a) Irudikatu funtzioak grafiko berean. Erabili kolore ezberdina bakoitza irudikatzeko, eta izendatu grafiko bakoitza.

b) $x = 0$ puntutik, koloreztatu bi funtzioen ebaki-punturako tartea.

a) atala. Funtzioak definituko ditugu, eta haien adierazpen grafikoak egingo ditugu:

```
f1[x_] = x e^-x; f2[x_] = x^2 e^-x;

Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, -0.5, 6},
PlotStyle → {{Thickness[0.01], Purple}, {Thickness[0.01], Orange}},
PlotLegends → {f1[x], f2[x]}]
```



b) atala. Bi funtzioen arteko ebaki-puntuak kalkulatuko ditugu, eta eremu hori koloreztatuko dugu:

Solve[f1[x]==f2[x], x]

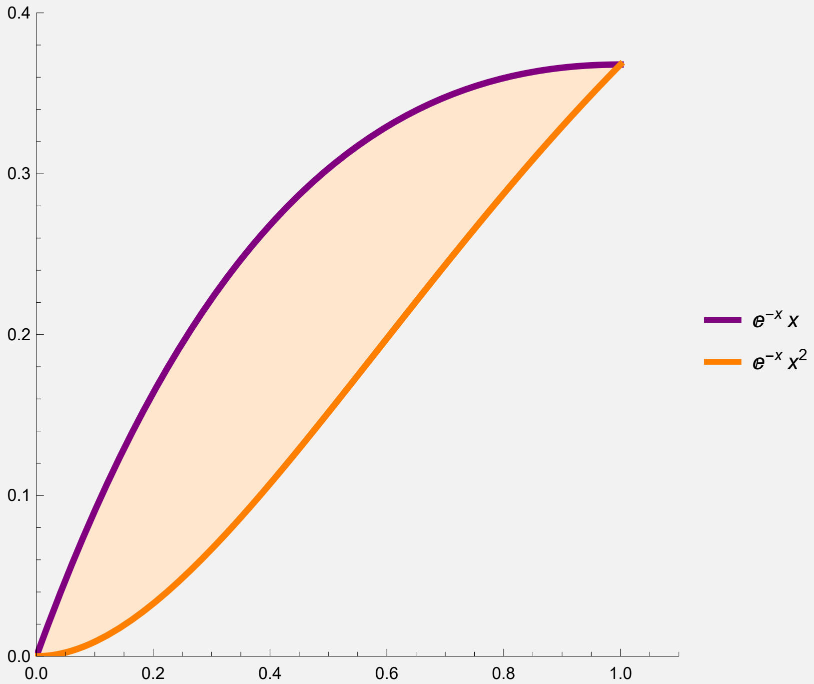
$\{\{x \to 0\}, \{x \to 1\}\}$

Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, 0, 1},

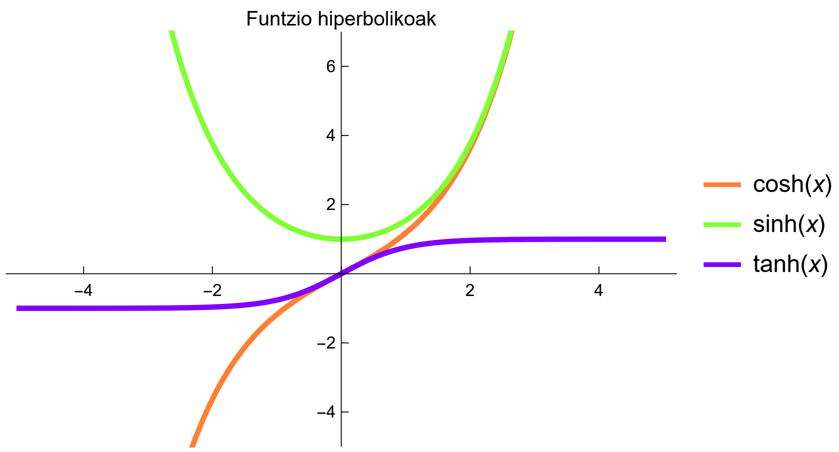
PlotStyle → {{Thickness[0.01], Purple}, {Thickness[0.01], Orange}},

PlotLegends → {f1[x], f2[x]}, PlotRange → {{0, 1.1}, {0, 0.4}},

AspectRatio → 1, Filling → {1 → {{2}, {LightOrange}}}]



2.2 ariketa. Idatzi honako grafiko hau lortzeko behar diren aginduak.



2.48 irudia. 2.2 ariketako irudia.

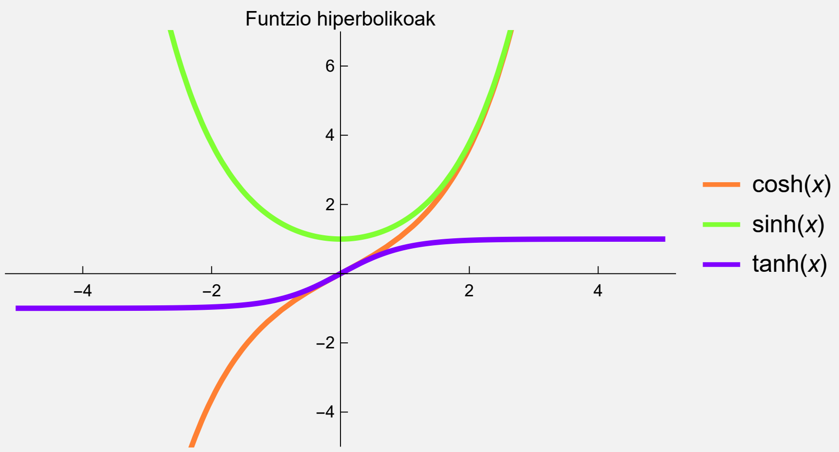
Funtzioak definituko ditugu, eta adierazpen grafikoa egingo dugu:

f1[x_] = Cosh[x];

f2[x_] = Sinh[x];

f3[x_] = Tanh[x];

p3 = Plot[{Sinh[x], Cosh[x], Tanh[x]}, {x, −5, 5}, PlotRange → {−5, 7},
PlotStyle → {{RGBColor[1, 0.5, 0.2], Thickness[0.008]},
{RGBColor[0.5, 1, 0.2], Thickness[0.008]},
{RGBColor[0.5, 0, 1], Thickness[0.008]}},
PlotLegends → {f1[x], f2[x], f3[x]}, PlotLabel → "Funtzio hiperbolikoak",
Ticks → {Table[i, {i, −4, 4, 2}], Table[i, {i, −4, 6, 2}]}]

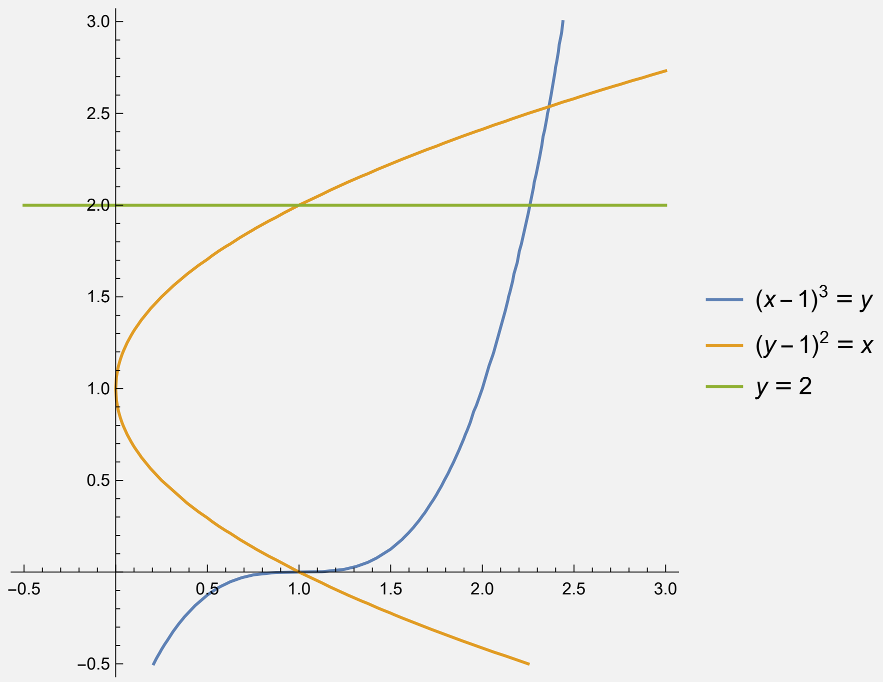


2.3 ariketa. Irudikatu honako baldintza hauek mugatzen duten eremua:

$$\left\{(x-1)^3 \leq y \wedge (y-1)^2 \leq x \wedge y \leq 2\right\}.$$

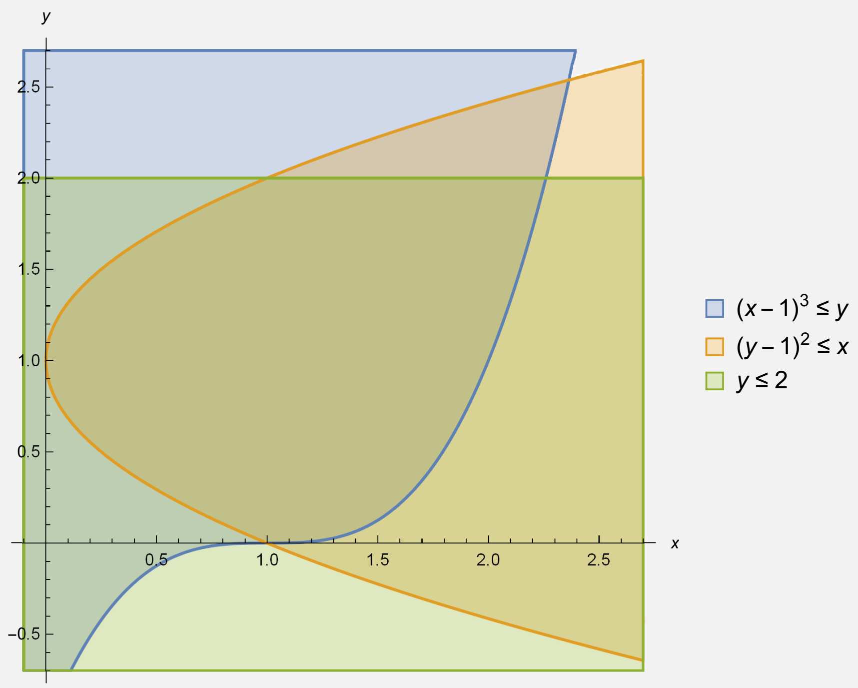
Lehendabizi, baldintzetako bakoitzari dagozkion mugak adieraziko ditugu:

g1 = ContourPlot $[\{(x-1)\text{^}3{=}{=}y, (y-1)^2{=}{=}x, y{=}{=}2\}, \{x, -0.5, 3\},$
$\{y, -0.5, 3\}$**, Frame → False, Axes → True, PlotLegends → "Expressions"**]



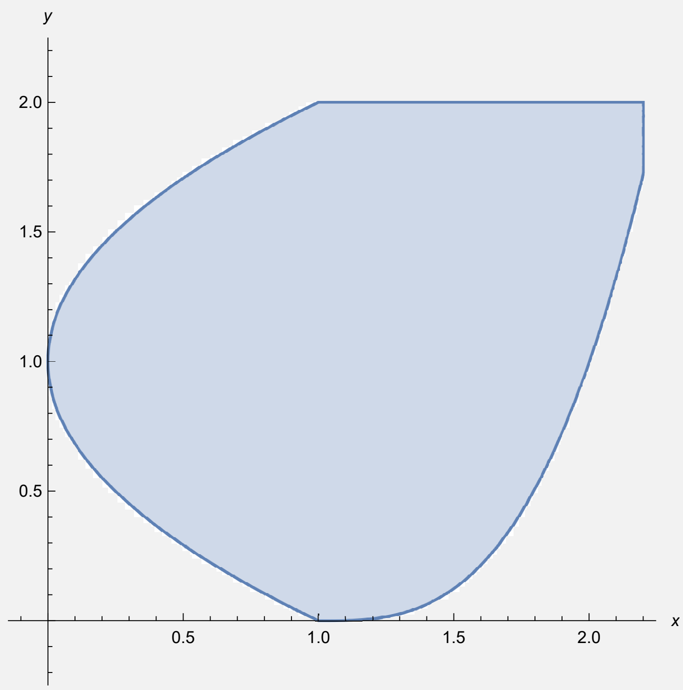
Ondoren, baldintzetako bakoitzari dagozkion eremuak adieraziko ditugu:

g2 = RegionPlot $[\{(x-1)^3 \le y, (y-1)^2 \le x, y \le 2\}, \{x, -0.1, 2.7\},$
$\{y, -0.7, 2.7\}$**, Frame → False, Axes → True, AxesLabel → Automatic,**
PlotLegends → "Expressions"]



Eta bukatzeko, hiru baldintzak batera betetzen dituen eremua adieraziko dugu:

g3 = RegionPlot [{(x **− 1)³ ≤** y**&&(**y **− 1)² ≤** x**&&**y **≤ 2} , {**x**, −0.1, 2.2},**
{y**, −0.2, 2.2}, Frame → False, Axes → True, AxesLabel → Automatic]**



2.4 ariketa. Idatzi $\sin(a + bx)$ funtzioari dagokion animazio bat, a eta b parametroak izanik. Animazio berean, irudikatu $\sin x$ funtzioa erreferentzia bezala.

Eskatzen diguten animazioa sortuko dugu *Manipulate* agindua erabilita:

g = Manipulate[Plot[{Sin[x], Sin[$a + bx$]}, {x, 0, 2Pi},

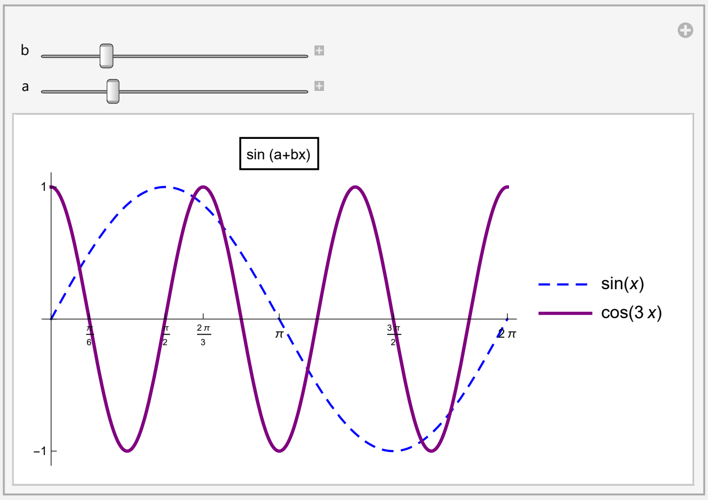
PlotStyle → {{Blue, Dashing[0.02]}, {Purple, Thickness[0.007]}},

Ticks → {{0, Pi/6, Pi/2, 2Pi/3, Pi, 3Pi/2, 2Pi}, {−1, 0, 1}},

PlotLegends → {Sin[x], Sin[$a + bx$]}, PlotLabel → Framed["sin (a+bx)"]],

{{b, 3, b}, 1, 10, 1}, {{a, Pi/2, a}, 0, 2Pi, Pi/4}]

Eta honako hau da lortzen dugun animazioa:



2.5 ariketa. Adierazi koordenatu polarretan emandako $\rho(\theta) = \sin\left(\frac{5\theta}{7}\right)$ funtzioa, eta sortu animazio bat.

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

f[t_] = Sin[5 ∗ t/7];

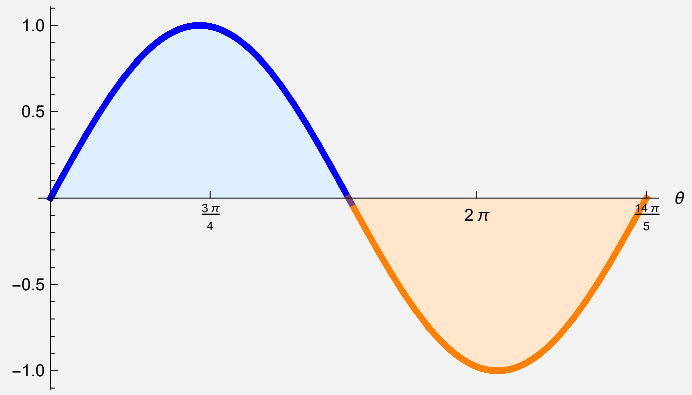
g1 = Plot $\left[f[t], \left\{t, 0, 7\frac{2\pi}{5}\right\}, \text{Ticks} \to \left\{\left\{0, 3\pi/4, 2\pi, 7\frac{2\pi}{5}\right\}, \text{Automatic}\right\},\right.$

PlotStyle → Thickness[0.01], Filling → Axis,

FillingStyle → {LightOrange, LightBlue},

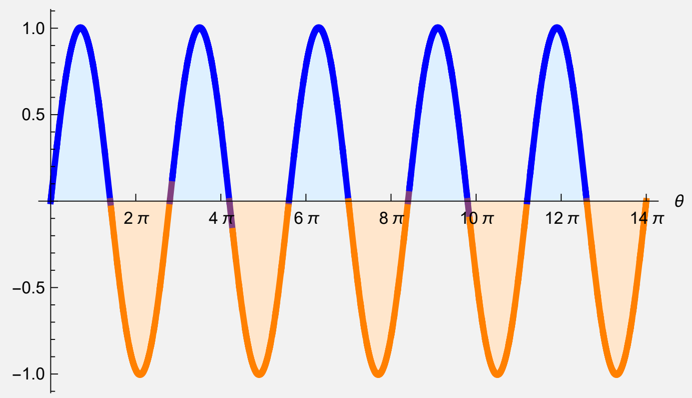
ColorFunction->Function[{t, y}, If[f[t] < 0, Orange, Blue]],

ColorFunctionScaling->False, AxesLabel → {θ}]



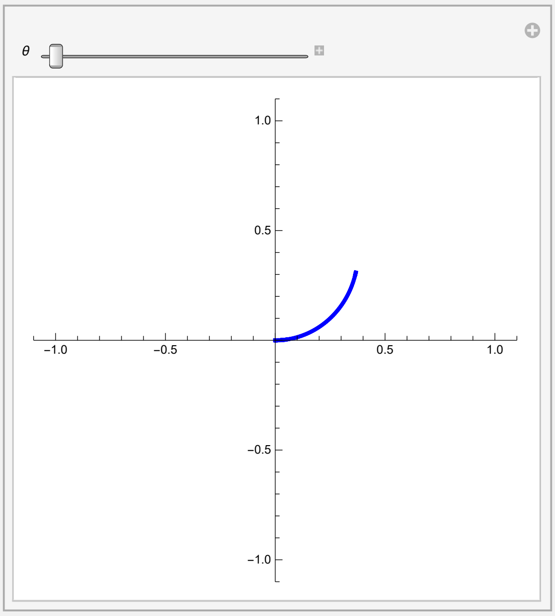
Funtzioaren periodoa T_1 bada, honako hau beteko da: $\rho(\theta) = \rho(\theta + T_1)$. Kasu honetan $T_1 = 7\frac{2\pi}{5}$ da, eta grafikoa osatuta geratuko da $T = 5 \cdot T_1$ betetzen denean.

```
g2 = Plot[Sin[5 * t/7], {t, 0, 14π},
Ticks → {{2π, 4π, 6π, 8π, 10π, 12π, 14π}, Automatic},
PlotStyle → Thickness[0.01], Filling → Axis,
FillingStyle → {LightOrange, LightBlue},
ColorFunction->Function[{t, y}, If[Sin[5 * t/7] < 0, Orange, Blue]],
ColorFunctionScaling->False, AxesLabel → {θ}]
```

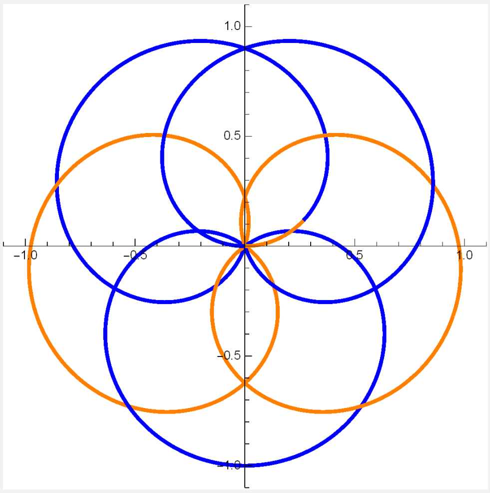


Animazioa sortuko dugu *Manipulate* agindua erabilita:

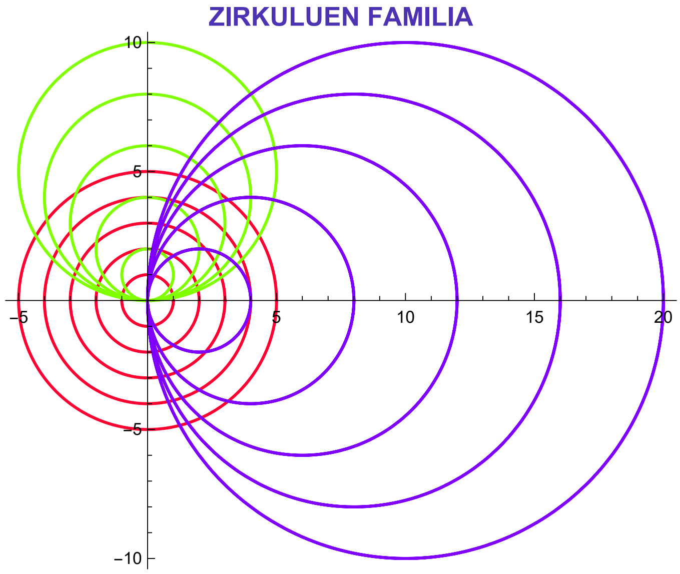
```
g3 = Manipulate[PolarPlot[Sin[5t/7], {t, 0, p}, PlotStyle → {Thickness[0.008]},
ColorFunction->Function[{x, y, t, r},
If[Sin[5 * t/7] < 0,  Orange, Blue]], ColorFunctionScaling->False,
PlotRange → {{−1.1, 1.1}, {−1.1, 1.1}}], {{p, 0.7, "θ"}, 0.1, 14π}]
```



Eta irristagailua erabiliz, honako grafiko hau lortzen da:



2.6 ariketa. Idatzi honako grafiko hau lortzeko behar diren aginduak koordenatu polarrak erabilita.



2.49 irudia. 2.2 ariketako irudia.

(a, b) zentrodun eta $r = c$ erradiodun zirkunferentzia definituko dugu:

$$\mathbf{ek} = (x - a)^2 + (y - b)^2 == c^2;$$

Ondoren, $(a, b) = (0, 0)$ zentrodun zirkunferentziak definituko ditugu:

$$\mathbf{ek1} = \mathbf{ek}/.\{a \to 0, b \to 0\}$$

$$x^2 + y^2 == c^2$$

$$\mathbf{polar1} = \mathbf{ek1}/.\{x \to r[t] * \mathrm{Cos}[t], y \to r[t] * \mathrm{Sin}[t]\}//\mathrm{Simplify}$$

$$c^2 == r[t]^2$$

$$\mathrm{Solve}[\mathbf{polar1}, r[t]]$$

$$\{\{r[t] \to -c\}, \{r[t] \to c\}\}$$

$$\mathbf{zirkulu1}[\mathrm{t\_}, \mathrm{a\_}] = a;$$

Prozesu bera jarraituz, $(0, b)$ zentrodun eta $r = b$ erradiodun zirkunferentziak definituko ditugu:

ek2 = ek/.{a → 0, c → b}

$x^2 + (-b + y)^2 == b^2$

polar2 = ek2/.{x → r[t] ∗ Cos[t], y → r[t] ∗ Sin[t]}//Simplify

$r[t]^2 == 2br[t]\mathrm{Sin}[t]$

Solve[polar2, r[t]]

$\{\{r[t] \to 0\}, \{r[t] \to 2b\mathrm{Sin}[t]\}\}$

zirkulu2[t_, b_] = 2 ∗ bSin[t];

Eta $(a, 0)$ zentrodun eta $r = a$ erradiodunak:

ek3 = ek/.{b → 0, c → a}

$(-a + x)^2 + y^2 == a^2$

polar3 = ek3/.{x → r[t] ∗ Cos[t], y → r[t] ∗ Sin[t]}//Simplify

$2a\mathrm{Cos}[t]r[t] == r[t]^2$

Solve[polar3, r[t]]

$\{\{r[t] \to 0\}, \{r[t] \to 2a\mathrm{Cos}[t]\}\}$

zirkulu3[t_, a_] = 2 ∗ aCos[t];

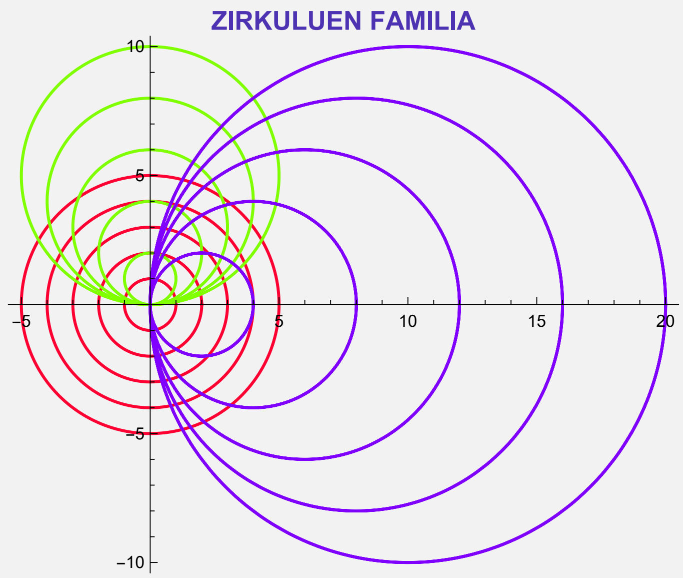
Bukatzeko, eskatzen diguten irudia egingo dugu:

zir1 = PolarPlot[Evaluate[Table[zirkulu1[t, b], {b, 1, 5}]], {t, 0, 2 ∗ π},
PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0.2], PlotLabel → r==2bSin[t]];
zir2 = PolarPlot[Evaluate[Table[zirkulu2[t, a], {a, 1, 5}]], {t, 0, π},
PlotStyle → RGBColor[0.5, 1, 0], PlotLabel → r==2aCos[t]];
zir3 = PolarPlot[Evaluate[Table[zirkulu3[t, c], {c, 2, 10, 2}]],

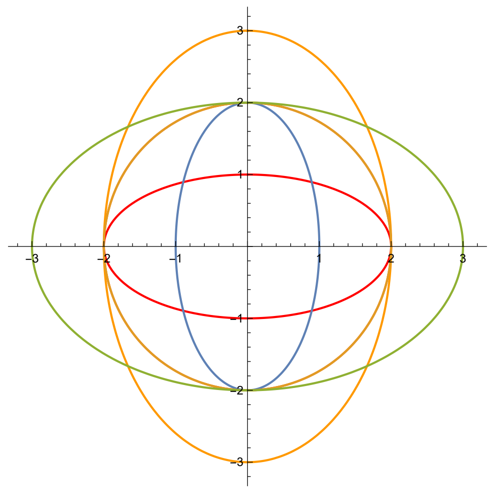
$\{t, 0, 2 * \pi\}$, PlotStyle → RGBColor[0.5, 0, 1], PlotLabel → $r == c$];

g1 = Show[zir1, zir2, zir3,

PlotLabel → Style[“ZIRKULUEN FAMILIA”, Bold, 14, RGBColor[0.3, 0.2, 0.7]]]



2.7 ariketa. Idatzi honako grafiko hau lortzeko behar diren aginduak, koordenatu parametrikoak erabilita.



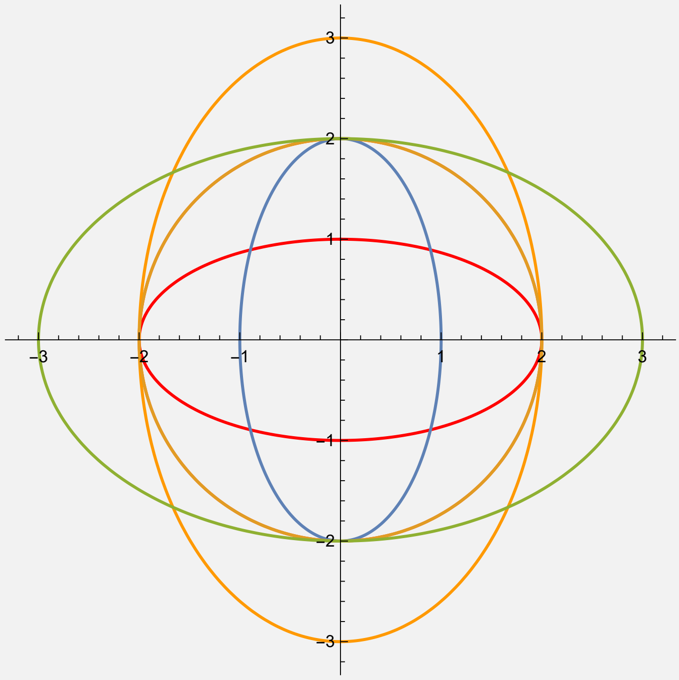
2.50 irudia. 2.7 ariketako irudia.

Honako agindu hauek dira beharrezkoak grafiko hori sortzeko:

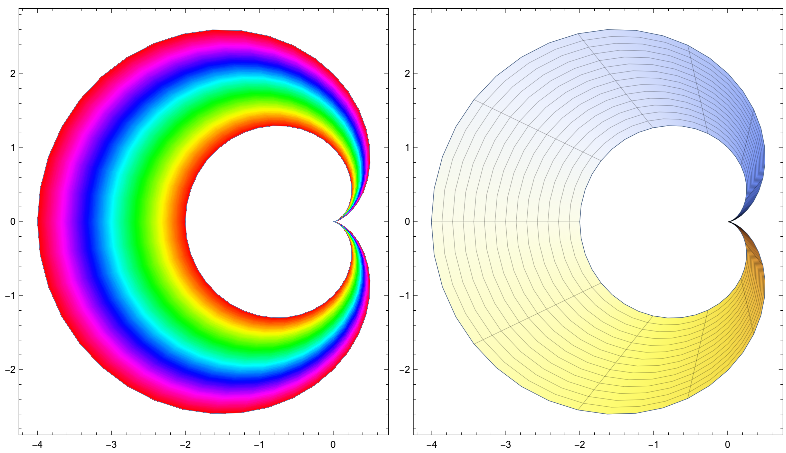
elipse[t_, a_, b_, c_, d_] = $\{a * \mathrm{Sin}[t], b * \mathrm{Cos}[t]\} + \{c, d\}$;

g1 = ParametricPlot[Evaluate[Table[elipse[t, 2, i, 0, 0], $\{i, 1, 3\}$]],

```
{t, 0, 2Pi}, PlotStyle → Table[RGBColor[1, i * 0.3, 0], {i, 0, 2}],
AspectRatio → Automatic];
g2 = ParametricPlot[Evaluate[Table[elipse[t, i, 2, 0, 0], {i, 1, 3}]],
{t, 0, 2Pi}, PlotStyle → PlotStyle → Table[RGBColor[0, 1, i * 0.3], {i, 0, 2}],
AspectRatio → Automatic];
e1 = Show[g1, g2, PlotRange → {−3, 3}]
```



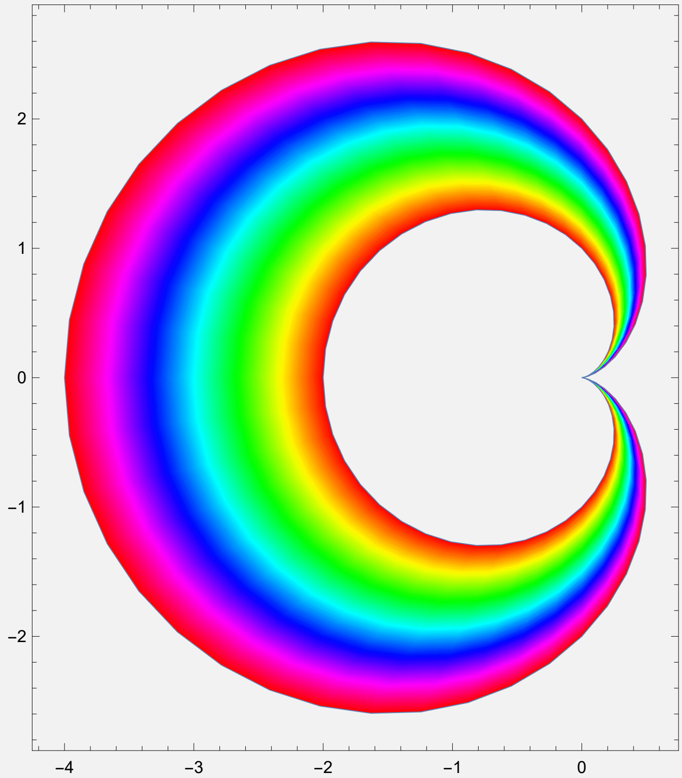
2.8 ariketa. Idatzi honako grafiko hauetan adierazi diren kardioideen arteko eremuak lortzeko behar diren aginduak, koordenatu parametrikoak erabilita.



2.51 irudia. 2.8 ariketako irudiak.

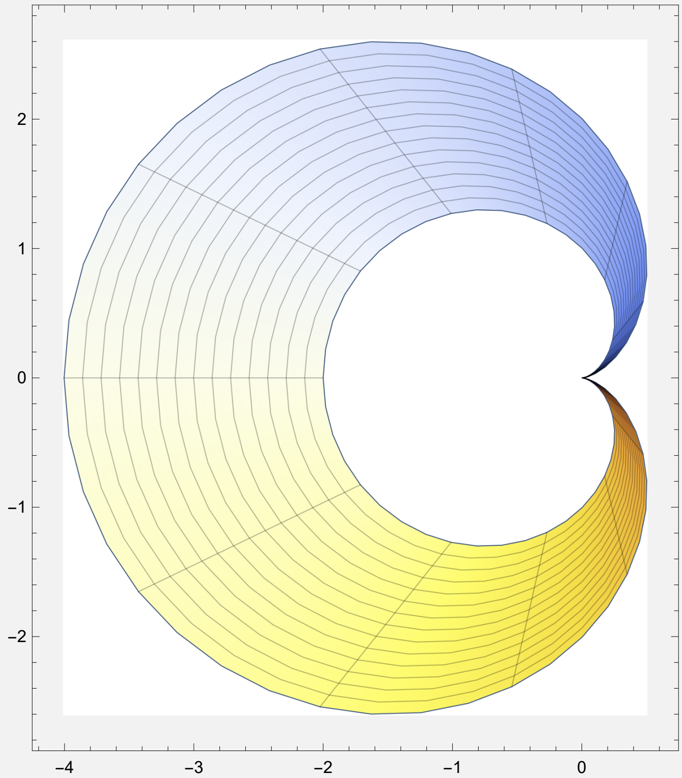
Honako agindu hauek dira beharrezkoak lehenengo grafikoa sortzeko:

```
h1 = ParametricPlot[{r * (1 - Cos[t]) * Cos[t], r * (1 - Cos[t]) * Sin[t]},
{t, 0, 2Pi}, {r, 1, 2}, Axes → False,
ColorFunction → Function[{x, y, i, u}, Hue[u]]]
```



Eta honako hauek bigarrena sortzeko:

```
h2 = ParametricPlot[{r * (1 - Cos[t]) * Cos[t], r * (1 - Cos[t]) * Sin[t]},
{t, 0, 2Pi}, {r, 1, 2}, Axes → False,
ColorFunction → Function[{x, y, i, u}, ColorData["TemperatureMap"][i]],
Mesh->Full]
```



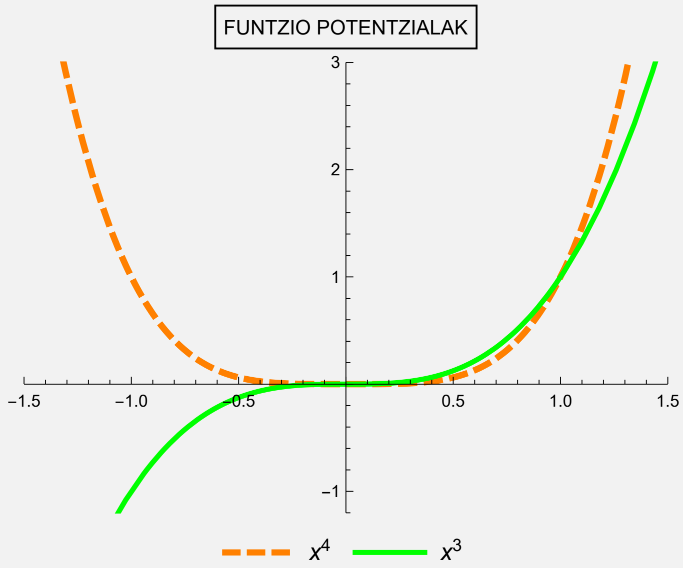
2.9 ariketa. Adierazi honako bi funtzio hauek ardatz berberak erabilita: $y = x^4$ eta $y = x^3$. Erabili kolore eta lerro mota ezberdinak funtzio bakoitza irudikatzeko. Irudikatu bi funtzioek $[0,1]$ tartean mugatzen duten eremua.

Funtzioak definituko ditugu:

```
f1[x_] = x^4;

f2[x_] = x^3;
```

Eta *Plot* aginduak eskaintzen dituen aukerak erabilita, adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
h1 = Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, −2, 2},
PlotStyle → {{Orange, Thickness[0.01], Dashing[0.02]}, {Green, Thickness[0.008]}},
PlotRange → {{−1.5, 1.5}, {−1.2, 3}}, AspectRatio → 0.7,
PlotLabel → Framed[“FUNTZIO POTENTZIALAK”],
PlotLegends → {f1[x], f2[x]}]
```



Bi funtzioek $[0,1]$ tartean mugatzen duten eremua irudikatuko dugu:

$\mathbf{h2} = \mathbf{Plot}[\{\mathbf{f1}[x], \mathbf{f2}[x]\}, \{x, -2, 2\},$

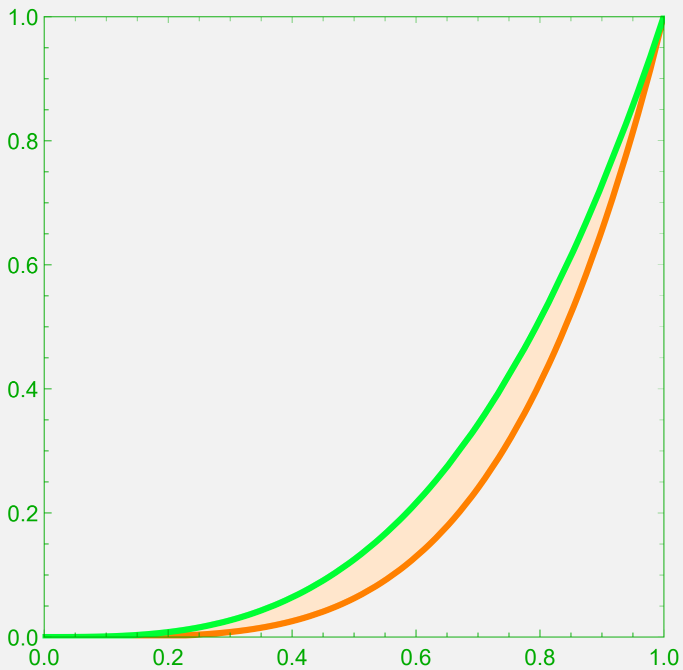
$\mathbf{PlotStyle} \to \{\{\mathbf{RGBColor}[1, 0.5, 0], \mathbf{Thickness}[0.01]\},$

$\{\mathbf{RGBColor}[0, 1, 0.2], \mathbf{Thickness}[0.01]\}\},$

$\mathbf{PlotRange} \to \{\{0, 1\}, \{0, 1\}\},$

$\mathbf{AspectRatio} \to 1, \mathbf{Filling} \to \{1 \to \{\{2\}, \{\mathbf{LightOrange}\}\}\},$

$\mathbf{Frame} \to \mathbf{True}, \mathbf{FrameStyle} \to \mathbf{Directive}[\mathbf{Darker}[\mathbf{Green}], 12], \mathbf{Axes} \to \mathbf{False}]$



2.10 ariketa. Adierazi 2×2 dimentsioko taula batean honako funtzio trigonometriko hauek: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$. Erabili kolore eta lerro mota ezberdinak funtzio bakoitza irudikatzeko.

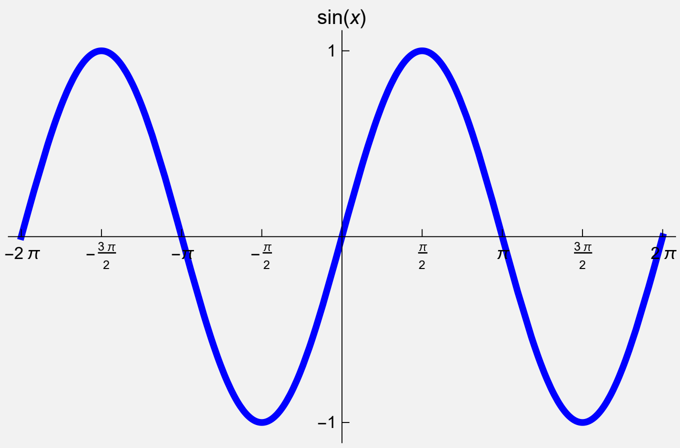
Funtzioak definituko ditugu, eta haien adierazpen grafikoak egingo ditugu:

$\text{f1}[\text{x\_}] = \text{Sin}[x];$

$a = \text{Plot}[\text{f1}[x], \{x, -2\text{Pi}, 2\text{Pi}\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Blue}, \text{Thickness}[0.01]\},$

$\text{PlotLabel} \to \text{f1}[x],$

$\text{Ticks} \to \{\{-2\text{Pi}, -3\text{Pi}/2, -\text{Pi}, -\text{Pi}/2, 0, \text{Pi}/2, \text{Pi}, 3\text{Pi}/2, 2\text{Pi}\}, \{-1, 1\}\}]$

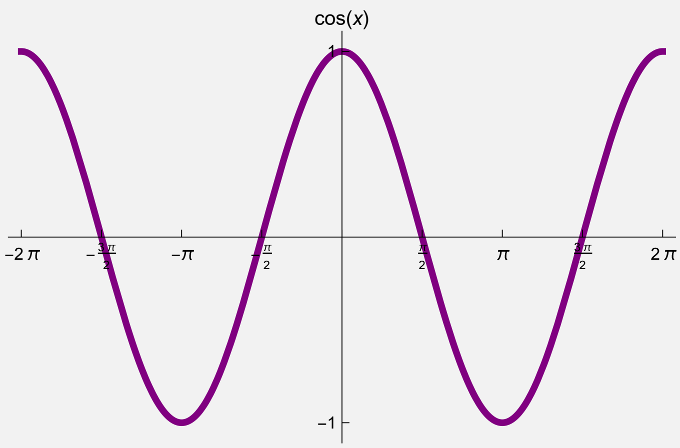


$\text{f2}[\text{x\_}] = \text{Cos}[x];$

$b = \text{Plot}[\text{f2}[x], \{x, -2\text{Pi}, 2\text{Pi}\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Purple}, \text{Thickness}[0.01]\},$

$\text{PlotLabel} \to \text{f2}[x],$

$\text{Ticks} \to \{\{-2\text{Pi}, -3\text{Pi}/2, -\text{Pi}, -\text{Pi}/2, 0, \text{Pi}/2, \text{Pi}, 3\text{Pi}/2, 2\text{Pi}\}, \{-1, 1\}\}]$



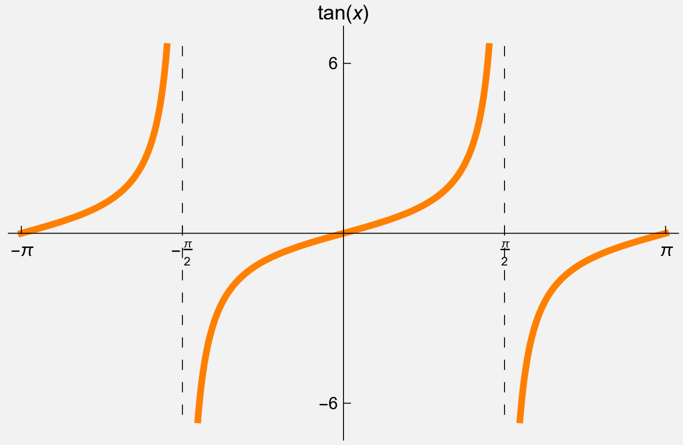
$\text{f3}[\text{x\_}] = \text{Tan}[x];$

$c = \text{Plot}[\text{f3}[x], \{x, -\text{Pi}, \text{Pi}\}, \text{Exclusions} \to \{x == -\text{Pi}/2, \text{Pi}/2\},$

$\text{ExclusionsStyle} \to \text{Dashing}[\text{Medium}],$

$\text{PlotStyle} \to \{\text{Orange}, \text{Thickness}[0.01]\}, \text{PlotLabel} \to \text{f3}[x],$

$\text{Ticks} \to \{\{-\text{Pi}, -\text{Pi}/2, 0, \text{Pi}/2, \text{Pi}\}, \{-6, 6\}\}]$



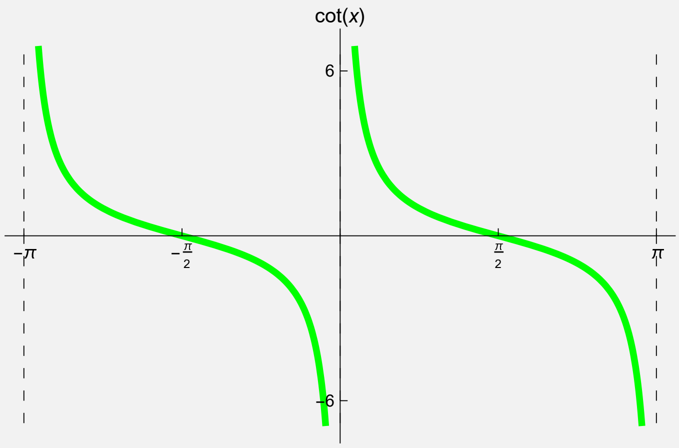
$\text{f4}[\text{x\_}] = \text{Cot}[x];$

$d = \text{Plot}[\text{f4}[x], \{x, -3.2, 3.2\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Green}, \text{Thickness}[0.01]\},$

$\text{Exclusions} \to \{-\text{Pi}, 0, \text{Pi}\},$

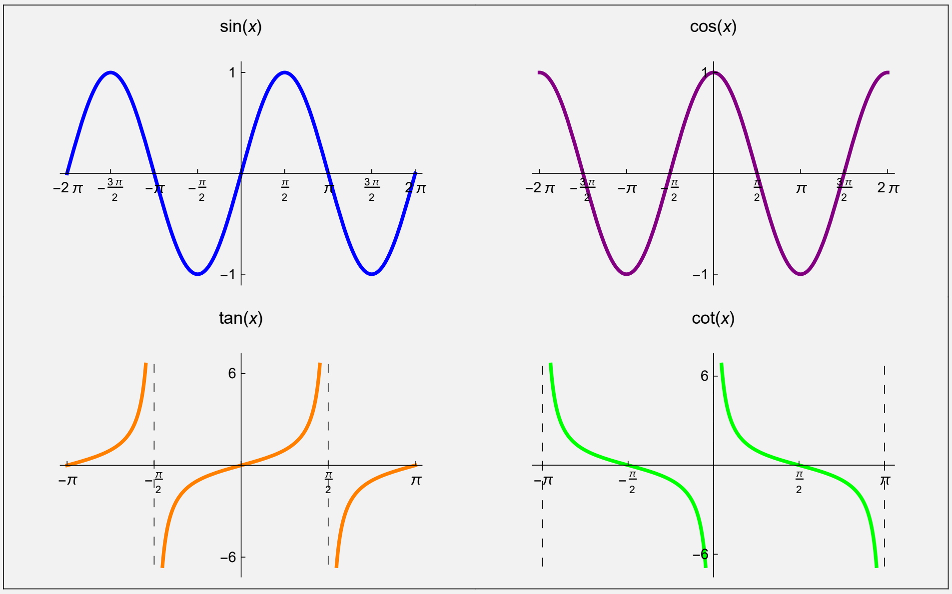
$\text{ExclusionsStyle} \to \text{Dashing}[\text{Medium}], \text{PlotLabel} \to \text{f4}[x],$

$\text{Ticks} \to \{\{-\text{Pi}, -\text{Pi}/2, 0, \text{Pi}/2, \text{Pi}\}, \{-6, 6\}\}]$



Bukatzeko, grafiko denak 2×2 dimentsioko taula batean jarriko ditugu:

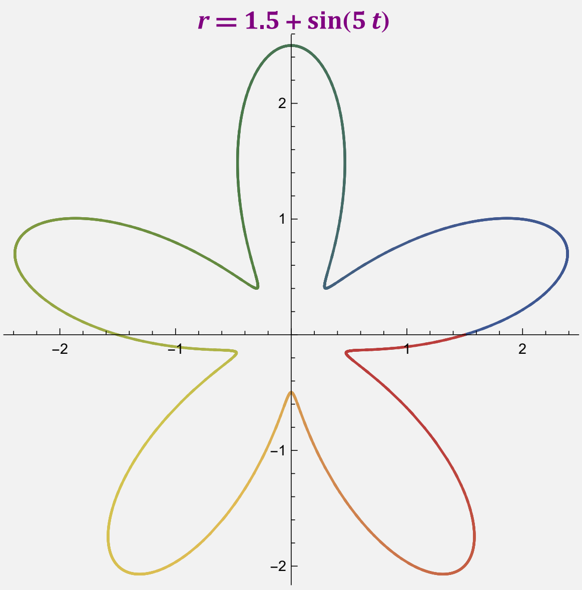
g5 = GraphicsGrid[{{a, b}, {c, d}}, Frame → True]



2.11 ariketa. Irudikatu honako funtzio hauek: $r = 1,5 + \sin(5t)$, $r = 4 + 1,5\sin(9t)$ eta $r = 4 + 0,6\sin(18t)$. Egin animazio bat $r = 2 + 1,5\sin(3t)$ funtzioa irudikatzeko.

$r = 1,5 + \sin(5t)$ funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

p1 = PolarPlot[{1.5 + Sin[5 ∗ t]}, {t, 0, 2π}, ColorFunction → "DarkRainbow", PlotLabel → "r=1.5+sin(5t)"]



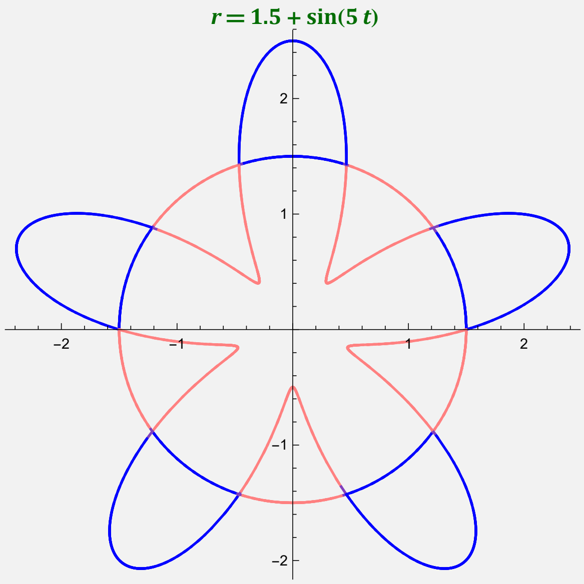
Honako grafiko hau erabilita, $\sin(5t) < 0$ betetzen duten angeluei dagozkien puntuak kolore ezberdinak erabiliz marraz daitezke:

p2 = PolarPlot[{1.5, 1.5 + Sin[5 ∗ t]}, {t, 0, 2π},

ColorFunction → Function[{x, y, t, r}, If[Sin[5t] < 0, Pink, Blue]],

ColorFunctionScaling->False,

PlotLabel → "r=1.5+sin(5t)"]



Honako grafiko honetan, $r = 4 + 1,5\sin(9t)$ eta $r = 4 + 0,6\sin(18t)$ irudikatu dira:

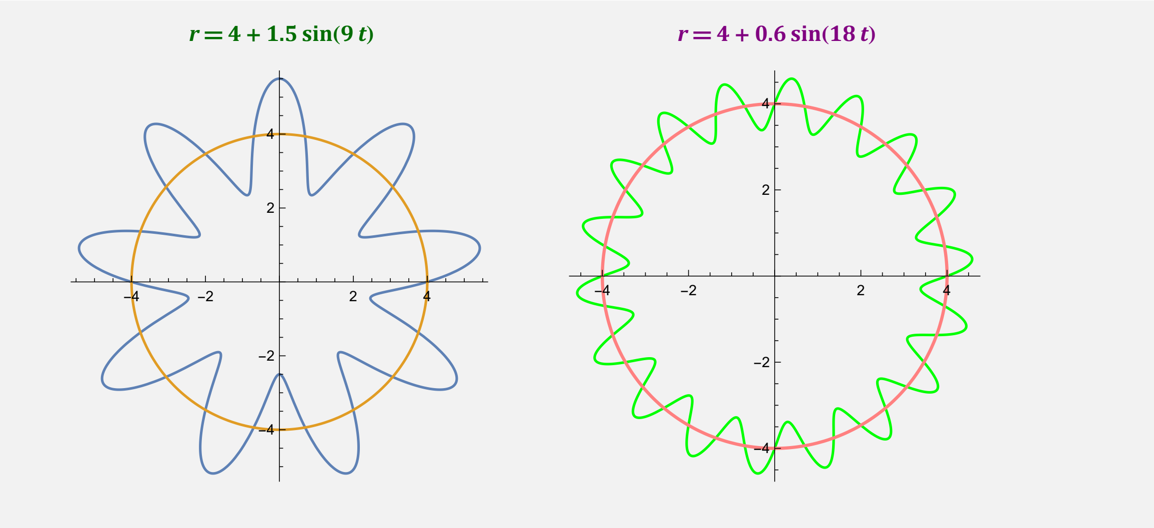
g1 = PolarPlot[{4 + 1.5Sin[9 ∗ t], 4}, {t, 0, 2π},

PlotLabel → "r=4+1.5sin(9t)"];

g2 = PolarPlot[{4 + 0.6 ∗ Sin[18 ∗ t], 4}, {t, 0, 2π}, PlotLabel → "r=4+0.6sin(18t)",

PlotStyle → {Green, Directive[Thick, Pink]}];

p3 = GraphicsGrid[{{g1, g2}}]



Bukatzeko, $r = 2 + 1,5\sin(3t)$ funtzioa irudikatuko duen animazioa sortu da:

p4 =

Animate[Show[PolarPlot[{1, 3, 2 + Sin[3 ∗ t]}, {t, 0, p},

PlotStyle → {Dashed, Dashed, Thickness[0.008]},

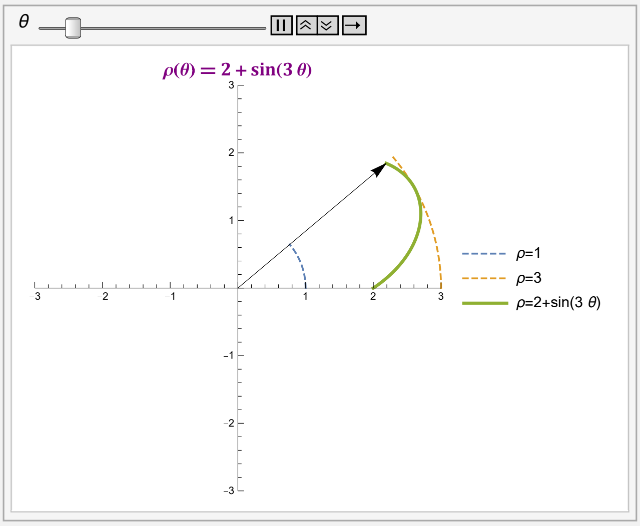
PlotLegends → {"ρ = 1", "ρ = 3", "ρ = 2 + sin(3θ)"},

PlotLabel → "ρ = 2 + sin(3θ)",

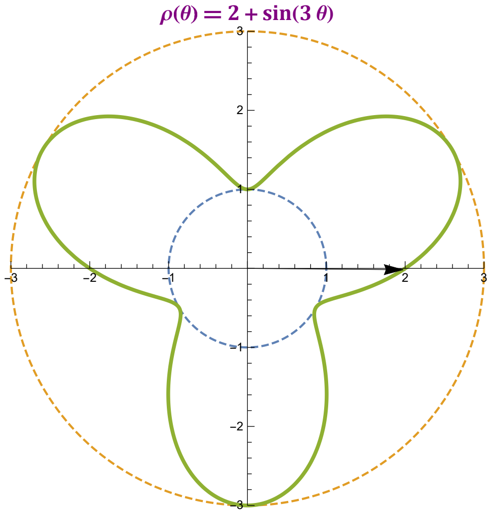
PlotRange → {{−3, 3}, {−3, 3}}],

Graphics[Arrow[{{0, 0}, {Cos[p](2 + Sin[3 ∗ p]), Sin[p](2 + Sin[3 ∗ p])}}]]],

{{p, 0.7, "θ"}, 0.1, 2π}]



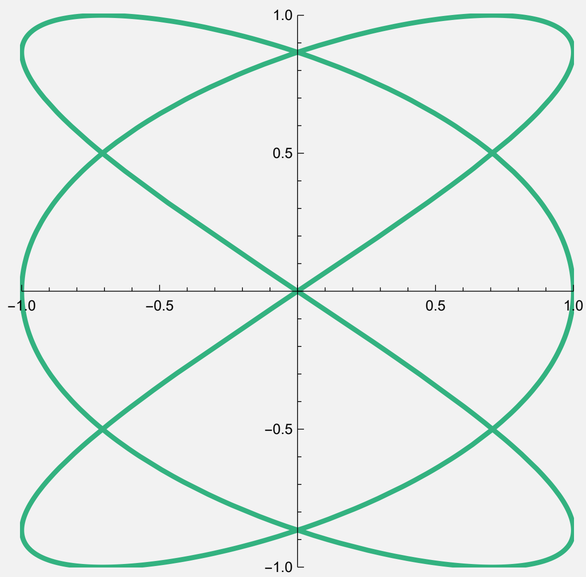
Animazio osoa egin ostean, honako grafiko hau lortzen da:



2.52 irudia. 2.3 ariketako animazioaren emaitza.

2.12 ariketa. Irudikatu honako funtzio hau: $x(t) = \cos(3t)$, $y(t) = \sin(2t)$. Funtzioa definituko dugu, eta adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
r[t_] = {x[t_], y[t_]} = {Cos[3 * t], Sin[2 * t]};

k1 = ParametricPlot[{Cos[3 * t], Sin[2 * t]}, {t, 0, 2 * Pi},
PlotStyle → {RGBColor[0.2, .7, 0.5], Thickness[0.009]},
PlotRange → {{−1, 1}, {−1, 1}}]
```



2.13 ariketa. Irudikatu parametriketan emandako honako funtzio hau, $x = r\cos\theta$ eta $y = r\sin\theta$ parametroak honako tarte hauetan daudenean. Erabili koloreztatzeko aukera ezberdinak:

a) $r \in [1, 3]$ eta $\theta \in [0, 2\pi/3]$.

b) $r \in [1,3]$ eta $\theta \in [0, 3\pi/2]$.

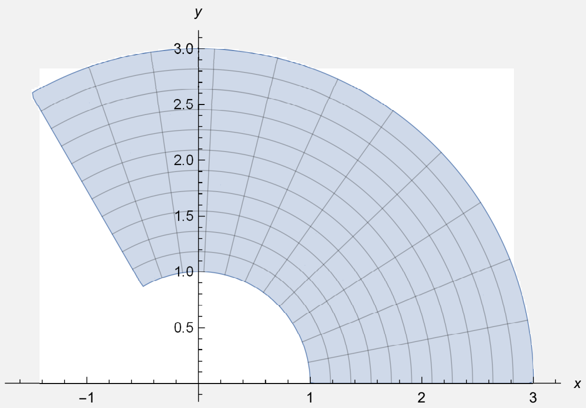
c) $r \in [1,3]$ eta $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) atala. Eremua definituko dugu lehendabizi, eta grafikoa egingo dugu ondoren:

$\mathcal{D}$ = ImplicitRegion[$0 \le \theta \le 2\pi/3 \wedge 1 \le r \le 3, \{\theta, r\}$];

k1 = ParametricPlot[{rCos[θ], rSin[θ]}, {θ, r} $\in \mathcal{D}$, Axes $\to$ True,

Frame $\to$ False, Mesh $\to$ 10, AxesLabel $\to$ {x, y}]

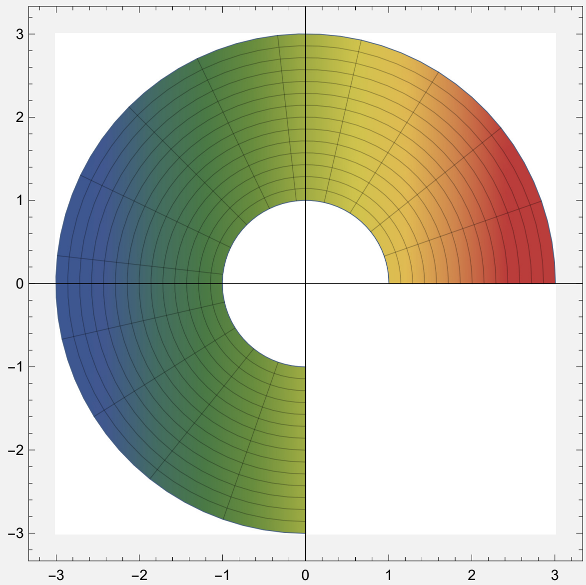


b) ataleko grafikoan, *ParametricPlot* aginduaren barruan definituko dugu eremua:

k2 = ParametricPlot[{rCos[θ], rSin[θ]}, {r, 1, 3}, {θ, 0, 3Pi/2},

ColorFunction $\to$ "DarkRainbow",

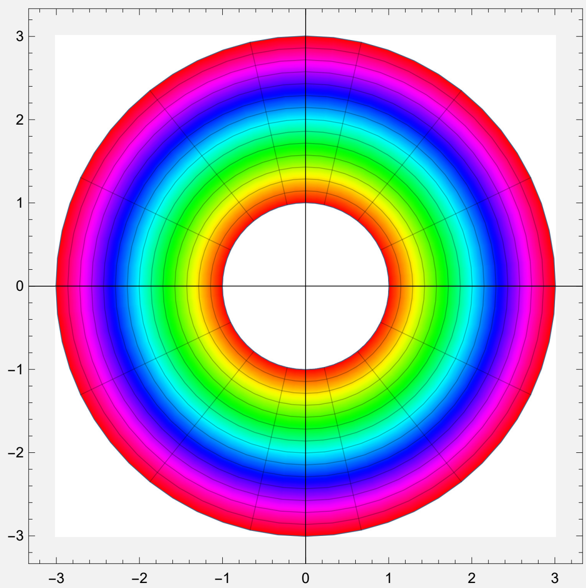
Mesh->Full]



c) ataleko grafikoan ere, *ParametricPlot* aginduaren barruan definituko dugu eremua:

k3 = ParametricPlot[{rCos[θ], rSin[θ]}, {r, 1, 3}, {θ, 0, 2Pi},

ColorFunction → Function[{x, y, i, u}, Hue[i]], Mesh->Full]

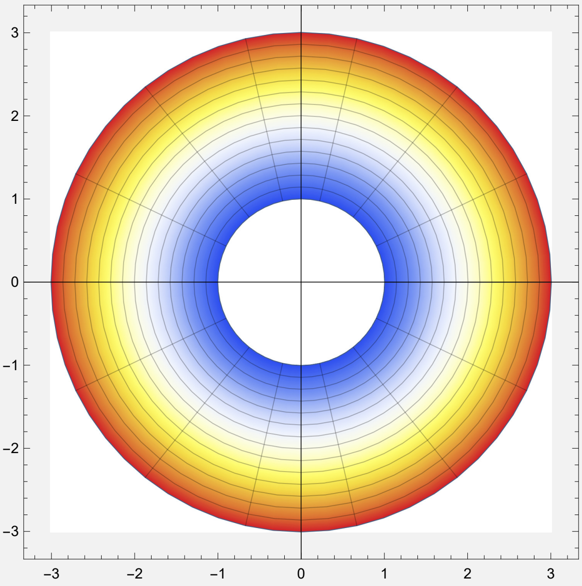


Eremu bera beste era honetan ere kolorezta daiteke:

k4 = ParametricPlot[{rCos[θ], rSin[θ]}, {r, 1, 3}, {θ, 0, 2Pi},

ColorFunction → Function[{x, y, i, u}, ColorData["TemperatureMap"][i]],

Mesh->Full]



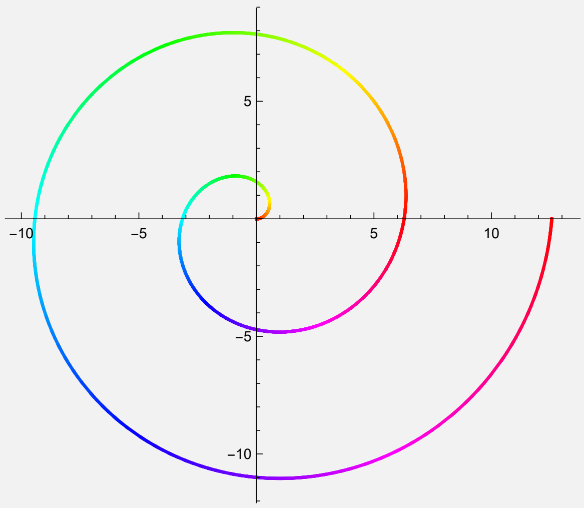
2.14 ariketa. Irudikatu Arkimedesen espirala $\rho = \theta$ ekuazio parametrikoak erabilita. Hau da, $x = \theta \cos\theta$ eta $y = \theta \sin\theta$.

Espirala irudikatzeko, aginduak idatziko ditugu:

gg1 = ParametricPlot[{uCos[u], uSin[u]}, {u, 0, 4Pi}, PlotStyle → Thick,

ColorFunction → Function[{x, y, u, v}, Hue[u/(2Pi)]],

ColorFunctionScaling → False]



3. kapitulua

Aldagai errealeko funtzio errealen limiteak

Kalkulu infinitesimaleko kontzeptuen artean garrantzitsua da *limite* kontzeptua, jarraitutasuna, deribagarritasuna, eta abar definitzeko oinarria baita. Gai honetan aztergai izango ditugu aldagai errealeko funtzio errealen limiteak.

3.1 *Limite* kontzeptua

$f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa emanik, x aldagaia a baliora hurbiltzen denean, limitea bakarra da:

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

$a : \infty, -\infty, \omega, \omega^+, \omega^-$ izanik eta ω zenbaki erreala. Bere balioa $\infty, -\infty$, edo $L \in \mathbb{R}$ izan daiteke. Baldin

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ \text{ (edo } \infty, \text{ edo } -\infty)$$

bada, edozein $\varepsilon > 0$ harturik, a-tik behar bezain gertu dauden x guztietarako honako hau beteko da:

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \ \text{ (edo } f(x) > \varepsilon, \text{ edo } f(x) < -\varepsilon)\,.$$

Limitea. Izan bedi $f(x)$ funtzio bat, a barne duen tarte ireki batean definiturikoa (a puntua bera salbuetsiz, kanpoan utziz) eta izan bedi L zenbaki erreal bat. x aldagaia a baliora hurbiltzen denean, limitea L da; hau da:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \tag{3.1}$$

baldin $\varepsilon > 0$ guztietarako, $\delta > 0$ bat existitzen da, zeinak honako hau betetzen baitu:

$$\text{baldin } 0 < |x-a| < \delta, \text{ orduan } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Bakartasuna. $f(x)$ funtzio baten limitea x aldagaia a baliora hurbiltzen denean existitzen bada, bakarra da. Hau da:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \text{ eta } \lim_{x\to a} f(x) = M \Longrightarrow L = M \tag{3.2}$$

Konbergentzia, dibergentzia, infinitesimoa, oszilazioa. Baldin $\lim\limits_{x\to\bigtriangledown} f(x) = L$ bada, L finitua izanik, orduan $x \to \bigtriangledown$ denean $f(x)$-k L-ra konbergitzen duela esaten da.

Baldin $\lim\limits_{x\to\bigtriangledown} f(x)$ limitea ∞ edo $-\infty$ bada, orduan esaten da $x \to \bigtriangledown$ denean $f(x)$-k ∞-ra edo $-\infty$-ra dibergitzen duela.

$f(x)$ funtzioak ez duenean ez konbergitzen ez dibergitzen, $\lim\limits_{x\to\bigtriangledown} f(x)$ adierazpenak ez du zentzurik, eta esan ohi da $f(x)$-k oszilatu egiten duela $x \to \bigtriangledown$ denean.

Eragiketa aljebraikoak. Baldin $\lim\limits_{x\to\bigtriangledown} f_1(x) = L_1$ eta $\lim\limits_{x\to\bigtriangledown} f_2(x) = L_2$ badira, orduan:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\bigtriangledown} \lambda f_1(x) &= \lambda L_1, \forall\lambda \in \mathbb{R},\\
\lim_{x\to\bigtriangledown} (f_1(x) + f_2(x)) &= L_1 + L_2,\\
\lim_{x\to\bigtriangledown} (f_1(x) \cdot f_2(x)) &= L_1 \cdot L_2,\\
\lim_{x\to\bigtriangledown} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \frac{L_1}{L_2},\ L_2 \neq 0 \text{ bada},\\
\lim_{x\to\bigtriangledown} f_1(x)^{f_2(x)} &= L_1^{L_2}, L_1 > 0 \text{ bada},\\
\lim_{x\to\bigtriangledown} \sqrt[f_2(x)]{f_1(x)} &= \sqrt[L_2]{L_1} = L_1^{\frac{1}{L_2}}, L_1 > 0 \neq L_2 \text{ izanik}.
\end{aligned}
$$

Funtzioen konposaketa. $f(x)$ eta $g(x)$ bi funtzio emanik, baldin $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ eta $g(x)$ jarraitua bada $x = l$ puntuan (hau da, $\lim\limits_{x\to l} g(x) = g(l)$), orduan, $\exists \lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x)$ eta honako era honetan kalkulatzen da:

$$\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = g(l).$$

Alboetako limiteak. $f(x)$ funtzio bat emanik, x aldagaia a baliora eskuinetik hurbiltzen denean, limitea L_r da, honako hau gertatzen bada:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_r \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_1 > 0 \text{ non } 0 < x - a < \delta_1,\ \text{orduan } |f(x) - L_r| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Era berean, x aldagaia a baliora ezkerretik hurbiltzen denean, limitea L_l da, honako hau gertatzen bada:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_l \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_2 > 0 \text{ non } 0 < a - x < \delta_2;\ \text{orduan } |f(x) - L_l| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Funtzio baten limitea x aldagaia a aldagaira hurbiltzen denean existitzen da, baldin eta soilik baldin albo-limiteak existitzen badira eta berdinak badira:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} f(x) = L. \tag{3.5}$$

Limite zehaztugabeak edo indeterminazioak. $\lim\limits_{x\to\bigtriangledown} f(x)$ kalkulatzeko lehen azaldu ditugun limiteen kalkulurako oinarrizko arauak aplikatzea nahikoa ez denean, limite zehaztugabeak edo indeterminatuak ditugu. Indeterminazioak zazpi motatan sailka daitezke:

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \pm\infty \cdot 0, \pm\left(\infty - \infty\right), \infty^0, 0^0, 1^{\pm\infty}, \tag{3.6}$$

non balio bakoitzak (L=0, ∞, $\pm\infty$, 1) $f(x)$ funtzio baten limitea adierazten baitu, $\lim\limits_{x\to\triangledown} f(x) = L$ betetzen duena.

3.2 Infinitesimoak

Infinitesimoa. $\lim\limits_{x\to\triangledown} f(x) = 0$ bada, $f(x)$ infinitesimo bat da $x \to \triangledown$ kasurako.

Infinitesimoen konparaketa. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ bi infinitesimo $x \to \triangledown$ kasurako, non $\lim\limits_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{g(x)} = l$; orduan:

a) $l = 0$ bada, $f(x)$ $g(x)$ baino ordena txikiagoko infinitesimoa da $x \to \triangledown$ denean.

b) $l = \infty$ bada, $f(x)$ $g(x)$ baino ordena handiagoko infinitesimoa da $x \to \triangledown$ denean.

c) $l \in \mathbb{R} - \{0\}$ bada, $f(x)$ eta $g(x)$ ordena bereko infinitesimoak dira $x \to \triangledown$ denean.

d) $l = 1$ bada, $f(x)$ eta $g(x)$ infinitesimo baliokideak dira $x \to \triangledown$ denean.

Infinitesimo baten ordena. Izan bedi $f(x)$ funtzioa $x \to \triangledown$ kasurako infinitesimo bat. $f(x)$ n ordenako infinitesimoa da, $x \to \triangledown$ denean honako berdintza hau betetzen bada:

$$\lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{(x - \triangledown)^n} = l, \tag{3.7}$$

$l \in \mathbb{R} - \{0\}$ izanik.

3.3 Baliokidetzak

Funtzio baliokideak. Bi funtzio $f(x)$ eta $g(x)$ baliokideak dira $x \to \triangledown$ denean, eta honela idatziko dugu:

$$f(x) \sim g(x) \text{ edo } g(x) \sim f(x), \;\; x \to \triangledown \text{ denean} \tag{3.8}$$

baldin honako hau betetzen bada:

$$\lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\triangledown} \frac{g(x)}{f(x)} = 1. \tag{3.9}$$

- Baldin $f(x)\sim g(x)$ bada $x \to \triangledown$ denean, eta honako limiteetako bat existitzen bada:
$$\lim_{x\to\triangledown} f(x)h(x) \text{ edo } \lim_{x\to\triangledown} g(x)h(x), \tag{3.10}$$
orduan:
$$\lim_{x\to\triangledown} f(x)h(x) = \lim_{x\to\triangledown} g(x)h(x). \tag{3.11}$$
- Baldin $\lim\limits_{x\to\triangledown} f(x) = \lambda$, $\lambda \neq 0$ eta finitua izanik, orduan:
$$f(x)\sim\lambda,\ x \to \triangledown \text{ denean.} \tag{3.12}$$
Baliokidetza hau asko erabiltzen da.

Baliokidetza erabilienak
Demagun $\lim\limits_{x\to\triangledown} f(x) = 0$. Orduan

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\triangledown} \frac{\sin f(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{\sin f(x)} = 1,\\
\lim_{x\to\triangledown} \frac{\arcsin f(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to\triangledown} \frac{(x)}{\arcsin f(x)} = 1,\\
\lim_{x\to\triangledown} \frac{\tan f(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{\tan f(x)} = 1,\\
\lim_{x\to\triangledown} \frac{\arctan f(x)}{f(x)} &= \lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{\arctan f(x)} = 1,\\
\lim_{x\to\triangledown} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} &= \lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{\log(1+f(x))} = 1,\\
\lim_{x\to\triangledown} \frac{\log f(x)}{f(x)-1} &= \lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)-1}{\log f(x)} = 1,\\
\lim_{x\to\triangledown} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} &= \lim_{x\to\triangledown} \frac{f(x)}{e^{f(x)}-1} = 1.
\end{aligned}$$

3.4 Adibideak

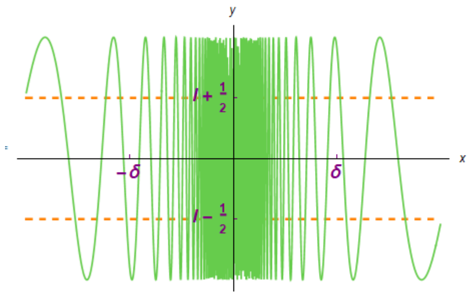
3.1 adibidea. Aztertu ea $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ funtzioaren limitea existitzen den $x \to 0$ denean. Hau da, ea honako limite hau existitzen den:
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.13}$$

Funtzio trigonometrikoa aplikatu behar zaion funtzioaren albo-limiteak ezberdinak dira:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Horretaz, gain,

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = l \tag{3.14}$$

izango balitz, gutxienez ε-en balio bat existitzen da non $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ funtzioaren grafikoa ez baitago $y_1 = l - \varepsilon$ eta $y_2 = l + \varepsilon$ zuzenen artean. Nahikoa da, adibidez, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ balioa hartzea; ikus 3.1 irudia.



3.1 irudia. 3.1 adibidea.

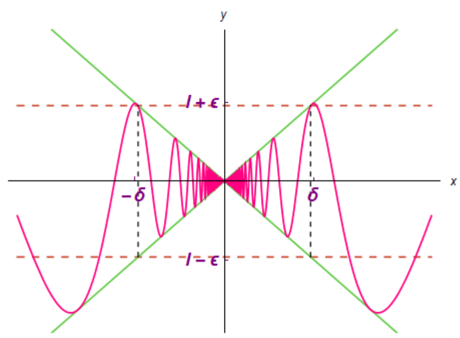
3.2 adibidea. Ondorioztatu grafikoki honako limite hau:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.15}$$

Nahiz eta $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ limitea ez den existitzen, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ limitea existitu egiten da, eta bere balioa honako hau da:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \tag{3.16}$$

Ikus 3.2 irudia.



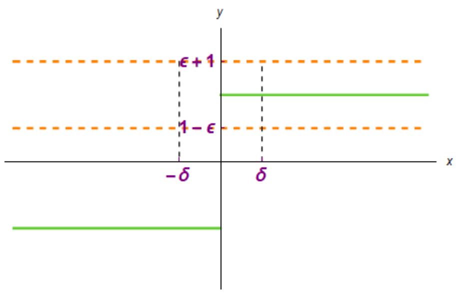
3.2 irudia. 3.2 adibidea.

3.3 adibidea. Aztertu $f(x)$ funtzioaren limitea $x \to 0$ denean:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Funtzioaren grafikoa, 3.3 irudia, aztertuz, erraz ondorioztatzen da ez dela existitzen $\lim_{x\to 0} f(x)$ limitea, alboetako limiteak ezberdinak baitira:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.$$

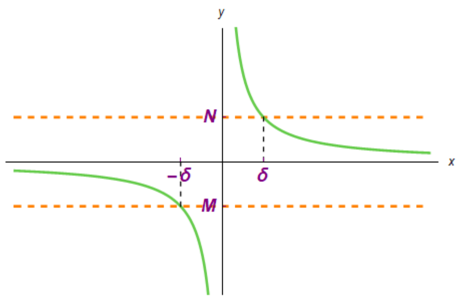


3.3 irudia. 3.3 adibidea.

3.4 adibidea. Aztertu $f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioaren limitea $x \to 0$ denean:

Funtzioaren grafikoa, 3.4 irudia, begiratuz, ondoriozta daiteke ez dela existitzen $\lim_{x\to 0} f(x)$ limitea, alboetako limiteak ezberdinak baitira:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty.$$



3.4 irudia. 3.4 adibidea.

3.5 adibidea. $\sin x$ eta x funtzioak $x \to 0$ denean baliokideak direla jakinik, hau da, $\sin x \sim x$, frogatu $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ dela $x \to 0$ denean.

Honako limite hauek ditugu $x \to 0$ denean:

$$\lim_{x\to 0} 1 - \cos x = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0.$$

Beraz, funtzio biak infinitesimoak dira $x \to 0$ denean.

Bi funtzioen arteko zatidura planteatuko dugu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,(1-\cos x)\,(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,(1-\cos^2 x)}{x^2\,(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}.$$

Eta, orain, $\sin x \sim x$ baliokidetasuna aplikatuko dugu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\,(1+\cos x)} = 1.$$

3.6 adibidea. Zehaztu $f(x) = \tan x - \sin x$ funtzioaren ordena $x \to 0$ denean. $f(x) = \tan x - \sin x$ funtzioa infinitesimoa da $x \to 0$ denean:

$$\lim_{x\to 0}\tan x - \sin x = 0$$

Bere ordena n izango da, honako limite hau betetzen bada:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^n} = l,$$

$l \in \mathbb{R} - \{0\}$ izanik.

Kalkula dezagun limite hori:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cos x},$$

eta $\sin x \sim x$ eta $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ baliokidetasunak aplikatuz $x \to 0$ denean, honako hau daukagu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\frac{x^2}{2}}{x^n\cos x} = \begin{cases} 0, & n<3,\\ \frac{1}{2}, & n=3,\\ \infty, & n>3. \end{cases}$$

Hau da, $n = 3$ denean limitearen balioa $l = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \{0\}$ denez, $n = 3$ da infinitesimoaren ordena.

3.7 adibidea. Kalkulatu honako limite hau, jakinik $\log(1+x) \sim x$ $x \to 0$ denean:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^4+7x^6}}{\log(1+6x)}$$

$\log(1+x) \sim x$ $x \to 0$ den moduan, $\log(1+f(x)) \sim f(x)$ dela $x \to 0$. Beraz, limitearen balioa honela kalkulatzen da:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x^4+7x^6}}{\log(1+6x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt[4]{1+7x^2}}{6x} = \frac{1}{6}.$$

3.8 adibidea. Kalkulatu $e^{x^2} - \cos x$ funtzioaren ordena $x \to 0$ denean, jakinik $e^x - 1 \sim x$ $x \to 0$ denean:

$e^{x^2} - \cos x$ funtzioa infinitesimoa dela $x \to 0$ denean:

$$\lim_{x\to 0} e^{x^2} - \cos x = 0.$$

Bere ordena n izango da, honako limite hau betetzen bada:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^n} = l,$$

$l \in \mathbb{R} - \{0\}$ izanik.

Kalkula dezagun limite hori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^2} - 1\right) + (1 - \cos x)}{x^n}.$$

Eta honako baliokidetasunak erabiliz, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ eta $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $x \to 0$ denean:

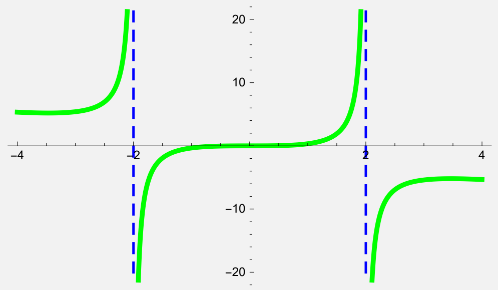
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^2} - 1\right) + (1 - \cos x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^2}{2}}{x^n} = \begin{cases} 0, & n < 2, \\ \frac{3}{2}, & n = 2, \\ \infty, & n > 2. \end{cases},$$

3.5 Ordenagailuko praktikak

3.1 ariketa. Aztertu ea $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$ funtzioak $x = -2$ eta $x = 2$ puntuetan limiterik duen ala ez.

Puntuak eta funtzioa definituko ditugu, eta funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
x0 = -2;

x1 = 2;

f[x_] = x^3/(4-x^2);

Plot[f[x], {x, -4, 4}, PlotStyle->{Green, Thickness[0.01]},
Exclusions → {x^2 - 4 == 0} ,
ExclusionsStyle → Directive[Dashing[0.02], Blue,
Thickness[0.005]]]
```



Funtzio baten puntu bateko limitea kalkulatzeko, *Limit*[*funtzioa*, $x \to x_0$] agindua erabiltzen da. Alboetako limiteak *Direction* erabilita adierazi behar dira: ezkerreko limitearentzat *Limit*[*funtzioa*, $x \to x_0$, *Direction* $\to 1$], eta eskuinekoarentzat *Limit*[*funtzioa*, $x \to x_0$, *Direction* $\to -1$].

$x = -2$ puntuko albo-limiteak kalkulatuko ditugu:

```
limezker = Limit[f[x], x-> - 2, Direction->1]
limesk = Limit[f[x], x-> - 2, Direction-> - 1]
```

∞

$-\infty$

Ez da existitzen $x = -2$ puntuko limitea, albo-limiteak ezberdinak baitira:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \neq \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty.$$

$x = 2$ puntuan berdin egingo dugu:

```
limezker = Limit[f[x], x->2, Direction->1]
limesk = Limit[f[x], x->2, Direction-> - 1]
```

∞

$-\infty$

Eta arrazoi beragatik, $x = 2$ puntuko limitea ere ez da existitzen:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty.$$

3.2 ariketa. Aztertu ea honako funtzio honek $x = 0$ eta $x = 2\pi$ puntuetan limiterik duen ala ez:

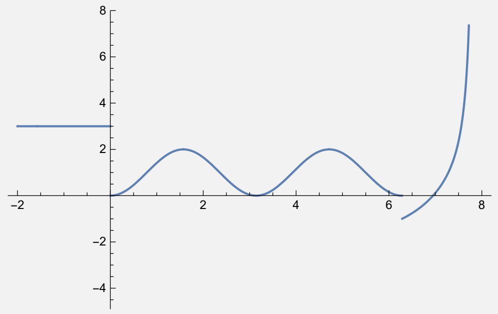
$$f(x) = \begin{cases} 2\sin^2 x, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ \tan x + \cos(x+\pi), & x > 2\pi, \\ 3, & \text{gainerako kasuetan.} \end{cases}$$

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

f2[x_] = Which[0 ≤ x ≤ 2Pi, 2 * (Sin[x])^2, x > 2Pi, Tan[x] + Cos[x + Pi], True, 3]

$\text{Which}\left[0 \leq x \leq 2\pi, 2\text{Sin}[x]^2, x > 2\pi, \text{Tan}[x] + \text{Cos}[x+\pi], \text{True}, 3\right]$

Plot[f2[x], {x, −2, 8}]



Alboetako limiteak kalkulatuko ditugu $x = 0$ eta $x = 2\pi$ puntuetan:

limezk1 = Limit[f2[x], x → 0, Direction → 1]

limesk1 = Limit[f2[x], x → 0, Direction → −1]

3

0

limezk2 = Limit[f2[x], x → 2Pi, Direction → 1]

limesk2 = Limit[f2[x], x → 2Pi, Direction → −1]

0

−1

Alboetako limiteak ezberdinak direnez,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 2\pi^+} f(x) = -1,$$

ez dira existitzen puntu horietako limiteak.

3.3 ariketa. Frogatu $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$ eta $g(x) = \frac{x}{3}$ funtzioak baliokideak direla $x \to 0$ doanean. Erabili emaitza hori $\sqrt[3]{0,987}$ balioa kalkulatzeko.

Funtzioak definituko ditugu, eta beren zatiduraren limitea kalkulatuko dugu:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_}] = (x+1)^{1/3} - 1;}$

$\boldsymbol{g[\mathrm{x\_}] = \frac{x}{3};}$

$\boldsymbol{l = \lim_{x\to 0} \frac{f[x]}{g[x]}}$

1

$f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak baliokideak dira, honako hau betetzen baita:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{3.18}$$

$x \to 0$ denean $f(x)\sim g(x)$ betetzen denez, honako hau daukagu:

$$\sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{x}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} \sim \frac{x}{3} + 1$$

Beraz, $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{0,987}$ izango da $x_0 = 0.987 - 1 = -0.013$ denean, eta $\sqrt[3]{-0.013} \sim \frac{-0.013}{3} + 1$ izango da:

$\boldsymbol{s = \mathrm{Solve}[x+1 == 0.987]}$

$\{\{x \to -0.013\}\}$

$\boldsymbol{\mathrm{x0} = x/.s[[1]]}$

-0.013

$\boldsymbol{h[\mathrm{x\_}] = g[x] + 1}$

$1 + \frac{x}{3}$

$\boldsymbol{h[x]/.\ s[[1]]}$

0.995667

$\sqrt[3]{0.987}$

0.995648

$f[\text{x0}] + 1$

0.995648

Hortaz, $\sqrt[3]{0.987} \approx 0.995648$.

3.4 ariketa. Kalkulatu $f(x) = e^{5x} - e^{3x}$ eta $g(x) = \sin 5x - \sin 3x$ infinitesimoen ordena eta parte nagusia $x \to 0$ doanean. Erabili emaitza hori honako limite hau kalkulatzeko: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 5x - \sin 3x}$.

Honako funtzio hau definituko dugu Mathematica programan:

$$\begin{aligned}
&\text{ordenapnag}[\text{f_}, \text{x_}, \text{a_}, \text{b_}] := \\
&\text{Do}\left[\text{If}\left[\text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] \neq 0\&\&\text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] \neq \infty\&\&\right.\right. \\
&\text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] \neq -\infty, \\
&\text{Print}[\text{“Infinitesimoaren ordena da: ”}, n, \text{“. Bere parte nagusia da: ”}, \\
&\left.\left.\text{pnag} = \text{Limit}\left[\frac{f[x]}{(x-a)^n}, x \to a\right] * (x-a)^n, \text{“.”}\right], \text{Stop}\right], \{n, 0, b\}\Big]
\end{aligned}$$

$f(x)$ funtzioa definituko dugu, eta bere ordena kalkulatuko dugu, definitu dugun goiko funtzioa erabilita:

$f[\text{x\_}] = E^{5x} - E^{3x};$

$\text{ordenapnag}[f, x, 0, 15]$

Infinitesimoaren ordena da: 1. Bere parte nagusia da: $2x$.

$\text{pnagf}[\text{x\_}] = \text{pnag}$

$2x$

$g(x)$ funtzioaren ordena eta parte nagusia kalkulatzeko, prozesu bera jarraituko dugu:

```
g[x_] = Sin[5x] − Sin[3x];

ordenapnag[g, x, 0, 15]
```

Infinitesimoaren ordena da: 1. Bere parte nagusia da: $2x$.

```
pnagg[x_] = pnag

2x
```

Eta, bukatzeko, eskatzen diguten limitea kalkulatuko dugu:

$$\textbf{Limit}\left[\frac{\text{pnagf}[x]}{\text{pnagg}[x]}, x\text{->}0\right]$$

1

Hortaz, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 5x-\sin 3x} = 1$.

3.5 ariketa. Frogatu honako bi funtzio hauek infinitesimoak direla $x \to 0$ doanean: $f(x) = \sin(\ln(1+x)) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ eta $g(x) = 1 - \cos(\ln(1+x))$. Kalkulatu infinitesimoen ordena eta parte nagusia. Aztertu ea infinitesimo baliokideak diren ala ez.

Ematen dizkiguten bi funtzioak definituko ditugu:

$$f[\text{x\_}]\text{:=}\text{Sin}[\text{Log}[1+x]]\text{Log}\left[\frac{1+x}{1-x}\right];$$

```
g[x_]:=1 − Cos[Log[1 + x]];
```

Funtzio bat puntu batean infinitesimoa den kalkulatzeko balio duen funtzio hau definituko dugu:

```
infinitesimo[f_, a_]:=

If[Limit[f[x], x → a] == 0,

Print["Funtzioa infinitesimoa da x->", a, " doanean."],

Print["Funtzioa ez da infinitesimoa x->", a, " doanean."]]
```

Sortu dugun funtzioa $f(x)$-ri eta $g(x)$-ri aplikatuz, honako hau daukagu:

infinitesimo[f, 0]

Funtzioa infinitesimoa da x->0 doanean.

infinitesimo[g, 0]

Funtzioa infinitesimoa da x->0 doanean.

Hau da, biak dira infinitesimoak $x \to 0$ denean:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Aurreko ariketan sortu dugun *ordenapnag* funtzioa erabilita, bi funtzio hauen ordenak kalkula eta konpara daitezke:

ordenapnag[f, x, 0, 15]

Infinitesimoaren ordena da: 2. Bere parte nagusia da: $2x^2$.

pnagf[x_] = pnag

$2x^2$

ordenapnag[g, x, 0, 15]

Infinitesimoaren ordena da: 2. Bere parte nagusia da: $\frac{x^2}{2}$.

pnagg[x_] = pnag

$\frac{x^2}{2}$

Bukatzeko, infinitesimoen ordenak konparatzeko, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitea kalkulatuko dugu:

$\boldsymbol{l = \text{Limit}\left[\frac{f[x]}{g[x]}, x \to 0\right]}$

4

Eta ondorioztatzen da $f(x)$ eta $g(x)$, infinitesimoak diren arren, ez direla infinitesimo baliokideak:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 4 \neq 0, 1, \infty \text{ baita.}$$

3.6 ariketa. Kalkulatu $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ eta $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ funtzioen limiteak $x \to 0$ doanean.

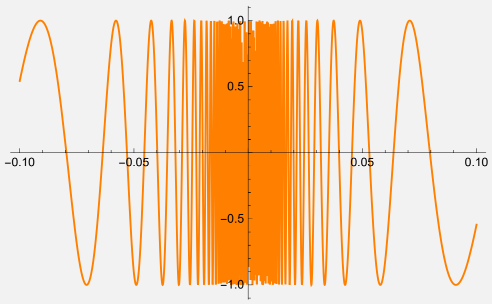
$f(x)$ funtzioa definituko dugu, eta eskatzen diguten limitea kalkulatuko dugu:

Limit $\left[\text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right], x \to 0\right]$

Indeterminate

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu, zer gertatzen den ikusteko:

Plot $\left[\text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right], \{x, -0.1, 0.1\}, \text{PlotStyle->}\{\text{Thickness}[0.004], \text{RGBColor}[1, 0.5, 0]\}\right]$

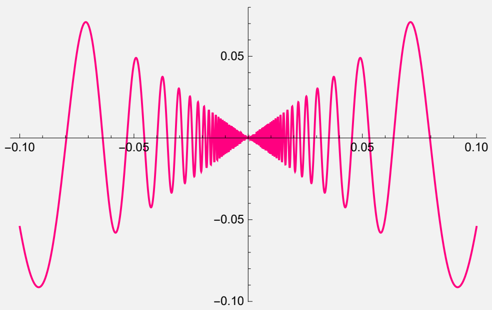


Prozesu bera errepikatuko dugu $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ funtzioarekin:

Limit $\left[x\text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right], x \to 0\right]$

0

Plot $\left[x\text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right], \{x, -0.1, 0.1\}, \text{PlotStyle->}\{\text{Thickness}[0.004], \text{RGBColor}[1, 0, 0.5]\}\right]$

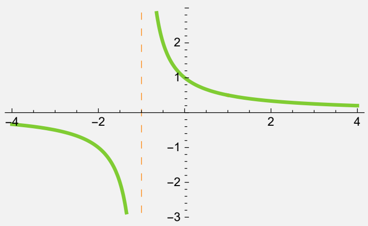


Kasu honetan, $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ da.

3.7 ariketa. Aztertu ea $f(x) = \frac{-1+x}{-1+x^2}$ funtzioaren limitea existitzen den $x \to 1$ eta $x \to -1$ doanean.

Funtzioa definituko dugu, eta adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
f[x] = (-1+x)/(-1+x^2);

Plot[f[x], {x, -4, 4}, PlotStyle->{RGBColor[0.5, 0.8, 0.2], Thickness[0.01]},
 Exclusions → {-1 + x^2 == 0} ,
 ExclusionsStyle → Directive[Dashing[Medium], Orange]]
```



Grafikoan ikus daitekeen moduan, ez da existitzen funtzioaren limitea $x \to -1$era doanean; bai, ordea, $x \to 1$era doanean. Kalkula ditzagun limite horiek Mathematica erabilita:

```
x0 = 1;
limezker = Limit[f[x], x → x0, Direction → 1]
limeskuin = Limit[f[x], x → x0, Direction → -1]

1/2

1/2
```

Hortaz:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Eta prozesua errepikatuko dugu $x \to -1$era doanean:

```
x0 = -1;
limezker2 = Limit[f[x], x → x0, Direction → 1]
limeskuin2 = Limit[f[x], x → x0, Direction → -1]
```

$-\infty$

∞

Hortaz:

$$\nexists \lim_{x\to -1} f(x).$$

4. kapitulua

Aldagai errealeko funtzio errealen jarraitutasuna

Funtzio baten puntu bateko limitea existitzeko, ez da zertan funtzioa puntu horretan definituta egon behar. Hau da, gerta daiteke funtzio baten puntu bateko limitea existitzea, funtzioa puntu horretan definituta egon barik. Gai honetan, funtzio jarraituak izango ditugu aztergai. Funtzio bat jarraitua da puntu batean, puntu horretako limitea eta irudia bat datozenean. Hau da, funtzioa puntu horretan definituta egoteaz gain, limitea ere existitu behar da, eta biek berdinak izan behar dute.

4.1 Jarraitutasuna

Izan bedi $f(x)$ funtzioa, $(\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon)$ tankerako tarte ireki batean definitua. $f(x)$ jarraitua da $\omega \in \mathbb{R}$ puntuan, baldin honako hau betetzen bada:

$$f(\omega) = L = \lim_{x \to \omega} f(x).$$

Eragiketa aljebraikoak funtzio jarraituekin. Baldin $\lim_{x \to \nabla} f_1(x) = f(\nabla)$ eta $\lim_{x \to \nabla} f_2(x) = f_2(\nabla)$ badira, orduan:

$$\lim_{x \to \nabla} \lambda f_1(x) = \lambda f_1(\nabla), \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f_1(x) \text{ funtzioa jarraitua } x = \nabla \text{ puntuan,}$$

$$\lim_{x \to \nabla} (f_1(x) + f_2(x)) = f_1(\nabla) + f_2(\nabla) \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) \text{ funtzioa jarraitua } x = \nabla \text{ puntuan,}$$

$$\lim_{x \to \nabla} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = f_1(\nabla) \cdot f_2(\nabla) \Rightarrow f_1(x) \cdot f_2(x) \text{ funtzioa jarraitua } x = \nabla \text{ puntuan,}$$

$$\lim_{x \to \nabla} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(\nabla)}{f_2(\nabla)}, \; f_2(\nabla) \neq 0 \text{ bada} \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \text{ funtzioa jarraitua } x = \nabla \text{ puntuan.}$$

Funtzioen konposaketa. Izan bedi $f(x)$ $x = a$ puntuan jarraitua den funtzioa eta $g(x)$ $x = f(a)$ puntuan jarraitua dena. Orduan, $(g \circ f)(x)$ funtzioa jarraitua da $x = a$ puntuan, eta honako berdintza hau betetzen da:

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g\left(f(a)\right).$$

Hau da, propietate horrek ahalbidetzen du limitearen eta funtzio jarraituaren aplikazio-ordena trukatzea.

Teorema. Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraitua $x = a$ puntuan. Orduan:

- $f(a) > 0$ bada, a puntua barnean duen ingurune batean funtzioa positiboa izango da; hau da: $\exists\delta > 0 : f(x) > 0, \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

- $f(a) < 0$ bada, a puntua barnean duen ingurune batean funtzioa negatiboa izango da; hau da: $\exists\delta > 0 : f(x) < 0, \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Tarte ireki batean jarraitua den funtzioa. $f(x)$ funtzioa (a, b) tartean jarraitua da, tarte horretako puntu guztietan jarraitua denean: $\forall x \in (a, b)$ $f(x)$ jarraitua.

Tarte itxi batean jarraitua den funtzioa. $f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua da, tarte irekiko puntu guztietan jarraitua denean eta muturretan honako berdintza hauek betetzen direnean:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a),$$
$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

4.2 Funtzio jarraituen propietateak

Bolzanoren teorema. Izan bedi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ tartean jarraitua den funtzioa eta $f(a)\cdot f(b) < 0$ betetzen duena. Orduan, $\exists x_0 \in (a, b)$ puntu bat $f(x_0) = 0$ beteko duena.

Darboux-en teorema edo tarteko balioen teorema. Izan bedi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ tartean jarraitua den funtzioa. Orduan, $\forall c \in [f(a), f(b)]$ baliorentzat $\exists x_0 \in (a, b)$ puntu bat $f(x_0) = c$ beteko duena.

Funtzio bornatua. Izan bedi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ bere irudien multzoa. Orduan:

- Existitzen bada $M \in \mathbb{R}$ non $f(x) \le M, \forall x \in [a, b]$, orduan, $f([a, b])$ multzoak goi-borne bat dauka, eta $f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean goi-bornatua dela esaten da. Goi-bornerik txikienari *supremo* esaten zaio, eta $\sup(f([a, b]))$ idazten da.

- Existitzen bada $N \in \mathbb{R}$ non $f(x) \ge N, \forall x \in [a, b]$, orduan, $f([a, b])$ multzoak behe-borne bat dauka, eta $f(x)$ funtzioa $[a, b]$ tartean behe-bornatua dela esaten da. Behe-bornerik handienari *infimo* esaten zaio, eta $\inf(f([a, b]))$ idazten da.

- $\sup(f([a, b])) \in f([a, b])$ betetzen bada, funtzioaren balio maximoa izango da $\sup(f([a, b])) = M$. Gainera, $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = M$.

- $\inf(f([a, b])) \in f([a, b])$ betetzen bada, funtzioaren balio minimoa izango da $\inf(f([a, b])) = m$. Gainera, $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = m$.

Weiestrass-en teorema. Izan bedi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ tartean jarraitua den funtzioa. Orduan, $f(x)$ funtzioa goi- eta behe-bornatua dago tarte horretan.

Teorema. Izan bedi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $[a, b]$ tartean jarraitua den funtzioa. Orduan, $f(x)$ funtzioak balio maximoa eta minimoa hartuko ditu tarte horretan.

4.3 Bisekzio-metodoa

Izan bedi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ tartean jarraitua den funtzioa eta $f(a)\cdot f(b) < 0$ betetzen duena. Orduan, Bolzanoren teorema aplikatuz, $\exists p \in (a,b)$ puntu bat $f(p) = 0$ beteko duena. Bisekzio-metodoak $x = p$ puntuaren hurbilpen bat aurkitzea ahalbidetzen du. Horrela, iterazio bakoitzean honako prozesu hau jarraitzen da:

- $n = 1$ iterazioa: $[a_1, b_1] = [a, b]$ ezartzen da. $f(a_1)\cdot f(b_1) < 0$ denez, existitzen da $p \in (a,b)$ puntu bat $f(p) = 0$ beteko duena. $[a_1, b_1]$ tartearen erdiko puntua kalkulatzen da, $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Ondoren, $f(x_1)$ kalkulatzen da, eta, horren zeinuaren arabera honako azpitarte hau definitzen da:

$$\begin{aligned} f(x_1)\cdot f(a_1) < 0 &\Rightarrow [a_2, b_2] = [a_1, x_1],\\ f(x_1)\cdot f(b_1) < 0 &\Rightarrow [a_2, b_2] = [x_1, b_1], \end{aligned}$$

  $f(x_1) = 0$ balitz, $p = x_1$ litzateke funtzioaren erroa, eta prozesua bukatu egingo litzateke.

- Prozesua era orokorrean honela idatz daiteke: n. iterazioan $[a_n, b_n]$ tartetik abiatuz, tarte horretako erdiko puntua kalkulatzen da $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Ondoren, $f(x_n)$ kalkulatzen da, eta, horren zeinuaren arabera honako azpitarte hau definitzen da:

$$\begin{aligned} f(x_n)\cdot f(a_n) < 0 &\Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, x_n],\\ f(x_n)\cdot f(b_n) < 0 &\Rightarrow [a_{n+1}, b_{n+1}] = [x_n, b_n], \end{aligned}$$

  $f(x_n) = 0$ balitz, $p = x_n$ litzateke funtzioaren erroa, eta prozesua bukatu egingo litzateke.

Bisekzio-metodoak beti konbergitzen du, hau da:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p,$$

p funtzioaren erroa izanik, $f(p) = 0$.

Iterazio bakoitzean tartearen luzera erdibitu egiten denez, erroreak honako ezberdintza hau betetzen du:

$$e_n = |x_n - p| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2^n}.$$

Errorearen estimazioak aurretiaz esaten digu zenbat iterazio egin beharko diren nahi den zehaztasuna lortzeko. Horrela, $\varepsilon > 0$ zehaztasuna lortu nahi bada, nahikoa da honako hau planteatzea:

$$\begin{aligned} e_n \le \frac{b_1 - a_1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{(b_1 - a_1)}{\varepsilon} < 2^n \Rightarrow \ln\left(\frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}\right) < n\cdot \ln 2\\ \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{b_1-a_1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n = E\left[\ln\left(\frac{b_1 - a_1)}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{\ln 2}\right] + 1. \end{aligned}$$

$E(x)$ parte osoa funtzioa izanik.

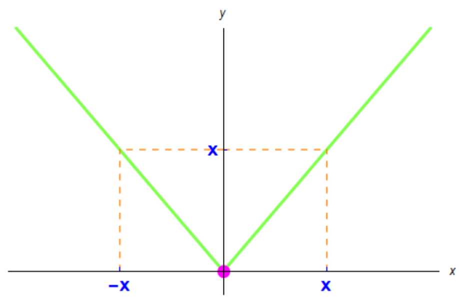
4.4 Adibideak

4.1 adibidea. Aztertu ea $f(x) = |x|$ funtzioa jarraitua den $x = 0$ puntuan.

Balio absolutu funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan, albo-limiteak eta irudia berdinak baitira puntu horretan.

$$\left\{\begin{array}{ll} f(0) = 0, & \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) & = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) & = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Beraz, $f(x) = |x|$ funtzioa jarraitua da, $x = 0$ puntuan; ikus 4.1 irudia.



4.1 irudia. 4.1 adibidea.

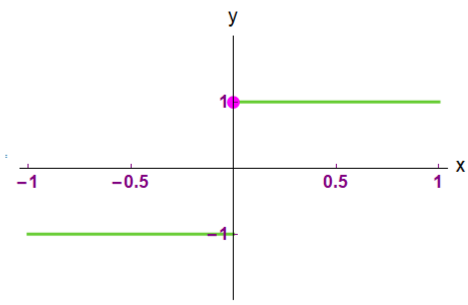
4.2 adibidea. Aztertu ea honako funtzio hau jarraitua den $x = 0$ puntuan:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ez da existitzen funtzioaren limiterik $x = 0$ puntuan, albo-limiteak ezberdinak baitira.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) & = -1, \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) & = 1. \end{cases}$$

Beraz, $f(x)$ funtzioa ez da jarraitua $x = 0$ puntuan; ikus 4.2 irudia.



4.2 irudia. 4.2 adibidea.

4.3 adibidea. Aztertu zergatik ez den jarraitua $x = 0$ puntuan honako funtzio hau:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Funtzioaren limitea $x = 0$ puntuan existitzen da. Albo-limiteak $\frac{1-\cos x}{x^2}$ adierazpenean kalkulatzen dira. Limitearen balioa kalkulatzeko, $x \to 0$ den $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ baliokidetasuna erabiliko dugu:

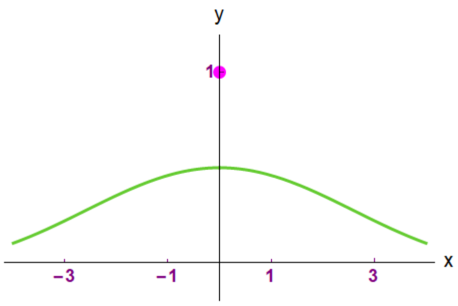
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Hala ere, ez dira berdinak limitea eta irudia:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2} \neq 1 = g(0).$$

Beraz, $g(x)$ funtzioa ez da jarraitua $x = 0$ puntuan; ikus 4.3 irudia. Jarraitua izatea nahiko bagenu, nahikoa litzateke $g(0) = \frac{1}{2}$ izatea. Hau da, honako era honetan definitutako $G(x)$ funtzioa jarraitua da:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x \geq 0. \end{cases}$$



4.3 irudia. 4.3 adibidea.

4.4 adibidea. Kalkulatu honako limite hau funtzioen konposaketaren propietatea aplikatuz:

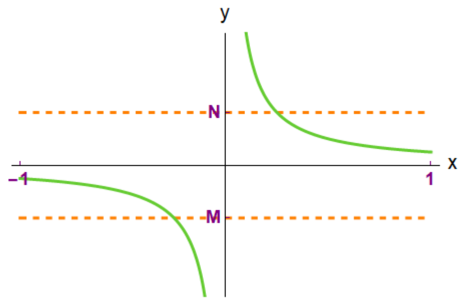
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{x+\pi}{x-2}\right).$$

$f(x) = \frac{x+\pi}{x-2}$ eta $g(x) = \sin x$ izanik, $(g \circ f)$ funtzioen konposaketa daukagu. $f(x)$ funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -\frac{\pi}{2}$ betetzen baita. Era berean, $g(x)$ funtzioa ere jarraitua da $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ puntuan. Beraz, limitea era honetan kalkula daiteke:

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{x+\pi}{x-2}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 0} \frac{x+\pi}{x-2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

4.5 adibidea. Arrazoitu ea $f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioa $x \in [-1, 1]$ tartean goi- eta behe-bornatua dagoen.

$f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioa ez dago goi-bornatua ez behe-bornatua $x \in [-1, 1]$ tartean. Emaitza horrek ez du kontraesaten Weierstrass-en teorema, $f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioa ez baita jarraitua $x = 0$ puntuan; ikus 4.4 irudia.

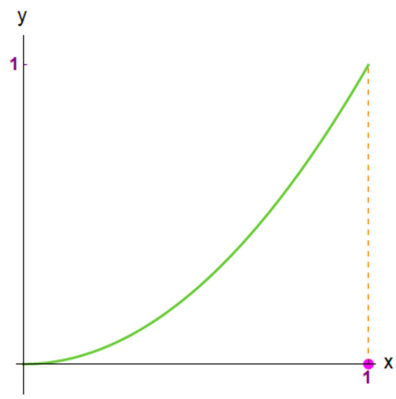


4.4 irudia. 4.5 adibidea.

4.6 adibidea. Aztertu honako funtzio honen balio minimoak eta maximoak:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

$f(x)$ funtzioak balio minimoa hartzen du $x = 0$ denean. Hala ere, ez du hartzen balio maximorik, funtzioa ez baita jarraitua $x = 1$ puntuan; ikus 4.5 irudia. Edozein kasutan, funtzioaren goi- eta behe-borneak dira $M = 1$ eta $N = 0$, hurrenez hurren.



4.5 irudia. 4.6 adibidea.

4.7 adibidea. Aurkitu $f(x) = x^3 - 2$ funtzioaren erro bat $[1, 2]$ tartean.

$f(x) = x^3 - 2$ funtzio jarraitua da $[1, 2]$ tartean, eta muturretan hartzen dituen balioak ikurrez kontrakoak dira. $f(1) = -1$, $f(2) = 6$. Beraz, existitzen da tarte horretan puntu bat funtzioa zero egiten duena: $\exists a \in (1, 2) : f(a) = 0$. Tarte horretako erdiko puntua kalkulatuko dugu, $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. Eta lehenengo iterazioaren osteko errorea da:

$$e_1 < \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}.$$

Hurrengo iterazioko tartea zein den finkatzeko, $f(x_1) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ kalkulatuko dugu: $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{8} > 0$. Beraz, hurrengo iterazioko tartea izango da $[a_1, b_1] = \left[1, \frac{3}{2}\right]$. Tarte horretako erdiko puntua kalkulatuko dugu $x_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$. Eta bigarren iterazioaren osteko errorea da:

$$e_2 < \frac{b-a}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Eta prozesua errepikatuko dugu: $f(x_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{64}$ denez, hurrengo iterazioko tartea $[a_2, b_2] = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$ izango da. Tarte horretako erdiko puntua kalkulatuko dugu, $x_3 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8}$. Eta hirugarren iterazioaren osteko errorea da:

$$e_3 < \frac{b-a}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Errorearentzat daukagun goi-bornea erabilita:

$$e_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{(b_1 - a_1)}{\varepsilon} < 2^n \Rightarrow \ln\left(\frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}\right) < n \cdot \ln 2$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n = E\left[\ln\left(\frac{b_1 - a_1)}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{\ln 2}\right] + 1,$$

$\varepsilon = 10^{-6}$ balioaren azpitik dagoen errorea kalkulatzeko, $n = 20$ iterazio beharko dira.

4.5 Ordenagailuko praktikak

4.1 ariketa. Aztertu honako funtzio honen jarraitutasuna $x = 0$ puntuan: $f(x) = x \sin x$.

Funtzioa definituko dugu:

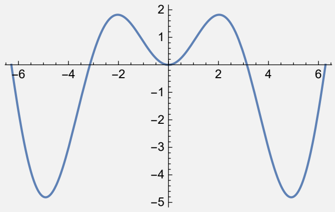
```
f[x_] = x * Sin[x];
a = 0;
```

Alboetako limiteak eta irudia kalkulatuko ditugu $x = 0$ puntuan:

```
Limit[f[x], x → a, Direction → −1]
0
Limit[f[x], x → a, Direction → 1]
0
f[a]

0
```

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ betetzen denez, funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan. Bukatzeko, adierazpen grafikoa egingo dugu:

Plot[f[x], {x, -2π, 2π}]



4.2 ariketa. Aurkitu $f(x) = x^5 + x - 1$ funtzioak erro bat duen tarte bat. Funtzioa definituko dugu:

f[x_] = $x^5 + x - 1$;

Funtzio bat sortuko dugu Mathematican $[k, k+1]$ motako tarteetan erroren bat dagoen ikusteko, $k \in \mathbb{Z}$ izanik. Adibidez, $k = -10$ balioarekin hasiko gara, eta $[-10, -9]$, $[-9, -8]$, ... tarteetan errorik dagoen ikusiko dugu, $[9, 10]$ izanik aztertuko dugun azken tartea. Aipatutako tarteak ordenan aztertuko ditu, eta haietako batean erro bat aurkitzen badu, prozesua gelditu egingo da:

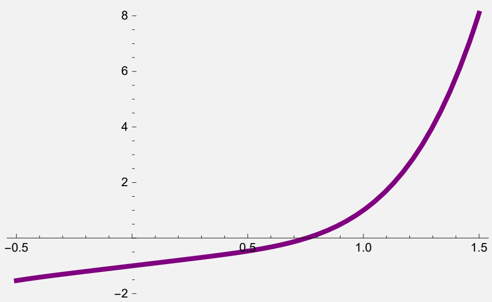
```
For[k = −10, k < 10, k++, {c, d} = {k, k + 1};
If[f[c] ∗ f[d]<=0, Print["Funtzioak erro bat dauka [c,d]=", {c, d}, " tartean."];
k = 10; If[f[c] ∗ f[d]==0,
If[f[c]==0, Print["Erroa da c=", c], Print["Erroa da d=", d]]]]]
```

Funtzioak erro bat dauka [c,d]=$\{0, 1\}$ tartean.

$f(x)$ funtzioak $[c, d] = [0, 1]$ tartean erro bat dauka. Adierazpen grafikoa egingo dugu $[c - \epsilon, d + \epsilon]$ tartean, $\epsilon = 0,5$ izanik:

$\epsilon = 0.5$;

Plot[f[x], {x, $c - \epsilon$, $d + \epsilon$}, PlotStyle → {{Purple, Thickness[0.01]}}]



4.3 ariketa. Aplikatu bisekzio-metodoa $f(x) = e^{-x} - x$ funtzioaren $(0,1)$ tarteko erroak aurkitzeko, $\varepsilon = 10^{-3}$ baino errore txikiagoa eginez.

Funtzioa definituko dugu:

```
f[x_] = E^-x - x;
```

$\varepsilon > 0$ zehaztasuna lortzeko egin beharreko iterazio kopurua honako hau da:

$$n = E\left[\ln\left(\frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{1}{\ln 2}\right] + 1.$$

$E(x)$ parte osoa funtzioa izanik.

Gure kasuan, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, beraz $b_1 - a_1 = 1$. Eta Mathematican definitzen ditugu iterazio kopurua kalkulatzeko behar ditugun osagaiak:

```
it[p_] = IntegerPart[p * Log[10.]/Log[2.]] + 1;

p = 3;

er = 10^-p;

i = it[p] + 1

11
```

Hau da, gehienez 11 iterazio beharko dira eskatzen diguten zehaztasuna lortzeko. Aurreko ariketako prozedura erabilita, erroa $(0,1)$ tartean dagoela ziurtatzen dugu:

```
For[k = -10, k < 10, k++, {c, d} = {k, k + 1};

If[f[c] * f[d]<=0, Print["Funtzioak erro bat dauka [c,d]=", {c, d}, " tartean."];

k = 10; If[f[c] * f[d]==0,

If[f[c]==0, Print["Erroa da c=", c], Print["Erroa da d=", d]]]]]

Funtzioak erro bat dauka [c,d]={0, 1} tartean.
```

Mathematicako *FindRoot* funtzioa erabilita, bila gabiltzan erroaren hurbilpena kalkula daiteke:

```
FindRoot[f[x] == 0, {x, c}]

{x → 0.567143}
```

Beraz, bisekzio-metodoak ere $x \approx 0.567143$ erroa eman beharko liguke. Honako funtzio hau sortu dugu bisekzio-metodoa aplikatzeko:

$\{a[0], b[0]\} = \{c, d\};$

For$[n = 1, n<i, n{+}{+}, x[n] = (a[n-1] + b[n-1])/2.;$

$e[n] = (b[n-1] - a[n-1])/2.;$

If$[f[a[n-1]] * f[x[n]] < 0,$ Print[“Tarte berria da:”];

Print[“ {a[n],b[n]}=”, $\{a[n], b[n]\} = \{a[n-1], x[n]\}$],

Print[“Tarte berria da:”];

Print[“ {a[n],b[n]}=”, $\{a[n], b[n]\} = \{x[n], b[n-1]\}$]];

If$[f[x[n]]{=}{=}0,$ Print[“Erroaren hurbilpena da x[n]=”, $x[n]$,

“ eta errorea e[n]=”, $e[n]$];

$n = i,$

If$[e[n] <$ er, Print[“Erroaren hurbilpena da x[n]=”, $x[n]$, “ eta errorea e[n]=”,

$e[n]$];

Print[“ n ”, n, “ iteraziotan”];

$n = i$, Print[“Erroaren hurbilpena da x[n]=”, $x[n]$, “ eta errorea e[n]=”, $e[n]$];

Print[“n= ”, n, “ iterazioan”];

Print[“**********************”]]]]

Eta lortu dugun emaitza honako hau da:

```
Tarte berria da:
 {a[n],b[n]}={0.5, 1}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.5 eta errorea e[n]=0.5
n= 1 iterazioan
**********************
Tarte berria da:
 {a[n],b[n]}={0.5, 0.75}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.75 eta errorea e[n]=0.25
n= 2 iterazioan
**********************
Tarte berria da:
 {a[n],b[n]}={0.5, 0.625}
```

Erroaren hurbilpena da x[n]=0.625 eta errorea e[n]=0.125
n= 3 iterazioan
****
Tarte berria da:
{a[n],b[n]}={0.5625, 0.625}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.5625 eta errorea e[n]=0.0625
n= 4 iterazioan
****
Tarte berria da:
{a[n],b[n]}={0.5625, 0.59375}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.59375 eta errorea e[n]=0.03125
n= 5 iterazioan
****
Tarte berria da:
{a[n],b[n]}={0.5625, 0.578125}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.578125 eta errorea e[n]=0.015625
n= 6 iterazioan
****
Tarte berria da:
{a[n],b[n]}={0.5625, 0.570313}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.570313 eta errorea e[n]=0.0078125
n= 7 iterazioan
****
Tarte berria da:
{a[n],b[n]}={0.566406, 0.570313}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.566406 eta errorea e[n]=0.00390625
n= 8 iterazioan
****
Tarte berria da:
{a[n],b[n]}={0.566406, 0.568359}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.568359 eta errorea e[n]=0.00195313
n= 9 iterazioan
****
Tarte berria da:
{a[n],b[n]}={0.566406, 0.567383}
Erroaren hurbilpena da x[n]=0.567383 eta errorea e[n]=0.000976563
n= 10 iterazioan

Taula batean jasoko ditugu emaitza horiek:

```
B = Table[{j, a[j − 1], b[j − 1], x[j], e[j], f[x[j]]}, {j, 1, i − 1}];
emaitzak =
TableForm[B,
```

```
TableHeadings → {None, {n, "a[n-1]", "b[n-1]", "x[n]", "e[n]", "f[x[n]]"}}]
```

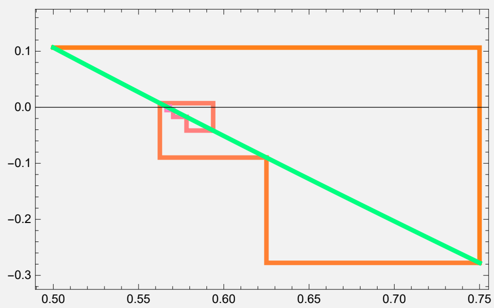
10 iterazio nahikoak izan dira eskatzen diguten zehaztasuna lortzeko. Lortu diren emaitzak 4.1 taulan jaso dira.

n	a[n-1]	b[n-1]	x[n]	e[n]	f[x[n]]
1	0	1	0.5	0.5	0.106531
2	0.5	1	0.75	0.25	-0.277633
3	0.5	0.75	0.625	0.125	-0.0897386
4	0.5	0.625	0.5625	0.0625	0.00728282
5	0.5625	0.625	0.59375	0.03125	-0.0414975
6	0.5625	0.59375	0.578125	0.015625	-0.0171758
7	0.5625	0.578125	0.570313	0.0078125	-0.00496376
8	0.5625	0.570313	0.566406	0.00390625	0.0011552
9	0.566406	0.570313	0.568359	0.00195313	-0.00190536
10	0.566406	0.568359	0.567383	0.000976563	-0.000375349

4.1 taula. 4.3 ariketako emaitzak.

Bukatzeko, adierazpen grafikoa egingo dugu:

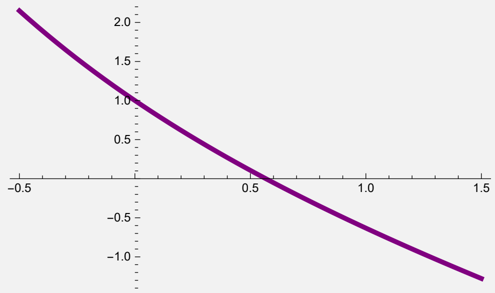
```
g2 = Plot[f[x], {x, 0.5, 0.75}, PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[0, 1, 0.5]},
DisplayFunction → Identity];

g[k_]:=ListPlot[{{x[k], f[x[k]]}, {x[k + 1], f[x[k]]}, {x[k + 1], f[x[k + 1]]}},
Joined → True, PlotStyle → {Thickness[0.01], RGBColor[1, 0.5, 0.1k]},
DisplayFunction → Identity];

Show[g/@Table[k, {k, 1, i − 2}], g2, Frame → True, PlotRange → {−0.3, 0.15},
DisplayFunction → $DisplayFunction]
```



$f(x)$ funtzioak $[c, d] = [0, 1]$ tartean erro bat dauka. Adierazpen grafikoa egingo dugu $[c - \epsilon, d + \epsilon]$ tartean, $\epsilon = 0,5$ izanik:

$\epsilon = 0.5;$

$\text{Plot}[f[x], \{x, c - \epsilon, d + \epsilon\}, \text{PlotStyle} \to \{\{\text{Purple}, \text{Thickness}[0.01]\}\}]$



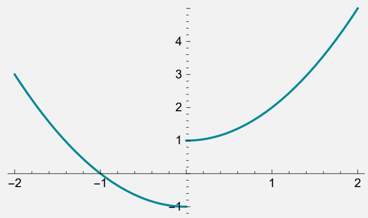
4.4 ariketa. Aztertu honako funtzio honen jarraitutasuna $x = 0$ eta $x = 1$ puntuetan.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

$f[\text{x\_}] = \text{Which}[x < 0, x\text{\^{}}2 - 1, x \geq 0, x\text{\^{}}2 + 1];$

$\text{Plot}[f[x], \{x, -2, 2\}]$



Grafikoa begiratuz ikusten da $x = 0$ puntuan ez dela jarraitua, eta, aldiz, $x = 1$ puntuan jarraitua dela. Alboetako limiteak eta irudia kalkulatuko ditugu, $x = 0$ puntuko jarraitutasuna aztertzeko:

$a = 0;$

$\text{limezk} = \text{Limit}[f[x], x \to a, \text{Direction} \to 1]$

$\text{limesk} = \text{Limit}[f[x], x \to a, \text{Direction} \to -1]$

$f[a]$

-1

1

1

Alboetako limiteak ezberdinak dira $x \to 0$ ra doanean: $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Beraz, limiterik ere ez dauka, eta funtzioa ez da jarraitua puntu horretan.

Prozedura bera jarraituz, $x = 1$ puntuko jarraitutasuna azter daiteke:

$a = 1$;

limezk = Limit[$f[x], x \to a$, Direction $\to 1$]

limesk = Limit[$f[x], x \to a$, Direction $\to -1$]

$f[a]$

2

2

2

Kasu honetan, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$ betetzen denez, funtzioa jarraitua da puntu horretan.

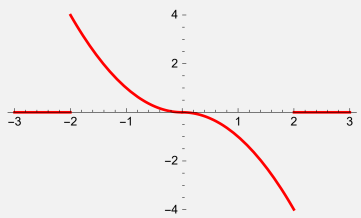
4.5 ariketa. Aztertu honako funtzio honen jarraitutasuna.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0, \\ -x^2, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{gainerako kasuetan.} \end{cases}$$

Funtzioa definituko dugu, eta adierazpen grafikoa egingo dugu:

f[x_] = Which[$-2 \leq x < 0, x^2, 0 \leq x < 2, -x$^2, True, 0];

Plot[$f[x], \{x, -3, 3\}$]



Argi ikusten da $x = 0$ puntuan funtzioa jarraitua dela. Aurreko ariketako prozedura bera erabiliko dugu alboetako limiteak eta irudia kalkulatzeko:

```
a = 0;

limezk0 = Limit[f[x], x → a, Direction → 1]
limesk0 = Limit[f[x], x → a, Direction → −1]
f[0]

0

0

0
```

Eta $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ betetzen denez, funtzioa jarraitua da puntu horretan.

$x = -2$ puntuan funtzioa ez da jarraitua, $\lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$ betetzen baita. Eta $x = 2$ puntuan ere gauza bera gertatzen da: funtzioa ez da jarraitua, $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ betetzen baita. $x = 0$ puntuarekin jarraitutako pauso berdinak jarraitzea nahikoa da hori ikusteko. Gainontzeko x guztietan jarraitua da funtzioa.

4.6 ariketa. Aplikatu bisekzio-metodoa $f(x) = e^{-x} - \cos x$ funtzioaren $[k, k+1]$ tarteko erroak aurkitzeko, $k = -5$ puntutik hasita. Kalkulatu erroaren hurbilpena $p = 10$ zenbaki hamartarreko zehaztasuna erabilita.

Funtzioa definitu dugu:

```
f[x_] = E^-x − Cos[x];
it[p_] = IntegerPart[p * Log[10.]/Log[2.]] + 1;
p = Input["Zenbat hamartar zehatz nahi dituzu?"];
er = 10^-p;
i = it[p] + 1;
x0 = Input["Idatzi erroa aurkitzeko tartearen muturra"];
For[k = −x0, k < x0, k++, {c, d} = {k, k + 1};
If[f[c] * f[d] < 0,
Print["Bila gabiltzan erroa tarte honetan dago: {c,d}=", {c, d}, "."];
```

$k = \text{x0}, \text{If}[f[c] * f[d]{=}{=}0, \text{If}[f[c]{=}{=}0, \text{Print}[\text{“Bila gabiltzan erroa da c=”}, c, \text{“.”}],$

$\text{Print}[\text{“Bila gabiltzan erroa da d=”}, d, \text{“.”}]]]]]$

$\text{Print}[\text{“Beharrezkoak dira n = ”}, i - 1, \text{“ iterazio, gutxienez ”}, p,$

$\text{“ zenbaki hamartar zehatz lortzeko.”}]$

$\{a[0], b[0]\} = \{c, d\};$

$\text{For}[n = 1, n < i, n{+}{+}, x[n] = (a[n-1] + b[n-1])/2.;$

$e[n] = (b[n-1] - a[n-1])/2.; \text{If}[f[x[n]]{=}{=}0, n = i,$

$\text{If}[e[n] < \text{er}, n = i, \text{If}[f[a[n-1]] * f[x[n]] < 0, \{a[n], b[n]\} = \{a[n-1], x[n]\},$

$\{a[n], b[n]\} = \{x[n], b[n-1]\}]]]]$

$B = \text{Table}[\{j, a[j-1], b[j-1], x[j], e[j], f[x[j]]\}, \{j, 1, i-1\}];$

$\text{emaitzak} =$

$\text{TableForm}[B, \text{TableHeadings} \to \{\text{None}, \{\text{n}, \text{“a[n-1]”}, \text{“b[n-1]”}, \text{“x[n]”},$

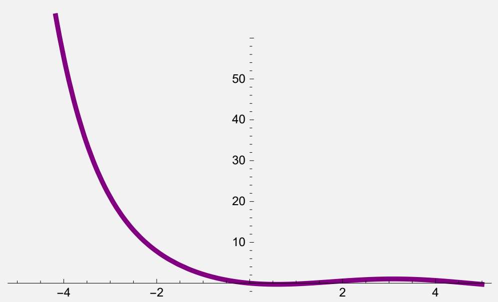
$\text{“e[n]”}, \text{“f[x[n]]”}\}\}]$

Beharrezkoak dira n = 34 iterazio, gutxienez 10 zenbaki hamartar zehatz lortzeko.

Bila gabiltzan erroa da d=0.
Bila gabiltzan erroa da c=0.
Bila gabiltzan erroa tarte honetan dago: {c,d}={1, 2}.

Programak esaten digu $x_1 = 0$ erroa dela, eta badagoela beste erro bat $[c, d] = [1, 2]$ tartean. Egin dezagun funtzioaren adierazpen grafikoa $[-5, 5]$ tartean, hori horrela dela ikusteko:

$\text{Plot}[f[x], \{x, -5, 5\}, \text{PlotStyle->}\{\{\text{Purple}, \text{Thickness}[0.01]\}\}]$



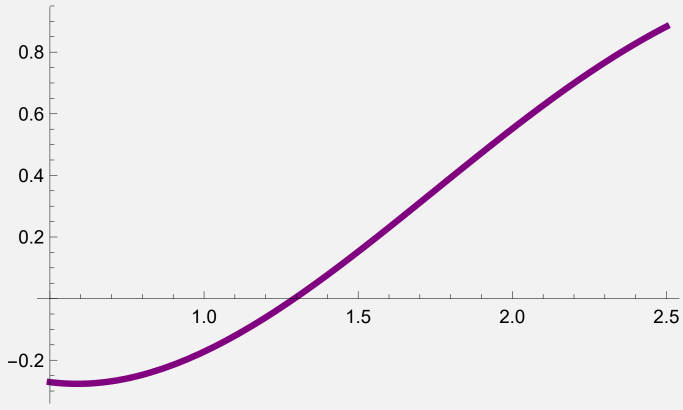
Sortu dugun funtzioak $[k, k+1]$ tarteen muturretako erroak identitifikatzen ditu, eta tarte horietakoren baten barruan erro bat aurkitzen duenean, tarte horretan aplikatzen du bisekzio-metodoa. Gainera, erabiltzaileak defini dezake zein k baliorekin hasi behar den prozesua, eta zein p zehaztasunekin aurkitu nahi den erroa.

4.2 taulan jaso diren emaitzak lortu dira.

Funtzioaren grafikoa egingo dugu $[c-\epsilon, d+\epsilon]$ tartean, $\epsilon = 0,5$ izanik:

$\epsilon = 0.5$;

Plot[$f[x]$, {x, $c - \epsilon$, $d + \epsilon$}, PlotStyle->{{Purple, Thickness[0.01]}}]



n	a[n-1]	b[n-1]	x[n]	e[n]	f[x[n]]
1	1	2	1.5	0.5	0.152393
2	1	1.5	1.25	0.25	-0.0288176
3	1.25	1.5	1.375	0.125	0.0582919
4	1.25	1.375	1.3125	0.0625	0.0137126
5	1.25	1.3125	1.28125	0.03125	-0.0078275
6	1.28125	1.3125	1.29688	0.015625	0.00287615
7	1.28125	1.29688	1.28906	0.0078125	-0.00249257
8	1.28906	1.29688	1.29297	0.00390625	0.000187606
9	1.28906	1.29297	1.29102	0.00195313	-0.00115353
10	1.29102	1.29297	1.29199	0.000976563	-0.000483225
11	1.29199	1.29297	1.29248	0.000488281	-0.000147875
12	1.29248	1.29297	1.29272	0.000244141	0.0000198491
13	1.29248	1.29272	1.2926	0.00012207	-0.000064017
14	1.2926	1.29272	1.29266	0.0000610352	-0.000022085
15	1.29266	1.29272	1.29269	0.0000305176	$-1.11822\ 10^{-6}$
16	1.29269	1.29272	1.29271	0.0000152588	$9.36536\ 10^{-6}$
17	1.29269	1.29271	1.2927	$7.62939\ 10^{-6}$	$4.12355\ 10^{-6}$
18	1.29269	1.2927	1.2927	$3.8147\ 10^{-6}$	$1.50266\ 10^{-6}$
19	1.29269	1.2927	1.2927	$1.90735\ 10^{-6}$	$1.92217\ 10^{-7}$
20	1.29269	1.2927	1.2927	$9.53674\ 10^{-7}$	$-4.63004\ 10^{-7}$
21	1.2927	1.2927	1.2927	$4.76837\ 10^{-7}$	$-1.35393\ 10^{-7}$
22	1.2927	1.2927	1.2927	$2.38419\ 10^{-7}$	$2.84119\ 10^{-8}$
23	1.2927	1.2927	1.2927	$1.19209\ 10^{-7}$	$-5.34907\ 10^{-8}$
24	1.2927	1.2927	1.2927	$5.96046\ 10^{-8}$	$-1.25394\ 10^{-8}$
25	1.2927	1.2927	1.2927	$2.98023\ 10^{-8}$	$7.93624\ 10^{-9}$
26	1.2927	1.2927	1.2927	$1.49012\ 10^{-8}$	$-2.30158\ 10^{-9}$
27	1.2927	1.2927	1.2927	$7.45058\ 10^{-9}$	$2.81733\ 10^{-9}$
28	1.2927	1.2927	1.2927	$3.72529\ 10^{-9}$	2.5787510^{-10}
29	1.2927	1.2927	1.2927	$1.86265\ 10^{-9}$	$-1.02185\ 10^{-9}$
30	1.2927	1.2927	1.2927	$9.31323\ 10^{-10}$	$-3.81989\ 10^{-10}$
31	1.2927	1.2927	1.2927	$4.65661\ 10^{-10}$	$-6.20571\ 10^{-11}$
32	1.2927	1.2927	1.2927	2.3283110^{-10}	$9.79089\ 10^{-11}$
33	1.2927	1.2927	1.2927	$1.16415\ 10^{-10}$	$1.79258\ 10^{-11}$
34	1.2927	1.2927	1.2927	$5.82077\ 10^{-11}$	$-2.20657\ 10^{-11}$

4.2 taula. 4.6 ariketako emaitzak.

5. kapitulua

Aldagai errealeko funtzio errealen deribagarritasuna

Hainbat problematan azaltzen da magnitude batek beste magnitude batekiko duen aldaketa-tasa kalkulatzeko beharrizana. Besteak beste: populazioen dinamikan, produkzioaren erritmoan, uraren fluxuan, eta abarretan. Funtzio batek aldagai batekiko duen aldaketa-tasa deribatuaren bidez emana dator. Hain zuzen, funtzio baten deribatuak aldagaiaren aldakuntzak funtzioan eragiten duen aldaketa adierazten du.

5.1 Deribatua

Definizioa. $f(x)$ funtzioa diferentziagarria da $x = a$ puntuan, baldin eta soilik baldin honako limite hau existitzen bada:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Goiko limitea eta honako beste limite hau berdinak dira (nahikoa da $x = a + h$ aldagai-aldaketa egitea):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Orduan, $f(x)$ funtzioaren $x = a$ puntuko deribatua limite horren balioa da, eta $f'(a)$ adierazten da.

Limitearen definizioa erabiliz, zera daukagu: limite hori existitzeko albo-limiteak existitu behar dira, eta biek berdinak izan behar dute. Hau da:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)^+,$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)^-.$$

Albo-limite horiei *albo-deribatu* deritze.

Teorema. Baldin $f(x)$ funtzioa $x = a$ puntuan deribagarria bada, orduan, $f(x)$ jarraitua ere bada puntu berean.

Puntu bateko zuzen ukitzailea. Baldin $f(x)$ funtzioa $x = a$ puntuan deribagarria bada, orduan, honako hau da $(a, f(a))$ puntuko $f(x)$ funtzioarekiko zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

$f'(a)$ izanik, zuzen ukitzailearen malda; $f(x)$ funtzioaren $x = a$ puntuko deribatua, alegia.

5.2 Deribazio-arauak

Eragiketa aljebraikoak funtzio deribagarriekin. Baldin $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ $x = \nabla$ puntuan deribagarriak diren bi funtzio badira, orduan:

$$(\lambda f_1)'(\nabla) = \lambda f_1'(\nabla), \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(f_1 \pm f_2)(\nabla) = f_1'(\nabla) \pm f_2'(\nabla),$$

$$(f_1 \cdot f_2)'(\nabla) = f_1'(\nabla) \cdot f_2(\nabla) + f_1(\nabla) \cdot f_2'(\nabla),$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(\nabla) = \frac{f_1'(\nabla) \cdot f_2(\nabla) - f_1(\nabla) \cdot f_2'(\nabla)}{(f_2(\nabla))^2} \quad f_2(\nabla) \neq 0.$$

Katearen erregela. Izan bedi $f(x)$, $x = a$ puntuan deribagarria den funtzioa, eta $g(x)$, $x = f(a)$ puntuan deribagarria dena. Orduan, $(g \circ f)(x)$ funtzioa deribagarria da $x = a$ puntuan, eta honako berdintza hau erabilita kalkulatzen da deribatu hori:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Funtzio baten deribatua. $f(x)$ funtzioa (a, b) tartean deribagarria bada, tarte horretako puntu guztietan existitzen da deribatua, eta $\forall x \in (a, b)$ $f'(x)$ balioa egokitzen dio.

Ondoz ondoko deribatuak. $f(x)$ funtzioa A_0 tartean deribagarria bada, eta, era berean, $f'(x)$ funtzioa $A_1 \subset A_0$ tartean deribagarria, orduan esaten da $f(x)$ funtzioa bi aldiz deribagarria dela A_1 tartean. Bigarren deribatua $f''(x) = (f'(x))'$ adierazten da. Orokorrean, $f(x)$ funtzioa n aldiz deribagarria bada, orduan bere n. deribatua existitu egiten da, eta $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ adierazten da.

Alderantzizko funtzioaren deribatua. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to f(D) \subset \mathbb{R}$ funtzio deribagarria. Orduan, bere alderantzizkoa $f^{-1}\colon f(D) \subset \mathbb{R} \to D \subset \mathbb{R}$ ere deribagarria da, eta bere deribatua honako era honetan kalkulatzen da:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{5.1}$$

5.2.1 Oinarrizko funtzioen deribatuak

$f(x) = a$ (konstante) ;	$f'(x) = 0$
$f(x) = \lambda x;$	$f'(x) = \lambda$
$f(x) = x^n;$	$f'(x) = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \|u(x)\|;$	$f'(x) = sgn(u(x)) \cdot u'(x)$
$f(x) = \ln x;$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \ln_a x, \ a > 0, a \neq 1;$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
$f(x) = e^{\lambda x};$	$f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$
$f(x) = a^{\lambda x}, \ a > 0;$	$f'(x) = \lambda a^{\lambda x} \ln a$
$f(x) = u(v(x));$	$f'(x) = u'(v(x))\, v'(x)$
$f(x) = \sin \varphi(x);$	$f'(x) = \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x)$
$f(x) = \cos \varphi(x);$	$f'(x) = -\sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)$
$f(x) = \tan \varphi(x);$	$f'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)}$
$f(x) = \cot \varphi(x);$	$f'(x) = -\dfrac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)}$
$f(x) = \arcsin \varphi(x);$	$f'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}}$
$f(x) = \arccos \varphi(x);$	$f'(x) = -\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 - \varphi^2(x)}}$
$f(x) = \arctan \varphi(x);$	$f'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{1 + \varphi^2(x)}$
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x$	$f'(x) = 1 - \tanh^2 x$
$f(x) = \arg\sinh x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x) = \arg\cosh x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$f(x) = \arg\tanh x$	$f'(x) \dfrac{1}{(1 - x^2)^2}$

Oinarrizko funtzioen deribatuen taula eta katearen erregela erabilita, edozein funtzioren deribatua kalkula daiteke.

5.2.2 Diferentzialak

Definizioa. $f(x + \Delta x) - f(x)$ diferentziari f-ren gehikuntza (x-tik $x + \Delta x$-ra) esaten zaio, eta Δf-z adierazten da:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

$f'(x)\Delta x$ biderkadurari *diferentzial* (x-n, Δx gehikuntzarekin) esaten zaio, eta honela adierazten da:

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Diferentzialak posible egiten du $f(x)$ funtzioaren aldaketa kalkulatzea, x aldagaiaren balioa Δx aldatu denean, eta era honetan idatz daiteke:

$$df = f'(x)dx.$$

h txikia den kasuetarako,

$$\Delta f \approx df.$$

Definizioa. $f(x)$ funtzioaren bigarren ordenako diferentziala honako adierazpen honen bidez emana dator: $d^2f = f''(x)dx^2$. Era berean, $f(x)$ funtzioaren n. ordenako diferentziala honako adierazpen honen bidez emana dator: $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$.

Eragiketa aljebraikoak diferentzialekin. Baldin $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ $x = \nabla$ puntuan deribagarriak diren bi funtzio badira, orduan:

$$y = k,\ k \in \mathbb{R}, \Rightarrow dy = 0,$$

$$d\left(\lambda f_1\right)(\nabla) = \lambda df_1(\nabla), \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$d(f_1 \pm f_2)(\nabla) = df_1(\nabla) \pm df_2(\nabla),$$

$$d(f_1 \cdot f_2)(\nabla) = df_1(\nabla) \cdot f_2(\nabla) + f_1(\nabla) \cdot df_2(\nabla),$$

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(\nabla) = \frac{df_1(\nabla) \cdot f_2(\nabla) - f_1(\nabla) \cdot df_2(\nabla)}{(f_2(\nabla))^2} \quad f_2(\nabla) \neq 0.$$

5.3 Funtzio baten erroak kalkulatzeko iterazio-metodoak

$f(x)$ funtzioa emanik, bere zeroak kalkulatzeko bi iterazio-metodo ikusiko ditugu atal honetan. Hau da, $f(x) = 0$ ekuazioa betetzen duten puntuak kalkulatuko ditugu.

5.3.1 Puntu finkoaren metodoa

Puntu finkoaren metodoa $f(x) = 0$ ekuazioaren erroak kalkulatzeko erabiltzen den iterazio-teknika da. Horretarako, honako era honetan idatzi behar da ekuazioa:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = g(x).$$

Horrela, berdina da $f(x) = 0$ ekuazioaren erroak aurkitzea, eta $x = g(x)$ betetzen duten puntuak aurkitzea. Hau da, $g(x)$ funtzioaren puntu finkoak aurkitu behar dira, $p = g(p)$ betetzen duten puntuak, alegia.

Funtzio kontraktiboa. $g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa kontraktiboa da, existitzen bada $0 \leq k \leq 1$ honako baldintza hau betetzen duena:

$$|g(x_1) - g(x_2)| < k\,|x_1 - x_2|\,, \forall x_1, x_2 \in [a,b].$$

Teorema. Izan bedi $g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ honako baldintza hauek betetzen dituen funtzioa:

a) $g(x)$ deribagarria $[a,b]$ tartean.

b) $g(x)$ kontraktiboa $[a,b]$ tartean.

Orduan, existitzen da $g(x)$ funtzioaren puntu finko bat, eta hura bakarra da: $\exists!\alpha : \alpha = g(\alpha)$. Gainera, honako era honetan osatutako segidak α puntu finkora jotzen du:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0),\\ x_2 &= g(x_1),\\ &\vdots\\ x_{n+1} &= g(x_n). \end{aligned}$$

Teorema. Izan bedi $g\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deribagarria eta $g'(x) < 1$ betetzen duena, $\forall x \in (a,b)$. Orduan, $g(x)$ funtzioa kontraktiboa da $[a,b]$ tartean.

Puntu-finkoaren metodoaren aplikazioa. Demagun $f(x)$ funtzioaren erroak aurkitu nahi ditugula $[a,b]$ tartean. Horretarako, $f(x) = 0$ ekuazioa $x = g(x)$ bezala idatziko dugu. $x_0 \in [a,b]$ puntu bat hartuko dugu, eta honako segida hau osatuko dugu:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0),\\ x_2 &= g(x_1),\\ &\vdots\\ x_{n+1} &= g(x_n). \end{aligned}$$

Metodoaren gelditze-irizpide bezala erabil daiteke errore erlatiboa ezarritako balio bat (*tol* tolerantzia) baino txikiagoa denean metodoa gelditzea:

$$e_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} < tol.$$

5.3.2 Newton-Raphson-en metodoa

Newton-Raphson-en metodoak $f(x) = 0$ motako ekuazio bat askatzeko balio du, hasierako x_0 balio bat emanda. Beste era batean esanda, x_0 balio batetik abiatuz, $f(x)$ funtzioaren erroak kalkulatzeko balio duen metodoa da Newton-Raphson-ena. Lehenik eta behin, $f(x_0)$ balioa kalkulatzen da, $(x_0, f(x_0))$ puntutik $f(x)$ funtzioarekiko zuzen ukitzailea marrazten da, eta zuzen honek OX ardatza mozten duen puntua kalkulatzen da. $f(x)$ funtzioa lineala balitz, zuzen ukitzaileak OX ardatza mozten duen puntua litzateke $f(x)$ funtzioaren erroa. Orokorrean, x_1 deituko dugun puntu berri hau funtzioaren erroaren hurbilpen bat da, eta hasieran izan dugun x_0 puntua baino hobea gainera. Puntu berri hori lortzeko, analitikoki hauxe egin behar da: $(x_0, f(x_0))$ puntutik pasatzen den $f(x)$ funtzioarekiko zuzen ukitzailearen ekuazioa idatzi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

eta zuzen horrek OX ardatza mozten duen puntua kalkulatzeko, $y = 0$ ordezkatu zuzenean. Hori eginda, honako puntu hau lortzen da:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Prozesu bera jarraitzen da ezarritako gelditze-irizpidea betetzen den arte. Orokorrean, x_n puntu batetik abiatuz x_{n+1} hurbilpena lortuko dugu honako ekuazio hau erabilita:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Teorema. Izan bedi $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ honako baldintza hauek betetzen dituen funtzioa:

a) $f(a) \cdot f(b) < 0$.

b) $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

c) $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$ (edo $f''(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$).

Orduan, $x_0 \in [a,b]$ puntu batetik abiatu eta Newton-Raphson-en metodoa aplikatuz lortzen den $\{x_n\}$ segidak $f(\alpha) = 0$ betetzen duen α puntura jotzen du.

5.4 Adibideak

5.1 adibidea. Harri bat 756 metroko altuera batetik botatzen da lurrera. Harriak t segundotan $s(t) = 21t^2$ metro egiten ditu. Harriak lurrera heltzeko behar duen denbora honako era honetan kalkula daiteke:

$$s(t) = 756 \Rightarrow 21t^2 = 756 \Rightarrow t^2 = 36 \Rightarrow t = 6.$$

$t = 6$ segundo behar ditu lurrerainoko distantzia egiteko.

Harriaren batez besteko abiadura honako era honetan kalkula daiteke:

$$v_m = \frac{s\,(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Kontuan hartuz 6 segundo behar izan dituela lurrera heltzeko, $\Delta t = 6$, beraz:

$$v_m = \frac{s\,(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{756}{6} = 126m/s.$$

Lehenengo 3 segundoetako batez besteko abiadura kalkulatzeko jakin beharko dugu zein distantzia egin duen $t = 3$ segundotan: $s(t) = 21 \cdot 3^2 = 189$ metro. Beraz, lehenengo 3 segundoetako batez besteko abiadura honako hau da:

$$v_m = \frac{s\,(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{189}{3} = 63m/s.$$

Harriaren abiadura eta azelerazioa kalkulatzeko, honako deribatu hauek kalkulatu behar dira:

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) = 42t, \\ a(t) &= v'(t) = s''(t) = 42. \end{aligned}$$

Eta $t = 6$ segundo denean, honako hauek izango dira abiaduraren eta azelerazioaren balioak:

$$\begin{aligned} v(6) &= 252m/s, \\ a(6) &= 42m/s^2. \end{aligned}$$

5.2 adibidea. Aztertu honako funtzio honen deribagarritasuna:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$f(x)$ funtzioa ez da jarraitua $x = 0$ puntuan, alboetako limiteak ez baitira berdinak $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} (-x^2 - 1) &= -1, \\ \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 1) &= +1. \end{aligned}$$

Funtzioa $x = 0$ puntuan ez da deribagarria izango jarraitua ez delako. Ikus dezagun zer gertatuko litzatekeen alboetako deribatuak kalkulatuko bagenitu:

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = 0, \\ f'(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 - 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 - 2}{x} = \infty. \end{aligned}$$

Hau da, funtzioa ez da deribagarria $x = 0$ puntuan jarraitua ez delako.

5.3 adibidea. Aztertu honako funtzio honen deribagarritasuna:

$$f(x) = |x|\,.$$

Balio absolutuaren funtzioa era honetan deskonposatzen da:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

$f(x)$ funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan, alboetako limiteak eta irudia berdinak baitira:

$$\lim_{x\to 0^-} -x = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} x = 0,$$
$$f(0) = 0.$$

Alboetako deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1,$$
$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1.$$

Alboetako deribatuak ezberdinak direnez, $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, funtzioa ez da deribagarria $x = 0$ puntuan.

5.4 adibidea. Kalkulatu $h(x) = \cos(x^3)$ funtzioaren deribatua katearen erregela erabilita.

$h(x) = \cos(x^3)$ funtzioa $f(x) = x^3$ eta $g(x) = \cos x$ funtzioen konposaketa da:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(x^3).$$

Bere deribatua honako era honetan kalkulatzen da, katearen erregela erabiliz:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Kontuan hartuz $g'(x) = -\sin x$ eta $f'(x) = 3x^2$ direla, orduan:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -3x^2 \sin\left(x^3\right).$$

5.5 adibidea. Harri bat urtegi bare batera erortzen uzten da. Erortzen denean, uhin zentrokideak sortzen ditu. Kanporengo uhinaren r erradioa 30 cm/s handitzen da. Kalkulatu zein abiadurarekin handitzen den uhina dagoen azalera, kanporengo uhinaren erradioa 120 cm-koa denean.

Alde batetik, zirkunferentziaren azalera behar dugu:

$$A = \pi \cdot r^2.$$

Uhinaren erradioa denboraren menpekoa denez, $r = r(t)$ izango dugu, eta azalera ere denboraren menpekoa izango da:

$$A(t) = \pi \cdot (r(t))^2.$$

Ariketak eskatzen du $A'(t)$ kalkulatzeko $r = 120$ cm den aldiunean. Zirkunferentziaren erradioa 30 cm/s handitzen dela esateak $r'(t) = 30$ cm/s dela esan nahi du. Beraz, $A'(t)$ kalkulatuko dugu:

$$A'(t) = 2\pi r(t) r'(t).$$

Eta, bukatzeko, $r = 120$ cm dela ordezkatuko dugu:

$$A'(t)|_{r(t)=120} = 2\pi \cdot 120 \cdot 30 = 7200\pi cm^2/s.$$

5.6 adibidea. Globo esferiko batean airea ponpatzen da, $4,5$ cm^3/minutuko. Kalkulatu globoaren erradioaren aldaketa zein den, $r = 2$ cm denean. Kalkulatu erradioaren balioa denboraren menpe.

Globo esferiko baten bolumenaren adierazpena izan behar da kontuan:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Globoaren erradioa denboraren menpekoa denez, $r = r(t)$ izango dugu, eta bere bolumena ere denboraren menpekoa izango da:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi \left(r(t)\right)^3.$$

Airea $4,5$ cm^3/minutuko ponpatzen ari garenez, $V'(t) = 4,5$ cm^3/minutuko. Eta galdetzen digute $r'(t)$ kalkulatzeko $r = 2$ cm denean. Horretarako, bolumena deribatuko dugu, eta ekuaziotik $r'(t)$ askatuko dugu:

$$V'(t) = 4\pi \left(r(t)\right)^2 r'(t) \Rightarrow r'(t) = \frac{1}{4\pi r^2}V'(t).$$

Eta ditugun datuak ordezkatuz, honako hau daukagu:

$$r'(t)|_{r=2} = \frac{1}{4\pi 2^2}4,5 = \frac{9}{32\pi}cm/min.$$

Bolumenaren adierazpena lor daiteke bere deribatua integratuz:

$$V'(t) = 4,5 \Rightarrow V(t) = 4,5 \cdot t \Rightarrow V(t) = 4,5 \cdot t = \frac{4}{3}\pi \left(r(t)\right)^3 \Rightarrow r(t) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{t}{\pi}}.$$

5.7 adibidea. Kalkulatu honako funtzio honen n. deribatua: $y(x) = k\exp^{kx}$.
Zenbait deribatu kalkulatuko ditugu:

$$\begin{aligned} y' &= k\exp^{kx}, \\ y'' &= k^2\exp^{kx}, \\ y''' &= k^3\exp^{kx}. \end{aligned}$$

Kalkulatu ditugun deribatuak kontuan hartuz, ematen du $y^{(n)} = k^n \exp^{kx}$ dela. Indukzio matematikoa aplikatuko dugu.

- $n = 1$ denean, $y^{(n)} = k^n \exp^{kx}$ adierazpena bete egiten da. Hau da, lehenengo deribatuak bete egiten du.
- n zenbaki arrunt batentzat bete egiten dela suposatuz, $n + 1$ baliorako bete egiten dela frogatuko dugu. Hau da, $y^{(n+1)} = k^{n+1}\exp^{kx}$ egia dela.

$$y^{(n+1)} = k^{n+1}\exp^{kx} \Rightarrow \left(y^{(n)}\right)' = \left(k^n\exp^{kx}\right)' = kk^n\exp^{kx} = k^{n+1}\exp^{kx}.$$

Beraz, frogatuta geratzen da $y(x) = k\exp^{kx}$ funtzioaren n. deribatua $y^{(n)} = k^n \exp^{kx}$ dela.

5.8 adibidea. Frogatu $y = \sin x$ funtzioak honako berdintza hau betetzen duela: $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, n zenbaki arrunta izanik.

$y = \sin x$ funtzioaren lehenengo deribatua $y' = \cos x$ da. Eta honako era honetan idatz daiteke:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Bigarren deribatuko funtzioa: $y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Eta funtzio hau ere honako era honetan idatz daiteke:

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Indukzio matematikoa aplikatuz, $n = 1$ kasuan bete egiten da adierazpena. Pentsatuko dugu n balio orokor batek ere bete egiten duela, eta $n+1$ denean ea $y^{(n+1)} = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ betetzen den ikusiko dugu:

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Hortaz, frogatuta geratzen da $y = \sin x$ funtzioaren n. deribatua $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ dela.

5.9 adibidea. Kalkulatu $y = \arcsin x$ funtzioaren deribatua, alderantzizkoaren deribatua kalkulatzeko formula erabilita.

$y = \arcsin x$ funtzioaren alderantzizkoa da $x = \sin y$. Hau da, $f(x) = \sin x$ eta $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Alderantzizkoaren deribatua kalkulatzeko formulak zera esaten du:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Adibide honetan: $f'(x) = \cos x$. Eta deribatu hau honako era honetan idatz daiteke $\sin x$ funtzioaren menpe:

$$f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}.$$

Beraz, $f^{-1}(x) = \arcsin x$ funtzioaren deribatua honako hau da:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5.10 adibidea. Erabili diferentziala $\sqrt{27}$ balioaren hurbilpen bat kalkulatzeko.

Honako funtzio hau definituko dugu: $f(x) = \sqrt{x}$. Funtzio baten gehikuntza era honetan definitzen da:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x).$$

$f'(x)h$ biderkadurari *diferentzial* (x-n, h gehikuntzarekin) esaten zaio, eta honela adierazten da:

$$df = f'(x)h.$$

h txikia den kasuetarako, honako hau betetzen da:

$$\Delta f \approx df.$$

Esku artean daukagun adibidean, $x+h=27$ eta $h=2$ aukeratuko dugu, $x=25$ izan dadin. Era horretan, ezaguna da $f(25)=\sqrt{25}=5$:

$$\Delta f = f(x+h)-f(x)=\sqrt{27}-\sqrt{25}=\sqrt{27}-5.$$

Eta h txikia den kasuetarako daukagun hurbilpena erabilita, honako hau lortzen da:

$$\Delta f \approx df \Rightarrow \sqrt{27}-5 \approx \frac{1}{2\sqrt{25}}2 \Rightarrow \sqrt{27} \approx 5+0,2=5,2.$$

5.11 adibidea. Kalkulatu honako ekuazio hau betetzen duen $y=y(x)$ funtzioaren $\frac{dy}{dx}$ deribatua: $\sin(x+y)+xy^2=2$.

Adierazpenaren alde bietan diferentzialak aplikatuz, honako hau daukagu:

$$d\left(\sin(x+y)+xy^2\right)=d(2) \Rightarrow d\left(\sin(x+y)\right)+d\left(xy^2\right)=0$$
$$\Rightarrow \cos(x+y)d(x+y)+y^2dx+xd\left(y^2\right)=0 \Rightarrow \cos(x+y)(dx+dy)+y^2dx+x2ydy=0$$
$$\Rightarrow dx\left(\cos(x+y)+y^2\right)+dy\left(\cos(x+y)+2xy\right)=0 \Rightarrow -\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+y)+y^2}{\cos(x+y)+2xy}.$$

5.12 adibidea. Kalkulatu honako funtzio inplizitu honen $\frac{dy}{dx}$ deribatua: $\sqrt{x^2+y^2}+\tan(xy^2)=0$.

Adierazpenaren alde biak deribatuko ditugu:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2}+\tan(xy^2)\right)=\frac{d}{dx}(0) \Rightarrow \frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\cos^2(xy^2)}\left(y^2+2xyy'\right)=0$$
$$\Rightarrow y'=-\frac{x\cos^2(xy^2)+y^2\sqrt{x^2+y^2}}{y\cos^2(xy^2)+2xy\sqrt{x^2+y^2}}.$$

5.5 Ordenagailuko praktikak

5.1 ariketa. Definitu $f(x)=\sin x$ funtzioaren deribatua, definizioa erabilita Mathematican.

$f(x)$ funtzioa $x=a$ puntuan deribagarria da, honako limite hau existitzen bada eta finitua bada:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

Deribatu nahi dugun funtzioa definituko dugu, eta deribatua kalkulatzeko beharrezkoa den limitea ere bai:

$f[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Sin}[x];$

$\mathrm{df}[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \to 0\right]$

$\mathrm{Cos}[x]$

$f'(0)$ kalkulatzeko, nahikoa da $f'(x) = \cos x$ funtzioan $x = 0$ ordezkatzea:

df[0]

1

Alboetako deribatuak era honetan kalkulatzen dira Mathematican:

$\mathrm{dfezker}[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \to 0, \mathrm{Direction} \to 1\right]$

$\mathrm{Cos}[x]$

$\mathrm{dfeskuin}[\mathrm{x\_}] = \mathrm{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \to 0, \mathrm{Direction} \to -1\right]$

$\mathrm{Cos}[x]$

5.2 ariketa. Kalkulatu $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x - 7$ funtzioaren lehenengo hiru deribatuak, eta ebaluatu $x = 1$ puntuan.

Funtzioa definituko dugu:

$f[\mathrm{x\_}] = x^5 - 2x^3 + 4x - 7;$

Mathematican deribatuak kalkulatzeko era bat baino gehiago daude. Honako hau da horietako bat:

$f'[x]$

$4 - 6x^2 + 5x^4$

$f''[x]$

$-12x + 20x^3$

f'''[x]

$-12 + 60x^2$

$f'(1)$, $f''(1)$ eta $f'''(1)$ honako era honetan ebaluatzen dira:

f'[1]

3

f''[1]

8

f'''[1]

48

Mathematicako D[*f(x)*, *aukerak*] funtzioa erabilita ere kalkula daitezke deribatuak:

D[f[x], x]

$4 - 6x^2 + 5x^4$

Ordena altuagoko deribatuak ere kalkula daitezke:

D[f[x], {x, 3}]

$-12 + 60x^2$

Eta posible da deribatuak puntu batean ebaluatzea ere:

D[f[x], x]/.x → 1

3

5.3 ariketa. Kalkulatu eta irudikatu $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ funtzioaren $(2, f(2))$ puntuko zuzen ebakitzailea, zuzen ukitzailea eta zuzen normala.

$f(x)$ funtzioko bi puntu, $(a, f(a))$ eta $(b, f(b))$, lotzen dituen $g(x)$ zuzen ebakitzailearen ekuazioa honako hau da:

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Mathematican definituko dugu zuzen ebakitzaile hori:

ebaki[f_, x_, a_, b_] = (*f*[*b*] − *f*[*a*]) ∗ (*x* − *a*)/(*b* − *a*) + *f*[*a*]

$f[a] + \frac{(-a+x)(-f[a]+f[b])}{-a+b}$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ funtzioa definituko dugu, eta $(2, f(2))$ eta $(b, f(b))$ puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailea irudikatuko dugu $b$ren balio ezberdinetarako:

f1[x_] = $x^3 - 2x^2 + 1$;

graf1 = Plot[f1[*x*], {*x*, 1, 7},

PlotStyle → {RGBColor[0.2, 0.2, 0.8], Thickness[0.007]}];

ebakitzaileak = Table[ebaki[f1, *x*, 2, *n*], {*n*, 3, 6}]

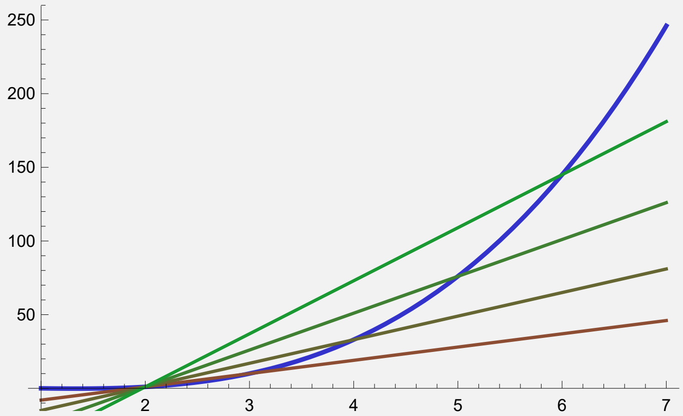
$\{1 + 9(-2 + x), 1 + 16(-2 + x), 1 + 25(-2 + x), 1 + 36(-2 + x)\}$

kolorea = Table[{RGBColor[1 − 0.15 ∗ *n*, 0.1 ∗ *n*, 0.2], Thickness[0.005]},

{*n*, 3, 6}];

grafebaki = Plot[ebakitzaileak, {*x*, 1, 7}, PlotStyle → kolorea];

p1 = Show[graf1, grafebaki]



$(a, f(a))$ puntutik igarotzen den $f(x)$ funtzioarekiko zuzen ukitzailea definituko dugu ondoren:

tan[f_, x_, a_] = $f'[a] * (x - a) + f[a]$

$f[a] + (-a + x)f'[a]$

Eta a paramatroaren zenbait baliotarako $f(x)$ funtzioarekiko zuzen ukitzaileak irudikatuko ditugu:

graf1 = Plot[f1[x], {x, 1, 7},

PlotStyle → {RGBColor[0.2, 0.2, 1], Thickness[0.008]}];

tangenteak = Table[tan[f1, x, n], {n, 2, 5}]

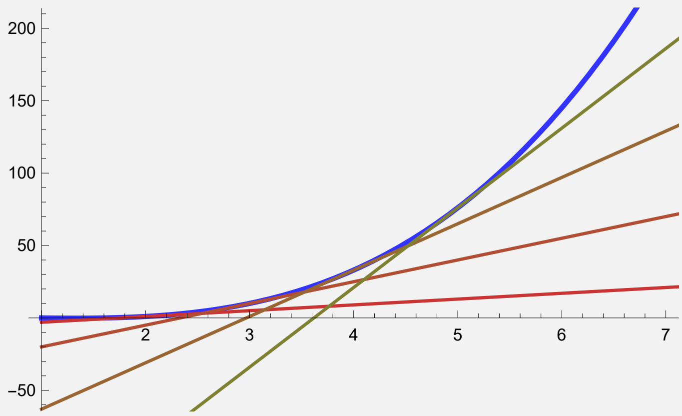
$\{1 + 4(-2 + x), 10 + 15(-3 + x), 33 + 32(-4 + x), 76 + 55(-5 + x)\}$

kolorea2 = Table[{RGBColor[1 − 0.1 ∗ n, 0.1 ∗ n, 0.2], Thickness[0.005]},

{n, 2, 5}];

graftan = Plot[tangenteak, {x, 1, 10}, PlotStyle → kolorea2];

p2 = Show[graf1, graftan, PlotRange → {{1, 7}, {−50, 200}}]



Bukatzeko, $f(x)$ funtzioarekiko $(a, f(a))$ puntuan perpendikularra den zuzena definituko dugu. Zuzen horren ekuazioa honako hau da:

$$n(x) - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Mathematican, $f(x)$ funtzioarekiko $(2, f(2))$ puntuko zuzen normala definitu eta irudikatuko dugu:

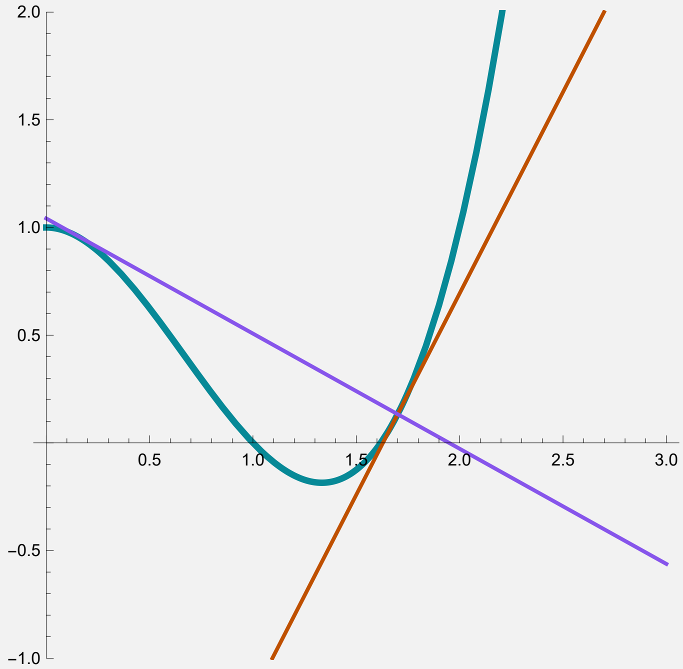
$$\mathbf{normala[f\_, x\_, a\_] = (-1/f'[a]) * (x - a) + f[a]}$$

$$f[a] - \frac{-a+x}{f'[a]}$$

$$\mathbf{p3 = Plot[\{f1[x], tan[f1, x, 1.7], normala[f1, x, 1.7]\}, \{x, 0, 3\},}$$

$$\mathbf{PlotStyle \to \{Thickness[0.01], Thickness[0.006], Thickness[0.006]\},}$$

$$\mathbf{PlotRange \to \{-1, 2\}, AspectRatio \to 1]}$$



5.4 ariketa. Kalkulatu $e^{-x} - x = 0$ ekuazioaren $(0, 1)$ tarteko erroa Newton-Raphson-en metodoa erabilita, eta 10^{-3} baino errore txikiagoa eginez.

Datuak definituko ditugu: $f(x)$ funtzioa, tarteko muturrak $(a, b) = (0, 1)$ eta nahi dugun zehaztasuna:

$$\mathbf{f[x\_] = E^{-x} - x;}$$

$$\mathbf{a = 0; b = 1;}$$

$$\mathbf{er = 10\text{^}(-3);}$$

Erroa dagoen tartea aurkitzeko, $[k, k+1]$ motako tarteetan egingo dugu bilaketa, honako prozedura hau erabiliz:

For[$k = -10, k < 10, k{+}{+}, \{c, d\} = \{k, k + 1\}$;

If[$f[c] * f[d] < 0$, Print["Erroa honako tarte honetan dago: {c,d}=", $\{c, d\}$, "."];

$k = 10$, If[$f[c] * f[d]{=}{=}0$, If[$f[c]{=}{=}0$, Print["Erroa da c=", c, "."],

Print["Erroa da d=", d], "."]]]]

Erroa honako tarte honetan dago: {c,d}={0, 1}.

Eta erroa $(0, 1)$ tartean dagoela atera zaigu.
Newton-Raphson-en metodoaren konbergentzia aztertuko dugu:

$x[0] = (a + b)/2.$;

$h = (b - a)/10$;

df[x_] = $D[f[x], x]$;

For[$k = 0, k < 10, k{+}{+}$,

If[df[$a + k * h$]==0, Print["Lehenengo deribatua zero egiten da: dibergentea."];

$k = 10$, If[$k{=}{=}9$, Print["Lehenengo deribatua ez da zero egiten: jarraitu."]]]]

Lehenengo deribatua ez da zero egiten: jarraitu.

df2[x_] = $D[f[x], \{x, 2\}]$;

For[$k = 1, k < 10, k{+}{+}$, If[df2[$a + k * h$] * df2[a]<=0, Print["Dibergentea."];

$k = 10$, If[$k{=}{=}9$,

Print["Bigarren deribatuaren ikurra ez da aldatzen: konbergentea."]]]]

Bigarren deribatuaren ikurra ez da aldatzen: konbergentea.

Eta prozesua konbergentea dela dakigunez, aplikatu egingo dugu:

x[n_]:=$x[n-1] - (f[x[n-1]]$/df[$x[n-1]$])

e[n_]:=Abs[$(x[n] - x[n-1])/x[n]$]

For[$n = 1, n < 20, n{+}{+}$,

If[$e[n] <$ er, Print["Azken iterazioa n=", n, " eta x[n]=", $x[n]$];

$n = 20$, Print["Hurbilpen berria {n,x[n],e[n]}=", $\{n, x[n], e[n]\}$];

Print["n=", n, " iterazioa"];

$i = n + 1$;

Print["*******************"]]]**

Hurbilpen berria {n,x[n],e[n]}={1, 0.566311, 0.117093}
n=1 iterazioa
****
Hurbilpen berria {n,x[n],e[n]}={2, 0.567143, 0.00146729}
n=2 iterazioa
****
Azken iterazioa n=3 eta x[n]=0.567143

Emaitzekin taula osatzeko esan diogu Mathematicari:

A = {{k, "x[k]", "f[x[k]]", "f'[x[k]]", "er[k]"}};

B = Table[$\{k, x[k], f[x[k]]$, df[$x[k]$], $e[k]\}, \{k, 1, i\}$];

Grid[Flatten[{A, B}, 1], Frame → All]

k	x[k]	f[x[k]]	f'[x[k]]	er[k]
1	0.566311	0.00130451	−1.56762	0.117093
2	0.567143	1.964804717813351`*^-7	−1.56714	0.00146729
3	0.567143	4.440892098500626`*^-15	−1.56714	2.2106391984397624`*^-7

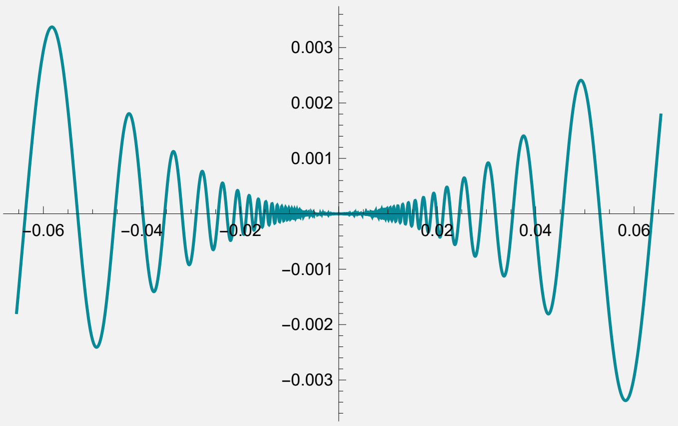
5.5 ariketa. Aztertu ea honako funtzio hau $x = 0$ puntuan deribagarria den ala ez:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

f[x_] = If $\left[x \neq 0, x^2 * \text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right], 0\right]$;

g1 = Plot[$f[x]$, {x, −Pi/48, Pi/48}]



Funtzioa jarraitua da $x = 0$ puntuan. Alboetako deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\text{Dfezker[x\_]} = \text{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \to 0, \text{Direction} \to 1\right];$$

$$\text{Dfeskuin[x\_]} = \text{Limit}\left[\frac{f[x+h]-f[x]}{h}, h \to 0, \text{Direction} \to -1\right];$$

Dfezker[0]

0

Dfeskuin[0]

0

Eta alboetako deribatuak berdinak direnez, funtzioa deribagarria da $x = 0$ puntuan eta $f'(0) = 0$.

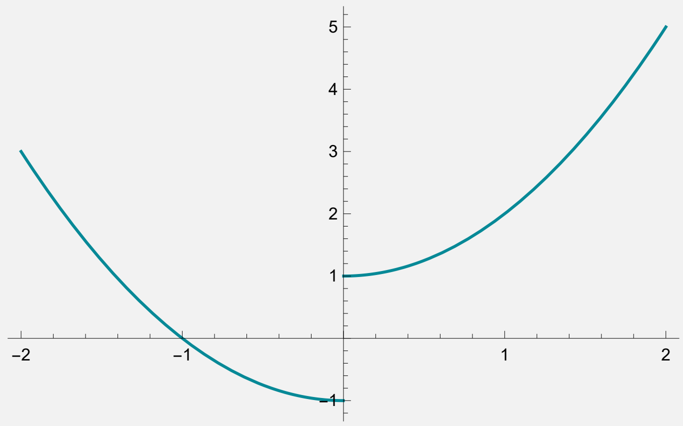
5.6 ariketa. Aztertu ea honako funtzio hau $x = 0$ puntuan deribagarria den ala ez:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

$$f[\text{x\_}] = \text{Which}[x < 0, x\text{\^{}}2 - 1, x \geq 0, x\text{\^{}}2 + 1];$$

$$\text{g2} = \text{Plot}[f[x], \{x, -2, 2\}]$$



Alboetako limiteak ez dira berdinak $x = 0$ puntuan:

limezker = Limit[f[x], $x \to a$, Direction → 1]

limeskuin = Limit[f[x], $x \to a$, Direction → −1]

-1

1

Funtzioa $x = 0$ puntuan jarraitua ez denez, ezin du deribagarria izan.
5.7 ariketa. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ funtzioa emanik:

a) *Manipulate* agindua erabilita, irudikatu $f(x)$ funtzioarekiko zuzen ebakitzaileak, $a = 2$ eta b muturrak lotuko dituztenak. b muturra aldakorra izango da.

b) *Manipulate* agindua erabilita, irudikatu $f(x)$ funtzioarekiko $x \in [1, 7]$ tarteko zuzen ukitzaileak.

a) atala. Funtzioarekiko zuzen ebakitzaileak definituko ditugu:

f1[x_] = $x^3 - 2x^2 + 1$;

ebaki[f_, x_, a_, b_]:=(f[b] − f[a]) ∗ (x − a)/(b − a) + f[a]

Eta eskatzen diguten grafikoa sortuko dugu, *Manipulate* agindua erabilita:

$\text{g3} = \text{Manipulate}[\text{Plot}[\{\text{f1}[x], \text{ebaki}[\text{f1}, x, 2, b]\}, \{x, 1, 7\},$

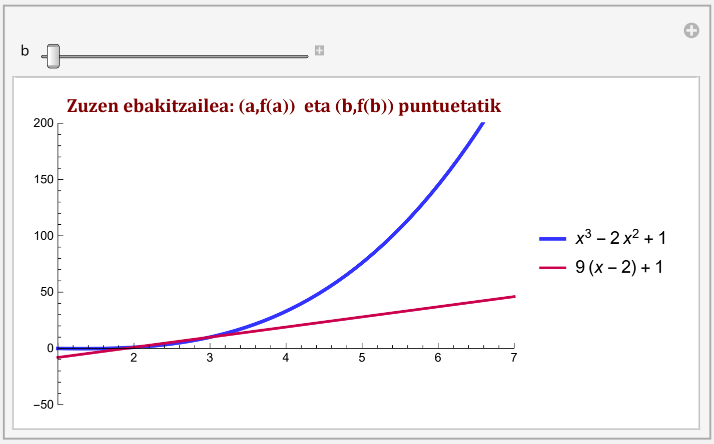
$\text{PlotRange} \to \{\{1, 7\}, \{-50, 200\}\},$

$\text{PlotStyle} \to \{\{\text{RGBColor}[0.2, 0.2, 1], \text{Thickness}[0.008]\},$

$\{\text{RGBColor}[0.8, 0, 0.3], \text{Thickness}[0.006]\}\},$

PlotLabel → "Zuzen ebakitzailea: (a,f(a)) eta (b,f(b)) puntuetatik",

$\text{PlotLegends} \to \{\text{f1}[x], \text{ebaki}[\text{f1}, x, 2, b]\}], \{b, 3, 6., 0.4\}]$



b) atala. Aurreko ataleko pauso berdinak jarraituko ditugu zuzen ukitzaileak definitzeko:

$\text{tan}[\text{f\_}, \text{x\_}, \text{a\_}] := f'[a] * (x - a) + f[a]$

$\text{g4} = \text{Manipulate}[\text{Plot}[\{\text{f1}[x], \text{tan}[\text{f1}, x, a]\}, \{x, 1, 7\},$

$\text{PlotRange} \to \{\{1, 7\}, \{-50, 200\}\},$

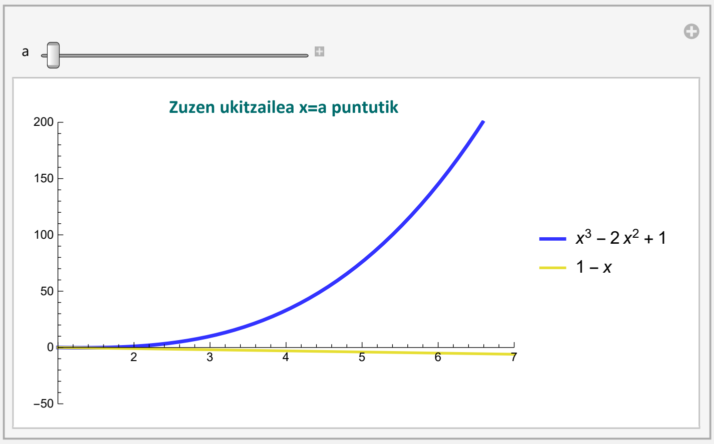
$\text{PlotStyle} \to \{\{\text{RGBColor}[0.2, 0.2, 1], \text{Thickness}[0.008]\},$

$\{\text{RGBColor}[0.9, 1 - 0.13 * a, 0.2], \text{Thickness}[0.006]\}\},$

PlotLabel → "Zuzen ukitzailea x=a puntutik",

$\text{PlotLegends} \to \{\text{f1}[x], \text{tan}[\text{f1}, x, a]\}],$

$\{a, 1, 7, 0.5\}]$


a
Zuzen ukitzailea x=a puntutik
200
150
100
50
0
−50
2
3
4
5
6
7
$x^3 - 2x^2 + 1$
$1 - x$

6. kapitulua

Taylorren polinomioak

Sarritan, esku artean ditugun funtzioak hain dira konplexuak, ezen lagungarria gertatzen baita haien oso antzekoak baina sinpleagoak diren funtzioez ordezkatzea. Horrelakoetan, ohikoa da funtzioa linealizatzea edota, orokorrean, haren oso antzekoa den polinomio batez ordezkatzea. Taylorren polinomioak ez dira funtzio bat hurbiltzeko erabiltzen diren bakarrak. Hala ere, gai honetan Taylorren polinomioak izango ditugu aztergai.

6.1 Taylorren polinomioak eta serieak

Definizioa. Baldin f-ek c puntuan n deribatu baditu, hurrengo polinomioak

$$P_n\left(x\right) = f(c) + f'(c)\left(x - c\right) + \frac{f''\left(c\right)}{2!}\left(x - c\right)^2 + ... + \frac{f^{(n)}\left(c\right)}{n!}\left(x - c\right)^n$$

c puntuko f-ren Taylorren n mailako polinomioa du izena. Baldin $c = 0$ bada,

$$P_n\left(x\right) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n$$

c puntuko f-ren McLaurinen n mailakoa.

Teorema. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n aldiz deribagarria den funtzioa eta $f^{(n)}(x)$ funtzioa jarraitua $x = c$ puntuan. Orduan, n mailako $P_n(x)$ Taylor-en polinomioak $f(x)$ funtzioa c barnean duen ingurune batean hurbiltzen duen ordena n baino handiagoa da. Hau da:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - P_n(c + \Delta x)}{\left(\Delta x\right)^n} = 0.$$

Definizioa. Izan bedi $f(x)$ funtzioa $x = c$ puntuan n deribatu dituen funtzioa, eta $P_n(x)$ Taylorren n mailako polinomioa. $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ funtzioari $f(x)$ funtzioaren n ordenako *Taylorren polinomioaren hondar* deritzo. Hondar funtzioa n ordenako infinitesimoa da $x = c$ puntuan. Hau da:

$$\lim_{x \to c} R_n(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(c) - P_n(c)}{\left(x - c\right)^n} = 0.$$

Teorema. Baldin f funtzio bat deribagarria bada $n + 1$ ordenaraino c barne duen I tarte batean, orduan, I tarteko x guztietarako badago honako hau beteko duen z bat x-ren eta c-ren artean:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

non honako hau betetzen baita:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Definizioa. Baldin f-ek $x = c$ puntuan ordena guztietako deribatuak baditu, orduan honako honi esan ohi zaio f-ren Taylorren seriea (c-n zentraturikoa):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots .$$

Baldin $c = 0$ bada, delako serieari *McLaurinena* ere esaten zaio.

Teorema. Taylorren serieen konbergentzia. Demagun $f(x)$ funtzioa, ordena guztietako deribatuak dituena, c-n zentraturiko I tarte ireki batean. Orduan, honako berdintza hau

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

baliagarria da, baldin eta soilik baldin honako baldintza hau betetzen duen x eta c bitarteko z baliorik badago:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} = 0$$

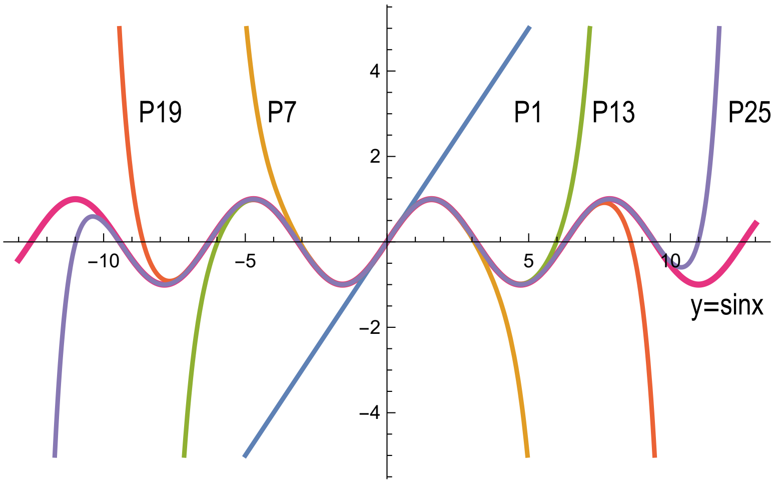
I tarteko x guztietarako.

6.2 Zenbait funtzioren McLaurinen polinomioak

Ondoren datozen aldagai errealeko funtzioek $x = 0$ puntuan, edozein ordenatako McLaurinen polinomioak onartzen dituzte.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n, \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n-1}, \\
(1+x)^r &= 1 + \frac{r}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + R_n.
\end{aligned}$$

$f(x)$ funtzioak $x = c$ puntuan n deribatu onartzen baditu n nahiko handia izanik, $f(x)$ funtzioaren eta n mailako Taylorren $x = c$ puntuko polinomioaren arteko diferentzia nahi bezain txikia izatea lor daiteke. Gainera, ez bakarrik $x = c$ puntuan, puntu hori barnean daukan tarte batean ere bai. $f(x) = \sin x$ funtzioaren $x = 0$ puntuko McLaurinen garapenak ikus daitezke 6.1 irudian, $n = 1$, 7, 13, 19 eta 25 mailakoak.



6.1 irudia. $f(x) = \sin x$ funtzioaren $x = 0$ puntuko McLaurinen garapenak.

Definizioa. $f(x)$ funtzioak $x = c$ puntuan n mailako Taylorren polinomioa onartzen badu, puntu horretan infinitesimoa bada, eta $x = c$ puntuan ez-nulua den lehenengo deribatua $n$garrena bada, orduan, $f(x)$ funtzioaren zati nagusia honako hau da:

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Eta $f(x)$ funtzioaren n mailako Taylorren polinomioa honako hau izango da:

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n.$$

6.3 Adibideak

6.1 adibidea. $f(x) = e^x$ funtzioaren McLaurinen n mailako polinomioak erabilita, hurbildu e zenbakia.

$f(x) = e^x$ funtzioaren n mailako McLaurinen polinomioa honako hau da:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

e zenbakia hamabi zifra hamartarrekin honako hau da: $e \approx 2.718281828459$. Zenbaki horren hurbilpena lortzeko, $x = 1$ balioa ordezkatuko dugu McLaurinen polinomioan:

$$\begin{aligned}
P_1(1) &\approx 1 + \frac{1}{1!} = 2,\\
P_2(1) &\approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2,5,\\
P_3(1) &\approx P_2(1) + \frac{1}{3!} = 2,66666666667,\\
P_4(1) &\approx P_3(1) + \frac{1}{4!} = 2,70833333333,\\
P_5(1) &\approx P_4(1) + \frac{1}{5!} = 2,71666666667,\\
P_6(1) &\approx P_5(1) + \frac{1}{6!} = 2,71805555556,\\
P_7(1) &\approx P_6(1) + \frac{1}{7!} = 2,71825396825,\\
P_8(1) &\approx P_7(1) + \frac{1}{8!} = 2,71827876984,\\
P_9(1) &\approx P_8(1) + \frac{1}{9!} = 2,71828152557,\\
P_{10}(1) &\approx P_9(1) + \frac{1}{10!} = 2,71828180115.
\end{aligned}$$

Ikus daitekeen moduan, $n = 10$ mailako polinomioa erabilita, e zenbakiaren lehenengo 7 zifra hamartarrak ondo lortzen dira.

6.2 adibidea. Ebatzi honako ekuazio hau $f(x) = \arctan x$ funtzioa McLaurinen $n = 3$ mailako polinomioa erabiliz hurbilduta: $\arctan x = x^2$.

Honako hau da $f(x) = \arctan x$ funtzioaren McLaurinen polinomioa:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n-1}$$

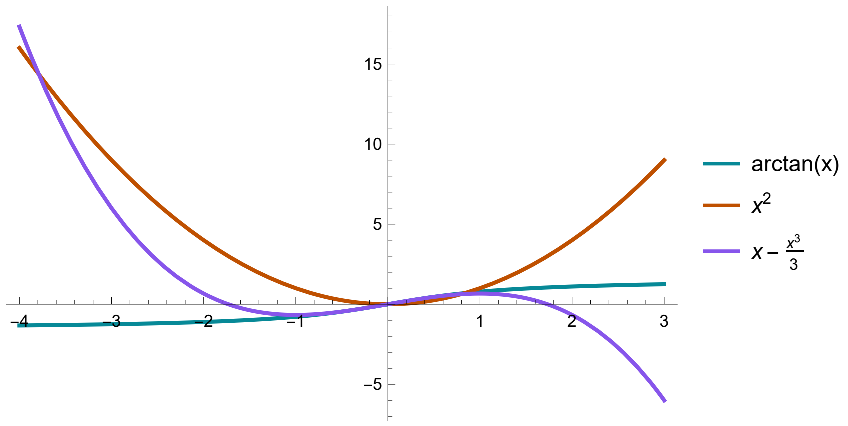
$n = 3$ mailako hurbilpena honako hau da:

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3}.$$

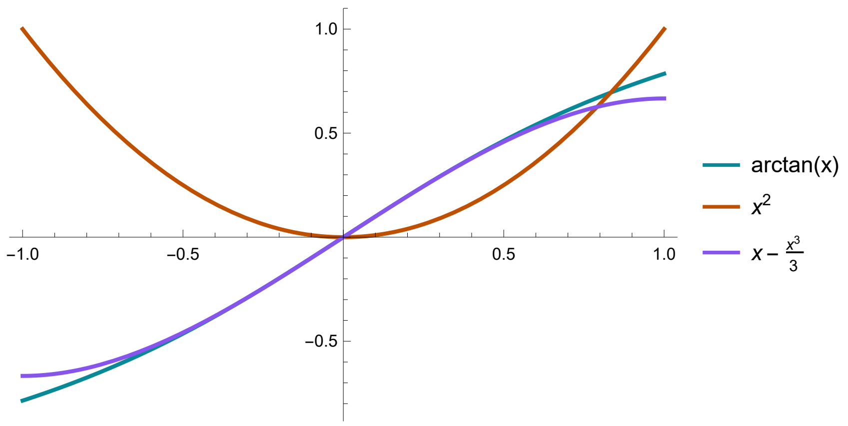
Hurbilpen hori ebatzi beharreko ekuazioan ordezkatuz:

$$x - \frac{x^3}{3} = x^2 \Rightarrow -\frac{x^3}{3} - x^2 + x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{x^2}{3} - x + 1\right) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(-3 - \sqrt{21}\right) \approx 3,791287, \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{21}\right) \approx 0,791287. \end{cases}$$

6.2 eta 6.3 irudietan ikus daitekeen moduan, $\arctan x = x^2$ betetzen duten puntuak x_1 eta x_3 dira. x_2 puntua parabolaren eta 3. mailako McLaurinen garapenaren arteko ebaki-puntua da.



6.2 irudia. 6.2 adibidea.



6.3 irudia. 6.2 adibidea hurbilagotik.

6.3 adibidea. Kalkulatu $\sinh x$ eta $\cosh x$ funtzioen McLaurinen garapenak funtzio esponentzialaren garapena erabilita:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$f(x) = e^x$ funtzioaren n mailako McLaurinen polinomioa honako hau da:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

eta $f(x) = e^{-x}$ funtzioarena honako beste hau:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + R_n.$$

Garapen bien arteko kenketa 2 zenbakiaz zatituz, $\sinh x$ funtzioaren garapena daukagu:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}.$$

Aldiz, garapen biak batuz eta zati 2 eginez, $\cosh x$ funtzioaren garapena lortzen da:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}.$$

6.4 adibidea. Kalkulatu $f(x) = x^3 e^{2x}$ funtzioaren ordena eta bere zati nagusia.

Horretarako, $f(x) = e^{2x}$ funtzioaren McLaurinen garapena erabiliko dugu:

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + ... + \frac{(2x)^n}{n!} + R_n,$$

Garapen hori $f(x) = x^3 e^{2x}$ funtzioan ordezkatuz, honako hau lortzen da:

$$f(x) = x^3 + \frac{2x^4}{1!} + \frac{4x^5}{2!} + ... + \frac{2^n x^{n+3}}{n!} + x^3 R_n.$$

Beraz, $f(x) = x^3 e^{2x}$ funtzioa 3 ordenako infinitesimoa da, bere parte nagusia x^3 da.

6.4 Ordenagailuko praktikak

6.1 ariketa. Kalkulatu $\sqrt{27}$ balioaren hurbilpen bat $\sqrt{25}$ balio ezaguna erabilita.

$f(x)$ funtzioa eta diferentziala definituko ditugu:

f2[x_] = $\sqrt{x}$;

df[f_, x_, dx_] = $f'[x]$ * dx

dx$f'[x]$

df[f2, x, dx]

$\frac{\mathrm{dx}}{2\sqrt{x}}$

Funtzioaren $x + \Delta x$ puntuko balio hurbildu bat honako era honetan kalkula daiteke:

balhurbildu[f_, x_, dx_] = df[f, x, dx] + $f[x]$

$f[x] + \mathrm{dx}f'[x]$

balhurbildu[f2, 25, 2.]

5.2

Bukatzeko, funtzioaren balio zehatza $f(27) = \sqrt{27}$ kalkulatuko dugu:

f2[27.]

5.19615

Eta ikus daitekeen moduan, $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$, $x_0 = 25$ izanik eta $\Delta x = 2$. Hau da: $f(27) = 5,19615 \approx f'(25) \cdot 2 + f(25) = 5,2$.

6.2 ariketa. $f_1(x) = x^{20} - x^{40} + x^{80}$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu $a = 1$ puntuko 4. ordenako Taylorren polinomioa.

b) Kalkulatu $f_1(1,005)$ balioaren hurbilpena.

a) atala. Funtzioa definituko dugu:

f1[x_] = x^80 − x^40 + x^20

$x^{20} - x^{40} + x^{80}$

Taylorren polinomioa definituko dugu:

poltaylor[f_, x_, a_, n_] = $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a](x-a)^k}{k!}}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-a+x)^k f^{(k)}[a]}{k!}$

Definitu dugun funtzioa erabilita, $a = 1$ puntuko 4. ordenako Taylorren polinomioa kalkulatuko dugu:

poltaylor[f1, x, 1, 4]

$1 + 60(-1 + x) + 2570(-1 + x)^2 + 73420(-1 + x)^3 + 1495035(-1 + x)^4$

b) atala. Taylorren polinomioa erabilita, honako hau da $f_1(1,005)$ balioaren hurbilpena:

poltaylor[f1, 1.005, 1, 4]

1.37436

Balio erreala, aldiz, honako hau da:

f1[1.005]

1.37444

6.3 ariketa. $f(x)$ funtzioa emanik, idatzi n. ordenako McLaurinen seriea kalkulatzeko aginduak. Kalkulatu e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^r$, $\tan x$ eta $\arctan x$ funtzioen 6. ordenako McLaurinen garapenak.

Aurretik ebatzi dugun ariketaren batean erabili dugu Taylorren polinomioak kalkulatzeko definitu dugun funtzioa:

$$\mathbf{poltaylor[f\_,x\_,a\_,n\_]} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a](x-a)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-a+x)^k f^{(k)}[a]}{k!}$$

Funtzio horretan, $a = 0$ egitea nahikoa da McLaurinen polinomioak izateko:

$$\mathbf{mclaurin[f\_,x\_,n\_] = poltaylor}[f,x,0,n]$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k f^{(k)}[0]}{k!}$$

Oraindik $f(x)$ funtzioa definitu gabe daukagula ere, posiblea da nahi dugun ordenako McLaurinen polinomioak sortzea. Horrela, honako hau da $f(x)$ funtzio orokor baten $n = 6$ ordenako McLaurinen polinomioa:

$$\mathbf{mclaurin}[f,x,6]$$

$$f[0] + xf'[0] + \frac{1}{2}x^2 f''[0] + \frac{1}{6}x^3 f^{(3)}[0] + \frac{1}{24}x^4 f^{(4)}[0] + \frac{1}{120}x^5 f^{(5)}[0] + \frac{1}{720}x^6 f^{(6)}[0]$$

McLaurinen polinomioak kalkulatzeko eskatzen dizkiguten funtzioak definituko ditugu:

$$\mathbf{exp[x\_] = Exp}[x];$$

$$\mathbf{log[x\_] = Log}[1+x];$$

$$\mathbf{sen[x\_] = Sin}[x];$$

cos[x_] = Cos[x];

potentzia[x_] = (1 + x)^r;

tan[x_] = Tan[x];

arctan[x_] = ArcTan[x];

Funtzio horiek 6. ordenako McLaurinen polinomio gisa kalkulatuko ditugu, eta taula batean idatziko ditugu guztiak:

Grid [Transpose [{{"e^x", "Ln(1+x)", "Senx", "Cosx", "$(1 + x)^r$", "tgx", "arctgx"} ,

{mclaurin[exp, x, 6], mclaurin[log, x, 6], mclaurin[sen, x, 6],

mclaurin[cos, x, 6], mclaurin[potentzia, x, 6], mclaurin[tan, x, 6],

mclaurin[arctan, x, 6]}}], Frame → All]//TraditionalForm

e^x	$\frac{x^6}{720}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$
Ln(1+x)	$-\frac{x^6}{6}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$
Senx	$\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+x$
Cosx	$-\frac{x^6}{720}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+1$
$(1+\mathrm{x})^r$	$\frac{1}{720}(r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)rx^6$ $+\frac{1}{120}(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)rx^5$ $+\frac{1}{24}(r-3)(r-2)(r-1)rx^4+\frac{1}{6}(r-2)(r-1)rx^3$ $+\frac{1}{2}(r-1)rx^2+rx+1$
tgx	$\frac{2x^5}{15}+\frac{x^3}{3}+x$
arctgx	$\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x$

6.4 ariketa. Kalkulatu $f(x) = \sin x$ funtzioaren 25. ordenarainoko McLaurinen txandakako polinomioak, eta egin haien adierazpen grafikoa.

Funtzioa definituko dugu:

f2[x_] = Sin[x]

Sin[x]

McLaurinen polinomioa definituko dugu Taylorren polinomiotik abiatuz:

poltaylor[f_, x_, a_, n_] = $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]*(x-a)^k}{k!}$

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-a+x)^k f^{(k)}[a]}{k!}$

mclaurin[f_, x_, n_] = poltaylor[$f, x, 0, n$]

$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k f^{(k)}[0]}{k!}$

Ordena txandakatudun zenbait McLaurinen polinomio kalkulatuko ditugu:

t = Table[mclaurin[f2, x, n], {n, 1, 25, 6}]

$$\left\{x, x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040},\right.$$
$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}+\frac{x^{13}}{6227020800},$$
$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}+\frac{x^{13}}{6227020800}-\frac{x^{15}}{1307674368000}$$
$$+\frac{x^{17}}{355687428096000}-\frac{x^{19}}{121645100408832000},$$
$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^{11}}{39916800}+\frac{x^{13}}{6227020800}-\frac{x^{15}}{1307674368000}$$
$$+\frac{x^{17}}{355687428096000}-\frac{x^{19}}{121645100408832000}$$
$$\left.+\frac{x^{21}}{51090942171709440000}-\frac{x^{23}}{25852016738884976640000}+\frac{x^{25}}{15511210043330985984000000}\right\}$$

Eta, bukatzeko, adierazpen grafikoak egingo ditugu:

graf1 = Plot[f2[x], {x, −13, 13},

PlotStyle → {RGBColor[0.9, 0.2, 0.5], Thickness[0.008]}];

graf2 = Plot[Evaluate[t], {x, −13, 13}, PlotStyle → Thickness[0.006],

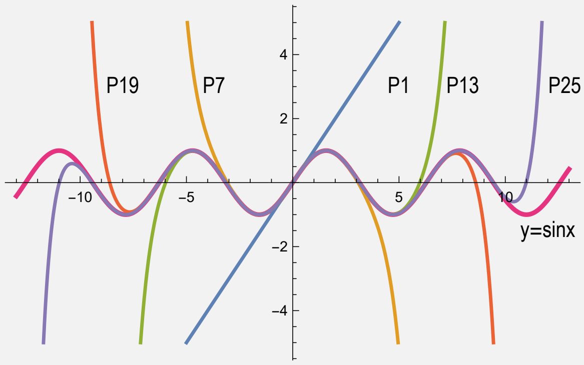
PlotRange → {−5, 5}];

etiketak = {Text["P1", {5, 3}], Text["P7", {−3.7, 3}], Text["P13", {8, 3}],

Text["P19", {−8, 3}], Text["P25", {12.8, 3}], Text["y= sin x", {12, −1.5}]};

g1 = Show[graf1, graf2, PlotRange → {{−13, 13}, {−5, 5}},

Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]



6.5 ariketa. Kalkulatu $\sqrt{3,98}$ balioaren hurbilpena $f(x) = \sqrt{x+3}$ funtzioaren diferentzialaren kontzeptua erabilita.

$f(x)$ funtzioa eta diferentziala definituko ditugu:

f[x_] = $\sqrt{x+3}$;

df[x_, Δx_] = f'[x] ∗ Δx

$\frac{\Delta x}{2\sqrt{3+x}}$

Funtzioaren balio hurbildu bat $x + \Delta x$-ren honako era honetan kalkula daiteke:

balhurbilf[x_, Δx_] = df[x, Δx] + f[x]

$\sqrt{3+x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{3+x}}$

balhurbilf[1, −0.02]

1.995

Bukatzeko, funtzioaren balio zehatza $f(1-0,2) = \sqrt{3,98}$ kalkulatuko dugu:

f[1 − 0.02]

1.99499

Eta, ikus daitekeen moduan, $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$, $x_0 = 1$ izanik eta $\Delta x = -0,2$. Hau da: $f(1 - 0,2) = 1.99499 \approx f'(1)(-0,2) + f(1) = 1.995$.

6.6 ariketa. Izan bedi $y = f(x)$ era inplizituan honako era honetan definitutako funtzioa: $2y = 1 + xy^3$. Kalkulatu $y'(x)$ eta $y''(x)$ deribatuak $P(1,1)$ puntuan.

Puntua eta ekuazioa definituko ditugu:

puntua = {1, 1}

$\{1, 1\}$

Ekuazioa deribatuko dugu x aldagaiarekiko. Mathematicak *Dt*[*funtzioa*] agindua dauka funtzio baten diferentziala kalkulatzeko:

ek = 2*y*==1 + *x* ∗ *y*³;

dek = Dt[ek, *x*]

$2\mathrm{Dt}[y, x] == y^3 + 3xy^2\mathrm{Dt}[y, x]$

Azken ekuaziotik $y'(x)$ askatuko dugu:

s = Solve[%, Dt[*y*, *x*]]

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[y, x] \to -\frac{y^3}{-2+3xy^2}\right\}\right\}$

Dyx = Dt[*y*, *x*]/.*s*[[1]]

$-\frac{y^3}{-2+3xy^2}$

Eta $P(1,1)$ puntua ordezkatuko dugu lehenengo deribatuan:

Dyx = Dyx/.{*x* → 1, *y* → 1}

-1

Ekuazioa berriro x aldagaiarekiko deribatuko dugu, eta $y''(x)$ askatuko dugu:

d2ek = Dt[ek, {x, 2}]

$2\mathrm{Dt}[y,\{x,2\}]==6y^2\mathrm{Dt}[y,x]+x\left(6y\mathrm{Dt}[y,x]^2+3y^2\mathrm{Dt}[y,\{x,2\}]\right)$

s1 = Solve[d2ek, Dt[y, {x, 2}]]

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[y,\{x,2\}]\to-\frac{6\left(y^2\mathrm{Dt}[y,x]+xy\mathrm{Dt}[y,x]^2\right)}{-2+3xy^2}\right\}\right\}$

s2 = s1/.Dt[y, x] → Dyx

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[y,\{x,2\}]\to-\frac{6\left(xy-y^2\right)}{-2+3xy^2}\right\}\right\}$

D2yx = Dt[y, {x, 2}]/.s2[[1]]

$-\frac{6\left(xy-y^2\right)}{-2+3xy^2}$

Bukatzeko, $P(1,1)$ puntua ordezkatuko dugu bigarren deribatuan:

D2yx = D2yx/.{x → 1, y → 1}

0

6.7 ariketa. Izan bedi $y = f(x)$ era inplizituan honako era honetan definitutako funtzioa: $2x^2-2xy+y^2+x+2y+2=0$. Kalkulatu $y'(x)$ $x=-1$ abszisadun puntuetan, eta puntu horietako zuzen ukitzaileak.

Funtzioa definituko dugu, eta $x=-1$ puntuari dagozkion y aldagaiaren balioak kalkulatuko ditugu:

ek = 2x^2 − 2x * y + y^2 + x + 2y + 2==0;

x0 = −1;

ek/.x → x0

$3+4y+y^2==0$

soly = Solve[%, y]

$\{\{y\to-3\},\{y\to-1\}\}$

$\mathbf{y1} = \boldsymbol{y}/.\mathbf{soly}[[1]]$

-3

$\mathbf{puntu1} = \{\mathbf{x0}, \mathbf{y1}\}$

$\{-1, -3\}$

$\mathbf{y2} = \boldsymbol{y}/.\mathbf{soly}[[2]]$

-1

$\mathbf{puntu2} = \{\mathbf{x0}, \mathbf{y2}\}$

$\{-1, -1\}$

Ekuazioa x aldagaiarekiko deribatuko dugu:

$\mathbf{dek} = \mathbf{Dt}[\mathbf{ek}, \boldsymbol{x}]$

$1 + 4x - 2y + 2\mathrm{Dt}[y, x] - 2x\mathrm{Dt}[y, x] + 2y\mathrm{Dt}[y, x] == 0$

Deribatuaren adierazpenetik $y'(x)$ askatuko dugu, eta $(-1, -3)$ eta $(-1, -1)$ puntuetan balioztatuko dugu:

$\boldsymbol{s} = \mathbf{Solve}[\mathbf{dek}, \mathbf{Dt}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]]$

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[y, x] \to \frac{1+4x-2y}{2(-1+x-y)}\right\}\right\}$

$\mathbf{Dyx} = \mathbf{Dt}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}]/.\boldsymbol{s}[[1]]$

$\frac{1+4x-2y}{2(-1+x-y)}$

$\mathbf{m1} = \mathbf{Dyx}/.\{\boldsymbol{x} \to \mathbf{x0}, \boldsymbol{y} \to \mathbf{y1}\}$

$\frac{3}{2}$

$\mathbf{m2} = \mathbf{Dyx}/.\{\boldsymbol{x} \to \mathbf{x0}, \boldsymbol{y} \to \mathbf{y2}\}$

$\frac{1}{2}$

Bukatzeko, $(-1,-3)$ eta $(-1,-1)$ puntuetako zuzen ukitzaileak definituko ditugu:

```
zuzenukitz1 = y == m1(x − x0) + y1//Simplify
```

$3x == 3 + 2y$

```
zuzenukitz2 = y == m1(x − x0) + y2//Simplify
```

$1 + 3x == 2y$

6.8 ariketa. Kalkulatu π, $\ln 2$, $\sin 1$, $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ eta $\sqrt{2}$ zenbakien hurbilpenak, McLaurinen garapen egokiak erabilita.

Honako funtzio hauek definituko ditugu: $f_1(x) = \arctan x$, $f_2(x) = \ln(1+x)$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \cos x$ eta $f_5(x) = \sqrt{1+x}$:

```
f1[x_] = ArcTan[x];

f2[x_] = Log[1 + x];

f3[x_] = Sin[x];

f4[x_] = Cos[x];

f5[x_] = (1 + x)^(1/2);
```

Taylorren polinomioa definituko dugu, eta McLaurin-ena definitzeko ere balioko digu:

$$\text{poltaylor[f\_, x\_, a\_, n\_]} := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a] * (x-a)^k}{k!}$$

Goiko funtzioan, nahikoa da $a = 0$ hartzea McLaurinen polinomioa izateko. Bukatzeko, ordena ezberdinetako McLaurinen polinomioak erabilita kalkulatuko ditugu eskatzen dizkiguten balioak. Zehazki, $n = 1$ ordenatik $n = 45$ ordenarainoko polinomioetan kalkulatu dira, balioak launaka joanik:

```
N [TableForm [Table [{4 * poltaylor[f1, 1, 0, n], poltaylor[f2, 1, 0, n],
 poltaylor[f3, 1, 0, n], poltaylor[f4, 1/2, 0, n], poltaylor[f5, 1, 0, n]} , {n, 1, 45, 4}] ,
TableHeadings → {{"P1", "P5", "P9", "P13", "P17", "P21", "P25", "P29", "P33",
"P37", "P41", "P45"} , {"π", "Ln(2)", "Sin(1)", "Cos(1/2)", "√2"}}] , 12]
```

Honako taula honetan jaso dira lortu diren emaitzak:

	π	Ln(2)	Sin(1)	Cos(1/2)	$\sqrt{2}$
P1	4.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	1.00000000000	1.50000000000
P5	3.46666666667	0.783333333333	0.841666666667	0.877604166667	1.42578125000
P9	3.33968253968	0.745634920635	0.841471009700	0.877582562159	1.41920471191
P13	3.28373848374	0.730133755134	0.841470984809	0.877582561890	1.41713154316
P17	3.25236593472	0.721695379784	0.841470984808	0.877582561890	1.41617970006
P21	3.23231580941	0.716390450794	0.841470984808	0.877582561890	1.41565220236
P25	3.21840276593	0.712747499543	0.841470984808	0.877582561890	1.41532454556
P29	3.20818565226	0.710091471025	0.841470984808	0.877582561890	1.41510476878
P33	3.20036551541	0.708069232511	0.841470984808	0.877582561890	1.41494896359
P37	3.19418790923	0.706478145625	0.841470984808	0.877582561890	1.41483379344
P41	3.18918478228	0.705193625695	0.841470984808	0.877582561890	1.41474582935
P45	3.18505041535	0.704134865334	0.841470984808	0.877582561890	1.41467685395

Honako hauek dira zenbaki horien balioak Mathematican 20 digitu esanguratsu erabilita:

```
Grid [Transpose [N [{{"π ", "Ln(2)", "Sin(1)", "Cos(1/2)", "√2"} ,
 {π, Log[2], Sin[1], Cos[1/2], √2}} , 20]] , Frame → All]
```

π	3.1415926535897932385
Ln(2)	0.69314718055994530942
Sin(1)	0.84147098480789650665
Cos(1/2)	0.87758256189037271612
$\sqrt{2}$	1.4142135623730950488

6.9 ariketa. $f_1(x) = \ln(1 + x)$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu $a = 1$ puntuko 6. ordenako Taylorren polinomioa.

b) Kalkulatu $f_1(1, 005)$ balioaren hurbilpena.

c) Irudikatu $f_1(x)$ funtzioa eta 1-10 ordenako zenbait Taylorren polinomio.

a) atala. $f_1(x)$ funtzioa definituko dugu, eta $a = 1$ puntuko 6. ordenako Taylorren polinomioa kalkulatuko dugu:

f1[x_] = Log[1 + x];

poltaylor[f1, x, 1, 6]

$\frac{1}{2}(-1+x)-\frac{1}{8}(-1+x)^2+\frac{1}{24}(-1+x)^3-\frac{1}{64}(-1+x)^4+\frac{1}{160}(-1+x)^5-\frac{1}{384}(-1+x)^6+\text{Log}[2]$

b) atala. Taylorren polinomioa erabilita $f_1(1,005)$ren honako balio hurbildu hau lortzen da:

poltaylor[f1, 1.005, 1, 4]

0.695644

Aldiz, balio erreala honako hau da:

f1[1.005]

0.695644

c) atala. Eskatzen dizkiguten polinomioak kakulatuko ditugu:

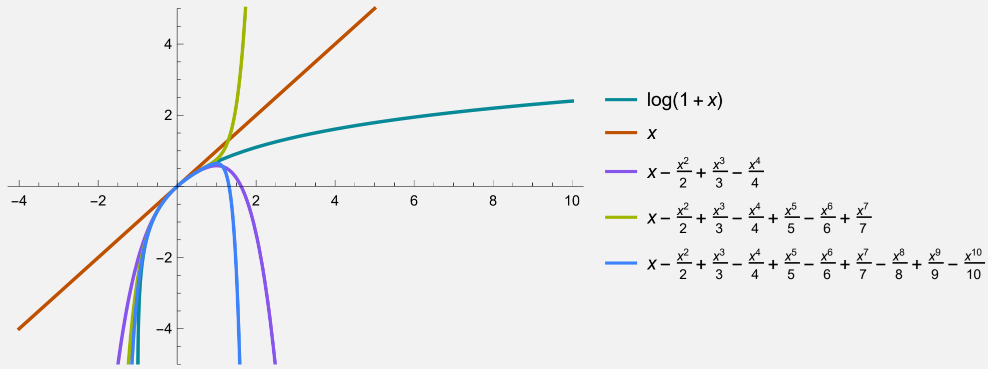
t = Table[poltaylor[f1, x, 0, n], {n, 1, 10, 3}]

$$\left\{x, x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}, x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7},\right.$$
$$\left. x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{10}}{10}\right\}$$

Eta horietako batzuren adierazpen grafikoa egingo dugu:

g1 = Plot[{Log[1 + x], Evaluate[t]}, {x, −4, 10}, PlotStyle → Thickness[0.006],

PlotRange → {−5, 5}, PlotLegends->“Expressions”]



6.10 ariketa. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2+1}}$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu 4. ordenako McLaurinen polinomioa.

b) Garapen hori erabilita, kalkulatu $\frac{1}{\sqrt[4]{1{,}08}}$ balioaren hurbilpen bat.

a) atala. Funtzioa definituko dugu, eta hari dagokion 4. ordenako McLaurinen polinomioa kalkulatuko dugu:

$\mathbf{f1[x\_] = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^2+1}};}$

$\mathbf{poltaylor[f\_, x\_, a\_, n\_] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]*(x-a)^k}{k!};}$

$\mathbf{poltaylor[f1, x, 0, 4]}$

$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{8}$

b) atala. $f(x_0) = \frac{1}{\sqrt[4]{1{,}08}}$ betetzen duen $x_0$ren balioa kalkulatuko dugu:

$\mathbf{s = Solve\left[f1[x] == \frac{1}{\sqrt[4]{1.08}}\right]}$

$\{\{x \to -0.2\}, \{x \to 0.2\}\}$

$\mathbf{x0 = x/.s[[2]]}$

0.2

Eta $P_4(x_0)$ eta $f(x_0)$ balioak kalkulatuko ditugu:

poltaylor[f1, x0, 0, 4]

0.981

f1[x0]

0.980944

Ikusten den moduan, $f(x_0) \approx P_4(x_0)$ betetzen da.
6.11 ariketa. $f(x) = \cos x$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu 18 ordenarainoko txandakako McLaurinen polinomioak.

b) *Manipulate* agindua erabilita, irudikatu garapen horiek.

a) atala. Funtzioa eta Taylorren polinomioa definituko ditugu:

f1[x_] = Cos[x]

Cos[x]

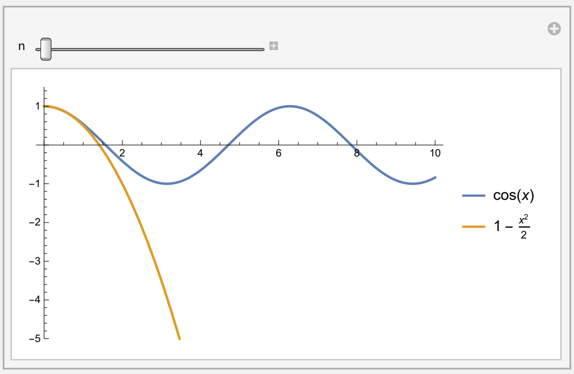
poltaylor[f_, x_, a_, n_]:= $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}[a]*(x-a)^k}{k!}$

b) atala. 18 ordenarainoko txandakako (launaka) McLaurinen polinomioak irudikatuko ditugu *Manipulate* agindua erabilita:

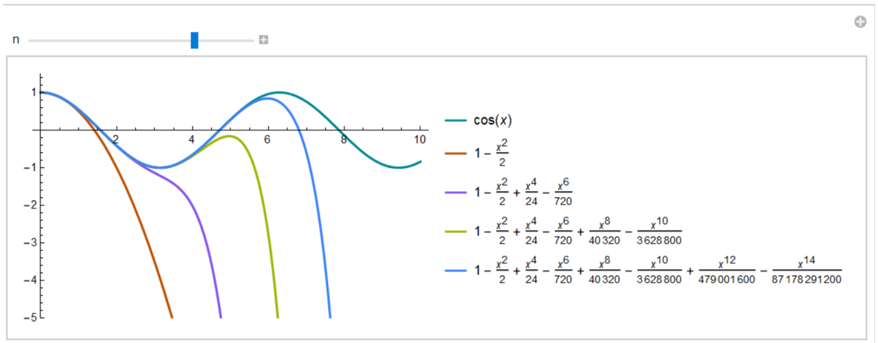
g2 = Manipulate[Plot[{Cos[x], Evaluate[Table[poltaylor[Cos, x, 0, a], {a, 2, n, 4}]]},

{x, 0, 10}, PlotStyle → Thickness[0.006], PlotRange → {−5, 1.5},

PlotLegends->"Expressions"], {n, 2, 18, 4}]



6.4 irudian adierazi dira irristagailua mugituz lortzen diren zenbait grafiko:



6.4 irudia. 6.11 ariketako grafikoak.

7. kapitulua

Deribagarritasunaren esanahia eta aplikazioak

Aldagai bakarreko funtzioen optimizazioak, hau da, maximoak eta minimoak kalkulatu behar izateak, deribagarritasunean sakontzera eramaten gaitu. Gai honetan, funtzioak ezaugarrituko ditugu deribatuetatik ateratzen dugun informazioa kontuan hartuta.

7.1 Muturrak

Muturrak. Izan bedi $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa eta $x_0 \in [a,b]$. x_0 puntua $f(x)$ funtzioaren goi-mutur bat da, $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$ betetzen bada. Aldiz, x_0 puntua $f(x)$ funtzioaren behe-mutur bat da, $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$ baldintza betetzen bada. Goi- eta behe-muturrei *maximo absolutu* edo *minimo absolutu* ere deitzen zaie.

$f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tarte itxian jarraitua denean, funtzioak goi- eta behe-muturrak izango ditu tarte horretan. Aldiz, ezin da horien existentzia ziurtatu $f(x)$ funtzioa (a,b) tarte irekian jarraitua denean.

Mutur erlatiboak. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa. $x_0 \in D$ puntua $f(x)$ funtzioaren maximo erlatiboa da $\exists \delta : f(x_0) > f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$. Era berean, $x_0 \in D$ puntua $f(x)$ funtzioaren minimo erlatiboa da, $\exists \delta : f(x_0) < f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$. Maximo eta minimo erlatiboei *mutur erlatibo* deritze.

Teorema. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa. $x_0 \in D$ puntua $f(x)$ funtzioaren maximo edo minimo erlatiboa bada eta puntu horretako deribatua existitzen bada, hau da $\exists f'(x_0)$, orduan deribatu horren balioa izango da: $f'(x_0) = 0$.

Puntu singularrak. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa. *Puntu singular* deritzo deribatua existitu eta $f'(x_0) = 0$ betetzen duen puntuari, edo deribatua existitzen ez den puntuari. Hau da:

$$x_0 \text{ singularra} \Leftrightarrow (\exists f'(x_0) \wedge f'(x_0) = 0) \vee \nexists f'(x_0).$$

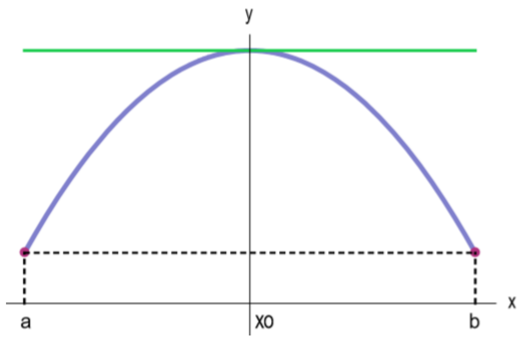
7.2 Teoremak eta L'Hopital

7.2.1 Teoremak

Rolleren teorema. Izan bedi $f(x)$ (a,b) tartean deribagarria eta $[a,b]$ tartean jarraitua den funtzioa. Baldin $f(a) = f(b) = 0$ betetzen bada, orduan badago gutxienez c zenbaki bat (a,b) tartean, honako hau betetzen duena:

$$f'(c) = 0.$$

Geometrikoki esan nahi du existitzen dela c puntu bat non $f(x)$ funtzioarekiko puntu horretako zuzen ukitzailearen malda zero baita; ikus 7.1 irudia.

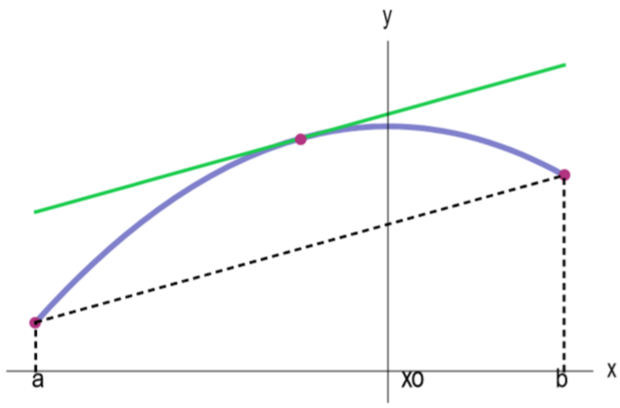


7.1 irudia. Rolleren teoremaren esanahi geometrikoa.

Balio ertainaren teorema (Lagrangerena). Baldin $f(x)$ deribagarria bada (a,b) tartean eta jarraitua $[a,b]$ tartean, badago gutxienez c zenbaki bat (a,b) tartean, honako hau betetzen duena:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrikoki esan nahi du existitzen dela c puntu bat non $f(x)$ funtzioarekiko puntu horretako zuzen ukitzailea $(a, f(a))$ eta $(b, f(b))$ puntuetatik pasatzen den zuzenarekiko paraleloa baita; ikus 7.2 irudia.



7.2 irudia. Balio ertainaren teoremaren esanahi geometrikoa.

Korolarioa. Baldin $f(x)$ deribagarria bada (a,b) tartean eta $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, orduan $f(x)$ kostantea da (a,b) tartean.

Korolarioa. Baldin $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak deribagarriak badira (a,b) tartean eta $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$, orduan $f(x) = g(x) + K$ betetzen da, $K \in \mathbb{R}$ izanik.

Cauchy-ren teorema. Izan bitez $f(x)$ eta $g(x)$ (a,b) tartean deribagarriak eta $[a,b]$ tartean jarraituak. Baldin g' zero egiten ez bada (a,b) tartean, honako berdintza hau betetzen duen $c \in (a,b)$ zenbaki bat existituko da.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

7.2.2 L'Hopitalen erregela

L'Hopitalen erregela. $\left(\frac{0}{0}\right)$. Demagun: $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$, noiz eta $x \to c^+$, $x \to c^-$, $x \to \infty$ edo $x \to -\infty$ denean. Baldin $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$ bada, orduan $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$.

L'Hopitalen erregela. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Demagun: $f(x) \to \pm\infty$ eta $g(x) \to \pm\infty$, noiz eta $x \to c^+$, $x \to c^-$, $x \to \infty$ edo $x \to -\infty$ denean. Baldin $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$ bada, orduan $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$.

7.3 Lehenengo deribatuaren esanahia

Definizioak. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa.

- $f(x)$ gorakorra da D tartean, honako hau betetzen bada:
$$\forall x, y \in D : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$
- $f(x)$ beherakorra da D tartean, honako hau betetzen bada:
$$\forall x, y \in D : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$
- $f(x)$ hertsiki gorakorra da D tartean, honako hau betetzen bada:
$$\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$
- $f(x)$ hertsiki beherakorra da D tartean, honako hau betetzen bada:
$$\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Teorema. Izan bedi f funtzio deribagarri bat I tarte ireki batean. Orduan:

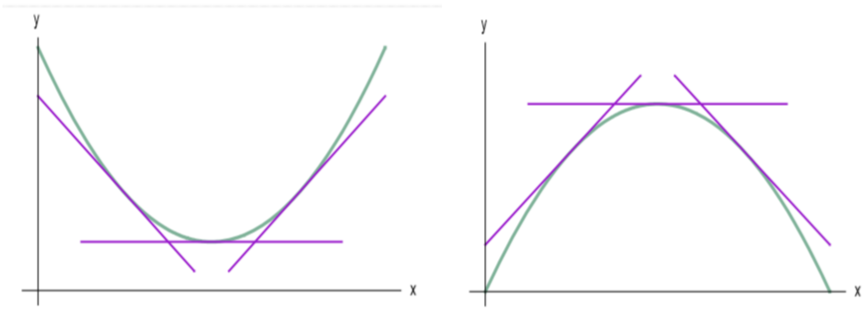
- Baldin $f'(x) > 0$ bada I-ko x guztietarako, orduan f gorakorra da I-n.
- Baldin $f'(x) < 0$ bada I-ko x guztietarako, orduan f beherakorra da I-n.
- Baldin $f'(x) = 0$ bada I-ko x guztietarako, orduan f konstantea da I-n.

Teorema. Izan bedi f funtzio jarraitu bat I nolanahiko tarte batean, eta deribagarria tartearen barruan.

- Baldin $f'(x) > 0$ bada I barruko x guztietarako, orduan f gorakorra da I-n.
- Baldin $f'(x) < 0$ bada I barruko x guztietarako, orduan f beherakorra da I-n.
- Baldin $f'(x) = 0$ bada I barruko x guztietarako, orduan f konstantea da I-n.

7.4 Bigarren deribatuaren esanahia

Ahurtasuna eta ganbiltasuna. $f(x)$ funtzioa ahurra da (a, b) tartean, funtzioarekiko zuzen ukitzailea funtzioaren azpitik geratzen denean, $\forall x \in (a, b)$. Aldiz, $f(x)$ funtzioa ganbila da (a, b) tartean, funtzioarekiko zuzen ukitzailea funtzioaren gainetik geratzen denean, $\forall x \in (a, b)$. Ikus 7.3 irudia.



7.3 irudia. Funtzio ahurra (ezkerrean), funtzio ganbila (eskuinean).

Ahurtasuna, ganbiltasuna. Izan bedi $f(x)$ funtzioa I tarte ireki batean deribagarria. Baldin f' gorakorra bada I tartean, f ahurra dela esango dugu; aldiz, f' beherakorra bada, f ganbila da.

Inflexio-puntua. Izan bedi $f(x)$ $x = c$ puntuan jarraitua. $x = c$ puntua inflexio-puntua da, baldin eta soilik baldin $\delta > 0$ existitzen bada non f-ren grafikoa ahurra den $(c - \delta, c)$ tartean eta ganbila $(c, c + \delta)$-en, edo alderantziz. Baldin $(c, f(c))$ inflexio-puntu bat bada, orduan $f''(c) = 0$ ala $f''(c)$ ez da existitzen.

Bigarren deribatuaren irizpidea. Demagun: $f'(c) = 0$.

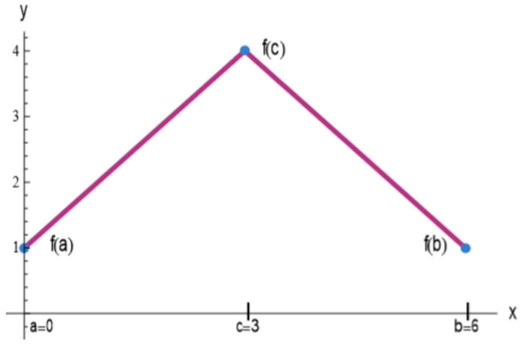
- Baldin $f''(c) > 0$ bada, orduan $f(c)$ minimo lokal bat da.
- Baldin $f''(c) < 0$ bada, orduan $f(c)$ maximo lokal bat da.

7.5 Adibideak

7.1 adibidea. Izan bedi $f\colon [0, 6] \to \mathbb{R}$ funtzioa, $f(x) = 4 - |3 - x|$ baita. Egin funtzioaren adierazpen grafikoa, eta esan zein diren funtzioaren maximo eta minimo absolutuak eta erlatiboak.

Funtzioaren grafikoa 7.4 irudian ikus daiteke. Funtzioa $[0, 6]$ tartean jarraitua denez, tarte horretan balio maximoa eta minimoa hartuko ditu. Funtzioak balio minimoa hartzen du tartearen muturretan; hau da, $x = 0$ eta $x = 6$ puntuetan.

Funtzioak balio maximoa hartzen du $x = 3$ puntuan. Puntu horretan ez da existitzen deribatua, alboetako deribatuak ezberdinak baitira. Hau da, $x = 3$ puntua singularra da. Funtzioak ez du mutur erlatiborik $[0, 6]$ tartean, ez baitago punturik $f'(x) = 0$ betetzen duenik.



7.4 irudia. 7.1 adibidea.

7.2 adibidea. Izan bedi $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ funtzioa $f(x) = |1 - x|$ baita. $f(0) = f(2)$ betetzen den arren, $\nexists x_0 \in [0, 2] : f'(x_0) = 0$ baita. Emaitza horrek ez al du betetzen Rolleren teoremak dioena?

Funtzioaren deribatua honako hau da:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 1, \\ -1 + x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Funtzioa jarraitua da $[0, 2]$ tartean, baina ez da deribagarria $x = 1$ puntuan. Hortaz, ez du Rolleren teoremako hipotesia betetzen.

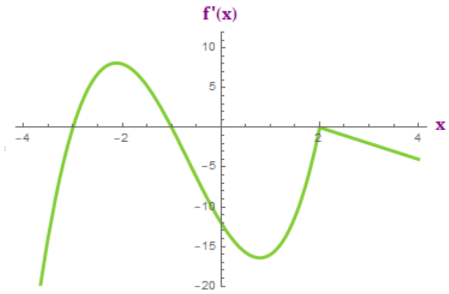
7.3 adibidea. Frogatu $x^5 + 2x - 1 = 0$ ekuazioak erro erreal bakarra duela.

Honako funtzio hau definituko dugu: $f(x) = x^5 + 2x - 1$. Funtzio hori jarraitua eta deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan. $[0, 1]$ tartea hartzen badugu, $f(0) = -1 < 0$ eta $f(1) = 2 > 0$ betetzen dira. Hortaz, Bolzanoren teorema aplika dakioke tarte horretan, $\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) = 0$ baita. Beraz, argi dago gutxienez erro erreal bat baduela ekuazio horrek. Jakin nahi dugu $x_0 \in [0, 1]$ dela erro erreal bakarra. Demagun existitzen dela $x_1 \neq x_0$, non $f(x_1) = 0$ betetzen baitu. Orduan, $[x_0, x_1]$ tartea hartuz, funtzioa jarraitua eta deribagarria da tarte horretan, eta $f(x_0) = f(x_1)$ betetzen da. Beraz, Rolleren teorema aplikatuz, $\exists x_2 \in (x_0, x_1)$ $f'(x_2) = 0$ beteko duena. Hala ere, $f(x)$ funtzioaren deribatuak ez dauka erro errealik:

$$f'(x) = 5x^4 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Horrek esan nahi du $\nexists x_1 \in \mathbb{R}$, non $f(x_1) = 0$. Hau da, $f(x)$ funtzioak erro erreal bakarra du.

7.4 adibidea. Funtzio baten deribatuaren adierazpen grafikoa 7.5 irudian ikus daiteke. Zehaztu funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, mutur erlatiboak, ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak eta inflexio-puntuak.



7.5 irudia. 7.4 adibidea.

Funtzioaren grafikoa begiratuz, funtzioa gorakorra da $x \in (-3, -1)$ tartean, eta beherakorra $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ eremuan.

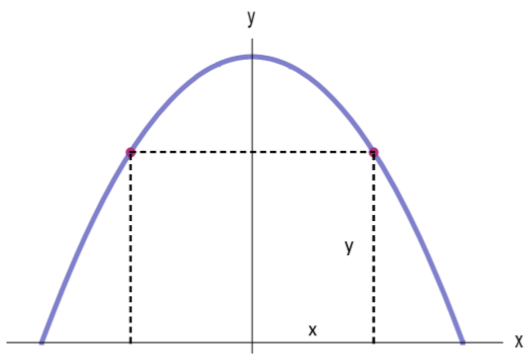
- $x = -3$ puntua minimo erlatibo bat da, $f'(-3) = 0$; $f'(x) < 0$ da $\forall x \in (-3 - \delta_1, -3)$ tarte batean $\delta_1 > 0$ balioren batentzat eta $f'(x) > 0$ da $\forall x \in (-3, -3 + \delta_2)$ tarte batean $\delta_2 > 0$ balioren batentzat.

- $x = -1$ puntua maximo erlatibo bat da, $f'(-1) = 0$; $f'(x) > 0$ da $\forall x \in (-1 - \delta_1, -1)$ tarte batean $\delta_1 > 0$ balioren batentzat eta $f'(x) < 0$ da $\forall x \in (-1, -1 + \delta_2)$ tarte batean $\delta_2 > 0$ balioren batentzat.

- $x = 2$ puntua ez da mutur erlatibo bat. Nahiz eta $f'(2) = 0$ izan, $f'(x) < 0$ da $\forall x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ tarte batean $\delta > 0$ balioren batentzat.

Funtzioa ahurra da $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$ eremuan, eta ganbila da $x \in (-2, 1) \cup (2, +\infty)$ eremuan. $x = -2$, $x = 1$ eta $x = 2$ puntuak inflexio-puntuak dira, $f''(x)$-k ikurra aldatzen baitu puntu horietako bakoitzaren inguruan.

7.5 adibidea. Kalkulatu oinarria OX ardatzean duen eta beste bi erpinak $y = 12 - x^2$ parabolan dituen azalera maximoko lauki zuzena; ikus 7.6 irudia.



7.6 irudia. 7.5 adibidea.

Parabolan bi erpin eta oinarria OX ardatzean dituen lauki zuzenaren azalera emana dator honako adierazpen honen bidez:

$$A(x) = 2x(12 - x^2), \ x \in (0, \sqrt{12}).$$

Azalera hori maximoa izateko, $A'(x) = 0$ bete behar da. Kalkula dezagun deribatu hori, eta ikus dezagun zein puntutan den zero:

$$A'(x) = 2(12 - x^2) - 4x^2 \Rightarrow 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Ez dugu kontuan hartuko $x = -2$, ez baitago $(0, \sqrt{12})$ tartearen barruan: $-2 \notin (0, \sqrt{12})$. Hortaz, $x = 2$ denean azalera-funtzioak mutur erlatibo bat dauka. Azaleraren bigarren deribatuan $x = 2$ ordezkatuz, maximoa dela ziurtatuko dugu:

$$A''(x) = -12x \Rightarrow A''(2) = -24.$$

7.6 Ordenagailuko praktikak

7.1 ariketa. Gaixotasun bat agertu denetik t aste pasatu direnean, dagoen kutsatu kopurua honako funtzio honen bidez kalkula daiteke: $q(t) = \frac{20 \cdot 10^3}{1+19e^{-1,2t}}$.

a) Zenbat pertsona zeuden kutsatuta gaixotasuna agertu zenean? Eta zenbat gaixotasunaren agerralditik 2 aste pasatu zirenean?

b) Noiz hasi zen kutsatuen kopurua arintzen? Gaixotasuna arintzen hasi dela jotzen da, gaixoen kopuruaren kurbak inflexio-puntu bat duenean.

c) Kutsatuen joerak berdin jarraitzen badu, zenbat pertsonak hartuko dute gaixotasuna?

a) atala. Funtzioa definituko dugu, eta $t = 0$ eta $t = 2$ aldiuneetako kutsatuak kalkulatuko ditugu:

```
q[t_] = 20/(1 + 19 * E^(-1.2 * t)) * 1000
```

$\frac{20000}{1+19e^{-1.2t}}$

```
q[0]
```

1000.

```
q[2]
```

7343.11

b) atala. Lehenengo deribatua eta bigarrena kalkulatuko ditugu:

$\boldsymbol{q'[t]}$

$\frac{456000.e^{-1.2t}}{(1+19e^{-1.2t})^2}$

$\boldsymbol{q''[t]//\mathrm{Simplify}}$

$\frac{e^{-1.2t}\left(1.03968\times10^7 e^{2.4t}-547200.e^{3.6t}\right)}{(19.+e^{1.2t})^3}$

$\boldsymbol{q''[t]==0//\mathrm{Simplify}}$

$\frac{1.e^{1.2t}-0.0526316e^{2.4t}}{19.+1.e^{1.2t}}==0$

Gaixotasuna arintzen hasi dela jotzen da gaixoen kopuruaren kurbak inflexio-puntu bat duenean, eta hori da planteatuko duguna:

$\boldsymbol{s=\mathrm{Solve}[\%,t]}$

$\{\{t\to 2.4537\}\}$

$\boldsymbol{\mathrm{ip}=t/.s[[1]]}$

2.4537

$\boldsymbol{q[\mathrm{ip}]}$

10000.

Hortaz, gaixotasuna arintzen hasi da $t = 2.4537$ astean, eta une horretan dagoen kutsatu kopurua $q(2.4537) = 10000$ da.

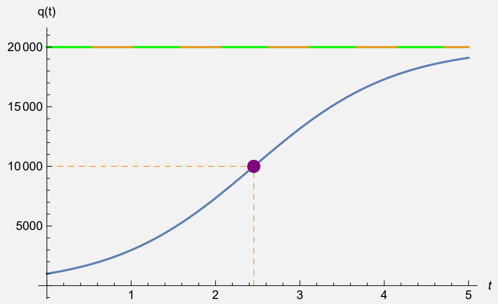
c) atalean $t \to \infty$ limitea eskatzen digute:

$\boldsymbol{\mathrm{Limit}[q[t],t\to\mathrm{Infinity}]}$

20000.

Bukatzeko, kutsatu kopurua ematen digun funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
g1 = Plot[{q[t], 20000}, {t, 0, 5}, AxesLabel → {t, "q(t)"}];
g2 = Plot[{20000}, {t, 0, 5}, PlotStyle → {Dashing[0.1], Green}];
l1 = Graphics[{Dashed, Orange, Line[{{ip, 0}, {ip, q[ip]}}]}];
l2 = Graphics[{Dashed, Orange, Line[{{0, q[ip]}, {ip, q[ip]}}]}];
punto = Graphics[{PointSize[0.03], Purple, Point[{ip, q[ip]}]}];
Show[g1, g2, l1, l2, punto, PlotRange → {1, 20500}]
```



7.2 ariketa. Zilindro-itxura duen biltegi batek 10 metroko erradioa eta 1.000 m^{3}ko edukiera ditu, eta ur-emari bat hornitzen du. Biltegian urak duen altuera denboraren menpekoa da, eta honako funtzio honen bidez emanda dator: $h(t) = \frac{10(1-t+t^2)}{\pi(1+t^2)}$, t egunetan neurtuta egonik.

a) Zehaztu urak zein altuera duen biltegian, $t = 0$, $t = 5$ eta $t = 10$ aldiuneetan.

b) Kalkulatu noiz dagoen ur-biltegian urik gehien eta noiz gutxien.

c) Biltegia uneren batean goraino beteko ote da?

a) atala. Bolumena definituko dugu: $V(t) = \pi r^2 h(t)$, eta eskatzen dizkiguten aldiuneetako balioak kalkulatuko ditugu:

```
V[t_] = Pi * 100 * 10(t^2 − t + 1)/(Pi * (t^2 + 1))
```

$\frac{1000\left(1-t+t^2\right)}{1+t^2}$

```
V[0]
```

1000

```
V[5]
```

$\frac{10500}{13}$

$V[10]$

$\frac{91000}{101}$

b) atala. Ur-biltegian urik gehien eta gutxien noiz dagoen kalkulatuko dugu. Horretarako, funtzioa deribatuko dugu:

$V'[t]$

$\frac{1000(-1+2t)}{1+t^2} - \frac{2000t\left(1-t+t^2\right)}{(1+t^2)^2}$

$V'[t] == 0//\mathrm{Simplify}$

$\frac{-1+t^2}{1+t^2} == 0$

$\mathrm{Solve}[\%, t]//N$

$\{\{t \to -1.\}, \{t \to 1.\}\}$

V"[1]

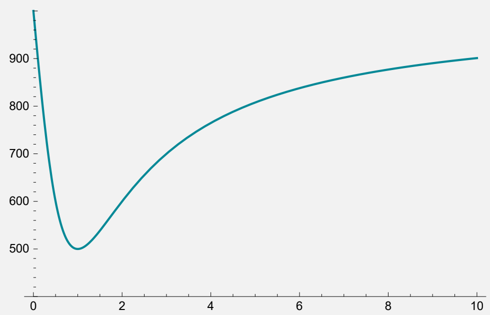
500

$V[1]$

500

$t = 1$ denean funtzioak minimo bat dauka, lehenengo deribatua zero baita eta bigarren deribatua puntu horretan positiboa baita. Funtzioaren adierazpen grafikoa honako hau da:

$\mathrm{Plot}[V[t], \{t, 0, 10\}, \mathrm{PlotRange} \to \{400, 1000\}]$



c) atala. Ur-biltegia ea uneren batean guztiz beteko den galdetzen digute. Grafikoari begiratuta, goranzko joera bat badagoela ikusten da. Jakin nahi duguna da ea biltegia guztiz beteko den. Horretarako, $\lim_{t\to\infty} V(t)$ limitea kalkulatuko dugu:

Limit[V[t], $t \to$ Infinity]

1000

Eta egiten diguten galderaren erantzuna da $\lim_{t\to\infty} V(t) = 1.000$ gertatuko dela $t \to \infty$ doanean.

7.3 ariketa. Zehaztu a eta b parametroen balioak, $f(x) = e^{a+bx}(a+bx)$ funtzioak $x_1 = a - 3b$ puntuan minimo lokal bat izan dezan eta $x_2 = a - 4b$ puntuan inflexio-puntu bat izan dezan.

Funtzioa definituko dugu:

y[x_] = ($a + b * x$) * E^($a + b * x$)

$e^{a+bx}(a+bx)$

x1 = $a - 3 * b$;

x2 = $a - 4 * b$;

Funtzioak $x_1 = a - 3b$ puntuan minimo lokal bat izateko, beharrezko baldintza da lehenengo deribatua zero izatea puntu horretan:

d1[x_] = D[y[x], x]

$be^{a+bx} + be^{a+bx}(a+bx)$

d1[x1] == 0//Simplify

$b\left(-1+3b^2-a(1+b)\right)e^{a+(a-3b)b} == 0$

Eta funtzioak $x_2 = a - 4b$ puntuan inflexio-puntu bat izateko, beharrezko baldintza da bertan bigarren deribatua zero izatea:

d2[x_] = $D[y[x], \{x, 2\}]$//Simplify

$b^2 e^{a+bx}(2+a+bx)$

d2[x2] == 0//Simplify

$b^2(2+a+(a-4b)b)e^{a+(a-4b)b} == 0$

Baldintza biak batera ea noiz beteko diren kalkulatuko dugu:

s = Solve[{d1[x1] == 0, d2[x2] == 0}, {a, b}]

$\{\{b \to 0\}, \{a \to 1, b \to 1\}\}$

x1/.s[[1]]

a

x2/.s[[1]]

a

y1[x_] = $y[x]$/.s[[1]]

ae^a

$b = 0$ denean, $y = ae^a$ funtzio konstantea daukagu. Beraz, ez da bila gabiltzan funtzioa. $a = 1$ eta $b = 1$ direnean, $f(x) = e^{1+x}(1+x)$ funtzioa daukagu, eta horixe da hain zuzen eskatutako baldintzak betetzen dituen funtzioa: $x_1 = 1 - 3 = -2$ puntuan minimo lokal bat duena eta $x_2 = 1 - 4 = -3$ puntuan inflexio-puntu bat duena. Funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

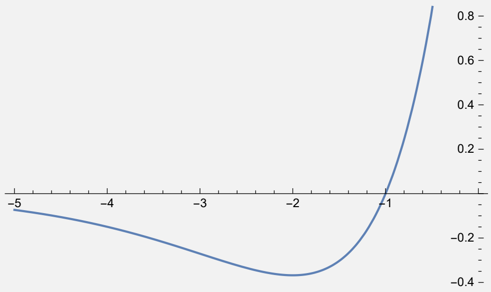
y2[x_] = $y[x]$/.s[[2]]

$e^{1+x}(1+x)$

a = 1

1

Plot[y2[x], {x, −5, 0}]



8. kapitulua

Aldagai erreal anitzeko funtzio errealen limiteak eta jarraitutasuna

Hainbat fenomenotan, magnitude bat aldagai biren edo gehiagoren menpe dago. Fenomeno horiek aldagai erreal anitzeko funtzio errealen bidez adieraz daitezke. Horrela, paralelepipedo baten bolumena haren hiru ertzen luzeraren menpe idazten da; jaurtigai baten irismena haren hasierako abiaduraren eta jaurtiketa-angeluaren menpe dago, etab. Gai honetan, aldagai erreal anitzeko funtzioak izango ditugu aztergai.

8.1 Aldagai anitzeko funtzio erreala

Definizioa. Bi aldagai errealeko $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funtzio erreal bat da, $(x, y) \in D$ bikote bakoitzari balio erreal bat atxikitzen dion erregela bat: $z = f(x, y)$. *Aldagai aske* deritze x eta y aldagaiei, eta z aldagaiari *menpeko aldagai*.

Era berean, n aldagai errealeko $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzio erreal bat da, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ $n$kote bakoitzari balio erreal bat atxikitzen dion erregela: $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Kasu honetan ere x_1, x_2, …, x_n aldagai askeak dira, eta z menpeko aldagaia.

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreal bat. *Funtzioaren grafiko* deritzo (x, y, z) puntuak hiru dimentsioko ardatz koordenatu errektangeluarrean adierazteari, $z = f(x, y)$ izanik. $f(x, y)$ funtzioaren domeinua OXY planoko (x, y) puntuez osatuta egongo da, eta puntu horien irudiak $z = f(x, y)$ OZ ardatzean adieraziko dira.

Maila-kurbak eta maila-gainazalak. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala, $z = f(x, y)$ izanik. Orduan, $z = C$ planoa emanik, plano horren eta $f(x, y)$ funtzioaren arteko ebakidurari f funtzioaren grafikoaren $z = C$ planoko traza deritzo. $f(x, y) = C$ ekuazioa betetzen duten OXY planoko puntuei $z = C$ planoko $f(x, y)$ funtzioaren maila-kurba deritze. *Maila-kurba* kontzeptua bi aldagai baino gehiagotako funtzioen kasura orokor daiteke. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n aldagai errealeko funtzio erreal bat, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ izanik. Orduan, $z = C$ hiperplanoa emanik, hiperplano horren eta $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funtzioaren arteko ebakidurak n dimentsiodun espazioan mugatzen duen eskualdeari *maila-gainazal* deritzo.

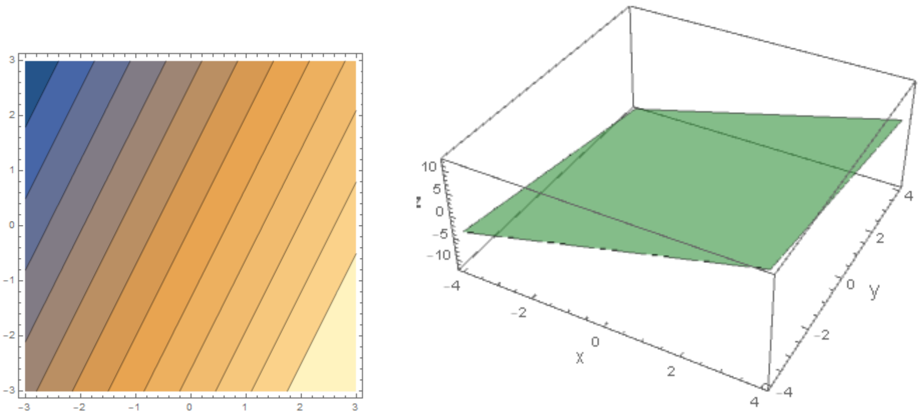
Bi aldagai errealeko funtzio errealaren adierazpen grafikoa egiterakoan, oso erabilgarriak dira maila-kurbak.

8.2 Gainazalen adierazpena maila-kurbak erabilita

8.2.1 Planoak

Plano baten ekuazioa bi aldagai errealeko funtzio honen bidez emana dago: $f(x,y) = Ax + By + C$. Planoaren maila-kurben ekuazioa da $Ax + By + C = c$.

$z = x + y + 1$ planoa hartzen badugu, maila-kurbek $x + y + 1 = c$ adierazpena betetzen dute; hau da: $y = -x - 1 + c$ zuzenak dira, malda $m = -1$ izanik eta $(0, -1 + c)$ ebaki-puntua; ikus 8.1 irudia.



8.1 irudia. Planoa eta haren maila-kurbak.

8.2.2 Gainazal koadrikoak

Honelako ekuazioa daukaten gainazalei *gainazal koadriko* deritze:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0.$$

Gainazal hauek marrazteko, honako hauek izan behar dira kontuan:

- Koordenatu-ardatzekiko ebaki-puntuak.
- Trazak: koordenatu planoekiko ebaki-kurbak.
- Sekzioak: planoekiko ebaki-kurbak.
- Zentroa (daukatenen kasuan).
- Simetriak.
- Mugak.

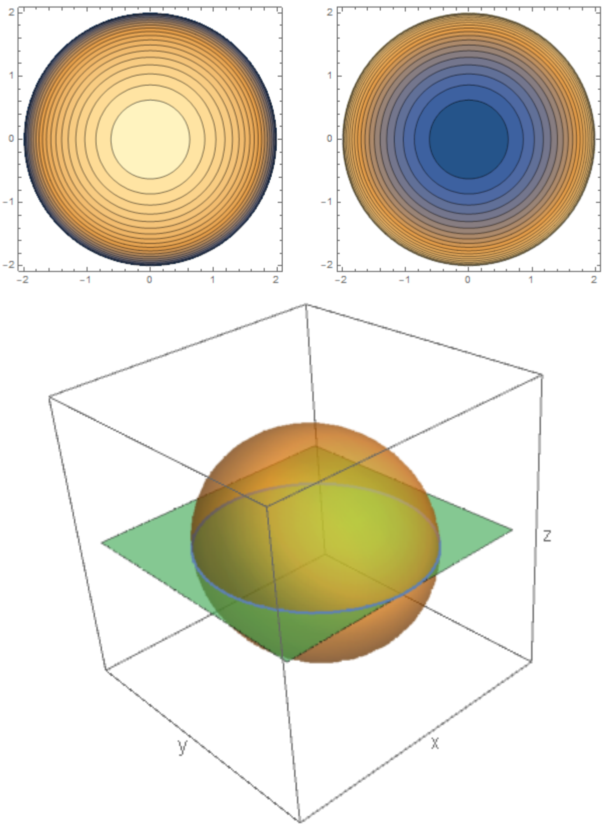
Zenbait koadrikaren adibideak ikusiko ditugu hurrengo ataletan.

Esfera

Jatorrian zentratutako r erradiodun esferaren ekuazioa honako hau da:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Bi aldagai errealeko $z_1 = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ eta $z_2 = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ funtzioen grafikoak eginez lortzen da esferaren adierazpen grafikoa. Edozein ardatzekiko sekzio perpendikularrak zirkunferentziak dira esferaren kasuan; ikus 8.2 irudia.



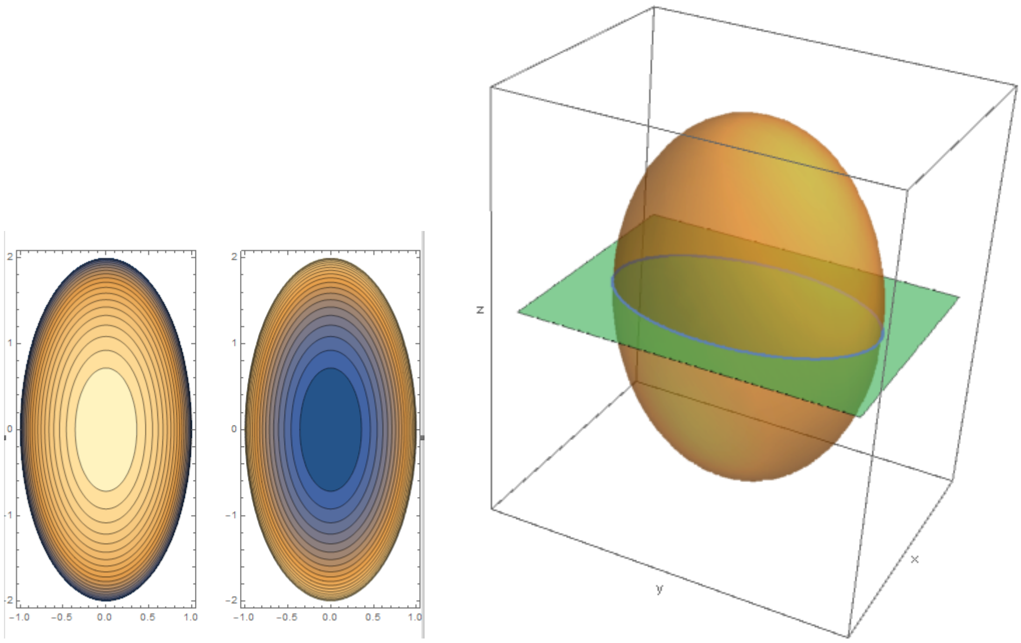
8.2 irudia. Esfera eta haren maila-kurbak.

Elipsoidea

Jatorrian zentratutako eta a, b eta c ardatzerdiak dituen elipsoidearen ekuazioa honako hau da:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bi aldagai errealeko $z_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ eta $z_2 = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ funtzioen grafikoak eginez lortzen da elipsoidearen adierazpen grafikoa. Edozein ardatzekiko sekzio perpendikularrak elipseak dira; ikus 8.3 irudia.



8.3 irudia. Elipsoidea eta haren maila-kurbak.

Erreboluzioko paraboloidea

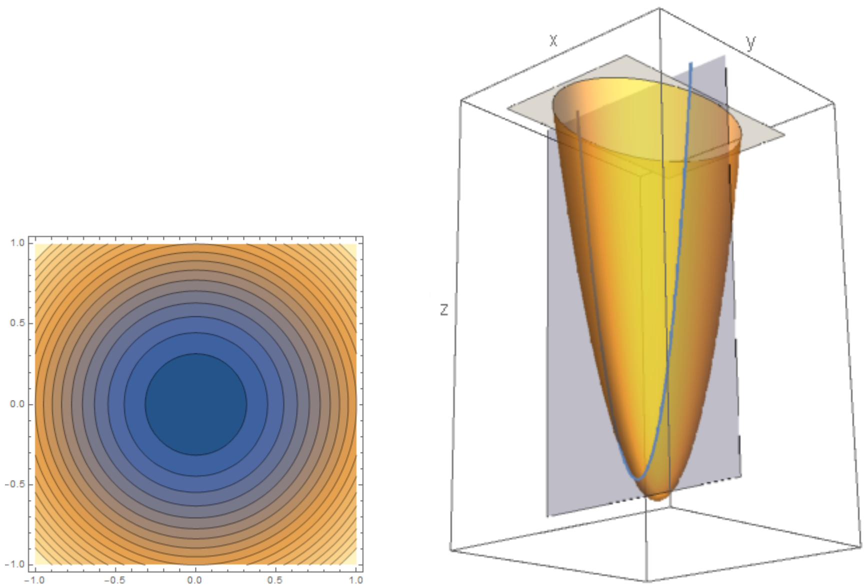
$z = x^2 + p$ parabola OZ ardatzaren inguruan biratzean sortzen den gainazala da erreboluzioko paraboloidea. Haren ekuazioa honako hau da:

$$z = x^2 + y^2 + p.$$

Erreboluzioko paraboloidearen maila-kurbak honako hauek dira:

$$x^2 + y^2 + p = c \Rightarrow x^2 + y^2 = c - p.$$

Hau da, $c > p$ bada, maila-kurbak zirkunferentziak izango dira. OX eta OY ardatzekiko sekzio perpendikularrak parabolak dira; ikus 8.4 irudia.



8.4 irudia. Erreboluzio paraboloidea eta haren maila-kurbak.

Paraboloide eliptikoa

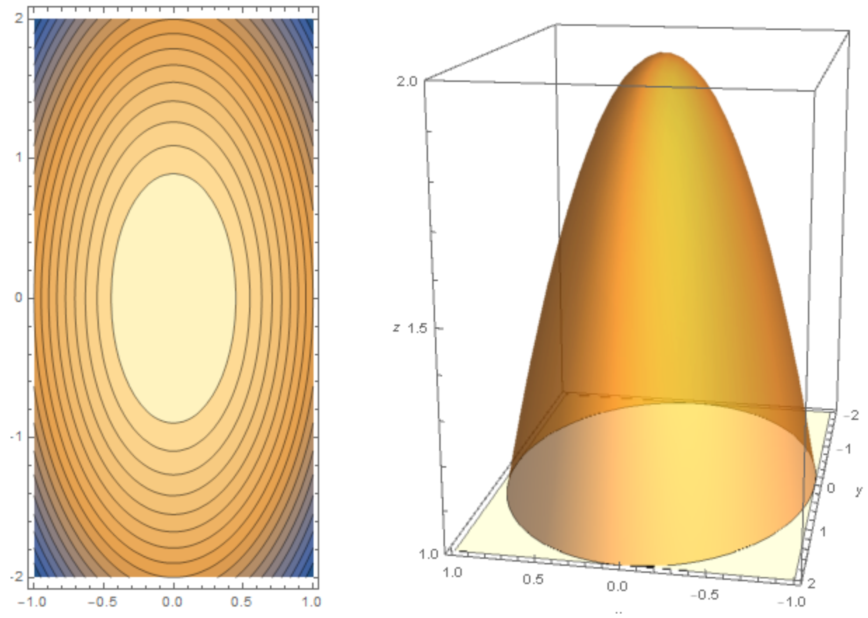
Paraboloide eliptikoaren ekuazioa honako hau da:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + p.$$

Maila-kurbak honako hauek dira:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + p = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c - p.$$

Hau da, $c > p$ bada, maila-kurbak elipseak izango dira. OX eta OY ardatzekiko sekzio perpendikularrak parabolak dira, ikus 8.5 irudia.



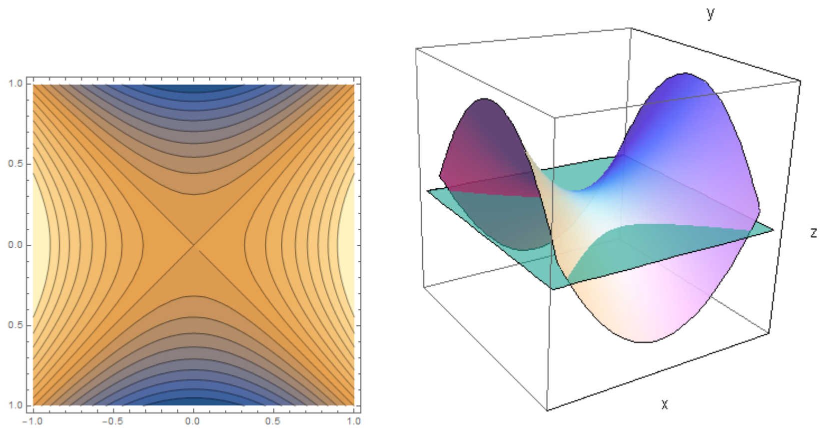
8.5 irudia. Paraboloide eliptikoa eta haren maila-kurbak.

Paraboloide hiperbolikoa

Paraboloide hiperbolikoaren ekuazioa honako hau da:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

OX eta OY ardatzekiko sekzio perpendikularrak parabolak dira; ikus 8.6 irudia.



8.6 irudia. Paraboloide hiperbolikoa eta haren maila-kurbak.

Hiperboloideak

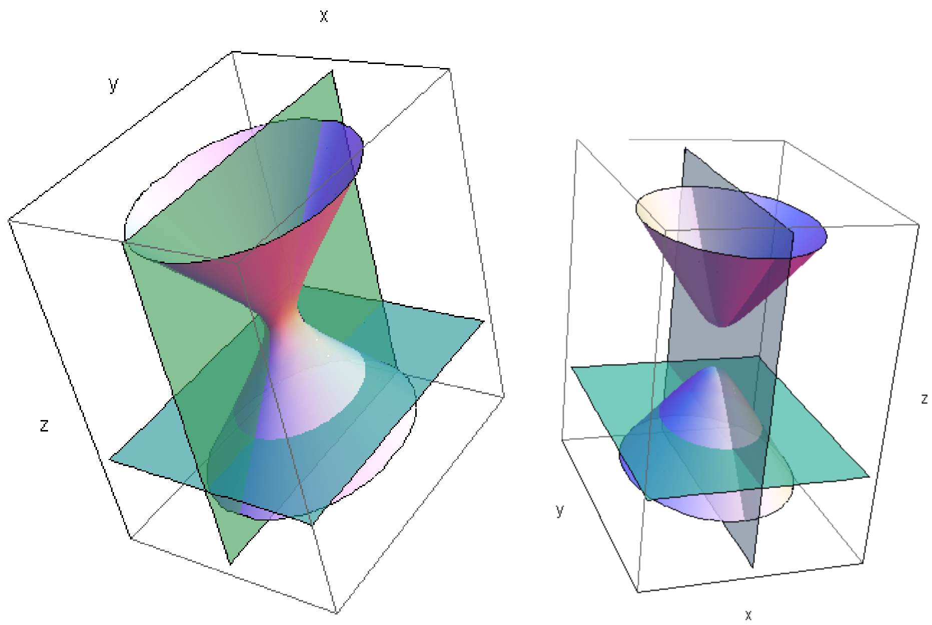
Hiperbola batek haren simetri-ardatzetako baten inguruan biratzen duenean sortzen da hiperboloidea. Hiperboloidea orri bakarrekoa edo bi orrikoa izan daiteke. Orri bakarrekoa honako adierazpen honen bidez emana dator:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bi orrikoa, aldiz, beste era honetan:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

OZ ardatzarekiko sekzio perpendikularrak zirkunferentziak dira, eta OX eta OY ardatzekiko sekzioak hiperbolak; ikus 8.7 irudia.



8.7 irudia. Hiperboloideak.

8.3 Aldagai anitzeko funtzioen limiteak eta jarraitutasuna

***Limite* kontzeptua.** Izan bedi $f(\bar{x})$ bi aldagai errealeko funtzio erreal bat, $\bar{x} = (x, y)$ izanik, $\bar{a} = (x_0, y_0)$ barne duen tarte ireki batean definiturikoa ($\bar{a}$ puntua bera salbuetsiz, kanpoan utziz), eta izan bedi L zenbaki erreal bat. $\bar{x}$ aldagaia $\bar{a}$ baliora hurbiltzen denean limitea L da, hau da:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

baldin $\varepsilon > 0$ guztietarako, $\delta > 0$ bat existitzen bada, zeinak honako hau betetzen baitu:

$$\text{baldin } 0 < |\bar{x} - \bar{a}| < \delta, \text{ orduan } |f(\bar{x}) - L| < \varepsilon.$$

Norabide-limiteak. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala. Baldin $\bar{x} = (x, y)$ aldagaia $\bar{a} = (a, b)$ baliora hurbiltzen denean limitea L bada, hau da:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

limitearen balioa hori da (x, y) aldagaia nolanahi hurbiltzen dela, (a, b) puntura.

Puntu batera bektore baten norabidea jarraituz hurbiltzeari *norabide-limite* edo *limite erradial* deritzo. Eta $\bar{x} = (x, y)$ aldagaia $\bar{a} = (a, b)$ baliora hurbiltzen denean limitea L bada, limite hori lortuko dugu puntu horretara edozein bektoreren norabideari jarraituz hurbiltzen garenean:

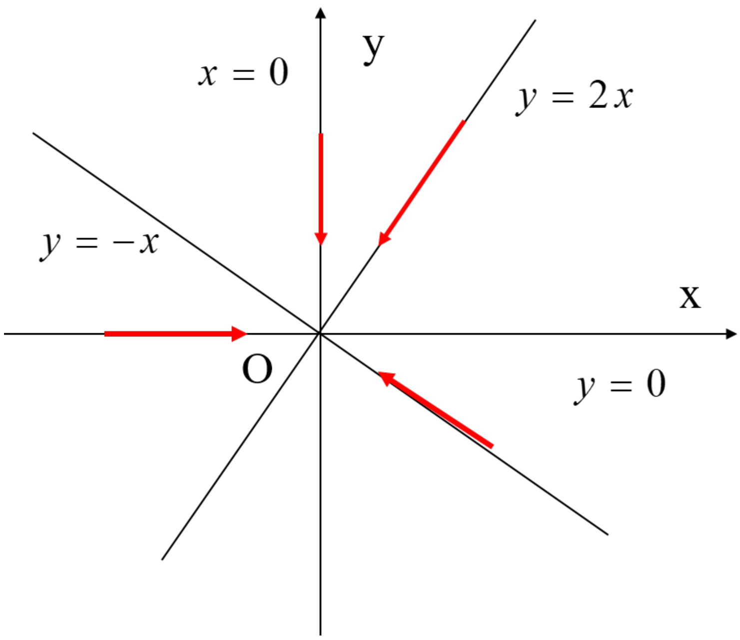
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(tu + a, tv + b) = L, \ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Goiko limitea beste era honetan ere idatz daiteke: $\bar{x} = (x, y)$ aldagaia $\bar{a} = (a, b)$ baliora hurbiltzen denean limitea L bada, $\bar{a} = (a, b)$ puntua barnean duen edozein $y = m(x - a) + b$ zuzen aukeratuta puntu horretara hurbiltzen garenean, limite hori lortuko dugu:

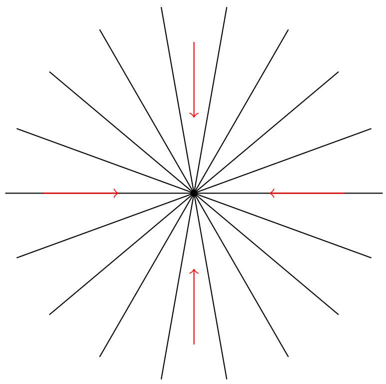
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=m(x-a)+b}} f(x, y) = \lim_{x\to a} f\left(x, m(x - a) + b\right), \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

$\bar{a} = (a, b) = (0, 0)$, denean goiko formula asko sinplifikatzen da; limite erradialak izango ditugu, limitea kalkulatzeko puntu horretara $y = mx$ zuzenen norabidea jarraituz hurbiltzen garenean:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} f\left(x, mx\right).$$



8.8 irudia. Limite erradialak (a, b) puntuan.



8.9 irudia. Limite erradialak (a, b) puntuan.

Ondorioak. Demagun honako limite hau kalkulatu nahi dugula: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$. Orduan:

- Baldin eta $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ eta bere balioa $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ bada, orduan, norabide-limiteak existitu egingo dira eta L balioko dute.
- Norabide-limiteren bat ez bada existitzen, edo guztiak existitu arren balio ezberdinak hartzen badituzte, orduan, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.
- Norabide-limiteak existitu arren eta guztiak berdinak izan arren, gerta daiteke $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ ez existitzea. Hala ere, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existituko balitz, norabide-limiteen balio bera izango luke.

Funtzio marjinalak eta limite errepikatuak. Izan bedi $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala. $(a, b) \in \mathbb{R}$ puntua hartuz definitzen diren honako limite hauei *funtzio marjinal* deritze:

$$f_1(x) = \lim_{y \to b} f(x, y),$$
$$f_2(y) = \lim_{x \to a} f(x, y).$$

Eta honako limite hauei *limite errepikatu* deritze:

$$L_1 = \lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right),$$
$$L_2 = \lim_{y \to b} f_2(y) = \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right).$$

Teorema. Funtzio marjinalak existitzen direnean, baldin eta puntu bateko limitea existitzen bada, limite errepikatuen berdina da. Hau da:

$$\text{Baldin } \exists \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L \Rightarrow L_1 = L_2 = L.$$

Funtzio jarraitua. $z = f(x, y)$ funtzioa (x, y) puntuan jarraitua da, honako baldintza hau betetzen badu:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Geometrikoki zera esan nahi du: $z = f(x, y)$ gainazalak ez duela saltorik edo zulorik.

8.4 Adibideak

8.1 adibidea. $f(x, y) = \sqrt{1 - x + y}$ funtzioa emanik, kalkulatu $f(2, 1)$, $f(-4, 4)$, $f(-4, -6)$, funtzioaren izate-eremua eta irudien multzoa.

Esaten dizkiguten bi puntuen irudiak kalkulatuko ditugu:

$$f(2, 1) = \sqrt{1 - 2 + 1} = 0,$$
$$f(-4, 4) = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3,$$
$$f(-4, 6) = \sqrt{1 + 4 - 6} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$$

$(-4, 6)$ puntuaren irudia ez da zenbaki erreala, beraz, ez da izate-eremuan egongo.

Funtzioaren izate-eremuan honako puntu hauek daude:

$$I.E. = \{(x, y) : 1 - x + y \geq 0\} = \{(x, y) : y \geq x - 1\}.$$

Izate-eremua $y = x - 1$ zuzenaren goiko aldea da.

Eta funtzioaren irudien multzoan honako puntu hauek daude:

$$Irudiak = \{f(x, y) : (x, y) \in I.E.\} = \left\{ \sqrt{1 - x + y} : (x, y) \in I.E. \right\} = R^+.$$

8.2 adibidea. Kalkulatu $f_1(x, y) = \ln(y - x)$ eta $f_2(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ funtzioen izate-eremuak.

$f_1(x,y)$ funtzioaren izate-eremua honako hau da:

$$I.E. = \{(x,y) : y - x > 0\} = \{(x,y) : y > x\}.$$

Eta $f_2(x,y)$ funtzioarena beste hau:

$$I.E. = \Big\{(x,y) : 4 - (x^2+y^2) \geq 0\Big\} = \Big\{(x,y) : 4 \geq (x^2+y^2)\Big\}.$$

8.3 adibidea. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ funtzioa emanik, kalkulatu honako limite hau:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

$y = mx$ zuzenen norabideko limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2))} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Norabide-limitearen balioa m parametroaren menpekoa denez, ez da existitzen limite hori.

8.4 adibidea. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ funtzioa emanik, kalkulatu honako limite hau:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

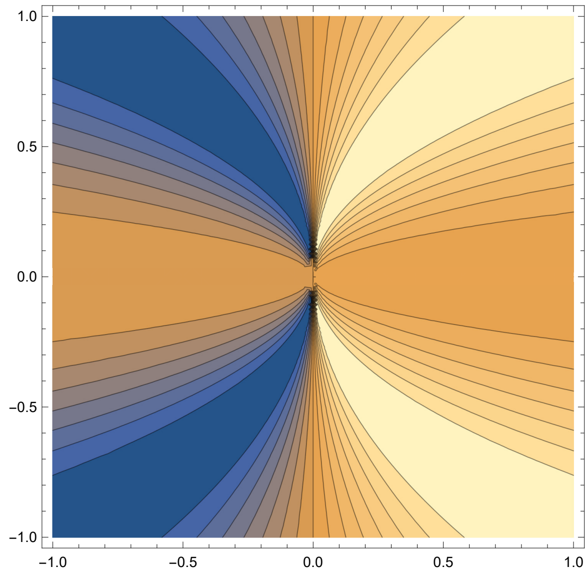
$y = mx$ zuzenen norabideko limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{m^2x^3}{x^2(1+x^2m^4))} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{m^2x}{1+x^2m^4} = 0.$$

Norabide-limiteen balioa 0 denez, posible da limite hori existitzea. Hala ere, funtzioaren maila-kurbak irudikatzen baditugu, $(0,0)$ puntutik igarotzen diren $x = my^2$ ekuaziodun parabolak dira; ikus 8.10 irudia. Limitea norabide horretan kalkulatuz, honako hau daukagu:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{my^4}{m^2y^4+y^4} = \frac{m}{m^2+1}.$$

Era honetan lortzen den limiteak m parametroaren menpekotasuna du. Hortaz, ez da existitzen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ limitea.



8.10 irudia. 8.4 adibideko maila-kurbak.

8.5 adibidea. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}$ funtzioa emanik, ez da existitzen honako limite hau:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^4}.$$

Hala ere, frogatu limite errepikatuak existitzen direla.

$y = mx$ zuzenen norabideko limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2m}{x^2+x^4m^4} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{m}{1+x^2m^4} = m.$$

Norabide-limitearen balioa m parametroaren menpekoa denez, ez da existitzen limite hori. Hala ere, ikusiko dugun moduan, limite errepikatuak existitu egiten dira:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^4}\right) = 0,$$
$$L_2 = \lim_{y\to 0} f_2(y) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^4}\right) = 0.$$

8.6 adibidea. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funtzioa emanik, kalkulatu limite errepikatuak, eta ondorioztatu honako limite hau ea existitzen den:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Limite errepikatuak kalkulatuko ditugu:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$
$$L_2 = \lim_{y\to 0} f_2(y) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Limite errepikatuak existitu arren ezberdinak direnez, ez da existitzen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitea.

8.7 adibidea. Honako funtzio hau emanik:

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & x > 0, \\ -y, & x \leq 0, \end{cases}$$

frogatu ez dela existitzen funtzio marjinaletako bat.

$y_0 \neq 0$ hartuta, ez da existitzen honako funtzio marjinal hau:

$$f_2(y) = \lim_{x\to 0} f(x,y).$$

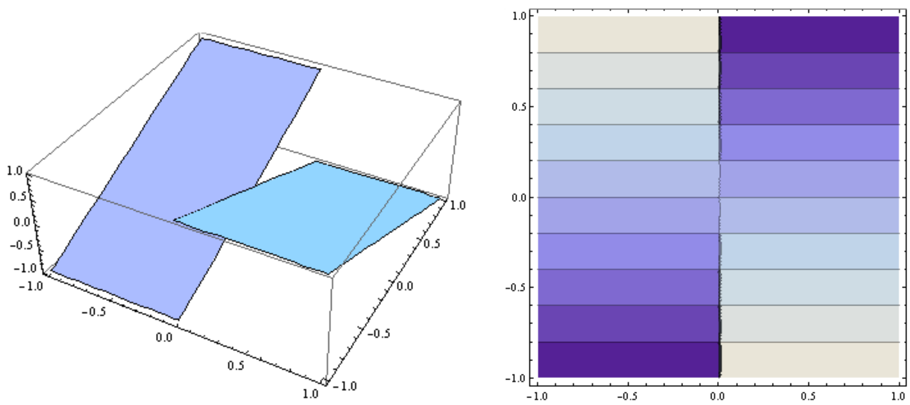
Hau gertatzen baita:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x,y_0) &= \lim_{x\to 0^+} y_0 = y_0, \\ \lim_{x\to 0^-} f(x,y_0) &= \lim_{x\to 0^-} -y_0 = -y_0. \end{aligned}$$

Ez da existitzen $f_2(y)$ funtzio marjinala $y_0 \neq 0$ denean. Hala eta guztiz, existitzen da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitea, eta bere balioa 0 da:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

$f(x,y) = |y|$ baita; ikus 8.11 irudia.



8.11 irudia. 8.7 adibidea.

8.8 adibidea. Honako funtzio hau emanik:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

frogatu honako limite hau existi daitekeela:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Limite errepikatuak existitzen dira, eta berdinak dira:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0,$$
$$L_2 = \lim_{y\to 0} f_2(y) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0.$$

Limite erradialak ere guztiak dira berdinak:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^3m^2}{x^2+x^2m^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{1+m^2} = 0.$$

Hala ere, baldintza horiek ez dira nahikoak funtzioaren limitea puntu horretan existitzen dela ziurtatzeko.

8.5 Ordenagailuko praktikak

8.1 ariketa. Egin honako funtzio honen adierazpen grafikoa: $f(x, y) = \sin(xy)$.

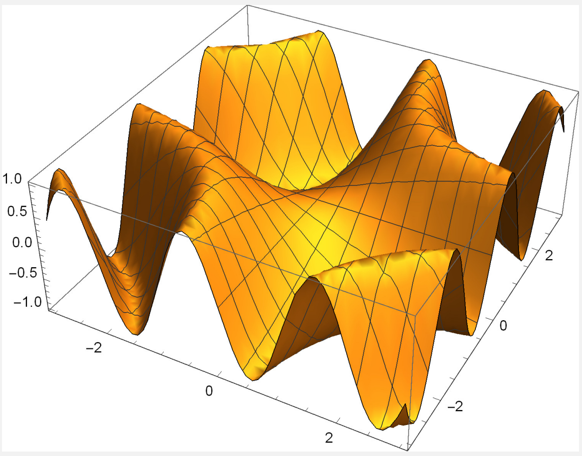
Funtzioa definituko dugu:

```
f[x_,y_] = Sin[x*y]
```

Sin[xy]

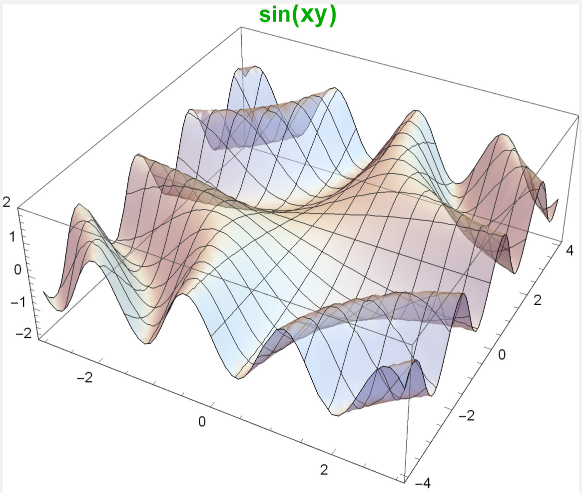
Plot3D agindua erabilita, adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
g1 = Plot3D[f[x,y], {x,−3,3}, {y,−3,3}]
```



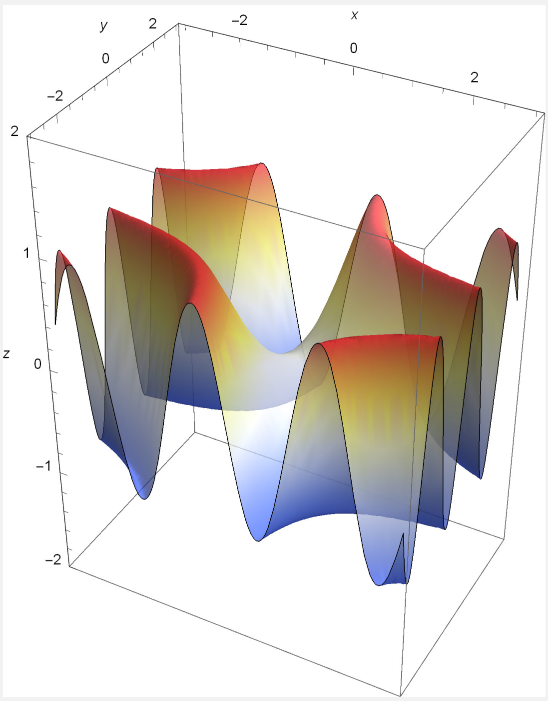
Plot3D aginduak dituen aukerak erabil ditzakegu, izenburua jartzeko edota estiloak eta koloreak definitzeko:

g2 = Plot3D[Sin[$x * y$], {x, −3, 3}, {y, −4, 4}, PlotRange → {−2, 2}, PlotLabel → “sin(xy)”, PlotStyle → {Opacity[0.5], LightBlue}]



Plot3D aginduak aukera asko eskaintzen ditu, honako grafiko honetan ikus daitekeen moduan:

g3 = Plot3D[Sin[$x * y$], {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, PlotRange → {−2, 2}, PlotStyle → {LightGreen, Opacity[0.7]}, PlotPoints → 30, Mesh → False, BoxRatios → {1.5, 1, 2}, ColorFunction → “TemperatureMap”, AxesLabel → {x, y, z}]

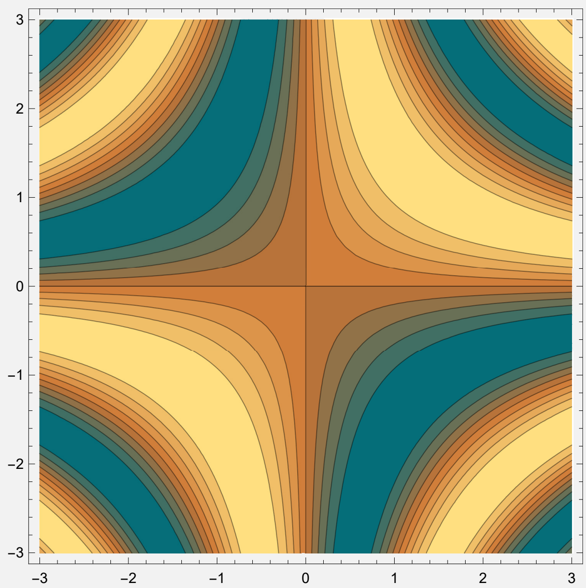


8.2 ariketa. Irudikatu honako funtzio honen maila-kurbak: $f(x, y) = \sin(xy)$. Aurreko ariketako funtzio berdinarekin jarraitzen dugu:

```
f[x_, y_] = Sin[x * y]
```

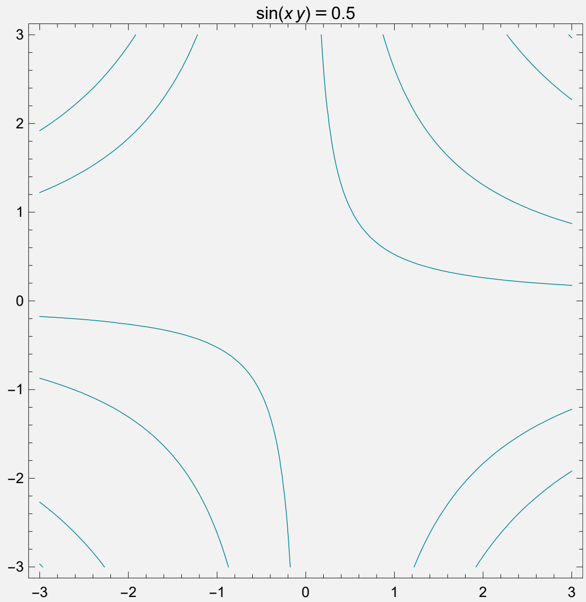
$z = f(x, y)$ funtzioaren maila-kurbek $f(x, y) = k$ adierazpena betetzen dute k konstante bat izanik. Maila-kurbak $z = f(x, y)$ gainazalaren eta $z = k$ planoaren arteko ebakidurak dira. *ContourPlot* funtzioa erabilita, funtzio baten maila-kurbak irudika daitezke:

```
g4 = ContourPlot[Sin[x * y], {x, −3, 3}, {y, −3, 3}]
```



Adibidez, honako hauek dira $k = 0,5$ denean ditugun maila-kurbak; hau da, $f(x, y) = 0,5$:

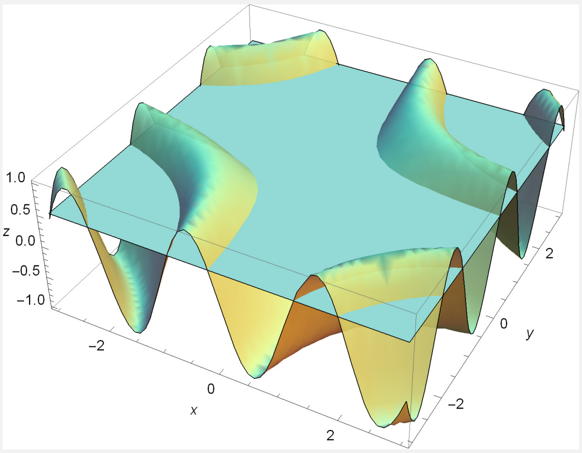
```
g5 = ContourPlot[Sin[x * y] == 0.5, {x, −3, 3}, {y, −3, 3},
PlotLabel → Sin[xy] == 0.5]
```



$z = f(x, y)$ gainazalaren eta $z = 0,5$ planoaren arteko ebakidura adierazteko, *Plot3D* erabil daiteke:

g6 = Plot3D[{Sin[$x * y$], 0.5}, {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, Mesh → None,

PlotStyle → {{LightGreen, Opacity[0.9]}, LightPurple}, AxesLabel → {x, y, z}]



Eta ebakidura horren OXY planoko proiekzioa da $f(x, y) = 0,5$ maila-kurba.

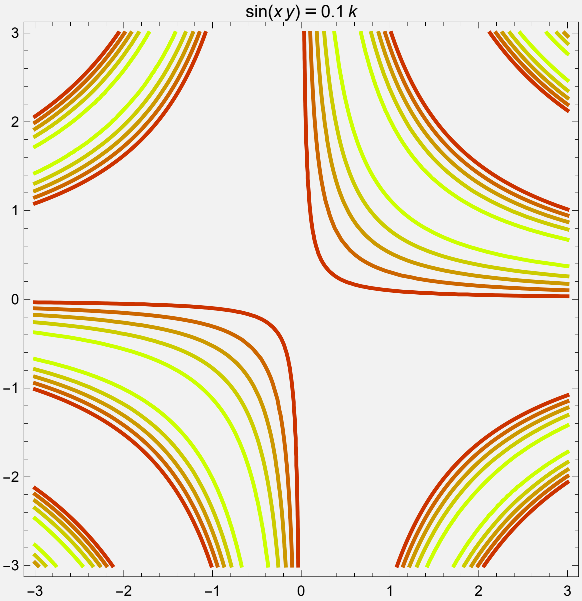
Zenbait maila-kurba irudikatzeko, *Table* agindua erabil daiteke. Adibidez, honako aginduarekin $f(x, y) = 0,1k$ maila-kurbak irudikatu ditugu, k zenbakiak zerrenda bateko balioak hartzen dituelarik:

g7 = ContourPlot[Evaluate[Table[Sin[$x * y$] == 0.1 ∗ k, {k, 1, 10, 2}]],

{x, −3, 3}, {y, −3, 3},

ContourStyle → Table[{RGBColor[0.8, 0.2 ∗ k, 0], Thickness[0.007]},

{k, 1, 5, 1}], PlotLabel → Sin[xy] == 0.1 ∗ k]

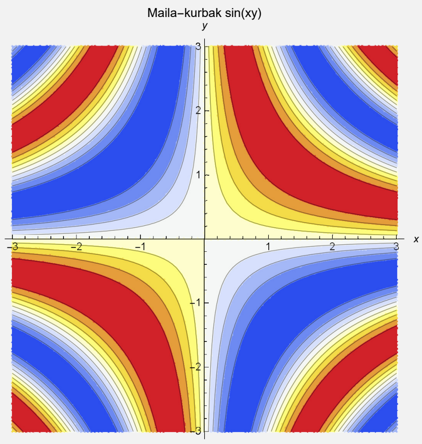


ContourPlot aginduak hainbat aukera eskaintzen ditu. Hona hemen aukera horietako batzuk erabilita sor daitezkeen zenbait grafiko:

g8 = ContourPlot[Sin[x ∗ y], {x, −3, 3}, {y, −3, 3},

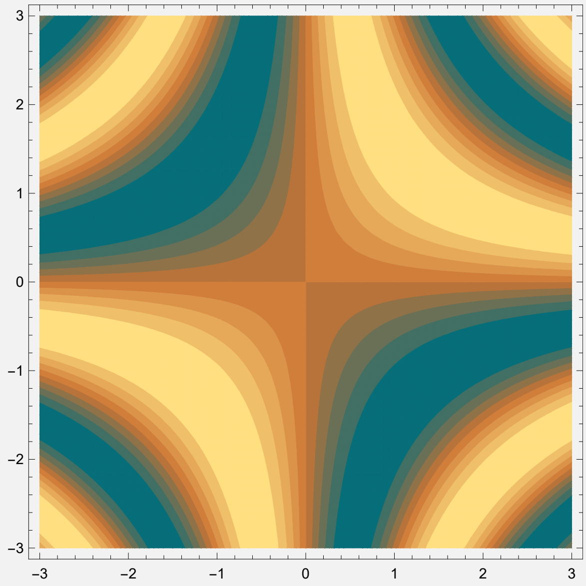
ColorFunction → "TemperatureMap", PlotLabel → "Maila-kurbak sin(xy)",

Frame → False, Axes → True, AxesLabel → {x, y}]



Nahi izanez gero, maila-kurbak ken daitezke *ContourStyle* erabilita:

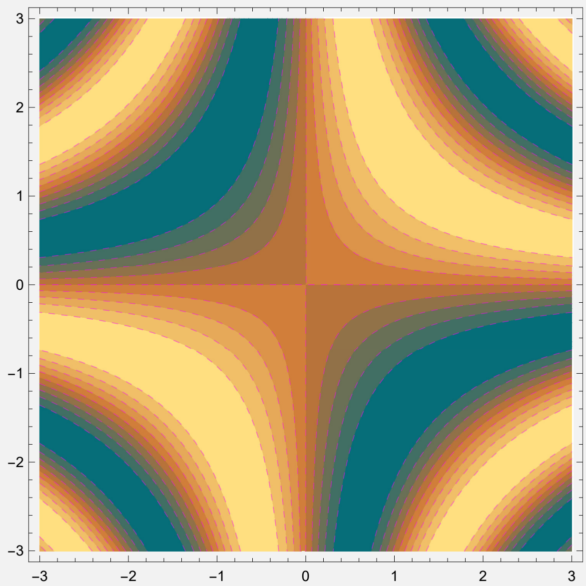
g9 = ContourPlot[Sin[$x*y$], {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, ContourStyle → None]



Posible da kolore eta lerro mota zehaztea:

g10 = ContourPlot[f[x, y], {x, −3, 3}, {y, −3, 3},

ContourStyle → Directive[Magenta, Dashed]]



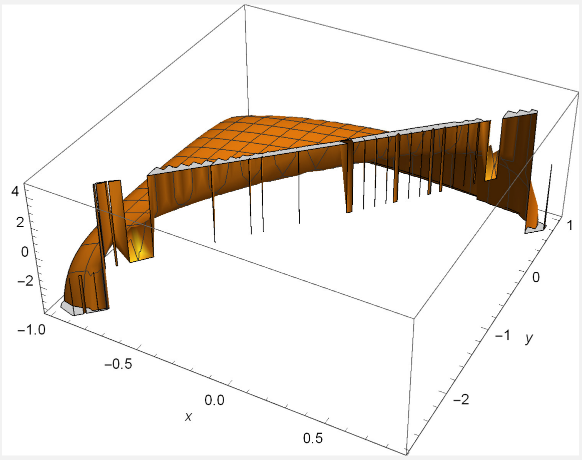
8.3 ariketa. Egin honako funtzio honen izate-eremuaren adierazpen grafikoa: $f(x,y) = \arcsin x + \frac{\ln\left(3-x^2-2y-y^2\right)}{\sqrt{1+y-2x}}$.

Funtzioa definituko dugu, eta *Plot3D* erabilita haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

$f[x\_, y\_] = \text{Log}[-2y - x\wedge 2 - y\wedge 2 + 3] / \sqrt{y - 2x + 1} + \text{ArcSin}[x]$

$\text{ArcSin}[x] + \frac{\text{Log}[3 - x^2 - 2y - y^2]}{\sqrt{1 - 2x + y}}$

$\text{g1} = \text{Plot3D}[f[x, y], \{x, -1.2, 1.2\}, \{y, -3, 1.5\}, \text{AxesLabel} \to \text{Automatic}]$



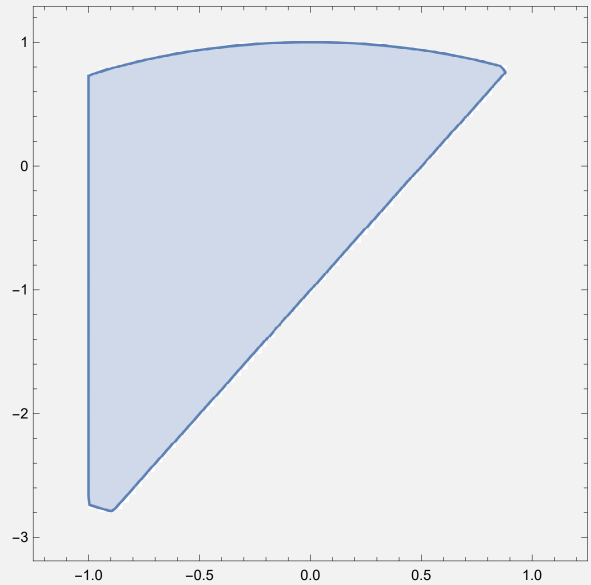
FunctionDomain agindua erabilita, funtzioaren izate-eremua kalkula daiteke:

$\text{izate} = \text{FunctionDomain}[f[x, y], \{x, y\}]$

$-1 \leq x \leq 1\&\&2x - y < 1\&\&x^2 + 2y + y^2 < 3$

Eta *RegionPlot* erabilita, izate-eremua marraz daiteke honako era honetan:

$\text{g2} = \text{RegionPlot}[\text{izate}, \{x, -1.2, 1.2\}, \{y, -3.1, 1.2\}]$

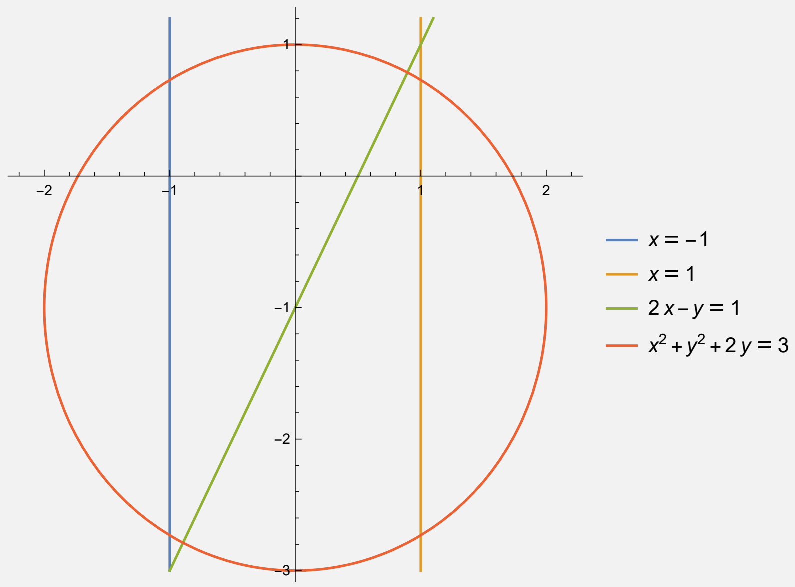


Eta aurreko irudi horretan ikus daiteke $f(x, y) = \arcsin x + \frac{\ln(3-x^2-2y-y^2)}{\sqrt{1+y-2x}}$ funtzioaren izate-eremua.

Izate-eremua mugatzen duten kurbak *ContourPlot* erabilita irudika daitezke:

$$\mathbf{g3 = ContourPlot\left[\{x == -1, x{==}1, 2x - y{==}1, x^2 + 2y + y^2{==}3\}, \{x, -2.2, 2.2\},\right.}$$

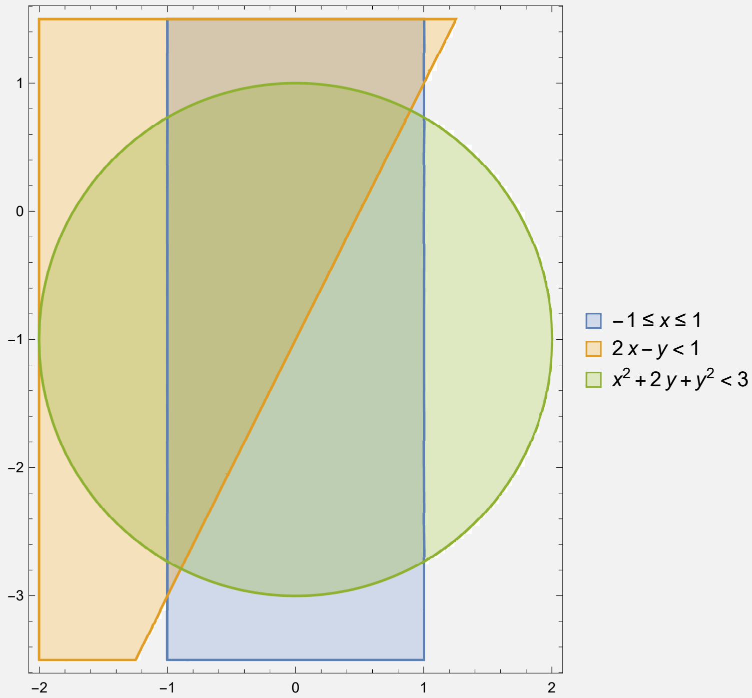
$$\mathbf{\left.\{y, -3, 1.2\}, Frame \to False, Axes \to True, PlotLegends \to \text{“Expressions”}\right]}$$



Eta bete beharreko baldintzetako bakoitza betetzen duten eremuak, aldiz, *RegionPlot* erabilita adierazten dira:

g4 = RegionPlot [{$-1 \leq x \leq 1, 2x - y < 1, x^2 + 2y + y^2 < 3$} , {$x, -2, 2$},

{$y, -3.5, 1.5$}, AspectRatio → Automatic, PlotLegends → "Expressions"]



8.4 ariketa. Aztertu ea $f(x, y) = y^2 \sin\left(\frac{1+y}{x}\right)$ funtzioaren $(0, 0)$ puntuko limite erradialak eta ondoz ondoko limiteak existitzen diren ala ez. Irudikatu funtzioa eta haren maila-kurbak.

Funtzioa definituko dugu, eta ondoz ondoko limiteak kalkulatuko ditugu:

f[x_, y_]:=y^2Sin $\left[\frac{1+y}{x}\right]$;

f1[x_] = Limit[$f[x, y], y \to 0$]

0

f2[y_] = Limit[$f[x, y], x \to 0$]

ConditionalExpression[Indeterminate, $y \in \mathbb{R}$]

Ez da existitzen $f_2(y) = \lim_{x\to 0} f(x, y)$ funtzio marjinala. Beraz, ezin dugu ondoz ondoko limiteei buruz jardun.

Limite erradialak kalkulatuko ditugu:

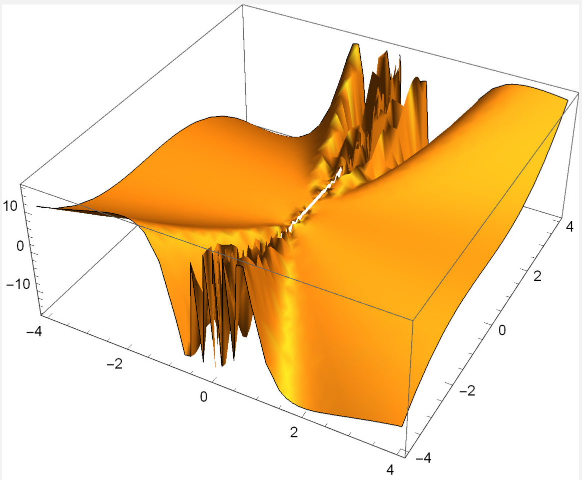
$L[\mathrm{m}\_] = \mathrm{Limit}[f[x, m * x], x\text{->}0]$

0

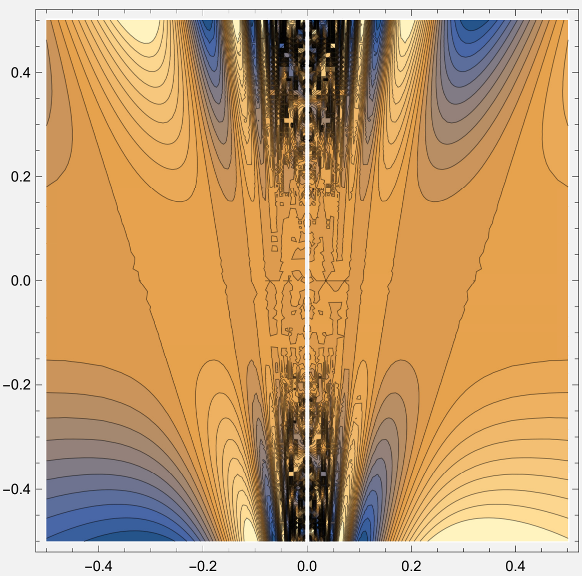
Limite erradialak 0 direnez, izan daiteke $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existitzea.

Funtzioaren adierazpen grafikoa eta haren maila-kurbak irudikatuko ditugu:

$\mathrm{k1} = \mathrm{Plot3D}[f[x, y], \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}, \mathrm{Mesh} \to \mathrm{False}]$



$\mathrm{k2} = \mathrm{ContourPlot}[f[x, y], \{x, -0.5, 0.5\}, \{y, -0.5, 0.5\}, \mathrm{Contours} \to 20]$



Maila-kurbak begiratuta, esan daiteke posible dela $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existitzea.

8.5 ariketa. $g(x,y) = \cos x + \cos y$ funtzioa emanik:

a) Definitu eta irudikatu 3 dimentsiotan.

b) Egin bere adierazpen grafikoa maila-kurbak erabilita. Jarri titulua grafikoari, eta probatu kolore-aukera ezberdinak.

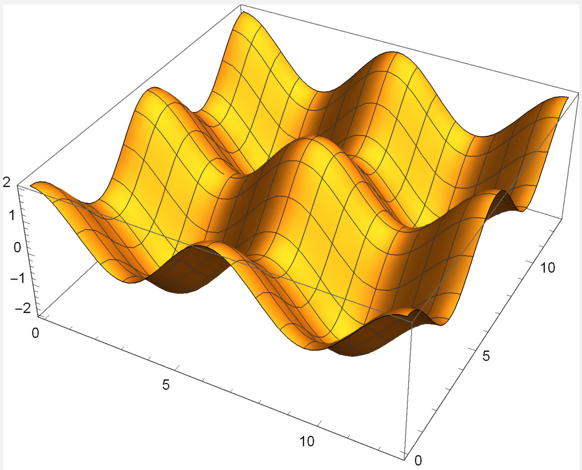
c) Irudikatu $0,2$ baliodun maila-kurba eta maila-kurben familia bat.

a) atala. Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu *Plot3D* agindua erabilita:

$$g[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = \mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Cos}[y]$$

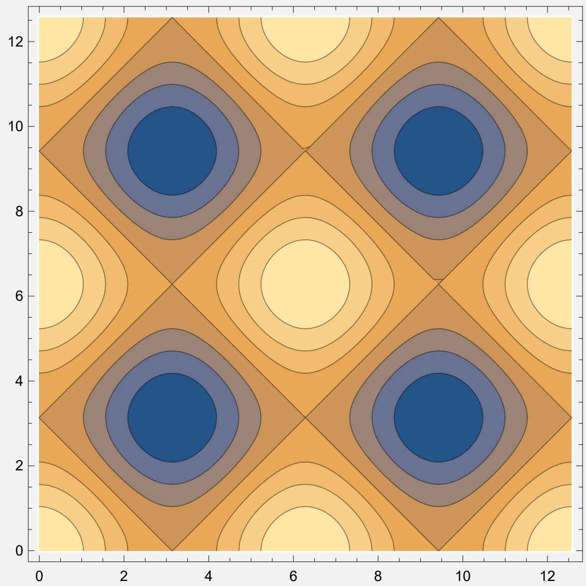
$$\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Cos}[y]$$

$$\mathrm{g1} = \mathrm{Plot3D}[g[x,y], \{x, 0, 4\mathrm{Pi}\}, \{y, 0, 4\mathrm{Pi}\}]$$



b) atala. Funtzioaren adierazpen grafikoa egingo dugu maila-kurbak erabilita:

$$\mathrm{g2} = \mathrm{ContourPlot}[\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Cos}[y], \{x, 0, 4\mathrm{Pi}\}, \{y, 0, 4\mathrm{Pi}\}]$$

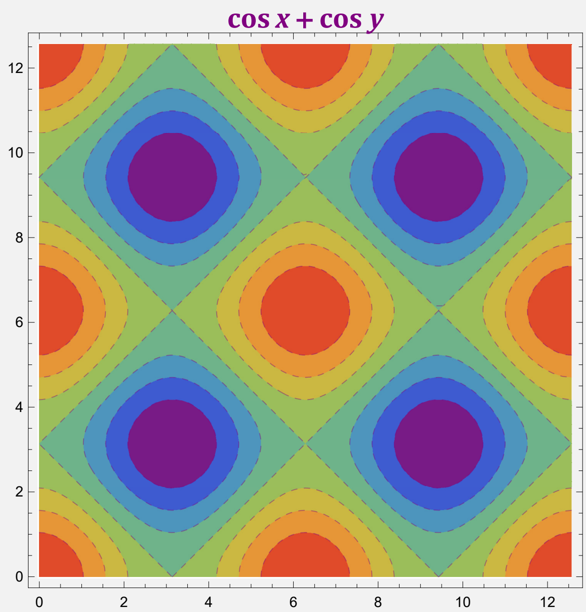


Funtzioari titulua jartzeko, *PlotLabel* agindua erabiliko dugu. Nahi izanez gero, funtzioaren kolorea eta inguruneko estiloa ere adieraz daitezke:

g3 = ContourPlot[Cos[x] + Cos[y], {x, 0, 4Pi}, {y, 0, 4Pi},

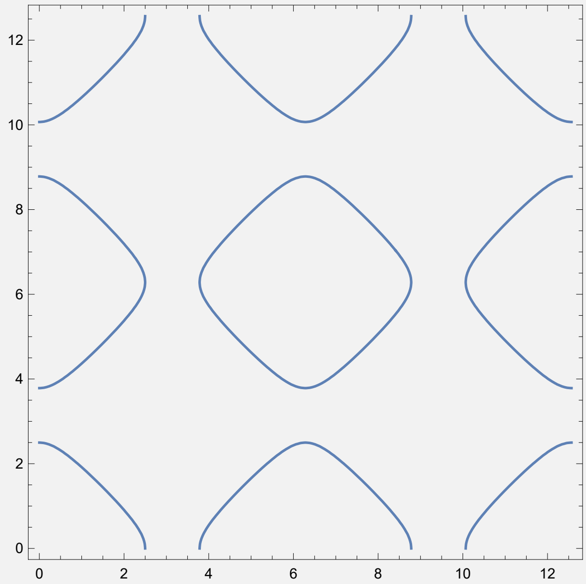
ColorFunction → "Rainbow", ContourStyle → Directive[Purple, Dashed],

PlotLabel → " $\cos x + \cos y$ "]



c) atala. $0,2$ baliodun maila-kurba era honetan irudika daiteke:

g4 = ContourPlot[Cos[x] + Cos[y] == 0.2, {x, 0, 4Pi}, {y, 0, 4Pi}]



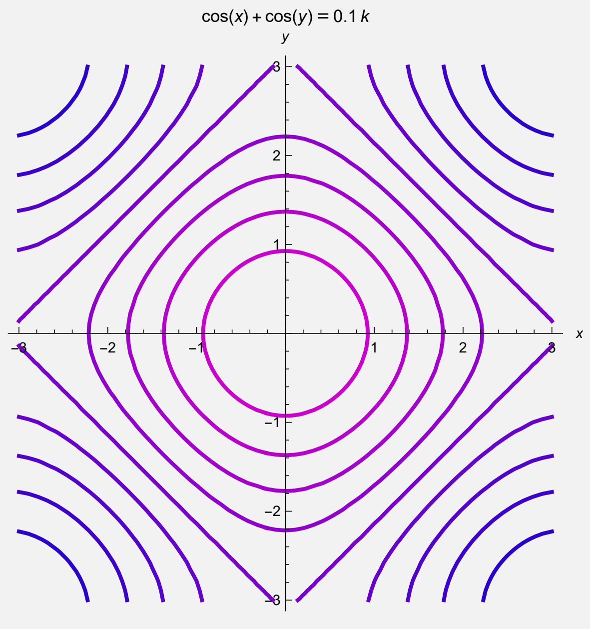
Eta maila-kurben familia bat beste era honetan irudika daiteke. Aukeratu den familia da $\cos x + \cos y = 0,1 \cdot k$, $k = -20$, -16,..., 0, ..., 16, 20 izanik:

g5 = ContourPlot[Evaluate[Table[Cos[x] + Cos[y] == 0.1 * k, {k, −20, 20, 4}]],

{x, −3, 3}, {y, −3, 3}, Frame → False, Axes → True, AxesLabel → {x, y},

ContourStyle → Table[{RGBColor[0.08 * k, 0, 0.8], Thickness[0.007]},

{k, 1, 10}], PlotLabel → Cos[x] + Cos[y]==0.1 * k]



8.6 ariketa. Zehaztu eta irudikatu honako funtzio honen izate-eremua:

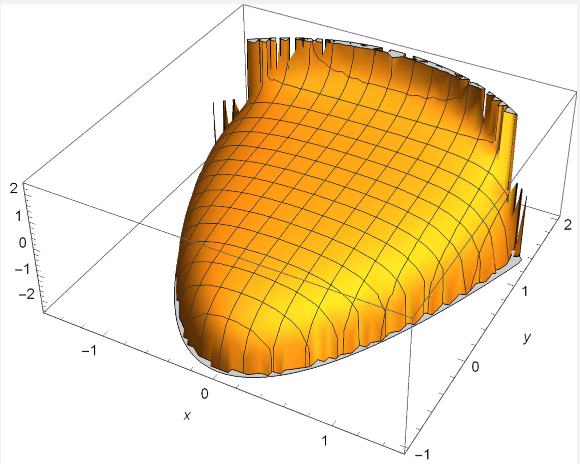
$$f(x,y)=\frac{\ln(1-x^2+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Funtzioa definituko dugu, eta haren grafikoa egingo dugu:

$f[\text{x\_},\text{y\_}]=\text{Log}[y-x\text{^}2+1]\Big/\sqrt{4-x^2-y^2}$

$\frac{\text{Log}\left[1-x^2+y\right]}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

Plot3D[$f[x,y]$, {x, −2, 2}, {y, −1.2, 2}, AxesLabel → Automatic]



Izate-eremua kalkulatuko dugu:

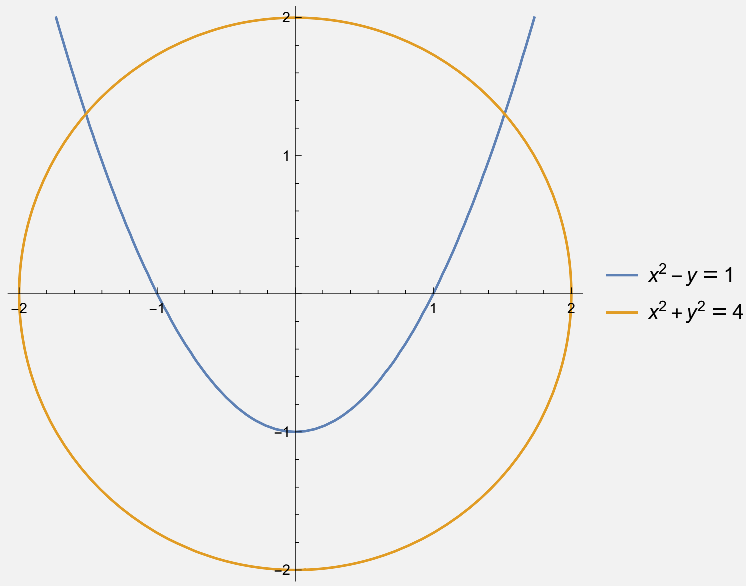
izateremua = FunctionDomain[$f[x,y]$, {x, y}]

$x^2-y<1\&\&x^2+y^2<4$

Izate-eremua honako kurba hauek mugatzen dute:

ContourPlot [{x^2-y==1, x^2+y^2==4} , {x, −2, 2}, {y, −2, 2},

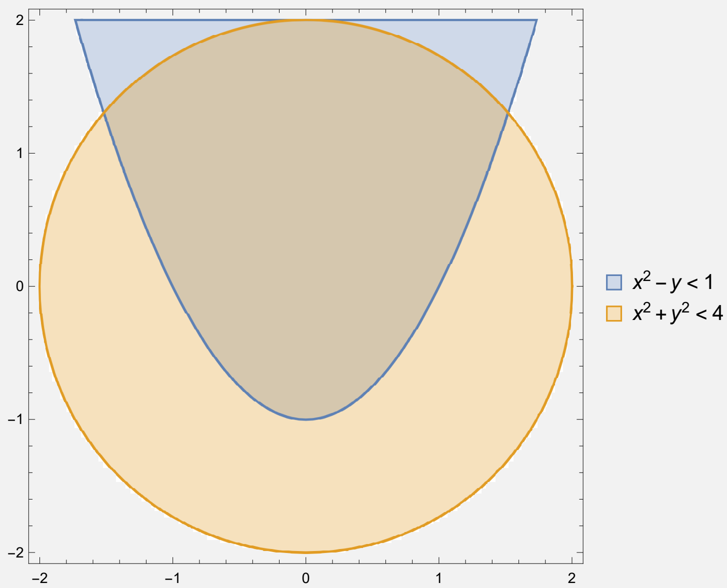
Frame → False, Axes → True, PlotLegends → “Expressions”]



Izate-eremua baldintza biak betetzen dituzten eremuen ebakidura izango da:

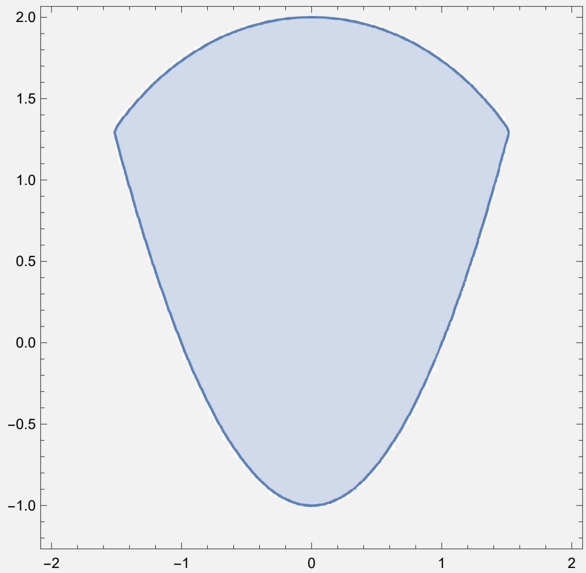
RegionPlot $[\{x^2 - y < 1, x^2 + y^2 < 4\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\},$

AspectRatio $\rightarrow$ **Automatic, PlotLegends** $\rightarrow$ **"Expressions"]**



Bukatzeko, izate-eremua irudikatuko dugu:

RegionPlot[izateremua, $\{x, -2, 2\}, \{y, -1.2, 2\}]$

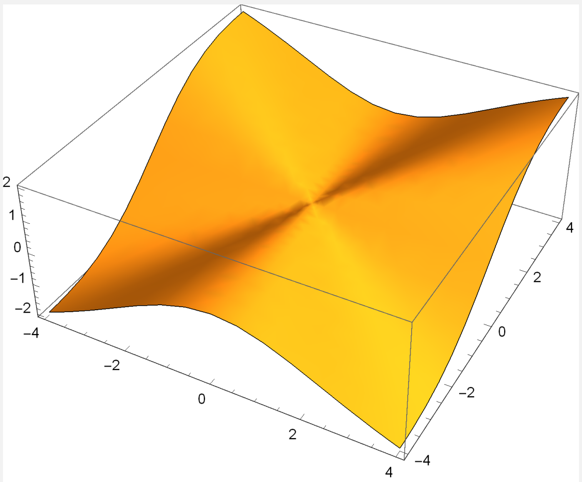


8.7 ariketa. $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ funtzioa emanik, egin funtzioaren adierazpen grafikoa eta haren maila-kurbena.

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

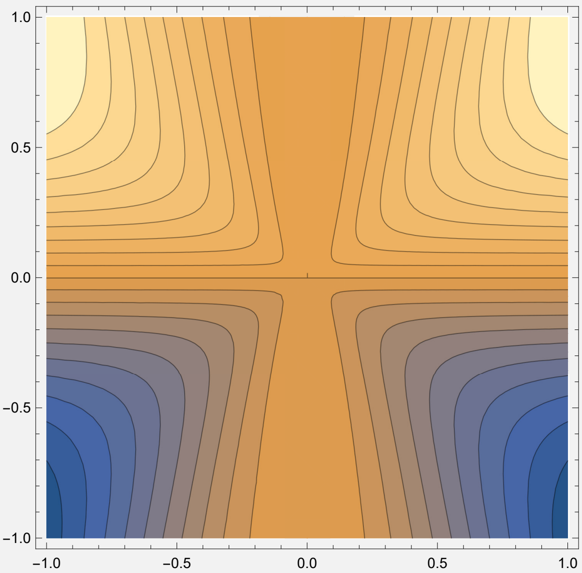
$f[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = \frac{x^2y}{x^2+y^2};$

$\mathrm{g1} = \mathrm{Plot3D}[f[x,y], \{x,-4,4\}, \{y,-4,4\}, \mathrm{Mesh} \to \mathrm{False}]$



Funtzioaren maila-kurbak irudikatuko ditugu:

$\mathrm{g2} = \mathrm{ContourPlot}[f[x,y], \{x,-1,1\}, \{y,-1,1\}, \mathrm{Contours} \to 20]$



8.8 ariketa. $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ funtzioa emanik, aztertu ea ondoz ondoko limiteak eta limite erradialak existitzen diren ala ez. Egin funtzioaren adierazpen grafikoa eta haren maila-kurbena. Kalkulatu $x = my^2$ paraboletan barrenako norabide-limiteak.

Funtzioa definituko dugu:

```
f[x_, y_] = xy^2/(x^2+y^4);
```

Ondoz ondoko limiteak kalkulatuko ditugu:

```
L1 = Limit[Limit[f[x, y], x->0], y->0]
L2 = Limit[Limit[f[x, y], y->0], x->0]
```

0

0

Ondoz ondoko limiteak existitzen dira, eta berdinak dira:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$
$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0.$$

Limite erradialak kalkulatuko ditugu, eta 0 direla ikusiko dugu:

L[m_] = Limit[$f[x, m * x], x\text{->}0$]

0

Norabide konkretu bateko limite erradiala kalkulatzeko, nahikoa da $y = mx$ norabideko m balioa finkatzea. Adibidez, $y = x$ eta $y = 2x$ norabideetako limite erradialak kalkulatzeko, hau egiten da:

$L[1]$

0

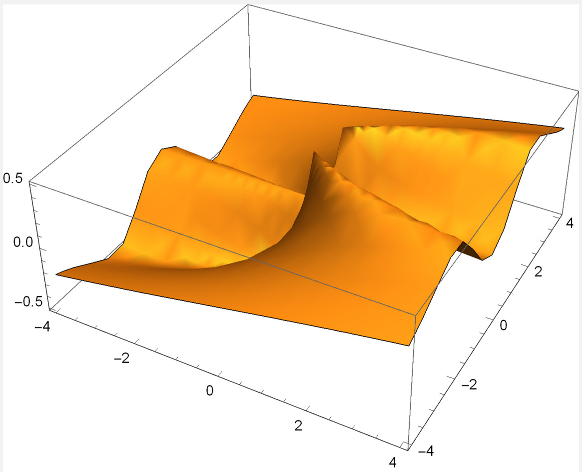
$L[2]$

0

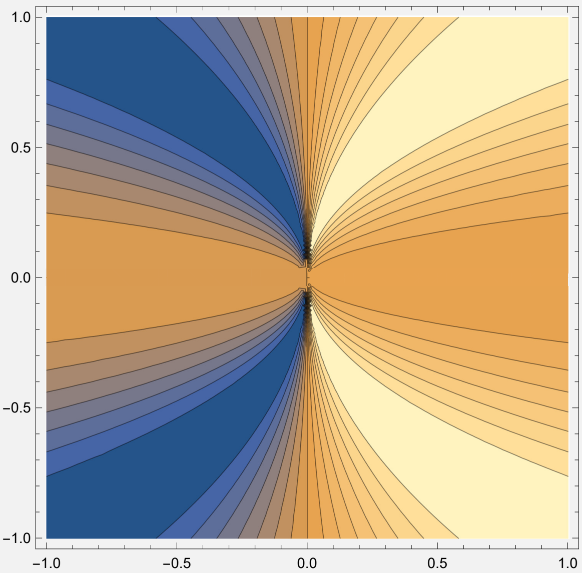
$y = x$ eta $y = 2x$ norabideetako limite erradialak nuluak dira (limite erradial guztiak atera zaizkigu nuluak).

Funtzioaren eta maila-kurben adierazpen grafikoak egingo ditugu:

g1 = Plot3D[$f[x, y], \{x, -4, 4\}, \{y, -4, 4\}$, Mesh → False]



g2 = ContourPlot[$f[x, y], \{x, -1, 1\}, \{y, -1, 1\}$, Contours → 15]



Maila-kurbak jatorritik pasatzen diren parabolak dira, eta funtzioak balio ezberdina hartzen du horietako bakoitzean barrena. $x = my^2$ paraboletan barrenako norabide-limiteak kalkulatuko ditugu:

Lp[m_] = Limit[f[$m * y$^2, y], y->0]

$\frac{m}{1+m^2}$

Norabide-limiteak m-ren menpekoak dira $x = my^2$ paraboletan barrena. Ondorioz, ez da existitzen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

8.9 ariketa. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}$ funtzioa emanik, aztertu ea ondoz ondoko limiteak eta limite erradialak existitzen diren ala ez. Egin funtzioaren adierazpen grafikoa eta haren maila-kurbena.

Funtzioa definituko dugu:

f[x_, y_]:=$\frac{xy}{x^2+y^4}$;

Ondoz ondoko limiteak kalkulatuko ditugu:

L1 = Limit[Limit[f[x, y], y->0], x->0]

L2 = Limit[Limit[f[x, y], x->0], y->0]

0

0

Ondoz ondoko limiteak berdinak dira:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$
$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0.$$

Limite erradialak kalkulatuko ditugu:

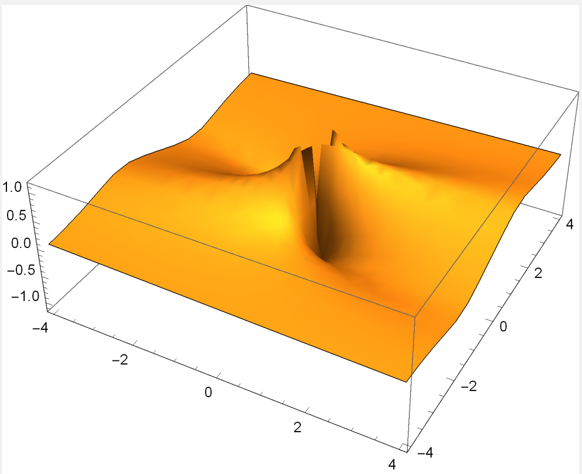
L[m_] = Limit[f[x, $m * x$], x->0]

m

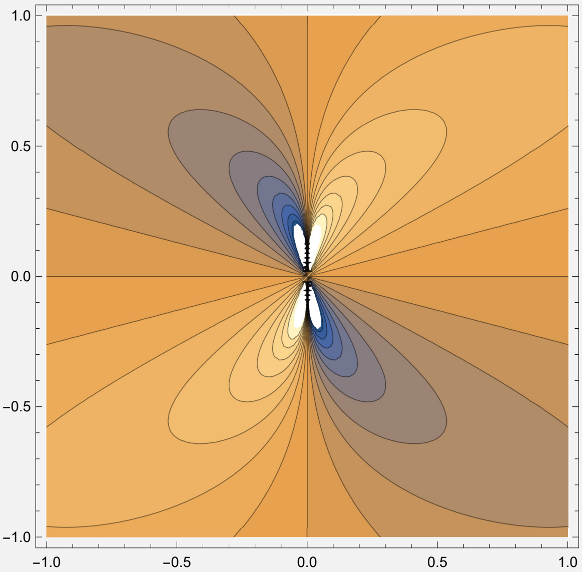
m-ren balioaren menpekoak ateratzen dira limite erradialak. Argudio hau erabili ahalko genuke $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitea ez dela existitzen esateko.

Funtzioaren eta maila-kurben adierazpen grafikoa egingo dugu:

g1 = Plot3D[f[x, y], {x, −4, 4}, {y, −4, 4}, Mesh → False]



g2 = ContourPlot[f[x, y], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, Contours → 20]



Maila-kurbak aztertuta ere, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitea ez dela existitzen ondoriozta daiteke.

8.10 ariketa. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funtzioa emanik, aztertu ea ondoz ondoko limiteak eta limite erradialak existitzen diren ala ez. Egin funtzioaren adierazpen grafikoa eta haren maila-kurbena.

Aurreko ariketako prozesu bera jarraituko dugu. Funtzioa definituko dugu:

```
f[x_,y_]:=(x^2 − y^2)/(x^2 + y^2);
```

Ondoz ondoko limiteak kalkulatuko ditugu:

```
L1 = Limit[Limit[f[x,y],y->0],x->0]
L2 = Limit[Limit[f[x,y],x->0],y->0]

1

−1
```

Ondoz ondoko limiteak ezberdinak dira:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1,$$
$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1,$$

eta, ondorioz, ez da existitzen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitea ez dela existitzen dagoeneko badakigun arren, limite erradialak kalkulatu egingo ditugu:

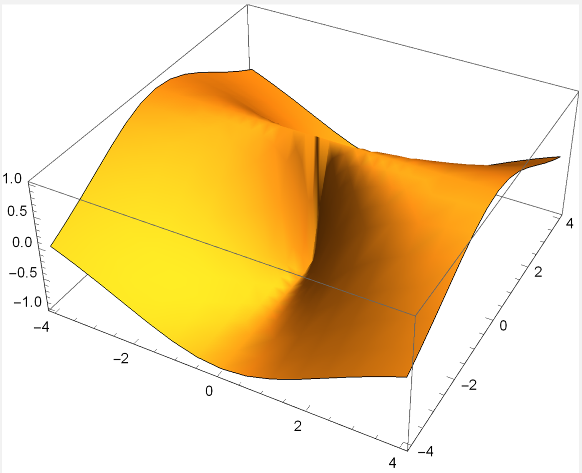
L[m_] = Limit[f[x, $m * x$], x->0]

$\frac{1-m^2}{1+m^2}$

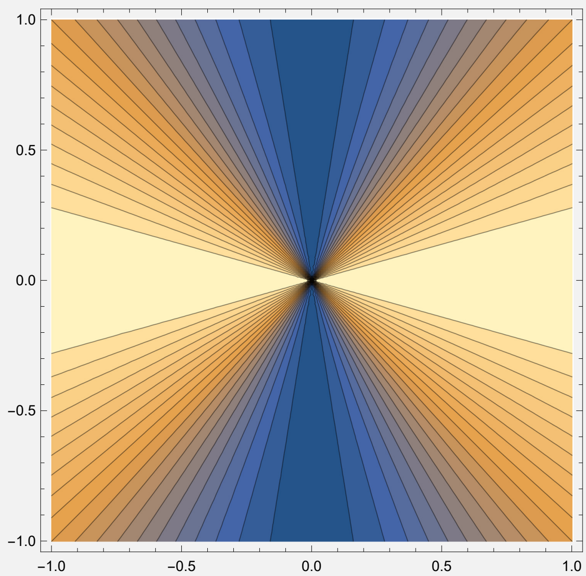
m-ren balioaren menpekoak ateratzen dira limite erradialak. Argudio hau ere erabili ahalko genuke $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ limitea ez dela existitzen esateko.

Funtzioaren eta maila-kurben adierazpen grafikoa egingo dugu:

g1 = Plot3D[f[x, y], {x, −4, 4}, {y, −4, 4}, Mesh → False]



g2 = ContourPlot[f[x, y], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, Contours → 20]



Maila-kurbak aztertuta ere, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ondoriozta daiteke.

9. kapitulua

Aldagai anitzeko funtzioen deribagarritasuna

Aurretik ere esan dugun moduan, aldagai bakarreko funtzio baten deribatuak adierazten du funtzio hori nola aldatzen den aldagaia aldatzen denean. Aldagai anitzeko funtzioa daukagunean ere antzekoa gertatzen da. Deribatu partzialak erabiliz neurtzen da funtzioa nola aldatzen den haren aldagaietako bat aldatzen denean. Norabide-deribatuak erabiltzen dira, aldagaiak norabide bat jarraituz aldatzen direnean funtzioa nola aldatu den neurtzeko.

9.1 Deribatu partzialak

Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala. *Deribazio partzial* deritzo funtzio hori bere aldagaietako batekiko deribatzeari. Aldagai batekiko deribatua kalkulatzen denean, beste aldagaiak konstante mantentzen dira. Eragiketa horien emaitzak deribatu partzialak dira.

Gogoratu aldagai bakarreko funtzioaren kasuan deribatua era honetan kalkulatzen dela:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Bi aldagaitako $z = f(x, y)$ funtzioa emanik, bere deribatu partzialak honela kakulatzen dira:

- $f(x, y)$ funtzioaren x aldagaiarekiko deribatu partziala:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

- $f(x, y)$ funtzioaren y aldagaiarekiko deribatu partziala:

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Hau da, $f(x, y)$ funtzioaren x aldagaiarekiko lehen deribatua kalkulatzeko funtzioa x aldagaiarekiko deribatu behar da, y aldagaia konstante hartuz. Era berean, $f(x, y)$ funtzioaren y aldagaiarekiko lehen deribatua kalkulatzeko funtzioa y aldagaiarekiko deribatu behar da, x aldagaia konstante hartuz.

Oharra. Hiru aldagaitako funtzioaren kasuan, berdin kalkulatuko genituzke deribatu partzialak. Horrela, honako hauek dira $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hiru aldagai errealeko funtzio errealaren deribatu partzialak:

- $f(x, y, z)$ funtzioaren x aldagaiarekiko deribatu partziala:

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

- $f(x, y, z)$ funtzioaren y aldagaiarekiko deribatu partziala:

$$f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}.$$

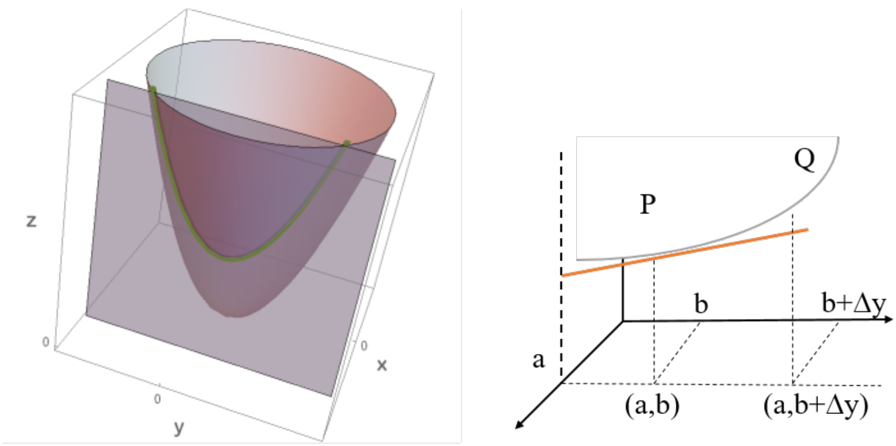
- $f(x, y, z)$ funtzioaren z aldagaiarekiko deribatu partziala:

$$f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

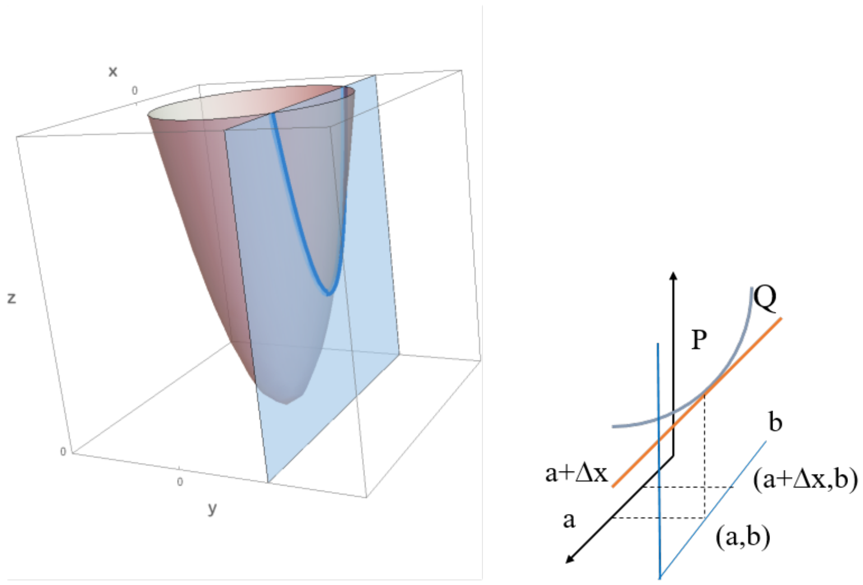
Deribatu partzialen interpretazio geometrikoa. $z = f(x, y)$ funtzioa eta $P(x_0, y_0, z_0)$ bertako puntu bat emanik, honako hau da deribatu partzialen interpretazio geometrikoa:

- y aldagaiarekiko deribatu partzialaren interpretazio geometrikoa: $y = y_0$ planoak z gainazala C_1 kurba batean mozten du. z funtzioaren y aldagaiarekiko deribatua C_1 kurbarekiko zuzen ukitzailearen malda da $P(x_0, y_0, z_0)$ puntuan; ikus 9.1 irudia.

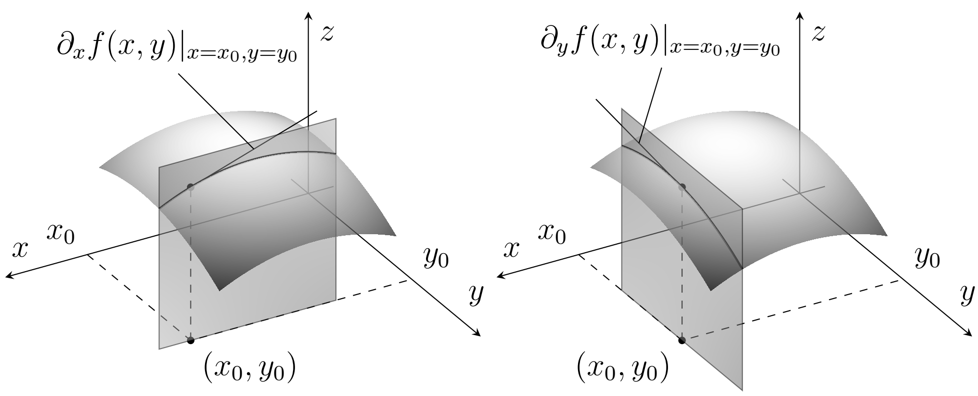
- x aldagaiarekiko deribatu partzialaren interpretazio geometrikoa: $x = x_0$ planoak z gainazala C_2 kurba batean mozten du. z funtzioaren x aldagaiarekiko deribatua C_2 kurbarekiko zuzen ukitzailearen malda da $P(x_0, y_0, z_0)$ puntuan; ikus 9.2 irudia.



9.1 irudia. y aldagaiarekiko deribatu partzialaren interpretazio geometrikoa.



9.2 irudia. x aldagaiarekiko deribatu partzialaren interpretazio geometrikoa.



9.3 irudia. x eta y aldagaiekiko deribatu partzialaren interpretazio geometrikoa (iturria `https://tex.stackexchange.com/questions/479814/a-diagram-about-partial-derivatives-of-fx-y`).

Plano ukitzailea. Izan bedi S, $z = f(x,y)$ ekuaziodun azalera eta $P(x_0, y_0, z_0)$ S-ko puntu bat. S-ri P puntuan ukitzailea zaion planoaren ekuazioa honako hau da:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Limiteak eta jarraitutasuna. Ikusi genuen $z = f(x,y)$ funtzioa (x,y) puntuan jarraitua dela honako hau betetzen badu:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Geometrikoki esan nahi du $z = f(x,y)$ gainazalak ez duela saltorik edo zulorik. Aldagai anitzeko funtzioekin lanean dihardugunean, gerta daiteke funtzioaren deribatu partzialak existitzea puntu batean eta funtzioa, aldiz, puntu horretan jarraitua ez izatea.

Ordena handiagoko deribatuak. $z = f(x, y)$ funtzioa emanik, honako hauek dira bigarren ordenako deribatuak eta deribatu gurutzatuak:

- Bigarren ordenako deribatuak:

  $f(x, y)$ funtzioaren x aldagaiarekiko bigarren deribatu partziala:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx}.$$

  $f(x, y)$ funtzioaren y aldagaiarekiko bigarren deribatu partziala:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (f_y)_y = f_{yy}.$$

- Deribatu gurutzatuak:

  Lehenengo y aldagaiarekiko deribatzen da, eta gero x-rekiko:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx}.$$

  Lehenengo x aldagaiarekiko deribatzen da, eta gero y-rekiko:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy}$$

Teorema. Deribatu gurutzatuen Schwartz-en teorema. $f(x, y)$ funtzioaren $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ deribatuak jarraituak badira, (x_0, y_0) puntua barnean duen U multzo ireki batean, orduan, deribatu gurutzatuak berdinak izango dira:

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

9.2 Diferentziala

Gehikuntzen bidezko hurbilpena. Aldagai bakarreko funtzioaren kasuan, x_0 puntuan deribagarria den $y = f(x)$ funtzioa badaukagu, Δx behar den beste txikia denean, honako hurbilpen hau erabiltzen da:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

Bi aldagaitako funtzioekin erabiltzen den eta goikoaren baliokidea den berdintzari *gehikuntzen bidezko hurbilpen* deritzo, eta era honetan enuntzia dezakegu: $f(x, y)$ funtzioa eta bere deribatu partzialak f_x eta f_y, $P(x_0, y_0)$ puntua bere barnean duen R eremu ireki batean definituta badaude, eta f_x eta f_y , $P(x_0, y_0)$ puntuan jarraituak badira, orduan:

$$\begin{aligned} \Delta f =& f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y \\ \Rightarrow& f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y. \end{aligned}$$

Diferentzial osoa. $z = f(x, y)$ funtzioa emanik, bere diferentzial osoa era honetan emana dator:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

9.3 Norabide-deribatua

Norabide-deribatua. $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ norabide-deribatua, $z = f(x, y)$ gainazaleko $\vec{u} = (u_1, u_2)$ bektore unitarioaren norabideko C kurbarekiko zuzen ukitzailearen malda da, $P(x_0, y_0)$ puntuan.

Norabide-deribatua honela kalkulatzen da:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) \cdot u_1 + f_y(x_0, y_0) \cdot u_2.$$

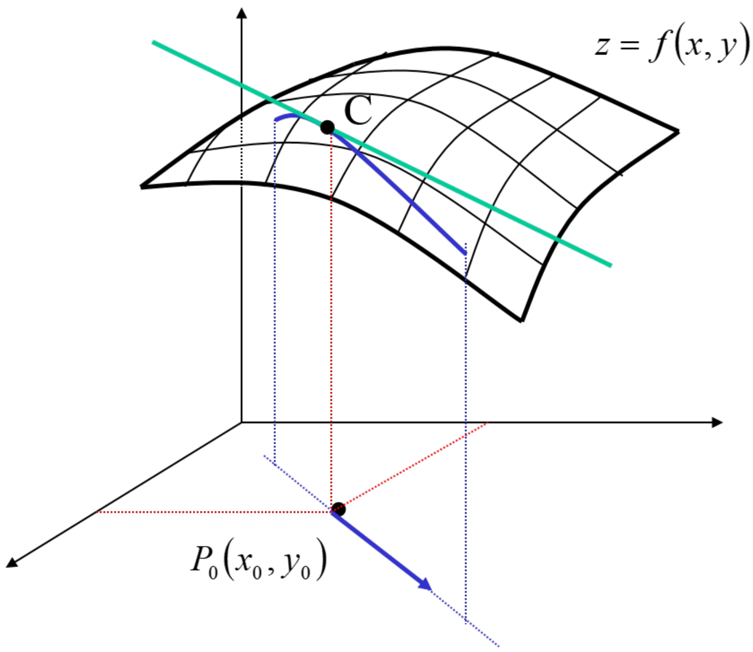
Gradientea. Izan bedi $z = f(x, y)$, $P(x_0, y_0)$ puntuan deribagarria den funtzioa. Honako funtzio bektorial honi *gradiente* deitzen zaio:

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\vec{j}.$$

Gradientearen definizioa kontuan hartuz, norabide-deribatua era honetan adieraz daiteke:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Horrela, norabide-deribaturik handiena gradientearen norabidean ematen da; hau da, bektorea eta gradientea paraleloak direnean. Eta norabide-deribatuaren balio maximo hori gradientearen modulua da.



9.4 irudia. Norabide-deribatuaren interpretazio geometrikoa.

9.4 Adibideak

9.1 adibidea. Kalkulatu $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2$ gainazalarekiko plano ukitzailearen ekuazioa $(x_0, y_0) = (0, 1)$ puntuan.

Puntu horri dagokion irudia hauxe da: $z_0 = f\,(0,1) = 1$. Funtzioaren deribatu partzialak kalkulatuko ditugu: $f_x = 4x$ eta $f_y = 2y \Rightarrow f_x(0,1) = 0$ eta $f_y(0,1) = 2$.
Plano ukitzailearen ekuazioan, emaitza horiek ordezkatuz, planoaren ekuazioa izango dugu:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \Rightarrow z - 1 = 2(y - 1) \Rightarrow z = 2y - 1.$$

9.2 adibidea. Aztertu honako funtzio honen jarraitutasuna $(0,0)$ puntuan, eta esan ea puntu horretan deribatu partzialak existitzen diren ala ez.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$y = mx$ zuzenen norabideko limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = mx}} \frac{x^2 m}{x^2 + x^2 m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Limite erradialak m parametroaren menpekoak direnez, ez da existitzen funtzioaren limitea (x,y) $(0,0)$-ra doanean:

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Hala eta guztiz, existitzen dira deribatu partzialak puntu horretan:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$
$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

9.3 adibidea. Kalkulatu honako balio honen hurbilpena: $\sqrt{27}\sqrt[3]{1021}$.
Kalkulatu beharreko baliotik hurbil dagoen $\sqrt{25}\sqrt[3]{1000}$ balioa ezagutzen dugu: $\sqrt{25}\sqrt[3]{1000} = 5 \cdot 10 = 50$. Honako funtzio hau definituko dugu: $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, eta gehikuntzen bidezko hurbilpena aplikatuko dugu:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y,$$

$x_0 = 25$, $y_0 = 1000$, $\Delta x = 2$, $\Delta y = 21$ izanik. $f(x,y)$ funtzioaren deribatu partzialak honako hauek direla kontuan izanik:

$$f_x = \frac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}}, \qquad f_y = \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y^2}},$$

zera daukagu:

$$f(27, y_0 + 1021) \approx f(25, 1000) + f_x(25, 1000) \cdot 2 + f_y(25, 1000) \cdot 21$$
$$= 50 + 2 + \frac{5}{300} \cdot 21 = 52,35.$$

9.4 adibidea. Har dezagun r erradiodun oinarri zirkularra eta h altuera duen zilindro baten bolumenaren adierazpena: $V(r,h) = \pi r^2 h$. Kalkulatu $r = 2$ metro eta $h = 3$ metroko zilindroaren bolumena zenbat aldatuko litzatekeen, erradioaren neurketan $0,2$ metroko errorea egingo bagenu eta altueraren neurketan $-0,1$ metrokoa.

Honako adierazpen honen bidez kalkula daiteke bolumenaren diferentziala:

$$dV = V_r dr + V_h dh,$$

$V_r = 2\pi rh$ eta $V_h = \pi r^2$ izanik. Kontuan hartuz diferentzialak eta gehikuntzak oso antzekoak direla, $V_r \approx \Delta V$, $dh \approx \Delta h$ eta $dr \approx \Delta r$, honako hau lortzen da:

$$\Delta V \approx dV = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh \approx 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h.$$

Eta goiko adierazpenean datuak ordezkatuz ($\Delta h = -0,1$, $\Delta r = 0,2$, $r = 2$, $h = 3$) emaitza lortzen da:

$$\Delta V \approx 2\pi 2 \cdot 3 \cdot 0,2 + \pi 2^2 \cdot (-0,1) = 6,2832\text{m}^3.$$

9.5 adibidea. Laukizuzen baten azalera $A(x,y) = xy$ funtzioaren bidez kalkulatzen da, x eta y lakizuzenaren aldeen luzerak izanik. Konparatu funtzioaren diferentziala eta gehikuntza, alde horien luzerek aldaketaren bat izango balute.

Alde horien luzerek Δx eta Δy aldakuntzak jasango balituzte, honako hau litzateke azaleraren aldaketa:

$$\Delta A = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Kontuan hartuz Δx eta Δy behar den besteko txikiak direla, diferentziala honako hau litzateke, :

$$dA = ydx + xdy \approx y\Delta x + x\Delta y.$$

Beraz, laukizuzenaren azaleraren kasuan, $\Delta A \approx dA$ hurbilpena egiten denean, $\Delta x\Delta y$ batugaia ez da kontuan hartzen.

9.6 adibidea. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ funtzioa eta $A(1,-1)$ puntua emanik, kalkulatu:

a) Funtzioaren gradientea.

b) $x - y = 0$ zuzenaren norabideko deribatua.

c) Norabide-deribatua maximoa den norabidea eta balio maximoa.

d) Kurbarekiko plano ukitzailearen ekuazioa.

a) atala. Deribatu partzialak eta gradientea kalkulatuko ditugu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Eta gradientea honako hau da:

$$\nabla f(1,-1) = f_x(1,-1)\vec{i} + f_y(1,-1)\vec{j} = 6\vec{i}.$$

b) atala. $y = x$ zuzenaren norabideko bektorea $\vec{v} = (1,1)$ da. Eta norabide horretako bektore unitarioa da:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Eta $\vec{u}$ bektorearen norabideko deribatua honako hau da:

$$D_{\vec{u}} f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot \overrightarrow{u} = (6,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}.$$

c) atala. Norabide-deribatua maximoa da gradientearen norabidean. Hau da, $\vec{w} = (1,0)$ bektorearen norabidean:

$$D_{\vec{u}} f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot \vec{w} = (6,0) \cdot (1,0) = 6.$$

Eta norabide-deribatu maximo horren balioa da gradientearen modulua:

$$\|\nabla f(1,-1)\| = 6.$$

d) atala. Kurbarekiko plano ukitzailearen ekuazioa honako hau da:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \Rightarrow z - 3 = 6(x-1) \Rightarrow z = 6x - 3.$$

9.5 Ordenagailuko praktikak

9.1 ariketa. Kalkulatu $f(x,y,z) = z^2 \arctan(xy) + y^2 \arctan(xz)$ funtzioaren lehen ordenako eta ordena handiagoko deribatuak.

Funtzioa definituko dugu:

```
f[x_, y_, z_] = z^2 * ArcTan[x * y] + y^2 * ArcTan[x * z]
```

$z^2\text{ArcTan}[xy] + y^2\text{ArcTan}[xz]$

Lehen ordenako deribatuak $D[$*funtzioa*, *aldagaia*$]$ agindua erabilita kalkula daitezke, honako era honetan:

```
D[f[x, y, z], x]//Simplify
```

$yz\left(\frac{z}{1+x^2y^2} + \frac{y}{1+x^2z^2}\right)$

```
D[f[x, y, z], y]//Simplify
```

$\frac{xz^2}{1+x^2y^2} + 2y\text{ArcTan}[xz]$

D[f[x,y,z],z]//Simplify

$\frac{xy^2}{1+x^2z^2} + 2z\text{ArcTan}[xy]$

Era honetan ere kalkula daitezke lehen ordenako deribatuak:

$\partial_x f[x,y,z]$//Simplify

$yz\left(\frac{z}{1+x^2y^2} + \frac{y}{1+x^2z^2}\right)$

$\partial_y f[x,y,z]$//Simplify

$\frac{xz^2}{1+x^2y^2} + 2y\text{ArcTan}[xz]$

$\partial_z f[x,y,z]$//Simplify

$\frac{xy^2}{1+x^2z^2} + 2z\text{ArcTan}[xy]$

Eta *Derivative* agindua erabilita ere bai. Baldin $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ k aldagaitako funtzioa bada eta honako deribatu partzial hau kalkulatu nahi bada:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+...+n_k} f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} ... \partial x_k^{n_k}},$$

Derivative[n_1, n_2, ..., n_k][f][x_1,x_2, ...,x_k] agindua erabiliko dugu. Agindu horrek esan nahi du funtzioa n_1 aldiz deribatuko dugula x_1 aldagaiarekiko, n_2 aldiz deribatuko dugula x_2 aldagaiarekiko, etab.

Lehen ordenako deribatu partzialak *Derivative* erabilita kalkulatzeko, nahikoa da deribatu nahi dugun aldagaiari dagokion posizioan 1 jartzea, eta beste posizioetan 0:

Derivative[1,0,0][f][x,y,z]//Simplify

$yz\left(\frac{z}{1+x^2y^2} + \frac{y}{1+x^2z^2}\right)$

Derivative[0,1,0][f][x,y,z]//Simplify

$\frac{xz^2}{1+x^2y^2} + 2y\text{ArcTan}[xz]$

Derivative[0, 0, 1][f][x, y, z]//Simplify

$\frac{xy^2}{1+x^2z^2} + 2z\mathrm{ArcTan}[xy]$

Ikus daitekeen moduan, emaitza bera lortzen da $\partial_a f[x, y, z]$ (a aldagaia izanik), D zein *Derivative* erabilita.

Derivative agindua ordena altuagoko deribatuak kalkulatzeko ere erabiltzen da. Adibidez, era honetan kalkulatzen dira $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ eta $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$:

Derivative[1, 1, 1][f][x, y, z]//Simplify

$\frac{2z}{1+x^2y^2} + \frac{2y}{1+x^2z^2} + 4x^2yz\left(-\frac{y}{(1+x^2y^2)^2} - \frac{z}{(1+x^2z^2)^2}\right)$

Derivative[2, 3, 0][f][x, y, z]//Simplify

$\frac{12x\left(-1+15x^2y^2-15x^4y^4+x^6y^6\right)z^2}{(1+x^2y^2)^5}$

9.2 ariketa. $f(x, y) = \sqrt{xy + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$ funtzioa emanik, frogatu honako ekuazio hau bete egiten dela: $zx\frac{\partial z}{\partial x} + zy\frac{\partial z}{\partial y} = xy$.

Funtzioa definituko dugu:

$z[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] := \sqrt{x * y + \mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]};$

Deribatu partzialak kalkulatuko ditugu:

dzx[x_, y_] = Simplify [$\partial_x z[x, y]$]

$\frac{y\left(-1+x^2+y^2\right)}{2(x^2+y^2)\sqrt{xy+\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]}}$

dzy[x_, y_] = Simplify [$\partial_y z[x, y]$]

$\frac{x\left(1+x^2+y^2\right)}{2(x^2+y^2)\sqrt{xy+\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]}}$

Esaten diguten adierazpena bete egiten dela ikusiko dugu:

$$\textbf{adierazpena} = z[x,y]x\text{dzx}[x,y] + z[x,y]y\text{dzy}[x,y] - xy$$

$$-xy + \frac{xy\left(-1+x^2+y^2\right)}{2(x^2+y^2)} + \frac{xy\left(1+x^2+y^2\right)}{2(x^2+y^2)}$$

adierazpena//Simplify

0

9.3 ariketa. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ funtzioa emanik, frogatu honako ekuazio hau bete egiten dela $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Aurreko ariketako prozesu bera aplikatuko dugu. Funtzioa definituko dugu:

$$z[\text{x\_},\text{y\_}] := \sqrt{x^2+y^2};$$

Lehen ordenako deribatu partzialak kalkulatuko ditugu:

$$\text{dzx}[\text{x\_},\text{y\_}] = \text{Simplify}\left[\partial_x z[x,y]\right]$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{dzy}[\text{x\_},\text{y\_}] = \text{Simplify}\left[\partial_y z[x,y]\right]$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Bigarren ordenako deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\text{dzxx}[\text{x\_},\text{y\_}] = \text{Simplify}\left[\partial_{x,x} z[x,y]\right]$$

$$\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\text{dzxy}[\text{x\_},\text{y\_}] = \text{Simplify}\left[\partial_{x,y} z[x,y]\right]$$

$$-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\text{dzyy}[\text{x\_},\text{y\_}] = \text{Simplify}\left[\partial_{y,y} z[x,y]\right]$$

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Eta adierazpena egia dela ikusiko dugu:

$\text{adierazpena} = x^2\text{dzxx}[x, y] + 2xy\text{dzxy}[x, y] + y^2\text{dzyy}[x, y]$

0

9.4 ariketa. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ funtzioa emanik, kalkulatu $P(2, 1)$ puntuko plano ukitzailea.

Puntua eta funtzioa definituko ditugu. Eta puntua funtzioan balioztatuko dugu:

$P = \{\text{x0}, \text{y0}\} = \{2, 1\};$

$f[\text{x\_}, \text{y\_}] = x\hat{}2 + y\hat{}2 - 2 * x - 2 * y + 2;$

$\text{z0} = f[\text{x0}, \text{y0}]$

1

Deribatu partzialak kalkulatuko ditugu:

$\text{dzx}[\text{x\_}, \text{y\_}] = D[f[x, y], x]$

$-2 + 2x$

$\text{dzx}[\text{x0}, \text{y0}]$

2

$\text{dzy}[\text{x\_}, \text{y\_}] = D[f[x, y], y]$

$-2 + 2y$

$\text{dzy}[\text{x0}, \text{y0}]$

0

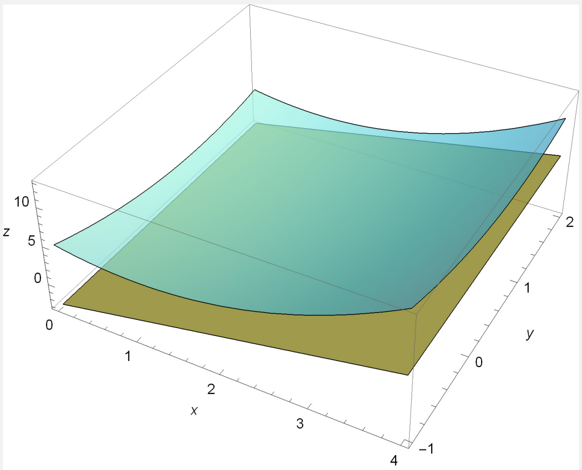
Plano ukitzailearen ekuazioa definituko dugu:

```
zptan[x_, y_] = z0 + dzx[x0, y0] * (x − x0) + dzy[x0, y0] * (y − y0)//Simplify
```

$-3 + 2x$

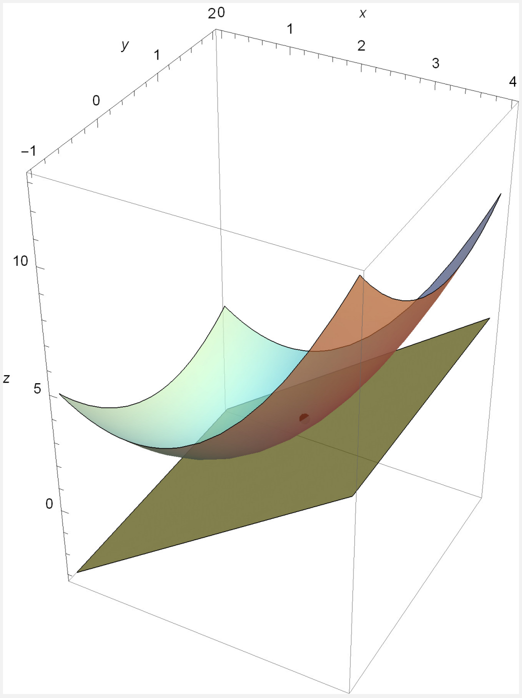
Eta, bukatzeko, funtzioa eta plano ukitzailea irudikatuko ditugu:

```
g1 = Plot3D[{f[x, y], zptan[x, y]}, {x, 0, 4}, {y, −1, 2},
PlotStyle → {{LightBlue, Opacity[0.7]}, {Orange, Opacity[0.7]}},
Mesh → False, AxesLabel → {x, y, z}]
```



Grafiko honetako irudi honetan ere ikus daiteke:

```
g2 =
Show[{Plot3D[{f[x, y], zptan[x, y]}, {x, 0, 4}, {y, −1, 2},
PlotStyle → {{LightBlue, Opacity[0.7]}, {Orange, Opacity[0.7]}},
Mesh → False, BoxRatios->{1, 1, 1.5}, AxesLabel → {x, y, z}],
Graphics3D[{PointSize → Large, Point[{2, 1, 1}]}]}]
```



9.5 ariketa. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu $P(2, 1)$ puntuko deribatu partzialak eta gradientea.

b) Kalkulatu $\vec{v} = (0, -2)$ bektorearen norabideko deribatua.

c) Kalkulatu maila-kurbak.

a) atala. Puntua eta funtzioa definituko ditugu. Eta puntua funtzioan balioztatuko dugu:

```
f[x_, y_] = x^2 + y^2 - 2 * x - 2 * y + 2
```

$2 - 2x + x^2 - 2y + y^2$

```
P = {x0, y0} = {2, 1};
```

```
z0 = f[x0, y0]
```

1

Deribatu partzialak eta gradientea kalkulatuko ditugu, eta puntuan balioztatuko ditugu:

dfx[x_, y_] = $D[f[x, y], x]$

$-2 + 2x$

dfy[x_, y_] = $D[f[x, y], y]$

$-2 + 2y$

gradf[x_, y_] = {dfx[x, y], dfy[x, y]}

$\{-2 + 2x, -2 + 2y\}$

dfx[x0, y0]

2

dfy[x0, y0]

0

gradf[x0, y0]

$\{2, 0\}$

b) $\vec{v} = (0, -2)$ bektorearen norabideko deribatua kalkulatuko dugu. Bektore hori definituko dugu, eta bere norabidea duen $\vec{u}$ bektore unitarioa kalkulatuko dugu:

$\boldsymbol{v = \{0, -2\}}$

$\{0, -2\}$

$\boldsymbol{u = v / \sqrt{v.v}}$

$\{0, -1\}$

Eta $\vec{v}$ bektorearen norabideko deribatua kalkulatuko dugu $P(2, 1)$ puntuan:

dfu[x_, y_] = gradf[x, y].u

$2-2y$

dfup = dfu[x0, y0]

0

P puntuko $\vec{v}$ bektorearen norabideko deribatua 0 da. Horrek esan nahi du $\vec{v}$ bektorea maila-kurbarekiko ukitzailea dela, $f(x, y)$ funtzioaren norabide horretako deribatua zero baita.

Norabide-deribaturik handiena gradientearen norabidean ematen da, eta balio maximo hori gradientearen modulua da:

w = gradf[x0, y0]

$\{2, 0\}$

Umax = $w/\sqrt{w.w}$

$\{1, 0\}$

Eta norabide-deribaturik handiena gradientearen modulua da:

$\sqrt{w.w}$

2

c) Zenbait maila-kurba kalkulatuko ditugu, $f(x, y) = c$:

h[c_] = f[x, y]==c

$2-2x+x^2-2y+y^2 == c$

$c = 0$, 1, 2, 3, 4 balioko maila-kurbak kalkulatuko ditugu:

cn = Table[h[c^2], {c, 0, 4}]

$\{2 - 2x + x^2 - 2y + y^2 == 0, 2 - 2x + x^2 - 2y + y^2 == 1,$

$2 - 2x + x^2 - 2y + y^2 == 4, 2 - 2x + x^2 - 2y + y^2 == 9,$

$2 - 2x + x^2 - 2y + y^2 == 16\}$

Eta horien adierazpen grafikoa egingo dugu:

g1 = Show[ContourPlot[Evaluate[cn], {x, −3, 5}, {y, −3, 5},

ContourStyle → Table[{RGBColor[0.2, 1 − 0.15 ∗ c, 0.8], Thickness[0.01]},

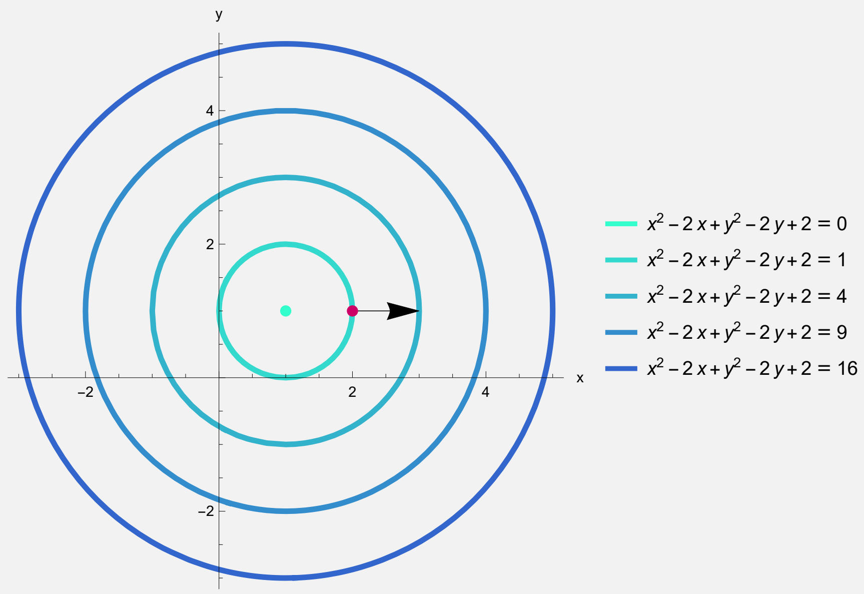
{c, 0, 4}], Frame → False, Axes->True, AxesLabel → {x, y},

PlotLegends->"Expressions"],

Graphics[{{Arrowheads[Large], Arrow[{{2, 1}, {3, 1}}]},

{RGBColor[0.8, 0, 0.4], PointSize → Large, Point[{2, 1}]},

{PointSize → Large, RGBColor[0.2, 1, 0.8], Point[{1, 1}]}}]]



Ikus daitekeen moduan, $(1, 1)$ zentrodun eta $r = c$ erradiodun zirkunferentziak dira maila-kurbak.

9.6 ariketa. $z = f(x, y) = \frac{x^2y + xy^2 + x^3}{y}$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu $P(1, 1)$ puntuan honako balio hau: $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

b) Kalkulatu OX ardatzaren norabideko deribatua $P(1, 1)$ puntuan.

c) Kalkulatu P puntutik igarotzen den maila-kurbaren ekuazioa.

a) atala. Funtzioa eta puntua definituko ditugu, eta adierazpenean agertzen diren deribatu partzialak kalkulatuko ditugu:

$$z[\mathrm{x\_,y\_}] = x^2 + x * y + \frac{x^3}{y};$$

$$P = \{\mathrm{x0, y0}\} = \{1, 1\};$$

$$\mathrm{dzx}[\mathrm{x\_,y\_}] = D[z[x, y], x]$$

$$2x + \frac{3x^2}{y} + y$$

$$\mathrm{dzy}[\mathrm{x\_,y\_}] = D[z[x, y], y]$$

$$x - \frac{x^3}{y^2}$$

$$\mathrm{dzxx}[\mathrm{x\_,y\_}] = D[z[x, y], \{x, 2\}]$$

$$2 + \frac{6x}{y}$$

$$\mathrm{dzxy}[\mathrm{x\_,y\_}] = D[z[x, y], \{x, 1\}, \{y, 1\}]$$

$$1 - \frac{3x^2}{y^2}$$

$$\mathrm{dzyy}[\mathrm{x\_,y\_}] = D[z[x, y], \{y, 2\}]$$

$$\frac{2x^3}{y^3}$$

Adierazpena definituko dugu, eta $P(1, 1)$ puntuan balioztatuko dugu:

$$\mathrm{adierazpena}[\mathrm{x\_,y\_}] = x^2 * \mathrm{dzxx}[x, y] + 2xy * \mathrm{dzxy}[x, y] + y^2 * \mathrm{dzyy}[x, y] // \mathrm{Simplify}$$

$$\frac{2x\left(x^2 + xy + y^2\right)}{y}$$

$$\mathrm{adierazpena}[\mathrm{x0, y0}]$$

$$6$$

b) atala. $P(1,1)$ puntuan gradientea kalkulatuko dugu:

gradz[x_, y_] = {dzx[x, y], dzy[x, y]}

$\left\{2x + \frac{3x^2}{y} + y, x - \frac{x^3}{y^2}\right\}$

gradz[1, 1]

$\{6, 0\}$

OX ardatzaren norabideko deribatua $P(1,1)$ puntuan kalkulatzeko, nahikoa da ardatz horren norabidea duen bektore unitarioa hartzea, $\vec{u} = (1,0)$, eta gradienteaz biderkatzea:

ux = {1, 0}

$\{1, 0\}$

dux = gradz[1, 1].ux

6

c) atala. P puntutik igarotzen den maila-kurbaren ekuazioa da $f(x,y) = z_0$, non $z_0 = f(x_0, y_0)$ baita:

z0 = z[x0, y0]

3

cnp = $z[x, y]$ == z0

$x^2 + \frac{x^3}{y} + xy == 3$

9.7 ariketa. $z = f(x,y) = x^2 + 2xy + 3x - 4$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu haren diferentziala eta erabili $f(1{,}02,\ 1{,}99)$ balioa hurbiltzeko.

b) Kalkulatu $P(1,2)$ puntuko plano ukitzailearen ekuazioa.

a) atala. Funtzioa eta puntua definituko ditugu, eta puntua funtzioan balioztatuko dugu:

$f[\text{x\_}, \text{y\_}] = x^{\wedge}2 + 2x * y + 3x - 4$

$-4 + 3x + x^2 + 2xy$

$P = \{\text{x0}, \text{y0}\} = \{1, 2\};$

$\text{z0} = f[\text{x0}, \text{y0}]$

4

Deribatu partzialak kalkulatuko ditugu:

$\text{dzx}[\text{x\_}, \text{y\_}] = D[f[x, y], x]$

$3 + 2x + 2y$

$\text{dzx}[\text{x0}, \text{y0}]$

9

$\text{dzy}[\text{x\_}, \text{y\_}] = D[f[x, y], y]$

$2x$

$\text{dzy}[\text{x0}, \text{y0}]$

2

$\text{dzy}[\text{x0}, \text{y0}]$

2

Diferentziala definituko dugu:

$\text{df}[\text{x\_}, \text{y\_}, \text{dx\_}, \text{dy\_}] = \text{dzx}[x, y] * \text{dx} + \text{dzy}[x, y] * \text{dy}$

$2\text{dy}x + \text{dx}(3 + 2x + 2y)$

$f(1,02,\ 1,99)$ balioaren hurbilpen bat honako era honetan kalkula daiteke:

```
f[x0, y0] + df[x0, y0, 0.02, −0.01]
```

4.16

Eta balio zehatza honako hau da:

```
f[1.02, 1.99]
```

4.16

b) atala. P puntuko plano ukitzailea honako hau da:

```
zptan[x_, y_] = z0 + dzx[x0, y0] ∗ (x − x0) + dzy[x0, y0] ∗ (y − y0)//Simplify
```

$-9 + 9x + 2y$

Hau da, $z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \Rightarrow z = -9 + 9x + 2y$.
9.8 ariketa. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ funtzioa eta $P(1, -1)$ puntua emanik:

a) Kalkulatu funtzioaren gradientea.

b) Kalkulatu norabide-deribatua maximoa den norabidea eta balio maximoa.

c) Kalkulatu $x - y = 0$ zuzenaren norabideko deribatua.

a) atala. Puntua eta funtzioa definituko ditugu, eta puntua funtzioan balioztatuko dugu:

```
f[x_, y_] = x^3 + y^3 − 3x ∗ y;
P = {x0, y0} = {1, −1};
z0 = f[x0, y0]
```

3

Deribatu partzialak eta gradientea kalkulatuko ditugu:

$\mathbf{dfx[x\_,y\_] = D[f[x,y],x]}$

$3x^2 - 3y$

$\mathbf{dfy[x\_,y\_] = D[f[x,y],y]}$

$-3x + 3y^2$

$\mathbf{gradf[x\_,y\_] = \{dfx[x,y], dfy[x,y]\}}$

$\{3x^2 - 3y, -3x + 3y^2\}$

b) atala. Gradientearen norabidean gertatzen da hazkunderik handiena:

$\mathbf{w = gradf[x0, y0]}$

$\{6, 0\}$

$\mathbf{Umax = w/\sqrt{w.w}}$

$\{1, 0\}$

Norabide-deribaturik handiena ere gradientearen norabidean agertzen da, eta balio maximo hori gradientearen modulua da:

$\mathbf{\sqrt{w.w}}$

6

c) atala. $x - y = 0$ zuzenaren norabideko deribatua eskatzen digute. Kontuan izan behar da zuzen horren norabide-bektorea $\vec{v} = (1,1)$ dela. $\vec{v}$ bektorea eta norabide horretako $\vec{u}$ bektore unitarioa definituko ditugu:

$\mathbf{v = \{1, 1\}}$

$\{1, 1\}$

$\mathbf{u = v/\sqrt{v.v}}$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$\vec{u}$ bektore unitarioaren norabideko deribatua kalkulatuko dugu:

dfu[x_, y_] = gradf[x, y].u

$\frac{3x^2-3y}{\sqrt{2}} + \frac{-3x+3y^2}{\sqrt{2}}$

dfup = dfu[x0, y0]

$3\sqrt{2}$

10. kapitulua

Aldagai anitzeko funtzio konposatuen eta inplizituen deribazioa

Ohikoa da funtzio bat beste funtzio batzuen menpekoa izatea. Era berean, azken funtzio horiek aldagai baten edo batzuen menpekoak izan daitezke. Horrelakoetan, hasierako funtzioaren aldaketa beste funtzioen aldaketaren menpekoa da.

Adibidez, demagun aire-kontrolatzaile bat ohartu dela bi hegazkin altuera berean daudela, eta, gainera, bi hegazkinen hegaldiek puntu berera jotzen dutela angelu zuzena jarraituz. Suposa dezagun lehenengo hegazkina 150 miliako altueran dagoela eta 360 milia/orduko abiaduraz doala; eta bigarrena, 250 miliako altueran dagoela eta 600 milia/orduko abiaduraz higitzen dela. Bi hegazkinak banatzen dituen distantzia hegazkinen posizioen araberakoa da, eta hegazkinen distantziak denboraren menpekoak dira. Horrelako funtzioen deribatuak izango ditugu aztergai kapitulu honetan.

10.1 Katearen erregela

Izan bedi $w = f(x,y,z)$, (x,y,z)-n deribagarria den funtzio bat, $x = x(r,s)$, $y = y(r,s,t)$ eta $z = z(r,s,t)$ izanik, eta beren deribatu partzialak existitzen direlarik. Orduan, $w = f(x,y,z)$ funtzio konposatua deribagarria da, eta bere deribatu partzialak honako era honetan kalkulatzen dira:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}; \quad (\frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ baita}).$$

10.2 Deribazio inplizitua

$u(x,y,z)=0$ funtzio inplizitua emanik, non $z=z(x,y)$ baita, honela kalkulatzen dira $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ deribatu partzialak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0\\ &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\Rightarrow z_x=-\frac{u_x}{u_z}.\end{aligned}$$

Era berean, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ deribatu partziala kalkula daiteke:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}=0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0\\ &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}\right)=0\\ &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\Rightarrow z_y=-\frac{u_y}{u_z}.\end{aligned}$$

10.2.1 Era inplizituan definitutako gainazalarekiko plano ukitzailea

$z=f(x,y)$ ekuaziodun azalera $F(x,y,z)=0$ funtzio inplizituaren bidez defini daitekeenean, honako hau da gainazal horrekiko $P(x_0,y_0,z_0)$ puntuko plano ukitzailea:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0.$$

10.2.2 Ekuazio-sistema batek era inplizituan definitutako funtzioen deribazioa

Izan bedi p ekuazio eta $(n+p)$ ezezaguneko funtzio inplizituen sistema:

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p})=0,\\ F_2(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p})=0,\\ \vdots\\ F_p(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p})=0.\end{cases}$$

Sistema hori lineala balitz, p ezezagun askatuko genituzke gainontzeko n ezezagunen menpe. Sistema lineala ez denean, p ezezagun gainontzeko n ezezagunen menpe noiz aska ditzakegun dioen teorema enuntziatuko dugu:

Teorema. Izan bedi p ekuazio eta $(n+p)$ ezezaguneko funtzio inplizituen sistema, eta $P(x_{1,0},x_{2,0},\ldots,x_{n,0},x_{n+1,0},\ldots,x_{n+p,0})$ puntua. Orduan, sistema horrek n aldagaitako p funtzio definitzen ditu P puntuaren ingurune batean, honako baldintza hauek betetzen badira:

- P puntuak sistema betetzen du:

$$F_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n,0}, x_{n+1,0}, \ldots, x_{n+p,0}) = 0, \forall i = 1, \ldots, p.$$

- $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p})$ funtzioen deribatu partzialak P puntuaren ingurune batean existitzen dira, eta jarraituak dira: $i = 1, ..., p$.

- $\tilde{x}_j$ izanik ($j = 1, \ldots, p$), gainontzeko n aldagaien menpe idatz daitezkeen aldagaiak, F_i funtzioen jakobtarra $\tilde{x}_j$ aldagaiekiko ez-nulua da.

10.3 Adibideak

10.1 adibidea. $z = F(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ funtzioa emanik, kalkulatu honako deribatu partzial hauek: $\frac{\partial z}{\partial x}$ eta $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ematen diguten funtzioa $z = F(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ da; hau da, $z(x, y) = f(u(x, y))$ motakoa, $u = \frac{y}{x}$ izanik. x aldagaiarekiko deribatu partziala honako hau da:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u(x, y))\frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

Era berean kalkulatuko dugu y aldagaiarekiko deribatu partziala:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u(x, y))\frac{\partial u}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right).$$

10.2 adibidea. Kono-itxurako harea pilo batera harea botatzen dihardugu, 2 m^3/min. Konoaren erradioa 1 m/min handitzen da. Kalkulatu harea piloaren altuera zenbat aldatuko den, $h = 1$ m eta $r = 0,5$ m direnean.

r erradiodun oinarria eta h altuera dituen konoaren bolumena honela kalkulatzen da:

$$V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Altuera eta erradioa denboraren menpekoak dira; hau da: $h = h(t)$ eta $r = r(t)$. Hortaz, bolumena ere denboraren menpekoa da:

$$V(t) = V(r(t), h(t)).$$

Deribatua katearen erregela aplikatuz kalkulatuko dugu:

$$V'(t) = \frac{\partial V}{\partial r}r'(t) + \frac{\partial V}{\partial h}h'(t) = \frac{2}{3}\pi r h r'(t) + \frac{1}{3}\pi r^2 h'(t).$$

Goiko ekuazioan datuak ordezkatzea eta $h'(t)$ askatzea baino ez zaigu falta. Ematen dizkiguten datuak honako hauek dira: $V'(t) = 2m^3/min$, $r'(t) = 1m/min$. Eta $h'(t)$ kalkulatu beharreko uneko datuak honako hauek dira, $h = 1$ m eta $r = 0,5$ m:

$$2 = \frac{2}{3}\pi 0,5 + \frac{1}{3}\pi(0,5)^2 h'(t) \Rightarrow 6 = \pi + \frac{\pi}{4}h'(t) \Rightarrow h'(t) = \frac{4(6-\pi)}{\pi}.$$

Hau da, $h'(t) = \frac{4(6-\pi)}{\pi} m/min$ handitzen da une horretan.

10.3 adibidea. Ondorioztatu z funtzioaren adierazpena, $z = F(x, y)$ funtzioa emanik, non $s = x + y$ eta $t = x - y$ baitira, eta $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ berdintza betetzen dela jakinik.

$z = F(x, y)$ dela esaten digute. Bestalde, kontuan hartuz $s = x+y$ eta $t = x-y$, $s = s(x, y)$ eta $t = t(x, y)$ betetzen dira. Hau da, $z = f(s, t)$ non $s = s(x, y)$ eta $t = t(x, y)$ baitira. Honako hauek dira z funtzioaren deribatu partzialak x eta y aldagaiekiko:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}.\end{aligned}$$

Eta $s = x + y$ eta $t = x - y$ kontuan hartuz, $\dfrac{\partial s}{\partial y} = \dfrac{\partial s}{\partial x} = 1$ eta $\dfrac{\partial t}{\partial x} = 1$ eta $\dfrac{\partial t}{\partial y} = -1$. Hortaz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial t}.\end{aligned}$$

Esaten digutenez, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ berdintza betetzen da, orduan:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Beraz, z funtzioak ez dauka t aldagaiaren menpekotasunik:

$$z = g(s) = g(x + y).$$

10.4 adibidea. Izan bedi $x^2 + y^2 = 1$ $(0, 0)$ zentrodun eta $r = 1$ erradiodun zirkunferentziaren ekuazioa. $y > 0$ den eremua hartuz, kalkulatu $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$x^2 + y^2 = 1$ ekuazioak x eta y aldagaien arteko funtzio inplizitu bat definitzen du, eta $y > 0$ betetzen den eremuan x bakoitza y-ren balio bakarrarekin dago lotuta eta y bakoitza x-ren balio bakarrarekin. Hortaz, $y = f(x)$ daukagu. Defini dezagun $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ funtzio inplizitua. Deribazio inplizitua erabiliz, honako hau daukagu:

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Goiko adierazpenetik $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ondorioztа daiteke.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ kalkulatzeko era bat da goiko adierazpena berriro deribatzea, eta bertatik eskatzen diguten deribatua askatzea. Gainera, Schwartz-en teorema betetzen dela kontuan hartuz ($F_{xy} = F_{yx}$), honako hau daukagu:

$$\left(F_{xx}(x,y) + F_{xy}(x,y)\frac{dy}{dx}\right) + \left(F_{yx}(x,y) + F_{yy}(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + F_y(x,y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(F_{xx}(x,y) + 2F_{xy}(x,y)\frac{dy}{dx}\right) + F_{yy}(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{F_y(x,y)}.$$

Deribatu partzialak $F_x(x,y) = 2x$, $F_y(x,y) = 2y$, $F_{xy}(x,y) = 0$ eta $F_{xx}(x,y) = F_{yy}(x,y) = 2$, eta $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ goiko adierazpenean ordezkatuz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(F_{xx}(x,y) + 2F_{xy}(x,y)\frac{dy}{dx}\right) + F_{yy}(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{F_y(x,y)} = -\frac{2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

Emaitza bera lor daiteke $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ adierazpena berriro deribatuz. Zatiketaren deribatua erabiliz, honako hau daukagu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{-y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

10.5 adibidea. Kalkulatu honako gainazal honen plano ukitzailea $(2,1,1)$ puntuan: $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$.

$F(x,y,z) = 0$ funtzio inplizituaren bidez defini daitekeen gainazalarekiko $P(x_0,y_0,z_0)$ puntuko plano ukitzailea honako hau da:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0) = 0.$$

Gure kasuan, $F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 9$, eta bere deribatu partzialak honako hauek dira:

$$F_x(x,y,z) = 2x,\ \ F_y(x,y,z) = 6y,\ \ F_z(x,y,z) = 4z.$$

Eta deribatu partzialen balioak $(2,1,1)$ puntuan honako hauek dira:

$$F_x(2,1,1) = 4,\ \ F_y(2,1,1) = 6,\ \ F_z(2,1,1) = 4.$$

Hortaz, plano ukitzailearen ekuazioa honako hau da:

$$4(x-2) + 6(y-1) + 4(z-1) = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 2z = 9.$$

10.6 adibidea. Izan bedi ekuazio inplizituen honako sistema hau:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,u) = 0, \\ F_2(x,y,z,u) = 0. \end{cases}$$

$F_1(x,y,z,u) = xz^3 + y^2u^3 - 1$ eta $F_2(x,y,z,u) = 2xy^3 + u^2z$ baitira. Aztertu ea sistema horrek $P(0,1,0,1)$ puntuaren ingurune batean z eta u aldagaiak x eta y aldagaien funtzio inplizitu gisa definitzen dituen.

Ikus dezagun zer betetzen den:

- $P(0,1,0,1)$ puntuak sistema bete egiten du:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,u) = 0, \\ F_2(x,y,z,u) = 0. \end{cases}$$

- Lehen deribatu partzialak (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, F_{iu}, $i = 1,2$) existitu egiten dira, eta funtzio jarraituak dira. Hori gertatzen da, bereziki, P puntuaren ingurune batean.

- z eta u aldagaiekiko jakobtarra honako hau da:

$$\begin{vmatrix} 3xz^2 & 3y^2u^2 \\ u^2 & 2uz \end{vmatrix}.$$

  Eta jakobtarraren balioa P puntuan balioztatuz, zera daukagu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Hortaz, emandako sistemak $P(0,1,0,1)$ puntuaren ingurune batean z eta u aldagaiak x eta y aldagaien funtzio inplizitu gisa definitzen ditu. Hau da:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z(x,y),u(x,y)) = 0 \\ F_2(x,y,z(x,y),u(x,y)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G_1(x,y) = 0 \\ G_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ eta $\frac{\partial u}{\partial y}$ deribatu partzialak kalkulatu nahiko bagenitu, $G_1(x,y)$, $G_2(x,y)$, $F_1(x,y,z,u)$ eta $F_2(x,y,z,u)$ funtzioen deribatu partzialak kalkulatu beharko genituzke. Hau da:

$$\begin{cases} G_{1x}(x,y) = F_{1x} + F_{1z}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{1u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ G_{2x}(x,y) = F_{2x} + F_{2z}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{2u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

eta

$$\begin{cases} G_{1y}(x,y) = F_{1y} + F_{1z}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{1u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ G_{2y}(x,y) = F_{2y} + F_{2z}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{2u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Bi ekuazio eta bi ezezaguneko bi sistema horiek Cramer-en metodoaren bidez ebatz daitezke, eta emaitzak honako hauek dira:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{D\left(\frac{F_1,F_2}{x,u}\right)}{D\left(\frac{F_1,F_2}{z,u}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} z^3 & 3y^2u^2 \\ 2y^3 & 2uz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3xz^2 & 3y^2u^2 \\ u^2 & 2uz \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D\left(\frac{F_1,F_2}{y,u}\right)}{D\left(\frac{F_1,F_2}{z,u}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} 2yu^3 & 3y^2u^2 \\ 6xy^2 & 2uz \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3xz^2 & 3y^2u^2 \\ u^2 & 2uz \end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{D\left(\frac{F_1,F_2}{z,x}\right)}{D\left(\frac{F_1,F_2}{z,u}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} 3xz^2 & z^3 \\ u^2 & 2y^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3xz^2 & 3y^2u^2 \\ u^2 & 2uz \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{D\left(\frac{F_1,F_2}{z,y}\right)}{D\left(\frac{F_1,F_2}{z,u}\right)} = \frac{\begin{vmatrix} 3xz^2 & 2yu^3 \\ u^2 & 6xy^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3xz^2 & 3y^2u^2 \\ u^2 & 2uz \end{vmatrix}}.$$

10.4 Ordenagailuko praktikak

10.1 ariketa. $z = F(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ funtzioa emanik, kalkulatu honako deribatu partzial hauek: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial xy}$.

Ematen diguten funtzioa $z = F(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ da; hau da, $z(x, y) = f(u(x, y))$ motakoa, $u = \frac{y}{x}$ izanik. Prozesu orokorra deskribatuko dugu lehenik eta behin. $z(x, y) = f(u(x, y))$ funtzio orokorra definituko dugu:

```
z[x_, y_] = f[u[x, y]];
```

$z(x, y) = f(u(x, y))$ funtzioaren x aldagaiarekiko deribatua honako hau da:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$$

$$f'[u[x,y]]u^{(1,0)}[x,y]$$

Eta y aldagaiarekiko deribatua honako hau:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$$

$$f'[u[x,y]]u^{(0,1)}[x,y]$$

$u^{(1,0)} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ izanik, eta $u^{(0,1)} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$.

Bigarren ordenako deribatu partzialak honako hauek dira:

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\,\partial x}$$

$$f''[u[x,y]]u^{(1,0)}[x,y]^2 + f'[u[x,y]]u^{(2,0)}[x,y]$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

$$f''[u[x,y]]u^{(0,1)}[x,y]u^{(1,0)}[x,y] + f'[u[x,y]]u^{(1,1)}[x,y]$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\,\partial y}$$

$$f''[u[x,y]]u^{(0,1)}[x,y]^2 + f'[u[x,y]]u^{(0,2)}[x,y]$$

non:

$$u^{(2,0)}(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial x},$$
$$u^{(1,1)}(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y},$$
$$u^{(0,2)}(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\,\partial y}.$$

Azaldu ditugun pausoak jarraituko ditugu $z = F(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ funtzioarekin. Funtzioa definituko dugu:

```
z[x_, y_]:=f[y/x]
```

Lehen ordenako deribatu partzialak kalkulatuko ditugu. Honako hau daukagu: $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} f'(u(x,y))$:

```
dzx[x_, y_] = Simplify[∂_x z[x, y]]
```

$-\frac{y f'\left[\frac{y}{x}\right]}{x^2}$

Era berean, lehen ordenako beste deribatu partziala $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} f'(u(x,y))$ kalkulatuko dugu:

```
dzy[x_, y_] = Simplify[∂_y z[x, y]]
```

$\frac{f'\left[\frac{y}{x}\right]}{x}$

Eta bigarren ordenako deribatu partzialak honako hauek dira:

```
Simplify[∂_{x,x} z[x, y]]
```

$\frac{y\left(2x f'\left[\frac{y}{x}\right] + y f''\left[\frac{y}{x}\right]\right)}{x^4}$

```
Simplify[∂_{x,y} z[x, y]]
```

$-\frac{x f'\left[\frac{y}{x}\right] + y f''\left[\frac{y}{x}\right]}{x^3}$

```
Simplify[∂_{y,y} z[x, y]]
```

$\frac{f''\left[\frac{y}{x}\right]}{x^2}$

10.2 ariketa. $z = F(u) = f(s(u), t(u))$ funtzioa emanik, non $s(u) = \sin u$ eta $t(u) = \cos u$ baitira, kalkulatu honako deribatu partzial hauek: $\frac{\partial z}{\partial u}$ eta $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

Ematen diguten funtzioa $z = F(u) = f(s(u), t(u))$ motakoa da. Prozesu orokorra deskribatuko dugu lehenik eta behin. Hasteko, $z = f(s(u), t(u))$ funtzio orokorra definituko dugu:

```
z[u_]:=f[s[u],t[u]];
```

Lehen ordenako deribatu partziala $\frac{\partial z}{\partial u}$ honako hau da:

$$\frac{\partial z(u)}{\partial u}$$

$$t'[u]f^{(0,1)}[s[u],t[u]] + s'[u]f^{(1,0)}[s[u],t[u]]$$

Eta bigarren ordenako deribatu partziala $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ honako hau:

$$\partial_{u,u}z[u]$$

$$\begin{aligned}
&t''[u]f^{(0,1)}[s[u],t[u]] + s''[u]f^{(1,0)}[s[u],t[u]]\\
&+t'[u]\left(t'[u]f^{(0,2)}[s[u],t[u]] + s'[u]f^{(1,1)}[s[u],t[u]]\right)\\
&+s'[u]\left(t'[u]f^{(1,1)}[s[u],t[u]] + s'[u]f^{(2,0)}[s[u],t[u]]\right)
\end{aligned}$$

non:

$$\begin{aligned}
f^{(1,0)} &= \frac{\partial f(s,t)}{\partial s},\\
f^{(0,1)} &= \frac{\partial f(s,t)}{\partial t},\\
f^{(2,0)}(s,t) &= \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\,\partial s},\\
f^{(1,1)}(s,t) &= \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\,\partial t},\\
f^{(0,2)}(s,t) &= \frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial t\,\partial t}.
\end{aligned}$$

Azaldu dugun prozesua aplikatuko diogu $z = F(u) = f(s(u), t(u))$ funtzioari, non $s(u) = \sin u$ eta $t(u) = \cos u$ baitira. Funtzioak definituko ditugu:

```
z[u_]:=f[s[u],t[u]];

s[u_]:=Sin[u];
t[u_]:=Cos[u];
```

Lehen ordenako deribatu partziala kalkulatuko dugu:

```
dzu[x_,y_] = z'[u]
```

$-\mathrm{Sin}[u]f^{(0,1)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]+\mathrm{Cos}[u]f^{(1,0)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]$

```
dzu[x,y]//Simplify
```

$-\mathrm{Sin}[u]f^{(0,1)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]+\mathrm{Cos}[u]f^{(1,0)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]$

TraditionalForm erabilita, ohituago gauden eran idatzita ikusiko dugu emaitza:

```
%//TraditionalForm
```

$\cos(u)f^{(1,0)}(\sin(u),\cos(u))-\sin(u)f^{(0,1)}(\sin(u),\cos(u))$

Eta bigarren deribatu partziala kalkulatuko dugu:

```
d2zu[x_,y_] = z''[u]
```

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Cos}[u]f^{(0,1)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]-\mathrm{Sin}[u]f^{(1,0)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]\\&-\mathrm{Sin}[u]\left(-\mathrm{Sin}[u]f^{(0,2)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]+\mathrm{Cos}[u]f^{(1,1)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]\right)\\&+\mathrm{Cos}[u]\left(-\mathrm{Sin}[u]f^{(1,1)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]+\mathrm{Cos}[u]f^{(2,0)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]\right)\end{aligned}$$

```
d2zu[x,y]//Simplify
```

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Cos}[u]f^{(0,1)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]+\mathrm{Sin}[u]^2f^{(0,2)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]\\&-\mathrm{Sin}[u]f^{(1,0)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]-2\mathrm{Cos}[u]\mathrm{Sin}[u]f^{(1,1)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]\\&+\mathrm{Cos}[u]^2f^{(2,0)}[\mathrm{Sin}[u],\mathrm{Cos}[u]]\end{aligned}$$

Nahi izanez gero, *TraditionalForm* aginduak ohiko eran idatziko digu emaitza:

%//TraditionalForm

$$\cos^2(u)f^{(2,0)}(\sin(u),\cos(u)) + \sin^2(u)f^{(0,2)}(\sin(u),\cos(u))$$
$$-\cos(u)f^{(0,1)}(\sin(u),\cos(u)) - 2\sin(u)\cos(u)f^{(1,1)}(\sin(u),\cos(u))$$
$$-\sin(u)f^{(1,0)}(\sin(u),\cos(u))$$

10.3 ariketa. $z = F(x,y) = f\,(s(x,y),t(x,y))$ funtzioa emanik, non $s(x,y) = x\sin y$ eta $t(x,y) = xy$ baitira, kalkulatu honako deribatu partzial hauek: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$.

Lehendabizi, orokorrean egingo dugu $z = F(x,y) = f\,(s(x,y),t(x,y))$ funtzio batentzat. Konposaketan parte hartzen duten funtzioak definituko ditugu:

z[x_, y_]:=f[s[x, y], t[x, y]];

Lehen ordenako deribatu partzialak honako hauek dira:

$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$

$$f^{(1,0)}[s[x,y],t[x,y]]s^{(1,0)}[x,y] + f^{(0,1)}[s[x,y],t[x,y]]t^{(1,0)}[x,y]$$

$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$

$$f^{(0,1)}[s[x,y],t[x,y]]t^{(0,1)}[x,y] + s^{(0,1)}[x,y]f^{(1,0)}[s[x,y],t[x,y]]$$

Eta bigarren ordenako deribatu partzialak beste hauek:

$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\,\partial x}$

$$t^{(1,0)}[x,y]\left(f^{(0,2)}[s[x,y],t[x,y]]t^{(1,0)}[x,y] + s^{(1,0)}[x,y]f^{(1,1)}[s[x,y],t[x,y]]\right)$$
$$+s^{(1,0)}[x,y]\left(t^{(1,0)}[x,y]f^{(1,1)}[s[x,y],t[x,y]] + s^{(1,0)}[x,y]f^{(2,0)}[s[x,y],t[x,y]]\right)$$
$$+f^{(1,0)}[s[x,y],t[x,y]]s^{(2,0)}[x,y] + f^{(0,1)}[s[x,y],t[x,y]]t^{(2,0)}[x,y]$$

$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\,\partial y}$

$t^{(1,0)}[x,y]\left(t^{(0,1)}[x,y]f^{(0,2)}[s[x,y],t[x,y]]+s^{(0,1)}[x,y]f^{(1,1)}[s[x,y],t[x,y]]\right)$

$+f^{(1,0)}[s[x,y],t[x,y]]s^{(1,1)}[x,y]+f^{(0,1)}[s[x,y],t[x,y]]t^{(1,1)}[x,y]$

$+s^{(1,0)}[x,y]\left(t^{(0,1)}[x,y]f^{(1,1)}[s[x,y],t[x,y]]+s^{(0,1)}[x,y]f^{(2,0)}[s[x,y],t[x,y]]\right)$

$\boldsymbol{\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\,\partial y}}$

$f^{(0,1)}[s[x,y],t[x,y]]t^{(0,2)}[x,y]+s^{(0,2)}[x,y]f^{(1,0)}[s[x,y],t[x,y]]$

$+\,t^{(0,1)}[x,y]\left(t^{(0,1)}[x,y]f^{(0,2)}[s[x,y],t[x,y]]+s^{(0,1)}[x,y]f^{(1,1)}[s[x,y],t[x,y]]\right)$

$+\,s^{(0,1)}[x,y]\left(t^{(0,1)}[x,y]f^{(1,1)}[s[x,y],t[x,y]]+s^{(0,1)}[x,y]f^{(2,0)}[s[x,y],t[x,y]]\right)$

Deskribatu dugun prozesua aplikatuko diogu $z = F(x,y) = f\,(s(x,y),t(x,y))$ funtzioari, non $s(x,y) = x\sin y$ eta $t(x,y) = xy$ baitira. Funtzioak definituko ditugu:

z[x_, y_]:=$f[s[x,y],t[x,y]]$;

s[x_, y_] = xSin[y];

t[x_, y_] = xy;

$\frac{\partial z}{\partial x}$ kalkulatuko dugu:

$\partial_{\{x\}}z[x,y]$

$yf^{(0,1)}[x\mathrm{Sin}[y],xy]+\mathrm{Sin}[y]f^{(1,0)}[x\mathrm{Sin}[y],xy]$

dzx[x_, y_] = Simplify [$\partial_x z[x,y]$]

$yf^{(0,1)}[x\mathrm{Sin}[y],xy]+\mathrm{Sin}[y]f^{(1,0)}[x\mathrm{Sin}[y],xy]$

%//TraditionalForm

$yf^{(0,1)}(x\sin(y),xy)+\sin(y)f^{(1,0)}(x\sin(y),xy)$

Era berean, $\frac{\partial z}{\partial y}$ kalkulatuko dugu:

$\partial_{\{y\}} z[x, y]$

$x f^{(0,1)}[x\text{Sin}[y], xy] + x\text{Cos}[y] f^{(1,0)}[x\text{Sin}[y], xy]$

dzy[x_, y_] = Simplify $[\partial_{y} z[x, y]]$

$x \left(f^{(0,1)}[x\text{Sin}[y], xy] + \text{Cos}[y] f^{(1,0)}[x\text{Sin}[y], xy] \right)$

%//TraditionalForm

$x \left(f^{(0,1)}(x \sin(y), xy) + \cos(y) f^{(1,0)}(x \sin(y), xy) \right)$

Ondoren, bigarren ordenako deribatu partzialak kalkulatuko ditugu. Hona hemen, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

Simplify $[\partial_{x,x} z[x, y]]$ **//Expand**

$y^2 f^{(0,2)}[x\text{Sin}[y], xy] + 2y\text{Sin}[y] f^{(1,1)}[x\text{Sin}[y], xy] + \text{Sin}[y]^2 f^{(2,0)}[x\text{Sin}[y], xy]$

%//TraditionalForm

$y^2 f^{(0,2)}(x \sin(y), xy) + \sin^2(y) f^{(2,0)}(x \sin(y), xy) + 2y \sin(y) f^{(1,1)}(x \sin(y), xy)$

Hemen $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$:

Simplify $[\partial_{x,y} z[x, y]]$

$f^{(0,1)}[x\text{Sin}[y], xy] + xy f^{(0,2)}[x\text{Sin}[y], xy] + \text{Cos}[y] f^{(1,0)}[x\text{Sin}[y], xy]$
$+ xy\text{Cos}[y] f^{(1,1)}[x\text{Sin}[y], xy] + x\text{Sin}[y] f^{(1,1)}[x\text{Sin}[y], xy]$
$+ x\text{Cos}[y]\text{Sin}[y] f^{(2,0)}[x\text{Sin}[y], xy]$

%//TraditionalForm

$f^{(0,1)}(x \sin(y), xy) + xy f^{(0,2)}(x \sin(y), xy) + x \sin(y) f^{(1,1)}(x \sin(y), xy)$
$+ \cos(y) f^{(1,0)}(x \sin(y), xy) + xy \cos(y) f^{(1,1)}(x \sin(y), xy)$
$+ x \sin(y) \cos(y) f^{(2,0)}(x \sin(y), xy)$

Eta bukatzeko, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

Simplify $[\partial_{y,y} z[x,y]]$ //Expand

$x^2 f^{(0,2)}[x\text{Sin}[y], xy] - x\text{Sin}[y] f^{(1,0)}[x\text{Sin}[y], xy] + 2x^2\text{Cos}[y] f^{(1,1)}[x\text{Sin}[y], xy] + x^2\text{Cos}[y]^2 f^{(2,0)}[x\text{Sin}[y], xy]$

%//TraditionalForm

$x^2 f^{(0,2)}(x\sin(y), xy) + x^2\cos^2(y) f^{(2,0)}(x\sin(y), xy) + 2x^2\cos(y) f^{(1,1)}(x\sin(y), xy) - x\sin(y) f^{(1,0)}(x\sin(y), xy)$

10.4 ariketa. $F(x,y) = y^2 - 1 - \tan\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ ekuazioak $y = f(x)$ funtzioa definitzen du $P(0,1)$ puntuaren ingurune batean. Kalkulatu $y'(x)$ eta $y''(x)$, eta puntu horretako zuzen ukitzailearen ekuazioa.

$F(x,y) = 0$ ekuazioak $P(x_0, y_0)$ puntu baten inguruan $y = f(x)$ funtzioa definitzen du, honako baldintza hauek betetzen badira:

- $F(x_0, y_0) = 0$.
- Existitu egiten dira $\frac{\partial F}{\partial x}$ eta $\frac{\partial F}{\partial y}$, eta jarraituak dira.
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Funtzioa definituko dugu:

G[x_]:=$F[x, y[x]]$

$y'(x)$ kalkulatzeko, $G'(x) = 0$ ebatzi behar da:

$G'[x] == 0$

$y'[x] F^{(0,1)}[x, y[x]] + F^{(1,0)}[x, y[x]] == 0$

ekx = Solve $[G'[x] == 0, y'[x]]$

$\left\{\left\{y'[x] \to -\frac{F^{(1,0)}[x,y[x]]}{F^{(0,1)}[x,y[x]]}\right\}\right\}$

dyx[{x_, y_}] = ekx[[1, 1, 2]]/.$\{y[x] \to y\}$

$-\frac{F^{(1,0)}[x,y]}{F^{(0,1)}[x,y]}$

$y''(x)$ kalkulatzeko $G''(x) = 0$ ebatzi behar da:

G”[x] == 0

$y''[x]F^{(0,1)}[x, y[x]] + y'[x]F^{(1,1)}[x, y[x]] + y'[x]\left(y'[x]F^{(0,2)}[x, y[x]] + F^{(1,1)}[x, y[x]]\right) + F^{(2,0)}[x, y[x]] == 0$

ek2x = Solve[G”[x] == 0, y”[x]]

$\left\{\left\{y''[x] \to \frac{-y'[x]^2F^{(0,2)}[x,y[x]]-2y'[x]F^{(1,1)}[x,y[x]]-F^{(2,0)}[x,y[x]]}{F^{(0,1)}[x,y[x]]}\right\}\right\}$

d2yx[{x_, y_}] = ek2x[[1, 1, 2]]/. {y[x] → y, y'[x] → dyx[{x, y}]} //Simplify

$-\frac{1}{F^{(0,1)}[x,y]^3}\left(F^{(0,2)}[x, y]F^{(1,0)}[x, y]^2 - 2F^{(0,1)}[x, y]F^{(1,0)}[x, y]F^{(1,1)}[x, y] + F^{(0,1)}[x, y]^2F^{(2,0)}[x, y]\right)$

Azaldu dugun prozesua aplikatuko diogu $F(x, y) = y^2 - 1 - \tan\left(\frac{x}{y}\right)$ funtzioari. Funtzioa eta puntua definituko ditugu:

F[x_, y_]:=y^2 − 1 − Tan$\left[\frac{x}{y}\right]$

P = {x0, y0} = {0, 1}

$\{0, 1\}$

Ikus dezagun ea $F(x, y) = 0$ ekuazioak $P(0, 1)$ puntuaren inguruan $y = f(x)$ funtzioa definitzeko bete beharreko baldintzak betetzen diren:

$F(0, 1) = 0$ da:

F[x0, y0]

0

$\frac{\partial F}{\partial x}$ eta $\frac{\partial F}{\partial y}$ existitzen dira, eta jarraituak dira:

dFx[{x_, y_}] = D[F[x, y], x]

dFy[{x_, y_}] = D[F[x, y], x]

$-\frac{\text{Sec}\left[\frac{x}{y}\right]^2}{y}$

$-\frac{\text{Sec}\left[\frac{x}{y}\right]^2}{y}$

$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) \neq 0$ da:

dFy[*P*]

-1

Hortaz, $F(x,y) = y^2 - 1 - \tan\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ ekuazioak $y = f(x)$ funtzioa definitzen du $P(0,1)$ puntuaren ingurune batean.

$G(x) = F(x,y)$ definituko dugu, eta $G'(x) = 0$ ekuaziotik $y'(x)$ askatuko dugu:

G[x_]:=$F[x, y[x]]$

$G'[x] == 0$

$2y[x]y'[x] - \text{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2\left(\frac{1}{y[x]} - \frac{xy'[x]}{y[x]^2}\right) == 0$

ekx = Solve [$G'[x] == 0, y'[x]$]

$\left\{\left\{y'[x] \to \frac{\text{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 y[x]}{x\text{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 + 2y[x]^3}\right\}\right\}$

dyx[{x_, y_}] = ekx[[1, 1, 2]]/.{$y[x] \to y$}

$\frac{y\text{Sec}\left[\frac{x}{y}\right]^2}{2y^3 + x\text{Sec}\left[\frac{x}{y}\right]^2}$

$y'(x)$ balioztatuko dugu $P(0,1)$ puntuan:

dyx0 = dyx[*P*]

$\frac{1}{2}$

$G''(x) = 0$ ekuaziotik $y''(x)$ askatuko dugu:

G"[x] == 0

$$2y'[x]^2 - 2\mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 \mathrm{Tan}\left[\frac{x}{y[x]}\right]\left(\frac{1}{y[x]} - \frac{xy'[x]}{y[x]^2}\right)^2 + 2y[x]y''[x]$$
$$- \mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2\left(-\frac{2y'[x]}{y[x]^2} + \frac{2xy'[x]^2}{y[x]^3} - \frac{xy''[x]}{y[x]^2}\right) == 0$$

ek2x = Solve[G"[x] == 0, y"[x]]

$$\Big\{\Big\{y''[x] \to -\Big(\Big(2\Big(-\mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 \mathrm{Tan}\left[\frac{x}{y[x]}\right] y[x]^2 + 2x\mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 \mathrm{Tan}\left[\frac{x}{y[x]}\right] y[x]y'[x]$$
$$+\mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 y[x]^2 y'[x] - x^2\mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 \mathrm{Tan}\left[\frac{x}{y[x]}\right] y'[x]^2$$
$$-x\mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 y[x]y'[x]^2 + y[x]^4 y'[x]^2\Big)\Big) / \Big(y[x]^2\Big(x\mathrm{Sec}\left[\frac{x}{y[x]}\right]^2 + 2y[x]^3\Big)\Big)\Big)\Big\}\Big\}$$

d2yx[{x_, y_}] = ek2x[[1, 1, 2]]/. {y[x] → y, y′[x] → dyx[{x, y}]} //Simplify

$$\frac{2y^4\mathrm{Cos}\left[\frac{x}{y}\right]^2\left(-3+2y^2\mathrm{Sin}\left[\frac{2x}{y}\right]\right)}{\left(x+y^3+y^3\mathrm{Cos}\left[\frac{2x}{y}\right]\right)^3}$$

$y''(x)$ balioztatuko dugu $P(0,1)$ puntuan:

d2yx[P]

$$-\frac{3}{4}$$

Honako hau da $y = f(x)$ funtzioarekiko $P(x_0, y_0)$ puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Honako hau da puntu horretako zuzen ukitzailearen ekuazioa:

zukitzaile[x_, y_, x0_, y0_] = dFx[P](x − x0) + dFy[P](y − y0) == 0//Simplify

$$x + y == 1$$

10.5 ariketa. $y^2 + x^2 + z^3 - xz - yz - 6 = 0$ ekuazioa emanik:

a) Frogatu ekuazioak era inplizituan $z = f(x, y)$ funtzio bat definitzen duela $P(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$ puntuaren ingurune batean.

b) Kalkulatu $z = f(x, y)$ funtzioarekiko plano ukitzailearen ekuazioa eta P puntuko gradientea.

c) Kalkulatu puntu horretan dz eta d^2z diferentzialak $dx = 0,1$ eta $dy = 0,1$ kasurako.

a) atala. $F(x, y, z) = 0$ ekuazioak $P(x_0, y_0, z_0)$ puntu baten inguruan $z = f(x, y)$ funtzioa definitzen du, honako baldintza hauek betetzen badira:

- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.
- Existitu egiten dira $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ eta $\frac{\partial F}{\partial z}$, eta jarraituak dira.
- $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Funtzioa eta puntua definituko ditugu:

$$F[\text{x\_}, \text{y\_}, \text{z\_}] = y^2 + x^2 + z^3 - xz - yz - 6;$$
$$P = \{\text{x0}, \text{y0}, \text{z0}\} = \{\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\};$$

Lehenengo baldintza bete egiten da, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$:

$$F[\text{x0}, \text{y0}, \text{z0}]$$

$$0$$

Bigarren baldintza ere bete egiten da, deribatu partzialak existitzen baitira eta jarraituak baitira puntuaren ingurune batean:

$$\text{dFx}[\{\text{x\_}, \text{y\_}, \text{z\_}\}] = D[F[x, y, z], x]$$
$$\text{dFy}[\{\text{x\_}, \text{y\_}, \text{z\_}\}] = D[F[x, y, z], y]$$
$$\text{dFz}[\{\text{x\_}, \text{y\_}, \text{z\_}\}] = D[F[x, y, z], z]$$

$$2x - z$$

$$2y - z$$

$$-x - y + 3z^2$$

Eta hirugarrena ere betetzen da; $\frac{\partial F}{\partial z}\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0\right) \neq 0$ da:

$$\text{dFz}[P]$$

$$-2\sqrt{3}$$

Hortaz, $y^2+x^2+z^3-xz-yz-6=0$ ekuazioak era inplizituan $z=f(x,y)$ funtzio bat definitzen du $P(\sqrt{3},\sqrt{3},0)$ puntuaren ingurune batean.

b) atala. Honako hau da $z=f(x,y)$ funtzioarekiko $P(x_0,y_0,z_0)$ puntuko plano ukitzailearen ekuazioa:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Plano ukitzailea kalkulatzeko behar diren deribatu partzial guztiak a) atalean kalkulatu ditugu. Beraz, plano ukitzailea honako hau da:

Pukitzaile[x_, y_, z_, {x0_, y0_, z0_}] =

dFx[P](x − x0) + dFy[P](y − y0) + dFz[P](z − z0) == 0//Simplify

$\sqrt{3}(x+y) == 6+\sqrt{3}z$

Gradientea kalkulatzeko, $\partial_x z(x,y)$ eta $\partial_y z(x,y)$ kalkulatuko ditugu. Horretarako, $G(x,y)=F(x,y,z(x,y))$ funtzioa definituko dugu. $\partial_x G(x,y)=0$ ekuaziotik $\partial_x z(x,y)$ askatuko dugu, eta $\partial_y G(x,y)=0$ ekuaziotik $\partial_y z(x,y)$:

G[x_, y_]:=F[x, y, z[x, y]]

$\partial_x G[x,y] == 0$

$2x-z[x,y]-xz^{(1,0)}[x,y]-yz^{(1,0)}[x,y]+3z[x,y]^2z^{(1,0)}[x,y]==0$

ekx = Solve $[\partial_x G[x,y]==0, z^{(1,0)}[x,y]]$

$\left\{\left\{z^{(1,0)}[x,y]\to\frac{2x-z[x,y]}{x+y-3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

dzx[{x_, y_, z_}] = ekx[[1, 1, 2]]/.z[x, y] → z

$\frac{2x-z}{x+y-3z^2}$

eky = Solve $[\partial_y G[x,y]==0, z^{(0,1)}[x,y]]$

$\left\{\left\{z^{(0,1)}[x,y]\to\frac{2y-z[x,y]}{x+y-3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

dzy[{x_, y_, z_}] = eky[[1, 1, 2]]/.z[x, y] → z

$\frac{2y-z}{x+y-3z^2}$

Gradientea definituko dugu, eta P puntuan balioztatuko dugu:

∇z[{x_, y_, z_}] = {dzx[{x, y, z}], dzy[{x, y, z}]}

$\left\{\frac{2x-z}{x+y-3z^2}, \frac{2y-z}{x+y-3z^2}\right\}$

$\nabla z[P]$

$\{1, 1\}$

c) atala. dz eta d^2z diferentzialak kalkulatuko ditugu.

dz kalkulatuko dugu, P puntuan balioztatuko dugu, eta $dx = 0,1$ eta $dy = 0,1$ ordezkatuko ditugu:

dz[{x_, y_, z_}, dx_, dy_] = dzx[{x, y, z}] * dx + dzy[{x, y, z}] * dy;

{dx, dy} = {0.1, 0.1};

dzP = dz[P, dx, dy]

0.2

d^2z kalkulatzeko $\partial_{xx}z(x,y)$, $\partial_{xy}z(x,y)$ eta $\partial_{yy}z(x,y)$ behar ditugu. $\partial_{xx}z(x,y)$ askatuko dugu $\partial_{xx}G(x,y) = 0$ ekuaziotik:

$\partial_{x,x}G[x, y] == 0$//Simplify

$2 + 6z[x,y]z^{(1,0)}[x,y]^2 == 2z^{(1,0)}[x,y] + \left(x + y - 3z[x,y]^2\right) z^{(2,0)}[x,y]$

ekxx = Solve $\left[\partial_{x,x}G[x, y] == 0, z^{(2,0)}[x, y]\right]$ //Simplify

$\left\{\left\{z^{(2,0)}[x,y] \to \frac{2-2z^{(1,0)}[x,y]+6z[x,y]z^{(1,0)}[x,y]^2}{x+y-3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

dzxx[{x_, y_, z_}] =

ekxx[[1, 1, 2]]/. $\{z[x, y] \to z, z^{(1,0)}[x, y] \to$ dzx[{x, y, z}],

$z^{(0,1)}[x, y] \to$ dzy[{x, y, z}]} //Simplify

$\frac{2\left(y^2+9z^4+x^2(-1+12z)+x\left(z-12z^2\right)+y\left(z-6z^2\right)\right)}{\left(x+y-3z^2\right)^3}$

$\partial_{xy} z(x,y)$ askatuko dugu $\partial_{xy} G(x,y) = 0$ ekuaziotik:

$\partial_{x,y} G[x,y] == 0//\text{Simplify}$

$z^{(0,1)}[x,y]\left(-1+6z[x,y]z^{(1,0)}[x,y]\right) == z^{(1,0)}[x,y] + \left(x+y-3z[x,y]^2\right) z^{(1,1)}[x,y]$

$\text{ekxy} = \text{Solve}\left[\partial_{x,y} G[x,y] == 0, z^{(1,1)}[x,y]\right] //\text{Simplify}$

$\left\{\left\{z^{(1,1)}[x,y] \to \frac{-z^{(1,0)}[x,y]+z^{(0,1)}[x,y]\left(-1+6z[x,y]z^{(1,0)}[x,y]\right)}{x+y-3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\text{dzxy}[\{\text{x\_},\text{y\_},\text{z\_}\}] =$

$\text{ekxy}[[1,1,2]]/.\left\{z[x,y] \to z, z^{(1,0)}[x,y] \to \text{dzx}[\{x,y,z\}],\right.$

$\left. z^{(0,1)}[x,y] \to \text{dzy}[\{x,y,z\}]\right\} //\text{Simplify}$

$-\frac{2\left(x^2+y^2+xy(2-12z)+xz(-1+3z)+yz(-1+3z)\right)}{\left(x+y-3z^2\right)^3}$

Eta $\partial_{yy} z(x,y)$ askatuko dugu $\partial_{yy} G(x,y) = 0$ ekuaziotik:

$\partial_{y,y} G[x,y] == 0//\text{Simplify}$

$2+6z[x,y]z^{(0,1)}[x,y]^2 == 2z^{(0,1)}[x,y] + \left(x+y-3z[x,y]^2\right) z^{(0,2)}[x,y]$

$\text{ekyy} = \text{Solve}\left[\partial_{y,y} G[x,y] == 0, z^{(0,2)}[x,y]\right] //\text{Simplify}$

$\left\{\left\{z^{(0,2)}[x,y] \to \frac{2-2z^{(0,1)}[x,y]+6z[x,y]z^{(0,1)}[x,y]^2}{x+y-3z[x,y]^2}\right\}\right\}$

$\text{dzyy}[\{\text{x\_},\text{y\_},\text{z\_}\}] =$

$\text{ekyy}[[1,1,2]]/.\left\{z[x,y] \to z, z^{(1,0)}[x,y] \to \text{dzx}[\{x,y,z\}],\right.$

$\left. z^{(0,1)}[x,y] \to \text{dzy}[\{x,y,z\}]\right\} //\text{Simplify}$

$\frac{2\left(x^2+9z^4+y^2(-1+12z)+y\left(z-12z^2\right)+x\left(z-6z^2\right)\right)}{\left(x+y-3z^2\right)^3}$

$d^2 z$ kalkulatuko dugu:

$\text{Clear}[\text{dx},\text{dy}]$

```
d2z[{x_, y_, z_}, dx_, dy_]:=
dzxx[{x, y, z}] * dx^2 + dzyy[{x, y, z}] * dy^2 + 2 * dzxy[{x, y, z}] * dx * dy
```

Eta P puntuan balioztatuko dugu:

```
P = {x0, y0, z0} = {√3, √3, 0};
{dx, dy} = {0.1, 0.1};

d2z[P, dx, dy]

−0.011547
```

11. kapitulua

Optimizazioa

Optimizazio kontzeptuak prozesuak edo emaitzak hobetzea esan nahi du. Hau da, problema bat ebazteko modurik onena aurkitzea edo problema baten emaitzarik onena aurkitzea. Hainbat alorretan aurki daiteke optimizazio-problema bat ebazteko beharrizana; besteak beste: industri-diseinuan, ekonomian, arkitekturan, eta abarretan.

Matematiketan, optimizazio-problema bat funtzio baten maximoa edo minimoa aurkitzean datza. Maximizatu edo minimizatu nahi den funtzioari *helburu-funtzio* deritzo. Kapitulu honetan, aldagai anitzeko funtzioen maximoak eta minimoak nola aurkitzen diren azalduko dugu. Gainera, ohikoa izaten da, helburu-funtzioaren maximoa edo minimoa aurkitu nahi izatea, aldagaiak baldintza batzuen menpe egonik. Hau da, problema askoren xedea da helburu-funtzioaren optimizazioa, aldagaiek zenbait murrizketa betetzen dituztela ziurtatuz. Horrela, optimizazio-prozesuak murrizketa horiek betetzen dituzten helburu-funtzioaren baliorik onenak emango ditu emaitza gisa.

11.1 Aldagai erreal anitzeko funtzio errealen Taylorren polinomioa

Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala, (x_0, y_0) puntuaren ingurune batean n ordenarainoko deribatu partzialak jarraituak dituena. Honako hau da $f(x, y)$ funtzioaren (x_0, y_0) puntuko Taylorren n mailako polinomioa:

$$P_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + ... + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!}.$$

11.2 Mutur erlatiboak

Mutur erlatiboak. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala.

- $P(x_0, y_0)$ puntua $f(x, y)$ funtzioaren minimo absolutua da, $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, betetzen bada $\forall (x, y) \in D$.
- $P(x_0, y_0)$ puntua $f(x, y)$ funtzioaren maximo absolutua da, $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, betetzen bada $\forall (x, y) \in D$.

- $P(x_0, y_0)$ puntua $f(x, y)$ funtzioaren minimo erlatiboa da, $\exists B \subset D$ multzo irekia non $f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \forall (x, y) \in B$.

- $P(x_0, y_0)$ puntua $f(x, y)$ funtzioaren maximo erlatiboa da, $\exists B \subset D$ multzo irekia non $f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \forall (x, y) \in B$.

Teorema. $P(x_0, y_0)$ puntua $f(x, y)$ funtzioaren maximo edo minimo erlatiboa bada, orduan honako aukeretako bat agertuko da: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ edo deribatu partzialetako bat edo biak ez dira existitzen puntu horretan ($f_x(x_0, y_0)$ edo f_y (x_0, y_0) ez dira existitzen).

$f(x, y)$ funtzioak $P(x_0, y_0)$ puntuan deribatu partzialak onartzen dituenean, $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ beteko da. Gainera, $f(x, y)$ funtzioa $P(x_0, y_0)$ puntuan deribagarria baldin bada, $df(x_0, y_0) = 0$ beteko da.

Definizioa. $f(x, y)$ funtzioa emanik $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ betetzen duten puntuei *puntu kritiko* deritze.

Bigarren deribatuen testa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala, D multzo irekia izanik, eta izan bedi (x_0, y_0) funtzioaren puntu kritikoa. Orduan honako kasu hauetako bat gertatuko da:

- $d^2f(x_0, y_0) > 0$ bada, (x_0, y_0) puntua $f(x, y)$ funtzioaren minimo erlatiboa izango da.

- $d^2f(x_0, y_0) < 0$ bada, (x_0, y_0) puntua $f(x, y)$ funtzioaren maximo erlatiboa izango da.

- $d^2f(x_0, y_0)$ funtzioak ikurra aldatzen badu, (x_0, y_0) puntua $f(x, y)$ funtzioaren zela-puntua izango da.

- $d^2f(x_0, y_0) \geq 0$ edo $d^2f(x_0, y_0) \leq 0$ bada, (x_0, y_0) puntua edozetarikoa izan daiteke.

$d^2f(x_0, y_0)$ bigarren diferentzialaren ikurra zehazteko, matrize hessiarraren determinantea, $|H_f(x_0, y_0)|$, erabiltzen da. Matrize hori bigarren deribatu partzialez eta deribatu gurutzatuez osatuta dago:

$$D = |H_f(x_0, y_0)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Orduan, honako sailkapen hau daukagu:

- $D < 0$ bada, $P(x_0, y_0)$ puntua zela-puntua da.

- $D > 0$ eta $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ betetzen badira, $P(x_0, y_0)$ puntua minimo erlatiboa da.

- $D > 0$ eta $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ betetzen badira, $P(x_0, y_0)$ puntua maximo erlatiboa da.

- $D = 0$ bada, ezin dezakegu esan ezer $P(x_0, y_0)$ puntuari buruz.

Mutur absolutuen kalkulua. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagai errealeko funtzio erreala, D multzo irekia izanik, eta izan bedi (x_0, y_0) funtzioaren puntu kritikoa. Mutur absolutuak kalkulatzeko, honako pauso hauek jarraitu behar dira:

- D eremuko mutur erlatiboak aurkitu.
- D eremuaren mulgaldeko mutur erlatiboak aurkitu.
- Aurkitu diren muturren $f(x, y)$ balioa kalkulatu.
- Aurreko pausoan aurkitutako baliorik handiena maximo absolutuari dagokio, eta txikiena minimo absolutuari.

11.3 Mugalde baldintzadun muturrak

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzioa, non bere n aldagaiak ez baitira independenteak. Hau da, demagun bere aldagaiak era honetan lotuta daudela:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Mugalde baldintzadun muturrak aurkitzea $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funtzioaren mutur erlatiboak aurkitzea da, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ $i = 1, 2, ..., m$ baldintzei lotuta.

Lagrangeren teorema. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzioa, $P(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ puntuan lehen ordenako deribatu partzial jarraituak dituena, P puntua $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funtzioaren mutur erlatibo bat izanik. Izan bitez $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ $i = 1, 2, ..., m$ aldagaiek betetzen dituzten baldintzak. Orduan, existitzen dira λ_1, λ_2, ..., λ_m konstante errealak, non honako era honetan definitutako $L\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ funtzioak:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... \\ + \lambda_m g_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

P puntu kritikoa baitu.

L funtzioari *Lagrangeren funtzio* deritzo, eta λ_i $i = 1, 2, ..., m$ balioei *Lagrangeren biderkatzaile*.

11.4 Adibideak

11.1 adibidea. Aztertu honako funtzio honen maximoak eta minimoak: $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Funtzioaren puntu kritikoek $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ baldintzak betetzen dituzte. Kasu honetan:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0,$$
$$f_y(x, y) = 6xy - 12 = 0.$$

Sistema hori ebatziz, $P_1(-2,-1)$, $P_2(-1,-2)$, $P_3(1,2)$ eta $P_4(2,1)$ puntu kritikoak lortzen dira. Matrize hessiarraren determinantea aztertuko dugu puntu horietako bakoitza sailkatzeko:

$$D = |H_f(x,y)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2).$$

Eta honako hau da puntu kritikoen sailkapena:

- P_1 puntua: $D > 0$ eta $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ betetzen denez, $P_1(-2,-1)$ maximo erlatiboa da.
- P_2 puntua: $D < 0$ betetzen denez, $P_2(-1,-2)$ zela-puntua da.
- P_3 puntua: $D < 0$ betetzen denez, $P_3(1,2)$ zela-puntua da.
- P_4 puntua: $D > 0$ eta $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ betetzen denez, $P_4(2,1)$ minimo erlatiboa da.

11.2 adibidea. Optimizatu honako funtzio hau, $u = f(x,y,z)$, non $g_1(x,y,z) = 0$ eta $g_2(x,y,z) = 0$ baitira.

Honako ekuazio-sistema honek:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = 0, \\ g_2(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

bi aldagai hirugarren aldagaiaren menpe idaztea ahalbidetzen du:

$$y = G_1(x),\ z = G_2(x).$$

Orduan, esku artean daukagun problemaren baliokidea da honako beste hau:

Optimizatu honako funtzio hau, $u = F(x)$, non $f(x) = f(x, y(x), z(x)) = f(x, G_1(x), G_2(x))$ baita.

Mutur-puntua izateko, beharrezko baldintza hau bete behar da:

$$\frac{du}{dx} = F'(x) = 0.$$

$F'(x) = f_x + f_y \frac{dy}{dx} + f_z \frac{dz}{dx}$. Ekuazio-sistema kontuan hartuz, honako berdintza hauek ere betetzen dira:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = 0, \\ g_1(x,y,z) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{1x} + g_{1y}\frac{dy}{dx} + g_{1z}\frac{dz}{dx} = 0, \\ g_{2x} + g_{2y}\frac{dy}{dx} + g_{2z}\frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

Hiru ekuazio horiek ekuazio-sistema lineala osatzen dute, ezezagunak $\frac{dy}{dx}$ eta $\frac{dz}{dx}$ izanik:

$$\begin{cases} F'(x) = f_x + f_y\frac{dy}{dx} + f_z\frac{dz}{dx} = 0, \\ g_{1x} + g_{1y}\frac{dy}{dx} + g_{1z}\frac{dz}{dx} = 0, \\ g_{2x} + g_{2y}\frac{dy}{dx} + g_{2z}\frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

Sistema hori bateragarri determinatua izango da matrize zabalduaren heina 2 bada. Hortaz, hurrengo determinantea nulua izan beharko da:

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \end{vmatrix}.$$

Horrek esan nahi du matrize horretako errenkaden (eta zutabeen) artean dependentzia lineala dagoela. Izan bedi honako hau errenkaden artean existitzen den dependentzia lineala:

$$\begin{cases} f_x + \lambda_1 g_{1x} + \lambda_2 g_{2x} = 0, \\ f_y + \lambda_1 g_{1y} + \lambda_2 g_{2y} = 0, \\ f_z + \lambda_1 g_{1z} + \lambda_2 g_{2z} = 0. \end{cases}$$

Eta goiko ekuazio horiek $w = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ funtzioak mutur erlatibo bat izan dezan bete beharreko baldintzak dira. Izan bedi a mutur erlatibo hori.

Mutur erlatibo hori nolakoa den zehazteko, bigarren deribatuaren ikurra aztertu behar da:

$$d^2F(a) = d^2w(a).$$

$u = F(x) = w(x, y(x), z(x))$ funtzioaren deribatua kalkulatzeko, katearen erregela aplikatuko dugu:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= F'(x) = w_x + w_y\frac{dy}{dx} + w_z\frac{dz}{dx}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= F''(x) = w_{xx} + w_{xy}\frac{dy}{dx} + w_{xz}\frac{dz}{dx} + w_y\frac{d^2y}{dx^2} + w_z\frac{d^2z}{dx^2}, \\ &\quad + \left(w_{yx} + w_{yy}\frac{dy}{dx} + w_{yz}\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + \left(w_{zx} + w_{zy}\frac{dy}{dx} + w_{zz}\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dx}. \end{aligned}$$

Eta honako hau ondoriozta daiteke:

$$d^2u = d^2F = d^2w + w_y d^2y + w_z d^2z.$$

Eta puntu kritiko batean $w_y = w_z = 0$ betetzen dela kontuan hartuz, honako hau lortzen da:

$$d^2F(a) = d^2w(a), \quad \text{eta } dg_1 = 0,\ dg_2 = 0.$$

11.5 Ordenagailuko praktikak

11.1 ariketa. Kalkulatu eta sailkatu $z(x, y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$ funtzioaren mutur erlatiboak.

Funtzioa definituko dugu, eta haren gradientea kalkulatuko:

$z[\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}] = 14 * x^2 - 2 * x^3 + 2 * y^2 + 4 * x * y$

$14x^2 - 2x^3 + 4xy + 2y^2$

$\mathbf{grad} = \mathbf{Grad}[z[x, y], \{x, y\}]$

$\{28x - 6x^2 + 4y, 4x + 4y\}$

Gradientea zero egiten duten puntuak dira puntu kritikoak:

$\mathbf{pc} = \mathbf{Solve}[\mathbf{grad} == \{0, 0\}, \{x, y\}, \mathbf{Reals}]$

$\{\{x \to 0, y \to 0\}, \{x \to 4, y \to -4\}\}$

Puntu kritiko bi lortzen dira: $P_1(0,0)$ eta $P_2(4,-4)$.
Hessiarra kalkulatuko dugu, eta bi puntuetan balioztatuko:

$\mathbf{hessiarmat} = \mathbf{Grad}[\mathbf{grad}, \{x, y\}]$

$\{\{28 - 12x, 4\}, \{4, 4\}\}$

hessiarmat//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 28 - 12x & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

hessiardet = Det[hessiarmat]

$96 - 48x$

hessiardet/.pc

$\{96, -96\}$

$P_2(4,-4)$ zela-puntua da, hessiarra negatiboa baita puntu horretan.
$P_1(0,0)$ puntuan hessiarra positiboa da. z_{xx} kalkulatuko dugu puntua sailkatu ahal izateko:

dzxx = $D[z[x, y], \{x, 2\}]$

$28 - 12x$

dzxx/.pc[[1]]

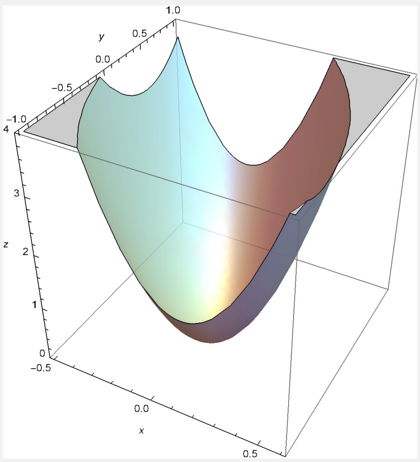
28

$P_1(0, 0)$ minimoa da. Puntu honen ingurune batean grafikoa eta maila-kurbak marraztuko ditugu:

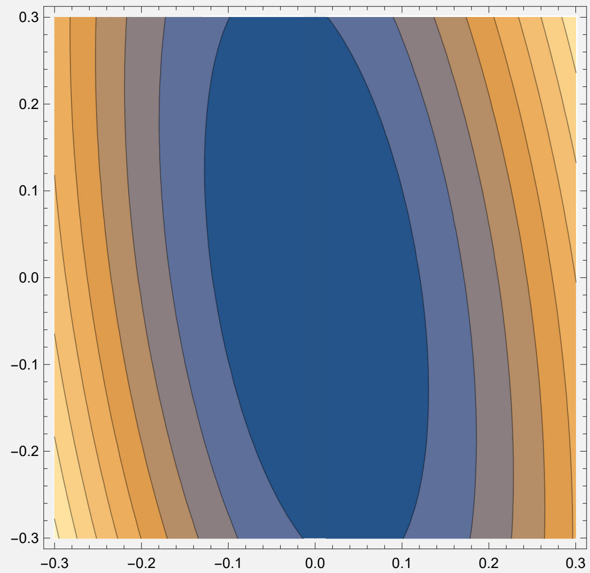
g1 = Plot3D[$z[x, y]$, $\{x, -0.5, 0.6\}$, $\{y, -1, 1\}$, Mesh → False,

PlotStyle → Directive[LightGreen, Specularity[White, 20], Opacity[0.8]],

BoxRatios → $\{1, 1, 1\}$, PlotRange → $\{0, 4\}$, AxesLabel → $\{x, y, z\}$]



g2 = ContourPlot[$z[x, y]$, $\{x, -0.3, 0.3\}$, $\{y, -0.3, 0.3\}$]



Grafikoak begiratuta ere, $P_1(0,0)$ minimoa dela ondorioztatzen da.

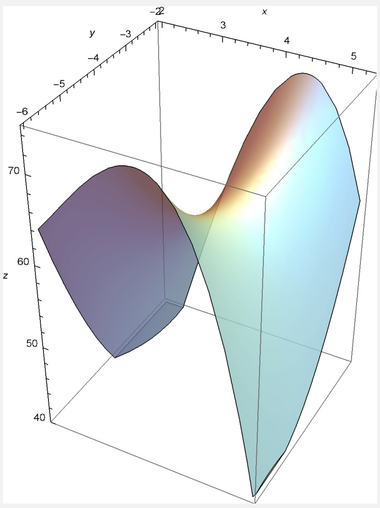
$P_2(4,-4)$ puntuarekin berdina egingo dugu:

g3 = Plot3D[$z[x,y]$, {x, 2, 5.3}, {y, −6, −2}, BoxRatios → {1, 1, 1.5},

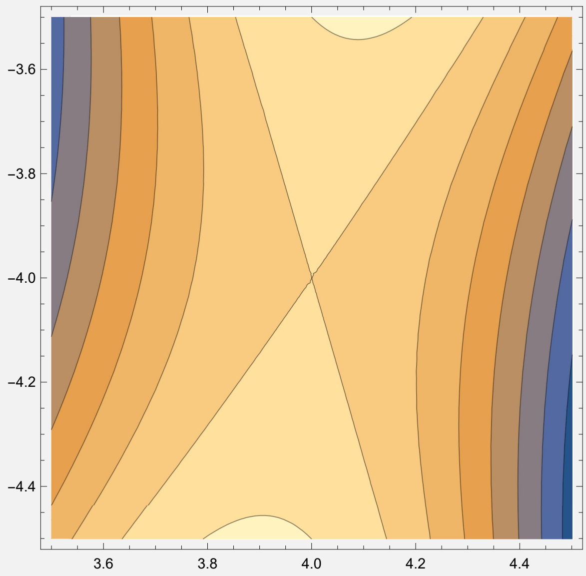
Mesh → False,

PlotStyle → Directive[LightGreen, Specularity[White, 20], Opacity[0.8]],

PlotRange → {40, 75}, AxesLabel → {x, y, z}]



g4 = ContourPlot[$z[x,y]$, {x, 3.5, 4.5}, {y, −4.5, −3.5}]



Eta azken grafikoek ere agerian uzten dute bagenekiena, $P_2(4,-4)$ zela-puntua dela, alegia.

11.2 ariketa. Kalkulatu eta sailkatu $f(x,y) = x^3+3xy^2-15x-12y$ funtzioaren mutur erlatiboak.

Funtzioa, lehen ordenako deribatu partzialak eta gradientea definituko ditugu:

$\boldsymbol{f[\mathrm{x\_},\mathrm{y\_}] = x^3 + 3 * x * y^2 - 15 * x - 12 * y}$

$-15x + x^3 - 12y + 3xy^2$

$\mathbf{dfx[x\_,y\_]} = \boldsymbol{\partial_x f[x,y]}$

$-15 + 3x^2 + 3y^2$

$\mathbf{dfy[x\_,y\_]} = \boldsymbol{\partial_y f[x,y]}$

$-12 + 6xy$

$\mathbf{gradf[x\_,y\_]} = \boldsymbol{\{\mathrm{dfx}[x,y], \mathrm{dfy}[x,y]\}}$

$\{-15 + 3x^2 + 3y^2, -12 + 6xy\}$

Gradientea zein puntutan egiten den zero kalkulatuko dugu:

s = Solve[gradf[x, y]=={0, 0}, {x, y}, Reals]

$\{\{x \to -2, y \to -1\}, \{x \to -1, y \to -2\}, \{x \to 1, y \to 2\}, \{x \to 2, y \to 1\}\}$

Gradienteak zero balio du honako lau puntu hauetan: $P_1(-2,-1)$, $P_2(-1,-2)$, $P_3(1,2)$, $P_4(2,1)$. Horiek dira, hain zuzen, funtzioaren puntu kritikoak.

Lau puntu horietan funtzioaren balioa kalkulatuko dugu:

np = 4;

pc[n_]:={x, y}/.s[[n]];

MatrixForm[Table[{n, pc[n], f[pc[n][[1]], pc[n][[2]]]}, {n, 1, np}],

TableHeadings → {None, {"n", "pc[n]", "f[pc[n]]"}}]

n	pc[n]	f[pc[n]]
1	$\{-2,-1\}$	28
2	$\{-1,-2\}$	26
3	$\{1,2\}$	-26
4	$\{2,1\}$	-28

Matrize eta determinante hessiarrak kalkulatuko ditugu:

hessiarraf[{x_, y_}] = Grad[gradf[x, y], {x, y}]

$\{\{6x, 6y\}, \{6y, 6x\}\}$

%//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

hessiardetf[{x_, y_}] = Det[hessiarraf[{x, y}]]

$36x^2 - 36y^2$

Bigarren deribatu partzialak kalkulatuko ditugu:

dfxx[{x_, y_}] = $\partial_{x,x}f[x,y]$;

dfxy[{x_, y_}] = $\partial_{x,y}f[x,y]$;

dfyy[{x_, y_}] = $\partial_{y,y}f[x,y]$;

Puntu kritikoak sailkatuko ditugu, hessiarraren balioa eta bigarren deribatu partzialena kontuan hartuz:

Do[If[hessiardetf[pc[n]] < 0, Print["pc[n]=", pc[n], " zela-puntua da."],

If[hessiardetf[pc[n]]==0, Print["pc[n]=", pc[n], " puntuari buruz zalantza dago."],

If[dfxx[pc[n]] > 0, Print["pc[n]=", pc[n], " minimoa da."], Print["pc[n]=",

pc[n], " maximoa da."]]]], {n, 1, np}]

pc[n]=$\{-2,-1\}$ maximoa da.
pc[n]=$\{-1,-2\}$ zela-puntua da.
pc[n]=$\{1,2\}$ zela-puntua da.
pc[n]=$\{2,1\}$ minimoa da.

MatrixForm [Table[{n, pc[n], f[pc[n][[1]], pc[n][[2]]],

hessiardetf[pc[n]], dfxx[pc[n]]}, {n, 1, np}],

TableHeadings → {None, {"n", "PC", "f(PC)", "Hessiarra(PC)", "$\partial_{x,x}$ f(PC)"}}]

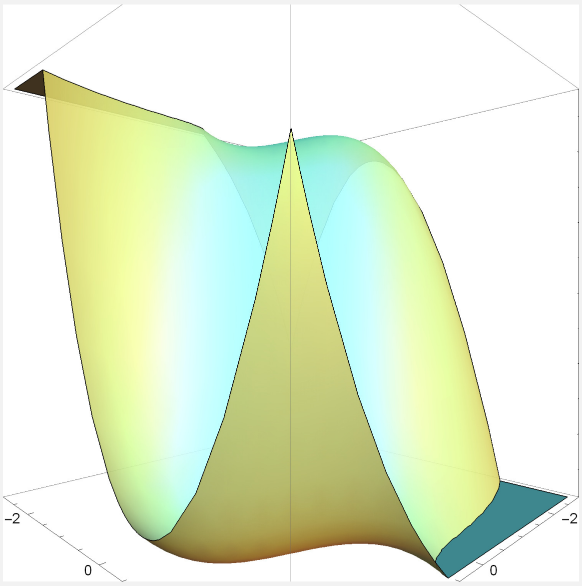
n	PC	f(PC)]	Hessiarra(PC)	$\partial_{x,x}$ f(PC)}
1	$\{-2,-1\}$	28	108	-12
2	$\{-1,-2\}$	26	-108	-6
3	$\{1,2\}$	-26	-108	6
4	$\{2,1\}$	-28	108	12

Funtzioaren adierazpen grafikoa honako hau da:

g1 = Plot3D[$f[x,y]$, {x, −2.8, 2.8}, {y, −2.8, 2.8}, Mesh → False,

PlotStyle → Directive[LightGreen, Specularity[White, 20], Opacity[0.9]],

PlotRange → {−29, 29}, BoxRatios → {1, 1, 1}, ViewPoint → {1, 1, 0}]



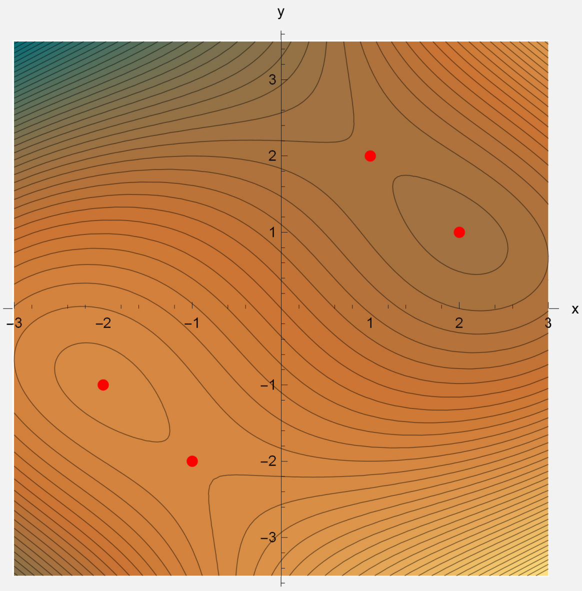
Puntu kritikoak eta maila-kurbak irudikatuko ditugu:

puntuak = ListPlot[Table[pc[n], {n, 1, 4}], PlotStyle → {Red, PointSize[Large]}];

mailakurbak = ContourPlot[f[x, y], {x, −3, 3}, {y, −3.5, 3.5}, Frame → False,

Axes->True, AxesLabel → {x, y}, Contours → 60];

g2 = Show[mailakurbak, puntuak]

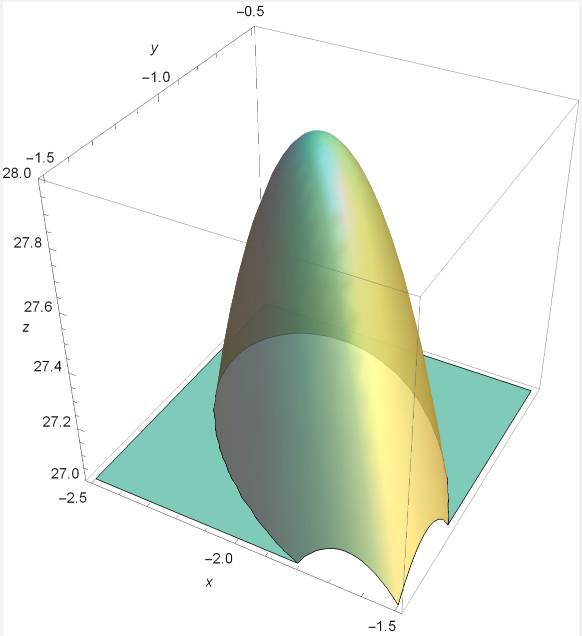


Eta puntu kritiko bakoitzaren inguruko azterketa egingo dugu. Funtzioa eta maila-kurbak irudikatuko ditugu $P_1(-2, -1)$ puntuaren inguruan:

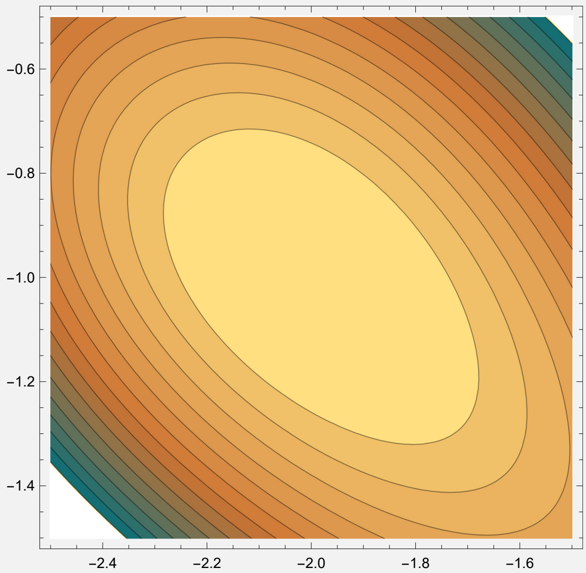
g3 = Plot3D[f[x, y], {x, −2.5, −1.5}, {y, −1.5, −0.5}, Mesh → False,

PlotStyle → Directive[LightGreen, Specularity[White, 20], Opacity[0.8]],

PlotRange → {27, 28}, BoxRatios → {1, 1, 1}, AxesLabel → {x, y, z}]



g4 = ContourPlot[f[x, y], {x, −2.5, −1.5}, {y, −1.5, −0.5}, Contours → 20]



Funtzioaren grafikoak eta maila-kurbek $P_1(-2, -1)$ maximo bat dela adierazten dute.

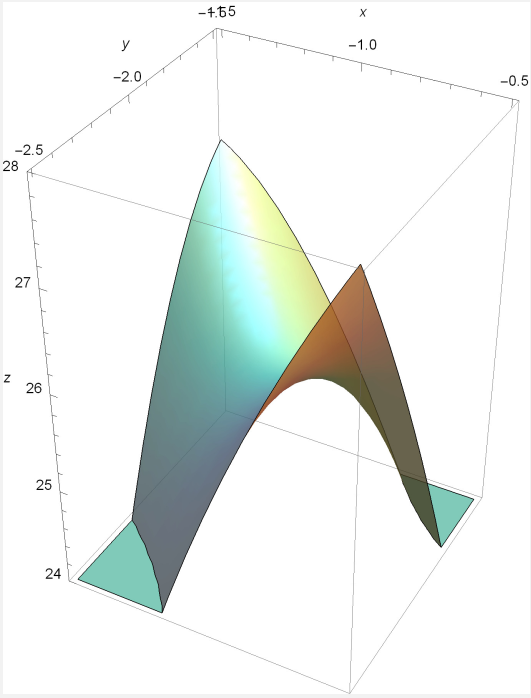
$P_2(-1, -2)$ puntuarekin berdin jokatuko dugu:

g5 = Plot3D[$f[x, y]$, {x, −1.5, −0.5}, {y, −2.5, −1.5},

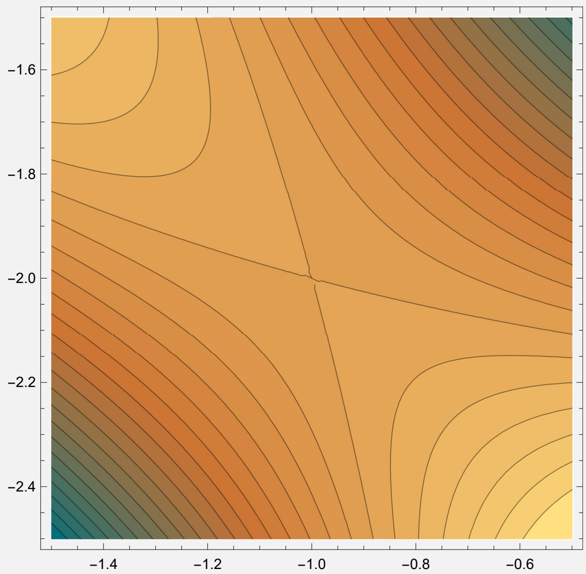
PlotRange → {24, 28}, BoxRatios → {1, 1, 1.5},

Mesh → False, PlotStyle → Directive[LightGreen, Specularity[White, 20],

Opacity[0.8]], PlotRange → {27, 28}, AxesLabel → {x, y, z}]



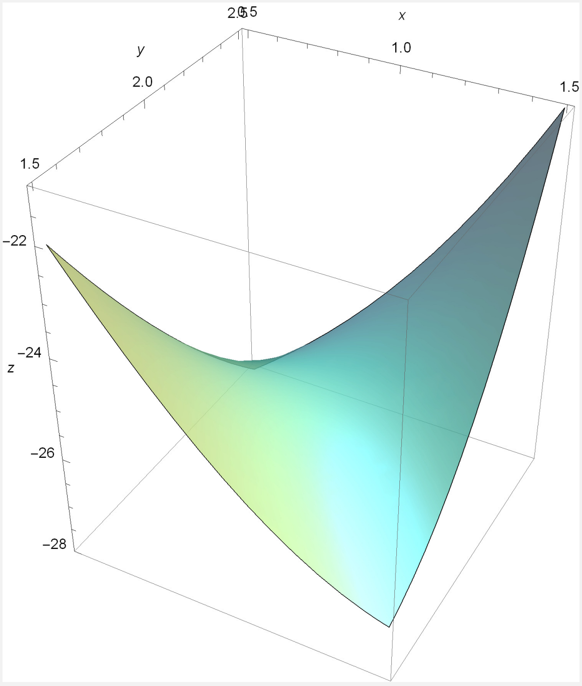
g6 = ContourPlot[$f[x, y]$, {x, −1.5, −0.5}, {y, −2.5, −1.5}, Contours → 25]



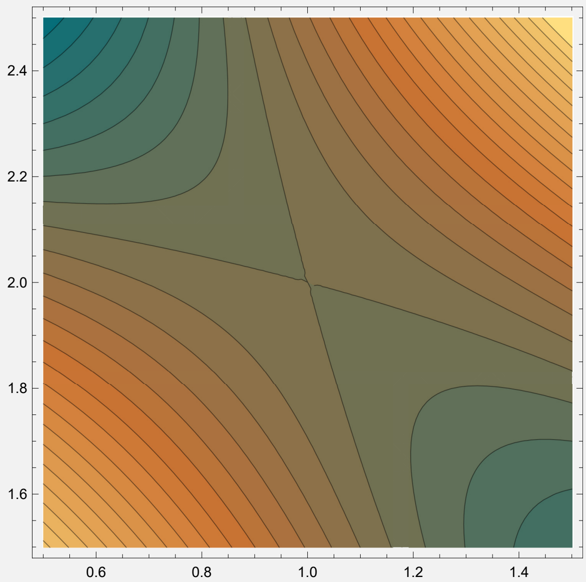
Funtzioaren grafikoak eta maila-kurbek $P_2(-1, -2)$ zela-puntua dela adierazten dute.

$P_3(1,2)$ puntua ere zela-puntua dela ikus daiteke honako grafiko hauetan:

g7 = Plot3D[f[x, y], {x, 0.5, 1.5}, {y, 1.5, 2.5}, PlotRange → {−28, −21}, BoxRatios → {1, 1, 1.2}, Mesh → False, PlotStyle → Directive[LightGreen, Specularity[White, 20], Opacity[0.8]], AxesLabel → {x, y, z}]



g8 = ContourPlot[f[x, y], {x, 0.5, 1.5}, {y, 1.5, 2.5}, Contours → 25]

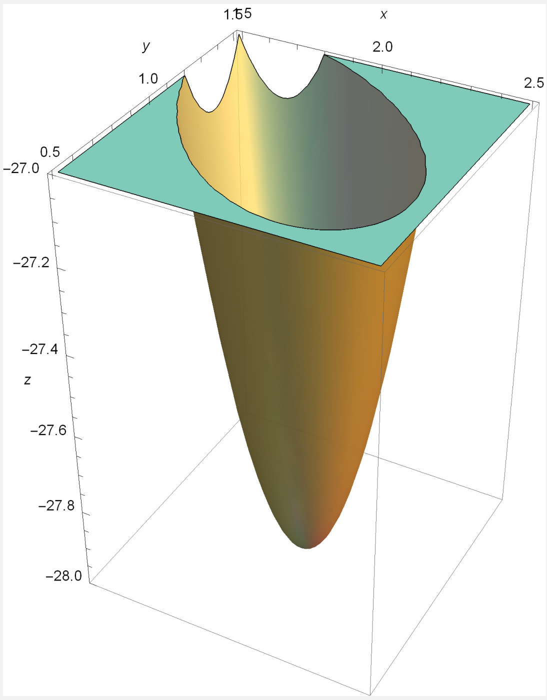


Aldiz, $P_4(2,1)$ puntuan minimo bat daukagu:

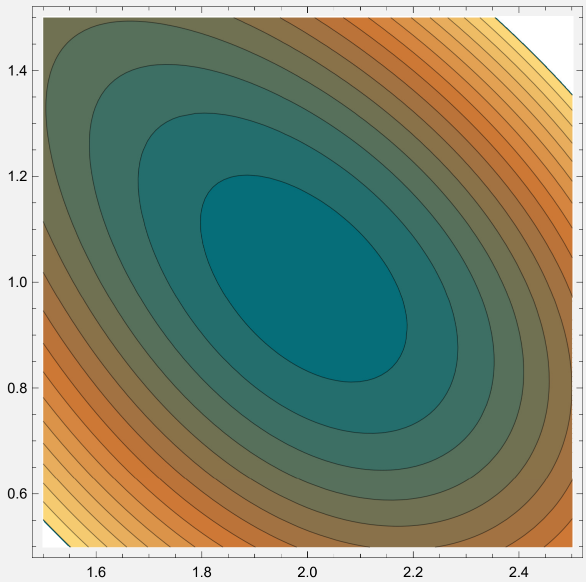
g9 = Plot3D[f[x, y], {x, 1.5, 2.5}, {y, 0.5, 1.5}, Mesh → False,

PlotStyle → Directive[LightGreen, Specularity[White, 20], Opacity[0.8]],

PlotRange → {−27, −28}, BoxRatios → {1, 1, 1.5}, AxesLabel → {x, y, z}]



g10 = ContourPlot[f[x, y], {x, 1.5, 2.5}, {y, 0.5, 1.5}, Contours → 20]



11.3 ariketa. $z(x, y) = x^2y$ funtzioa emanik, kalkulatu eta sailkatu haren mutur erlatiboak $x + 2y = 2$ baldintzari lotuta dagoenean. Erabili Lagrangeren biderkatzaileen metodoa.

$f(x,y)$ funtzioa, bete beharreko baldintzen funtzioa $g(x,y)$ eta Lagrangeren funtzioa definituko ditugu:

f[x_, y_] = x^2 * y

x^2y

g[x_, y_] = x + 2y − 2

$-2+x+2y$

lag[x_, y_] = f[x, y] + m * g[x, y]

$x^2y+m(-2+x+2y)$

Mutur erlatiboa izateko bete beharreko baldintzak definituko ditugu:

ek1 = ∂_xlag[x, y]==0

ek2 = ∂_ylag[x, y]==0

ek3 = g[x, y]==0

$m+2xy==0$

$2m+x^2==0$

$-2+x+2y==0$

Eta baldintza horiek batera betetzen dituen punturik dagoen ikusiko dugu:

s = Solve[{ek1, ek2, ek3}, {x, y, m}]

$\{\{x\to 0, y\to 1, m\to 0\}, \{x\to \frac{4}{3}, y\to \frac{1}{3}, m\to -\frac{8}{9}\}\}$

pc[n_]:={x, y, m}/.s[[n]]

MatrixForm[Table[{n, pc[n], f[pc[n][[1]], pc[n][[2]]]}, {n, 1, 2}],

TableHeadings → {None, {"n", "pc[n]", "f[pc[n]]"}}]

$$\begin{pmatrix} \text{n} & \text{pc[n]} & \text{f[pc[n]]} \\ 1 & \{0,1,0\} & 0 \\ 2 & \left\{\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{8}{9}\right\} & \frac{16}{27} \end{pmatrix}$$

Bi dira puntu kritikoak: $Q_1(0,1,0)$ eta $Q_2\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{8}{9}\right)$.

Bigarren diferentziala kalkulatuko dugu puntuak sailkatu ahal izateko:

d2lag[{x_, y_, m_}, dx_, dy_] =

$\partial_{x,x}$lag[x, y] ∗ dx^2 + $\partial_{y,y}$lag[x, y] ∗ dy^2 + $\partial_{x,y}$lag[x, y] ∗ dx ∗ dy

$2\text{dxdy}x + 2\text{dx}^2y$

dg = Dt[g[x, y]]

$\text{Dt}[x] + 2\text{Dt}[y]$

s1 = Solve[dg==0, Dt[y]]

$\left\{\left\{\text{Dt}[y] \to -\frac{\text{Dt}[x]}{2}\right\}\right\}$

dy = s1[[1, 1, 2]]/.Dt[x] → dx

$-\frac{\text{dx}}{2}$

$Q_1(0,1,0)$ puntua sailkatuko dugu:

n = 1;

pc[n]

$\{0,1,0\}$

d2[{x_, y_, m_}, dx_] = d2lag[{x, y, m}, dx, dy]//Simplify

$-\text{dx}^2(x-2y)$

d2[pc[n], dx]//Simplify

2dx^2

dxx = d2[pc[*n*], dx] /dx^2

2

If[dxx < 0, Print["pc[n]=", pc[*n*], " maximoa da."],

If[dxx > 0, Print["pc[n]=", pc[*n*], " minimoa da."],

Print["pc[n]=", pc[*n*], " puntuari buruz zalantza dago."]]]

pc[n]=$\{0, 1, 0\}$ minimoa da.

$Q_1(0, 1, 0)$ minimoa da.
$Q_2\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{9}\right)$ puntuarekin prozesua errepikatuko dugu:

***n* = 2;**

pc[*n*]

$\left\{\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{9}\right\}$

d2[{x_, y_, m_}, dx_] = d2lag[{*x*, *y*, *m*}, dx, dy]//Simplify

$-\text{dx}^2(x - 2y)$

d2[pc[*n*], dx]//Simplify

$-\frac{2\text{dx}^2}{3}$

dxx = d2[pc[*n*], dx] /dx^2

$-\frac{2}{3}$

If[dxx < 0, Print["pc[n]=", pc[*n*], " maximoa da."],

If[dxx > 0, Print["pc[n]=", pc[*n*], " minimoa da."],

Print["pc[n]=", pc[*n*], " puntuari buruz zalantza dago."]]]

pc[n]= $\left\{\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{9}\right\}$ maximoa da.

$Q_2\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{9}\right)$ maximoa da.

Bukatzeko, maila-kurben adierazpen grafikoa egingo dugu:

puntuak = ListPlot[Table[{pc[n][[1]], pc[n][[2]]}, {n, 1, 2}],

PlotStyle → {Red, PointSize[Large]}];

baldintza = ContourPlot[g[x, y] == 0, {x, −1, 2.5}, {y, −0.5, 1.5},

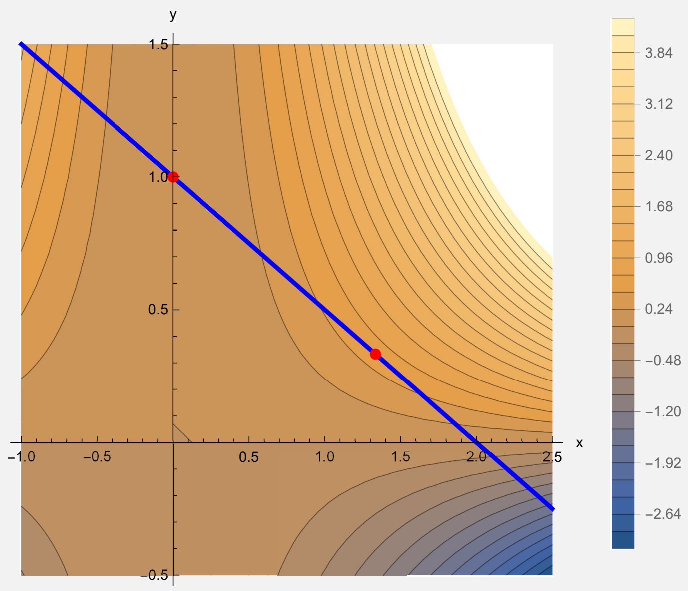
Mesh → False, ContourStyle → Directive[Blue, Thickness[0.008]]];

mailakurbak = ContourPlot[f[x, y], {x, −1, 2.5}, {y, −0.5, 1.5},

Frame → False, Axes->True, AxesLabel → {x, y}, Contours → 30,

PlotLegends → Automatic];

g1 = Show[mailakurbak, baldintza, puntuak]



Maila-kurbak aztertuta ere, $(x_1, y_1) = (0, 1)$ puntua minimoa dela ikus daiteke, bere inguruko puntuak maila altuagoko kurbetan baitaude. Aldiz, $(x_2, y_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ maximoa da, bere inguruko puntuak beheragoko maila-kurbetan daudelako.

11.4 ariketa. Kalkulatu $P(1, 2, 2)$ puntutik distantzia maximora eta minimora dauden $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ gainazal esferikoko puntuak. Oharra: kalkuluak errazteko bi punturen arteko distantziaren karratua erabil daiteke: $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$.

$f(x, y, z)$ funtzioa, bete beharreko baldintzen funtzioa $g(x, y, z)$ eta Lagrange-ren funtzioa definituko ditugu:

f[x_, y_, z_] = $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$

$(-1+x)^2 + (-2+y)^2 + (-2+z)^2$

$g[x\_, y\_, z\_] = x^2 + y^2 + z^2 - 36$

$-36 + x^2 + y^2 + z^2$

$\mathrm{lag}[x\_, y\_, z\_] = f[x, y, z] + m * g[x, y, z]$

$(-1 + x)^2 + (-2 + y)^2 + (-2 + z)^2 + m\left(-36 + x^2 + y^2 + z^2\right)$

Mutur erlatiboa izateko bete behar diren baldintzak definituko ditugu:

$\mathrm{ek1} = \partial_x \mathrm{lag}[x, y, z] == 0$

$\mathrm{ek2} = \partial_y \mathrm{lag}[x, y, z] == 0$

$\mathrm{ek3} = \partial_z \mathrm{lag}[x, y, z] == 0$

$\mathrm{ek4} = g[x, y, z] == 0$

$2(-1 + x) + 2mx == 0$

$2(-2 + y) + 2my == 0$

$2(-2 + z) + 2mz == 0$

$-36 + x^2 + y^2 + z^2 == 0$

Baldintza horiek betetzen dituzten puntuak kalkulatuko ditugu:

$s = \mathrm{Solve}[\{\mathrm{ek1}, \mathrm{ek2}, \mathrm{ek3}, \mathrm{ek4}\}, \{x, y, z, m\}]$

$\left\{\left\{x \to -2, y \to -4, z \to -4, m \to -\frac{3}{2}\right\}, \left\{x \to 2, y \to 4, z \to 4, m \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

$\mathrm{pc}[n\_] := \{x, y, z, m\} /. s[[n]]$

$\mathrm{MatrixForm}[\mathrm{Table}[\{n, \mathrm{pc}[n], f[\mathrm{pc}[n][[1]], \mathrm{pc}[n][[2]], \mathrm{pc}[n][[3]]]\}, \{n, 1, 2\}],$

$\mathrm{TableHeadings} \to \{\mathrm{None}, \{\text{“n”}, \text{“pc[n]”}, \text{“f[pc[n]]”}\}\}]$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{n} & \mathrm{pc[n]} & \mathrm{f[pc[n]]} \\ 1 & \left\{-2, -4, -4, -\frac{3}{2}\right\} & 81 \\ 2 & \left\{2, 4, 4, -\frac{1}{2}\right\} & 9 \end{pmatrix}$$

Bi dira puntu kritikoak: $P_1\left(-2,-4,-4,-\frac{3}{2}\right)$ eta $P_2\left(2,4,4,-\frac{1}{2}\right)$.

Sailkapenari ekingo diogu, eta, horretarako, Lagrangeren funtzioaren bigarren diferentziala kalkulatuko dugu:

d2lag[{x_, y_, z_, m_}, dx_, dy_, dz_] =

$\partial_{x,x}\text{lag}[x,y,z]*\text{dx}^2+\partial_{y,y}\text{lag}[x,y,z]*dy^2+\partial_{z,z}\text{lag}[x,y,z]*\text{dz}^2+$

$\partial_{x,y}\text{lag}[x,y,z]*\text{dx}*dy+\partial_{x,z}\text{lag}[x,y,z]*\text{dx}*\text{dz}+$

$\partial_{y,z}\text{lag}[x,y,z]*\text{dy}*\text{dz}$

$\text{dx}^2(2+2m)+\text{dy}^2(2+2m)+\text{dz}^2(2+2m)$

$P_1\left(-2,-4,-4,-\frac{3}{2}\right)$ puntua sailkatuko dugu:

$n=1$;

pc[n]

$\left\{-2,-4,-4,-\frac{3}{2}\right\}$

dg = Dt[$g[x,y,z]$]

$2x\text{Dt}[x]+2y\text{Dt}[y]+2z\text{Dt}[z]$

s1 = Solve[dg==0, Dt[z]]

$\left\{\left\{\text{Dt}[z]\to\frac{-x\text{Dt}[x]-y\text{Dt}[y]}{z}\right\}\right\}$

dz = s1[[1, 1, 2]]/.{Dt[x] → dx, Dt[y] → dy}

$\frac{-\text{dx}x-\text{dy}y}{z}$

d2[{x_, y_, z_, m_}, dx_, dy_] = d2lag[{x,y,z,m}, dx, dy, dz]//Simplify

$\frac{2(1+m)\left(2\text{dxdy}xy+\text{dx}^2\left(x^2+z^2\right)+\text{dy}^2\left(y^2+z^2\right)\right)}{z^2}$

d2[pc[n], dx, dy]//Simplify

$-\frac{5\mathrm{dx}^2}{4} - \mathrm{dxdy} - 2\mathrm{dy}^2$

dxx = d2[pc[*n*], dx, dy] /dx^2 /.dy → 0;

dyy = d2[pc[*n*], dx, dy] /dy^2 /.dx → 0;

dxy = (d2[pc[*n*], dx, dy] − dxx ∗ dx^2 − dyy ∗ dy^2)/ (2 ∗ dx ∗ dy)//Simplify;

hessiardet = dxx ∗ dyy − dxy ∗ dxy;

MatrixForm [Table[{*n*, pc[*n*], hessiardet, dxx}, {*n*, 1, 1}],

TableHeadings → {None, {"n", "PC", "Hessiarra(PC)", "$\partial_{x,x}$lag(PC)"}}]

$$\begin{pmatrix} \mathrm{n} & \mathrm{PC} & \mathrm{Hessiarra(PC)} & \partial_{x,x}\ \mathrm{lag(PC)}\} \\ 1 & \left\{-2,-4,-4,-\frac{3}{2}\right\} & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$P_1\left(-2,-4,-4,-\frac{3}{2}\right)$ puntua maximoa da.
Pauso berdinak jarraituko ditugu $P_2\left(2,4,4,-\frac{1}{2}\right)$ puntua sailkatzeko:

***n* = 2;**

pc[*n*]

$\left\{2,4,4,-\frac{1}{2}\right\}$

dg = Dt[*g*[*x*, *y*, *z*]]

$2x\mathrm{Dt}[x] + 2y\mathrm{Dt}[y] + 2z\mathrm{Dt}[z]$

s1 = Solve[dg==0, Dt[*z*]]

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[z] \to \frac{-x\mathrm{Dt}[x]-y\mathrm{Dt}[y]}{z}\right\}\right\}$

dz = s1[[1, 1, 2]]/.{Dt[*x*] → dx, Dt[*y*] → dy}

$\frac{-\mathrm{dx}x-\mathrm{dy}y}{z}$

d2[{x_, y_, z_, m_}, dx_, dy_] = d2lag[{*x*, *y*, *z*, *m*}, dx, dy, dz]//Simplify

$\frac{2(1+m)\left(2\mathrm{dxdy}xy+\mathrm{dx}^2\left(x^2+z^2\right)+\mathrm{dy}^2\left(y^2+z^2\right)\right)}{z^2}$

d2[pc[n], dx, dy]//Simplify

$\frac{5\mathrm{dx}^2}{4} + \mathrm{dxdy} + 2\mathrm{dy}^2$

dxx = d2[pc[n], dx, dy] /dx^2 /.dy → 0;

dyy = d2[pc[n], dx, dy] /dy^2 /.dx → 0;

dxy = (d2[pc[n], dx, dy] − dxx ∗ dx^2 − dyy ∗ dy^2)/ (2 ∗ dx ∗ dy)//Simplify;

hessiardet = dxx ∗ dyy − dxy ∗ dxy;

MatrixForm [Table[{n, pc[n], hessiardet, dxx}, {n, 2, 2}],

TableHeadings → {None, {"n", "PC", "Hessiarra(PC)", "$\partial_{x,x}$lag(PC)"}}]

$$\begin{pmatrix} \mathrm{n} & \mathrm{PC} & \mathrm{Hessiarra(PC)} & \partial_{x,x}\,\mathrm{lag(PC)}\} \\ 2 & \left\{2,4,4,-\frac{1}{2}\right\} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$P_2\left(2,4,4,-\frac{1}{2}\right)$ puntua minimo bat da.

11.5 ariketa. Lantegi bateko produkzioa honako funtzio honen bidez dago definituta: $f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$, x lana eta y erabilitako kapitala izanik. Bi aldagai horien arteko erlazioa honako hau izanik: $150x + 250y = 50000$. Zein izan behar dute aldagai bien balioek produkzioa maximoa izan dadin? Ebatzi problema Lagrangeren biderkatzaileak erabilita.

$f(x,y)$ funtzioa, bete beharreko baldintzen funtzioa $g(x,y)$ eta Lagrangeren funtzioa definituko ditugu:

f[x_, y_] = 100 ∗ $x^{3/4}$ ∗ $y^{1/4}$

$100x^{3/4}y^{1/4}$

g[x_, y_] = 150 ∗ x + 250 ∗ y − 50000

$-50000 + 150x + 250y$

lag[x_, y_] = f[x, y] + m ∗ g[x, y]

$100x^{3/4}y^{1/4} + m(-50000 + 150x + 250y)$

Mutur erlatiboa izateko baldintzak definituko ditugu:

$\mathbf{ek1} = \partial_x \mathbf{lag}[x, y] == \mathbf{0}$

$\mathbf{ek2} = \partial_y \mathbf{lag}[x, y] == \mathbf{0}$

$\mathbf{ek3} = g[x, y] == \mathbf{0}$

$150m + \frac{75y^{1/4}}{x^{1/4}} == 0$

$250m + \frac{25x^{3/4}}{y^{3/4}} == 0$

$-50000 + 150x + 250y == 0$

Eta baldintza horiek betetzen dituen puntua kalkulatuko dugu:

$s = \mathbf{Solve}[\{\mathbf{ek1}, \mathbf{ek2}, \mathbf{ek3}\}, \{x, y, m\}]$

$\left\{\left\{x \to 250, y \to 50, m \to -\frac{1}{2\ 5^{1/4}}\right\}\right\}$

$\mathbf{pc} = \{x, y, m\}/.s[[1]]$

$\left\{250, 50, -\frac{1}{2\ 5^{1/4}}\right\}$

$\left(250, 50, -\frac{1}{2\ 5^{1/4}}\right)$ puntu kritikoa da.
Puntua sailkatuko dugu:

$\mathbf{d2lag}[\{\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{m\_}\}, \mathrm{dx\_}, \mathrm{dy\_}] =$

$\partial_{x,x}\mathbf{lag}[x, y] * \mathbf{dx}^2 + \partial_{y,y}\mathbf{lag}[x, y] * dy^2 + \partial_{x,y}\mathbf{lag}[x, y] * \mathbf{dx} * dy$

$-\frac{27\mathrm{dx}^2 x^{3/4}}{4y^{7/4}} - \frac{45\mathrm{dx}^2}{4x^{1/4}y^{3/4}} - \frac{75\mathrm{dx}^2 y^{1/4}}{4x^{5/4}}$

$\mathbf{dg} = \mathbf{Dt}[g[x, y]]$

$150\mathrm{Dt}[x] + 250\mathrm{Dt}[y]$

$\mathbf{s1} = \mathbf{Solve}[\mathbf{dg} == \mathbf{0}, \mathbf{Dt}[y]]$

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[y] \to -\frac{3\mathrm{Dt}[x]}{5}\right\}\right\}$

$\mathbf{dy} = \mathbf{s1}[[1, 1, 2]]/.\mathbf{Dt}[x] \to \mathbf{dx}$

$-\frac{3\mathrm{dx}}{5}$

d2lag[pc, dx, dy]

$-\frac{39\mathrm{dx}^2}{40\ 5^{1/4}}$

If [d2lag[pc, dx, dy] /dx² < 0, Print[pc, " maximoa da."],

If [d2lag[pc, dx, dy] /dx² < 0, Print[pc, " minimoa da."],

Print["ez dakigu zer den ", pc, "."]]]

$\left\{250, 50, -\frac{1}{2\ 5^{1/4}}\right\}$ maximoa da.

$\left(250, 50, -\frac{1}{2\ 5^{1/4}}\right)$ puntua maximoa da.

11.6 ariketa. Kalkulatu bolumen maximoko paralelepipedo errektangeluarraren dimentsioak, haren ertzen batura $12a$ dela jakinik.

Paralelepideoaren bolumena $f(x, y, z) = xyz$ funtzioaren bidez kalkulatzen da. Bete beharreko baldintza da ertzen batura $12a$ izatea; hau da, $4x + 4y + 4z = 12a$. Edo gauza bera dena, $x + y + z - 3a = 0$ izatea. Beraz, bete beharreko baldintzari dagokion funtzioa $g(x, y, z) = x + y + z - 3a$ da. Bolumena ematen digun funtzioa, baldintzari dagokiona, eta Lagrangeren funtzioa definituko ditugu:

f[x_, y_, z_] = x ∗ y ∗ z;

g[x_, y_, z_] = x + y + z − 3 ∗ a;

lag[x_, y_, z_] = f[x, y, z] + m ∗ g[x, y, z]

$xyz + m(-3a + x + y + z)$

Mutur erlatiboa izateko baldintzak definituko ditugu:

ek1 = ∂ₓlag[x, y, z]==0

ek2 = ∂ᵧlag[x, y, z]==0

ek3 = ∂_z lag[x, y, z]==0

ek4 = g[x, y, z]==0

$m + yz == 0$

$m + xz == 0$

$m + xy == 0$

$-3a + x + y + z == 0$

Eta baldintza horiek betetzen dituzten puntuak kalkulatuko ditugu:

$\boldsymbol{s = \mathrm{Solve}[\{\mathrm{ek1}, \mathrm{ek2}, \mathrm{ek3}, \mathrm{ek4}\}, \{x, y, z, m\}]}$

$\{\{x \to 0, y \to 0, z \to 3a, m \to 0\}, \{x \to 0, y \to 3a, z \to 0, m \to 0\},$
$\{x \to a, y \to a, z \to a, m \to -a^2\}, \{x \to 3a, y \to 0, z \to 0, m \to 0\}\}$

$\boldsymbol{\mathrm{pc}[\mathrm{n\_}]\text{:=}\{x, y, z, m\}/.s[[n]]}$

$\boldsymbol{\mathrm{MatrixForm}[\mathrm{Table}[\{n, \mathrm{pc}[n], f[\mathrm{pc}[n][[1]], \mathrm{pc}[n][[2]], \mathrm{pc}[n][[3]]]\}, \{n, 1, 4\}],}$
$\boldsymbol{\mathrm{TableHeadings} \to \{\mathrm{None}, \{\text{“n”}, \text{“pc[n]”}, \text{“f[pc[n]]”}\}\}]}$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{n} & \mathrm{pc[n]} & \mathrm{f[pc[n]]} \\ 1 & \{0, 0, 3a, 0\} & 0 \\ 2 & \{0, 3a, 0, 0\} & 0 \\ 3 & \{a, a, a, -a^2\} & a^3 \\ 4 & \{3a, 0, 0, 0\} & 0 \end{pmatrix}$$

Lortu ditugun puntuetatik interesatzen zaigun bakarra da $(a, a, a, -a^2)$, beste puntuei dagokien bolumena zero baita. Puntua sailkatuko dugu:

$\boldsymbol{\mathrm{d2lag}[\{\mathrm{x\_}, \mathrm{y\_}, \mathrm{z\_}, \mathrm{m\_}\}, \mathrm{dx\_}, \mathrm{dy\_}, \mathrm{dz\_}] =}$
$\boldsymbol{\partial_{x,x}\mathrm{lag}[x, y, z] * \mathrm{dx}^2 + \partial_{y,y}\mathrm{lag}[x, y, z] * dy^2 + \partial_{z,z}\mathrm{lag}[x, y, z] * \mathrm{dz}^2 +}$
$\boldsymbol{\partial_{x,y}\mathrm{lag}[x, y, z] * \mathrm{dx} * dy + \partial_{x,z}\mathrm{lag}[x, y, z] * \mathrm{dx} * \mathrm{dz} + \partial_{y,z}\mathrm{lag}[x, y, z] * \mathrm{dy} * \mathrm{dz}}$

$\mathrm{dydz}x + \mathrm{dxdz}y + \mathrm{dxdy}z$

$\boldsymbol{\mathrm{dg} = \mathrm{Dt}[g[x, y, z]]}$

$-3\mathrm{Dt}[a] + \mathrm{Dt}[x] + \mathrm{Dt}[y] + \mathrm{Dt}[z]$

s1 = Solve[dg==0, Dt[z]]

$\{\{\mathrm{Dt}[z] \to 3\mathrm{Dt}[a] - \mathrm{Dt}[x] - \mathrm{Dt}[y]\}\}$

dz = s1[[1, 1, 2]]/.{Dt[x] → dx, Dt[y] → dy, Dt[a] → 0}

$-\mathrm{dx} - \mathrm{dy}$

d2 = d2lag[pc[3], dx, dy, dz]//Simplify

$-a\left(\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dxdy} + \mathrm{dy}^2\right)$

dxx = d2 /dx² /.dy → 0;

dyy = d2 /dy² /.dx → 0;

dxy = (d2 − dxx ∗ dx² − dyy ∗ dy²)/ (2 ∗ dx ∗ dy)//Simplify;

hessiardet = dxx ∗ dyy − dxy ∗ dxy;

MatrixForm [Table[{n, pc[n], hessiardet, dxx}, {n, 3, 3}],

TableHeadings → {None, {"n", "PC", "Hessiarra(PC)", "$\partial_{x,x}$", "lag(PC)"}}]

$$\begin{pmatrix} \mathrm{n} & \mathrm{PC} & \mathrm{Hessiarra(PC)} & \partial_{x,x}\ \mathrm{lag(PC)}\} \\ 3 & \{a, a, a, -a^2\} & \frac{3a^2}{4} & -a \end{pmatrix}$$

Hortaz, $(a, a, a, -a^2)$ maximoa da, hessiarra positiboa baita puntu horretan eta ∂_{xx} negatiboa.

Bibliografia

[1] E. Alberdi Celaya, M. I. Eguía Ribero, M. J. González Gómez. OpenCourseWare (OCW, publicación de material docente), 2014. *Matematikak bistaratuz eta animatuz*. ISSN: 2255-2316.

[2] F. Ayres. *Cálculo diferencial e integral*. McGraw Hill, Mexiko, 1971.

[3] J. I. Barragués, I. Arrieta, J. Manterola. *Analisi Matematikoa*. Pearson Educación, 2012.

[4] G. Beck, S. Wolfram. *Mathematica: The Student Book*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Boston, United States, 1994.

[5] P. Cembranos Díaz, J. Mendoza Casas. *Cálculo integral*. Anaya Educación - Base universitaria, 2004.

[6] B. Demidovich. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Paraninfo, 1990.

[7] J. R. Franco Brañas. *Introducción al cálculo*. Pearson Educación argitaletxea, Madril, Espainia, 2003.

[8] F. Granero. *Cálculo*. McGraw Hill, Madril, Espainia, 1991.

[9] E. Kreyszig. *Matemáticas avanzadas para Ingeniería*. Limusa-Noriega, Mexiko, 1985.

[10] R. Larson, R. Hostetler, B. Edwards. *Cálculo*. McGraw Hill, 1999.

[11] M. J. Manterola Zabala, C. Alcalde Valverde, J. I. Barragués Fuentes, A. Mor. *Ingeniaritzarako Oinarri Matematikoak. Ariketa ebatziak*. Elhuyar Edizioak, 2005.

[12] E. Mijangos Fernández. *Ingeniaritzaren Oinarri Matematikoak*. Euskal Herriko Unibertsitateko argitalpen zerbitzua (UPV/EHU), Leioa, Espainia, 2003.

[13] N. Piskunov. *Cálculo diferencial e integral. Tomos I y II*. MIR argitaletxea, Mosku, Errusia, 1983.

[14] S.L. Salas, E. Hille, G. J. Etgen. *Calculus Una y varias variables*. Reverte argitaletxea, 2006.

[15] R. T. Smith, R. B. Minton. *Cálculo. Volumen I*. McGraw Hill, 2002.

[16] R. T. Smith, R. B. Minton. *Cálculo. Volumen II*. McGraw Hill, 2004.

[17] B. F. Torrence, E. A. Torrence. *The Student's introduction to Mathematica.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.

[18] S. Wolfram. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer.* Addison-Wesley Longman Publishing Co., Boston, United States, 1991.

[19] S. Wolfram. *The Mathematica book*. Cambridge University Press, 1999.

UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea