Kalkulu **diferentziala** eta **integrala I**

Judith Rivas Ulloa

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

CIP. Biblioteca Universitaria

Rivas Ulloa, Judith

Kalkulu diferentziala eta integrala I [Recurso electrónico]/ Judith Rivas Ulloa, Matematika Saila. – Datos. – Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2021]. – 1 recurso en línea : PDF (296 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)

Modo de acceso: World Wide Web.

ISBN: 978-84-9860-525-9.

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral.

(0.034)517.2/.3

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiaren bitartez.

eISBN: 978-84-9860-525-9

Kalkulu **diferentziala** eta **integrala I**

Judith Rivas Ulloa

Matematika Saila

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

Aurkibidea

Sarrera

Euskal Herriko Unibertsitateko Zientzia eta Teknologia fakultatean irakasten diren Matematikako Graduko, Fisikako Graduko, Ingeniaritza Elektronikoko Graduko eta Fisika eta Ingeniaritza Elektronikoko Gradu Bikoitzeko lehen kurtsoko irakasgaia da Kalkulu Diferentziala eta Integrala I, urte osokoa. Liburu hau irakasgai horren programa jarraituz idatzi da.

Kalkulu diferentziala eta kalkulu integrala Analisi Matematikoko bi arlo nagusi dira. Ikasleak jadanik kontaktua izan du gai horiekin batxilergoan; beraz, ez da oinarrizkoak diren deribatuaren eta integralaren kontzeptuak ikusten dituen lehenengo aldia. Hala ere, desberdintasun nabariak aurkituko ditu unibertsitatera heldu baino lehen ikasitakoaren eta liburu honetan azaltzen denaren artean. Batxilergoan arreta deribatuen eta integralen kalkuluan eta haien aplikazioetan jartzen bada, graduko ikasketetan kontzeptu horien analisi sakonagoa gauzatzen da, egiten diren baieztapenak eta ateratzen diren ondorioak justifikatuz.

Kalkulu Diferentziala eta Integrala I irakasgaia Analisi Matematikoarekin zerikusia duen lehen irakasgaia da aipatutako graduetan. Horregatik, oinarrizkoenak diren aldagai bateko funtzioen azterketaz arduratzen da irakasgaiaren parte nagusia. Hala ere, zenbaki errealen segidak eta serieak ere aztergai izango dira, eta, ikastaroari bukaera emateko, aldagai anitzeko funtzioen kalkulu diferentzialerako sarrera bat egingo da.

1. gaian, beste kapituluak garatzeko oinarrizkoak diren zenbaki errealak eta haien propietateak aurkezten dira. Zenbaki errealen multzoan definitutako eragiketek multzo horri ematen dioten egitura aljebraikoa, gorputz trukakorrarena, hain zuzen, eta zenbaki errealak ordenatzeko modua garrantzizkoak badira ere, distantziarena da analisi matematikoko ikuspuntutik benetan interesatzen zaigun kontzeptua.

2. gaian, zenbaki errealen segidak ikasten dira. Segidak zerrenda ordenatu eta infinituak dira. Haren gaiak zenbaki errealak badira, plantea daiteke gai horiek zenbaki erreal finko batera hurbiltzen ote diren zerrenda horretan aurrera mugitzen garenean. Distantziaren laguntzaz, segiden limitea definituko dugu, limiteak kalkulatzeko metodoak ikasiko ditugu, eta limitea duten segidek, *segida konbergente* izenez ezagutzen direnek, zer propietate betetzen dituzten aztertuko dugu.

Zenbaki errealen segida baten lehenengo n gaien batura kalkulatzen bada, segida berri bat lortzen da, eta plantea daiteke ea segida berri horrek limitea duen ala ez, zenbaki errealen seriearen kontzeptua sorraraziz. Hori izango da 3. gaiaren aztergaia, zenbaki errealen batura infinituak, hain zuzen. Ikusiko den bezala, gutxitan kalkulatu ahal izango dira batura infinitu horien balioak eta konformatuko gara batura horiek finituak diren ala ez jakitearekin. Hori irizpide aproposak garatuz lortu ahal izango dugu.

4. gaiak hasiera ematen dio aldagai errealeko funtzio errealen analisiari. Zentrala den limitearen kontzeptua definitu eta gero, limiteen propietateak eta limiteak kalkulatzeko metodoak ematen dira. Gairen bigarren partean, limitearekin erlazio oso estua duen funtzioen jarraitutasuna estudiatzen da.

5. gaiaren zeregina da aldagai erreal bateko kalkulu diferentziala aurkeztea. Lehenengo eta behin, aldagai bateko funtzioen deribatua definitu behar da, limite egoki baten bidez, eta haren propietateak azaldu behar dira. Gero, deribatua duten funtzioen propietateak eta deribatuaren aplikazioak funtzioaren ezaugarri geometrikoak ondorioztatzeko aztertzen dira. Funtsezkoa da gai honetan definituko den Taylorren polinomioa. Aldagai errealeko funtzio errealak deribatuarekin erlazioa duten ezaugarri egokiak baditu, ikusiko da polinomio baten bidez hurbil daitezkeela funtzioaren balioak. Horrek garrantzi handia du, polinomioak ebaluatzeko funtziorik sinpleenak direlako.

Aldagai erreal bateko kalkulu integrala lau gaitan banatzea erabaki dut. Lehenengo eta behin, 6. gaian aldagai errealeko funtzioen tarte itxi eta bornatuen gaineko Riemannen integrala definitzen da, eta haren propietateak ikasten dira. Kalkulu integralaren oinarrizko teoremak erakusten du deribatuaren eta integralaren arteko erlazioa.

7. gaian, jatorrizko funtzioen kalkulurako metodoak erakusten dira. Aldagai errealeko funtzio bat emanda, aurkitu nahi da beste funtzio bat, bigarren horren deribatua lehen funtzioa izanik. Barrow-en erregelak ziurtatzen du integrakizunaren jatorrizkoa tarteko muturretan ebaluatuz kalkula daitekeela Riemannen integrala. Horregatik, ezinbestekoa da jatorrizkoak aurkitzen jakitea, integralen kalkulurako. Ez da beti posible izango jatorrizkoa idaztea oinarrizko funtzioak erabiliz, baina hori egin daitekeenerako metodoak garatuko dira.

8. gaian, Riemannen integralaren aplikazio batzuk aurkezten dira, azaleren eta bolumenen kalkulurako, besteak beste.

9. gaiaren helburua integral inpropioen analisia da. Integral inpropioak ez dira Riemannen integralak, Riemannen integralen limiteak baizik, eta, zenbaki errealen serieekin gertatzen den bezala, maiz ez da posible integral inpropioaren balioa zehaztea. Integrala finitua den ala ez jakitea interesatuko zaigu, eta, horretarako, konbergentzia-irizpide aproposak ematen dira.

Behin aldagai bateko funtzioen kalkulu integrala azaldu dela, 10. gaian segidetara eta serieetara bueltatzen da, baina segida eta serie horien gaiak ez dira zenbaki errealak izango, aldagai errealeko funtzioak baizik. Hori horrela, limitea edo batura ere aldagai errealeko funtzioa izango da, eta jakin nahi izango dugu limiteak segida edo seriearen gaiek betetzen dituzten propietateak (jarraitutasuna, deribagarritasuna, integragarritasuna) mantentzen dituen. Funtzio-serieen artean, garrantzi handikoak dira berretura-serieak eta, bereziki, Taylorren serieak, 5. gaian definitutako Taylorren polinomioaren hedapenak direnak.

Lehenago esan den bezala, nahiz eta liburu honen aztergai nagusia aldagai bateko funtzioa izan, azken gaian aldagai anitzeko kalkulu diferentzialerako sarrera bat egiten da. Aldagai anitzeko funtzioen limiteak, jarraitutasuna, deribatu partzialak eta diferentziagarritasuna definitzen dira, hain zuzen.

Teoria garatu eta gero, gai bakoitzaren azken atalean ariketa-zerrenda bat ematen da, ariketa gehienen emaitzekin. Bibliografiako atal bat ere ematen da liburuaren bukaeran. [12] liburua kalkulu diferentzial eta integraleko lehen ikastaro batean erreferentzia klasikoa bada ere, nire ustez oso gomendagarriak dira [2] eta [3], oso modu argi eta didaktikoan idatzita daudelako. [6] liburuan azken gaiko edukiak daude. Problemetako liburuen artean, [1] aipatu nahi dut.

Leioa, 2020ko urria

Judith Rivas

1. gaia

Zenbaki errealak eta konplexuak

Matematikaren oinarrizko elementua zenbakia da; beraz, lehen gai honetan zenbakiak eta haien propietateak aztertuko ditugu. Gizakia zenbakiak erabiltzen hasi zen kantitateak adierazteko, eta, horrela, zenbaki arruntak sortu ziren. Hala ere, problema konplikatuagoak zenbakien bidez deskribatzerako orduan, zenbaki arruntekin nahikoa ez zela eta multzo hori osatu behar zela ikusi zen. Horrela, zenbaki osoak, arrazionalak, errealak eta konplexuak agertzen joan ziren.

Zenbakien arteko eragiketa aljebraikoak ere aipatu behar dira gai honetan. Oinarrizko eragiketa aljebraikoak batuketa eta biderketa dira. Aztertuko dugun beste ezaugarri bat zenbakien ordena da. Bi zenbaki emanda, konparatu nahi ditugu jakiteko zein den handiena eta zein txikiena. Azkenik, distantzia definituko dugu, zenbakiak elkarrengandik zein hurbil dauden neurtu ahal izateko.

1.1 Zenbaki multzoak

1.1.1 Zenbaki arruntak

Zenbatzeko erabiltzen diren zenbakiak zenbaki arruntak dira, eta osatzen duten multzoa $\mathbb{N}$ ikurrarekin adierazten da:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Peano-ren axiomak (Zenbaki arruntak sorrarazten dituen axioma multzoa)

1. axioma. $\mathbb{N}$ multzoan zenbaki berezi bat dago, 1 zenbakia, hain zuzen.

2. axioma. Zenbaki arrunt orok hurrengo bakar bat dauka; hau da, n zenbaki arrunta baldin bada, existitu egiten da n^+, n-ren hurrengoa. Gainera $n^+ \neq 1$ da, n edozein zenbaki arruntentzat.

3. axioma. Zenbaki arrunt desberdinen hurrengoak desberdinak dira. Hots, n eta m zenbaki arruntak badira, non $n^+ = m^+$ diren, orduan, $n = m$ da.

4. axioma. (Indukzio matematikoaren printzipioa) $A \subset \mathbb{N}$ azpimultzoak honako baldintza hauek betetzen baldin baditu:

(a) $1 \in A$, eta

(b) $k \in A$ baldin bada, orduan, $k^+ \in A$ da,

orduan, $A = \mathbb{N}$ da.

Axioma horiek onartzearekin batera, zenbaki arruntak eta $\mathbb{N}$ multzoa existitu egiten direla onartzen dugu. 1. axiomaren arabera, 1 zenbakia existitzen da. Orain, 2. axioma jarraituz, 1 zenbaki arrunta denez, haren hurrengoa existitzen da, eta ez da 1 zenbakia. Beraz, zenbaki berri bat dugu, 2 ikurraren bidez adierazten duguna. 2 zenbaki arrunta denez, haren hurrengoa ere existitzen da, eta ezin da 1 zenbakia izan. Gainera, 3. axioma kontuan izanda, 2ren hurrengoa ezin da 1en hurrengoa, hots, 2 zenbakia, izan. Beraz, zenbaki berri bat dugu, 3 ikurrarekin adierazten duguna. Horrela jarraituz, $\mathbb{N}$ multzoa eraikitzen da, zenbaki kopuru infinitua duena.

Indukzio matematikoaren printzipioa. Peanoren azken axiomak, indukzio matematikoaren printzipioak, hain zuzen, zenbaki arrunt orok propietate bat betetzen duela frogatzeko tresnarik garrantzitsuenetariko bat ematen digu. Demagun A multzoa P propietatea betetzen duten zenbaki arruntek osatzen dutela. P propietatea zenbaki arrunt guztiek betetzen dute; hots, $A = \mathbb{N}$ da, baldin eta honako baldintza hauek betetzen badira:

(a) 1 zenbakiak betetzen du P propietatea.

(b) k zenbakiak P propietatea betetzen badu, orduan, $k+1$ zenbakiak ere P propietatea betetzen du.

Adibidea. Lehenengo n zenbaki arrunten arteko baturaren formula:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Indukzio matematikoaren printzipioa erabiliz frogatuko dugu formula hori. Lehenengo pausoa formula $n = 1$ balioak betetzen duela egiaztatzea izango da. Kasu horretan, ezkerreko baturan batugai bakarra dago, 1. Bestalde, eskuineko adierazpenean $n = 1$ hartuz, $1(1+1)/2 = 1$ dugu. Beraz, berdintza egia da $n = 1$ bada.

Suposa dezagun orain k zenbaki arruntarentzat formula betetzen dela; hau da,

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{1.1.1}$$

dela. Frogatu behar dugu $k+1$ zenbaki arruntarentzat ere betetzen dela. (1.1.1) indukzio-hipotesia erabiliz,

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Beraz, k-rentzat egia dela suposatuz, frogatu dugu $k+1$-entzat ere egia dela.

Indukzio matematikoaren printzipioak esaten digu formula egia dela zenbaki arrunt ororentzat:

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Oharra. Kasu batzuetan gerta daiteke frogatu behar den propietatea egia ez izatea zenbaki arrunt guztietarako, baina bai zenbaki arrunt batetik aurrera. Kasu horretan, indukzio matematikoaren printzipioa erabil daiteke, baina lehenengo baldintza aldatuz. Beste kasu batzuetan, komenigarria izan daiteke bigarren baldintza ere aldatzea. Orokorrean, r zenbaki arrunta emanda, esan dezakegu P propietatea egia dela $n \geq r$ arrunt guztietarako, baldin eta honako hau betetzen bada:

(a) r zenbakiak P propietatea betetzen du, eta

(b) $k \geq r$ zenbakiak P propietatea betetzen badu, orduan, $k+1$ zenbakiak ere P propietatea betetzen du.

Edo,

(a) r zenbakiak P propietatea betetzen du, eta

(b) h zenbakiak P propietatea betetzen badu $h = r, \ldots, k$ izanik, orduan, $k+1$ zenbakiak ere P propietatea betetzen du.

1.1.2 Zenbaki osoak

$\mathbb{N}$ multzoan batuketa eta biderketa ondo definituta daude; hau da, zenbaki arrunten batura eta biderkadura zenbaki arruntak dira. Hala ere, batuketarekin lotuta arazo bat sortzen da. n eta m zenbaki arruntak baldin badira, batzuetan ezin da aurkitu beste zenbaki arrunt bat, x, non $x + n = m$ den. Adibidez, $x + 3 = 1$ ekuazioak ez du soluziorik bakarrik zenbaki arruntak kontuan hartzen baditugu.

Problema hori konponduko dugu zenbaki berri batzuk definituz, 0 zenbakia eta $-n$ motako zenbakiak, n arrunta izanik. Horrela, zenbaki osoen multzoa dugu, $\mathbb{Z}$ ikurraren bidez adieraziko duguna.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Zenbaki osoen arteko batuketa eta biderketa defini daitezke. Bereziki, $n + (-n) = (-n) + n = 0$ da, n zenbaki arrunt guztietarako.

1.1.3 Zenbaki arrazionalak

Zenbaki osoekin konpontzen da batuketarekin geneukan problema baina biderketaren kasuan arazo bera sortzen da. n eta m zenbaki osoak badira, batzuetan ezin da topatu x zenbaki osoa $x \cdot n = m$ izan dadin; adibidez, $3x = 1$ ekuazioak ez du soluzio osorik.

Zenbaki multzo oraindik handiago bat behar dugu, zenbaki arrazionalena:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Aipatu behar da bi adierazpen desberdin zenbaki arrazional bera izan daitezkeela. m_1, m_2, n_1, n_2 zenbaki osoak badira, $\dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$ da baldin eta soilik baldin $m_1 n_2 = m_2 n_1$ bada. Gainera, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ da, zeren eta $\dfrac{m}{1} = m$ identifikazioa egiten baita.

Zenbaki arrazionalen arteko batuketa eta biderketa honako era honetan definiturik daude: m_1, m_2, n_1, n_2 zenbaki osoak baldin badira, $n_1 \neq 0$ eta $n_2 \neq 0$ izanik,

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}, \\ \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}. \end{aligned}$$

Eragiketa horiek honako propietate hauek betetzen dituzte $\mathbb{Q}$ multzoan: $a, b, c \in \mathbb{Q}$ badira,

(P1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (batuketaren elkartze-propietatea).

(P2) $a + 0 = 0 + a = a$, (0 batuketaren elementu neutroa da).

(P3) Existitzen da $-a \in \mathbb{Q}$ non $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ zenbakia a-ren aurkakoa da).

(P4) $a + b = b + a$ (batuketaren trukatze-propietatea).

(P5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (biderketaren elkartze-propietatea).

(P6) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 zenbakia biderketaren elementu neutroa da).

(P7) $a \neq 0$ guztietarako, existitzen da $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ non $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (a^{-1} zenbakia a-ren alderantzizko elementua da).

(P8) $a \cdot b = b \cdot a$ (biderketaren trukatze-propietatea).

(P9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (banatze-propietatea).

Propietate horiek betetzen direnez, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gorputz trukakorra dela esaten da.

Batuketan eta biderketan oinarriturik, eta arestian aipatutako propietateak kontuan hartuz, kenketa eta zatiketa defini ditzakegu. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b), \\ \frac{a}{b} &= a \cdot b^{-1}, \quad \forall b \neq 0. \end{aligned}$$

Zenbaki arrazionalen multzoan, ordena-erlazio bat defini daiteke. Lehenengo eta behin, zenbaki arrazional bat $\frac{m}{n}$ positiboa dela esango dugu, eta $\frac{m}{n} > 0$ idatziko dugu $m, n \in \mathbb{N}$ badira. Propietate hauek ditugu:

(P10) $a \in \mathbb{Q}$ bada, $a = 0$ edo $a > 0$ edo $-a > 0$ da.

(P11) $a > 0$ eta $b > 0$ baldin badira, orduan, $a + b > 0$ da.

(P12) $a > 0$ eta $b > 0$ baldin badira, orduan, $a \cdot b > 0$ da.

Definizioa. Izan bitez $a, b \in \mathbb{Q}$. a b baino *handiagoa* dela diogu, eta $a > b$ idazten dugu (edo b a baino *txikiagoa* dela esan eta $b < a$ idatzi), baldin eta $a - b > 0$ bada.

Zenbaki arrazionalen multzoan distantzia bat defini daiteke.

Definizioa. Izan bitez $x, y \in \mathbb{Q}$. x eta y zenbakien arteko *distantzia* honako hau da:

$$d(x,y) = \begin{cases} x - y, & x > y \text{ bada,} \\ 0, & x = y \text{ bada,} \\ y - x, & x < y \text{ bada.} \end{cases}$$

1.1.1 proposizioa. *Izan bitez $p, q \in \mathbb{Q}$ non $p < q$ den. Orduan, existitzen da beste zenbaki arrazional bat, r, non $p < r < q$ den.*

Froga. $p < \frac{p+q}{2} < q$ eta $\frac{p+q}{2} = r \in \mathbb{Q}$. □

1.1.2 korolarioa. *Bi zenbaki arrazionalen artean infinitu zenbaki arrazional daude.*

Oharra. $\mathbb{Z}$-n propietate hori ez da betetzen. Bi zenbaki osoren artean zenbaki osoen kopuru finitua dago soilik.

1.2 Zenbaki errealak

Zenbaki arrazionalak erabiliz, $ax = b$ moduko ekuazioak ebatz daitezke, a, b edozein bi zenbaki arrazional izanik, $a \neq 0$. Hala ere, badaude soluzio arrazionalik ez duten ekuazio polinomikoak, $x^2 = 2$ ekuazioa adibidez. Ikus dezagun.

1.2.1 proposizioa. *Ez da existitzen $x \in \mathbb{Q}$ non $x^2 = 2$ den.*

Froga. Absurdora eramanez, suposatuko dugu $x^2 = 2$ ekuazioak soluzio arrazionala duela. Izan bedi p/q zenbaki arrazionala non $(p/q)^2 = 2$ den, p eta q haien arteko lehenak izanik, p/q laburtezina izan dadin. Orduan, $p^2 = 2q^2$ da; beraz, p^2 bikoitia da. Honek inplikatzen du p ere bikoitia dela. Izan bedi $k \in \mathbb{N}$ non $p = 2k$ den. Alde batetik, $p^2 = 4k^2$ eta bestetik $p^2 = 2q^2$; beraz, q^2 eta, ondorioz, q bikoitiak dira. Baina hori ez da posible p eta q haien arteko lehenak direlako. Beraz, suposatu duguna ezin da gertatu, ez da existitzen $x \in \mathbb{Q}$ non $x^2 = 2$ den. □

Oharra. Froga daiteke $x^2 = m$ ekuazioak, m zenbaki oso ez karratu perfektua izanik, ez daukala soluzio arrazionalik.

Har dezagun zuzen horizontal bat eta finka dezagun puntu bat zuzen horretan, 0 zenbakiarekin identifikatuko duguna. Puntu horren eskuinaldean, finka dezagun beste puntu bat, 1 zenbakiarekin identifikatzen duguna. 0 eta 1 zenbakien arteko zuzenkiaren luzera oinarritzat hartuta, zenbaki arruntak identifikatzen ditugu zuzenaren puntuekin. Antzera, zenbaki oso negatiboak 0-ren ezkerraldean kokatzen ditugu.

Izan bitez $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ izanik, eta zati ditzagun zenbaki osoek definitzen dituzten zuzenkiak luzera bereko n zatitan. Har ditzagun horietako m zati 0-tik eskuinaldera m positiboa bada, edo $-m$ zati 0-tik ezkerraldera m negatiboa bada. Lortutako puntua $\frac{m}{n}$ zenbaki arrazionalarekin identifikatzen da. Horrela, zenbaki arrazional oro identifikatzen da zuzenaren puntu batekin.

Hala ere, zuzenaren puntu guztiek ez daukate zenbaki arrazional bat elkartuta. Egin dezagun 1 luzerako aldeak dituen karratua, eta har dezagun haren diagonala. Zuzenki hori 0-n hasita eta eskuinaldera jartzen badugu, zuzenaren puntu bat dagokio, baina puntu hori ez dago zenbaki arrazional batekin lotuta.

Ikusi dugu arrazionalak ez diren zenbakiak existitzen direla eta zuzenaren puntuekin erlaziona daitezkeela. Zenbaki arrazionalek zuzenean uzten dituzten hutsuneak zenbaki irrazionalak direla diogu. Zenbaki arrazionalek eta irrazionalek zenbaki errealen multzoa, $\mathbb{R}$, osatzen dute, eta $\mathbb{R}$ zuzen batekin identifikatzen da, zuzen erreala deritzona.

1.2.1 Zenbaki errealen adierazpen hamartarra

N zenbaki arrunta bada, 10 zenbakiaren berreturen polinomio baten modura idatz daiteke:

$$N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad , a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ i = 0, \ldots, k.$$

$a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ N-ren adierazpen hamartarra da. Adibidez,

$$3275 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5.$$

$p, q \in \mathbb{N}$ badira, $q \neq 0$ eta $p < q$ izanik, p/q zenbaki arrazionalaren adierazpen hamartarra ere eman daiteke.

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= \frac{10p}{q} \cdot 10^{-1} = \frac{b_1 q + r_1}{q} \cdot 10^{-1} = b_1 \cdot 10^{-1} + \frac{r_1}{q} \cdot 10^{-1} \\
&= b_1 \cdot 10^{-1} + \frac{10 r_1}{q} \cdot 10^{-2} = b_1 \cdot 10^{-1} + \frac{b_2 q + r_2}{q} \cdot 10^{-2} \\
&= b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \frac{r_2}{q} \cdot 10^{-2} \\
&= \ldots \\
&= 0, b_1 b_2 \ldots
\end{aligned}$$

$r_1, r_2, \ldots$ hondarrak q baino txikiagoak dira; beraz, bi aukera daude: hondarren bat nulua da, eta prozedura bukatzen da; edo hondar bat lehenago agertu den beste hondar baten berdina da, eta hortik aurrera zatidurak errepikatzen dira. Beraz, zenbaki arrazional baten adierazpen hamartarra finitua da, edo infinitu periodikoa da. Adibidez,

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} = \frac{10}{8} \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 10^{-1} + \frac{2}{8} \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 10^{-1} + \frac{20}{8} \cdot 10^{-2} \\ = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{4}{8} \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{40}{8} \cdot 10^{-3} \\ = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} = 0,125,\end{aligned}$$

eta

$$\begin{aligned}\frac{7}{55} = \frac{70}{55} \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 10^{-1} + \frac{15}{55} \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 10^{-1} + \frac{150}{55} \cdot 10^{-2} \\ = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{40}{55} \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + \frac{400}{55} \cdot 10^{-3} \\ = 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + \frac{15}{55} \cdot 10^{-3} = 0,12727\ldots\end{aligned}$$

Badaude infinitu ez-periodikoak diren adierazpen hamartarrak. Adierazpen horiek zenbaki irrazionalenak dira: $\sqrt{2}$, π, e,...

Definizioa. Izan bedi $x \in \mathbb{R}$. x-ren *zati osoa* $[x]$ ikurraren bidez adierazten da, eta x baino txikiagoa edo berdina den zenbaki osorik handiena da; hots,

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \leq x\}.$$

$x > 0$ bada, orduan, x-ren adierazpen hamartarra $x = N, a_1 a_2 a_3 ...$ erakoa da, non $N = [x]$ den, eta $a_1, a_2, \ldots$ 0 eta 9-ren arteko zifrak diren.

x zuzen errealaren puntu batekin identifikatzen badugu, haren adierazpen hamartarra lortzeko honako prozedura hau jarraitu behar da: $[x] = N$ bada, x N eta $N + 1$ zenbakien artean dago. N eta $N + 1$-en arteko zuzenkia luzera bereko 10 partetan zatitzen dugu. x lehenengo partean badago, $a_1 = 0$ da; bigarrenean badago, $a_1 = 1$ da, eta abar. a_1 finkatu eta gero, $1/10$ luzerako tartea berriro luzera bereko 10 partetan zatitzen da. x zein zatitan dagoen aztertuz a_2 finkatzen da, eta berdin jarraitzen da adierazpen hamartarraren hurrengo zifrak lortzeko.

$x < 0$ bada, $-x$ zenbaki positiboaren adierazpen hamartarrari minus $(-)$ zeinua jartzen diogu aurrean x-ren garapen hamartarra lortzeko.

1.2.2 Zenbaki errealak eta ordena-erlazioa

Lehenago esan dugu zenbakiak ordenatu nahi ditugula. Ordenatzeko modu horri propietate batzuk bete ditzala eskatuko diogu.

Definizioa. Izan bitez X multzoa eta $\mathcal{R}$ haren elementuen arteko erlazioa. $\mathcal{R}$ *ordena-erlazioa* da, baldin eta propietate hauek betetzen badira:

(i) $x \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}x$ da (erreflexio-propietatea).

(ii) $x, y \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}y$ eta $y\mathcal{R}x$ badira, orduan, $x = y$ da (antisimetri-propietatea).

(iii) $x, y, z \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}y$ eta $y\mathcal{R}z$ badira, orduan, $x\mathcal{R}z$ da (iragate-propietatea edo propietate transitiboa).

$\mathcal{R}$ ordena-erlazioa bada, $(X, \mathcal{R})$ *multzo ordenatua* dela esaten da.

$\mathcal{R}$ ordena-erlazio *osoa* da, baldin eta $x, y \in X$ guztietarako, $x\mathcal{R}y$ edo $y\mathcal{R}x$ bada.

$x \in \mathbb{R}$ bada, x positiboa dela diogu, eta $x > 0$ idazten dugu, baldin eta zuzen errealean 0-tik eskuinera badago; eta x negatiboa da, eta $x < 0$ idazten dugu, baldin eta $-x > 0$ bada.

$x, y \in \mathbb{R}$ badira, orduan, $x > y$ da, baldin eta $x - y > 0$ bada, eta x y baino handiagoa dela diogu (edo $y < x$ idatzi eta y x baino txikiagoa dela esan). Zenbaki arrazionalen multzoan eman ziren (P10), (P11) eta (P12) propietateak zenbaki errealen multzoan ere betetzen dira.

$x, y \in \mathbb{R}$ badira, $x \geq y$ da, baldin eta $x > y$ edo $x = y$ bada. $(\mathbb{R}, \geq)$ multzo ordenatua da, eta $\geq$ ordena-erlazio osoa da.

1.2.2 proposizioa. *Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{R}$ eta $a > b$.*

(i) $a + c > b + c$ *da.*

(ii) $c > 0$ *bada, orduan,* $ac > bc$ *da.*

(iii) $c < 0$ *bada, orduan,* $ac < bc$ *da.*

Froga. Gogora dezagun $a > b$ dela, baldin eta soilik baldin $a - b > 0$ bada.

(i) $a - b > 0$ denez, c batuz eta kenduz desberdintza horren ezkerraldeko atalean, $(a + c) - (b + c) > 0$ da; hots, $a + c > b + c$.

(ii) $a - b > 0$ eta $c > 0$ direnez, (P12) propietatea erabiliz, $ac - bc = (a - b)c > 0$ da; hau da, $ac > bc$.

(iii) $c < 0$ bada, $-c > 0$ da, eta (i) atala aplika dezakegu $-c$-rekin. Orduan, $a(-c) > b(-c)$ da. Desberdintza horren bi aldeetan $ac + bc$ batuz, $-ac + ac + bc > ac + bc - bc$ da, eta sinplifikatuz, $bc > ac$ dela lortzen da. $\square$

Ordena-erlazioa erabiliz, defini daitezke maiz agertzen diren zenbaki errealetako multzo batzuk, tarteak hain zuzen.

Definizioa (Tarteak)**.** Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$;

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Definizioa. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) A multzoa *goitik bornatua* dela esaten da, baldin eta existitzen bada $M \in \mathbb{R}$ non $a \leq M$ den $a \in A$ guztietarako. M zenbakia A-ren *goi-bornea* dela diogu.

(ii) A multzoa *behetik bornatua* dela esaten da, baldin eta existitzen bada $m \in \mathbb{R}$ non $m \leq a$ den $a \in A$ guztietarako. m zenbakia A-ren *behe-bornea* da.

Definizioa. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) A goitik bornatua bada, A multzoaren *supremoa* edo *gorena* A-ren goi-bornerik txikiena da, eta $\sup A$ ikurraren bidez adierazten da. A multzoaren supremoa A-ren elemetua bada, orduan, A-ren *maximoa* dela esaten da, eta $\max A$ idatziko dugu.

(ii) Izan bedi A behetik bornatua. A multzoaren *infimoa* edo *beherena* A-ren behe-bornerik handiena bada, eta $\inf A$ ikurraren bidez adierazten da. A multzoaren infimoa A-ren elemetua bada, orduan, A-ren *minimoa* dela esaten da, eta $\min A$ idatziko dugu.

Adibidea. Kalkulatuko ditugu honako multzo hauen supremoa, infimoa, maximoa eta minimoa, existitzen direnean.

- $A = \{r \in \mathbb{Q} : \ 1 \leq r \leq 4\}$ multzoa goitik bornatua da, goi-bornerik txikiena 4 izanik; beraz, $\sup A = 4$ da. Gainera, $4 \in A$ denez, A-ren maximoa existitzen da, $\max A = 4$. Bestalde, A behetik bornatua da, behe-bornerik handiena 1 delarik; ondorioz, $\inf A = 1$ eta hori ere A-ren elementua denez, $\min A = 1$ da.

- $B = \{r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \,:\, 1 \le r \le 4\}$ multzoa goitik eta behetik bornatua da. Goibornerik txikiena, eta, ondorioz, haren supremoa 4 da, baina 4 zenbaki arrazionala denez, ez da B-ren elementua eta $\max B$ ez da existitzen. Era berean, $\inf B = 1$ da, baina 1 ez dago B-n; beraz, $\min B$ ez da existitzen.
- $C = \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ multzo goitik eta behetik bornatua da. $\sup C = 1 = \max C$ da eta $\inf C = 0$, baina $0 \notin C$ denez, C-ren minimoa ez da existitzen.

Supremoaren printzipioa edo axioma. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$ multzo ez huts goitik bornatua. Orduan, A multzoak $\mathbb{R}$-n supremoa dauka. Hau da, existitzen da $\alpha \in \mathbb{R}$ non $\alpha = \sup A$ den.

1.2.3 teorema (Infimoaren printzipioa edo axioma)**.** *Izan bedi $B \subset \mathbb{R}$ multzo ez huts behetik bornatua. Orduan, B multzoak $\mathbb{R}$-n infimoa dauka. Hau da, existitzen da $\beta \in \mathbb{R}$ non $\beta = \inf B$ den.*

Froga. Izan bedi $A = \{-x \,:\, x \in B\} = -B$. m B-ren behe-bornea bada, orduan, $-m$ A-ren goi-bornea da. Supremoaren axiomaren ondorioz, A-ren supremoa existitzen da, baina A-ren goi-bornerik txikiena B-ren behe-bornerik handiena da; hots, B-ren infimoa existitzen da. □

Printzipio horiek $\mathbb{Q}$ eta $\mathbb{R}$ multzoen arteko desberdintasun bat nabariarazten digute. Zenbaki arrazionalen multzoan, aurreko printzipioak ez dira betetzen; hau da, topa daitezke $\mathbb{Q}$-ren azpimultzo goitik edo behetik bornatuak, non supremoa edo infimoa zenbaki arrazionalak ez diren.

Adibidea. $A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 \le 2\}$ goitik eta behetik bornatua da. Baina supremoa $\sqrt{2}$ da, eta ikusi dugu zenbaki hori ez dela arrazionala. Era berean, infimoa, $-\sqrt{2}$, ez da $\mathbb{Q}$-ren elementua.

Aldiz, supremoaren (infimoaren) printzipioak ziurtatzen du $\mathbb{R}$-ren azpimultzo goitik bornatu (behetik bornatu) baten supremoa (infimoa) zenbaki erreala dela.

1.2.4 proposizioa (supremoaren eta infimoaren karakterizazioa)**.** *Izan bedi $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.*

(i) Izan bedi α A multzoaren goi-bornea. α A multzoaren supremoa da, baldin eta soilik baldin

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, a \in A \,:\, \alpha - \epsilon < a.$$

(ii) Izan bedi β A multzoaren behe-bornea. β A multzoaren infimoa da, baldin eta soilik baldin

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, b \in A \,:\, \beta + \epsilon > b.$$

Froga. (i) Bi inplikazioak frogatu behar ditugu. Lehenengo eta behin, suposatzen dugu $\alpha = \sup A$ dela. Izan bedi $\epsilon > 0$. Orduan, $\alpha - \epsilon < \alpha$ da, eta α A

multzoaren goi-bornerik txikiena da; beraz, $\alpha - \epsilon$ ez da A-ren goi-bornea; hau da, existitzen da $a \in A$ non $\alpha - \epsilon < a$ den.

Demagun orain, absurdora eramanez, $\alpha \neq \sup A$ dela. α A-ren goi-bornea denez eta $\sup A$ A-ren goi-bornerik txikiena, $\alpha > \sup A$ da. Har dezagun $\epsilon = \alpha - \sup A > 0$. Hipotesiaren arabera, existitzen da $a \in A$ non $\alpha - \epsilon < a$ den; hots, existitzen da $a \in A$ non $\alpha - (\alpha - \sup A) < a$ den. Beraz, existitzen da $a \in A$ non $\sup A < a$ den, eta hori ezinezkoa da. Suposatu duguna ezin da egia izan, eta $\sup A = \alpha$ da, halabeharrez.

(ii) Berriro bi inplikazioak frogatu behar ditugu, antzeko arrazoinamenduak erabiliz. $\beta = \inf A$ eta $\epsilon > 0$ direnez, $\beta + \epsilon$ ez da A-ren behe-bornea. Beraz, existitzen da $b \in A$ non $b < \beta + \epsilon$ den.

Bestalde, demagun $\beta \neq \inf A$ dela, eta har dezagun $\epsilon = \inf A - \beta > 0$. Orduan, existitzen da $b \in A$ non $\beta + \inf A - \beta > b$ den, eta hori kontraesan bat da. □

1.2.5 proposizioa (Arkimedesen printzipioa)**.** *Izan bitez $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$ izanik. Orduan, existitu egiten da $n \in \mathbb{N}$ non $nx > y$ den.*

Froga. $x > 0$ denez, y/x zenbaki erreala da, eta ez da $\mathbb{N}$ zenbaki arrunten multzoaren goi-bornea, $\mathbb{N}$ goitik bornatua ez delako. Orduan, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $n > y/x$ den; hau da, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $nx > y$ den. □

1.2.6 korolarioa. *$\epsilon > 0$ bada, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $\frac{1}{n} < \epsilon$ den.*

Froga. Arkimedesen printzipioan $x = \epsilon$ eta $y = 1$ hartu. □

1.2.3 Zenbaki errealen arteko distantzia euklidearra

Ikusi dugu lehenago nola kalkulatzen den distantzia zenbaki arrazionalen artean. Zenbaki errealen kasuan, modu berean kalkulatuko ditugu distantziak. Lehenengo eta behin, zenbaki erreal baten balio absolutua definituko dugu.

Definizioa. $x \in \mathbb{R}$ zenbakiaren *balio absolutua*, $|x|$ ikurraren bidez adierazten duguna, honako modu honetan definitzen da:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ bada}, \\ -x, & x < 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Balio absolutua erabil dezakegu zenbaki errealen arteko distantzia adierazteko. $x, y \in \mathbb{R}$ baldin badira eta haien arteko distantzia $d(x, y)$, orduan,

$$d(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x - y, & x > y \text{ bada}, \\ 0, & x = y \text{ bada}, \\ y - x, & x < y \text{ bada}. \end{array} \right\} = |x - y|.$$

1.2.7 proposizioa. *Izan bitez $x, y \in \mathbb{R}$.*

(i) $|x| \geq 0$ *da* $x \in \mathbb{R}$ *guztietarako, eta* $|x| = 0$ *da, baldin eta soilik baldin* $x = 0$ *bada.*

(ii) $|x| = |-x|$.

(iii) $|x| = \max\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$.

(iv) Balio absolutuaren desberdintza triangeluarra*:* $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

(vi) $|xy| = |x||y|$.

Froga. Proposizio honen lehenengo atalak frogatzen dira bi kasu desberdinduz, balio absolutuaren definizioaren arabera $x \geq 0$ eta $x < 0$.

(i) $x \geq 0$ bada, $|x| = x \geq 0$ da; eta $x < 0$ bada, $-x > 0$ da; beraz, $|x| = -x \geq 0$.

(ii) $x \geq 0$ bada, $-x \leq 0$ da; beraz, $|x| = x$ eta $|-x| = -(-x) = x$ berdinak dira. Aldiz, $x < 0$ bada, $-x > 0$ da; beraz, hemen ere, $|x| = -x$ eta $|-x| = -x$ berdinak dira. Hots, $|x| = |-x|$ da, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako.

(iii) $x \geq 0$ bada, orduan, $-x \leq 0$ da; hots, $-x \leq 0 \leq x$. Beraz, $|x| = x$, $\max\{x, -x\} = x$ eta $\sqrt{x^2} = x$ dira. Bestalde, $x < 0$ bada, $-x > 0$ da; beraz, $x < 0 < -x$. Orduan, $|x| = -x$, $\max\{x, -x\} = -x$ eta $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$, erro karratua balio positiboa delako.

Hau da, $|x| = \max\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$ da, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako.

(iv) $|x| = \max\{x, -x\}$ denez, $x \leq |x|$ eta $-x \leq |x|$ dira, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako. Beraz,

$$\begin{aligned} x \leq |x| \text{ eta } y \leq |y| &\implies x + y \leq |x| + |y| \\ -x \leq |x| \text{ eta } -y \leq |y| &\implies -(x+y) \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

Ondorioz,

$$\max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|,$$

eta (iii) atalaren arabera, $\max\{x+y, -(x+y)\} = |x+y|$ denez, $|x+y| \leq |x|+|y|$ da.

(v) Aurreko ataleko desberdintza triangeluarra erabiliz:

$$\begin{aligned} |x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y| &\implies |x| - |y| \leq |x-y| \\ |y| = |(y-x) + x| \leq |y-x| + |x| &\implies |y| - |x| \leq |y-x|. \end{aligned}$$

Bi desberdintzak laburbilduz, $-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$ da, edo baliokidea dena, $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$. □

1.2.8 proposizioa. *Izan bitez $x \in \mathbb{R}$ eta $r > 0$.*

(i) $|x| \leq r$ *da, baldin eta soilik baldin* $-r \leq x \leq r$ *bada.*

(ii) $|x| \geq r$ *da, baldin eta soilik baldin* $x \leq -r$ *edo* $x \geq r$ *bada.*

Froga. $|x| = \max\{x, -x\}$ da; beraz,

(i) $|x| \leq r \iff \max\{x, -x\} \leq r \iff x \leq r$ eta $-x \leq r \iff x \leq r$ eta $x \geq -r$.

(ii) $|x| \geq r \iff \max\{x, -x\} \geq r \iff x \geq r$ edo $-x \geq r \iff x \geq r$ edo $x \leq -r$. □

Puntu batetik emandako kantitate positibo bat baino txikiagoa den distantzia batera dauden puntuek osatzen duten tarteak maiz erabiliko ditugu.

Definizioa. Izan bitez $\alpha \in \mathbb{R}$ eta $\epsilon > 0$.

(i) $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| < \epsilon\}$ α-ren *ingurunea* dela esaten da. α *zentroa* da, eta ϵ, *erradioa*.

(ii) $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon) - \{\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - \alpha| < \epsilon\}$ α-ren *ingurune* laburtua dela esaten da.

1.3 Zenbaki konplexuak

Zenbaki errealen multzoa ez da nahikoa ekuazio polinomiko batzuk ebazteko. Adibidez, ez da existitzen $x \in \mathbb{R}$ non $x^2 = -1$ den. Arazo hori konpontzeko, berriro, zenbaki multzo oraindik handiago bat behar dugu, baina zenbaki errealak eta haien propietate nagusiak mantentzen dituena.

Definituko dugu zenbaki berri bat, i ikurrarekin adieraziko duguna, non $i^2 = -1$ den. Zenbaki errealek multzo berrian egon behar dutenez, eta batuketa eta biderketa ondo definiturik egotea nahi dugunez, $x + yi$ moduko zenbakiak, $x, y \in \mathbb{R}$ izanik, multzo berrian egongo dira.

Definizioa. Zenbaki konplexuen multzoa $\mathbb{C}$ ikurraren bidez adieraziko dugu, eta honela definituko:

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$z = x + yi$ z zenbaki konplexuaren *adierazpen binomikoa* da. x z-ren *parte erreala* eta y z-ren *parte irudikaria* direla diogu, eta $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ idatzi ohi da. i zenbakia *unitate irudikaria* da.

Honela definituko ditugu batuketa eta biderketa multzo horretan: $z_1 = x_1+y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ badira,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 =& x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i, \\ z_1 z_2 =& x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \end{aligned}$$

Erraz konproba daiteke $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ gorputz trukakorra dela. Bereziki, biderketarako alderantzizkoa existitzen da. Ikus dezagun. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $z = x + yi$. $z^{-1} = u + vi$ bada,

$$z \cdot z^{-1} = (x + yi)(u + vi) = 1$$

bete behar da. Parte errealak alde batetik eta irudikariak bestetik hartuz, honako sistema hau dugu:

$$\begin{cases} xu - yv = 1, \\ xv + yu = 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

$x \neq 0$ bada, bigarren ekuaziotik $v = -\dfrac{uy}{x}$ dugu, eta hau lehenengo ekuazioan ordezkatuz

$$xu + \frac{uy^2}{x} = 1 \Longrightarrow \frac{(x^2 + y^2)u}{x} = 1 \Longrightarrow u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Hau da,

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i. \tag{1.3.2}$$

$x = 0$ bada, (1.3.1) sistema $-yv = 1$, $yu = 0$ berridazten da; hots, $u = 0$ eta $v = -1/y$ dira, eta (1.3.2) ere erabil daiteke.

1.3.1 teorema. *(Aljebraren oinarrizko teorema) Izan bitez $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ guztietarako, $a_n \neq 0$ izanik, eta $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Orduan, P-k n erro konplexu ditu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,*

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n).$$

Definizioa. Izan bedi $z = x + yi \in \mathbb{C}$. $\overline{z} = x - yi$ zenbakia z-ren *konjugatua* da.

Adibideak. $\overline{3 - i} = 3 + i$, $\overline{2 + 5i} = 2 - 5i$.

1.3.2 proposizioa (Konjugatuaren propietateak)**.** *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) $\overline{\overline{z}} = z$.

(ii) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ *eta* $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

(iii) $z = \overline{z}$ *da, baldin eta soilik baldin* $\operatorname{Im} z = 0$ *bada; hots,* $z \in \mathbb{R}$ *bada.*

(iv) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *eta* $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

(v) $\overline{-z} = -\overline{z}$ *da, eta* $z \neq 0$ *bada, orduan,* $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$ *da.*

1.3.1 Zenbaki konplexuen adierazpen polarra

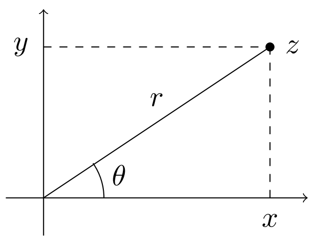
Zenbaki errealak zuzen horizontal baten puntuekin identifikatzen diren bezala, zenbaki konplexuak planoko puntuekin identifika daitezke. Parte erreala zuzen horizontal batean eta parte irudikaria zuzen bertikal batean jarriz, $x + yi = (x, y)$ identifikazioa egiten da.

Zuzen horizontala *ardatz erreala* da, eta zuzen bertikala, *ardatz irudikaria.*

Identifikazio hori egiteko, zenbaki konplexuen forma binomikoa erabili da, baina planoko puntuak deskriba daitezke beste bi kantitate emanez; koordenatu polarrak, hain zuzen.

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C}$. z-ren *modulua* jatorria eta z puntua lotzen dituen zuzenkiaren luzera da, eta $|z|$ ikurraren bidez adierazten da.

Izan bedi $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. z-ren *argumentua* jatorria eta z puntua lotzen dituen zuzenkiak ardatz erreal positiboarekin osatzen duen angelua da.



1.1 irudia. Zenbaki konplexu baten forma binomikoa eta forma polarra: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$.

z-ren argumentua ez da bakarra. θ z-ren argumentua bada, orduan, $\theta + 2k\pi$ ere z-ren argumentua da, $k \in \mathbb{Z}$ edozein izanik.

z-ren *argumentu nagusia* $(-\pi, \pi]$ tartean dagoen z-ren argumentua da, eta $\operatorname{Arg} z$ ikurraren bidez adierazten da. Aldiz, $\arg z$ ikurraren bidez z-ren argumentu guztiek osatzen duten multzoa adieraziko dugu; hots,

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Adibideak.

- $\operatorname{Arg} i = \pi/2, \ \arg i = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$
- $\operatorname{Arg} 1 = 0, \ \arg 1 = \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$
- $\operatorname{Arg}(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4}, \ \arg(-1-i) = \left\{-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Izan bedi $z \in \mathbb{C}$. $x = \operatorname{Re} z$ eta $y = \operatorname{Im} z$ badira, orduan,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}.$$

Bereziki,

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \text{ bada,} \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \text{ badira,} \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0, y < 0 \text{ badira,} \\ \pi/2, & x = 0, y > 0 \text{ badira,} \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0 \text{ badira.} \end{cases}$$

Bestalde, $r = |z|$ eta $\theta \in \arg z$ badira,

$$\operatorname{Re} z = r\cos\theta, \quad \operatorname{Im} z = r\sin\theta.$$

Euler-en formula. $\theta \in \mathbb{R}$ guztietarako

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Definizioa. Izan bedi $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. $|z| = r$ eta $\theta \in \arg z$ badira, z-ren *adierazpen esponentziala* edo *adierazpen polarra* honako hau da:

$$z = re^{i\theta}.$$

1.3.3 proposizioa (Moduluaren propietateak)**.** *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$.*

(i) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(ii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$*; beraz,* $z \neq 0$ *bada,* $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

(iii) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

(iv) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ *eta* $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

(v) $|zw| = |z|\,|w|$.

(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(vii) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

1.3.4 proposizioa (Argumentuaren propietateak)**.** *Izan bitez $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$.*

(i) $\operatorname{Arg} z = 0$ *da, baldin eta soilik baldin* $z \in \mathbb{R}^+$ *bada;* $\operatorname{Arg} z = \pi$ *da, baldin eta soilik baldin* $z \in \mathbb{R}^-$ *bada.*

(ii) $z \notin \mathbb{R}^-$ *bada, orduan,* $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$ *da.*

(iii) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ *da, baina* $\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ *izan daiteke.*

(iv) $z \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ *bada, orduan,* $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg} z$ *da.*

Adierazpen polarrean, biderkaduraren, alderantzikoaren eta zatiduraren kalkulua adierazpen binomikoan baino askoz sinpleagoa da. Izan bitez $z = re^{i\theta}$ eta $w = \rho e^{i\varphi}$. Orduan,

- $z \cdot w = re^{i\theta}\rho e^{i\varphi} = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$,
- $z^{-1} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$,
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = \dfrac{r}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)}$.

Berreturak ere errazago kalkulatzen dira adierazpen polarra erabiliz. $z = re^{i\theta}$ baldin bada, eta $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}.$$

Hau da, $|z^n| = |z|^n$ eta $\arg(z^n) = n \arg z$ dira.

Adibidea. $(1+i)^3$ kalkulatzeko, forma binomikoa zein esponentziala erabil daitezke:

$$\begin{aligned}(1+i)^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3 = -2 + 2i,\\ (1+i)^3 &= \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^3 = 2^{3/2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 + 2i.\end{aligned}$$

Hala ere, berretzailea handiagoa bada, forma binomikoa ez da aproposa. Adibidez,

$$(1-i)^{18} = \binom{18}{0}1^{18}(-i)^0 + \binom{18}{1}1^{17}(-i)^1 + \binom{18}{2}1^{16}(-i)^2 + \cdots + \binom{18}{18}1^0(-i)^{18}$$

eta kalkulua oso luzea da. Aldiz, forma esponentziala erabiliz,

$$(1-i)^{18} = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{18} = (\sqrt{2})^{18}e^{-18\frac{\pi}{4}i} = 2^9 e^{-\frac{9\pi}{2}i} = -512i.$$

1.3.5 teorema (De Moivre-ren formula)**.** *Izan bedi* $\theta \in \mathbb{R}$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Froga. Izan bedi $z = e^{i\theta}$. Orduan,

$$\begin{aligned}z^n &= (e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n,\\ z^n &= e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).\end{aligned}$$

□

Adibidea. De-Moivreren formula erabiliz, trigonometriako formula ezagunak froga daitezke. $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ denez, parte errealak eta parte irudikariak berdinduz,

$$\begin{aligned} \cos^2\theta - \sin^2\theta &= \cos(2\theta), \\ 2\cos\theta\sin\theta &= \sin(2\theta). \end{aligned}$$

Zenbaki konplexuen erroak ere adierazpen polarra erabiliz kalkulatzen dira. Izan bitez $z \in \mathbb{C}$ eta $n \in \mathbb{N}$. $z \neq 0$ bada, orduan, z-k n n-garren erro desberdin ditu; hau da, aurki daitezke $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ non $w_i^n = z$ den $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, eta $w_i \neq w_j$, $i \neq j$ bada. Ikus dezagun.

Izan bitez $z = re^{i\theta}$, $\theta = \operatorname{Arg} z$ izanik, eta $w = \rho e^{i\varphi}$, non $w^n = z$ den. Orduan, $k \in \mathbb{Z}$ bada,

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)} \implies \rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

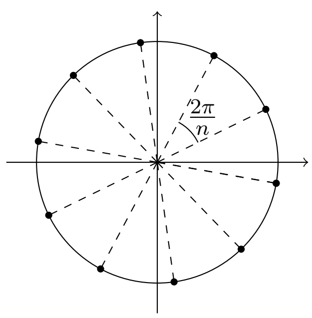
k-ri balioak emanez,

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta}{n}i} \\ w_1 &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2\pi}{n}i} \\ &\cdots\cdots \\ w_{n-1} &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}i} \\ w_n &= \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2n\pi}{n}i} = \sqrt[n]{r}e^{(\frac{\theta}{n}+2\pi)i} = w_0, \end{aligned}$$

eta hemendik aurrera errepikatzen dira lortutako balioak. Ondorioz, $w_0, \ldots, w_{n-1}$ dira z-ren n-garren erro desberdinak. Hots,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{n}i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Erro guztien modulua berdina da, $\sqrt[n]{|z|}$, eta, beraz, z-ren n-garren erroak $\sqrt[n]{|z|}$



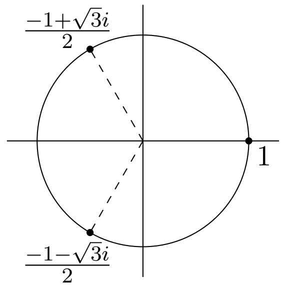
1.2 irudia. Zenbaki konplexu ez-nulu baten n-erroak.

erradiodun zirkunferentziaren gainean daude. Gainera, ondoz ondoko erroen arteko angelua $\dfrac{2\pi}{n}$ anplitudekoa da.

Adibidea. $z = 1$ zenbakiaren erro kubikoak kalkulatuko ditugu.

$z = 1 = e^{0i} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i}$; beraz,

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{1}e^{\frac{0}{3}i} = e^{0i} = 1, \\ w_2 &= \sqrt{1}e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ w_3 &= \sqrt{1}e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$



1.3.2 Zenbaki konplexuen ordena

Zenbaki errealen multzoan ordena oso bat existitzen dela ikusi dugu. Zenbaki konplexuen kasuan, ezin da ordena batek bete behar dituen propietateak betetzen dituen ordenarik definitu.

1.3.3 Zenbaki konplexuen arteko distantzia

Definizioa. Izan bitez $z, w \in \mathbb{C}$. z eta w zenbakien arteko *distantzia* honela definitzen da:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Definizioa. Izan bitez $z_0 \in \mathbb{C}$ eta $R, R_1, R_2 > 0$.

- $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ z_0 zentroko eta R erradioko *bola irekia* edo *disko irekia* da.
- $\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R\}$ z_0 zentroko eta R erradioko *bola itxia* edo *disko itxia* da.
- $A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ z_0 zentroko eta R_1 eta R_2 erradioetako *eraztuna* da.

1.4 Ariketak

1.1. Baieztapen hauetatik, esan zein diren egiazkoak eta zein ez.

(i) $a, b \in \mathbb{Q}$ badira, $a + b, ab \in \mathbb{Q}$ dira.

(ii) $a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ badira, $a + b, ab \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dira.

(iii) $a \in \mathbb{Q}$ eta $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ badira, $a + b, ab \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dira.

(iv) $a^2 \in \mathbb{Q}$ bada, $a \in \mathbb{Q}$ da.

(v) $a^2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ bada, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ da.

1.2. Demagun a eta b arrazionalak direla, $a < b$ eta $b \neq 0$.

(i) Frogatu $a + b\sqrt{2}$ irrazionala dela.

(ii) Frogatu $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ irrazionala dela eta (a, b) tartean dagoela.

1.3. Froga ezazu $\sqrt[3]{2}$ eta $\sqrt[3]{3}$ ez direla zenbaki arrazionalak.

1.4. Froga honetako akatsak zein diren eta akats horien zergatiak azal itzazu.

Izan bedi $x = y$. Orduan,

$$x^2 = xy \implies x^2 - y^2 = xy - y^2 \implies (x + y)(x - y) = y(x - y) \implies$$
$$x + y = y \implies 2y = y \implies 2 = 1.$$

1.5. Aztertu honako arrazoinamendu hau. Zergatik ez da zuzena? Zure erantzuna arrazoitu.

$$\frac{x + 1}{x - 1} \geq 1 \iff x + 1 \geq x - 1 \iff 1 \geq -1.$$

$1 \geq -1$ desberdintza egia denez, $\dfrac{x + 1}{x - 1} \geq 1$ desberdintza ere egia da x guztietarako, bereziki $x = -1$ denean. Orduan,

$$0 = \frac{-1 + 1}{-1 - 1} \geq 1.$$

1.6. Ebatz itzazu inekuazio hauek:

(i) $x^2 - 2x + 2 > 0$ *Em.:* $x \in \mathbb{R}$

(ii) $x^2 - 2x - 2 > 0$ *Em.:* $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, +\infty)$

(iii) $x^2 - 4x + 4 > 0$ *Em.:* $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

(iv) $x^2 + x + 1 > 2$ *Em.:* $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

(v) $x^2 + x + 2 > 1$ *Em.:* $x \in \mathbb{R}$

(vi) $x(2x - 1)(3x - 5) \leq 0$ *Em.:* $x \in (-\infty, 0] \cup [1/2, 5/3]$

(vii) $x^3 - 3x > 2$ *Em.:* $x \in (2, +\infty)$

1.7. Ebatzi inekuazio hauek:

(i) $\dfrac{1}{x} < x$ *Em.:* $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

(ii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$ *Em.:* $x \in (0, 1)$

(iii) $\dfrac{3}{x-2} \leq \dfrac{5}{x-6}$ *Em.:* $x \in [-4, 2) \cup (6, \infty)$

(iv) $\dfrac{3x^2+1}{1-x^2} < 0$ *Em.:* $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(v) $\dfrac{x}{x+2} > \dfrac{x+5}{3x+1}$ *Em.:* $x \in (-\infty, -2) \cup \Big(\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}, -\dfrac{1}{3}\Big) \cup \Big(\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}, \infty\Big)$

1.8. Aurki itzazu honako baldintza hauek betetzen dituzten x errealak:

(i) $|x+1||x-1| = 0$ *Em.:* $x \in \{-1, 1\}$

(ii) $|x-1||x-2| = 3$ *Em.:* $x \in \Big\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\Big\}$

(iii) $|x-1| + |x-2| > 1$ *Em.:* $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

(iv) $|x+2| \leq |x-5|$ *Em.:* $(-\infty, 3/2]$

(v) $x + |x-2| = 1 + |x|$ *Em.:* $x \in \{-1, 1, 3\}$

(vi) $|x-4| - |x^2-9| < 1$ *Em.:* $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$

(vii) $|x^2-5x| > |x^2| - |5x|$ *Em.:* $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 5)$

(viii) $x + |x^2-4| < 1 + |x-3|$ *Em.:* $x \in (-4, 0)$;

1.9. Ebatzi inekuazio hauek:

(i) $|x^2+3| \leq 10$ *Em.:* $x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$

(ii) $|x^2-4| \geq 1$ *Em.:* $x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [\sqrt{5}, \infty)$

(iii) $|x(1-x)| < \dfrac{1}{2}$ *Em.:* $x \in \Big(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\Big)$

1.10. Ebatzi:

(i) $Bigl|\dfrac{7x+2}{4x-3}\Big| \leq 2$ *Em.:* $x \in \Big(-\infty, \dfrac{4}{15}\Big] \cup [8, \infty)$

(ii) $\Big|\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}\Big| > 2$ *Em.:* $x \in (-\infty, -1) \cup \Big(-1, \dfrac{1}{4}\Big)$

(iii) $\Big|\dfrac{x^2+x+2}{x-5}\Big| > 1$ *Em.:* $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 5) \cup (5, \infty)$

(iv) $\Big|\dfrac{x-3}{x^2-4}\Big| < \dfrac{1}{2}$ *Em.:* $x \in \Big(-\infty, -1-\sqrt{11}\Big) \cup \Big(-1+\sqrt{11}, \infty\Big)$

(v) $\Big|\dfrac{x^2+x+3}{x^2-4}\Big| \leq 1$ *Em.:* $x \in (-\infty, -7] \cup [-1, 1/2]$

(vi) $\left|\dfrac{x^2-13}{x-7}\right| \geq 1$ *Em.:* $x \in (-\infty,-5] \cup [-2,3] \cup [4,7) \cup (7,+\infty)$

(vii) $\left|\dfrac{x^2-13}{x^2-6x+5}\right| \leq 1$ *Em.:* $x \in (-\infty,-1] \cup [3,4]$

(viii) $\left|\dfrac{x^2-1}{x+5}\right| \leq 1$ *Em.:* $x \in [-2,3]$

(ix) $|3x-5|-|2x+3| > 0$ *Em.:* $x \in \left(-\infty,\dfrac{2}{5}\right) \cup (8,\infty)$

(x) $\dfrac{1}{|x+2|} - \dfrac{1}{|x-5|} \geq 0$ *Em.:* $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,3/2]$

(xi) $\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| > |x|$ *Em.:* $x \in (-\sqrt{2},1) \cup (1,\sqrt{2})$

1.11. (i) Izan bitez $A \subset B \subset \mathbb{R}$, A eta B bornatuak. Nola daude ordenatuta $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ eta $\inf B$?

(ii) Izan daiteke $A \subset B$ eta $A \neq B$, baina $\sup A = \sup B$?

(iii) Izan daiteke $A \cap B = \emptyset$ eta $\sup A = \sup B$?

(iv) Izan daiteke $\sup A = \inf A$?

1.12. (i) Izan bitez A eta B bi multzo bornatu, eta

$$A+B = \{x+y \ : x \in A \ , \ y \in B\}.$$

Frogatu

$$\begin{aligned}\sup(A+B) =& \sup A + \sup B,\\ \inf(A+B) =& \inf A + \inf B\end{aligned}$$

direla.

(ii) Izan bedi $-A = \{-a \ : \ a \in A \ \}$. Frogatu honako berdintza hauek:

$$\begin{aligned}\sup(-A) &= -\inf A,\\ \inf(-A) &= -\sup A.\end{aligned}$$

(iii) Izan bitez $A = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ eta $C = \{x_n + y_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Frogatu:

$$\begin{aligned}\sup C &\leq \sup A + \sup B,\\ \inf C &\geq \inf A + \inf B.\end{aligned}$$

1.13. x eta y zenbakien maximoa $\max(x,y)$ moduan adierazten da, eta minimoa $\min(x,y)$ moduan. Froga ezazu honako berdintza hauek betetzen direla:

$$\begin{aligned}\max(x,y) =& \frac{x+y+|y-x|}{2},\\ \min(x,y) =& \frac{x+y-|y-x|}{2}.\end{aligned}$$

1.14. $\mathbb{R}$-ren azpimultzo hauetarako, aztertu ea bornatuak diren (goitik edo behetik), eta eman maximoa, minimoa, supremoa eta infimoa, existitzen baldin badira:

(i) $\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

(ii) $[13/7, 5\pi/7] \cap \mathbb{Q}$

(iii) $\left(-\infty, 65/7\right] \setminus \mathbb{Q}$

(iv) $(-1, 8] \cup \{\pi^2\}$

(v) $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)} \leq 0\right\}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b < c < d$.

(vi) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

(vii) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ (x-a)(x-b)(x-c) > 0\right\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$.

1.15. Kalkulatu eragiketa hauen emaitzak:

(i) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i)$ *Em.:* $-2i$

(ii) $(2 - 3i)(-2 + i)$ *Em.:* $-1 + 8i$

(iii) $(3 + i)(3 - i)\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}i\right)$ *Em.:* $2 + i$

(iv) $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i}$ *Em.:* $-2/5$

(v) $\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ *Em.:* $i/2$

(vi) $(1 - i)^4$ *Em.:* -4

1.16. Kalkulatu $(2 - i)z^2 - (3 + i)z + 1 = 0$ ekuazioaren soluzio konplexuak.

Em.: $\dfrac{3-i}{2}, -\dfrac{1+i}{2}$

1.17. Izan bitez $|z| = r$ eta $\theta \in \arg z$. Eman $\overline{z}$, $1/z$ eta $1/z^2$ zenbakien moduluak eta argumentuak.

1.18. Kalkulatu berretura hauek, zenbakien forma polarra erabiliz:

(i) $(-1 + i)^7$ *Em.:* $-8 - 8i$

(ii) $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$ *Em.:* $-512 - 512\sqrt{3}i$

1.19. Kalkulatu honako adierazpen hauen balio konplexu guztiak:

(i) $\sqrt{1 - \sqrt{3}i}$ *Em.:* $\pm\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sqrt[4]{-16}$ *Em.:* $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

(iii) $\sqrt[6]{8}$ *Em.:* $\pm\sqrt{2}, \dfrac{\pm 1 \pm \sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$

2. gaia

Zenbaki errealen segidak

Gai honetan zenbaki errealen segidak landuko dira. Ikusiko den bezala, segida bat zenbaki errealen zerrenda ordenatu eta infinitua da. Zerrenda ordenatua izateak zerrenda horretako elementu bakoitzak ≪toki≫ bat betetzen duela adierazten du.

Ideia horren arabera, $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ eta $\{1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$ zerrendak zenbaki errealen segidak dira. Aldiz, $(0, 1)$ tarteko puntuek ez dute segida bat osatzen, ezinezkoa baita esatea zein den lehenengo gaia edo zein hamargarrena.

Segidekin lotuta, garrantzizko kontzeptu bat agertzen da; limitearena, hain zuzen. Jakin nahi izango da n handitu ahala, segidaren n. gaia puntu finko batetik gero eta hurbilago egongo den. Horrela balitz, segida konbergentea dela esango dugu, eta zenbaki finko hori segidaren limitea izango da. Arestian emandako $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ segidaren gaiak gero eta handiagoak dira, balio batera hurbiltzen ez direlarik; aldiz, $\{1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots\}$ segidaren gaiak 0-tik gero eta hurbilago daude. Ikusiko den bezala, segida horren limitea 0 da.

2.1 Oinarrizko definizioak eta adibideak

Atal honetan zenbaki errealen segidaren definizioa ematen da, eta adibide batzuk proposatzen dira, kontzeptua hobeto barneratzeko. Adibide horien artean, arlo askotan aplikazioak dituzten segida aritmetikoak eta segida geometrikoak aurkituko ditugu.

Definizioa. *Zenbaki errealen segida* zenbaki arrunten multzotik zenbaki errealen multzora doan aplikazio edo funtzioa da, hots:

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow a(n). \end{aligned}$$

$a(n)$-k, hau da, n zenbaki arruntaren irudiak a segidaren bidez, segidaren n-garren lekuan dagoen zenbaki erreala adierazten du. Normalean, segidaren n-garren gaia a_n-z adieraziko dugu, eta segidaren *gai orokorra* dela esango dugu.

$$a(n) = a_n = a \text{ segidaren gai orokorra.}$$

Orokorrean, segida bat funtzio edo aplikazio baten bidez adierazi beharrean, segidaren lehenengo gaiak edo gai orokorraren adierazpena emanez adieraziko dugu: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Oharra. Ez dira segida eta segidaren gaiek osatzen duten multzoa nahastu behar. Adibidez, $a_n = (-1)^n$ bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, \dots,\}$; baina bakarrik bi zenbaki desberdin agertzen dira segidaren gaiek osatzen duten multzoan, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1\}$.

Adibideak:

- $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ segida bat da. Segida hori definitzen duen aplikazioa honako hau da:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\to a(n) = n. \end{aligned}$$

  Beraz, segidaren gai orokorra $a_n = n$ da. Hau da, segida hori adierazteko honela egingo dugu: $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- $\{1, 4, 9, 16, \dots\} = \{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- $\{1, 1/2, 1/3, \dots\} = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

- $\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$ segidaren kasuan, argi ikusten da toki bakoitietan dauden gaiak negatiboak direla, eta toki bikoitietan daudenak, aldiz, positiboak. Segida horren gai orokorra $a_n = (-1)^n n$ da.

- Batzuetan, segidaren n-garren gaia kalkulatzeko, formula desberdinak erabiltzen dira, n-ren balioen arabera. Adibidez,

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n^2+1}, & n \text{ bakoitia bada,} \\ \dfrac{2^n+1}{2^n-1}, & n \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$

  Hemen, $a_1 = \dfrac{1+1}{1^2+1} = 1$, $a_2 = \dfrac{2^2+1}{2^2-1} = \dfrac{5}{3}$, $a_3 = \dfrac{3+1}{3^2+1} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$, ...

- Beste batzuetan, segida errepikapen-formula baten bidez definitzen da; hau da, segidaren gai bat kalkulatzeko formula bat aplikatzen zaio aurreko gaiari, edo aurreko gai batzuei. Adibidez,

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(a_n + \dfrac{2}{a_n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Horrela, n-ri balioak emanez,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
a_2 &= \frac{1}{2}\Big(a_1 + \frac{2}{a_1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{2}{1}\Big) = \frac{3}{2},\\
a_3 &= \frac{1}{2}\Big(a_2 + \frac{2}{a_2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\Big) = \frac{17}{12},\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Errepikapen-formula baten bidez definitutako segida baten n-garren gaia kalkulatzeko, beharrezkoa da aurreko gaiak, $a_1, \dots, a_{n-1}$, kalkulatzea aurretik. Praktikan, segidaren hasierako gai batzuk kalkulatu ahal izango ditugu.

Definizioa. Izan bedi $d \in \mathbb{R}$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida aritmetikoa* dela esango dugu, baldin eta

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d, \quad \forall\, n \geq 2.$$

d zenbakia segidaren *diferentzia* dela diogu.

Adibideak:

- $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ $d = 1$ diferentziaduneko segida aritmetikoa da.
- $\{1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots\}$ $d = dfrac12$ diferentziaduneko segida aritmetikoa da.
- $\{1, -2, -5, -8, \dots\}$ $d = -3$ diferentziaduneko segida aritmetikoa da.

2.1.1 proposizioa (Segida aritmetiko baten lehenengo n gaien batura)**.** *Izan bitez $d \in \mathbb{R}$ eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d diferentziaduneko segida aritmetikoa. Orduan,*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Froga. Izan bedi $n \in \mathbb{N}$. S_n bi eratan idatziko dugu.

$$
\begin{aligned}
S_n =& a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\\
=& a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d),\\
S_n =& a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1\\
=& (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \cdots + a_1.
\end{aligned}
$$

Bi adierazpen horien batura kalkulatuko dugu, lehen adierazpenaren k-garren batugaia bigarren adierazpenaren k-garren batugaiarekin batuz. Horrela,

$$
\begin{aligned}
2S_n =& \big(2a_1 + (n-1)d\big) + \big(2a_1 + (n-1)d\big) + \cdots + \big(2a_1 + (n-1)d\big)\\
=& n\big(2a_1 + (n-1)d\big) = n\big(a_1 + a_1 + (n-1)d\big)\\
=& n(a_1 + a_n).
\end{aligned}
$$

Beraz, $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ da. $\square$

Definizioa. Izan bedi $r \in \mathbb{R}$. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida geometrikoa* dela diogu, baldin eta

$$a_n = a_{n-1}\, r = a_1\, r^{n-1}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

r segida geometrikoaren *arrazoia* dela esan ohi da.

Adibideak:

- $\left\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots\right\}$ $r = \frac{1}{10}$ arrazoiduneko segida geometrikoa da.
- $\{-3, -6, -12, -24, \dots\}$ $r = 2$ arrazoiduneko segida geometrikoa da.
- $\left\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{5^2}, \frac{1}{5^3}, -\frac{1}{5^4}, \dots\right\}$ $r = -\frac{1}{5}$ arrazoiduneko segida geometrikoa da.

2.1.2 proposizioa (Segida geometriko baten lehenengo n gaien batura)**.** *Izan bitez $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ r arrazoiduneko segida geometrikoa. Orduan,*

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.1}$$

Froga. Izan bedi $n \in \mathbb{N}$. Idatziko ditugu S_n eta r eta S_n-ren arteko biderkadura:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}, \\ rS_n &= \qquad a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n. \end{aligned}$$

Bi adierazpen horien kendura honako hau da:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n. \tag{2.1.2}$$

$r \neq 1$ denez, $1 - r$-rekin zati dezakegu (2.1.2) berdintzaren bi ataletan, (2.1.1) lortzeko. □

1. gaian definitu dugun multzoen bornaketa segidaren gaiek osatzen duten multzoari aplika diezaiokegu.

Definizioak. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *goitik bornatua* dela diogu, baldin eta existitzen bada $M \in \mathbb{R}$ non $a_n \leq M$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *behetik bornatua* dela diogu, baldin eta existitzen bada $m \in \mathbb{R}$ non $a_n \geq m$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

(iii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *bornatua* dela diogu, baldin eta goitik eta behetik bornatua bada; hots, existitzen bada $K \in \mathbb{R}$ non $|a_n| \leq K$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Definizioak. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *gorakorra* dela diogu, baldin eta $a_{n+1} \geq a_n$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, edo, baliokideki, $a_m \geq a_n$ bada $m, n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $m > n$ izanik.

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *beherakorra* dela diogu, baldin eta $a_{n+1} \leq a_n$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, edo, baliokideki, $a_m \leq a_n$ bada $m, n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $m > n$ izanik.

Segida gorakorrak eta beherakorrak segida *monotonoak* direla esan ohi da.

2.1.3 proposizioa. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.*

(i) Existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ gorakorra den, orduan, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ behetik bornatua da.

(ii) Existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ beherakorra den, orduan, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua da.

Froga. (i) ataleko froga egingo dugu soilik, (ii) atalarena antzekoa delako. $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ gorakorra denez, $a_n \geq a_{n_0}$ da $n \geq n_0$ guztietarako. Izan bedi $M = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$. Orduan,

$$a_n \geq M, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

hau da, M $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren behe-bornea da. □

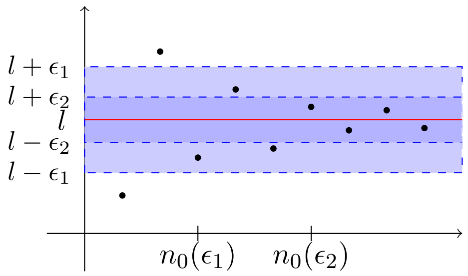
2.2 Zenbaki errealen segiden limitea

Zenbaki errealen segiden limitea distantziarekin erlazionatutako kontzeptua da. Zenbaki erreal bat segida baten limitea da, segidaren gaiak zenbaki horretatik nahi den bezain hurbil baldin badaude, n behar den bezain handia hartuz gero. Has gaitezen definizio zehatzarekin.

Definizioa. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $l \in \mathbb{R}$. l zenbakia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren *limitea* dela diogu eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ moduan adieraziko dugu, edo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidak l-rantz jotzen duela diogu, eta $a_n \to l$ moduan adieraziko dugu baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \epsilon.$$

1.2.8 proposizioaren arabera, $|a_n - l| < \epsilon$ da, baldin eta soilik baldin $-\epsilon < a_n - l < \epsilon$ bada, eta desberdintza-kate horretan l batuz, $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ geratzen da. Hau da, $\{a_n\}$ segidaren limitea l bada, $\epsilon > 0$ bakoitzerako existitu behar da $n_0 \in \mathbb{N}$, non a_n l-n zentratutako eta 2ϵ luzerako tarte batean mantentzen den n_0 indizetik aurrera, 2.1 irudian erakusten den bezala.



2.1 irudia. Zenbaki errealen segiden limitearen esanahi geometrikoa.

Aurreko definizioan, segidaren limitea zenbaki erreala da. Gerta daiteke segidaren gaiak nahi den bezain handiak egiten direla n handituz doanean, edo nahi den bezain txikiak. Horrela, limite infinituak ere defini daitezke.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ dela diogu, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} \, : \, \forall\, n \geq n_0 \quad a_n > M.$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ dela esaten da, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} \, : \, \forall\, n \geq n_0 \quad a_n < M.$$

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. Baldin eta existitzen bada $l \in \mathbb{R}$ non $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ den, orduan, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida *konbergentea* dela diogu. Bestela, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dibergentea* dela esaten da. Segida dibergenteen artean, hiru mota desberdin daitezke:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $+\infty$*-rantz dibergentea* dela diogu.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $-\infty$*-rantz dibergentea* dela diogu.

(iii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidak ez badu limite errealik ez eta limite infiniturik ere, *oszilatzailea* dela esaten da.

Adibideak:

- Izan bitez $a \in \mathbb{R}$ eta $a_n = a$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Ikus dezagun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dela.

  Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $|a_n - a| = 0 < \epsilon$; beraz, $n_0 = 1$ hartuz, betetzen da limitearen definizioa, $l = a$ izanik.

- Izan bedi $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Frogatuko dugu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ dela.

  Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Arkimedesen propietatearen ondorio bezala, 1.2.6 korolarioa, ikusi genuen existitzen dela $n_0 \in \mathbb{N}$ non $1/n_0 < \epsilon$ den. Gainera, $n \geq n_0$ bada, $1/n \leq 1/n_0$ da; beraz,

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

  Limitearen definizioa betetzen da $l = 0$ balioarekin.

- Izan bedi $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Frogatuko dugu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ dela.

  Izan bedi $M \in \mathbb{R}$ edozein. $\mathbb{N}$ multzoa bornatua ez denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n_0 > M$ den. $n \geq n_0$ guztietarako, $n \geq n_0 > M$ da; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

- Izan bedi $a_n = 1 - n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Ikus dezagun $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ dela.

  Izan bedi $M \in \mathbb{R}$ edozein. $n_0 > -M + 1$ hartuz, $n \geq n_0$ guztietarako, $1 - n \leq 1 - n_0 < M$ da; beraz, $\lim_{n\to\infty}(1 - n) = -\infty$ da.

- Izan bedi $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oszilatzailea da.

  Kasu honetan, $a_n = 1$ da, n bikoitia bada, eta $a_n = -1$, n bakoitia bada.

  $l = 1$ ezin da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limitea izan, zeren eta $\epsilon = 1$ hartuz, $n_0 \in \mathbb{N}$ guztietarako existituko baita n bakoitia, $n \geq n_0$ dena, eta, orduan, $|a_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > \epsilon$.

  $l = -1$ ezin da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ izan, $\epsilon = 1$ hartuz, $n_0 \in \mathbb{N}$ guztietarako existituko delako $n \geq n_0$ bikoitia, eta, beraz, $|a_n + 1| = |1 + 1| = 2 > \epsilon$.

  $l \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ bada, ezin da $\{a_n\}$ segidaren limitea ere izan.

  $\epsilon = \dfrac{\min\{|l - 1|, |l + 1|\}}{2} > 0$ hartzen badugu, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako

$$|a_n - l| = \left\{\begin{array}{ll} |1 - l| & n \text{ bikoitia bada} \\ |-1 - l| & n \text{ bakoitia bada} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} |1 - l| & n \text{ bikoitia bada} \\ |1 + l| & n \text{ bakoitia bada} \end{array}\right\} > \epsilon.$$

  Beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ez da zenbaki erreala, eta argi ikusten da limitea ezin dela infinitua izan. Ondorioz, $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida oszilatzailea da.

2.2.1 teorema (Limitearen bakartasuna)**.** *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea bada, orduan, haren limitea bakarra da; hots,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \textit{eta} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = m \quad \Longrightarrow \quad l = m.$$

Froga. Absurdora eramanez, demagun existitzen direla $l, m \in \mathbb{R}$ non $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} a_n = m$ eta $l \neq m$ diren.

Izan bedi $\epsilon = \dfrac{|l-m|}{2} > 0$. Orduan, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ denez,

$$\exists\, n_1 = n_1(\epsilon/2) \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Era berean, $\lim_{n\to\infty} a_n = m$ denez,

$$\exists\, n_2 = n_2(\epsilon/2) \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_2 \quad |a_n - m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Izan bedi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Orduan, $n \geq n_0$ bada

$$|l-m| \leq |l-a_n| + |a_n - m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = \frac{|l-m|}{2}$$

eta hori ez da posible $|l-m|$ zenbaki positiboa delako. Beraz, $l = m$ da. □

2.2.2 proposizioa. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea. Orduan, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bornatua da.*

Froga. Izan bedi $l \in \mathbb{R}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limitea; hau da,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \epsilon.$$

Har dezagun $\epsilon = 1$. Orduan, existitzen da $n_1 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_1$ guztietarako, $|a_n - l| < 1$ den. Balio absolutuaren desberdintza triangeluarra erabiliz, $n \geq n_1$ bada, $|a_n| \leq |a_n - l| + |l| < |l| + 1$.

Izan bedi $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n_1}|, 1 + |l|\}$.

$$|a_n| \leq K, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beraz, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua da. □

Oharra. 2.2.2 proposizioaren alderantzizkoa, orokorrean, ez da egia. Hau da, segida bornatuek ez dute zertan konbergenteak izan. Adibidez, $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua da, baina ez da konbergentea.

2.2.3 proposizioa. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida.*

(i) *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida gorakorra eta goitik bornatua bada, konbergentea da, eta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida beherakorra eta behetik bornatua bada, konbergentea da, eta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Froga. (i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ goitik bornatua denez, supremoaren axiomagatik, segidaren gaiek osatzen duten multzoak supremoa du. Izan bedi $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. 1.2.4 proposizioaren arabera, edozein $\epsilon > 0$ emanda, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\alpha - \epsilon < a_{n_0}$ den. Gainera, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra denez, $a_n \geq a_{n_0} > \alpha - \epsilon$ da $n \geq n_0$ guztietarako.

Bestaldetik, α segidaren goi-borne bat denez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $a_n \leq \alpha < \alpha + \epsilon$. Beraz,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad \alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$$

eta horrek esan nahi du $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ dela.

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ behetik bornatua denez, segidaren gaiek osatzen duten multzoaren infimoa existitzen da. Izan bedi $\beta = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. 1.2.4 proposizioan ikusi den bezala, $\epsilon > 0$ bakoitzerako existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_{n_0} < \beta + \epsilon$ den. Gainera, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beherakorra denez, $n \geq n_0$ bada, $a_n \leq a_{n_0} < \beta + \epsilon$ da.

Aldi berean, β segidaren behe-borne bat denez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $a_n \geq \beta > \beta - \epsilon$. Beraz,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad \beta - \epsilon < a_n < \beta + \epsilon;$$

hau da, $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ da. $\square$

2.3 Infinitesimoak

Aipamen berezia merezi dute 0-ra konbergitzen duten segidek, limiteen propietate aritmetikoak frogatzeko lagungarriak baitira.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bada, orduan, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *infinitesimoa* dela diogu.

2.3.1 proposizioa. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak. Baldin eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bornatua bada eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ bada, orduan, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ da. Hots, segida bornatu baten eta inifinitesimo baten arteko biderkadura infinitesimoa da.*

Froga. Honako hau frogatu behar dugu:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n b_n| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua denez, existitzen da $M > 0$ non $|a_n| \leq M$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Bestalde, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ denez eta $\epsilon/M > 0$, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $|b_n| < \dfrac{\epsilon}{M}$ den.

Beraz, $n \geq n_0$ guztietarako $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < M\dfrac{\epsilon}{M} = \epsilon$, frogatu nahi genuen bezala. $\square$

Adibidea. 2.3.1 proposizioa erabiliko dugu $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = 0$ dela frogatzeko.

$a_n = \sin(n^2)$ eta $b_n = \frac{1}{n}$ baldin badira, $|\sin(n^2)| \le 1$ da, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; hau da, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bornatua da. Bestalde, ikusi dugu $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ dela. Ondorioz, 2.3.1 proposizioaren arabera, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2)}{n} = 0$ da.

2.3.2 proposizioa. *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoak badira, orduan, $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ere infinitesimoak dira.*

Froga. Lehenengo eta behin, frogatuko dugu $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa dela; hau da, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$ dela. Izan bedi $\epsilon > 0$, edozein. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ denez,

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \ge n_1 \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Era berean, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ denez,

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \ge n_2 \quad |b_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Orduan, $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ bada, $n \ge n_0$ guztietarako,

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

frogatu nahi genuen bezala.

Bestalde, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa bada, 2.2.2 proposizioaren arabera, bornatua da; eta 2.3.1 proposizioan ikusi dugu infinitesimo bat biderkatzen badugu segida bornatu batekin infinitesimo bat lortzen dela; beraz, $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa da. $\square$

Berehalakoa da honako propietate hau frogatzea.

2.3.3 proposizioa. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak eta demagun $|a_n| \le |b_n|$ dela $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Orduan, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa bada, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ere infinitesimoa da.*

Adibidea. Lehenago aztertu dugun $\frac{\sin n^2}{n}$ segidaren limitea kalkulatzeko, 2.3.3 proposizioa ere erabil daiteke. Alde batetik,

$$\left|\frac{\sin n^2}{n}\right| \le \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bestalde, jadanik frogatu dugu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ dela. Beraz, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2}{n} = 0$ da.

Zenbaki errealen segida baten limitearen eta infinitesimo baten definizioak gogoratuz, bistakoa da honako proposizio honek ziurtatzen duena.

2.3.4 proposizioa. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $l \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ da, baldin eta soilik baldin $\{a_n - l\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa bada.*

2.4 Limiteak eta eragiketa aljebraikoak

2.3 atalean ikusi dugu infinitesimoen baturak eta biderkadurak infinitesimoak direla. Atal honetan, infinitesimoen laguntzaz, segida konbergenteen baturen eta biderkaduren limiteak kalkulatuko ditugu.

2.4.1 proposizioa. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergenteak, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ izanik. Orduan,*

(i) *$\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b.$$

(ii) *$\{a_n\, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da eta*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab.$$

(iii) *$c \in \mathbb{R}$ guztietarako, $\{c\, a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da, eta*

$$\lim_{n\to\infty}(c\, a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n = c\, a.$$

(iv) *Baldin eta $b \neq 0$ bada, orduan, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $b_n \neq 0$ den $n \geq n_0$ guztietarako, eta, beraz, $\big\{1/b_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida da. Gainera,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b}.$$

(v) *Baldin eta $b \neq 0$ bada, orduan, $\big\{a_n/b_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergentea da, eta*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

(vi) *Baldin eta $a > 0$ bada, orduan, $\{{a_n}^{b_n}\}$ ere konbergentea da, eta*

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = a^b.$$

Froga. 2.3.4 proposizioaren arabera, $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n - b\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoak dira.

(i) 2.3.2 proposizioak ziurtatzen digu $\{a_n - a + b_n - b\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida infinitesimoa dela. Baina $a_n - a + b_n - b = a_n + b_n - (a + b)$ denez, berriro 2.3.4 proposizioa kontuan hartuz, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ da.

(ii) Orain, $\{a_n b_n - ab\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa dela frogatu behar dugu. $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a).$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea denez, bornatua da; beraz, 2.3.1 proposizioaren arabera, $\{a_n(b_n - b)\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa da. Bestalde, $c_n = b$ segida konstantea bornatua da. Arrazoinamendu beragatik, $\{b(a_n - a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa da. Azkenik, infinitesimoen batura infinitesimoa denez, frogatuta geratzen da $\{a_n b_n - ab\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesimoa dela; hots, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ dela.

(iii) Segida konstante baten limitea konstantea bera denez, atal hau (ii) atalaren ondorioa da.

(iv) Lehenengo eta behin, froga dezagun existitzen dela $n_0 \in \mathbb{N}$ non $|b_n| > |b|/2$ den $n \geq n_0$ guztietarako. $b \neq 0$ denez, $|b|/2 > 0$ da, eta, limitearen definizioagatik, existitu egiten da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $|b_n - b| < |b|/2$ den $n \geq n_0$ guztietarako. 1.2.7 proposizioaren (iv) ataletik,

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

1.2.8 proposizioaren (i) atala kontuan hartuz,

$$-\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

eta ezkerreko desberdintzan $|b|$ batuz, $|b_n| > |b|/2$ da $n \geq n_0$ guztietarako, frogatu nahi genuen bezala. Bereziki, $|b_n| > 0$ da, eta, ondorioz, $b_n \neq 0$, $n \geq n_0$ bada.

Orain, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ dela frogatzea falta zaigu, edo $\left\{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right\}$ infinitesimoa dela.

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b\, b_n} = -\frac{1}{b}\frac{1}{b_n}(b_n - b).$$

Ikusi dugun bezala, $|b_n| \geq |b|/2$ da $n \geq n_0$ guztietarako; beraz, $|1/b_n| \leq 2/|b|$ da; hots $\{1/b_n\}_{n\geq n_0}$ segida bornatua da. 2.3.1 proposizioaren arabera, $\left\{\frac{b_n - b}{b_n}\right\}$ infinitesimoa da, eta, azkenik, proposizio honen (iii) atalagatik, $\left\{-\frac{1}{b}\frac{b_n - b}{b_n}\right\}$ ere infinitesimoa da.

(v) (ii) eta (iv) atalen ondorioa da. □

Oharra. 2.4.1 proposizioan segiden limiteak zenbaki errealak direla suposatu dugu. Batzuetan, segida baten limitea infinitua izan arren, zerbait esan daiteke baturen eta biderkaduren limiteen balioei buruz. Bereziki,

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, orduan, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$ da.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, orduan, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$ da.

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ badira, orduan, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$ da.

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ badira, orduan, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$ da.

(v) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, orduan, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ da.

(vi) Existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_n \geq 0$ den $n \geq n_0$ guztietarako, eta $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 1$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, orduan, $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = 0$.

(vii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 1$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, orduan, $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = +\infty$ da.

Oharra. Jarraian ematen diren kasuetan, indeterminazioak agertzen direla esan ohi da:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, ezin da ziurtatu zein den $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ badira, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ezin da zehaztu.

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ indeterminazioa da.

(iv) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, ezin da zehaztu $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$.

(v) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n}$ edozein izan daiteke.

(vi) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ badira, $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n}$ indeterminazioa da.

(vii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ badira, ezin da ziurtatu zein den $\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n}$.

2.5 Limiteak eta ordena-erlazioa

Segida baten gaiak haren limitetik gero eta hurbilago daude n gero eta handiagoa egiten denean. Orduan, segida baten limitea beste batena baino handiagoa bada, pentsa daiteke segidaren gaiek desberdintza bera beteko dutela, agian ez n guztietarako, baina bai n behar den bezain handia hartzen bada.

2.5.1 proposizioa. *Izan bitez* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eta* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zenbaki errealen segida konbergenteak,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *eta* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *izanik.* $a < b$ *bada, orduan, existitzen da* $n_0 \in \mathbb{N}$ *non* $a_n < b_n$ *den* $n \geq n_0$ *guztietarako.*

Froga. $a < b$ denez, $\dfrac{b-a}{2} > 0$ da. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ izateagatik

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \frac{b-a}{2}.$$

Era berean, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ denez,

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_2 \quad |b_n - b| < \frac{b-a}{2}.$$

Izan bedi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. $n \geq n_0$ guztietarako,

$$\begin{aligned} a_n - a \leq |a_n - a| < \frac{b-a}{2} \quad &\Longrightarrow \quad a_n < \frac{b-a}{2} + a = \frac{b+a}{2}; \\ b - b_n \leq |b_n - b| < \frac{b-a}{2} \quad &\Longrightarrow \quad b_n > b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2}. \end{aligned}$$

Bi desberdintzak kateatuz, $a_n < \dfrac{b+a}{2} < b_n$ da $n \geq n_0$ guztietarako. □

Oharra. Izan bitez $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. $a \leq b$ izateak ez du inplikatzen existitzen denik $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_n \leq b_n$ den, $n \geq n_0$ guztietarako.

Adibidez, har ditzagun honako bi segida hauek:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \text{ bada}, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k \text{ bada}; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2k-1 \text{ bada}, \\ 0, & n = 2k \text{ bada}. \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ dira; hau da, $a = b = 0$, baina ez da existitzen $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarako $a_n \leq b_n$ edo $b_n \leq a_n$ diren.

2.5.2 korolarioa. *Izan bitez* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eta* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *segida konbergenteak,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *eta* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *direlarik. Baldin eta* n*-ren infinitu baliotarako* $a_n \leq b_n$ *bada, orduan,* $a \leq b$*.*

Froga. Absurdora eramanez, demagun $a > b$ dela. Orduan, 2.5.1 proposizioaren arabera, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_n > b_n$ den $n \geq n_0$ guztietarako. Baina hori gure hipotesiaren kontra doa. Beraz, $a \leq b$ da, halabeharrez. □

Oharra. Baldin eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ badira, orduan, n-ren infinitu baliotarako $a_n < b_n$ izateak ez du inplikatzen $a < b$ denik.

Adibidez, $a_n = 1/(n+25)$ eta $b_n = 1/n$ badira, $a_n < b_n$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, baina $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ dira. $a = b$ da, alegia.

Jarraian enuntziatuko dugun teoremak limiteak kalkulatzeko metodo bat ematen digu. Demagun aurki daitezkeela bi segida, bataren gaiak aztertzen ari den segidarenak baino txikiagoak direnak, eta bestearenak, aldiz, handiagoak, n guztietarako. Bi segida horiek limite bera badute, arrazonagarria dirudi pentsatzea kalkulatu nahi den limitea limite komun hori izango dela.

2.5.3 teorema (Tarteko segidaren teorema edo sandwicharen erregela)**.** *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak, eta demagun existitzen dela $n_0 \in \mathbb{N}$ non*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{2.5.1}$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergenteak badira $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ izanik, orduan, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ da.

Froga. Izan bedi $\epsilon > 0$, edozein. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ denez,

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_1 \quad l - \epsilon < a_n < l + \epsilon. \tag{2.5.2}$$

Era berean, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$ da; beraz,

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_2 < l - \epsilon < c_n < l + \epsilon. \tag{2.5.3}$$

Izan bedi $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. (2.5.1), (2.5.2) eta (2.5.3) konbinatuz, $n \geq n_3$ guztietarako

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon.$$

Hots, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ da. □

Adibidea. Izan bedi $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$. Kalkula dezagun haren limitea, sandwicharen erregela erabiliz. Alde batetik,

$$a_n \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beste aldetik,

$$a_n \geq \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Azkenik,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+n} = 1.$$

Beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ da.

2.5.4 proposizioa. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak. Baldin eta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bada eta existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_n \leq b_n$ den $n \geq n_0$ guztietarako, orduan, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ da.*

Era berean, baldin eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ bada eta existitzen bada $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_n \leq b_n$ den $n \geq n_0$ guztietarako, orduan, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ da.

2.6 Segida garrantzitsu batzuen limiteak

Atal honetan, maiz agertzen diren limite batzuk kalkulatuko ditugu. Lehenengo eta behin, segida geometrikoen limitea zein den aztertuko dugu.

2.6.1 proposizioa. *Izan bedi $a \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \text{ bada,} \\ 1 & a = 1 \text{ bada,} \\ +\infty & a > 1 \text{ bada,} \\ \nexists & a \leq -1 \text{ bada.} \end{cases}$$

Froga. $a = 0$, $a = 1$ edo $a = -1$ bada, berehalakoa da emaitza. Beraz, $0 < |a| < 1$ eta $|a| > 1$ diren kasuak aztertu behar dira.

Lehenengo eta behin, har dezagun $a > 1$. Kasu horretan, existitzen da $h > 0$ non $a = 1 + h$ den, eta Newton-en binomioaren formula erabiliz,

$$a^n = (1+h)^n = 1 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}h^{n-1} + h^n.$$

$h > 0$ denez, batugai guztiak positiboak dira; beraz, $a^n > \binom{n}{1}h = nh$ da. $\lim_{n\to\infty} nh = +\infty$ denez, 2.5.4 proposizioaren arabera, $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$ da.

$0 < a < 1$ bada, $b = 1/a > 1$ da, eta, ikusitakoaren arabera, $\lim_{n\to\infty} b^n = +\infty$ da. Orduan,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0.$$

$-1 < a < 0$ bada, $a = -b$ da, non $0 < b < 1$ den. $(-1)^n$ segida bornatua denez, $\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n b^n = 0$ da.

Azkenik, $a < -1$ bada, berriro $a = -b$ moduan idatz dezakegu, baina orain $b > 1$ da. Orduan, $a^n = (-1)^n b^n$ da, eta limitea ez da existitzen, gai batzuek $+\infty$-ra jotzen dutelako eta besteek, $-\infty$-ra. □

2.6.2 proposizioa. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *da.*

Froga. $n \geq 2$ bada, $\sqrt[n]{n} > 1$ da. Idatz dezagun $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$. $x_n > 0$ da $n \geq 2$ guztietarako. Frogatu nahi dugu $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dela. $n = (1 + x_n)^n$ denez, Newtonen binomioaren formula erabiliz,

$$n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x_n^{n-1} + x_n^n.$$

Esan bezala, $x_n > 0$ da; beraz, batugai guztiak positiboak dira. eta, ondorioz, $n \geq \binom{n}{2}x_n^2$; hau da,

$$0 \leq x_n^2 \leq \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Sandwicharen erregelaren arabera, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$ da, eta hortik ondorioztatzen da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ dela. □

2.6.3 korolarioa. *P_k k mailako polinomioa bada, orduan,* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$ *da.*

2.6.4 proposizioa. *Izan bedi $a > 0$.* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *da.*

Froga. Froga dezagun $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dela $a > 0$ guztietarako. $a = 1$ bada, nabaria da. Lehenengo eta behin, har dezagun $a > 1$. Orduan,

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}, \quad \forall\, n \geq [a];$$

beraz, sandwicharen erregela eta 2.6.2 proposizioa erabiliz, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Bukatzeko, $0 < a < 1$ bada, $a = 1/b$ da, $b > 1$ izanik. Orduan,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1.$$ □

Dakigunez, n^k, a^n, $n!$ eta n^n infiniturantz dibergenteak dira, $a > 1$ eta $k \in \mathbb{N}$ izanik. Segida horiek ordenatuko ditugu, $+\infty$-ra doazen abiaduraren arabera.

2.6.5 proposizioa. *Izan bitez $a > 1$ eta $k \in \mathbb{N}$ finkoa. Orduan,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Hori guztia honela laburbildu ohi da: $n^k << a^n << n! << n^n$.

Froga. $a > 1$ denez, $a = 1 + h$ da, non $h > 0$ den. Beraz, Newtonen binomioaren formularen arabera,

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} h^m.$$

$h > 0$ denez, batugai guztiak positiboak dira; beraz, $(1+h)^n \geq \binom{n}{m} h^m$, $m = 0, \dots, n$ guztietarako. Har dezagun $m = k+1$. $n \geq k+1$ bada,

$$\begin{aligned}\frac{n^k}{a^n} \leq& \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} h^{k+1}} \\ =& \frac{n^k (k+1)!}{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)h^{k+1}} \\ =& \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-k+1} \cdot \frac{1}{n-k}.\end{aligned}$$

Azken adierazpenean, lehen biderkagaia konstantea da; hurrengo biderkagaiak, azkenekoa izan ezik, $\dfrac{n}{n-j}$ motakoak dira, $j = 0, \dots, k-1$ izanik; beraz, haien limitea 1 da; eta azken biderkagaiaren limitea 0 da. Ondorioz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \cdot \frac{n}{n} \frac{n}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-k+1} \cdot \frac{1}{n-k} = 0.$$

$\dfrac{n^k}{a^n} \geq 0$ denez, sandwicharen erregelagatik, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ da.

$\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$ non zenbakitzailean a faktorea n aldiz errepikatzen den. $n_0 = [2a] + 1$ hartuz, $n \geq n_0$ guztietarako,

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n_0 - 1)} \cdot \frac{a}{n_0} \cdot \frac{a}{(n_0+1)} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n}$$

da, non lehenengo frakzioaren zenbakitzailean a faktorea $n_0 - 1$ aldiz agertzen den. Gainera, $n_0 > 2a$ denez, beste frakzio guztiak $1/2$ baino txikiagoak dira; beraz,

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^{n_0-1}}{(n_0-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} = \frac{(2a)^{n_0-1}}{(n_0-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sandwicharen erregela aplikatuz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ da.

Azkenik, $n \geq 2$ guztietarako,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Hau da, $0 \leq \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n}$ da $n \geq 2$ guztietarako. Sandwicharen erregela aplikatuz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ da. □

Adibideak. Limiteen propietate aljebraikoak eta 2.6.5 proposizioa erabiliz, honako limite hauek kalkula daitezke:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n + 8n^5}{3n^n} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{n^n} + \dfrac{8}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5}{n^n} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{2^n(n^3-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3/2)^n}{n^3-1} = +\infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{3n}}{(3n)!} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{e^m}{m!} = 0.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n(n^5+6n^2-1)}{7^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5}{(7/2)^n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2}{(7/2)^n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(7/2)^n} = 0.$

n-ren faktorialaren limitea, jadanik esan den bezala, $+\infty$ da, eta horrek indetermazioak agerrarazten ditu, adibidez, faktoriala biderkatzen edo zatitzen agertzen bada. Kasu horietan, lagungarria izaten da jarraian ematen den formula.

2.6.6 proposizioa (Stirling-en formula)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$ *da.*

Beraz, segida baten limitean $n!$ agertzen bada biderkatzen edo zatitzen, $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ balioagatik ordezka daiteke.

Adibidea. Stirlingen formula erabiliz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n}{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} 2\sqrt{\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} = 0.$$

2.7 Segiden limiteak kalkulatzeko zenbait metodo

Segida konbergenteen baturen, biderkaduren edo zatiduren limiteak kalkulatzeko, limiteen propietate aljebraikoak erabil daitezke. Hala ere, segida dibergenteen eragiketen bidez definitutako segiden limiteak kalkulatzean, ikusi den bezala, indeterminazioak ager daitezke. 2.6.5 proposizioan, $\dfrac{\infty}{\infty}$ motako indeterminazio batzuk aztertu ditugu, adibidez. Atal honetan, tresna gehiago garatuko ditugu, limiteen propietate aljebraikoak soilik erabiliz kalkulatu ezin diren segiden limiteetan aplikatzeko. Lehenengo eta behin, polinomioen arteko zatidurak aztertuko ditugu. Polinomioak segida dibergenteak dira; beraz, haien zatiduren limiteak aztertzean, ∞/∞ motako indeterminazioa dugu.

2.7.1 proposizioa. *Izan bitez* $P(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$*, non* $a_k \neq 0$ *den, eta* $Q(n) = b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0$*, non* $b_l \neq 0$ *den. Orduan,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_l}, & k = l \text{ bada}, \\ +\infty, & k > l \text{ eta } \dfrac{a_k}{b_l} > 0 \text{ badira}, \\ -\infty, & k > l \text{ eta } \dfrac{a_k}{b_l} < 0 \text{ badira}, \\ 0, & k < l \text{ bada}. \end{cases}$$

Adibideak. 2.7.1 proposizioaren arabera, polinomioen arteko zatiduren limiteak kalkulatzean, haien maila eta koefiziente zuzendariak aztertu behar ditugu. Horren arabera,

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+3n-2}{2n^2-1} = \dfrac{4}{2} = 2$ da, maila bereko polinomioen arteko zatidura bat dugulako; beraz, limitea koefiziente zuzendarien zatidura da.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+3n-2}{2n^2-1} = +\infty$ da, mailarik handiena duen polinomioa zenbakitzailean dagoelako, eta koefiziente zuzendarien zatidura positiboa delako.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n^2-1} = 0$ da, mailarik handiena duen polinomioa izendatzailekoa da.

Funtzio jarraitua zer den 4. gaian azalduko den arren, irakurleak identifika ditzake oinarrizko funtzio jarraituak. Horregatik, gai izango da honako propietate hau erabiltzen.

2.7.2 proposizioa. *Izan bitez $\{a_n\}$ zenbaki errealen segida, $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $l\in D$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ bada eta f jarraitua bada l puntuan, orduan,*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} a_n\big) = f(l).$$

Adibideak. Ezaguna den bezala, logaritmoa funtzio jarraitua da $(0,\infty)$ multzoko puntuetan, eta funtzio trigonometrikoak jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan; beraz,

- $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\Big(\dfrac{en^3-4}{2n^3}\Big) = \ln\Big(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{en^3-4}{2n^3}\Big) = \ln\dfrac{e}{2} = 1-\ln 2.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{(-1)^n}{n} = \sin\Big(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\Big) = 0.$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, $a_n^{b_n}$ segidaren limitea finitua zein infinitua izan daiteke. e zenbakiaren laguntzaz kalkula daitezke mota horretako segiden limiteak.

2.7.3 proposizioa. $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ *segida gorakor bornatua da; beraz, konbergentea da, eta* $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n = e$ *da.*

Modu berean, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ *bada, orduan,* $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\dfrac{1}{x_n}\Big)^{x_n} = e$ *da.*

2.7.4 korolarioa. *Izan bitez* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ *eta* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Orduan,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^A$ *da, non*

$$A = \lim_{n\to\infty} (a_n-1)b_n.$$

Froga. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ denez, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n - 1} = \infty$ da. Izan bedi $x_n = \frac{1}{a_n - 1}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n - 1)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n(a_n-1)b_n} = e^A. \qquad \square$$

Adibidea. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-3}\right)^{n+2} = e^A$ da, non

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-3} - 1\right)(n+2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1-n+3}{n-3}(n+2) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+2)}{n-3} = 2$$

den. Hau da, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n-3}\right)^{n+2} = e^2$ da.

Segida baten n-erroaren limitea kalkulatzea zaila izan daiteke. Jarraian ematen den berdintzak kalkuluak sinplifika ditzake.

2.7.5 proposizioa. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki erreal positiboen segida. Baldin eta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existitzen bada, orduan,*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Adibidea. 2.7.5 proposizioaren arabera,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}\ldots{\cdot}(2n-1)}{2{\cdot}4{\cdot}6{\cdot}\cdots{\cdot}(2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}\ldots{\cdot}(2n-1)(2n+1)}{2{\cdot}4{\cdot}6{\cdot}\cdots{\cdot}(2n)(2n+2)}}{\dfrac{1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}\cdots{\cdot}(2n-1)}{2{\cdot}4{\cdot}6{\cdot}\cdots{\cdot}(2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

∞/∞ motako indeterminazio batzuk Stoltz-en erregelaren bidez ebatz daitezke.

2.7.6 proposizioa (Stoltz-en erregela)**.** *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak, non $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gorakorra den eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Orduan,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Adibidea. Izan bitez $a_n = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n}$ eta $b_n = n\sqrt{n}$. Erraz frogatzen da $\{b_n\}$ segida gorakorra dela, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ izanik. Era berean, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; beraz, ∞/∞ motako indeterminazio bat dugu. Stoltzen erregela erabil daiteke $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ kalkulatzeko. Ikus dezagun:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} - \left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \cdots + \sqrt[3]{n}\right)}{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Azken adierazpeneko izendatzailearen limitea $\infty - \infty$ motako indeterminazioa da. Biderkatuko dugu izendatzailearen konjugatuarekin, honako hau lortzeko:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} & \frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\big((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\big)}{\big((n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}\big)\big((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\big)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\big((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\big)}{(n+1)^3-n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}\big((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\big)}{3n^2+3n+1} = 0.
\end{aligned}
$$

2.8 Azpisegidak

Definizioa. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funtzio gorakorra; hots, $f(n) \geq f(m)$, $n > m$ bada. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{f(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ motako segida $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren *azpisegida* dela diogu.

Horrela, $b_n = a_{f(n)}$ gaia, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ azpisegidaren n-garren gaia da, eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren $f(n)$-garren gaia.

Bestalde, f gorakorra dela kontuan hartuz, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $f(n) \geq n$ beteko da, eta, beraz, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ azpisegidan gaiek dituzten azpiindizeak segidan dituztenak baino txikiagoak edo gehien jota berdinak izango dira.

Adibideak. (i) Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida. Orduan, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bera $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren azpisegida da. Kasu horretan, daukagun aplikazio gorakorra $f(n) = n$ da.

(ii) Edozein $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidatatik asko erabiltzen diren bi azpisegida hauek atera daitezke:

- Toki bakoitietan dauden gaiek osatutakoa; hots, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kasu horretan, $f(n) = 2n - 1$ da.
- Toki bikoitietan dauden gaiek osatutakoa; hots, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Kasu horretan, $f(n) = 2n$ da.

Hemendik aurrera $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren edozein azpisegida $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ moduan adieraziko dugu. Hau da, a_{n_k} azpisegidaren k-garren gaia da, eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren n_k-garrena.

2.8.1 teorema. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida eta $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ haren azpisegida.*

(i) Baldin eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ izanik, orduan, $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ere konbergentea da, eta $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$ da.

(ii) Baldin eta $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bada, orduan, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$ da.

(iii) Baldin eta $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ bada, orduan, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$ da.

Froga. (i) Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada, $|a_n - l| < \epsilon$ den. Har dezagun $k \geq n_0$. Orduan, f gorakorra denez, $n_k = f(k) \geq k \geq n_0$ eta, ondorioz, $|a_{n_k} - l| < \epsilon$. Hau da,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, k \geq n_0 \quad |a_{n_k} - l| < \epsilon.$$

Hots, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$ da.

(ii) Izan bedi $M \in \mathbb{R}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada, $a_n > M$ den. f gorakorra da; beraz, $n_k = f(k) \geq k$ da. Orduan, $k \geq n_0$ guztietarako, $a_{n_k} = a_{f(k)} > M$. Hau da, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

(iii) (ii) atalaren frogaren antzekoa da. □

Oharra. Segida oszilatzaileen azpisegidek edozein portaera izan dezakete. Adibidez, ikusi dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida oszilatzailea dela. $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konstantea da, eta, beraz, konbergentea; eta, antzera, $\{a_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1\}_{n\in\mathbb{N}}$ ere konbergentea da. Aldiz, $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^{3n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oszilatzailea da.

Hala ere, segida oszilatzaileak bornatuak badira, beti aurki daiteke haien azpisegida konbergente bat, Bolzano-Weierstrass-en teoremak ziurtatzen duen bezala. Bolzano-Weierstrassen teorema enuntziatu baino lehen, tarte txertatuen definizioa eta zenbait propietate ikusiko ditugu, eta, haietan oinarriturik, teorema frogatuko dugu.

Definizioa. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida gorakorra eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida beherakorra, $a_n \leq b_n$ izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Izan bedi $I_n = [a_n, b_n]$ tartea. Argi denez, $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$.

$\{I_n\}$ familia *tarte txertatuen familia* dela diogu.

2.8.2 proposizioa. *Izan bitez $I_n = [a_n, b_n]$ tarte itxiak $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tarte txertatuen familia izanik. Orduan,*

(i) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ bada, orduan, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ebakidurak puntu bakar bat du.

Froga. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida gorakorra eta goitik bornatua da, zeren eta $a_n \leq b_n \leq b_1$ baita, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, konbergentea da. Izan bedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Era berean, tarteen goi-muturrek osatutako segida; hau da, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, beherakorra eta behetik bornatua da, zeren eta $b_n \geq a_n \geq a_1$ baita, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, konbergentea da. Izan bedi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

$n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $a_n \leq b_n$ denez, 2.5.2 korolarioaren arabera, $a \leq b$ da.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ bada, orduan, $a = b$ da, eta $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\} = \{b\}$ da. Aldiz, $a < b$ bada, orduan, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]$ da. □

Oharra. 2.8.2 proposizioa egia izan dadin, funtsezkoa da tarteak itxi eta bornatuak izatea. Tarte txertatuak itxiak edo bornatuak ez badira, haien ebakidura multzo hutsa izan daiteke. Adibidez,

$$(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset \cdots \supset (0, 1/n) \supset \ldots$$

tarte txertatuen familia da, baina $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1/n) = \emptyset$ da.

2.8.3 proposizioa. *Izan bedi $P \subset \mathbb{R}$bornatua eta infinitu elementu dituena. Orduan, existitzen da P multzoko gai desberdinez osatutako $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida konbergente bat.*

Froga. P bornatua denez existitu egiten dira bi zenbaki erreal, a eta b, non $P \subset [a, b]$ den. Izenda dezagun $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$ eta har dezagun tarte horren erdiko puntua, $c = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Horrela, bi azpitarte lortzen ditugu, $[a_1, c]$ eta $[c, b_1]$. P multzoan infinitu elementu daudenez, bi azpitarte horietatik batek, gutxienez, P multzoko infinitu puntu ditu. Har dezagun bi tarte horietatik P multzoko infinitu gai dituena, eta dei diezaiogun $I_2 = [a_2, b_2]$. Argi dago $I_1 \supset I_2$ dela.

Orain, errepika dezakegu I_2 tartearekin I_1 tartean egindako prozedura, I_3 tartea lortzeko. Horrela, P multzoko infinitu gai dituzten tarte itxi eta bornatuen familia bat lortzen dugu,

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots,$$

$I_n = [a_n, b_n]$ izanik, non $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ den. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ denez, 2.8.2 proposizioaren arabera, existitzen da $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$, non $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$ den.

Eraikiko dugu P multzoko elementuez osatutako segida bat, x punturantz konbergitzen duena. Izan bedi $x_1 \in I_1 \cap P$, edozein, eta har dezagun $x_2 \in I_2 \cap P$, non

$x_2 \neq x_1$ den. I_2 tartean P multzoko infinitu elementu daudenez, hori posible da. Horrela jarrai dezakegu honako hau lortzeko:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in I_n \cap P \quad : \quad x_n \neq x_m \quad \forall m \neq n.$$

$a_n \leq x_n \leq b_n$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, sandwicharen erregelagatik, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ da. □

2.8.4 teorema (Bolzano-Weierstrassen teorema)**.** *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida bornatua bada, orduan, existitu egiten da $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ haren azpisegida konbergente bat.*

Froga. Izan bedi P $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren gaiek osatzen duten multzoa. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua denez, P multzo bornatua da.

P finitua bada, orduan, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidan gutxienez elementu bat infinitu aldiz errepikatzen da, eta azpisegida konstante bat; beraz, konbergentea, atera daiteke.

P infinitua bada, 2.8.3 proposizioa aplikatuz, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren azpisegida konbergente bat topa daiteke. □

2.9 Cauchyren segidak

Segida konbergente baten gaiak limitetik nahi den bezain hurbil daude, gaiaren azpiindizea behar den bezain handia hartuz gero. Horrek inplikatzen du segidaren gaiak ere elkarrengandik hurbil daudela. Alderantzizko egoera plantea daiteke. Segida baten gaiak elkarrengandik gero eta hurbilago badaude, ziurta daiteke segidaren limitea existitzen dela? Balio absolutua erabiltzen denez zenbaki errealen arteko distantzia neurtzeko, ikusiko dugu erantzuna baiezkoa dela.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyren segida* dela diogu, baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

2.9.1 teorema. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin Cauchyren segida bada.*

Froga. $\Longrightarrow$) Izan bedi $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ eta har dezagun $\epsilon > 0$, edozein. Orduan, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $|a_n - l| < \dfrac{\epsilon}{2}$ den.

Izan bitez $n, m \geq n_0$. Balio absolutuaren desberdintza triangeluarra erabiliz,

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

da; beraz, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida da.

$\Longleftarrow$) Orain, suposatzen dugu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida dela. Ikus dezagun, lehenengo eta behin, bornatua dela. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida denez, $\epsilon = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $|a_n - a_{n_0+1}| \leq 1$ den. Orduan, $|a_n| \leq |a_n - a_{n_0+1}| + |a_{n_0+1}| < 1 + |a_{n_0+1}|$ da, $n \geq n_0$ guztietarako.

Izan bedi $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a_{n_0+1}| + 1\}$. Argi denez, $|a_n| \leq K$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua da.

Orain, Bolzano-Weierstrassen teoremaren arabera, existitzen da $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ azpisegida konbergentea. Izan bedi $l = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$ eta har dezagun $\epsilon > 0$, edozein. Alde batetik, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = l$ denez, existitzen da $n_1 \in \mathbb{N}$ non

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, k \geq n_1.$$

Bestalde, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida denez, existitzen da $n_2 \in \mathbb{N}$ non

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq n_2.$$

Izan bedi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. $k \geq n_0$ guztietarako, $n_k \geq k$ denez,

$$|a_k - l| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

da. Hots, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ da. $\square$

2.10 Goi-limitea eta behe-limitea

Zenbaki errealen segida bornatuek ez dute zertan konbergenteak izan, baina azpisegida konbergenteak dituzte, Bolzano-Weierstrassen teoremak dioen bezala. Azpisegida konbergente horien limiteen artean, aipamen berezia merezi dute handienak eta txikienak.

Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida bornatua, eta

$$\alpha_n = \inf_{k\geq n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

$\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida gorakorra eta goitik bornatua da, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua delako. Orduan, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da, eta limitea haren supremoa da; hau da,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big) = \sup\big(\inf_{k\geq n} a_k\big).$$

Era berean, izan bedi

$$\beta_n = \sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

$\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida beherakorra eta behetik bornatua da, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornatua baita. Orduan, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da, eta limitea haren infimoa da,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big) = \inf\big(\sup_{k\geq n} a_k\big).$$

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida bornatua. Orduan,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\big(\inf_{k\geq n} a_k\big) = \sup\big(\inf_{k\geq n} a_k\big)$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren *behe-limitea* dela diogu, eta

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\big(\sup_{k\geq n} a_k\big) = \inf\big(\sup_{k\geq n} a_k\big)$$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren *goi-limitea* dela esaten da.

Oharra. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez bada behetik bornatua, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ dela diogu, eta $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez bada goitik bornatua, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2.10.1 proposizioa. *Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida bornatuak. Orduan,*

(i) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(ii) *$\epsilon > 0$ guztietarako, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada, orduan, $\alpha - \epsilon < a_n < \beta + \epsilon$ den, $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ eta $\beta = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ izanik.*

(iii) *$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ bada. Gainera, kasu horretan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ da.*

(iv) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$ *da.*

(v) *$a_n \leq b_n$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$ eta $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ dira.*

(vi) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$ *da,*
$\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ *da.*

Froga. (i) Izan bedi $A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$. Argi denez, $\inf A_n \leq \sup A_n$ da; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty}(\inf A_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\big(\sup A_n\big)$; hots, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(ii) Izan bedi $\epsilon > 0$, edozein. $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\big(\inf\limits_{k\geq n} a_k\big)$ denez, supremoaren karakterizazioa erabiliz, existitzen da $n_1 \in \mathbb{N}$ non $\inf\limits_{k\geq n_1} a_k > \alpha - \epsilon$ den, eta, ondorioz, $a_n > \alpha - \epsilon$ da, $n \geq n_1$ guztietarako.
Era berean, $\beta = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\big(\sup\limits_{k\geq n} a_k\big)$ denez, infimoaren karakterizazioa kontuan hartuz, existitzen da $n_2 \in \mathbb{N}$ non $\sup\limits_{k\geq n_2} a_k < \beta + \epsilon$ den, eta, beraz, $a_n < \beta + \epsilon$ da, $n \geq n_2$ guztietarako.

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ hartuz gero,

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \alpha - \epsilon < a_n < \beta + \epsilon.$$

(iii) Baliokidetasuna frogatzeko bi inplikazioak frogatu behar ditugu.

Lehenengo eta behin, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea dela suposatzen dugu. Izan bitez $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ eta $\epsilon > 0$, edozein. Orduan, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ den, $n \geq n_0$ guztietarako. Beraz, $\inf\limits_{k\geq n} a_k \geq l - \epsilon$ da $n \geq n_0$ guztietarako, eta, ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\inf\limits_{k\geq n} a_k\big) \geq l - \epsilon$ da; hots, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geq l$.

Era berean, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\sup\limits_{k\geq n} a_k \leq l + \epsilon$ den, $n \geq n_0$ guztietarako; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\sup\limits_{k\geq n} a_k\big) \leq l + \epsilon$ da, eta, ondorioz, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq l$.

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ dela frogatu dugu, baina (i) propietateagatik beste desberdintza ere egia da; beraz,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Beste inplikazioa frogatzeko, suposatzen dugu $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = l$ dela. (ii) propietatea erabiliz, $\alpha = \beta = l$ hartuz,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad l - \epsilon < a_n < l + \epsilon.$$

Hau da, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ da.

(iv) Izan bedi $A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. $\inf A_n = -\sup(-A_n)$ denez, $\lim\limits_{n\to\infty}(\inf A_n) = -\lim\limits_{n\to\infty}\big(\sup(-A_n)\big)$ da, eta, ondorioz, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

(v) $a_n \leq b_n$ baldin bada, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $\sup\limits_{k\geq n} a_k \leq \sup\limits_{k\geq n} b_k$ da, eta, limiteen propietateengatik, $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\sup\limits_{k\geq n} a_k\big) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\big(\sup\limits_{k\geq n} b_k\big)$; hots, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

Era berean, $\inf_{k\geq n} a_k \leq \inf_{k\geq n} b_k$ da; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\inf\limits_{k\geq n} a_k\big) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\big(\inf\limits_{k\geq n} b_k\big)$; hots, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

(vi) Supremoaren propietateengatik, $\sup\limits_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup\limits_{k\geq n} a_k + \sup\limits_{k\geq n} b_k$. Limiteak kalkulatzean desberdintza hori mantentzen da; beraz,

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Era berean, $\inf\limits_{k\geq n}(a_k + b_k) \geq \inf\limits_{k\geq n} a_k + \sup\limits_{k\geq n} b_k$. Limiteak kalkulatzen baditugu, desberdintza mantendu egiten da; beraz,

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n. \qquad \square$$

Oharra. Segida baten goi-limitea azpisegida konbergenteen limiteen artean handiena da. Modu berean, segida baten behe-limitea azpisegida konbergenteen limiteen artean txikiena da.

Adibidez, $a_n = (-1)^n$ bada, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan,

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2.11 Ariketak

2.1. Frogatu baieztapen hauek:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ da, baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ bada.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ da, baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} |a_n - l| = 0$ bada.

(iii) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ da, baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ bada.

2.2. Izan bitez $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segidak. Frogatu baieztapen hauek:

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ da.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = l > 0$ eta $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ badira, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$ da.

(iii) $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$ eta $\{a_n\}$ segida bornatua bada, orduan, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ da.

(iv) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ bada eta existitzen bada $n_1 \in \mathbb{N}$ non $|a_n| \geq m > 0$ den $n \geq n_1$ guztietarako, orduan, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$ da.

2.3. Erantzun galdera hauek:

(i) Izan bedi $\lim_{n\to\infty} a_n = l \neq 0$. Zenbat da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$?

(ii) Izan bedi $a_n = 2^{-n}$. Zenbat dira $\lim_{n\to\infty} a_n$ eta $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$?

(iii) Izan bedi $a_n = \frac{10^n}{n!}$. Zenbat da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$?

2.4. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida beherakorra eta behe-bornatua. Froga ezazu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea dela eta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

dela.

2.5. Froga ezazu $\{x_n\}$ segida konbergentea dela, baldin eta

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + ... + \frac{1}{5^n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.6. Izan bedi $\{a_n\}$ segida konbergentea, non $a_n \in [0,1]$ den, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\lim_{n\to\infty} a_n \in [0,1]$ dela.

Topa ezazu $(0,1)$ tarteko puntuez osatutako $\{a_n\}$ segida konbergente bat, non bere limitea $(0,1)$ tartekoa ez den.

2.7. Izan bedi $\{x_n\}$ honako era honetan definitutako segida:

$$x_1 = 1, \quad 5x_{n+1} = 2x_n^2 + 2, \ \forall n \geq 1.$$

(a) Kalkula itzazu x_2 eta x_3.

(b) Froga ezazu $x_n \geq 0$ dela, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

(c) $\{x_n\}$ segida monotonoa da. (a) atalean kalkulatu dituzun gaiak aztertuz, erabaki gorakorra edo beherakorra den, eta froga ezazu, indukzio matematikoaren printzipioa erabiliz.

(d) Aurreko ataletan frogatu duzunaren ondorioz, $\{x_n\}$ segida konbergentea da. Kalkulatuko duzu orain bere limitea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Kontuan hartuz $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ dela, aurki ezazu ekuazio bat l-rako. Ekuazio horren soluzioen artean, erabaki ezazu zein den l.

Em.: $l = 1/2$

2.8. Kalkula itzazu honako limite hauek:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^e + n^\pi + 1}{n^3 + 2n^\pi + 2}$ *Em.:* $1/2$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin(n!)}{n^2 + 1}$ *Em.:* 0

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ *Em.:* 1

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$ *Em.:* 1

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{(-1)^n}$ *Em.:* $\nexists$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$ *Em.:* $1/2$

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 7}{5^n - 4}$ *Em.:* 0

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a, b > 0$ izanik. *Em.:* $\max\{a, b\}$

2.9. Kalkulatu limite hauek:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 - n}\right)$ *Em.:* $5/2$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right)$ *Em.:* $1/2$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{8n^2 + 1} - \sqrt[3]{9n^2 - 1}\right)$ *Em.:* $-\infty$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - \sqrt{2n^2}\right)$ *Em.:* 0

2.10. Kalkulatu limite hauek:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\Big)^{\frac{n^2+5}{n+2}}$ *Em.:* e^7

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n \ln \sqrt{\dfrac{n+a}{n-a}}$, $a \in \mathbb{R}$ izanik *Em.:* a

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(1+\dfrac{1}{n!+1}\Big)^{n!-1}$ *Em.:* e

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\sqrt[n]{(2n)!}\, \ln \dfrac{n^2+1}{n^2}\Big)$ *Em.:* $\dfrac{4}{e^2}$

2.11. Stoltzen irizpidea aplikatuz, kalkulatu limite hauek:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$ *Em.:* 1

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\,(n!)}{n}$ *Em.:* ∞

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{7}+\cdots+\sqrt[3n]{5n-3}}{7n+2}$ *Em.:* $1/7$

2.12. Kalkulatu limite hauek:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ *Em.:* 4

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$ *Em.:* $4/e$

2.13. Kalkulatu limite hauek:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{n^2+2n}-n\big)^n$ *Em.:* $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ *Em.:* $1/e$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(\dfrac{1+3+5+\dots(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\Big)$ *Em.:* $-3/2$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1+\ln(n+3)-\ln n\big)^{n+1}$ *Em.:* e^3

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{2\cdot4\cdot6\dots(2n-2)}{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}\Big)^2$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{4}$

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(1+\ln\dfrac{n^2-3n+5}{n^2-9n}\Big)^{\frac{2n^2-3}{n+1}}$ *Em.:* e^{12}

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot\cos\alpha+2^2\cos(\alpha/2)+\cdots+n^2\cos(\alpha/n)}{n^3}$ *Em.:* $1/3$

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(n-\sqrt[3]{n^3-2n^2}\big)$ *Em.:* $2/3$

(ix) $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)^{1/\ln(3/n)}$ *Em.:* e

(x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{12}\cdot\dots\cdot\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{3n^2}}$ *Em.:* e^3

(xi) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$ *Em.:* $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

(xii) $\lim\limits_{n\to\infty}(4n+3)^k\left(\ln\dfrac{n+1}{n-2}\right)^k$, $k\in\mathbb{N}$ izanik *Em.:* 12^k

2.14. Froga ezazu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$$

dela.

2.15. Froga itzazu honako berdintza hauek:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+2^n}\right)=0.$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^3-2}+\dfrac{n^2+1}{n^3-3}+\cdots+\dfrac{n^2+n-1}{n^3-n-1}\right)=1.$

2.16. Kalkula ezazu limite hau:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2-2}+\frac{1}{n^2-3}+\cdots+\frac{1}{n^2-(n+1)}\right).$$

Em.: 1.

2.17. Izan bitez $a\in\mathbb{R}$ eta $a_n=\dfrac{[10^n a]}{10^n}\in\mathbb{Q}$, $[\cdot]$ parte osoa izanik. Frogatu $0\le a-a_n\le 10^{-n}$ dela eta, ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Hau da, edozein zenbaki errealetarako, zenbaki arrazionalen segida bat aurki daiteke, zenbaki hartarantz konbergentea.

2.18. Izan bedi $\{a_n\}$ segida, eta demagun $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$ eta $\{a_{3n}\}$ azpisegidak konbergenteak direla. Frogatu haien limitea zenbaki bera direla eta $\{a_n\}$ ere konbergentea dela.

2.19. Topa itzazu honako segida hauen goi- eta behe-limiteak:

(i) $x_n=\dfrac{3^{(-1)^n n}}{3^n+1}$ *Em.:* $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$, $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(ii) $x_n=\cos^n\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$ *Em.:* $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$, $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(iii) $x_n=\sqrt[n]{1+2^{(-1)^n n}}$ *Em.:* $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=2$, $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n=1$

(iv) $x_n=\left(\dfrac{n^2}{n^2+4}\right)^{n^{(-1)^n 2}}$ *Em.:* $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$, $\liminf\limits_{n\to\infty}x_n=1/e^4$

3. gaia

Zenbaki errealen serieak

2. gaian segida aritmetikoen eta segida geometrikoen lehenengo n gaien baturak kalkulatu dira. Batura horiek edozein segidatarako defini daitezke, segida berri bat sorraraziz. Gai honen helburua batura horien konbergentzia aztertzea da.

Arestian aipatutako segida geometrikoen kasuan, batura horretarako formula sinple bat lortu da, eta haren limitea erraz kalkula daiteke. Orokorrean, segida baten lehen n gaien baturaren limitea kalkulatzea ez da posible izango, eta bideak bilatuko ditugu limite hori existitzen ote den erabakitzeko, balio zehatza kalkulatu gabe.

3.1 Definizioak eta adibideak

Serieak batura infinituak dira, baina zehaztu behar da zer esan nahi dugun batugai kopuru infinitua duen batura bati buruz hitz egiten denean.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$ motako adierazpena $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren gaiek osatutako *zenbaki errealen seriea* dela diogu.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida. Segida horren lehenengo n gaien batura; hots, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ batura finitua, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriearen *n-garren batura partziala* dela esaten dugu.

Beraz, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriearekin lotuta, bi segida agertzen dira: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, batugaien segida, eta $\{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, batura partzialen segida.

Definizioa. Izan bedi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ z. e. seriea eta $\{S_n = a_1 + \cdots + a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ haren batura partzialen segida.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea *konbergentea* (edo $\{a_n\}$ segida *batugarria*) dela esango dugu, $\{S_n\}$ batura partzialen segida konbergentea bada, seriearen *batura* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ izanik. Kasu horretan, seriearen batura adierazteko ere $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ikurra erabiliko dugu; hots,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n).$$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea *dibergentea* dela diogu, $\{S_n\}$ segida dibergentea bada. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ bada, orduan, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$ idatziko dugu.

(iii) $\{S_n\}$ oszilatzailea bada, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ seriea oszilatzailea dela diogu, eta haren batura ez da existitzen.

Beraz, laburbilduz, serie baten izaera haren batura partzialen segidaren izaera da. Gainera, oszilatzailea ez bada,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Adibideak:

(1) Izan bedi $a \neq 0$. $\sum_{k=1}^{\infty} a$ gai orokor konstantea duen seriea dibergentea da, jarraian ikusiko dugun bezala. Kalkula dezagun n-garren batura partziala:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + a + \cdots + a = na.$$

Batura partzialen segida dibergentea da, eta, beraz, $\sum_{k=1}^{\infty} a$ seriea ere dibergentea da. Gainera,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \text{ bada,} \\ -\infty, & a < 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

(2) Azter dezagun $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ seriearen konbergentzia. Horretarako, n-garren batura partziala kalkulatu behar dugu.

$$S_n = -1 + 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ bikoitia bada,} \\ -1, & n \text{ bakoitia bada.} \end{cases}$$

Batura partzialen segida oszilatzailea denez, $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ seriea oszilatzailea da; haren batura ez da existitzen.

Definizioa. Izan bitez $a_1 \neq 0$ eta $r \neq 0$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$$

seriea r arrazoiduneko *serie geometrikoa* dela diogu.

Azter dezagun serie geometrikoen izaera.

$r = 1$ bada, $\sum_{k=1}^{\infty} a_1$ seriea dugu; hots, (1) adibidean aztertu duguna, eta badakigu dibergentea dela, haren batura $+\infty$ edo $-\infty$ izanik a_1 positiboa edo negatiboa izatearen arabera.

$r \neq 1$ bada, (2.1.1) formula gogoratuz,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

da. Gainera, 2.6.1 proposizioan aztertu da segida geometrikoen limitea. Horren arabera,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = \begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r}, & |r| < 1 \text{ bada,} \\ +\infty, & r > 1 \text{ eta } a_1 > 0 \text{ badira,} \\ -\infty, & r > 1 \text{ eta } a_1 < 0 \text{ badira,} \\ \nexists, & r \leq -1 \text{ bada.} \end{cases}$$

Beraz, $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $|r| < 1$ bada. Gainera, konbergentea denean, haren batura honako hau da:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1} = \frac{a_1}{1-r}.$$

Definizioa. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *serie harmonikoa* dela diogu, eta $\alpha \in \mathbb{R}$ bada, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ seriea *serie harmoniko orokortua* da.

Serie harmonikoen izaera ezin da aztertu batura partzialen bidez.

$$S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

segidaren limitea kalkulatzea ezinezkoa da 2. gaian ikusitako metodoekin. Aurrerago aztertuko dugu α-ren zein baliotarako den konbergentea eta zeinetarako ez.

3.2 Zenbaki errealen serieen oinarrizko propietateak

Atal honetan eragiketa aljebraikoekin erlazionatutako zenbaki errealen (z.e.) serieen propietateak aztertuko ditugu, eta Cauchyren serieen kontzeptua emango dugu.

Lehenengo eta behin, aipatu behar dugu zenbaki errealen serie batean batugai kopuru finitua sartzen edo kentzen bada, lortzen den serie berriaren izaera aurrekoaren izaera bera dela. Beraz, serie batean batugai kopuru finitu bat aldatzeak ez du eraginik seriearen izaeran.

Jatorrizko seriea konbergentea bada, haren batura S izanik, eta sartu edo kendu egiten ditugun gaien batura a bada, orduan, serie berriaren batura $S - a$ (gaiak kentzen baditugu) edo $S + a$ (gaiak sartzen baditugu) izango da.

Aurrekoaren arabera, gai kopuru finitu bat aldatzean serie baten izaera aldatzen ez denez, seriearen konbergentzia aztertzerakoan batura zein batugaitan hasten den ez du garrantziarik. Hori dela eta, hemendik aurrera serie baten izaera soilik interesatzen zaigunean, batukarian ez ditugu adieraziko batugaien indizeak.

3.2.1 proposizioa. *$\sum a_n$ z.e. seriea konbergentea bada, orduan, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ da.*

Froga. Izan bedi $\sum a_n$ z.e. serie konbergentea. Orduan, $\{S_n\}$ batura partzialen segida konbergentea da. Izan bedi $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. $a_n = S_n - S_{n-1}$ da $n \geq 2$ guztietarako; beraz,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \square$$

3.2.1 proposiziotik zuzenean ondorioztatzen da serieen dibergentziarako irizpide bat.

3.2.2 korolarioa. *Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ bada, orduan, $\sum a_n$ dibergentea da.*

3.2.3 proposizioa. *Izan bitez $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ z. e. serie konbergenteak, haien baturak a eta b izanik, hurrenez hurren. Orduan,*

(i) $\sum(a_n + b_n)$ seriea konbergentea da, eta

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} b_n = a + b.$$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ guztietarako, $\sum \lambda a_n$ seriea konbergentea da, eta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_n = \lambda a.$$

Froga. Izan bitez $S_n^a = a_1 + \cdots + a_n$ eta $S_n^b = b_1 + \cdots + b_n$. Orduan, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^a = a$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^b = b$ dira.

(i) Izan bedi $\{S_n\}$ $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ seriearen batura partzialen segida.

$$\begin{aligned} S_n =& (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ =& a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots b_n = S_n^a + S_n^b, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beraz, $\{S_n\}$ bi segida konbergenteren arteko batura da, eta, 2.4.1 proposizioaren ondorioz, konbergentea. Hau da, $\sum(a_n + b_n)$ konbergentea da. Gainera,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^a + S_n^b) = \lim_{n\to\infty} S_n^a + \lim_{n\to\infty} S_n^b = a + b.$$

(ii) Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $\{T_n\}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n$ seriearen batura partzialen segida. Orduan,

$$T_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lambda S_n^a, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\{S_n^a\}$ konbergentea denez, $\{T_n\}$ ere konbergentea da; hau da, $\sum \lambda a_n$ konbergentea da. Gainera,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \lambda S_n^a = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n^a = \lambda a. \qquad \square$$

Definizioa. Izan bitez $\sum a_n$ z. e. seriea eta $\{S_n\}$ haren batura partzialen segida. $\sum a_n$ serieak *Cauchyren baldintza* betetzen duela esango dugu, baldin eta $\{S_n\}$-k Cauchyren baldintza betetzen badu; hots,

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall\, m > n \geq n_0 \quad |S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \epsilon$$

3.2.4 teorema. *Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin Cauchyren baldintza betetzen badu.*

Froga. $\sum a_n$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\{S_n\}$ konbergentea bada, eta 2.9.1 teoremaren arabera, konbergentea izatea eta Cauchyren segida izatea baliokideak dira. $\square$

3.2.5 proposizioa. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *serie harmonikoa dibergentea da.*

Froga. Ikusiko dugu $\sum \frac{1}{n}$ serieak ez duela Cauchyren baldintza betetzen, eta, beraz, 3.2.4 teoremaren arabera, seriea ezin da konbergentea izan.

Izan bedi $n_0 \in \mathbb{N}$ edozein. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^k = +\infty$ denez, existitzen da $k \in \mathbb{N}$ non $2^{k+1} > 2^k \geq n_0$ diren. $m = 2^{k+1}$ eta $n = 2^k$ hartuz,

$$\begin{aligned}\left|S_{2^{k+1}} - S_{2^k}\right| &= \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &\geq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Beraz, $\epsilon = 1/2$ bada, $n_0 \in \mathbb{N}$ guztietarako existitzen dira $n = 2^k$, $m = 2^{k+1}$, $m > n \geq n_0$, non $|S_m - S_n| \geq \epsilon$ den. Hau da, $\sum \frac{1}{n}$ serieak ez du Cauchyren baldintza betetzen. $\square$

3.3 Gai positiboko serieak. Konbergentziarako irizpideak

Esan den bezala, serieen baturak kalkulatzea zaila edo ezinezkoa izan daiteke. Hala ere, gehienetan, interesatuko zaiguna ez da izango baturaren balio zehatza, baizik eta balio hori existitzen den ala ez, seriea konbergentea ote den, alegia. Zenbait irizpide emango ditugu serieen konbergentzia aztertzeko, batugaien zeinua konstantea den kasurako.

Definizioa. Izan bedi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida. Baldin eta $a_n \geq 0$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan, $\sum a_n$ *gai positiboko seriea* dela diogu.

3.3.1 teorema. *Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea. Orduan, $\sum a_n$ seriea konbergentea edo $+\infty$-rantz dibergentea da. Hau da, ez dago oszilatzailea edo $-\infty$-rantz dibergentea den gai positiboko serierik.*

Gainera, $\sum a_n$ seriearen batura partzialen segida $\{S_n\}$ bada, $\sum a_n$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\{S_n\}$ goitik bornatua bada.

Froga. Izan bitez $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\{S_n\}$ haren batura partzialen segida. $S_n - S_{n-1} = a_n \geq 0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, $S_n \geq S_{n-1}$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; hots, $\{S_n\}$ segida gorakorra da. Bi posibilitate daude:

- $\{S_n\}$ goitik bornatua bada, gorakorra denez, 2.2.3 teoremaren arabera $\{S_n\}$ konbergentea da; hau da, $\sum a_n$ konbergentea.
- $\{S_n\}$ ez bada goitik bornatua, $\{S_n\}$ $+\infty$-rantz dibergentea da, eta $\sum a_n = +\infty$. □

Definizioa. Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positiboko serieak. Baldin eta $a_n \leq b_n$ bada $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan, $\sum a_n$ seriea $\sum b_n$ seriearen *serie minorantea* dela diogu, eta $\sum b_n$ $\sum a_n$ seriearen *serie maiorantea*.

Serieen arteko erlazio hori honako ikur honen bidez adieraziko dugu:

$$\sum a_n << \sum b_n.$$

3.3.2 teorema (Konparazio-irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positiboko serieak, $\sum a_n << \sum b_n$ izanik. Orduan,*

(i) $\sum b_n$ konbergentea bada, $\sum a_n$ ere konbergentea da.

(ii) $\sum a_n$ dibergentea bada, $\sum b_n$ ere dibergentea da.

Froga. Izan bitez $\{S_n\}$ eta $\{T_n\}$ $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ serieen batura partzialen segidak, hurrenez hurren. $a_n \leq b_n$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan,

$$S_n \leq T_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(i) $\sum b_n$ konbergentea bada, 3.3.1 teoremagatik, $\{T_n\}$ goitik bornatua da, eta, ondorioz, $\{S_n\}$ ere bai. Berriro 3.3.1 teorema erabiliz, $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Absurdora eramanez, demagun $\sum a_n$ dibergentea izanik $\sum b_n$ konbergentea dela. Orduan, (i) atala aplikatuz, $\sum a_n$ konbergentea izango litzateke. Beraz, $\sum b_n$ dibergentea da. □

3.3.2 teoremaren izenak esaten duen bezala, aztertu nahi dugun seriea konparatu behar dugu beste serie batekin, azken horren izaera ezaguna delarik. Jadanik ikusi dugu zein den serie geometrikoen izaera; beraz, serie geometrikoak erabil ditzakegu konparazio-irizpidea aplikatzeko. Hala ere, badago beste serie mota bat, oso erabilia dena maioranteak eta minoranteak bilatzen direnean: serie harmonikoak, hain zuzen. 3.2.5 proposizioan frogatu da $\sum \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea dela. Ikus dezagun serie harmoniko orokortuaren izaera zein den.

3.3.3 proposizioa. *Izan bedi $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serie harmoniko orokortua konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\alpha > 1$ bada.*

Froga. $\alpha = 1$ bada, jadanik frogatu dugu dibergentea dela. Izan bedi $\alpha < 1$. Frogatu behar dugu $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ dibergentea dela, eta, horretarako, serie minorante dibergente bat aurkituko dugu. $n^\alpha < n$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz,

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Hau da, $\sum \dfrac{1}{n} << \sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ dugu, eta $\sum \dfrac{1}{n}$ dibergentea denez, 3.3.2 teoremaren arabera, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ dibergentea da.

Izan bedi, azkenik, $\alpha > 1$. Serie harmoniko orokortuaren konbergentzia frogatzeko, serie maiorante konbergente bat bilatuko dugu. Izan bedi

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \dots$$

Parentesiak sartzean, seriearen izaera ez da aldatzen. Beraz, serie berri bat definituko dugu, $\sum b_n$, non

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1\\
b_2 &= \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \le \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} = \frac{2}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}\\
b_3 &= \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \le \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} = \frac{4}{4^\alpha} = \frac{1}{4^{\alpha-1}}\\
&\vdots\\
b_n &= \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha} \le \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Hau da, $\sum b_n << \sum\Big(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^{n-1}$ da, eta $\sum\Big(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^{n-1}$ serie geometrikoa konbergentea da, $|r| = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ delako. Konparazio-irizpidearen arabera, $\sum b_n$ konbergentea da, eta, ondorioz, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ ere bai. $\square$

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2}$ gai positiboko seriea konbergentea da. Ikus dezagun. $\cos^2(n^2-7) \le 1$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$\frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2} \le \frac{2}{n^2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Hau da, $\displaystyle\sum \frac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2} << \sum \frac{2}{n^2}$ da. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ konbergentea denez, 3.2.3 proposizioaren (ii) atalagatik, $\sum \dfrac{2}{n^2}$ konbergentea da, eta 3.3.2 teoremaren arabera, $\sum \dfrac{1+\cos^2(n^2-7)}{n^2}$ konbergentea da.

Serie maioranteak edo minoranteak lortu beharrean, gehienetan errazagoa da serieak konparatzea limite baten bidez, jarraian agertzen den teoreman azaltzen den bezala.

3.3.4 teorema (Limitearen irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum a_n$ eta $\sum b_n$ gai positiboko serieak, $b_n \ne 0$ izanik $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Izan bedi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$.*

(i) $\lambda \ne 0, +\infty$ bada, orduan, $\sum a_n$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\sum b_n$ konbergentea bada.

(ii) $\lambda = 0$ bada, orduan, $\sum b_n$ konbergentea bada, $\sum a_n$ ere konbergentea da.

(iii) $\lambda = +\infty$ bada, orduan, $\sum b_n$ dibergentea bada, $\sum a_n$ ere dibergentea da.

Froga. $a_n \ge 0$ eta $b_n > 0$ dira $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ zenbaki erreal ez-negatiboa da, edo $+\infty$.

(i) $\lambda > 0$ bada, izan bedi $\epsilon = \dfrac{\lambda}{2}$. Orduan, limitearen definizioagatik, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non

$$\Big|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\Big| < \frac{\lambda}{2}$$

den $n \ge n_0$ guztietarako; hau da,

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\lambda}{2}, \quad \forall\, n \ge n_0.$$

$b_n > 0$ denez, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, goiko desberdintza-katea b_n-rekin biderkatuz,

$$\frac{\lambda}{2} b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Serieen oinarrizko propietateak erabiliz, $\sum b_n$ konbergentea denez, $\sum \frac{3\lambda}{2} b_n$ ere konbergentea da, eta $\sum a_n$ seriearen maiorantea da; beraz, 3.3.2 teoremaren arabera, $\sum a_n$ konbergentea da.

Era berean, $\sum a_n$ konbergentea bada, $\sum \frac{\lambda}{2} b_n$ seriearen maiorantea denez, bigarren serie hori ere konbergentea da, eta, ondorioz, $\sum b_n$ konbergentea da.

(ii) $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ bada, $\epsilon = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $|a_n/b_n| < 1$ den. Beraz, $n \geq n_0$ bada, $a_n < b_n$ da; hots, $\sum a_n << \sum b_n$ erlazioa dugu. Konparazio-irizpidea berriro aplikatuz, $\sum b_n$ konbergentea bada, orduan, $\sum a_n$ ere konbergentea da.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ bada, $M = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $\dfrac{a_n}{b_n} > 1$ den. Hau da, $n \geq n_0$ bada, $a_n > b_n$ da. Konparazio-irizpidearen arabera, $\sum b_n$ dibergentea bada, orduan, $\sum a_n$ dibergentea da. □

Adibidea. Frogatuko dugu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ dibergentea dela, limitearen irizpidea erabiliz.

Izan bitez $a_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \geq 0$ eta $b_n = \dfrac{1}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1.$$

Beraz, limitearen irizpideagatik, $\sum \frac{1}{n}$ dibergentea denez, $\sum \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ dibergentea da.

Serie harmoniko orokortuak maiz erabiltzen dira gai positiboko beste serie batzuen izaera konparazioz erabakitzeko. Limitearen irizpidea berridatz daiteke kasu partikular horretan.

3.3.5 teorema (Pringsheim-en irizpidea)**.** *Izan bitez $\sum a_n$ gai positiboko seriea eta $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n \in [0,\infty)$ *eta* $\alpha > 1$ *badira, orduan,* $\sum a_n$ *konbergentea da.*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n \in (0,\infty]$ *eta* $\alpha \leq 1$ *badira, orduan,* $\sum a_n$ *dibergentea da.*

Froga. Izan bedi $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ denez, limitearen irizpidearen arabera, eta serie harmoniko orokortuen izaera kontuan hartuz, honako hau dugu:

(i) $\alpha > 1$ bada, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ konbergentea da; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in [0, \infty)$ bada, $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) $\alpha \leq 1$ bada, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ dibergentea da; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha a_n \in (0, \infty]$ bada, $\sum a_n$ dibergentea da. □

Orain arte ikusi ditugun irizpideetan, serie baten izaera aztertzeko beharrezkoa izan da izaera ezaguneko beste serie bat bilatzea, emandako seriearekin konparatzeko. Batzuetan, zaila izan daiteke aurkitzea hautagai apropos bat emandako seriearekin konpara daitekeena. Jarraian emango ditugun irizpideetan, aztertu behar den seriearen gai orokorra nahikoa da seriearen izaera erabakitzeko.

3.3.6 teorema (D'Alambert-en irizpidea edo zatiduraren irizpidea)**.** *Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea, eta demagun honako limite hau existitu egiten dela:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

(i) Baldin eta $l < 1$ bada, orduan, $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Baldin eta $l > 1$ bada, orduan, $\sum a_n$ dibergentea da.

Froga. (i) $l < 1$ denez, $\epsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \frac{1-l}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

eta, ondorioz,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1-l}{2} + l = \frac{1+l}{2} = q < 1, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

$q = \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$ idatziz, goiko desberdintza $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{q^{n+1}}{q^n}$ moduan berridatz daiteke $n \geq n_0$ guztietarako, eta gai guztiak positiboak direnez,

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} \leq \frac{a_n}{q^n}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Hemendik ondorioztatzen da

$$\frac{a_n}{q^n} \leq \frac{a_{n-1}}{q^{n-1}} \leq \frac{a_{n-2}}{q^{n-2}} \leq \cdots \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} = A$$

dela; hau da, $a_n \leq Aq^n$ dela $n \geq n_0$ guztietarako. Gainera, $\sum q^n$ serie geometrikoa konbergentea da $0 < q < 1$ delako; beraz, konparazio-irizpidearen arabera, $\sum a_n$ konbergentea da.

(ii) Kasu horretan, $l = +\infty$ edo $l \in \mathbb{R}$ izan daiteke.

$l = +\infty$ bada, $M = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ guztietarako $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ den.

$l \in \mathbb{R}$ bada, $l > 1$ izanik, $\epsilon = l - 1 > 0$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < l - 1, \quad \forall n \geq n_0,$$

eta, ondorioz, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > -l + 1 + l = 1$ da $n \geq n_0$ bada.

Hau da, bi kasuetan existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$, non $n \geq n_0$ bada, $a_{n+1} > a_n$ den; hau da, gai positiboko segida gorakorra dugu, eta, ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ezin da 0 izan. 3.2.2 korolarioaren arabera, $\sum a_n$ dibergentea da. □

Adibidea. Ikus dezagun $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ konbergentea dela.

$a_n = \dfrac{1}{(2n+1)!} > 0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, aplika dezakegu D'Alamberten irizpidea.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(2n+3)!}}{\dfrac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1.$$

D'Alamberten irizpidearen arabera, seriea konbergentea da.

Oharra. Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ bada, $\sum a_n$ konbergentea zein dibergentea izan daiteke.

Adibidez, $a_n = \dfrac{1}{n}$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ da, eta badakigu $\sum \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea dela.

Aldiz, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ hartuz gero, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ da, eta $\sum \dfrac{1}{n^2}$ serie harmoniko orokortua konbergentea da.

$\sum a_n$ gai positiboko seriea bada, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ izanik, orduan, honako irizpide hau erabil daiteke:

3.3.7 teorema (Raabe-ren irizpidea)**.** *Izan bedi* $\sum a_n$ *gai positiboko seriea, zeinetarako* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *den, eta izan bedi*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = l.$$

(i) Baldin eta $l > 1$ *edo* $l = +\infty$ *bada, orduan,* $\sum a_n$ *konbergentea da.*

(ii) Baldin eta $l < 1$ *bada, orduan,* $\sum a_n$ *dibergentea da.*

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$ seriearen izaera aztertuko dugu.

$a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} > 0$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, D'Alamberten irizpidea aplika daiteke.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2)}}{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

Beraz, ezin dugu ezer ziurtatu. Aplikatuko dugu, orduan, Raaberen irizpidea.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) &= \lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\Big) = \lim_{n\to\infty} n\frac{2n+2-2n-1}{2n+2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Ondorioz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$ dibergentea da.

Oharra. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = 1$ badira, ezin da ezer ziurtatu $\sum a_n$ seriearen izaerari buruz, soilik Raaberen irizpidea kontuan hartuz. Beste argudio batzuk erabili behar dira.

3.3.8 teorema (Cauchyren irizpidea edo erroaren irizpidea)**.** *Izan bedi* $\sum a_n$ *gai positiboko seriea, eta demagun honako limite hau existitu egiten dela:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

(i) Baldin eta $l < 1$ *bada, orduan,* $\sum a_n$ *konbergentea da.*

(ii) Baldin eta $l > 1$ *bada, orduan,* $\sum a_n$ *dibergentea da.*

Froga. (i) $l < 1$ denez, $\epsilon = \dfrac{1-l}{2} > 0$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < \frac{1-l}{2}, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

eta, ondorioz,

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1-l}{2} + l = \frac{1+l}{2} = q < 1, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Hau da, $a_n < q^n$, $n \geq n_0$ guztietarako, eta $\sum a_n << \sum q^n$ erlazioa dugu. $\sum q^n$ serie geometrikoa konbergentea da $0 < q < 1$ delako; beraz, konparazio-irizpideak ziurtatzen digu $\sum a_n$ konbergentea dela.

(ii) Kasu horretan, $l = +\infty$ edo $l \in \mathbb{R}$ izan daiteke.

$l = +\infty$ bada, $M = 1$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ guztietarako, $\sqrt[n]{a_n} > 1$ den; hau da, $n \geq n_0$ bada, $a_n > 1$ da.

$l \in \mathbb{R}$ bada, $l > 1$, $\epsilon = l - 1 > 0$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non

$$\left| \sqrt[n]{a_n} - l \right| < l - 1, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

eta horrek inplikatzen du

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 - l + l = 1, \forall\, n \geq n_0,$$

beraz, $a_n > 1$ da $n \geq n_0$ guztietarako.

Bi kasuetan, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $a_n > 1$ den, $n \geq n_0$ bada. Ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ezin da 0 izan, eta 3.2.2 korolarioaren arabera, $\sum a_n$ dibergentea da.

□

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ konbergentea da. Ikus dezagun.

$a_n = \dfrac{n^n}{(2n+1)^n} > 0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta aplika dezakegu Cauchyren irizpidea.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Beraz, Cauchyren irizpidearen arabera, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ konbergentea da.

Oharra. Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ bada, ezin dugu ezer ziurtatu $\sum a_n$ seriearen izaerari buruz, soilik Cauchyren irizpidea aplikatuz.

Adibidez, $a_n = \dfrac{1}{n}$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = 1$ da, eta badakigu $\sum \dfrac{1}{n}$ serie harmonikoa dibergentea dela.

Aldiz, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ bada, orduan, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = 1$ da, eta $\sum \dfrac{1}{n^2}$ serie harmonikoa konbergentea da.

Oharra. Izan bedi $\sum a_n$ gai positiboko seriea, eta demagun $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ dela. Kasu horretan, ezin dugu ezer ondorioztatu seriearen izaerari buruz D'Alamberten irizpidearen bidez.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ eta $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existitzen baldin badira, 2.7.5 proposizioak ziurtatzen digu berdinak direla; beraz, Cauchyren irizpidearekin ere ez dugu informazio gehiagorik lortuko.

Hala ere, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ez bada existitzen, posible da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existitzea.

Gai positiboko serieetarako konbergentzia-irizpideekin bukatzeko, serieen izaera 9. gaian azalduko diren integral inpropioen konbergentziarekin lotzen duen teorema bat enuntziatuko dugu.

3.3.9 teorema (Integralaren irizpidea)**.** *Izan bitez f funtzio positiboa eta beherakorra $[1, +\infty)$ tartean. eta $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Orduan, $\sum a_n$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)\,dx$ existitzen bada eta finitua bada.*

3.4 Gai positibo eta negatiboko serieak

3.3 atalean ikusi ditugun irizpideak bakarrik erabil daitezke seriearen batugai guztiak positiboak direnean, edo batugai negatiboen kopurua finitua denean, kasu horretan gai horiek kentzean seriearen izaera aldatzen ez delako. Serie batean infinitu batugai positibo eta infinitu batugai negatibo baldin badaude, beste irizpide batzuk bilatu behar ditugu izaera aztertzeko.

Aukera bat da aztertu behar den seriearekin erlazionatutako gai positiboko serie batzuen izaera erabiltzea, emandako seriearen izaerari buruzko informazioa ondorioztatzeko. Gai positiboko serie horien izaera erabakitzeko, 3.3 atalean ikusi diren irizpideak erabili ahal izango dira.

Definizioa. Izan bitez $\sum a_n$ z. e. seriea eta

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \text{ bada,} \\ 0, & a_n < 0 \text{ bada;} \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \text{ bada,} \\ -a_n, & a_n < 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

$\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ $\sum a_n$ seriearen *azpiserie positibo* eta *azpiserie negatiboak* dira, hurrenez hurren.

Argi denez, azpiserie positiboa eta azpiserie negatiboa gai positiboko serieak dira, eta honako berdintza hauek betetzen dira:

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-, \qquad \text{eta} \qquad \sum |a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^-.$$

3.4.1 proposizioa. *Izan bitez $\sum a_n$ z. e. seriea eta $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ haren azpiserie positibo eta negatiboak.*

(i) $\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ konbergenteak badira, orduan, $\sum a_n$ eta $\sum |a_n|$ konbergenteak dira.

(ii) $\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ bata konbergentea eta bestea dibergentea badira, orduan, $\sum a_n$ eta $\sum |a_n|$ dibergenteak dira.

(iii) $\sum a_n^+$ eta $\sum a_n^-$ dibergenteak badira, orduan, $\sum |a_n|$ dibergentea da, baina $\sum a_n$ konbergentea izan daiteke ala ez.

Definizioa. Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ *absolutuki konbergentea* dela diogu, baldin eta $\sum |a_n|$ konbergentea bada.

3.4.2 teorema. *Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ absolutuki konbergentea bada, orduan, konbergentea da. Gainera,*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Froga. $\sum a_n$ absolutuki konbergentea denez, $\sum |a_n|$ konbergentea da, eta, beraz, Cauchyren badintza betetzen du; hau da,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall m > n \geq n_0 \quad \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|\big| < \epsilon. \quad (3.4.1)$$

Balio absolutuaren desberdintza triangeluarra erabiliz,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots |a_m| = \big||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots |a_m|\big|$$

da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, (3.4.1) baldintzatik, honako hau ondorioztatzen da:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall m > n \geq n_0 |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_m| < \epsilon.$$

Hau da, $\sum a_n$ serieak ere Cauchyren baldintza betetzen du, eta, ondorioz, konbergentea da.

Gainera, $\{S_n\}$ eta $\{S'_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serieen batura partzialen segidak baldin badira, hurrenez hurren,

$$|S_n| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = S'_n$$

dugu, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Serie baten batura haren batura partzialen limitea denez, eta gogoratuz limiteen propietateak,

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| = bigl|\lim_{n\to\infty} S_n\Big| = \lim_{n\to\infty} |S_n| \leq \lim_{n\to\infty} S'_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \qquad \square$$

Oharra. 3.4.2 teoremaren alderantzizkoa ez da egia; hau da, $\sum a_n$ seriearen konbergentziak ez du ziurtatzen konbergentzia absolutua.

Adibidez, aurrerago frogatuko dugu $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ seriea konbergentea dela, baina badakigu ez dela absolutuki konbergentea $\sum \Big|(-1)^n \frac{1}{n}\Big| = \sum \frac{1}{n}$ dibergentea delako.

Definizioa. Izan bedi $\sum a_n$ z. e. seriea. $\sum a_n$ *serie alternatua* dela diogu, baldin eta ondoz ondoko gaien zeinuak desberdinak badira; hots,

$$a_n\, a_{n+1} < 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Serie alternatu baten lehen batugaia positiboa bada, azpiindize bakoitia duten batugai guztiak positiboak izango dira, eta azpiindize bikoitia dutenak, aldiz, negatiboak. Beraz, lehenengo gaia positiboa duen serie alternatu baten adierazpen orokorra honako hau da:

$$\sum (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Serie alternatu baten izaera aztertzeko, konbergentzia absolutua erabil daiteke. 3.4.2 teoremaren arabera, seriea absolutuki konbergentea bada, konbergentea izango da. Hala ere, seriea ez bada absolutuki konbergentea, ezin dugu ezer ziurtatu haren izaerari buruz. Kasu horretan, honako irizpide hau aplika daiteke.

3.4.3 teorema (Leibniz-en irizpidea)**.** *Izan bedi* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *z. e. serie alternatua, non* $\{a_n\}$ *gai positiboko segida beherakorra den,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *izanik. Orduan,* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *konbergentea da, eta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq a_1.$$

Froga. Izan bedi $\{S_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ seriearen batura partzialen segida. Har dezagun, lehenengo eta behin, $\{S_{2n}\}$ azpisegida.

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

da. $\{a_n\}$ beherakorra denez, $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$ izango da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta, ondorioz, $S_{2n} \geq S_{2n-2}$. Hau da, $\{S_{2n}\}$ segida gorakorra da. Are gehiago,

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2n} \leq a_1$$

da, $a_k - a_{k+1} \geq 0$ delako $k \in \mathbb{N}$ guztietarako. Beraz, $\{S_{2n}\}$ goitik bornatua da.

$\{S_{2n}\}$ gorakorra eta goitik bornatua denez, 2.2.3 teoremaren arabera, konbergentea da. Izan bedi $s = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$.

Azter dezagun orain $\{S_{2n-1}\}$ azpisegida.

$$\begin{aligned} S_{2n-1} =& a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} \\ =& a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n} \\ =& S_{2n} + a_{2n} \end{aligned}$$

da. $\{S_{2n}\}$ eta $\{a_{2n}\}$ konbergenteak direnez, $\{S_{2n-1}\}$ ere konbergentea da. Gainera,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = s + 0 = s$$

da. $\{S_{2n}\}$ eta $\{S_{2n-1}\}$ konbergenteak dira, haien limiteak berdinak izanik; beraz, $\{S_n\}$ konbergentea da, eta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = s \leq a_1. \qquad \square$$

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ serie alternatua konbergentea da.

Izan ere, $\{a_n\} = \{1/n\}$ gai positiboko segida beherakorra da, eta $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ da; beraz, Leibnizen irizpidearen arabera, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konbergentea da (baina ez absolutuki konbergentea).

Batzuetan, serie baten izaera aztertzeko, serie horren gaiak biderkadura moduan adierazteak interesa dauka, $\sum a_n b_n$ moduan, hain zuzen. Kasu horretan, jarraian ematen diren irizpideak aplika daitezke.

3.4.4 teorema (Abel-en konbergentziarako irizpidea)**.** *Izan bitez* $\sum b_n$ *z. e. serie konbergentea eta* $\{a_n\}$ *z. e. segida monotono eta bornatua. Orduan,* $\sum a_n b_n$ *konbergentea da.*

3.4.5 teorema (Dirichlet-en konbergentziarako irizpidea)**.** *Izan bitez* $\sum b_n$ *z. e. seriea eta* $\{a_n\}$ *gai positiboko segida. Demagun* $\{a_n\}$ *beherakorra dela,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *izanik, eta* $\sum b_n$ *seriearen batura partzialen segida bornatua dela; hots, existitzen dela* $\beta > 0$ *non* $|B_n| = |b_1 + b_2 + \cdots + b_n| \leq \beta$ *den* $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako. Orduan,* $\sum a_n b_n$ *konbergentea da.*

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ seriea konbergentea da, $x \neq 0$ edozein izanik.

Serie hori ez da gai positiboko seriea, ez eta serie alternatua ere; beraz, Dirichleten irizpidea erabiliko dugu haren izaera aztertzeko.

Izan bitez $a_n = 1/n$ eta $b_n = \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. $\{a_n\}$ segida beherakorra da, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ izanik. Bestalde, indukzioz frogatzen da

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

dela $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Ondorioz, $\{B_n\}$ bornatua da, zeren eta

$$\begin{aligned}|B_n| &= |\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(nx)| \\ &= \left|\frac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.\end{aligned}$$

Dirichleten irizpidearen arabera, $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ konbergentea da.

3.5 Serie berezi batzuen baturak

Esan den bezala, zenbaki errealen serieen baturak kalkulatzea, gehienetan, ezinezkoa da. Hala ere, badaude salbuespen batzuk. Atal honetan, serie berezi batzuen baturak nola kalkulatzen diren aztertuko dugu.

3.5.1 Serie hipergeometrikoak

Definizioa. Izan bedi $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. $\sum a_n$ serie *hipergeometrikoa* dela diogu, existitzen badira $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, α eta γ biak batera nuluak ez izanik, non

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Irizpide egokiak erabiliz, froga daiteke $\sum a_n$ serie hipergeometrikoa konbergentea dela, baldin eta soilik baldin $\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha} > 1$ bada.

Izan bedi $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ serie hipergeometrikoaren n-garren batura partziala. $(\alpha k + \gamma)a_{k+1} = (\alpha k + \beta)a_k$ berdintza $k = 1, \ldots, n$ balioetarako idatziz,

$$\begin{aligned}(\alpha + \gamma)a_2 &= (\alpha + \beta)a_1 \\ (2\alpha + \gamma)a_3 &= (2\alpha + \beta)a_2 \\ \ldots &= \ldots \\ (n\alpha + \gamma)a_{n+1} &= (n\alpha + \beta)a_n\end{aligned}$$

eta batuketa eginez,

$$\begin{aligned}&\alpha(a_2 + 2a_3 + \cdots + na_{n+1}) + \gamma(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}) \\ &\qquad = \alpha(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) + \beta(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).\end{aligned}$$

Hemendik honako hau ondorioztatzen dugu:

$$(\gamma - \beta - \alpha)S_n = \gamma a_1 - (\alpha n + \gamma)a_{n+1}.$$

$\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha} > 1$ bada, $\sum a_n$ konbergentea denez, froga daiteke $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha n + \gamma)a_{n+1} = 0$ dela; beraz,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

3.5.2 Serie aritmetiko-geometrikoak

Definizioa. Izan bitez P polinomio bat eta $r \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(n)r^n$ serie *aritmetiko-geometrikoa* dela diogu.

Irizpide egokiak erabiliz, froga daiteke $\sum P(n)r^n$ serie aritmetiko-geometrikoa konbergentea dela, baldin eta soilik baldin $|r| < 1$ bada.

Kalkula dezagun $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ serie aritmetiko-geometrikoaren batura. Izan bedi $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ haren n-garren batura partziala. Orduan,

$$S_n - rS_n = r + r^2 + \cdots + r^n - nr^{n+1}$$

da, eta $r \neq 1$ bada, (2.1.1) formula erabiliz,

$$S_n = \frac{r - r^{n+1}(1 + n - nr)}{(1 - r)^2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

beraz, $\sum nr^n$ konbergentea bada, bere batura honako hau da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1 - r)^2}.$$

3.5.3 Serie teleskopikoak

Definizioa. Izan bitez $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z. e. segida eta $a_n = b_n - b_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(b_n - b_{n+1}\big)$ *serie teleskopikoa* dela diogu.

$S_n = a_1 + \cdots + a_n$ bada, orduan,

$$S_n = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \cdots + b_{n-1} - b_n + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1},$$

beraz, $\sum a_n$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\{b_n\}$ konbergentea bada. Gainera, konbergentea bada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Adibidea. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$ dela frogatuko dugu.

Deskonposa dezagun serie horren gai orokorra, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, frakzio sinpleetan.

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + B(n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Orduan, $A(n+2) + B(n+1) = 1$; beraz, $A + B = 0$ eta $2A + B = 1$; hau da, $A = 1$ eta $B = -1$ dira.

$b_n = -\dfrac{1}{n+1}$ hartuz,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)\\ &= bigl(\lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1\big) = \lim_{n\to\infty} \Big(-\frac{1}{n+2}\Big) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3.6 Ariketak

3.1. a) Izan bitez $\sum a_n^2$ eta $\sum b_n^2$ serie konbergenteak. Froga ezazu $\sum |a_n b_n|$ eta $\sum (a_n + b_n)^2$ serieak ere konbergenteak direla.

b) Baldin eta $\sum a_n$ gai positiboko serie konbergentea bada, eta $\alpha > \frac{1}{2}$ bada, froga ezazu $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ seriea konbergentea dela.

3.2. Izan bedi $\sum a_n$ gai ez-negatibotako serie konbergentea. Froga ezazu $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ seriea ere konbergentea dela.

Argibidea: Honako desberdintza hau lagungarria da: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, $\forall a, b \geq 0$.

3.3. $\sum a_n$ gai positiboko serie dibergentea bada, froga ezazu:

(i) $\sum \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$ konbergentea dela;

(ii) $\sum \frac{a_n}{1 + a_n^2}$ batzuetan konbergentea eta beste batzuetan dibergentea dela;

(iii) $\sum \frac{a_n}{1 + a_n}$ dibergentea dela.

3.4. Azter ezazu serie hauen izaera:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin^2 n}{n^2}$ *Em,:* konb.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{4n}$ *Em,:* dib.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3}$ *Em,:* dib.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ *Em,:* konb.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$ *Em,:* dib.

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ *Em,:* dib.

(vii) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n} - 1} - \frac{1}{\sqrt{n} + 1}\right)$ *Em,:* dib.

(viii) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right)^{\sqrt{n}}$ *Em,:* dib.

3.5. Aztertu serie hauen izaera:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ *Em,:* konb.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}$ *Em,:* dib.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \cdots \cdot (3n)}$ *Em,:* konb.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ *Em,:* konb.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ *Em,:* konb.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ *Em,:* dib.

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ *Em,:* dib.

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!}$ *Em,:* konb.

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ *Em,:* konb.

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ *Em,:* konb.

(xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \cdots \cdot (3n-2)}{3^n}$ *Em,:* dib.

(xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ *Em,:* konb.

(xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000\cdot 1001\cdot \cdots \cdot (1000+n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}$ *Em,:* konb.

(xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}$ *Em,:* konb.

(xv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \cdots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \cdots \cdot (4n-3)}$ *Em,:* konb.

(xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - n!}{4^n}$ *Em.:* dib.

(xvii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)(n+1)}$ *Em.:* dib.

(xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$ *Em,:* konb.

3.6. Azter ezazu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^3$ seriearen konbergentzia.

Argibidea. $\sqrt[n]{n} - 1 = x_n$ izendatu. Newtonen binomioa erabili $\sum x_n^3$ serierako maiorante konbergente bat lortzeko.

3.7. Azter ezazu honako serie hauen izaera, ageri diren parametroen balioen arabera:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\dots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\dots(b+(n-1)d)}, \quad a, b, d > 0$ *Em.:* Konb $\iff b - a > d$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a(a+n)}{n}\right)^n, \quad a > 0$ *Em.:* Konb $\iff 0 < a < 1$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}a^n}{2^n}, \ a > 0$ *Em.:* Konb $\iff a < 2/9$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 a^n}{(2n)!}, \quad a > 0$ *Em.:* Konb $\iff a < 4$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{e^n}, \quad x > 0$ *Em.:* Konb $\iff x < e$

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{na^n}, \quad a > 0$ *Em.:* Konb $\iff a > 1$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\alpha} \left(\frac{1}{(1+n^2)}\right)^{\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *Em.:* Konb $\iff 2\beta + \dfrac{\alpha}{2} > 1$

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$ *Em.:* Konb $\iff \alpha < 1/2$

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n}, \quad 0 < q < p$ *Em.:* Konb $\iff p > 1$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(1-a)^{n-1}}, \ a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 1$ *Em.:* Konb $\iff a \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$

(xi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a}{a-1}\Big)^n,\ \ a\in\mathbb{R},\ \ a\neq 1$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a\in(-\infty,1/2)$

(xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)},\ \ a>0$ *Em.:* Konb $\Longleftrightarrow a>1$

(xiii) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow \alpha>1/2$

(xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin^2(n\alpha)}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow \alpha>1$

(xv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(x+\frac{1}{n}\Big)^n,\ x>0$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow x<1$

(xvi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!a^{2n}}{(n+1)^{2n+1}2^{n+1}},\ a\in\mathbb{R}$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow |a|<\dfrac{e}{\sqrt{2}}$

(xvii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)},\ x>0$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow x>1$

(xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{6n}}{x^{6n}+n^n},\ x>0$ *Em.:* konb $\forall\, x>0$

(xix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n,\ x>0$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow x<1/4$

(xx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+n^4)^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow \alpha>3/4$

3.8. Aztertu serie hauen izaera:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4^n}$ *Em.:* konb.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ *Em.:* konb.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-4}}$ *Em.:* konb.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^3}{n\sqrt{n+4}}$ *Em.:* konb.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{3^n}$ *Em.:* konb.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2+5}{6n^2-2n+1}$ *Em.:* dib.

(vii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\ln(n)}$ *Em.:* dib.

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ *Em.:* konb.

3.9. Izan bedi

$$x_n = \begin{cases} n^{-2}, & n \text{ bakoitia bada,} \\ n^{-3}, & n \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$

Frogatu $\sum x_n$ konbergentea dela, konparazio-irizpidea erabiliz.

Aztertu $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, eta egiaztatu zatiduraren eta erroaren irizpideak ez direla baliagarriak kasu horretan.

3.10. Izan bedi

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n}, & n \text{ bakoitia bada,} \\ 3^{-n}, & n \text{ bikoitia bada.} \end{cases}$$

Frogatu $\sum x_n$ konbergentea dela, konparazio-irizpidea erabiliz.

Aztertu ea existitzen diren $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

3.11. Kalkula itzazu honako serie hauen baturak:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n+2)}$ *Em.:* $1/2$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdot\dots\cdot(n+p)}$, $p \in \mathbb{N}$. *Em.:* $\dfrac{1}{p\cdot p!}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n}{4^n}$ *Em.:* $4/25$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ *Em.:* 1

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ *Em.:* $\ln 3$

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{n-1}$, $|x|<1$ izanik *Em.:* $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2-4}$ *Em.:* $1/4$

4. gaia

Funtzioak: limiteak eta jarraitutasuna

Gai honetan, aldagai errealeko funtzio errealen analisiarekin hasiko gara. Oinarrizko definizioak eman eta gero, funtsezkoa den limitearen kontzeptua definituko dugu esparru horretan, eta, hortik abiatuz, jarraitutasunaren kontzeptua aztertuko dugu.

4.1 Aldagai errealeko funtzio errealak. Definizioak eta adibideak

Definizioa. *Aldagai errealeko funtzio erreala* zenbaki errealen azpimultzo ez-huts batetik zenbaki errealen azpimultzo batera doan aplikazioa da; hots, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ bada, D multzoan definitutako f funtzioa D multzoko elementu bakoitza zenbaki erreal bakar batekin lotzen duen erregela da. $f\colon D \to B$ idatziko dugu, $B \subset \mathbb{R}$ izanik.

Definizioak. Izan bitez $D, B \subset \mathbb{R}$ eta $f\colon D \to B$ aldagai errealeko funtzio erreala.

(i) D multzoa f funtzioaren *definizio-eremua* dela esaten da.

(ii) $x \in D$ elementuari funtzioak lotzen dion zenbaki erreala x-ren *irudia* da, eta $f(x)$ idazten da. Halaber, $A \subset D$ bada, $f(A) = \{f(x) \,:\, x \in A\}$ multzoa A-ren *irudia* da.

D multzoko elementuen irudiek osatzen duten multzoa, $f(D)$, f funtzioaren *irudi multzoa* da.

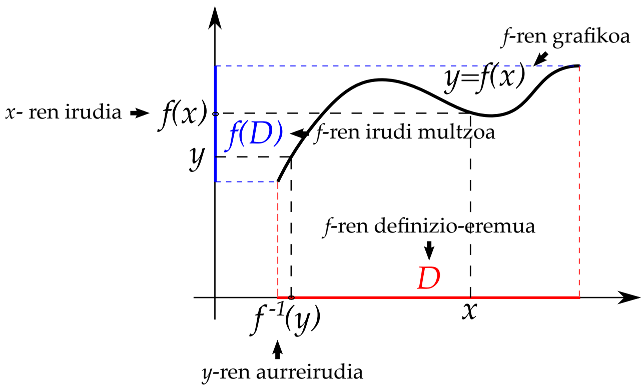
(iii) D multzoko elementu bakoitzak eta haren irudiak osatzen duten bikoteen multzoa f funtzioaren *grafikoa* da, $\{(x, f(x)) \,:\, x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$.

(iv) $y \in B$ bada eta existitzen bada $x \in D$ non $f(x) = y$ den, orduan, x y-ren *aurreirudia* dela diogu.

Oharrak. (i) Normalean, funtzio bat definitzeko, x-ren irudia kalkulatzeko adierazpena ematen da, definizio-eremua aipatu gabe. Kasu horretan, f-ren definizio-eremutzat, edo existentzia-eremutzat, ahal den multzorik handiena hartzen da, non $f(x)$ kalkulatzeko ematen den adierazpena bailoduna den.

Adibidez, $f(x) = \sqrt{x+2}$ funtzioa ematen bada, haren existentzia-eremua $D = [-2, \infty)$ da, erro karratua soilik zenbaki ez-negatiboetarako existitzen delako.

(ii) f funtzioaren grafikoa ardatz kartesiarretan adierazten da; ardatz horizontalean, abszisa-ardatza, D multzoko elementuak kokatuz, eta ardatz bertikalean, ordenatu-ardatza, haien irudiak f-ren bidez.



4.1 irudia. Aldagai errealeko funtzio erreal baten elementuak.

Gogoratuko ditugu orain bi multzoren arteko aplikazio berezi batzuen definizioak aldagai errealeko funtzioen esparruan.

Definizioak. Izan bitez $D, B \subset \mathbb{R}$ eta $f\colon D \to B$ funtzioa.

(i) f *injektiboa* dela diogu elementu desberdinen irudiak desberdinak badira; hau da, $x_1, x_2 \in D$ izanik, $x_1 \neq x_2$ bada, orduan, $f(x_1) \neq f(x_2)$ da.

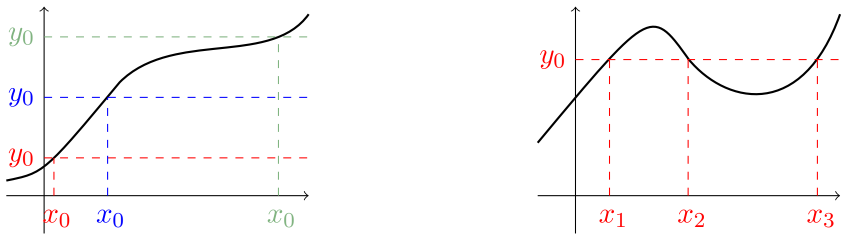
(ii) f *suprajektiboa* da, baldin eta $f(D) = B$ bada; hau da, edozein $y \in B$ zenbakitarako, existitzen bada $x \in D$ non $f(x) = y$ den.

(iii) f *bijektiboa* da, baldin eta injektiboa eta suprajektiboa bada.

Oharrak. (i) Aldagai errealeko funtzioen injektibotasuna grafikoki egiazta daiteke. $f\colon D \subset \mathbb{R} \to B$ funtzioa injektiboa izango da, haren grafikoa $y = y_0$ zuzen horizontalarekin ebakitzean, punturik ez edo puntu bakar bat badago, $y_0 \in B$ guztietarako, 4.2. irudian erakusten den bezala.

(ii) Funtzio bat injektiboa izan daiteke eremu batean baina ez beste batean. Adibidez, $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 7$ funtzioa injektiboa da. Izan ere,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1^2 + 7 = x_2^2 + 7 \implies x_1^2 = x_2^2.$$



4.2 irudia. Ezkerrean, funtzio injektibo bat. Eskuinean, injektiboa ez den funtzio bat.

x_1 eta x_2 positiboak direnez, $x_1 = x_2$ izan behar da, halabeharrez. Beraz, f injektiboa da $[0, 5]$ tartean. Aldiz, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 7$ ez da injektiboa, $g(2) = g(-2)$ delako, adibidez.

(iii) Funtzio bat suprajektibo egiteko, nahikoa da $B = f(D)$ hartzea; hau da, aurreirudirik ez duten elementuak kentzea B multzotik. Bereziki, funtzio injektibo bat bijektibo bihur daiteke B murriztuz. B aldatzeak ez duenez ondoriorik funtzioaren definizioan, hemendik aurrera $B = \mathbb{R}$ hartuko dugu beti.

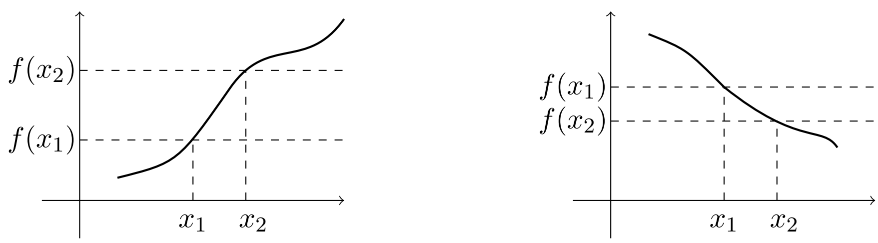
Zenbaki errealen multzoan ordena-erlazio osoa dugunez definituta, aldagai errealeko funtzioen irudiak konpara daitezke. Hortaz, honako definizio hauek eman daitezke:

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa. f *bornatua* dela diogu, baldin eta $f(D)$ multzo bornatua bada; hau da, existitzen bada $M > 0$ non $|f(x)| \leq M$ den $x \in D$ guztietarako.

Definizioak. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) f *gorakorra* dela diogu, baldin eta $x_1, x_2 \in D$ badira, $x_1 < x_2$ izanik, orduan, $f(x_1) \leq f(x_2)$ bada (*hertsiki gorakorra* $f(x_1) < f(x_2)$ bada).

(ii) f *beherakorra* dela diogu, baldin eta $x_1, x_2 \in D$ badira, $x_1 < x_2$ izanik, orduan, $f(x_1) \geq f(x_2)$ bada (*hertsiki beherakorra* $f(x_1) > f(x_2)$ bada).



4.3 irudia. Ezkerrean, funtzio gorakor bat. Eskuinean, funtzio beherakor bat.

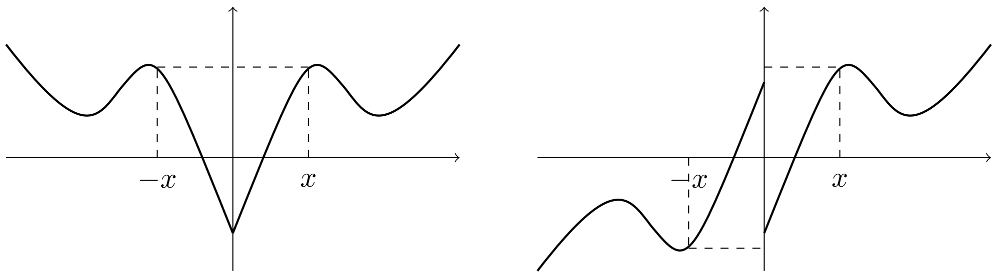
$D \subset \mathbb{R}$ multzoa jatorriarekiko simetrikoa dela diogu $x \in D$ guztietarako, $-x \in D$ bada. Aldagai errealeko funtzio baten definizio-eremua jatorriarekiko simetrikoa bada, puntu bat eta haren aurkakoaren irudiak konpara daitezke.

Definizioak. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}$ jatorriarekiko simetrikoa den multzoa eta $f \colon D \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzio erreala.

(i) f *bikoitia* dela diogu, baldin eta $f(-x) = f(x)$ bada x guztietarako.

(ii) f *bakoitia* dela diogu, baldin eta $f(-x) = -f(x)$ bada x guztietarako.

Oharra. Funtzio bikoitien grafikoak simetrikoak dira ordenatu-ardatzarekiko. Aldiz, funtzio bakoitien grafikoak simetrikoak dira jatorriarekiko.



4.4 irudia. Ezkerrean, funtzio bikoiti bat. Eskuinean, funtzio bakoiti bat

Definizioa. Izan bedi $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa. f *periodikoa* dela diogu, p haren *periodoa* izanik, baldin eta $f(x+p) = f(x)$ bada $x \in \mathbb{R}$ guztietarako.

Aldagai errealeko funtzio errealen irudiak zenbaki errealak direnez, zenbaki errealen multzoan ditugun eragiketa aljebraikoak burutu daitezke. Horrela, funtzioen arteko batuketa eta biderketa defini daitezke. Noski, puntu bat funtzio berrien definizio-eremuan egoteko, ezinbestekoa da hasierako bi funtzioen definizio-eremuetako puntua izatea.

Definizioa. Izan bitez $f \colon D_1 \to \mathbb{R}$ eta $g \colon D_2 \to \mathbb{R}$ funtzioak. $f+g$ eta fg funtzioen definizio-eremua $D_1 \cap D_2$ da, eta

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D_1 \cap D_2$ guztietarako.

(ii) $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $x \in D_1 \cap D_2$ guztietarako.

(iii) $\alpha \in \mathbb{R}$ bada, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in D_1$ guztietarako.

Aplikazioen arteko beste eragiketa baten definizioa gogoratuko dugu, konposizioarena, hain zuzen.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D_1 \to \mathbb{R}$ eta $g\colon D_2 \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioak, $f(D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$ izanik. Orduan, f-ren eta g-ren arteko *konposizioa*, $g \circ f\colon D_1 \to \mathbb{R}$, honako modu honetan definitzen da:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

eta f konposatu g irakurtzen da.

Oharra. Konposizioa orokorrean ez da trukakorra. Izan bitez $f(x) = \sin x$ eta $g(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x;\\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2.\end{aligned}$$

Beraz, $g \circ f \neq f \circ g$.

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzio injektiboa. f-ren *alderantzizko funtzioa* f^{-1} ikurraren bidez adierazten da, haren definizio-eremua f-ren irudi multzoa da, eta honako modu honetan definituta dago:

$$\forall\, x \in f(D) \quad f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x.$$

Oharra. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzio injektiboa. Arestian definitutako f^{-1} funtzioa f-ren alderantzizkoa da konposiziorako. Eragiketa horretarako elementu neutroa $id(x) = x$ identitate funtzioa da. Horrela,

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= x, \quad \forall\, x \in D,\\ (f \circ f^{-1})(x) &= x, \quad \forall\, x \in f(D).\end{aligned}$$

Bestalde, f-ren grafikoa

$$\{(x,\ f(x)) \ :\ x \in D\}$$

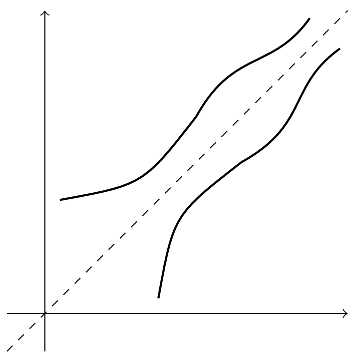
da, eta f^{-1} funtzioaren grafikoa $\{(y,\ f^{-1}(y)) \ :\ y \in f(D)\}$. $y \in f(D)$ bada, aurki daiteke $x \in D$ non $f(x) = y$ den, eta, $f^{-1}(f(x)) = x$ denez, f^{-1} funtzioaren grafikoa honako era honetan ere adieraz daiteke:

$$\{(f(x),\ x) \ :\ x \in D\},$$

hau da, f eta f^{-1} funtzioen grafikoak $y = x$ zuzenarekiko simetrikoak dira, 4.5 irudian ikusten den bezala.

4.2 Aldagai errealeko funtzioen limiteak

2. gaian zenbaki errealen segiden limitea definitu zen. Han, eskatzen zen segidaren gaiak limitetik nahi den bezain hurbil egotea aldagai independentea, n, behar den bezain handia denean. Atal honetan, aldagai errealeko limiteen kontzeptua definituko dugu. Hemen, funtzioaren irudiak limitea deituko dugun zenbaki batetik nahi den bezain hurbil egongo dira, aldagai independentea, x, puntu batetik behar den bezain hurbil hartuz gero.



4.5 irudia. Funtzioaren eta alderantzizkoaren grafikoen simetria $y = x$ zuzenarekiko.

Definizioa. Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta $r > 0$. $(x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\} = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 < |x - x_0| < r\}$ multzoa x_0 puntuan zentratutako eta r erradioko *tarte simetriko laburtua* dela esaten da.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in \mathbb{R}$, eta demagun existitzen dela $r > 0$ non $(x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\} \subset D$ den. Izan bedi $l \in \mathbb{R}$. l zenbakia f funtzioaren x_0 puntuko *limitea* dela diogu, eta $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ idazten dugu, baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Adibidea. Froga dezagun $\lim_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ dela, hau da,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \epsilon$$

betetzen dela. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $x \neq 0$ bada, orduan,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

da; beraz, $\delta = \epsilon > 0$ hartuz, $0 < |x| < \delta$ bada,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \epsilon.$$

Irudiak zenbaki batera hurbildu beharrean, nahi den bezain handiak egiten direnean, limite infinituak sortzen dira.

Definizioak (Limite infinituak)**.** Izan bedi f x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako funtzioa.

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ dela diogu, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta = \delta(M, x_0) > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M.$$

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ dela diogu, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta = \delta(M, x_0) > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < M.$$

Adibidea. Frogatuko dugu $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$ dela. Izan bitez $M > 0$ edozein, eta $x \neq 0$. $f(x) = \dfrac{1}{|x|} > M$ da, baldin eta soilik baldin $|x| < \dfrac{1}{M}$ bada. Beraz, $\delta = \dfrac{1}{M}$ hartuz, $0 < |x| < \delta$ bada, $f(x) = \dfrac{1}{|x|} > M$ da, nahi den bezala.

Azter daiteke, baita ere, zer gertatzen den funtzio baten irudiekin aldagai independentea, puntu batetik hurbil egon beharrean, nahi den bezain handia bada.

Definizioak (Limiteak infinituan)**.** Izan bedi $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ da, baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, K = K(\epsilon) \in \mathbb{R} \quad : \quad x > K \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ da, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x > K \implies f(x) > M.$$

(iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ da, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x > K \implies f(x) < M.$$

Izan bedi $f\colon (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa.

(i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ dela diogu, baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, K = K(\epsilon) \in \mathbb{R} \quad : \quad x < K \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ izango da, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x < K \implies f(x) > M.$$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ da, baldin eta

$$\forall\, M \in \mathbb{R} \quad \exists\, K = K(M) \in \mathbb{R} \quad : \quad x < K \implies f(x) < M.$$

Puntu bateko limitea definitzeko, eskatu dugu funtzioa puntuan zentratutako tarte laburtu batean definituta egotea. Hala ere, batzuetan gerta daiteke funtzioa soilik puntuaren ezkerraldean definituta egotea, soilik eskuinaldean, edo, nahiz eta puntuaren bi aldeetan definituta egon, izaera oso desberdina izatea alde batean eta bestean. Horregatik, komenigarria da albo-limiteak definitzea.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Demagun existitzen dela $r > 0$, non $(x_0, x_0+r) \subset D$ den. Orduan, $l \in \mathbb{R}$ zenbakia f funtzioaren x_0 puntuko *eskuin-limitea* dela esaten dugu, eta $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ idazten dugu, baldin eta

$$\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 \quad : \quad \forall\,x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

(ii) Demagun existitzen dela $r > 0$, non $(x_0 - r, x_0) \subset D$. Orduan, $l \in \mathbb{R}$ zenbakia f funtzioaren x_0 puntuko *ezker-limitea* dela esaten dugu, eta $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ idazten dugu, baldin eta

$$\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 \quad : \quad \forall\,x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Adibidea. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$ funtzioaren definizio-eremua $(2, +\infty)$ da; beraz, ezin da planteatu $x_0 = 2$ puntuko limitea, baina bai eskuin-limitea.

4.2.1 proposizioa. *Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$, f x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako funtzioa eta $l \in \mathbb{R}$. Orduan, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ da, baldin eta soilik baldin $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ badira.*

Froga. $\Longrightarrow$) Suposatzen dugu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dela; hau da,

$$\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Orduan, $\epsilon > 0$ emanda, existitzen da $\delta > 0$ non, $0 < x - x_0 < \delta$ bada $0 < |x - x_0| < \delta$ ere betetzen denez, $|f(x) - l| < \epsilon$ den. Hots, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ da. Era berean, $-\delta < x - x_0 < 0$ bada, $0 < |x - x_0| < \delta$ da, $|f(x) - l| < \epsilon$ inplikatuz. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ da, alegia.

$\Longleftarrow$) Orain, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ eta $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ direla suposatzen dugu. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Orduan, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ izateagatik, existitzen da $\delta_1 > 0$ non, $0 < x - x_0 < \delta_1$ bada, $|f(x) - l| < \epsilon$ den. Era berean, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ denez, existitzen da $\delta_2 > 0$ non, $-\delta_2 < x - x_0 < 0$ bada, $|f(x) - l| < \epsilon$ den.

Izan bedi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Orduan, $0 < |x - x_0| < \delta$ da, baldin eta soilik baldin $0 < x - x_0 < \delta$ edo $-\delta < x - x_0 < 0$ bada. Orain,

$$\begin{aligned} 0 < x - x_0 < \delta \le \delta_1 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon, \\ -\delta_2 \le -\delta < x - x_0 < 0 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon. \end{aligned}$$

Beraz, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ da. $\square$

Oharra. Hemendik aurrera enuntziatuko ditugun propietate guztiak f funtzioaren $x_0 \in \mathbb{R}$ puntuko limitearen kasuan emango ditugu, baina denak berridatz daitezke limiteak infinituan kalkulatzen direnean eta baita albo-limiteetarako ere. Frogetan, x_0 puntuan zentratutako tarte laburtuak $(K, +\infty)$ moduko tarteekin ordezkatu behar dira, $+\infty$-ko limiteei buruz hitz egin nahi badugu; $(-\infty, K)$ moduko tarteekin, $-\infty$-ko limiteak kontuan hartuko bagenitu; $(x_0, x_0 + \delta)$ moduko tarteekin, x_0 puntuko eskuin-limiteetarako; eta, azkenik, $(x_0 - \delta, x_0)$ moduko tarteekin, x_0 puntuko ezker-limiteen kasuan.

4.2.2 teorema (Limitearen bakartasuna)**.** *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in \mathbb{R}$, eta demagun existitzen dela $r > 0$ non $(x_0-r, x_0+r)-\{x_0\} \subset D$ den. Baldin eta f funtzioaren x_0 puntuko limitea existitzen bada, orduan, bakarra da; hots,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \quad \textit{eta} \quad \lim_{x\to a} f(x) = l_2 \quad \Longrightarrow \quad l_1 = l_2.$$

Froga. Absurdora eramanez, demagun existitzen direla $l_1 > l_2$ non $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ eta $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$ den. Har dezagun $\epsilon = \dfrac{l_1 - l_2}{2} > 0$. Orduan, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ denez, existitzen da $\delta_1 > 0$, non, $0 < |x - x_0| < \delta_1$ bada, $|f(x) - l_1| < \dfrac{l_1 - l_2}{2}$ den; eta $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$ denez, existitzen da $\delta_2 > 0$, non, $0 < |x - x_0| < \delta_2$ bada, $|f(x) - l_2| < \dfrac{l_1 - l_2}{2}$ den.

Izan bedi $x \in D$, non $0 < |x - x_0| < \delta_1$ eta $0 < |x - x_0| < \delta_2$ den. Alde batetik,

$$|f(x) - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2} \implies f(x) - l_1 > -\frac{l_1 - l_2}{2} \implies f(x) > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

dugu. Bestalde,

$$|f(x) - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2} \implies f(x) - l_2 < \frac{l_1 - l_2}{2} \implies f(x) < l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

betetzen da. Bi desberdintzak aldi berean ezin direnez bete, kontraesan batera heldu gara. Ondorioz, $l_1 = l_2$ da. □

4.2.3 proposizioa. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in \mathbb{R}$, eta demagun existitzen dela $r > 0$ non $(x - 0 - r, x_0 + r) - \{x_0\} \subset D$ den. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ zenbaki erreala bada, orduan, f bornatua da x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean; hots,*

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \quad |f(x)| \le M.$$

Froga. Izan bedi $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Orduan,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

Bereziki, $\epsilon = 1$ hartuz, existitzen da $\delta > 0$ non, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ bada, $|f(x) - l| < 1$ den. Bestalde, $x \in D$ guztietarako, balio absolutuaren desberdintza triangeluarragatik,

$$|f(x)| = |f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l|$$

da. Beraz,

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \quad |f(x)| \leq 1 + |l| = M. \qquad \square$$

4.2.4 teorema (Funtzio baten limitearen karakterizazioa zenbaki errealen segiden bidez)**.** *Izan bedi f aldagai errealeko funtzioa, eta izan bitez $x_0, l \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ da, baldin eta soilik baldin $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida guztietarako, non $x_n \neq x_0$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ den, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$ bada.*

Froga. $\Longrightarrow$) Suposatzen dugu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dela. Izan bedi $\{x_n\}$ zenbaki errealen segida, non $x_n \neq x_0$ den $n \in \mathbb{N}$ guztietarako eta $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ den. Frogatu behar dugu $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$ dela.

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Orduan, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ denez, existitzen da $\delta > 0$ non, $0 < |x - a| < \delta$ bada, $|f(x) - l| < \epsilon$ den.

Bestalde, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ denez, $\delta > 0$ horretarako existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$, non $n \geq n_0$ bada, $|x_n - x_0| < \delta$ den. Gainera, $x_n \neq x_0$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan, $0 < |x_n - x_0| < \delta$ da.

Beraz, $n \geq n_0$ bada, $0 < |x_n - x_0| < \delta$ da, eta, goikoaren arabera, $|f(x_n) - l| < \epsilon$. Hau da, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$ da.

$\Longleftarrow$) Absurdora eramanez, demagun $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) \neq l$ dela. Orduan, existituko da $\epsilon > 0$ non

$$\forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \quad : \quad |f(x) - l| \geq \epsilon.$$

Bereziki, $n \in \mathbb{N}$ emanda, $\delta = 1/n$ hartuz,

$$\exists\, x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) - \{x_0\} \quad : \quad |f(x_n) - l| \geq \epsilon.$$

Baina $x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) - \{x_0\}$ denez, $x_n \neq x_0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Beraz, hipotesiaren arabera, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$ izan behar da, eta hori ez da posible $|f(x_n) - l| \geq \epsilon$ delako, $n \in \mathbb{N}$ edozein izanda.

Kontraesan batera heldu garenez, hasierako hipotesia ez da egia; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ da, alegia. $\square$

Oharra. 4.2.4 teorema erabil daiteke limite bat existitzen ez dela frogatzeko. x_0 puntura konbergenteak diren bi segida baditugu, eta haien irudiek f funtzioaren bidez osatzen duten segidek limite desberdina badute, orduan, f-ren limitea x_0 puntuan ez da existituko.

Adibidea. Froga dezagun $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ez dela existitzen.

Izan bitez $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ eta $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Argi denez, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ dira, eta $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$ dira, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ zenbaki erreala izatekotan, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{y_n}$ izan beharko luke, baina

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{y_n} &= \lim_{n\to\infty} \sin\Big(2\pi n + \frac{\pi}{2}\Big) = 1. \end{aligned}$$

Bi limite horiek desberdinak direnez, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ez da existitzen.

4.3 Funtzioen limiteak eta eragiketa aljebraikoak

Atal honetan, aldagai errealeko funtzioen limiteen propietate aritmetikoak ikusiko dira. 2.4 atalean hauxe bera egin zen zenbaki errealen segiden limiteetarako. Han, infinitesimoak erabili ziren propietate horiek frogatzeko. Infinitesimoen kontzeptua existitzen da funtzioen esparruan ere, ikusiko den bezala, eta 2.4 ataleko antzeko argudioak gara daitezke. Hala ere, planteamendu desberdin bat erabiliko dugu hemen, segiden atalean ere erabil daitekeena. Horrela, ikasleak arrazoitzeko bi metodoak ikasi ahal izango ditu.

4.3.1 proposizioa. *Izan bitez f eta g x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak, f funtzioa tarte horretan bornatua eta $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ izanik. Orduan, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Froga. f x_0-n zentratutako tarte laburtu batean bornatua denez, existitzen dira $M > 0$ eta $\delta_1 > 0$ non $|f(x)| \leq M$ den $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) - \{x_0\}$ guztietarako.

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ denez, $\dfrac{\epsilon}{M} > 0$ hartuz, existitzen da $\delta_2 > 0$ non, $0 < |x - x_0| < \delta_2$ bada, $|g(x)| < \dfrac{\epsilon}{M}$ den. Izan bedi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Orduan, $0 < |x - x_0| < \delta$ bada,

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$$

da. Beraz, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$ da. □

4.3.2 teorema. *Izan bitez f eta g x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$ izanik. Orduan,*

(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l+m$ *da.*

(ii) $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) = lm$ *da.*

(iii) $m \neq 0$ *bada,* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{1}{m}$ *da.*

(iv) $m \neq 0$ *bada,* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$ *da.*

(v) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$ *da.*

Froga. (i) Honako hau frogatu behar dugu:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x - 0| < \delta \implies |f(x)+g(x)-(l+m)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ denez,

$$\exists \delta_1 > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2},$$

eta, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ denez,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Gainera, balio absolutuaren desberdintza triangeluarrarengatik, x guztietarako,

$$|f(x)+g(x)-(l+m)| = |f(x)-l+g(x)-m| \leq |f(x)-l| + |g(x)-m|$$

da. Har dezagun $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $0 < |x-x_0| < \delta$ bada, bereziki $0 < |x-x_0| < \delta_1$ eta $0 < |x-x_0| < \delta_2$ izango dira; beraz,

$$|f(x)+g(x)-(l+m)| = |f(x)-l+g(x)-m| \leq |f(x)-l|+|g(x)-m| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

da. Hots, $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = l+m$ da.

(ii) Honako hau frogatu behar dugu orain:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x)g(x) - lm| < \epsilon.$$

4.2.3 proposizioaren arabera, f funtzioa bornatua da x_0-n zentratutako tarte laburtu batean; hau da, existitzen dira $M > 0$ eta $\delta_1 > 0$, non $|f(x)| < M$ den $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) - \{x_0\}$ guztietarako.

$m = 0$ bada, 4.3.1 proposizioagatik, $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0 = lm$ da. $m \neq 0$ bada,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &\leq |f(x)(g(x) - m)| + |m(f(x) - l)| = |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l|.\end{aligned}$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ denez, $\frac{\epsilon}{2M} > 0$ hartuz,

$$\exists \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

$m \neq 0$ dela kontuan hartuz, $\frac{\epsilon}{2|m|} > 0$ da, eta, beraz, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ izateagatik,

$$\exists \delta_3 > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_3 \implies |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2|m|}.$$

Orduan, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ hartuz, $0 < |x - x_0| < \delta$ bada,

$$|f(x)g(x) - lm| \leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l| < M\frac{\epsilon}{2M} + |m|\frac{\epsilon}{2|m|} = \epsilon$$

da. Hau da, $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = lm$ dela frogatu dugu.

(iii) Lehenengo eta behin, frogatuko dugu $g(x) \neq 0$ dela x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean. Horrela, $\frac{1}{g}$ funtzioa ondo definituta egongo da.

Izan bedi $\epsilon = \frac{|m|}{2} > 0$. Orduan,

$$\exists \delta_1 > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies |g(x) - m| < \frac{|m|}{2}.$$

Hau da, $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ bada, $|m| - |g(x)| \leq ||m| - |g(x)|| \leq |g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$ da, eta, ondorioz,

$$|g(x)| \geq m - \frac{|m|}{2} = \frac{|m|}{2} > 0$$

da. Bereziki, $g(x) \neq 0$ da $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) - \{x_0\}$ guztietarako, eta $1/g(x)$ ondo definituta dago. Gainera,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m - g(x)}{g(x)m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|m||g(x)|}$$

da. Orain, izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\epsilon \dfrac{|m|^2}{2} > 0$ denez,

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - m| < \epsilon \frac{|m|^2}{2}.$$

Izan bedi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $0 < |x - x_0| < \delta$ bada, orduan,

$$\Big| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \Big| = \frac{|g(x) - m|}{|m||g(x)|} < \frac{1}{|m|} \frac{2}{|m|} \epsilon \frac{|m|^2}{2} = \epsilon$$

da. Beraz, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$ da.

(iv) (ii) eta (iii) atalen ondorioa da.

(v) Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\big||f(x)| - |l|\big| \leq |f(x) - l|$ denez x guztietarako,

$$\exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies ||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \epsilon.$$

Hau da, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ da. □

4.4 Funtzioen limiteak eta ordena-erlazioa

4.4.1 proposizioa. *Izan bedi f x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioa, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ izanik, eta izan bedi $c \in \mathbb{R}$.*

(i) Baldin eta $l > c$ bada, orduan, existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) > c$ den $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ guztietarako.

(ii) Baldin eta $l < c$ bada, orduan, existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) < c$ den $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ guztietarako.

Froga. $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ denez,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

(i) Izan bedi $l > c$. $\epsilon = l - c > 0$ hartuz, existitzen da $\delta > 0$ non, $0 < |x - a| < \delta$ bada, orduan, $|f(x) - l| < l - c$. Hau da,

$$-(l - c) < f(x) - l < l - c, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

Ezkerreko desberdintzatik honako hau ondorioztatzen da:

$$f(x) > -(l - c) + l = c, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

(ii) Antzeko arrazoinamendu baten bidez frogatzen da. □

4.4.2 proposizioa. *Izan bitez f eta g x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako funtzioak, eta $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ eta $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Demagun existitzen dela $\delta > 0$, non $f(x) \leq g(x)$ den $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ guztietarako. Orduan, $l \leq m$ da.*

Froga. Absurdora eramanez, demagun $l > m$ dela, eta defini dezagun $h(x) = f(x) - g(x)$. 4.4.1 proposizioaren arabera, $c = 0$ hartuz, eta $\lim_{x\to a} h(x) = l - m > 0$ denez, existitzen da $\delta_1 > 0$ non $h(x) > 0$ den $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) - \{x_0\}$ guztietarako. Hau da, $f(x) > g(x)$ da, $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) - \{x_0\}$ guztietarako, baina hori hipotesiaren kontra doa; beraz, $l \leq m$ da. □

4.4.3 teorema (Funtzioetarako sandwicharen erregela)**.** *Izan bitez f, g eta h x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak. Demagun existitzen dela $\delta > 0$ non*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\},$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$ *badira, orduan,*

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l.$$

Froga. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ denez, existitzen da $\delta_1 > 0$, non

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

den $0 < |x - x_0| < \delta_1$ bada. Era berean, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ izateagatik, existitzen da $\delta_2 > 0$, non

$$l - \epsilon < g(x) < l + \epsilon$$

den $0 < |x - x_0| < \delta_2$ bada. Gainera,

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

Izan bedi $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$. Orduan, $0 < |x - x_0| < \delta_3$ bada,

$$l - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \epsilon.$$

Beraz, $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$ da. □

4.4.4 teorema. *Izan bitez f eta g x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioak. Demagun existitzen dela $\delta > 0$, non*

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\},$$

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *bada, orduan,* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ *da.*

(ii) $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ *bada, orduan,* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *da.*

4.5 Infinitesimoak

2. gaian esan genuen zenbaki errealen segida bat infinitesimoa dela haren limitea zero bada. Aldagai errealeko funtzioen kasuan, limitea puntu batean kalkulatzen denez, infinitesimoa ere puntu batekoa izango da.

Definizioa. Izan bedi α x_0 puntuan zentratutako tarte laburtu batean definitutako aldagai errealeko funtzioa. α x_0 *puntuko infinitesimoa* dela diogu, baldin eta $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ bada.

Adibideak. Izan bedi $x_0 \in \mathbb{R}$. $\sin(x - x_0)$, $\cos(x - x_0) - 1$ eta $(x - x_0)^n$ x_0 puntuko infinitesimoak dira.

Definizioak. Izan bitez α eta β x_0 puntuko infinitesimoak.

(i) Baldin eta $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ bada, orduan, α infinitesimoaren ordena x_0 puntuan β-rena baino txikiagokoa dela diogu.

(ii) Baldin eta $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \in \mathbb{R} - \{0\}$ bada, orduan, α eta β infinitesimoak x_0 puntuan ordena berekoak direla esaten dugu.

(iii) Baldin eta $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ bada, orduan, α eta β x_0 puntuko *infinitesimo baliokideak* direla esaten da, eta $\alpha \sim \beta$ x_0-n idatzi ohi da.

4.5.1 proposizioa. *Izan bitez α eta β x_0 puntuko infinitesimo baliokideak, eta izan bedi f x_0 puntuaren ingurune batean definitutako funtzioa. Orduan,*

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x)f(x) = \lim_{x\to x_0} \beta(x)f(x), \qquad \textit{eta} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\beta(x)}.$$

Froga. α eta β x_0 puntuko infinitesimo baliokideak direnez, $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ da; beraz, biderkadura baten limitea limiteen biderkadura denez,

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x)f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\beta(x)f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \lim_{x\to x_0} \beta(x)f(x) = \lim_{x\to x_0} \beta(x)f(x).$$

Gauza bera gertatzen da $\alpha(x)$ zatitzen agertzen bada. □

4.5.1 lagungarria izateko limiteen kalkuluan, infinitesimoen baliokidetasunak ezagutu behar ditugu. Jarraian zerrendatzen dira maiz erabiltzen diren baliokidetasun batzuk.

Infinitesimo baliokide nagusiak. Izan bedi α funtzioa x_0 puntuko infinitesimoa. Orduan,

(i) $\sin\big(\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$ dira x_0-n.

(ii) $1 - \cos\big(\alpha(x)\big) \sim \dfrac{\big(\alpha(x)\big)^2}{2}$ dira x_0-n.

(iii) $\tan\big(\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$ dira x_0-n.

(iv) $\ln\big(1 + \alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$ dira x_0-n.

(v) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ dira x_0-n.

(vi) $b^{\alpha(x)} - 1 \sim (\ln b)\alpha(x)$ dira x_0-n, $b > 0$ izanik.

(vii) $\arcsin\big(\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$ dira x_0-n.

(viii) $\arctan\big(\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$ dira x_0-n.

Adibidea. Kalkula dezagun $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$. Horretarako, infinitesimo baliokideak erabiliko ditugu. $\lim\limits_{x\to 2} \ln(x^2-3) = 0$ denez, $\ln(x^2-3)$ $x_0 = 2$ puntuko infinitesimoa da, eta badakigu $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ dela x_0 puntuan, α x_0 puntuko infinitesimoa bada. Orduan,

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln(1+x^2-4)}{(x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x+5)} = \frac{4}{7}.$$

4.6 Funtzio jarraituak: definizioa eta oinarrizko propietateak

Aldagai errealeko funtzio baten puntu bateko limitea existitzeko, ez da beharrezkoa funtzioa puntuan bertan definituta egotea, nahikoa da funtzioa puntuaren tarte laburtu batean definituta badago. Hala ere, funtzioa puntuan ere definituta badago, bi zenbaki erreal ditugu, funtzioaren puntu horretako limitea eta funtzioaren puntu horretako balioa. Bi balio horiek berdinak badira, funtzioa puntuan jarraitua dela diogu. Hona hemen definizio zehatza.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa, eta demagun existitzen dela $r > 0$ non $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D$ den. f funtzioa x_0 puntuan *jarraitua* dela diogu, baldin eta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bada; hau da,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 \quad : \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Adibideak. Polinomioak eta esponentzialak funtzio jarraituak dira puntu guztietan.

Logaritmoak jarraituak dira x_0 puntuan, $x_0 > 0$ bada.

Sinua eta kosinua jarraituak dira puntu guztietan. Aldiz, tangentea ez da jarraitua $x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ motakoa bada, $k \in \mathbb{Z}$ izanik.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in D$.

(i) Demagun existitzen dela $r > 0$ non $[x_0, x_0+r) \subset D$ den. f funtzioa x_0 puntuan *eskuinetik jarraitua* dela diogu, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ bada.

(ii) Demagun existitzen dela $r > 0$ non $(x_0-r, x_0] \subset D$ den. f funtzioa x_0 puntuan *ezkerretik jarraitua* dela diogu, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ bada.

4.2.1. proposiziotik berehala ondorioztatzen da honako emaitza hau:

4.6.1 proposizioa. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0-n zentratutako tarte batean definitutako aldagai errealeko funtzioa. f x_0 puntuan jarraitua da, baldin eta soilik baldin x_0-n ezkerretik jarraitua eta eskuinetik jarraitua bada.*

Funtzio jarraituen oinarrizko propietateak aurreko ataletan frogatu diren limiteen propietateetan oinarritzen dira. Horregatik, jarraian ematen diren proposizioen frogak berehalakoak dira. Enuntziatuetan, emandako funtzioa x_0 puntuan jarraitua dela suposatuko da, baina antzeko enuntziatuak idatz daitezke funtzioa x_0-n eskuinetik jarraitua (edo ezkerretik jarraitua) bada soilik. Kasu horretan, x_0-n zentratutako tarteen ordez, $[x_0, x_0 + r)$ (edo $(x_0 - r, x_0]$) motako tarteetan beteko dira aipatutako emaitzak.

4.6.2 proposizioa. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in D$. Baldin eta f x_0 puntuan jarraitua bada, orduan, existitzen da $\delta > 0$ non f $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tartean bornatua den; hau da,*

$$\exists\, M > 0 \quad : \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

4.6.3 proposizioa. *Izan bitez f eta g x_0 puntuan jarraituak. Orduan,*

(i) $f + g$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.

(ii) $f\,g$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.

(iii) Baldin eta $g(x_0) \neq 0$ bada, orduan, $\dfrac{1}{g}$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.

(iv) Baldin eta $g(x_0) \neq 0$ bada, orduan, $\dfrac{f}{g}$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.

4.6.4 proposizioa. *Izan bitez f funtzioa x_0 puntuan jarraitua eta $c \in \mathbb{R}$.*

(i) $f(x_0) > c$ bada, orduan, existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) > c$ den $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ guztietarako.

(ii) $f(x_0) < c$ bada, orduan, existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) < c$ den $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ guztietarako.

4.6.5 proposizioa. *Izan bitez f eta g funtzioak x_0 puntuan jarraituak. Baldin eta $f(x_0) < g(x_0)$ bada, orduan, existitzen da $\delta > 0$ non $f(x) < g(x)$ den $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ guztietarako.*

4.6.6 proposizioa (Jarraitutasunaren karakterizazioa zenbaki errealen segiden bidez)**.** *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in D$. Orduan, f funtzioa x_0 puntuan jarraitua da, baldin eta soilik baldin*

$$\forall \{x_n\} \text{ z.e.s. } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ izanik, } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

4.6.7 proposizioa. *Izan bitez $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ eta g funtzioa l puntuan jarraitua. Orduan,*

$$\lim_{x\to x-0} \big(g \circ f\big)(x) = g(l).$$

Froga. Honako hau frogatu behar dugu:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |g\big(f(x)\big) - g(l)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. g funtzioa l puntuan jarraitua denez, existitzen da $\delta_2 > 0$ non, $|y - l| < \delta_2$ bada, $g(y) - g(l)| < \epsilon$ den.

$\delta_2 > 0$ da, eta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$; beraz, existitzen da $\delta_1 > 0$ non, $0 < |x - x_0| < \delta_1$ bada, $|f(x) - l| < \delta_2$ den. Orduan,

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - l| < \delta_2 \implies |g\big(f(x)\big) - g(l)| < \epsilon.$$

Hau da, $\lim\limits_{x\to x_0} \big(g \circ f\big)(x) = g(l)$ da. □

4.6.8 korolarioa. *f funtzioa x_0 puntuan jarraitua eta g funtzioa $f(x_0)$ puntuan jarraitua badira, orduan, $g \circ f$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da.*

4.7 Etenguneak

Funtzio bat puntu batean jarraitua izateko, funtzioa eta haren limitea puntu horretan definituta egon behar dira, eta bi balio horiek berdinak izan behar dira. Hiru baldintza horietako bat ez bada betetzen, funtzioak puntu horretan etengune bat duela diogu.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 puntua f funtzioaren *etengunea* (edo *eten-puntua*) dela esango dugu, honako bi baldintza hauetatik bat betetzen bada:

(i) $x_0 \in D$. baina f ez da jarraitua x_0 puntuan;

(ii) $x_0 \notin D$, baina existitzen da $r > 0$ non $(x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\} \subset D$.

Definizioa (Etenguneen sailkapena)**.** Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa eta x_0 f funtzioaren etengunea.

(i) Baldin eta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ bada, orduan, x_0 puntua f funtzioaren *etengune gaindigarria* (edo *ekidingarria*) dela diogu. Kasu horretan, defini dezakegu

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0,\ x \in D \text{ bada,} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \text{ bada.} \end{cases}$$

$\tilde{f}$ funtzioa x_0 puntuan jarraitua da eta $\tilde{f}(x) = f(x)$ da, $x \neq x_0$ bada. Beraz, f-ren x_0 puntuko etengunea $\tilde{f}$-ren bidez «gainditzen» dugu.

(ii) x_0 puntua f funtzioaren *lehen mailako etengunea* dela esango dugu, baldin eta $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existitzen badira, finituak edo infinituak; eta finituak direnean, desberdinak badira.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ eta $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ zenbaki erreal desberdinak badira, f-k x_0 puntuan *jauzi* bat duela esaten da, $\left|\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right|$ zenbaki erreala f-ren x_0 puntuko *jauziaren neurria* izanik.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ edo $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ infinituak badira, orduan, $x = x_0$ zuzena f-ren *asintota* bertikala dela diogu.

(iii) x_0 puntua f funtzioaren *bigarren mailako etengunea* dela diogu, baldin eta albo-limite bat, gutxienez, ez bada existitzen.

Adibideak. (i) Izan bedi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. $x_0 = 1$ f funtzioaren etengune gaindigarria da. Izan ere, f ez dago definituta x_0 puntuan, baina

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Izan bedi $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. $x_0 = 0$ f funtzioaren lehen mailako etengunea da, zeren eta $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ baita.

(iii) Izan bedi $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \text{ bada,} \\ x-1, & x \geq 0 \text{ bada.} \end{cases}$

$x_0 = 0$ f funtzioaren lehen mailako etengunea da, zeren eta

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1-x) = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to o^+} (x-1) = -1$$

baitira. Beraz, f-ren jauziaren neurria $x_0 = 0$ puntuan $|1-(-1)| = 2$ da.

(iv) Izan bedi $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. $x_0 = 0$ f-ren bigarren mailako etengunea da, ikusi dugun bezala, $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ez baita existitzen.

4.8 Funtzio jarraituei buruzko teorema nagusiak

Orain arte, aldagai errealeko funtzioen jarraitutasuna puntu batean aztertu dugu. Atal honetan, funtzioak tarte baten puntu guztietan jarraituak izatea nahi izango dugu.

Definizioa. Izan bedi f aldagai errealeko funtzioa.

(i) f (a, b) *tartean jarraitua* dela diogu, baldin eta f x puntuan jarraitua bada, $x \in (a, b)$ guztietarako.

(ii) f $[a, b]$ *tartean jarraitua* dela diogu, baldin eta (a, b) tartean jarraitua, a puntuan eskuinetik jarraitua eta b puntuan ezkerretik jarraitua bada.

4.8.1 teorema (Bolzano-ren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua. Baldin eta $f(a)$ eta $f(b)$ balioen zeinuak desberdinak badira, orduan, existitzen da $x_0 \in (a, b)$ non $f(x_0) = 0$ den.*

Froga. Demagun $f(a) > 0$ eta $f(b) < 0$ direla (beste kasua antzera frogatzen da), eta izan bedi $I_1 = [a, b]$ tartea. Har dezagun tarte horren erdiko puntua, $\frac{a+b}{2}$.

- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ bada, bilatzen dugun $x_0 = \frac{a+b}{2}$ da, eta amaitu dugu.
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ bada, izan bitez $a_2 = \frac{a+b}{2}$ eta $b_2 = b$.
- $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ bada, izan bitez $a_2 = a$ eta $b_2 = \frac{a+b}{2}$.

Azken bi kasuetan, $f(a_2) < 0$ eta $f(b_2) > 0$ dira. $I_2 = [a_2, b_2]$ tartearekin I_1 tartearekin egindako prozesua errepikatzen badugu, I_3 tartea lortuko dugu, eta, horrela jarraituz, I_n tarte txertatuen familia bat sortuko dugu, non $|I_n| = b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^{n-1}}$ den. $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$ denez, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ da. Izan bedi x_0 limite hori, eta egiazta dezagun $f(x_0) = 0$ dela. f jarraitua denez, 2.7.2 proposizioagatik eta 2.5.2 korolarioagatik,

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to 0} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0$$

da, eta, era berean,

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to 0} b_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$$

da. Beraz, $f(x_0) = 0$ da, frogatu nahi genuen bezala. □

Oharra. Bolzanoren teoremaren frogak $f(x) = 0$ ekuazioaren soluzioak hurbiltzeko metodo bat ematen digu. Izan ere, n. urratsaren ondoren, $(b-a)/2^{n-1}$ luzerako tartean sartu dugu f-ren erroa. Benetako erroaren ordez, tarteko erdiko puntua hartuz gero, egiten dugun errorearen tamaina $(b-a)/2^n$ baino txikiagoa da, eta $n$behar den bezain handia hartuta, errorea nahi den bezain txikia izan daiteke.

4.8.2 teorema (Tarteko balioen teorema edo Darboux-en teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan, f-k $[a,b]$ tartean $f(a)$ eta $f(b)$ balioen arteko balio guztiak hartzen ditu; hau da, y $f(a)$ eta $f(b)$ balioen artean dagoen zenbaki erreala bada,*

$$\exists\, x \in [a,b] \quad : \quad f(x) = y.$$

Froga. $f(a) = f(b)$ bada, orduan, teorema nabaria da.

$f(a) < f(b)$ baldin bada, izan bedi $y \in \mathbb{R}$ non $f(a) < y < f(b)$, eta defini dezagun $g(x) = f(x) - y$. f jarraitua denez $[a,b]$ tartean, g ere jarraitua da tarte horretan. Gainera, $g(a) = f(a) - y < 0$ da, eta $g(b) = f(b) - y > 0$. Bolzanoren teoremaren arabera, existitzen da $x_0 \in (a,b)$ non $g(x_0) = 0$ den; hau da, existitzen da $x_0 \in (a,b)$ non $f(x_0) = y$ den.

$f(a) > f(b)$ bada, $g(x) = y - f(x)$ hartzen da. □

Oharra. 4.8.2 teoremaren arabera, funtzio jarraituek tarteak tarte bihurtzen dituzte; hau da, $A \subset \mathbb{R}$ tarte bat bada, orduan, $f(A)$ ere tarte bat da. Tarteak irekiak, itxiak edo erdiirekiak izan daitezke, bornatuak edo ez bornatuak. Hala ere, tarte mota ez da zertan gorde.

4.8.3 teorema. *Izan bedi f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan, f bornatua da $[a,b]$ tartean; hots,*

$$\exists\, M > 0 \quad : \quad |f(x)| \leq M, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Froga. Izan bedi $A = \{x \in [a,b] \ : \ f \text{ bornatua } [a,x] \text{ tartean}\}$.

$a \in A$ da; beraz, $A \neq \emptyset$ da. Gainera, $A \subset [a,b]$ denez, bornatua da, eta haren supremoa existitu egiten da. Izan bedi $\alpha = \sup A$.

Lehenengo eta behin, frogatuko dugu $\alpha = b$ dela. f a puntuan eskuinetik jarraitua denez, existitzen da $\delta > 0$ non f $[a, a+\delta)$ tartean bornatua den. Beraz, $\alpha > a$.

Absurdora eramanez, demagun $\alpha < b$ dela; hau da, $\alpha \in (a,b)$ dela, eta, beraz, f jarraitua dela α-n. Ondorioz, existitzen da $\delta > 0$, non f $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ tartean bornatua den.

$\alpha = \sup A$ eta $\delta > 0$ direnez, 1.2.4 proposizioagatik badakigu existitzen dela $x_0 \in A$, non $\alpha - \delta < x_0$ den. $x_0 \in A$ denez, f bornatua da $[a, x_0]$ tartean.

Izan bedi $x_1 \in (\alpha, \alpha + \delta)$. Orduan, $[x_0, x_1] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ da; beraz, f bornatua da $[x_0, x_1]$ tartean.

f bornatua da $[a, x_0]$ tartean eta baita $[x_0, x_1]$ tartean ere; beraz, f bornatua da $[a, x_1]$ tartean. Baina $x_1 \in A$ eta $x_1 > \sup A$ da. Hori ez da posible; beraz, $\alpha = b$.

Orain, f b puntuan ezkerretik jarraitua denez, existituko da $\delta > 0$ non f bornatua den $(b - \delta, b]$-n. Gainera, $b = \sup A$ denez, existitzen da $x_0 \in A$, non $b - \delta < x_0$ den.

$$\begin{aligned} x_0 \in A &\Longrightarrow f \quad [a, x_0] \text{ tartean bornatua;} \\ [x_0, b] \subset (b - \delta, b] &\Longrightarrow f \quad [x_0, b] \text{ tartean bornatua.} \end{aligned}$$

Beraz, f bornatua da $[a,b]$ tartean. □

4.8.4 teorema. *f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada, orduan, f-k bere maximoa eta minimoa erdiesten ditu $[a,b]$ tartean. Hau da,*

$$\begin{aligned} \exists\, x_1 \in [a,b] \quad &: \quad f(x_1) \geq f(x), \quad \forall\, x \in [a,b]; \\ \exists\, x_2 \in [a,b] \quad &: \quad f(x_2) \leq f(x), \quad \forall\, x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Froga. 4.8.3 teoreman ikusi dugun bezala, f $[a,b]$ tartean jarraitua denez, bornatua da $[a,b]$ tartean; beraz, $f([a,b])$ multzoaren supremoa eta infimoa existitu egiten dira. Frogatu behar duguna da supremoa eta infimoa irudi multzoan daudela.

Izan bedi $\alpha = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$. Absurdora eramanez, demagun $\alpha \neq f(x)$ dela, $x \in [a,b]$ guztietarako, eta defini dezagun $g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$.

f jarraitua da $[a,b]$ tartean eta $\alpha - f(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ guztietarako; beraz, g jarraitua da $[a,b]$ tartean eta, 4.8.3 teoremaren arabera, bornatua.

Bestalde, $\alpha = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}$ denez,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a,b] \quad : \quad f(x_n) > \alpha - \frac{1}{n}.$$

Baina, hori gertatzen bada, $g(x_n) > \dfrac{1}{\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{n}\right)} = n$ da, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; hau da, g ez da bornatua. Kontraesan batera iritsi garenez, hasieran suposatu duguna ez da egia. Beraz, existitzen da $x_1 \in [a,b]$ non $\alpha = f(x_1)$ den; hau da,

$$\exists\, x_1 \in [a,b] \quad : \quad f(x_1) \geq f(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

f-k minimoa erdiesten duela frogatzeko, antzeko arrazoinamendu baten bidez egiten da. □

4.9 Alderantzizko funtzioaren jarraitutasuna

4.1 atalean definitu zen funtzio injektibo baten alderantzizko funtzioa. Frogatuko dugu funtzio bat injektiboa eta jarraitua bada tarte batean, haren alderantzizkoa ere jarraitua dela.

4.9.1 lema. *Izan bedi f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua eta injektiboa. Orduan, f hertsiki gorakorra edo hertsiki beherakorra da tarte horretan.*

Froga. f injektiboa denez, $f(a) \neq f(b)$ da. Demagun $f(a) < f(b)$ dela eta izan bedi $x \in (a,b)$. $f(x) < f(a)$ balitz, Darbouxen teoremaren arabera, existituko litzateke $x_0 \in [x,b]$ non $f(x_0) = f(a)$ den, eta hori ez da posible, f injektiboa delako. Beraz, $f(x) > f(a)$ da. Era berean frogatzen da $f(x) < f(b)$ dela. Beraz, $x \in (a,b)$ bada, $f(a) < f(x) < f(b)$ da.

Izan bitez, orain, $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ izanik. $f(x_1) > f(x_2)$ balitz, orduan, $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$ izango lirateke, eta, berriro Darbouxen teorema aplikatuz, existituko litzateke $x_0 \in (a,b)$ non $f(x_0) = f(x_2)$ den, eta hori injektibotasunaren kontra doa. Beraz, $f(x_1) < f(x_2)$ da; hots, f hertsiki gorakorra da.

$f(a) > f(b)$ bada, antzeko arrazoinamendu baten bidez frogatzen da f hertsiki beherakorra dela. □

Oharra. Funtzio hertsiki monotonoak injektiboak dira.

4.9.2 lema. *f hertsiki gorakorra bada, orduan, f^{-1} hertsiki gorakorra da, eta f hertsiki beherakorra bada, orduan, f^{-1} hertsiki beherakorra da.*

Froga. f gorakorra bada, $x_1 < x_2$ denean $f(x_1) < f(x_2)$ da. Izan bitez $y_1 > y_2$. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ balitz, f gorakorra denez, $f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2))$ izango litzateke; hau da, $y_1 < y_2$, eta suposatu dugu $y_1 > y_2$ dela. Beraz, $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ da; hots, f^{-1} gorakorra da.

Antzeko arrazoinamendu baten bidez frogatzen da f beherakorra bada, f^{-1} ere beherakorra dela. □

4.9.3 teorema. *Izan bedi f funtzioa (a,b) tartean jarraitua eta injektiboa. Orduan, f^{-1} jarraitua da $f\big((a,b)\big)$ tartean.*

Froga. Demagun f hertsiki gorakorra dela (a,b) tartean, eta izan bedi $c \in f\big((a,b)\big)$. Frogatu nahi dugu f^{-1} jarraitua dela c puntuan; hau da,

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad |x-c| < \delta \implies |f^{-1}(x) - f^{-1}(c)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein, eta izenda dezagun $\alpha = f^{-1}(c)$; hau da, $f(\alpha) = c$ da. Aurkitu behar dugu $\delta > 0$, non, $f(\alpha)-\delta < x < f(\alpha)+\delta$ bada, $\alpha-\epsilon < f^{-1}(x) < \alpha+\epsilon$ den.

f gorakorra denez, $f(\alpha-\epsilon) < f(\alpha) < f(\alpha+\epsilon)$ da. Izan bedi

$$\delta = \min\{f(\alpha) - f(\alpha-\epsilon), f(\alpha+\epsilon) - f(\alpha)\}.$$

$f(\alpha) - \delta < x < f(\alpha) + \delta$ baldin bada, orduan, δ-ren definiziotik,

$$f(\alpha) - \big(f(\alpha) - f(\alpha-\epsilon)\big) < x < f(\alpha) + f(\alpha+\epsilon) - f(\alpha)$$

da; hau da, $f(\alpha-\epsilon) < x < f(\alpha+\epsilon)$. f^{-1} gorakorra denez, $f(\alpha-\epsilon) < x < f(\alpha+\epsilon)$ bada, orduan,

$$f^{-1}\big(f(\alpha-\epsilon)\big) < f^{-1}(x) < f^{-1}\big(f(\alpha+\epsilon)\big)$$

da; hots, $\alpha - \epsilon < f^{-1}(x) < \alpha + \epsilon$. Beraz, f^{-1} jarraitua da c puntuan.

Antzeko moduan frogatzen da f^{-1} funtzioaren jarraitutasuna, f hertsiki beherakorra bada. □

4.10 Jarraitutasun uniformea

Jarraitutasuna propietate puntuala edo lokala da. Funtzio bat tarte batean jarraitua da, tarte horren puntu guztietan jarraitua bada. Honek esan nahi du $\epsilon > 0$ guztietarako, tartearen x_0 puntu bakoitzean existitu behar dela $\delta > 0$, non, $|x - x_0| < \delta$ bada, orduan, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ den; baina δ hori x_0 puntuaren menpekoa da. Atal honetan definituko dugun jarraitutasun uniformea, aldiz, propietate globala da.

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aldagai errealeko funtzioa, eta $A \subset D$. f funtzioa A multzoan *uniformeki jarraitua* dela diogu, baldin eta

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad : \quad \forall\, x, y \in A, \quad |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Esan bezala, jarraitutasun uniformea propietate globala da; hau da, A multzoko puntu guztiak batera aztertzen dira, eta bi puntu hurbil baldin badaude, orduan, haien irudiak ere hurbil egongo dira. $\delta > 0$ zenbakia ϵ-en menpekoa da soilik. Argi denez, jarraitutasun uniformeak jarraitutasuna bermatzen du.

4.10.1 proposizioa. *Baldin eta f funtzioa A multzoan uniformeki jarraitua bada, orduan, A multzoan jarraitua da.*

Oharra. 4.10.1 proposizioaren alderantzizkoa, orokorrean, ez da egia. Hau da, funtzio jarraituak orokorrean ez dira uniformeki jarraituak. Adibidez, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioa $(0,1)$ multzoan jarraitua da, baina ez da uniformeki jarraitua multzo horretan. Ikus dezagun.

Izan bitez $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$ eta $y_n = \dfrac{1}{n+1}$.

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

da. Izan bedi $\delta > 0$ edozein. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$ denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $\dfrac{1}{n_0(n_0+1)} < \delta$ den. $\epsilon = 1$ hartuz, $\delta > 0$ guztietarako existitzen dira $x = \dfrac{1}{n_0}$ eta $y = \dfrac{1}{n_0+1}$, non $x, y \in (0,1)$ diren eta

$$|x - y| < \delta, \quad \text{baina} \quad |f(x) - f(y)| = |n_0 - (n_0+1)| = 1 \geq \epsilon.$$

Hau da, f ez da uniformeki jarraitua $(0,1)$ multzoan.

4.10.2 teorema (Heine-ren teorema)**.** *f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua bada, orduan, $[a,b]$ tartean uniformeki jarraitua da.*

4.11 Ariketak

4.1. Topa itzazu honako funtzio hauen definizio-eremuak:

(i) $f(x) = \sqrt{|x| - 2x}$ *Em.:* $(-\infty, 0]$

(ii) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ *Em.:* $[-1, 1]$

(iii) $f(x) = \sqrt{\sin x}$ *Em.:* $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

(iv) $f(x) = \ln\big(x(x^2 + x - 4)\big)$ *Em.:* $\big(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}, 0\big) \cup \big(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \infty\big)$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ *Em.:* $\mathbb{R} - \{1, 2\}$

(vi) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$ *Em.:* $\{-1, 1\}$

(vii) $f(x) = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ *Em.:* $(-2, 0]$

(viii) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}\right)$ *Em.:* $(-1, 1) \cup (2, \infty)$

(ix) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2)$ *Em.:* $(2, +\infty)$

(x) $f(x) = \arcsin\left(\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right| - 2\right)$ *Em.:* $[-1, 0] \cup [3, +\infty)$

(xi) $f(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x^2 + x + 2}{x-5}\right| - 1\right)$ *Em.:* $(-\infty, -3) \cup (1, 5) \cup (5, +\infty)$

(xii) $f(x) = \sqrt{|x(x-2)|^2 - 1}$ *Em.:* $(-\infty, 1 + \sqrt{2}] \cup \{1\} \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty)$

4.2. Izan bitez f eta g honako modu honetan definitutako funtzioak:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \qquad g(x) = x^3 - x.$$

Kalkula itzazu $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$.

4.3. Froga ezazu funtzio hauek injektiboak direla, eta aurki itzazu haien alderantzizkoak:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

(ii) $f(x) = 3x - 5$

(iii) $f(x) = (1 - x^3)^{1/5} + 2$

4.4. Izan bedi $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ funtzioa. Eman haren definizio-eremua, eta erabaki injektiboa den ala ez. Injektiboa bada, kalkulatu f-ren alderantzizkoa, eta eman horren definizio-eremua.

4.5. (i) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ eta $\lim_{x\to x_0} g(x)$ ez badira existitzen, posible da $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$ edo $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ existitzea?

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ eta $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ existitzen badira, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existituko da derrigorrez?

4.6. Izan bitez $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ eta $c \in \mathbb{R}$. Froga ezazu $l < c$ bada, orduan, existitzen dela $\delta > 0$ non $f(x) < c$ den, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$ guztietarako.

4.7. Kalkula itzazu limite hauek, $a \in \mathbb{R}$ eta $n \in \mathbb{N}$ izanik:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ *Em.:* $\dfrac{a-1}{3a^2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \big(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\big)$ *Em.:* 0

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$ *Em.:* $\dfrac{n(n+1)}{2}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+a)-\ln a}{x}$ *Em.:* $1/a$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ *Em.:* $12/5$

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\cos\sqrt{x}}$ *Em.:* 1

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\big(\ln(x+1)-\ln x\big)$ *Em.:* 1

(viii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$ *Em.:* 1

(ix) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ *Em.:* $1/9$

(x) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ *Em.:* 0

4.8. Kalkula itzazu limite hauek:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ *Em.:* 0

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}, \quad n,m \in \mathbb{N}$ *Em.:* $\dfrac{n^2-m^2}{2}$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ *Em.:* $1/2$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ *Em.:* $1/4$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$ *Em.:* $\sqrt{2}$

(vi) $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\tan x}$ *Em.:* 1

(vii) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$ *Em.:* e

(viii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$ *Em.:* $-1/2$;

(ix) $\lim_{x\to 0^+}(1+\tan^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$ *Em.:* $\sqrt{e}$

(x) $\lim_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$ *Em.:* 0

(xi) $\lim_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}, \quad a\in\mathbb{R}$ *Em.:* $1/\cos^2 a$

(xii) $\lim_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ *Em.:* $1/\sqrt{3}$

(xiii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$ *Em.:* 1

(xiv) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ *Em.:* 2

(xv) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin 3x}$ *Em.:* 1/9

(xvi) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ *Em.:* 4/7

(xvii) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{1/x^2}$ *Em.:* $\sqrt{e}$

(xviii) $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{3/x^2}$ *Em.:* $\dfrac{1}{e^6}$

(xix) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\dfrac{\tan(5x)}{\tan x}$ *Em.:* 1/5

(xx) $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ *Em.:* 1

(xxi) $\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$ *Em.:* $1/e$

(xxii) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ *Em.:* 1

(xxiii) $\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln(\sin x)}{\pi-2x}$ *Em.:* 0

(xxiv) $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}\dfrac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$ *Em.:* 1/2

(xxv) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\cos^3 x-1}{x^3}$ *Em.:* $-\infty$

4.9. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \text{ bada}, \\ x^6 + x^3, & 0 < x < 1\text{bada}, \\ (x^2-1)^2 + 2, & 1 \leq x < 2 \text{ bada}, \\ \dfrac{x^3}{2x+4} + x^2, & x \geq 2 \text{ bada}. \end{cases}$$

Azter ezazu f funtzioaren jarraitutasuna.

4.10. Izan bedi $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$, $x \neq 0$ bada, non $[a]$ a-ren zati osoa den. Egin ezazu gutxi gorabeherako adierazpen grafikoa, eta aztertu etenguneak.

4.11. Azter ezazu funtzio hauen jarraitutasuna:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{1 - e^{1/x}}$

(ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(iii) $f(x) = (x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)}$

(iv) $f(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{1 + e^{1/x}}$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\tan x}}$

4.12. Izan bedi f honako modu honetan definitutako funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\pi/2 \text{ bada}, \\ A\sin x + B, & -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ bada}, \\ \cos x, & x \geq \pi/2 \text{ bada}. \end{cases}$$

A eta B-ren zein baliotarako da f funtzioa puntu guztietan jarraitua?

Em.: $A = -1$, $B = 1$.

4.13. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \text{ bada}, \\ |x - a|, & 0 < x < 3, \text{bada}, \\ \dfrac{(x^2 + 3x)}{x + b}, & x \geq 3 \text{ bada}. \end{cases}$$

Aurkitu a eta b, f funtzioa puntu guztietan jarraitua izan dadin.

Em.: $a = -1$ eta $b = 3/2$ edo $a = 1$ eta $b = 6$.

4.14. Aurki itzazu a eta b parametroen balioak, honako funtzio hau puntu guztietan jarraitua izan dadin:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x \leq -1 \text{ bada}, \\ ax + b, & -1 < x \leq 0 \text{ bada}, \\ 3x^2 + 2, & x > 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Em.: $a = 3/4$, $b = 2$.

4.15. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{8+ax} - 2}{x}, & x < 0 \text{ bada}, \\ (1 + \tan(\pi x))^{1/\cos(\pi/2)}, & 0 \leq x < 1 \text{ bada}, \\ e^{bx}, & x \geq 1 \text{ bada}. \end{cases}$$

Aurki itzazu a eta b parametroen balioak, f funtzioa puntu guztietan jarraitua izan dadin.

Em.: $a = 12$, $b = -2$.

4.16. Demagun f funtzioa 0 puntuan jarraitua dela eta

$$f\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 5n^2 \left(\ln(n^2+1) - \ln(n^2-1)\right)$$

dela, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Kalkula ezazu $f(0)$ balioa.

Em.: $f(0) = 10$.

4.17. Demagun f funtzioak honako hau betetzen duela:

$$f(1/n) = \frac{1}{n^2+1} \qquad \text{eta} \qquad f(-1/n) = \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

f funtzioa 0 puntuan jarraitua al da?

4.18. (i) Izan bedi f funtzioa, non x guztietarako honako desberdintza hau betetzen den: $|f(x)| \leq |x|$. Froga ezazu f jarraitua dela $x = 0$ puntuan.

(ii) Izan bedi g funtzioa $x = 0$ puntuan jarraitua, $g(0) = 0$ izanik. Demagun h funtzioak $|h(x)| \leq |g(x)|$ betetzen duela x guztietarako. Froga ezazu h jarraikia dela $x = 0$ puntuan.

4.19. (i) Froga ezazu $x2^x = 1$ ekuazioak gutxienez 1 baino txikiagoa den erro bat duela.

(ii) Eman ezazu honako propietate hau duen a zenbaki bat: $x2^x = 10$ ekuazioak erro bat du $[a, a+1]$ tartean. Behin bat aurkituta, pentsa ezazu ea beste aukerarik dagoen.

4.20. Izan bedi P maila bakoitiko polinomioa. Frogatu P-k erro erreal bat duela, gutxienez. Maila bikoitikoa bada, balio du emaitzak?

4.21. Izan bitez f eta g funtzioak $[a, b]$ tartean jarraituak, $f(a) < g(a)$ eta $f(b) > g(b)$ izanik. Froga ezazu existitu egiten dela $x \in [a, b]$ non $f(x) = g(x)$ den.

4.22. Demagun $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ funtzioa jarraitua dela $[0, 1]$ tartean. Froga ezazu existitzen dela $x \in [0, 1]$ non $f(x) = x$ den, eta existitzen dela $y \in [0, 1]$ non $f(y) = 1 - y$ den.

4.23. Froga ezazu ekuazio hauek gutxienez soluzio erreal bat dutela:

(i) $\sin x = x - 1$,

(ii) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119.$

4.24. Froga ezazu $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ eta $g(x) = \sin x$ funtzioak uniformeki jarraituak direla $\mathbb{R}$-n.

4.25. Froga ezazu funtzio hauek ez direla uniformeki jarraituak agertzen diren D eremuetan:

(i) $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

(ii) $h(x) = e^x, \qquad D = \mathbb{R}.$

5. gaia

Deribagarritasuna

Jarraitutasunak funtzioaren grafikoak etenik ez duela esaten digun bezala, deribatuak funtzioaren grafikoak izkinarik ez duela esaten digu; hau da, zuzen ukitzailea defini daitekeela, eta grafikoa leuna dela. Deribatuen bidez, funtzioen grafikoen propietateak aztertu ahal izango ditugu; hala nola, gorakortasuna edo ahurtasuna. Halaber, deribatuen bidez eraiki ahal izango dugu funtzioaren hurbilketa polinomiko bat, Taylorren polinomio deritzoguna.

5.1 Deribatua: definizioa, adibideak eta oinarrizko propietateak

Definizioa. Izan bedi f x_0 puntuan zentratutako tarte batean definitutako funtzioa. f x_0 puntuan *deribagarria* dela diogu, baldin eta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existitzen bada eta zenbaki erreala bada. Limite hori $f'(x_0)$-ren bidez adieraziko dugu, eta f funtzioaren *deribatua* x_0 puntuan dela esango dugu.

Adibideak. (i) Izan bedi f funtzio konstante bat; hots, $f(x)=k$, $x \in \mathbb{R}$ guztietarako, $k \in \mathbb{R}$ izanik. Funtzio horren deribatua kalkulatuko dugu x_0 puntuan, x_0 edozein zenbaki erreal izanik.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Izan bedi $f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N}$ izanik. Kalkula dezagun funtzio horren deribatua x_0 puntuan, x_0 edozein zenbaki erreal izanik.

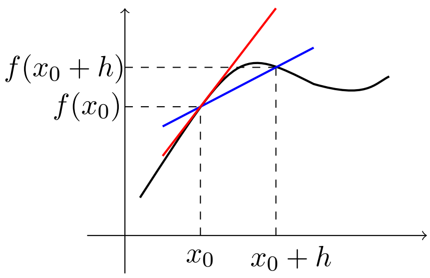
$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x_0x^{n-2}+x_0^2x^{n-3}+\cdots+x_0^{n-2}x+x_0^{n-1})}{x-x_0} \\ &= nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

(iii) Izan bedi $f(x) = \sqrt{x}$. Funtzio horren definizio-eremua $[0, \infty)$ da. $x_0 > 0$ bada,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

$x_0 = 0$ bada, goiko limitea ezin da kalkulatu; soilik eskuin-limitea plantea daiteke eta, egindako kalkuluak errepikatuz, ikusten da ez dela finitua.

Ikus dezagun grafikoki zer den funtzio baten deribatua puntu batean. Deribatuaren definizioan agertzen den $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ zatidura $(x_0, f(x_0))$ eta $(x_0{+}h, f(x_0{+}h))$ puntuetatik pasatzen den zuzen ebakitzailearen malda da. Deribatua zenbaki horren limitea da h-k 0-rantz jotzen duenean; beraz, funtzio baten deribatua x_0 puntuan haren grafikoaren x_0 puntuko zuzen ukitzailearen malda da. Hau da, f deribagarria



5.1 irudia. Deribatuaren esanahi geometrikoa.

bada x_0 puntuan, haren grafikoaren x_0 puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa honako hau da:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definizioak. (i) Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta f $[x_0, x_0+r)$ moduko tarte batean definituta dagoen funtzioa, $r > 0$ izanik. f *eskuinetik deribagarria* dela diogu, baldin eta

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

zenbaki erreala bada. Limite hori $f'(x_0^+)$ edo $f'(x_0,+)$ adierazpenen bidez idazten da, eta f-ren x_0 puntuko *eskuin-deribatua* da.

(ii) Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta f $(x_0 - r, x_0]$ moduko tarte batean definituta dagoen funtzioa, $r > 0$ izanik. f *ezkerretik deribagarria* dela diogu, baldin eta

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

zenbaki erreala bada. Limite hori $f'(x_0^-)$ edo $f'(x_0, -)$ adierazpenen bidez idazten da, eta f-ren x_0 puntuko *ezker-deribatua* da.

5.1.1 proposizioa. *Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta f funtzioa x_0 puntuan zentratutako tarte batean definitua. f x_0 puntuan deribagarria da, baldin eta soilik baldin x_0 puntuan eskuinetik eta ezkerretik deribagarria bada eta albo-deribatuak berdinak badira.*

5.1.2 teorema. *Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta f funtzioa x_0 puntuan zentratutako tarte batean definitua. f deribagarria bada x_0 puntuan, orduan, f jarraitua da x_0 puntuan.*

Froga. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ dela frogatu behar dugu; hots, $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$ dela. Limiteen propietate aritmetikoak erabiliz,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

□

Oharra. 5.1.2 teoremaren alderantzizkoa ez da egia. Topa daitezke x_0 puntuan jarraituak diren funtzioak, baina puntu berean deribagarriak ez direnak. Adibidez, $f(x) = |x|$ funtzioa jarraitua da puntu guztietan, baina ez da deribagarria $x_0 = 0$-n. Ikus dezagun.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \\
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.
\end{aligned}$$

Albo-deribatuak desberdinak direnez, 5.1.1 proposizioak ziurtatzen du f ez dela deribagarria $x_0 = 0$ puntuan.

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}\ to\mathbb{R}$. f deribagarria bada D multzoko puntu guztietan, orduan, f *D multzoan deribagarria* dela esaten da.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa $D \subset \mathbb{R}$ multzoan deribagarria. Orduan, defini dezakegu f' funtzioa honela:

$$\begin{aligned}
f'\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\to f'(x).
\end{aligned}$$

Orain, plantea dezakegu f' funtzioaren deribagarritasuna. f' funtzioa $x_0 \in D$ puntuan deribagarria bada, $(f')'(x_0)$ f funtzioaren x_0 puntuko *bigarren deribatua* da, eta $f''(x_0)$ ikurraren bidez adierazten da.

Orokorrean, $n \in \mathbb{N}$ bada, f-ren *n-garren deribatua* x_0 puntuan honako modu honetan definitzen da:

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Notazioa. Funtzio baten deribatu-funtzioa adierazteko, honako notazio hau ere erabil daiteke:

$$f' = \frac{df}{dx} \qquad \textit{(Leibnizen notazioa.)}$$

Era berean,

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}, \ldots, \quad f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, \ n \geq 4.$$

Gainera,

$$f^{(n)}(x_0) = \Big(\frac{d^n f}{dx^n}\Big)_{|x=x_0} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

5.2 Deribagarritasuna eta funtzioen arteko eragiketak

Atal honetan, funtzioen deribatuak kalkulatzeko oinarrizko erregelak emango ditugu. Lehenengo eta behin, funtzio deribagarrien arteko eragiketa aljebraikoak aztertuko ditugu, eta, gero, funtzio deribagarrien arteko konposizioa. Oinarrizko funtzioen deribatuak eta atal honetako propietateak erabiliz, funtzioen arteko eragiketen bidez definitzen diren funtzio orokorragoak deriba daitezke.

5.2.1 proposizioa. *Izan bitez f eta g funtzioak x_0 puntuan deribagarriak. Orduan,*

(i) $f + g$ batura deribagarria da x_0 puntuan, eta

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \tag{5.2.1}$$

(ii) fg biderkadura deribagarria da x_0 puntuan, eta

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0). \tag{5.2.2}$$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ guztietarako, λf funtzioa deribagarria da x_0 puntuan, eta

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

(iv) Baldin eta $g(x_0) \neq 0$ bada, orduan, $1/g$ funtzioa deribagarria da x_0 puntuan, eta

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}.$$

(v) *Baldin eta $g(x_0) \neq 0$ bada, orduan, f/g funtzioa deribagarria da x_0 puntuan, eta*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}. \tag{5.2.3}$$

Froga. f eta g funtzioak x_0 puntuan deribagarriak direnez,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0).$$

(i) Limiteen propietate aljebraikoak erabiliz,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

(ii) g deribagarria denez x_0 puntuan, jarraitua da puntu horretan; beraz, hemen ere, limiteen propietateak kontuan hartuz,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} \\ &\quad = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\,g(x)-f(x)\,g(x_0)+f(x)\,g(x_0)-f(x_0)\,g(x_0)}{x-x_0} \\ &\quad = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} g(x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &\quad = f(x_0)\,g'(x_0)+g(x_0)\,f'(a).\end{aligned}$$

(iii) (ii) atalaren ondorioa da, $g(x)=\lambda$ funtzio konstantea hartuz.

(iv) g x_0 puntuan deribagarria denez, x_0-n jarraitua da, eta $g(x_0)\neq 0$ da; beraz, existitzen da $\delta>0$ non $g(x)\neq 0$ den $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ guztietarako. Ondorioz, $1/g$ funtzioa ondo definituta dago $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tartean. Orain,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x_0)g(x)(x-x_0)} \\ &= -\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}.\end{aligned}$$

(v) (ii) eta (iv) atalen ondorioa da. □

Ikus dezagun orain zer esan daitekeen funtzio deribagarrien konposizioaren deribagarritasunari buruz.

5.2.2 teorema (Katearen erregela)**.** *Baldin eta f funtzioa x_0 puntuan deribagarria eta g funtzioa $f(x_0)$ puntuan deribagarria badira, orduan, $g \circ f$ funtzioa deribagarria da x_0 puntuan, eta*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'((f(x_0))\, f'(x_0). \tag{5.2.4}$$

Froga. Izan bedi

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}, & y \neq f(x_0) \text{ bada,} \\ g'(f(x_0)), & y = f(x_0) \text{ bada.} \end{cases}$$

Hipotesiaren arabera, g deribagarria da $f(x_0)$ puntuan; beraz, F jarraitua da puntu horretan, zeren eta

$$\lim_{y \to f(x_0)} F(y) = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

baita. Orduan, $x \neq a$ bada, eta $f(x) \neq f(a)$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Limiteak hartuz, f jarraitua da x_0 puntuan, eta F jarraitua $f(x_0)$ puntuan; beraz,

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} F(f(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= F(f(x_0))\, f'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0). \end{aligned}$$

□

Adibidea. Izan bitez $f(x) = x^2 + 1$ eta $g(x) = \sin x$. $(g \circ f)(x) = \sin(x^2 + 1)$ da, eta, katearen erregela aplikatuz,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \cos(x^2 + 1)(2x) = 2x \cos(x^2 + 1).$$

Azkenik, aztertuko dugu funtzio deribagarri baten alderantzizko funtzioa, eta ikusiko dugu noiz den deribagarria.

5.2.3 proposizioa. *Izan bedi f funtzioa injektiboa eta $f^{-1}(x_0)$ puntuan deribagarria. $f'(f^{-1}(x_0)) = 0$ bada, orduan, f^{-1} ez da deribagarria x_0 puntuan.*

Froga. Absurdora eramanez, demagun f^{-1} deribagarria dela x_0 puntuan. Konposizioa definituta dagoen x puntuetan, honako berdintza hau dugu:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Katearen erregela aplikatuz,

$$f'(f^{-1}(x_0)) \cdot (f^{-1})'(x_0) = 1$$

da, eta hori ezinezkoa da $f'(f^{-1}(x_0)) = 0$ delako. Beraz, f^{-1} ez da deribagarria x_0-n. □

5.2.4 proposizioa. *Izan bedi f funtzio injektiboa. f deribagarria bada $f^{-1}(x_0)$ puntuan eta $f'(f^{-1}(x_0)) \neq 0$ bada, orduan, f^{-1} deribagarria da x_0 puntuan, eta*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Froga. Izan bedi $x_0 = f(x_1)$. Kalkulatu behar dugu

$$(f^{-1})'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(x_0 + h) - f^{-1}(x_0)}{h}.$$

Izenda dezagun $x_0 + h = f(x_1 + k)$. Orduan,

$$h = f(x_1 + k) - b = f(x_1 + k) - f(x_1)$$

da. Gainera, $x_1 + k = f^{-1}(x_0 + h)$ denez,

$$k = f^{-1}(x_0 + h) - x_1 = f^{-1}(x_0 + h) - f^{-1}(x_0)$$

da. f^{-1} jarraitua denez, $\lim\limits_{h \to 0} f^{-1}(x_0 + h) = f^{-1}(x_0)$; hots, k-k zerorantz jotzen du h-k zerorantz jotzen duenean. Beraz,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(x_0 + h) - f^{-1}(x_0)}{h} &= \lim_{k \to 0} \frac{k}{f(x_1 + k) - f(x_1)} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(f^{-1}(x_0) + k) - f(f^{-1}(x_0))}{k}} \\
&= \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.
\end{aligned}$$

□

Adibidea. $f(x) = \cos x$ funtzioaren alderantzizkoa $f^{-1}(x) = \arccos x$ da. Kontuan izanda $(\cos x)' = -\sin x$ dela,

$$\begin{aligned}
(\arccos x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} &= \frac{1}{-\sin(\arccos x)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.
\end{aligned}$$

Deribatuaren definizioa eta ikusitako propietateak erabiliz, erraz lortzen dira oinarrizko funtzioen deribatuak.

5.2.5 proposizioa (Oinarrizko funtzioen deribatuak)**.** *Hona hemen oinarrizko funtzioen deribatuak:*

(i) *Izan bedi $\alpha \in \mathbb{R}$. $f(x) = x^\alpha$ bada, $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ da.*

(ii) *$f(x) = \sin x$ bada, $f'(x) = \cos x$ da.*

(iii) $f(x) = \cos x$ *bada,* $f'(x) = -\sin x$ *da.*

(iv) $f(x) = \tan x$ *bada,* $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ *da.*

(v) $f(x) = e^x$ *bada,* $f'(x) = e^x$ *da.*

(vi) Izan bedi $b > 0$. $f(x) = b^x$ *bada,* $f'(x) = b^x \ln b$ *da.*

(vii) $f(x) = \ln x$ *bada,* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ *da.*

(viii) Izan bedi $b > 0$. $f(x) = \log_b x$ *bada,* $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln b}$ *da.*

(ix) $f(x) = \arcsin x$ *bada,* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *da.*

(x) $f(x) = \arccos x$ *bada,* $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *da.*

(xi) $f(x) = \arctan x$ *bada,* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *da.*

5.3 Funtzio deribagarriei buruzko teorema nagusiak

Definizioa (Mutur lokalak)**.** Izan bitez f D multzoan definitutako funtzioa, eta $x_0 \in D$.

(i) f funtzioak x_0 puntuan maximo lokal bat duela esango dugu baldin eta existitu egiten bada $\delta > 0$, non

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *maximo lokala* dela esaten da.

(ii) f funtzioak x_0 puntuan minimo lokal bat duela esango dugu baldin eta existitu egiten bada $\delta > 0$ non

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *minimo lokala* dela esaten da.

Definizioa (Mutur absolutuak)**.** Izan bitez f D multzoan definitutako funtzioa eta $x_0 \in D$.

(i) f funtzioak x_0 puntuan maximo absolutua lortzen duela diogu baldin eta

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall\, x \in D.$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *maximo absolutua* dela esango dugu.

(ii) f funtzioak x_0 puntuan minimo absolutua lortzen duela diogu baldin eta

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall\, x \in D.$$

$f(x_0)$ balioa f funtzioaren *minimo absolutua* dela esango dugu.

5.3.1 proposizioa. *Izan bedi f funtzioa x_0 puntuan deribagarria. f-k x_0 puntuan mutur lokal bat badu, orduan, $f'(x_0) = 0$ da.*

Froga. Demagun f-k maximo lokal bat duela x_0 puntuan. Orduan, existitu egiten da $\delta > 0$, non

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Beraz, $x > x_0$ bada, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ da, eta, limiteen propietateengatik,

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

da. Era berean, $x < x_0$ bada, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ da, eta, ondorioz,

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

f funtzioa x_0 puntuan deribagarria denez, albo-deribatuak berdinak dira; beraz,

$$f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = 0.$$

f-k x_0-n minimo lokala badu, antzeko era batean frogatzen da. □

Oharrak. (i) 5.3.1 proposizioaren alderantzizkoa ez da egia; hots, gerta daiteke $f'(x_0) = 0$ izatea eta f funtzioak x_0 puntuan mutur lokalik ez izatea.

(ii) Funtzio batek maximo edo minimo lokala izan dezake x_0 puntuan, puntu horretan deribagarria ez izanik. Adibidez, $f(x) = |x|$ funtzioak minimo lokala (eta absolutua) dauka $x_0 = 0$ puntuan, eta ez da deribagarria puntu horretan.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa x_0 puntuan definitua. x_0 f funtzioaren puntu kritikoa dela diogu, baldin eta $f'(x_0) = 0$ bada edo $f'(x_0)$ ez bada existitzen.

Aurrekoaren arabera, funtzio baten mutur lokalak funtzioaren puntu kritikoetan topatzen dira, baina puntu kritikoek ez dute zertan funtzioaren mutur lokalak izan.

5.3.2 teorema (Rolle-ren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tarte irekian deribagarria, eta demagun $f(a) = f(b)$ dela. Orduan,existitzen da $x_0 \in (a, b)$, non $f'(x_0) = 0$ den.*

Froga. f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua denez, 4.8.4 teoremagatik, minimo eta maximo absolutuak lortzen ditu $[a, b]$ tartean. Bi posibilitate daude:

(i) Maximoa edo minimoa $(a.b)$ tartean dago. 5.3.2 teoremaren arabera, puntu horretan $f'(x_0) = 0$ da.

(ii) Maximoa eta minimoa tarteko muturretan erdiesten dira. Kasu horretan, $f(a) = f(b)$ denez, funtzioa konstantea da, eta deribatua nulua da puntu guztietan. □

5.3.3 teorema (Cauchyren teorema)**.** *Izan bitez f eta g funtzioak $[a, b]$ tartean jarraituak eta (a, b) tartean deribagarriak. Orduan, existitzen da $x_0 \in (a, b)$ non*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

den.

Froga. Izan bedi $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. h jarraitua da $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean. Gainera,

$$\begin{aligned} h(a) =& (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a), \\ h(b) =& (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b). \end{aligned}$$

Hau da, $h(a) = h(b)$. Orduan, Rolleren teoremaren arabera, existitzen da $x_0 \in (a, b)$ non $h'(x_0) = 0$ den; hots,

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$ □

5.3.4 teorema (Batez besteko balioaren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tartean deribagarria. Orduan, existitzen da $x_0 \in (a, b)$ non*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

den.

Froga. Izan bedi $g(x) = x$. f eta g funtzioek Cauchyren teoremaren baldintzak betetzen dituzte; beraz, existitzen da $x_0 \in (a, b)$ non

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

den; hots,

$$(f(b) - f(a)) = (b - a)f'(x_0).$$ □

5.3.5 korolarioa. *Izan bedi f $[a, b]$ tartean jarraitua eta (a, b) tartean deribagarria. Orduan,*

(i) Baldin eta $f'(x) > 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan, f gorakorra da $[a, b]$ tartean.

(ii) Baldin eta $f'(x) < 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan, f beherakorra da $[a, b]$ tartean.

(iii) Baldin eta $f'(x) = 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, orduan, f konstantea da $[a, b]$ tartean.

Froga. Izan bitez $x < y$, $[a, b]$ tarteko edozein bi puntu. f jarraitua da $[x, y]$ tartean eta deribagarria (x, y) tartean. Beraz, batez besteko balioaren teoremaren arabera, existitzen da $x_0 \in (x, y)$ non

$$f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$$

den. Orduan,

(i) $f'(x) > 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, bereziki $f'(x_0) > 0$ da, eta, orduan, $f(y) - f(x) > 0$ da. Hots, $x, y \in [a, b]$ badira, $x < y$ izanik, orduan, $f(x) < f(y)$. Beraz, f gorakorra da.

(ii) $f'(x) < 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, bereziki $f'(x_0) < 0$ da, eta, orduan, $f(y) - f(x) < 0$. Hots, $x, y \in [a, b]$, $x < y$ badira, orduan, $f(x) > f(y)$. Beraz, f beherakorra da.

(iii) $f'(x) = 0$ bada $x \in (a, b)$ guztietarako, bereziki $f'(x_0) = 0$ da, eta, orduan, $f(y) - f(x) = 0$. Hots, $x, y \in [a, b]$ badira, $x < y$ izanik, $f(x) = f(y)$. Beraz, f konstantea da. □

5.3.6 korolarioa. *Izan bitez f eta g funtzioak $[a, b]$ tartean jarraituak eta (a, b) tartean deribagarriak, eta demagun $f'(x) = g'(x)$ dela $x \in (a, b)$ guztietarako. Orduan, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non $f(x) = g(x) + K$ den, $x \in [a, b]$ guztietarako.*

Froga. Izan bedi $h(x) = f(x) - g(x)$ funtzioa. h jarraitua da $[a, b]$ tartean eta deribagarria (a, b) tartean. Gainera, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ da $x \in (a, b)$ guztietarako. 5.3.5 korolarioaren arabera, h konstantea da $[a, b]$ tartean; hau da, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non $h(x) = K$ den, $x \in [a, b]$ guztietarako. Hau da, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non $f(x) = g(x) + K$ den, $x \in [a, b]$ guztietarako. □

5.3.7 proposizioa. *Izan bedi f funtzioa (a, b) tartean deribagarria, eta demagun existitzen dela $M > 0$ non $|f'(x)| \leq M$ den, $x \in (a, b)$ guztietarako. Orduan, f funtzioa (a, b) tartean uniformeki jarraitua da.*

Froga. Honako hau frogatu behar dugu:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad : \quad \forall x, y \in (a, b), |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein, eta izan bitez $x, y \in (a, b)$, $x < y$ izanik. Orduan, batezbestekoaren teoremaren arabera, existitzen da $x_0 \in (x, y)$ non

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)(x - y)| = |f'(x_0)||x - y| \leq M|x - y|$$

den. Beraz, $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$ hartuz, $|x - y| < \delta$ bada,

$$|f(x) - f(y)| < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

da, frogatu behar genuen bezala. □

5.4 L'Hopitalen erregela

Atal honetan, funtzio deribagarrien arteko zatiduren limiteak kalkulatzeko metodo bat emango duzu, $0/0$ edo ∞/∞ moduko indeterminazioak agertzen diren kasuetarako.

5.4.1 teorema (L'Hopitalen erregela)**.** *Izan bedi $a \in \mathbb{R}$. Demagun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ direla eta $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen dela. Orduan, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitea ere existitzen da, eta*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Froga. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen denez, badakigu existitzen dela $\delta > 0$, non $f'(x)$ eta $g'(x)$ existitzen diren $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ moduko multzo batean, eta gainera $g'(x) \neq 0$ dela tarte horretan.

Bestalde, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ direnez, f eta g funtzioak jarraituak dira x_0 puntuan, edo etengune gaindigarria dute puntu horretan. Beraz, suposa dezakegu jarraituak direla x_0-n, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ definituz.

Ikus dezagun, lehenengo eta behin, $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ dela. Izan bedi $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. f eta g jarraituak dira $[x_0, x]$ tartean, eta deribagarriak (x_0, x) tarte irekian.

Gainera, $g'(x) \neq 0$ denez $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ guztietarako, orduan, $g(x) \neq 0$ da, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ guztietarako. Bestela, existituko balitz $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$ non $g(x_1) = 0$ den, Rolleren teoremaren arabera, existituko litzateke $\beta \in (x_0, x)$ non $g'(\beta) = 0$ den, eta hori ez da posible.

Orain, f eta g funtzioek Cauchyren teoremaren baldintzak betetzen dituzte; beraz, existitzen da $\alpha_x \in (x_0, x)$ non $f'(\alpha_x)(g(x) - g(x_0)) = g'(\alpha_x)(f(x) - f(x_0))$ den. Hau da,

$$\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad \exists\, \alpha_x \in (x_0, x) \quad : \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Beraz,

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Era berean frogatzen da $\lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ dela. □

Adibidea. $\lim_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x} = \lim_{x\to\pi} \dfrac{-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{-1} = 1.$

Jarraian emango ditugun teoremak ere betetzen dira. Frogak ez ditugu egingo, aurrekoa baino konplikatuagoak direlako.

5.4.2 teorema. *Izan bitez f eta g funtzioak $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ izanik. Baldin eta $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen bada, orduan,*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.4.3 teorema. *Izan bitez f eta g funtzioak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ izanik. Baldin eta $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen bada, orduan,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.4.4 teorema. *Izan bitez f eta g funtzioak $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ izanik. Baldin eta $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existitzen bada, orduan,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Adibidea. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} = \infty.$

Oharra. Gerta daiteke $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ez dela existitzen, baina horrek ez du esan nahi $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ez dela existituko. Adibidez, $f(x) = x - x^2\sin(1/x)$ eta $g(x) = \sin x$ badira,

$$f'(x) = 1 - 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}, \quad g'(x) = \cos x;$$

beraz, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ez da existitzen, baina

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - x^2\sin(1/x)}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}\big(1 - x\sin(1/x)\big).$$

$\sin x$ eta x infinitesimo baliokideak dira $x = 0$ puntuan, eta $x \sin(1/x)$ infinitesimoa da $x = 0$-n infinitesimo bat eta funtzio bornatu baten arteko biderkadura delako. Beraz,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = 1.$$

Oharra. L'Hopitalen erregela bakarrik erabil daiteke $0/0$ eta ∞/∞ motetako indeterminazioetan. Beste indeterminazio mota bat baldin badugu, transformazio bat bilatu behar da horietako indeterminazio batera ailegatzeko.

(i) $0 \cdot \infty$ moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ eta $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ direla.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}. \end{aligned}$$

(ii) 0^0 moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ eta $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ direla.

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$$

eta $0 \cdot \infty$ moduko indeterminazio batera ailegatzen gara.

(iii) $= 1^\infty$ moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ eta $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ direla. Lehen bezala,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$$

eta $\infty \cdot 0$ moduko indeterminazio batera heldu gara.

(iv) $= \infty^0$ moduko indeterminazioak: demagun $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ eta $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ direla. Hemen ere,

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$$

eta $0 \cdot \infty$ moduko indeterminazio bat dugu berriro.

5.5 Taylorren garapenak

Polinomioen balioak kalkulatzeko, oinarrizko eragiketak erabili behar dira soilik, batuketa eta biderketa. Horiek dira kalkulagailu batek edo ordenagailu batek egin ditzakeen eragiketak. Horregatik, garrantzitsua da funtzio baten balioak polinomio egoki baten balioen bidez hurbiltzea eta hurbilketa horren bidez egiten den errorea neurtzea. Atal honetan, funtzio deribagarrien Taylorren polinomioak definituko ditugu, eta ikusiko dugu hurbilketa onak ematen dituztela funtzioak propietate egokiak betetzen baditu.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa x_0 puntuan n ordenaraino deribagarria. Orduan, honako hau da f funtzioaren x_0 puntuko n mailako *Taylorren polinomioa*:

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Adibidea. Izan bitez $f(x) = e^x$ eta $x_0 = 0$. $f^{(n)}(x) = e^x$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz,

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Oharra. Definizioagatik,

$$\begin{aligned} P_{n,x_0}(x_0) =& f(x_0), \\ P^{(k)}_{n,x_0}(x_0) =& f^{(k)}(x_0), \quad \forall\, k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bedi f x_0 puntuan n ordenaraino deribagarria. Orduan, honako hau da f funtzioaren x_0 puntuko n mailako *Taylorren hondarra*:

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x).$$

Argi denez,

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x);$$

beraz, f funtzioaren balioa haren Taylorren polinomioaren bidez hurbiltzen badugu, egiten den errorea $R_{n,x_0}(x)$ izango da.

Helburu nagusia $P_{n,x_0}(x)$ Taylorren polinomioaren bidez x puntuan f-ren balioa ahalik eta hoberen hurbiltzea da. Beraz, interesatzen zaiguna zera da: hondarraren balioa txikia izatea x x_0-tik hurbil badago.

5.5.1 teorema. *Izan bedi f funtzioa x_0 puntuan zentratutako tarte batean n ordenaraino deribagarria. Orduan,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,a}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Froga. $R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x) = f(x) - \Big(P_{n-1,x_0}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\Big)$; beraz, honako hau frogatu behar dugu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n-1,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Taylorren polinomioaren propietateak kontuan hartuz, L'Hopitalen erregela aplika dezakegu $n-1$ aldiz:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_{n-1,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P'_{n-1,x_0}(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\\ &= \cdots = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P^{(n-1)}_{n-1,x_0}(x)}{n(n-1)\dots 2\,(x-x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.\end{aligned}$$ $\square$

5.5.1 teoremak zera esaten digu: x x_0 puntutik hurbil badago, $f(x)$ balioa $P_{n,x_0}(x)$ Taylorren polinomioaren bidez hurbiltzean, egiten den errorea $(x-x_0)^n$ baino askoz txikiagoa da. Beraz, $|x-x_0| << 1$ bada, hurbilketa ona izango da, eta n gero eta handiagoa hartuz, hurbilketa gero eta zehatzagoa izango da.

5.3.1 proposizioan ikusi dugu f deribagarria bada x_0 puntuan eta hor mutur lokal bat badu, orduan, $f'(x_0)=0$ dela. Ordena altuagoko deribatuak erabiliz, puntu kritikoetan maximo edo minimo lokalak dauden erabakitzeko irizpideak eman daitezke.

5.5.2 proposizioa. *Izan bedi f funtzioa x_0 puntuan zentratutako tarte batean n ordenaraino deribagarria. Demagun $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ direla, eta $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Orduan,*

(i) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0)>0$, orduan, f funtzioak minimo lokala dauka x_0 puntuan.

(ii) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0)<0$, orduan, f funtzioak maximo lokala dauka x_0 puntuan.

(iii) n bakoitia bada, orduan, f funtzioak ez dauka ez maximo ez eta minimo lokalik ere x_0 puntuan.

Froga. 5.5.1 teoremaren arabera,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

da. f-k betetzen dituen baldintzengatik,

$$\begin{aligned}P_{n,x_0}(x) =& f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\\ =& f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\end{aligned}$$

da. Beraz,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

(i) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0) > 0$, orduan, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0$ da. Limiteen propietateak kontuan hartuz, existitzen da $\delta > 0$ non

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

n bikoitia denez, $(x - x_0)^n$ positiboa da; beraz, $f(x) > f(x_0)$ da, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ guztietarako. Hau da, $f(x_0)$ funtzioaren minimo lokala da.

(ii) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0) < 0$, orduan, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} < 0$. Limiteen propietateak kontuan hartuz, existitzen da $\delta > 0$ non

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} < 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}.$$

n bikoitia denez, $(x - x_0)^n$ positiboa da; beraz, $f(x) < f(x_0)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ guztietarako. Hau da, $f(x_0)$ funtzioaren maximo lokala da.

(iii) n bakoitia bada, orduan, $(x - x_0)^n$ negatiboa da $x < x_0$ bada, eta positiboa $x > x_0$ bada. Beraz, $f(x) - f(x_0)$ balioaren zeinua desberdina da x_0-ren eskuinaldean eta x_0-ren ezkerraldean, $f^{(n)}(x_0)$-ren zeinua edozein izanik. Kasu horretan, ez daukagu ez maximo ez eta minimo lokalik ere. $\square$

5.5.3 teorema (Taylorren teorema)**.** *Izan bedi f funtzioa $n+1$ ordenaraino deribagarria $[x_0, x]$ tartean. Orduan, f funtzioaren x_0 puntuko hondarrerako honako formula hauek ditugu:*

(i) Hondarrerako Cauchyren formula:

$$\exists\, \xi \in (x_0, x) \quad : \quad R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n (x - x_0).$$

(ii) Hondarrerako Lagrange-ren formula:

$$\exists\, \xi \in (x_0, x) \quad : \quad R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

(iii) Hondarrerako adierazpen integrala:

$$R_{n,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \, dt.$$

Froga. Izan bedi $t \in [x_0, x]$, eta defini dezagun:

$$\begin{aligned} S(t) = R_{n,t}(x) &= f(x) - P_{n,t}(x) \\ &= f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n. \end{aligned}$$

$S(x) = f(x) - f(x) = 0$ da, eta $S(x_0) = f(x) - P_{n,x_0}(x) = R_{n,x_0}(x)$. Deriba dezagun $S(t)$ funtzioa.

$$\begin{aligned} S'(t) = & - f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + 2\frac{f''(t)}{2!}(x-t) - \dots \\ & - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} \\ = & - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \quad \forall\, t \in (x_0, x). \end{aligned}$$

(i) $S(t)$ funtzioa $[x_0, x]$ tartean jarraitua da, eta (x_0, x) tartean deribagarria. Batezbestekoaren teorema aplikatuz, existitzen da $\xi \in (x_0, x)$ non

$$S(x) - S(x_0) = S'(\xi)(x - x_0)$$

den; hots,

$$\exists\, \xi \in (x_0, x) \quad : \quad R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

(ii) $S(t)$ eta $g(t) = (x-t)^{n+1}$ funtzioek Cauchyren teoremaren baldintzak betetzen dituzte; beraz, existitzen da $\xi \in (x_0, x)$ non

$$(S(x) - S(x_0))g'(\xi) = (g(x) - g(x_0))S'(\xi)$$

den. Hau da,

$$\exists\, \xi \in (x_0, x) \quad : \quad R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad \square$$

Oharra. Taylorren teorema egia da x x_0-ren ezkerraldean dagoenean ere. Cauchyren eta Lagrangeren formuletan, existitzen den ξ balioa (x, x_0) tarteko puntu bat izango da.

5.6 Ahurtasunaren analisia

5.3.5 korolarioan ikusi dugu funtzio deribagarrien gorakortasuna eta beherakortasuna funtzioaren lehen ordenako deribatuaren bidez erabaki daitezkeela. Atal honetan, funtzioaren bigarren ordenako deribatua erabiliko dugu funtzioaren grafikoaren beste ezaugarri bat aztertzeko.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa I tartean definitua.

(i) f funtzioa I tartean *ganbila* dela esango dugu, baldin eta $x \in I$ guztietarako, f funtzioaren a puntuko zuzen ukitzailea f-ren grafikoaren gainean geratzen bada $(x - \delta, x + \delta)$ moduko tarte batean.

(ii) f funtzioa I tartean *ahurra* dela esango dugu, baldin eta $x \in I$ guztietarako, f funtzioaren a puntuko zuzen ukitzailea f-ren grafikoaren azpian geratzen bada $(x-\delta, x+\delta)$ tartean.

(iii) $x \in I$ puntua f funtzioaren *inflexio-puntua* dela diogu, baldin eta x puntuko zuzen ukitzaileak grafikoaren ezkerreko zatia alde batean eta eskuineko zatia beste aldean uzten baditu.

Oharra. f funtzioa $x-0$ puntuan deribagarria bada, orduan, honako hau da zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Beraz, f ganbila bada, $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ da $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ guztietarako.

Era berean, f ahurra bada, $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ da $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ guztietarako.

Azkenik, x_0 inflexio-puntua bada, orduan,

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0), \\ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & \forall\, x \in (x_0, x_0+\delta), \end{cases}$$

edo

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0), \\ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), & \forall\, x \in (x_0, x_0+\delta). \end{cases}$$

5.6.1 teorema. *Izan bedi f funtzioa $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tarte batean n ordenaraino deribagarria, eta demagun $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ eta $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ direla. Orduan,*

(i) Baldin eta n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0) > 0$, orduan, f ahurra da x_0 puntuan. Gainera, $f'(x_0) = 0$ bada, f-k x_0 puntuan minimo lokala dauka.

(ii) Baldin eta n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0) < 0$, orduan, f ganbila da x_0 puntuan. Gainera, $f'(x_0) = 0$ bada, f-k x_0 puntuan maximo lokala dauka.

(iii) Baldin eta n bakoitia bada, orduan, x_0 f-ren inflexio-puntua da.

Froga. Har dezagun f-ren $n-1$ mailako eta x_0 puntuko Taylorren polinomioa. f-k betetzen dituen baldintzengatik,

$$P_{n-1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

da. Beraz, $R_{n-1,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$ da. Bestaldetik, hondarraren Lagrangeren formula kontuan hartuz, existitzen da $\xi \in (x_0, x)$ (edo $\xi \in (x, x_0)$) non

$$R_{n-1,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

den. Hau da, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ guztietarako,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

da. $f^{(n)}$ jarraitua denez, berdina da $f^{(n)}(\xi)$ eta $f^{(n)}(x_0)$ balioen zeinua. Orduan,

(i) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0) > 0$, orduan, $f^{(n)}(\xi) > 0$ da, eta $(x - x_0)^n > 0$; beraz,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Hots, f ahurra da.

(ii) n bikoitia bada eta $f^{(n)}(x_0) < 0$, orduan, $f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n < 0$ da; beraz,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Hots, f ganbila da.

(iii) n bakoitia bada, $f^{(n)}(x_0)$-ren zeinua edozein izanik, orduan, $(x - x_0)^n$-ren zeinua desberdina da x puntuan x_0-ren eskuinaldean edo x_0-ren ezkerraldean badago; beraz, $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$-ren zeinua aldatzen da x_0 puntuaren ezkerretik eskuinera pasatzean, eta, ondorioz, x_0 inflexio-puntua da. $\square$

5.7 Ariketak

5.1. Azter ezazu funtzio hauen deribagarritasuna:

(i) $f(x) = |x+2| + |x^2 - 1|$

(ii) $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2, & 1 \le x \le 2 \text{ bada,} \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \big|\ln|x|\big|$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \text{ bada,} \\ \ln(1+x), & x > 0 \text{ bada.} \end{cases}$

5.2. Azter ezazu honako funtzio hauen deribagarritasuna, adierazten diren puntuetan:

(i) $f(x) = |\sin x|$, $x = 0$ puntuan.

(ii) $f(x) = \begin{cases} x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|^{1/2} & x \ne 0, -1 \text{ bada,} \\ 0 & x = 0, x = -1 \text{ bada,} \end{cases}$ $x = 0$, $x = -1$ puntuetan.

(iii) $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), & |x| \le 1 \text{ bada,} \\ |x-1|, & \text{bestela,} \end{cases}$ $x = -1$ eta $x = 1$ puntuetan.

(iv) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x \ne 0 \text{ bada,} \\ 0, & x = 0 \text{ bada,} \end{cases}$ $x = 0$ puntuan.

(v) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}, & x \ne 0 \text{ bada,} \\ 0, & x = 0 \text{ bada,} \end{cases}$ $x = 0$ puntuan.

5.3. Ziurta daiteke $F(x) = f(x)g(x)$ ez dela deribagarria x_0 puntuan honako kasu hauetan?

(i) f deribagarria da x_0-n, eta g ez da deribagarria x_0-n.

(ii) f eta g ez dira deribagarriak x_0-n.

5.4. Zein da $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ kurbaren zuzen ukitzailea $x = 2$ balioari dagokion puntuan?

Em.: $y = 3$.

5.5. Eman ezazu $x = 1/2$ puntuko $y(x) = \sqrt{x}$ kurbarekiko zuzen ukitzailearen ekuazioa.

Em.: $y = \sqrt{2}x$.

5.6. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \text{ bada}, \\ 0, & x = 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

(i) Kalkula ezazu $f'(0)$, definizioa erabiliz.

(ii) Kalkula ezazu $f'(x)$, $x \neq 0$ denerako, eta ikusi f' ez dela jarraitua $x = 0$ puntuan.

5.7. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A \sin^2 x}{x} + (B+1)e^x, & x < 0 \text{ bada}, \\ D \ln(1+x) + E(1 - \cos(\pi x)), & x \geq 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Eman itzazu A, B, D eta E parametroen balioak f funtzioa $\mathbb{R}$–n deribagarria izan dadin, eta $P = (1, f(1))$ puntutik pasatzen den f-rekiko zuzen ukitzailea $y = x + 1$ izan dadin.

Em.: $A = 2$, $B = -1$, $D = 2$, $E = 1 - \ln 2$.

5.8. Topa itzazu A, B eta D konstanteen balioak $y = Ax^2 + Bx + D$ kurba $(1, 3)$ puntutik pasa dadin, eta $x - y + 1 = 0$ zuzenarekiko ukitzailea izan dadin $(2, 3)$ puntuan.

Em.: $A = 1$, $B = -3$, $D = 5$.

5.9. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} e^{A(x-1)} + Bx + D, & x \leq 1 \text{ bada}, \\ x(Ax + 2D), & x > 1 \text{ bada}. \end{cases}$$

Eman itzazu A, B eta D parametroen balioak f $\mathbb{R}$ osoan deribagarria izan dadin, eta $(2, f(2))$ puntutik pasatzen den zuzen ukitzailea horizontala izan dadin.

Em.: $A = 1/2$, $B = -3/2$, $D = -1$.

5.10. Topa itzazu A, B, D eta E parametroen balioak, f funtzioa puntu guztietan deribagarria izan dadin, eta $P = (-1, f(-1))$ puntutik pasatzen den f–rekiko zuzen ukitzailea $y = x$ zuzenarekiko paraleloa izan dadin, f funtzioa honako hau izanik:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 \cos \dfrac{1}{(x+2)} + Ax, & x < -2 \text{ bada}, \\ Bx^2 + Dx + 1, & -2 \leq x \leq 0 \text{ bada}, \\ \sin(Ex) + 1, & x > 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Em.: $A = 1/2$, $B = 1/4$, $D = 3/2$, $E = 3/2$.

5.11. Kalkulatu $f(x) = e^{-x^2}$ eta $g(x) = (1+x^2)\arctan x$ funtzioen bigarren ordenako deribatuak.

$$\textit{Em.:}\ f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2},\ \ g''(x) = \frac{2x}{1+x^2} + 2\arctan x.$$

5.12. Kalkulatu $f(x) = \sin x$ eta $g(x) = x\ln x$ funtzioen 114. ordenako deribatuak.

$$\textit{Em.:}\ f^{(114)}(x) = -\sin x,\ \ g^{(114)}(x) = \frac{112!}{x^{113}}.$$

5.13. Azter itzazu $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ funtzioaren maximo eta minimoak.

5.14. $f(x) = e^x - (1+x)$ funtzioaren gorakortasuna aztertuz, frogatu $e^x > 1+x$ dela $x > 0$ bada.

Funtzio egokiak aukeratuta, frogatu $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ betetzen dela $x > 0$ bada.

5.15. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funtzioak 0 balio du -1 eta 1 puntuetan, eta, hala ere, deribatua ez da anulatzen $[-1, 1]$ tartean. Rolleren teoremaren kontrakoa da hau? Badu funtzioak maximo edo minimorik tartearen barrualdean?

5.16. (i) Froga ezazu $e^x = 1 + x$ ekuazioak erro erreal bakar bat duela.

(ii) Froga ezazu $6x^5 + 13x + 1 = 0$ ekuazioak erro erreal bakar bat duela.

(iii) Froga ezazu $6x^4 - 7x + 1 = 0$ ekuazioak soilik bi erro erreal dituela.

(iv) Froga ezazu $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 6$ funtzioak erro erreal bakar bat duela $[-1, 0]$ tartean.

(v) Froga ezazu $x^2 = x\sin x + \cos x$ ekuazioak zehazki bi soluzio erreal dituela.

5.17. Rolle-ren teorema erabiliz, froga ezazu $f(x) = x^3 - 3x + m$ funtzioak ez dituela inoiz bi erro erreal desberdin $[0, 1]$ tartean, m edozein zenbaki erreal izanik. m-ren balioen arabera, esan noiz duen bat eta noiz batere ez.

5.18. Demagun $B_0, B_1, \dots, B_n$ konstanteek honako hau betetzen dutela:

$$B_0 + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{3} + \cdots + \frac{B_n}{n+1} = 0.$$

Froga ezazu $B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n = 0$ ekuazioak gutxienez erro erreal bat duela $(0, 1)$ tartean.

5.19. Izan bedi $k \in \mathbb{N}$. Egiazta ezazu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^k}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} = 0$$

direla.

5.20. Kalkula itzazu limite hauek L'Hopitalen erregela erabiliz:

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ *Em.:* ∞

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+5x+6)^2}{e^x}$ *Em.:* 0

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\Big)$ *Em.:* 0

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ *Em.:* 2

(v) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$ *Em.:* e^{-6}

(vi) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\cos\dfrac{\pi}{x}\Big)^x$ *Em.:* 1

(vii) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \ln(1-x)$ *Em.:* 0

(viii) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$ *Em.:* $1/e$

(ix) $\lim\limits_{x\to 1^-}\Big(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\Big)$ *Em.:* $1/2$

(x) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ *Em.:* 1

(xi) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{12-x}}{2x-3\sqrt{19-5x}}$ *Em.:* $8/69$

(xii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ *Em.:* 1

(xiii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ *Em.:* $-1/3$

(xiv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$ *Em.:* 1

(xv) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotan} x)^{\sin x}$ *Em.:* 1

(xvi) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x-\sin 2x)^{1/\ln x}$ *Em.:* e^3

(xvii) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\Big)^x$ *Em.:* $e^{-\frac{2}{\pi}}$

(xviii) $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\sqrt[x]{a}-1\big)$ *Em.:* $\ln a$

(xix) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\tan\big(\frac{\pi}{4}+ax\big)}{\sin bx}$ *Em.:* $2a/b$

(xx) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\tan(5x)}{\tan x}$ *Em.:* $1/5$

(xxi) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\Big)$ *Em.:* $-\infty$

(xxii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{cotan} x}{x}\right)$ *Em.:* $1/3$

(xxiii) $\lim_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\tan^2 x}$ *Em.:* $\frac{1}{\sqrt{e}}$

(xxiv) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ *Em.:* $1/2$

(xxv) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(x-1)}\right)$ *Em.:* $1/2$

(xxvi) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ *Em.:* $1/3$

(xxvii) $\lim_{x\to \infty}(x^2+a^2)^{1/x^2}$ *Em.:* 1

(xxviii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ *Em.:* $e^{\frac{\ln^2 a-\ln^2 b}{2}}$

(xxix) $\lim_{x\to \pi/4}\frac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}$ *Em.:* $1/2$

(xxx) $\lim_{x\to \infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{2x}$ *Em.:* 1

5.21. Eman ezazu honako funtzio hauen adierazpen grafikoa:

(i) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$	(ii) $f(x)=\frac{3x}{x-2}$
(iii) $f(x)=\sqrt{x^3-3x}$	(iv) $f(x)=\lvert x^2-1\rvert$
(v) $f(x)=\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+4}}$	(vi) $f(x)=\ln(x^3-3x+2)$
(vii) $f(x)=2\lvert x\rvert-x^2$	(viii) $f(x)=xe^{1/x}$
(ix) $f(x)=x^3e^{-4x}$	(x) $f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$
(xi) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$	(xii) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{4-x}}$
(xiii) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x}$	(xiv) $f(x)=e^{x-e^x}$
(xv) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	(xvi) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$
(xvii) $f(x)=e^{3x}-4e^{2x}+5e^x-2$	(xviii) $f(x)=\ln(-2x^2+5x-2)$
(xix) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$	(xx) $f(x)=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$
(xxi) $f(x)=\left(\frac{5x+4}{x}\right)e^x$	(xxii) $f(x)=2\lvert x\rvert-x^2$
xxiii) $f(x)=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$	(xxiv) $f(x)=\frac{e^x}{e^{-x}-1}$

5.22. Eman itzazu lau erpinetatik bi OX ardatzean eta beste biak $y = 12 - x^2$ kurbaren goiko aldean dituen azalera maximoko laukizuzenaren dimentsioak.

Em.: Oinarria: 4, Altuera: 8.

5.23. r erradioko zirkulu batean trapezio isoszele bat inskribatzen da, bere oinarri baten luzera $2r$ izanik. Kalkula ezazu beste oinarriaren luzera, trapezioaren azalera maximoa izan dadin.

Em.: r.

5.24. Lehenengo koadrantearen barruan dagoen triangelu batek bi alde ardatz kartesiarretan ditu, eta hirugarrena $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipsearekiko ukitzailea da. Kalkula ezazu ukitze-puntua, triangeluaren azalera minimoa izan dadin.

Em.: $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

5.25. Froga ezazu kono zuzen batek barnera dezakeen bolumen maximoko zilindroaren bolumena, aipatutako konoaren bolumenaren $\frac{4}{9}$ dela.

5.26. Idatzi $\sin x$, $\cos x$ eta $\ln(1 + x)$ funtzioen 5. mailako Taylorren polinomioak $x_0 = 0$ puntuan.

5.27. Idatzi $x^x - 1$ funtzioaren 2. mailako Taylorren polinomioa $x_0 = 1$ puntuan.

5.28. Eman ezazu $f(x) = \cos x$ funtzioaren n. mailako eta $x_0 = 0$ puntuko Taylorren polinomioa. Hurbil ezazu $\cos \frac{1}{10}$ balioa, Taylorren polinomioaren bidez, errorearen balio absolutua 10^{-4} baino txikiagoa izanik.

Em.: $\cos \frac{1}{10} \sim 0'99500416$

5.29. Kalkula ezazu $f(x) = \ln(1 + x)$ funtziorako 0 puntuko n. mailako Taylorren garapena. Hurbil ezazu $\ln \frac{21}{20}$ balioa, errorea 10^{-3} baino txikiagoa izanik.

Em.: $\ln \frac{21}{20} \sim 0'04875$.

5.30. Froga ezazu $x > 0$ guztietarako honako desberdintza hauek betetzen direla:

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

$$\left|(1 + x)^{1/3} - \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right)\right| \leq \frac{5}{81}x^3$$

6. gaia

Integrazioa: Riemannen integrala

Gai honetan, tarte itxi eta bornatu batean definitutako aldagai errealeko funtzioen Riemannen integrala definituko dugu, eta haren propietateak aztertuko. Horregatik, eta horren kontra ezer ez bada aipatzen, a eta b zenbaki errealak izango dira, $a < b$, $[a, b]$ tartea itxia eta bornatua delarik.

6.1 Riemannen integrala. Definizioa eta adibideak

Balio positiboak hartzen dituen eta tarte itxi eta bornatu batean definituta dagoen funtzio jarraitu baten grafikoaren eta ardatz horizontalaren artean gelditzen den azalera kalkulatu nahi bada, erraza da funtzio konstanteen kasuan, problema errektangelu baten azaleraren kalkulura murrizten baita. Baina funtzioa hain sinplea ez bada, azalera horren kalkulua konplikatzen da. Lehen hurbilketa bat funtzioaren balio bat finkatzea da –baliorik handiena edo txikiena, adibidez–, eta balio horren altuera duen errektangeluaren azalera kalkulatzea. Argi dago, funtzioak balio oso desberdinak hartzen baditu, hurbiketa hori ez dela onargarria izango. Bigarren urratsa, orduan, funtzioaren definizio-eremua azpitarte txikiagoetan zatitzea da, eta azpitarte bakoitzean errepikatzea aurreko prozedura. Azpitarteen kopurua gero eta handiagoa bada, azaleraren hurbilketa gero eta hobea izango da.

Definizioa. $[a, b]$ tarteko *partiketa* tarte horretan dauden puntuen zerrenda finitua eta ordenatua da, non lehenengoa a eta azkena b diren. Hau da:

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n \ : \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

$[a, b]$ tarteko partiketa guztien multzoa $\mathcal{P}([a, b])$ ikurraren bidez adieraziko dugu.

Definizioa. Izan bitez $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio bornatua, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $[a, b]$ tarteko partiketa eta

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \ : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) \ : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Orduan, f funtzioaren P partiketarako *behe-batura*

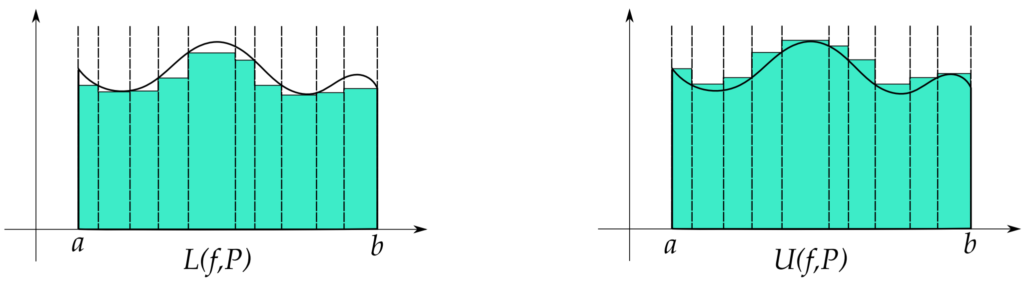
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

da. Antzera, f funtzioaren P partiketarako *goi-batura* honako hau da:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Batzuetan, $s(f,P)$ eta $S(f,P)$ ikurrak ere erabiltzen dira f-ren P partiketarako behe-batura eta goi-batura adierazteko, hurrenez hurren.

6.1 irudian grafikoki erakusten dira funtzio positibo baten partiketa bati dagozkion behe-batura eta goi-batura.



6.1 irudia. Behe- eta goi-baturak

Argi dago $L(f,P) \leq U(f,P)$ dela $P \in \mathcal{P}([a,b])$ edozein izanik, zeren eta $m_i \leq M_i$ baita, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako.

Oharra. Beharrezkoa da f bornatua izatea m_i eta M_i zenbakiak existi daitezen, baina ez da beharrezkoa funtzioa positiboa ez eta jarraitua izatea ere.

Definizioa. Izan bitez $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$. $P \subset Q$ idazten dugu eta Q P baino *finagoa* dela diogu, baldin P-ren puntu guztiak Q partiketan badaude.

6.1.1 lema. *Izan bitez $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bornatua eta $P, Q \in \mathcal{P}([a,b])$, non $P \subset Q$ den. Orduan,*

$$L(f,P) \leq \ L(f,Q) \quad \text{eta} \quad U(f,Q) \leq \ U(f,P).$$

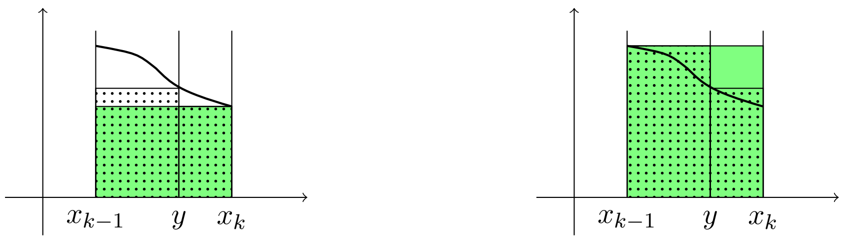
Froga. Lehenik eta behin, suposatuko dugu Q partiketak P-k baino puntu bat gehiago duela. Izan bitez, beraz,

$$\begin{aligned} P =& \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}, \\ Q =& \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, y, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}. \end{aligned}$$

Defini ditzagun:

$$
\begin{aligned}
m_i &= \inf\{f(x) \ : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
m' &= \inf\{f(x) \ : \ x_{k-1} \leq x \leq y\}, \\
m'' &= \inf\{f(x) \ : \ y \leq x \leq x_k\}.
\end{aligned}
$$

Nabaria da $m_k \leq m'$ eta $m_k \leq m''$ direla.



$L(f,P) \leq L(f,Q)$ $\qquad$ $U(f,P) \geq U(f,Q)$

6.2 irudia. Partiketa finagoa bada, behe-batura handiagoa da (ezkerrean), eta goi-batura txikiagoa (eskuinean).

Orduan,

$$
\begin{aligned}
L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - y) + m_k(y - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m'(y - x_{k-1}) + m''(x_k - y) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= L(f,Q).
\end{aligned}
$$

$U(f,P) \geq U(f,Q)$ desberdintza antzeko era batean frogatzen da. Defini ditzagun:

$$
\begin{aligned}
M_i &= \sup\{f(x) \ : \ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\
M' &= \sup\{f(x) \ : \ x_{k-1} \leq x \leq y\}, \\
M'' &= \sup\{f(x) \ : \ y \leq x \leq x_k\}.
\end{aligned}
$$

Orain, $M_k \geq M'$ eta $M_k \geq M''$ dira; beraz, $U(f,P) \geq U(f,Q)$ da.

Horrela geratzen da frogatuta $L(f,P) \leq L(f,Q)$ eta $U(f,P) \geq U(f,Q)$ direla, Q-k P-k baino puntu bat gehiago duenean.

Orokorrean, Q-k P-k baino l puntu gehiago dituenean, aurreko arrazoibidea errepika daiteke l aldiz, desberdintza betetzen dela frogatzeko. $\square$

6.1.2 teorema. *Izan bitez* $P', P'' \in \mathcal{P}([a,b])$ *eta* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *bornatua. Orduan,*

$$L(f,P') \leq U(f,P'').$$

Froga. Izan bedi $P = P' \cup P''$. Orduan, $P' \subset P$ eta $P'' \subset P$ da; beraz, 6.1.1 lemaren arabera:

$$L(f,P') \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P''). \qquad \square$$

6.1.2 teoremaren esanahia hauxe da: f funtzio bornatua bada, edozein goi-batura behe-batura guztiak baino handiagoa da, eta edozein behe-batura goi-batura guztiak baino txikiagoa da. Beraz, $P'' \in \mathcal{P}([a,b])$ bada,

$$L(f,P') \leq U(f,P'') \quad \forall\, P' \in \mathcal{P}([a,b]),$$

eta, ondorioz, behe-baturen supremoak ere desberdintza beteko du:

$$\sup\{L(f,P') \;:\; P' \in \mathcal{P}([a,b])\} \leq U(f,P'').$$

Baina P'' partiketa edozein izan daitekeenez, goi-baturen infimoa hartuz,

$$\sup\{L(f,P') \;:\; P' \in \mathcal{P}([a,b])\} \leq \inf\{U(f,P'') \;:\; P'' \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

Definizioa. Izan bedi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bornatua. Baldin eta

$$\sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

bada, orduan, f $[a,b]$ tartean *integragarria* dela diogu, eta $\int_a^b f(x)\,dx$ ikurraren bidez adieraziko dugu zenbaki hori, f-ren $[a,b]$ tarteko *Riemannen integrala* edo *integral mugatua* izenez ezagutzen dena.

$$\sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \int_a^b f(x)\,dx = \inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

a eta b *integrazio-mugak* dira.

Oharra. f integragarria bada, $L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,P)$, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ guztietarako. Gainera, $\int_a^b f(x)\,dx$ propietate hori betetzen duen zenbaki bakarra da.

Adibidea. Izan bitez $a, b, k \in \mathbb{R}$ eta $f(x) = k$, $x \in [a,b]$ guztietarako; hots, f funtzio konstantea da.

Izan bedi $P \in \mathcal{P}([a,b])$.

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = k(b-a),$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = k(b-a).$$

$L(f,P) = U(f,P)$ denez $P \in \mathcal{P}([a,b])$ guztietarako, $\sup\{L(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \inf\{U(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ eta f integragarria da $[a,b]$ tartean. Gainera,

$$\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a).$$

Adibidea. Izan bedi $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ honako modu honetan definitutako funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ bada}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ bada}. \end{cases}$$

$P \in \mathcal{P}([0,1])$ guztietarako,

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0,$$
$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1.$$

Beraz, $\sup\{L(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}([0,1])\} = 0 \neq 1 = \inf\{U(f,P) \,:\, P \in \mathcal{P}([0,1])\}$ eta f ez da integragarria $[0,1]$ tartean.

Oharra. Izan bitez $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornatua, $P \in \mathcal{P}([a,b])$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, , x_n\}$, eta $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako. Orduan,

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

f-ren P partiketarako *Riemannen batura* dela esaten da.

f funtzioaren P partiketarako Riemannen batura ez da bakarra; $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ puntuen hautapen desberdinekin Riemannen batura desberdinak lortzen dira, baina kasu guztietan

$$L(f,P) \leq S(f,P) \leq U(f,P).$$

Izan bedi $\Delta P = \max\{x_i - x_{i-1} \,:\, i = 1, \ldots, n\}$. Orduan, f integragarria da, baldin eta soilik baldin $\lim\limits_{\Delta P \to 0} S(f,P)$ zenbaki erreala eta c_i puntuekiko independentea bada. Kasu horretan,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta P \to 0} S(f,P).$$

6.2 Integragarritasunerako baldintzak

Integragarritasunaren definizioa ez da egiaztatzeko erraza, funtzioaren definiziotarteko partiketa guztietarako goi- eta behe-baturak kalkulatu behar direlako, eta hori askotan ez da posible. Atal honetan, integragarritasuna bermatzen duten baldintzak emango ditugu.

6.2.1 teorema. *Izan bedi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio bornatua. Orduan, f integragarria da $[a,b]$ tartean, baldin eta soilik baldin*

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b]) \quad : \quad U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon.$$

Froga. $\Leftarrow$) Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein eta demagun existitzen dela $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ non $U(f,P_\epsilon) - Lf,P_\epsilon) < \epsilon$ den. Frogatuko dugu f integragarria dela $[a,b]$ tartean. P_ϵ partiketak honako hau betetzen du:

$$\begin{aligned}\inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} &\le U(f,P_\epsilon),\\ \sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} &\ge L(f,P_\epsilon),\end{aligned}$$

eta, ondorioz,

$$\begin{aligned}\inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} - \sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\}&\\ \le U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon, \quad \forall\, \epsilon > 0.&\end{aligned}$$

Horrek esan nahi du

$$\inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} - \sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} = 0$$

dela; beraz, f integragarria da $[a,b]$-n.

$\Rightarrow$) Demagun orain f integragarria dela $[a,b]$ tartean; hau da,

$$\inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

dela. Orduan, supremoaren eta infimoaren karakterizazioak gogoratuz, (1.2.4 proposizioa) edozein $\epsilon > 0$ emanda, ziurta dezakegu existitzen direla P'_ϵ eta P''_ϵ non

$$\begin{aligned}L(f,P'_\epsilon) &> \sup\{L(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} - \frac{\epsilon}{2},\\ U(f,P''_\epsilon) &< \inf\{U(f,P) \;:\; P \in \mathcal{P}([a,b])\} + \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

eta, ondorioz,

$$U(f,P''_\epsilon) - L(f,P'_\epsilon) < \epsilon.$$

Izan bedi $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$. Orduan, $P'_\epsilon \subset P_\epsilon$ eta $P''_\epsilon \subset P_\epsilon$ dira; beraz, $U(f,P_\epsilon) \le U(f,P''_\epsilon)$ eta $L(f,P_\epsilon) \ge L(f,P'_\epsilon)$ dira. Beraz,

$$U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) \le U(f,P''_\epsilon) - L(f,P'_\epsilon) < \epsilon. \qquad \square$$

Adibidea. Izan bedi $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Frogatuko dugu f integragarria dela $[0,1]$ tartean, 6.2.1 teorema erabiliz.

Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, non $x_i = i/n$ den, $i = 0, 1, \ldots, n$ guztietarako. P_n $[0,1]$ tarteko partiketa da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

$$\begin{aligned}
L(f, P_n) =& \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \\
& \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{0+1+\cdots+n-1}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}, \\
U(f, P_n) =& \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \\
& \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

Orduan,

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{n+1}{2n} - \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ denez, $\epsilon > 0$ guztietarako, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $\frac{1}{n} < \epsilon$ den; hau da, $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{1}{n} < \epsilon$. Beraz, f integragarria da $[0,1]$ tartean.

Adibidea. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 2, x \ne 1 \text{ bada,} \\ 1, & x = 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

Frogatuko dugu f integragarria dela $[0,2]$ tartean. Izan bitez $\epsilon > 0$ edozein eta $P_\epsilon = \left\{0, 1 - \frac{\epsilon}{4}, 1 + \frac{\epsilon}{4}, 2\right\}$.

$$\begin{aligned}
L(f, P_\epsilon) =& 0 \cdot \left(\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) - 0\right) + 0 \cdot \left(\left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) - \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)\right) + 0 \cdot \left(2 - \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)\right) = 0, \\
U(f, P_\epsilon) =& 0 \cdot \left(\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) - 0\right) + 1 \cdot \left(\left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) - \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)\right) + 0 \cdot \left(2 - \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right)\right) = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Beraz,

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

da, eta f integragarria da $[0,2]$ tartean.

6.2.2 teorema. *Izan bedi $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, f $[a,b]$ tartean integragarria da.*

Froga. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. $[a,b]$ tarte trinkoa denez, 4.10.2 teoremaren arabera, f uniformeki jarraitua da tarte horretan; beraz, existitzen da $\delta > 0$ non, $x, y \in [a,b]$ guztietarako,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Izan bedi $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $[a, b]$ tarteko partiketa, non

$$x_i - x_{i-1} < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

f jarraitua da $[x_{i-1}, x_i]$ tartean, $i = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako; beraz, f-k maximoa eta minimoa lortzen ditu tarte horretan. Izan bitez $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, non

$$\begin{aligned} f(y_i) =& M_i = \max\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ f(z_i) =& m_i = \min\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Orduan, $i = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako $|y_i - z_i| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta$ denez,

$$|M_i - m_i| = |f(y_i) - f(z_i)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

da; beraz,

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \epsilon.$$

Hau da, $\epsilon > 0$ edozein izanik, existitzen da $P \in \mathcal{P}([a, b])$ non $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ den; beraz, f integragarria da $[a, b]$ tartean. □

Oharra. 6.2.2 teoremaren alderantzizkoa ez da egia. Funtzio integragarriek ez dute zertan funtzio jarraituak izan. Are gehiago, froga daiteke f bornatua bada $[a, b]$ tartean eta f-ren etenguneen kopurua finitua bada, f integragarria dela $[a, b]$ tartean.

6.2.3 proposizioa. *Izan bedi $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ monotonoa. Orduan, f $[a, b]$ tartean integragarria da.*

Froga. Suposatuko dugu f beherakorra dela. Gorakorra balitz, antzeko era batean argudiatuko genuke.

$n \in \mathbb{N}$ bada, har dezagun $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $[a, b]$ tarteko partiketa, non $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ den, $i = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako.

f beherakorra denez, $M_i = f(x_{i-1})$ eta $m_i = f(x_i)$ dira, $i = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako. Orduan,

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\big) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \big(f(a) - f(b)\big).$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)) = 0$ denez, edozein $\epsilon > 0$ emanda, existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $\dfrac{b-a}{n}(f(a) - f(b)) < \epsilon$ den. $P_\epsilon = P_n$ hartuz,

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) = \frac{b-a}{n} \big(f(a) - f(b)\big) < \epsilon.$$

Beraz, f integragarria da $[a, b]$ tartean. □

Oharra. 6.2.3 proposizioaren alderantzizkoa ez da egia. Funtzio integragarriek ez dute zertan funtzio monotonoak izan.

6.3 Riemannen integralaren propietateak

Atal honetan, Riemannen integralaren oinarrizko propietateak ikusiko ditugu.

6.3.1 proposizioa. *Izan bitez $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bornatua eta $c \in (a,b)$. f funtzioa $[a,b]$ tartean integragarria da, baldin eta soilik baldin $[a,c]$ eta $[c,b]$ tarteetan integragarria bada. Gainera,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Froga. $\Rightarrow$) Demagun f $[a,b]$ tartean integragarria dela, eta izan bitez $\epsilon > 0$ edozein eta $P_\epsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $[a,b]$ tarteko partiketa, non $U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon$ den.

Suposa dezakegu c P_ϵ partiketako puntu bat dela. Horrela ez balitz $Q_\epsilon = P_\epsilon \cup \{c\}$ partiketa hartuko genuke, $U(f,Q_\epsilon) - L(f,Q_\epsilon) \leq U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon$ delako. Beraz, demagun $P_\epsilon = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j = c, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$ dela, eta defini ditzagun

$$\begin{aligned} P'_\epsilon = &\{a = x_0, x_1, \ldots, x_j = c\} \text{ } [a,c] \text{ tarteko partiketa,} \\ P''_\epsilon = &\{c = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\} \text{ } [c,b] \text{ tarteko partiketa.} \end{aligned}$$

$L(f,P_\epsilon) = L(f,P'_\epsilon) + L(f,P''_\epsilon)$ eta $U(f,P_\epsilon) = U(f,P'_\epsilon) + U(f,P''_\epsilon)$ dira; beraz,

$$\big(U(f,P'_\epsilon) - L(f,P'_\epsilon)\big) + \big(U(f,P''_\epsilon) - L(f,P''_\epsilon)\big) < \epsilon$$

$U(f,P'_\epsilon) - L(f,P'_\epsilon)$ eta $U(f,P''_\epsilon) - L(f,P''_\epsilon)$ zenbaki ez-negatiboak direnez, biak dira ϵ baino txikiagoak, eta, ondorioz, f integragarria da $[a,c]$ eta $[c,b]$ tarteetan. Gainera, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ bada, existizen dira $P' \in \mathcal{P}([a,c])$ eta $P'' \in \mathcal{P}([c,b])$ non $P \subset P' \cup P''$ den, eta

$$\begin{aligned} L(f,P') &\leq \int_a^c f(x)\,dx \leq U(f,P'), \\ L(f,P'') &\leq \int_c^b f(x)\,dx \leq U(f,P''). \end{aligned}$$

$L(f,P) \leq L(f,P') + L(f,P'')$ eta $U(f,P') + U(f,P'') \leq U(f,P)$ direnez,

$$L(f,P) \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq U(f,P), \ \forall P \ \in \mathcal{P}([a,b]).$$

Baldintza hori betetzen duen zenbaki bakarra $\int_a^b f(x)\,dx$ da; beraz,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$\Leftarrow$) Demagun orain f integragarria dela $[a,c]$ eta $[c,b]$ tarteetan, eta izan bedi $\epsilon > 0$.

Orduan,

$$\exists\, P'_\epsilon \in \mathcal{P}([a,c]) \;:\; U(f,P'_\epsilon) - L(f,P'_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2},$$
$$\exists\, P''_\epsilon \in \mathcal{P}([c,b]) \;:\; U(f,P''_\epsilon) - L(f,P''_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Izan bedi $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$. $L(f,P_\epsilon) = L(f,P'_\epsilon) + L(f,P''_\epsilon)$ eta $U(f,P_\epsilon) = U(f,P'_\epsilon) + U(f,P''_\epsilon)$ direnez,

$$U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon$$

da; hots, f integragarria da $[a,b]$ tartean. □

Definizioak. Izan bedi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bornatua.

(i) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

(ii) f $[a,b]$ tartean integragarria bada, $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

Definizio horiek eta 6.3.1 proposizioa kontuan hartuz

$$\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt, \quad \forall\, x,y \in [a,b].$$

6.3.2 proposizioa. *Izan bitez f eta g $[a,b]$ tartean integragarriak.*

(i) $f+g$ $[a,b]$ tartean integragarria da, eta

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ bada, λf funtzioa integragarria da $[a,b]$ tartean, eta

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) fg integragarria da $[a,b]$ tartean, baina orokorrean

$$\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)\,dx\Big).$$

Froga. (i) Izan bitez $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ $[a,b]$ tarteko partiketa, eta

$$m_i = \inf\{(f+g)(x) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$m'_i = \inf\{f(x) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$m''_i = \inf\{g(x) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots,n.$$

Antzera definitzen dira M_i, M_i' eta M_i''. Supremoaren eta infimoaren propietateengatik,

$$\begin{aligned} m_i &\geq m_i' + m_i'', \\ M_i &\leq M_i' + M_i'', \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Beraz, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ bada,

$$\begin{aligned} L(f+g,P) &\geq L(f,P) + L(g,P), \\ U(f+g,P) &\leq U(f,P) + U(g,P) \end{aligned}$$

eta, ondorioz,

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. f eta g integragarriak direnez $[a,b]$ tartean, existitzen dira $P_\epsilon, Q_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$, non

$$\begin{aligned} U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) &< \frac{\epsilon}{2}, \\ U(g,Q_\epsilon) - L(g,Q_\epsilon) &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Izan bedi $P = P_\epsilon \cup Q_\epsilon$. Orduan,

$$U(f,P) + U(g,P) - \big(L(f,P) + L(g,P)\big) < \epsilon \Longrightarrow U(f+g,P) - L(f+g,P) < \epsilon.$$

Beraz, $f+g$ integragarria da $[a,b]$ tartean. Gainera, $P = P_\epsilon \cup Q_\epsilon$ partiketa horretarako,

$$\begin{aligned} L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq &\int_a^b (f+g)(x)\,dx \\ &\leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P), \end{aligned}$$

eta, era berean,

$$\begin{aligned} L(f,P) &\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,P), \\ L(g,P) &\leq \int_a^b g(x)\,dx \leq U(g,P). \end{aligned}$$

Orduan,

$$\begin{aligned} &\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\ &\qquad \leq U(f,P) + U(g,P) - L(f,P) - L(g,P) \\ &\qquad = U(f,P) - L(f,P) + U(f,P) - L(f,P) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

eta

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \\ \geq L(f,P) + L(g,P) - U(f,P) - U(g,P) \\ = -\big(U(f,P) - L(f,P)\big) - \big(U(f,P) - L(f,P)\big) \geq -\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = -\epsilon.\end{aligned}$$

Hau da, $\epsilon > 0$ guztietarako,

$$\Big|\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\Big| < \epsilon$$

da, eta, ondorioz $\int_a^b (f+g)(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = 0$, frogatu nahi genuen bezala.

(ii) Izan bitez m_i' eta M_i' aurreko atalean definitutako zenbakiak.

$$m_i = \inf\{\lambda f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \begin{cases} \lambda m_i', & \lambda \geq 0 \text{ bada}, \\ \lambda M_i', & \lambda < 0 \text{ bada}; \end{cases}$$

$$M_i = \sup\{\lambda f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \begin{cases} \lambda M_i', & \lambda \geq 0 \text{ bada}, \\ \lambda m_i', & \lambda < 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Beraz,

$$\begin{aligned} U(\lambda f, P) = \lambda U(f,P), \quad L(\lambda f, P) = \lambda L(f,P), \quad \lambda \geq 0 \text{ bada}, \\ U(\lambda f, P) = \lambda L(f,P), \quad L(\lambda f, P) = \lambda U(f,P), \quad \lambda < 0 \text{ bada}. \end{aligned}$$

f integragarria denez $[a,b]$ tartean, $\epsilon > 0$ guztietarako existitzen da $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$, non $U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \dfrac{\epsilon}{|\lambda|}$ den; beraz,

$$\begin{aligned} U(\lambda f, P_\epsilon) - L(\lambda f, P_\epsilon) = &\left\{\begin{matrix} \lambda\big(U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon)\big), & \lambda \geq 0 \text{ bada} \\ \lambda\big(L(f,P_\epsilon) - U(f,P_\epsilon)\big), & \lambda < 0 \text{ bada} \end{matrix}\right\} \\ = &|\lambda|(U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon)) < |\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Hau da, λf integragarria da $[a,b]$ tartean. Gainera, $\lambda \geq 0$ bada,

$$L(\lambda f, P) = \lambda L(f,P) \leq \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leq \lambda U(f,P) = U(\lambda f, P), \quad \forall\, P \in \mathcal{P}([a,b]),$$

eta $\lambda < 0$ bada, zenbaki negatibo batekin biderkatzean, desberdintzak aldatzen direnez, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ guztietarako,

$$L(\lambda f, P) = \lambda U(f,P) \leq \lambda \int_a^b f(x)\,dx \leq \lambda L(f,P) = U(\lambda f, P).$$

Goi- eta behe-batura guztien artean geratzen den zenbaki bakarra integrala denez,

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) Atal honen froga besteena baino zailagoa da, eta ez dugu egingo. □

6.3.3 proposizioa. *Izan bitez f eta g funtzio integragarriak $[a,b]$ tartean.*

(i) $f(x) \geq 0$ *bada* $x \in [a,b]$ *guztietarako, orduan,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ *da.*

(ii) $f(x) \geq g(x)$ *bada* $x \in [a,b]$ *guztietarako, orduan,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ *da.*

(iii) $|f|$ $[a,b]$ *tartean integragarria da, eta* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ *da.*

(iv) $m, M \in \mathbb{R}$ *badira, non* $m \leq f(x) \leq M$ *den* $x \in [a,b]$ *guztietarako, orduan,* $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ *da.*

Froga. (i) $f(x) \geq 0$ bada $x \in [a,b]$ guztietarako, orduan, $L(f,P) \geq 0$ da, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ edozein izanik. Beraz,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq L(f,P) \geq 0.$$

(ii) Izan bedi $h(x) = f(x) - g(x)$. 6.3.2 proposizioaren arabera, h integragarria da $[a,b]$ tartean eta $h(x) \geq 0$ da $x \in [a,b]$ guztietarako; beraz, aurreko atala kontuan hartuz, $\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$. Baina $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$ da; beraz,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

(iii) Izan bitez $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ $[a,b]$ tarteko partiketa, eta $i = 1, 2, \ldots, n$ guztietarako,

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \,:\, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, & m_i' &= \inf\{|f(x)| \,:\, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) \,:\, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, & M_i' &= \sup\{|f(x)| \,:\, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}. \end{aligned}$$

Balio absolutuaren propietateetatik, $\big||f(y)| - |f(z)|\big| \leq |f(y) - f(z)|$, y, z edozein bi puntu izanda; beraz, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako,

$$M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$$

da. Orduan,

$$\begin{aligned}U(|f|,P)-L(|f|,P)=&\sum_{i=1}^{n}(M_i'-m_i')(x_i-x_{i-1})\\ \leq&\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\\ =&U(f,P)-L(f,P),\end{aligned}$$

eta f-ren integragarritasunak ziurtatzen du $|f|$-rena. Gainera, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ denez $x \in [a,b]$ guztietarako,

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

eta, ondorioz,

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(iv) $x \in [a,b]$ guztietarako, $m \leq f(x) \leq M$ dela suposatzen ari gara, eta ikusi dugu $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ dela, k edozein zenbaki erreal izanik; beraz, $g(x) = m$ eta $h(x) = M$ funtzio konstanteak hartuz, (ii) ataleko propietatea aplikatzeko,

$$m(b-a) = \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx = M(b-a). \qquad \square$$

6.4 Kalkulu integralaren oinarrizko teorema

6.2 atalean funtzio baten integragarritasuna egiaztatzeko baldintzak eman dira, baina momentuz integralak kalkultzeko dugun tresna bakarra definizioa da, eta, askotan gertatzen den bezala, modu hori ez da erosoa praktikan. Atal honetan, Riemannen integralak kalkulatzeko tresnarik garrantzitsuena azalduko da, Barrow-en erregela, hain zuzen. Horretarako, lehenengo eta behin, kalkulu integralaren oinarrizko teorema enuntziatu eta frogatuko dugu, eta hortik ondorioztatzen den jatorrizko funtzioaren definizioa emango dugu.

6.4.1 teorema (Kalkulu integralaren oinarrizko teorema)**.** *Izan bitez f $[a,b]$ tartean integragarria eta*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a,b].$$

F funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua da. Gainera, f $x \in (a,b)$ puntuan jarraitua bada, orduan, F x puntuan deribagarria da, eta

$$F'(x) = f(x).$$

Froga. f $[a,b]$ tartean integragarria denez, bornatua da tarte horretan; beraz, existitzen da $M > 0$ non $|f(x)| \leq M$ den $x \in [a,b]$ guztietarako.

Izan bitez $x, y \in [a,b]$, $x < y$. Orduan,

$$|F(x) - F(y)| = \Big|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\Big| = \Big|\int_x^y f(t)\,dt\Big| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M(y-x)$$

da, eta, ondorioz, $\epsilon > 0$ edozein izanik, existitzen da $\delta = \dfrac{\epsilon}{M} > 0$ non, $x, y \in [a,b]$ guztietarako,

$$|x-y| < \delta \implies |F(x) - F(y)| \leq M(y-x) < \epsilon;$$

hau da, F uniformeki jarraitua da $[a,b]$ tartean eta, beraz, jarraitua.

Demagun orain f x puntuan jarraitua dela, eta ikus dezagun F deribagarria dela x-n. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. f jarraitua denez x puntuan, existitzen da $\delta > 0$ non

$$|t-x| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon.$$

Frogatu behar dugu $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ dela. $h > 0$ bada,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\Big| &= \frac{1}{h}|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \\ &= \frac{1}{h}\Big|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^{x+h} f(x)\,dt\Big| \\ &= \frac{1}{h}\Big|\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt\Big|r| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big|f(t) - f(x)\big|\,dt.\end{aligned}$$

Izan bedi $|h| < \delta$. Orduan, $|t-x| < \delta$ da; beraz, $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ da, eta

$$\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\Big| \leq \frac{1}{h}\epsilon\int_x^{x+h} dt = \frac{1}{h}\epsilon h = \epsilon.$$

$h < 0$ bada, antzeko arrazoinamendu bat jarraitzen da desberdintza bera lortzeko.

Beraz, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$; hau da, F x puntuan deribagarria da, eta $F'(x) = f(x)$ da. □

6.4.2 korolarioa. *Izan bedi f $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua da, eta (a,b) tartean deribagarria, $F'(x) = f(x)$ izanik $x \in (a,b)$ guztietarako.*

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existitzen bada G funtzioa non $G'(x) = f(x)$ den $x \in D$ guztietarako, orduan, G f-ren *jatorrizko funtzioa* dela esaten da.

Oharrak. (i) Funtzio guztiek ez dute jatorrizko funtziorik izan behar, baina f $[a,b]$ tartean jarraitua bada, orduan, $\int_a^x f(t)\,dt$ f-ren jatorrizkoa da:

$$\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)' = f(x), \quad \forall\, x \in (a,b).$$

(ii) Baldin eta G funtzioa f-ren jatorrizkoa bada, orduan, $G+k$ ere f-ren jatorrizkoa da $k \in \mathbb{R}$ edozein izanik, zeren eta $(G(x)+k)' = G'(x) = f(x)$ baita. Hau da, jatorrizkoa ez da bakarra.

Are gehiago, G f-ren jatorrizko bat ezagutzen badugu, beste guztiak $G+k$ modukoak izango dira, $k \in \mathbb{R}$ izanik, jarraian ikusiko dugun bezala.

6.4.3 proposizioa. *Izan bitez $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta G eta H f-ren bi jatorrizko. Orduan, existitzen da $k \in \mathbb{R}$, non $H(x) = G(x) + k$ den $x \in [a,b]$ guztietarako.*

Froga. G eta H f-ren jatorrizkoak direnez, $H'(x) = G'(x) = f(x)$ dira $x \in (a,b)$ guztietarako. Beraz, 5.3.6 korolarioagatik, existitzen da $k \in \mathbb{R}$, non $H(x) = G(x)+k$ den $[a,b]$ multzoko x guztietarako. □

6.4.4 teorema (Barrowen erregela)**.** *Izan bitez f $[a,b]$ tartean jarraitua eta G funtzioa f-ren jatorrizkoa $[a,b]$ tartean. Orduan,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Froga. Hipotesiaren arabera, G funtzioa f-ren jatorrizkoa da $[a,b]$ tartean. Bestalde, f $[a,b]$ tartean jarraitua da; beraz, $\int_a^x f(t)\,dt$ ere f-ren jatorrizkoa da $[a,b]$ tartean. 6.4.3 proposizioaren arabera, existitzen da $k \in \mathbb{R}$, non

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) + k, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

$x = a$ hartuz, $0 = G(a) + k$ dugu; beraz, $k = -G(a)$. Hau da,

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a), \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Azkenik, $x = b$ hartuz,

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$ □

Oharrak. (i) G f-ren jatorrizkoa bada, $f = G'$ denez, Barrowen erregela honela ere idatz daiteke:

$$\int_a^b G'(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Aurrekoaren arabera, Barrowen erregelaren enuntziatu baliokide hau eman daiteke: f funtzio deribagarria bada, f' jarraitua izanik, orduan,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

(ii) Barrowen erregelaren enuntziatuan integrakizuna funtzio jarraitua izatea eskatu dugu baina berdintza hori egia da ere soilik integragarritasuna eskatzen bada, froga konplikatzen bada ere.

6.5 Batez besteko balioaren teoremak

Funtzio konstante baten integrala konstante horren eta integrazio-tartearen luzeraren arteko biderkadura da. Orokorrean, funtzioa konstantea ez bada, baina jarraitua bada, existituko da puntu bat integrazio-tartean, non funtzioaren integrala funtzioaren puntu horretako balioaren eta integrazio-tartearen luzeraren arteko biderkadura den, jarraian ikusiko dugun bezala.

6.5.1 teorema (Integraletarako batez besteko balioaren lehen teorema)**.** *Izan bedi f $[a,b]$ tartean jarraitua. Orduan, existitzen da $\xi \in [a,b]$ non*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Froga. f $[a,b]$ tartean jarraitua denez, f-k maximoa eta minimoa lortzen ditu $[a,b]$ tartean; hau da, topa daitezke $c,d \in [a,b]$ non

$$f(c) = m \le f(x) \le f(d) = M, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Integral mugatuaren propietateen arabera, hortik ondorioztatzen da

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

dela; beraz,

$$f(c) = m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M = f(d).$$

$K = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ izendatuz, $f(c) \le K \le f(d)$ dela ikusi berri dugu. f jarraitua denez $[a,b]$ tartean, bereziki jarraitua da $[c,d]$ tartean (edo $[d,c]$ tartean $d < c$ balitz). Tarteko balioen teorema aplikatuz, 4.8.2 teorema hain zuzen, existitzen da $\xi \in [c,d]$, edo $\xi \in [d,c]$, c d baino txikiagoa edo handiagoa izatearen arabera, non $K = f(\xi)$ den, eta, ondorioz, existitzen da $\xi \in [a,b]$ non

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \qquad \square$$

6.5.1 teoreman, funtsezkoa da f funtzioaren jarraitutasuna $[a,b]$ tartean. f ez bada jarraitua tarte osoan, teorema ez da egia.

Adibidea. Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \text{ bada,} \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

f monotonoa da $[-1, 1]$ tartean; beraz, integragarria. Gainera,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx = -1 + 1 = 0.$$

Baina ez da existitzen $x \in [-1, 1]$ non $f(x) = 0$ den; hau da, batez besteko balioaren teoremaren emaitza ez da betetzen, eta arrazoia da f ez dela jarraitua.

6.5.2 teorema (Integraletarako batez besteko balioaren bigarren teorema)**.** *Izan bitez f $[a, b]$ tartean jarraitua eta g $[a, b]$ tartean integragarria. Baldin eta $g(x) \geq 0$ bada $x \in [a, b]$ guztietarako, orduan, existitzen da $\xi \in [a, b]$ non*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Froga. Izan bitez $m = f(c)$ eta $M = f(d)$ f-ren minimo eta maximoa $[a, b]$ tartean, hurrenez hurren. Orduan, $m \leq f(x) \leq M$ eta $g(x) \geq 0$ direnez $x \in [a, b]$ guztietarako,

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Beraz,

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.5.1}$$

Bestalde, $g(x) \geq 0$ denez, $\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ da. Baldin eta $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ bada, orduan, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ da, eta kasu horretan teoremaren emaitza nabaria da. Bestela, $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ da, eta (6.5.1) desberdintza zenbaki horrekin zati dezakegu honako hau lortzeko:

$$f(c) = m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M = f(d).$$

f $[c, d]$ tartean jarraitua denez, tarteko balioen teorema aplikatuz, existitzen da $\xi \in [c, d]$ (edo $\xi \in [d, c]$) non

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = f(\xi)$$

den; beraz, existitzen da $\xi \in [a, b]$ non

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \qquad \square$$

Oharra. Beharrezkoa da g funtzioa positiboa izatea 6.5.2 teorema egia izan dadin.

6.6 Aldagai-aldaketa integral mugatuetan

Gai honekin bukatzeko, integral mugatuen kalkulua errazteko tresna garrantzitsuenetariko bat emango da.

6.6.1 teorema. *Izan bitez g $[a,b]$ tartean deribagarria, g' $[a,b]$ tartean jarraitua izanik, eta f $[g(a),g(b)]$ tartean jarraitua. Orduan,*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt. \tag{6.6.1}$$

Froga. Izan bedi F f-ren jatorrizkoa. Orduan,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Bestalde, katearen erregelagatik,

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

da; beraz, $F \circ g$ $f(g(t))g'(t)$ funtzioaren jatorrizkoa da. Orduan,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)),$$

hau da,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt. \qquad \square$$

Adibidea. Kalkula dezagun $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$. Barrowen erregela ezin da zuzenean aplikatu, integrakizunaren jatorrizkoa ez baita argi ikusten zein den. Aldagai-aldaketa bat egingo dugu:

$$x = g(t) = \sin t \quad \Longrightarrow \quad dx = g'(t)\,dt = \cos t\,dt.$$

Integrazio-mugak $-\pi/2$ eta $\pi/2$ izango dira, zeren eta $\sin(-\pi/2) = -1$ eta $\sin(\pi/2) = 1$ baitira. Horrela, (6.6.1) formularen arabera,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t|\,\cos t\,dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{2} + \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos 2t\,dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Big(\sin 2t|_{\pi/2} - \sin 2t|_{-\pi/2}\Big) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

6.7 Ariketak

6.1. (i) Kalkulatu $[-1, 2]$ tarteko $f(x) = x^2$ funtzioaren $P = \{-1, 0, 1/2, 1, 2\}$ partiketarako goi- eta behe-baturak.

Em.: $L(f, P) = 9/8$, $U(f, P) = 45/8$

(ii) Izan bitez $f(x) = 2x - 1$ funtzioa eta $P_n = \{k/n \colon k = 0, 1, \dots, 2n\}$ $[0, 2]$ tarteko partiketa, $n \in \mathbb{N}$ izanik. Topatu f funtzioaren P_n partiketetarako goi- eta behe-baturen balioak.

Em.: $L(f, P_n) = \dfrac{2n-2}{n}$, $U(f, P_n) = \dfrac{2n+2}{n}$

6.2. Izan bedi f funtzioa $[a, b]$ tartean gorakorra. Orduan, f $[a, b]$-n bornatua da $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ baita $x \in [a, b]$ guztietarako. Izan bedi $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $[a, b]$ tarteko partiketa.

(i) Kalkulatu $L(f, P)$ eta $U(f, P)$.

(ii) Izan bedi $t_i - t_{i-1} = \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$ guztietarako. Frogatu $U(f, P) - L(f, P) = \delta\big(f(b) - f(a)\big)$ dela.

(iii) Frogatu f $[a, b]$ tartean integragarria dela.

(iv) Eman $[0, 1]$ tartean gorakorra eta infinitu puntutan ez-jarraitua den funtzio baten adibidea.

6.3. Izan bitez $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ bornatuak, $x_0 \in [a, b]$ eta demagun $f(x) = g(x)$ dela, $x \neq x_0$ guztietarako. Frogatu f $[a, b]$ tartean integragarria dela, baldin eta soilik baldin g $[a, b]$ tartean integragarria bada, eta kasu horretan

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$$

dela.

6.4. Frogatu honako funtzio hau $[-1, 2]$ tartean integragarria dela, eta kalkulatu integralaren balioa:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-1, 0] \text{ bada,} \\ 1, & x \in (0, 1) \text{ bada,} \\ 2, & x \in [1, 2] \text{ bada.} \end{cases}$$

Em.: 7/2

6.5. Aztertu honako funtzio hauen integragarritasuna $[0, 2]$ tartean, eta, ahal bada, kalkulatu integralaren balioa:

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \text{ bada,} \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \text{ bada.} \end{cases}$

(ii) $g(x) = \begin{cases} x + [x], & x \in \mathbb{Q} \text{ bada}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ bada}. \end{cases}$

6.6. Izan bedi
$$f(x) = \begin{cases} [x], & 0 \leq x \leq 2 \text{ bada}, \\ 1/x, & 2 < x \leq 4 \text{ bada}. \end{cases}$$
Integragarria al da $[0, 4]$ tartean? Arrazoitu erantzuna.

6.7. Kalkulatu honako funtzio hauen integralak emandako tarteetan:

(i) $f(x) = [x]^2$, $I = [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, *Em.:* $n(n-1)(2n-1)/6$

(ii) $f(x) = [\sqrt{x}]$, $I = [0, 9]$. *Em.:* 13

(iii) $f(x) = \left[\sqrt[3]{x}\right]$, $I = [-1, 9]$. *Em.:* 10

6.8. (i) Baldin eta f $[a, b]$-n integragarria bada eta $f(x) \geq 0$ bada, $x \in [a, b]$ guztietarako, frogatu $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dela.

(ii) Eman adibide bat non $f(x) \geq 0$ den $x \in [a, b]$ guztietarako, $f(x_0) > 0$ $x_0 \in [a, b]$ puntu batean, eta $\int_a^b f(x)dx = 0$.

(iii) Izan bedi f funtzioa non $f(x) \geq 0$ den $x \in [a, b]$ guztietarako, f $x_0 \in [a, b]$ puntuan jarraitua eta $f(x_0) > 0$. Frogatu $\int_a^b f(x)dx > 0$ dela.
Argibidea: topatu positiboa den behe-batura bat.

6.9. Frogatu desberdintza-kate hau:
$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} \leq 1.$$

6.10. Froga ezazu $\int_0^\pi \frac{1 + \sin^2 x}{1 + x^2} dx \leq 2\pi$ dela.

6.11. Froga ezazu $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx \leq 2\sqrt{2}$ dela.

6.12. Izan bitez h jarraitua, f eta g deribagarriak, eta $F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\, dt$. Frogatu berdintza hau:
$$F'(x) = h(g(x))\, g'(x) - h(f(x))\, f'(x).$$

6.13. Kalkulatu honako funtzio hauen deribatuak:

(i) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1 + t^2 + \sin^2 t} dt$

(ii) $F(x) = \sin\Big(\int_0^x \sin\Big(\int_0^y \sin^3 t\ dt\Big)\ dy\Big)$

(iii) $F(x) = \int_0^x a^x \sin^3 t\ dt$

(iv) $F(x) = \sin x \cos\Big(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t+t^3}\ dt\Big)$

(v) $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$

(vi) $F(x) = \int_a^{x^3} \sin^3 t\, dt$

(vii) $F(x) = \cos\Big(\int_0^{x^2} \sqrt{t+1} \sin t\, dt\Big)$

(viii) $F(x) = e^{4x} \sin\Big(\int_0^{3x} \sqrt{t^2 + \sin^2 t + 5}\, dt\Big)$

(ix) $F(x) = \int_0^x \sin x \ln(1+t^2)\, dt$

(x) $F(x) = \int_{100}^{x^2} x f(t)\ dt$

6.14. Izan bitez $f(x) = \sqrt{x + \sin^2(\pi x)}$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ eta $h(x) = \int_0^{f(x)} g(t)\, dt$. Kalkula ezazu $h'(1)$.

6.15. Kalkula ezazu $g''(x)$, baldin eta

$$g(x) = \int_0^x \Big(\int_0^{t^2} \frac{\sqrt{1+s^4}}{s+2}\ ds\Big)\ dt$$

bada.

6.16. Kalkulatu f funtzioaren mutur absolutuak $[0, 2]$ tartean, f honako funtzio hau bada:

$$f(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\, dt.$$

6.17. Kalkulatu $\int_{\pi/2}^{\pi} \Big(\frac{d}{dx}(t \sin x)\Big)\ dx$.

Em.: $-t$

6.18. Aurkitu kalkulu honen akatsa:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

6.19. Aurki ezazu honako kalkulu honen akatsa:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx/\cos^2 x}{1+3\tan^2 x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan x)\Big]_0^\pi = 0.$$

6.20. Frogatu honako berdintza hauek, aldagai-aldaketa egokiak erabiliz.

(i) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dt}{1+\sqrt{t}} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = k\int_{a/k}^{b/k} f(kt)\,dt,\ k\neq 0$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = \int_1^5 \frac{\sqrt{t-1}}{t+3}\,dt$

6.21. (i) Frogatu berdintza hau:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

(ii) Izan bedi f $[-a,a]$ tartean jarraitua. Frogatu f $[-a,a]$ tartean bikoitia bada, orduan,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

dela.

(iii) Izan bedi f $[-a,a]$ tartean jarraitua. Frogatu f $[-a,a]$ tartean bakoitia bada, orduan,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

dela.

6.22. Kalkulatu integral hauek:

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x\,dx$ *Em.:* $\ln 2$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$ *Em.:* $1/3$

7. gaia

Integrazioa: jatorrizko funtzioen kalkulua

6. gaian ikusi dugu, integral mugatuak Barrowen erregelaren bidez kalkulatzeko, ezinbestekoa dela integratu nahi den funtzioaren jatorrizkoa ezagutzea. Hori izango da gai honen helburua, jatorrizkoen kalkulua, hain zuzen.

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. F f-ren *jatorrizko funtzioa* D multzoan dela diogu, baldin eta $F'(x) = f(x)$ bada $x \in D$ guztietarako.

Definizioa. f funtzioaren *integral mugagabea* f-ren jatorrizko funtzioek osatzen duten multzoa da, eta $\int f$ edo $\int f(x)dx$ ikurren bidez adierazten da.

$$\int f(x)\,dx = \{F\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in D\}.$$

F f-ren jatorrizko funtzio bat baldin bada, orduan, $F+k$ ere f-ren jatorrizko funtzioa da, $k \in \mathbb{R}$ edozein izanik. Gainera, F eta G f-ren bi jatorrizko funtzio badira, orduan, existitzen da $k \in \mathbb{R}$ non $G = F + k$ den. Hori kontuan izanda, F baldin bada f-ren jatorrizko funtzio bat, f-ren integral mugagabea honako modu honetan laburtuko dugu:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k.$$

Gogora dezagun integral mugatuen eta jatorrizko funtzioen arteko erlazioa ere; hots, aipatutako Barrowen erregela.

7.0.1 teorema (Barrowen erregela)**.** *Izan bitez f funtzioa $[a,b]$ tartean jarraitua eta G funtzioa, non $G'(x) = f(x)$ den $x \in [a,b]$ guztietarako. Orduan,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

7.1 Oinarrizko integral mugagabeak

Deribatuz, erraz ikusten da honako berdintza hauek betetzen direla:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + k$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + k \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{cotan}\,x + k$$

$$\int e^x\,dx = e^x + k \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + k \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + k$$

7.2 Oinarrizko integrazio-metodoak

Lehenengo eta behin aipatuko ditugu integral mugagabeen eragiketa aljebraikoekiko propietateak.

7.2.1 proposizioa (Integral mugagabeen oinarrizko propietateak)**.** *Izan bitez f, g aldagai errealeko funtzioak eta $a \in \mathbb{R}$.*

(i) $\displaystyle\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$

Froga. Integral mugagabeen arteko berdintzak multzoen arteko berdintzak dira. Deribatuak berdinak direla frogatu behar dugu.

(i) Frogatu nahi dugu batura baten integrala integralen batura dela.

$$\begin{aligned}\Big(\int (f(x)+g(x))\ dx\Big)' = f(x)+g(x) &= \Big(\int f(x)\,dx\Big)' + \Big(\int g(x)\,dx\Big)' \\ &= \Big(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\Big)'\end{aligned}$$

(ii) Orain, konstanteak integraletik atera daitezkeela frogatu nahi dugu.

$$\Big(\int af(x)\,dx\Big)' = af(x) = a\Big(\int f(x)\,dx\Big)' = \Big(a\int f(x)\,dx\Big)' \qquad \square$$

Oharra. Deribatuekin gertatzen den bezala, integralen kasuan ez da betetzen biderkadura baten integral mugagabea integral mugagabeen biderkadura denik; hau da, orokorrean

$$\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx.$$

Jarraian, ondorengo ataletan erabiliko diren oinarrizko bi integrazio-metodo emango ditugu. Oinarrizko integral mugagabeak, 7.2.1 proposizioan aipatutako propietateak, eta jarraian emango ditugun 7.2.2 eta 7.2.3 teoremetan ikusiko ditugun integrazio-metodoak izango dira gure tresnak jatorrizkoak bilatzeko. Hala ere, ez da posible izango funtzio guztien jatorrizkoak aurkitzea metodo hauen bidez.

7.2.2 teorema (Aldagai-aldaketazko integrazioa)**.** *Izan bitez f funtzio jarraitua, g eta bere deribatua funtzio jarraituak, eta demagun g-ren alderantzizko funtzioa existitzen dela. Orduan,*

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}.$$

Froga. Ezkerreko gaia deribatzen badugu,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Beste aldetik, $x = g(t)$ hartzen badugu, g-ren alderantzizko funtzioa existitzen denez, $t = g^{-1}(x)$, eta alderantzizko funtzioaren deribatuaren adierazpena kontuan hartuz

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(t)}.$$

Bigarren gaia deribatuko dugu orain, katearen erregela erabiliz:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\left[\int f(g(t))g'(t)dt\right]_{t=g^{-1}(x)}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\int f(g(t))g'(t)dt\right)\frac{dt}{dx}\\ &= f(g(t))g'(t)\frac{1}{g'(t)} = f(g(t)) = f(x).\end{aligned}$$

Beraz, teorema frogaturik geratzen da. $\square$

Oharra. Kasu batzuetan, komenigarria da aldagai-aldaketa $t = \varphi(x)$ moduan adieraztea, eta ez $x = g(t)$ moduan. Horrela egiten badugu, kontuan hartu behar da $dt = \varphi'(x)dx$ dela.

Adibidea. Kalkula dezagun $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$. Horretarako, $\sin x = t$ aldagai-aldaketa egingo dugu. Orduan, $\cos x\,dx = dt$ d eta

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + k.$$

Adibidea. $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ integral mugagabea kalkulatzeko, $1+x^2=t$ aldagai-aldaketa erabil dezakegu. Horrela, $2x\,dx=dt$ denez,

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \ln|t|+k == \frac{1}{2}\ln|1+x^2|+k.$$

7.2.3 teorema (Zatikako integrazioa)**.** *Izan bitez f eta g funtzioak, haien deribatuak jarraituak izanik. Orduan,*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Froga. Biderkaduraren deribatua kalkulatzeko, (5.2.2) formulatik ondorioztatzen da

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x) \tag{7.2.1}$$

dela. Integratzen badugu (7.2.1) berdintza, teoremaren emaitza lortzen da. □

Oharra. Normalean, zatikako integrazioaren formula era honetan idazten da:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

Integrazio-metodo hau mota hauetako integraletan erabili ohi da: $\int x^k \sin ax\,dx$; $\int x^k \cos ax\,dx$; $\int x^k e^{ax}\,dx$; $\int x^k \ln x\,dx$; $\int x^k \arcsin ax\,dx$...

Adibidea. $\int xe^x\,dx$ zatikako integrazioaren bidez kalkulatuko dugu. Izan bitez $u=x$ eta $dv=e^x\,dx$. Orduan, $du=dx$ eta $v=e^x$ dira; beraz,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k == e^x(x-1)+k.$$

Adibidea. $\int e^x \sin x\,dx$ integrala kalkulatzeko, bitan erabili behar dugu zatikako integrazioa, jarraian ikusiko dugun bezala. Har ditzagun $u=e^x$ eta $dv=\sin x\,dx$. Orduan, $du=e^x\,dx$ eta $v=-\cos x$; beraz,

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

$\int e^x \cos x\,dx$ kalkulatzeko, zatikako integrazioa erabiliko dugu berriro, lehenago egin dugun aukeraketa mantenduz; hots, $u=e^x$ eta $dv=\cos x$. Horrela, $du=e^x\,dx$ eta $dv=\sin x$ direnez,

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Berdintzaren bi aldeetan integral bera agertzen da, baina aurkako zeinuekin; beraz,

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos + e^x\sin x + \tilde{k},$$

eta, ondorioz,

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + k.$$

7.3 Funtzio arrazionalen integrazioa

Atal honetan, polinomioen arteko zatidurak nola integratu ikusiko dugu. Eskatuko dugu izendatzailearen faktore sinpleetako deskonposizioan lehen eta bigarren mailako polinomioen berreturak ager daitezela soilik.

7.3.1 Funtzio arrazional sinpleen integrazioa

Lehenengo eta behin, aztertuko dugu nola integratu funtzio arrazional sinpleenak. Lau motatako funtzio arrazionalak aztertuko ditugu:

(I) $\dfrac{A}{x-a}$, non $a, A \in \mathbb{R}$ diren. Horien integral mugagabea berehalakoa da:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{1}{x-a}dx = A\ln|x-a| + k.$$

(II) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $a, A \in \mathbb{R}$ eta $n \geq 2$ zenbaki arrunta izanik. Hori ere berehalakoa da.

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}dx = \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + k = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + k.$$

(III) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, A, B, p eta q zenbaki errealak eta x^2+px+q polinomioaren erroak konplexuak izanik; hau da, $p^2-4q<0$.

Lehenik eta behin, konstanteak berrantolatzen dira izendatzailearen deribatua zenbakitzailean ager dadin. Gero, karratu perfektu bat osatzen da izendatzailean. Horrela,

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx\\ &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}\\ &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}\\ &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + k.\end{aligned}$$

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+2x+3}\,dx$ integrala kalkulatu nahi da. $(x^2+2x+3)' = 2x+2$ denez, berridatzi egingo dugu zenbakitzailea:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{x^2+2x+3}\,dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{x^2+2x+3}\,dx\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+3x+2}\,dx - 4\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.\end{aligned}$$

Lehen integrala berehalakoa da. Bigarrena kalkulatzeko, kontuan izan behar dugu $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ dela. Orduan,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}.$$

$\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ denez,

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+3x+2}\,dx - 4\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\frac{dx}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+3| - 2\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k.$$

(IV) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, A, B, p eta q zenbaki errealak, $n \geq 2$ zenbaki arrunta eta x^2+px+q polinomioaren erroak konplexuak izanik.

Lehen bezala, zenbakitzailean izendatzailearen deribatua agerrarazten da:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Lehenengo integralean $x^2+px+q=t$ aldaketa eginez,

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{t^{-n+1}}{-n+1}+k = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+k.$$

Izenda dezagun bigarren integrala I_n-ren bidez. Orduan, karratu perfektua osatuz,

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^n}$$
$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2+m^2-t^2}{(t^2+m^2)^n}dt = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^n}dt,$$

non $t = x+\dfrac{p}{2}$ eta $m=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$ diren. Azken integralean zatikako integrazioa aplikatuko dugu, $u=t$ eta $dv=\dfrac{tdt}{(t^2+m^2)^n}$ hartuz. Horrela,

$$\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^n}dt = -\frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}\right).$$

Beraz,

$$\begin{aligned} I_n =& \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{2(n-1)}\Big(\frac{t}{(t^2+m^2)^{n-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}\Big) \\ =& \frac{t}{2m^2(n-1)(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2m^2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Hau da, I_n integrala I_{n-1} integralaren funtzio bezala adierazi dugu. Prozedura hori $n-1$ aldiz aplikatzen badugu, honako integral ezagun honetara helduko gara:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\arctan\frac{t}{m} + k.$$

Azkenik, m eta t-ren balioak ordezkatzen baditugu, IV. integralaren emaitza dugu.

Adibidea. Kalkulatuko dugu $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$. Lehenengo eta behin, $(x^2+x+1)' = 2x+1$ denez, deskonposatuko dugu integrakizuna bi batugaitan, honela:

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Lehen batugaiaren integrala berehalakoa da; nahi izanez gero, $x^2+x+1=t$ aldagai-aldaketa eginez, kalkulua errazago egiteko. Izenda dezagun

$$I = \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{\Big(\big(x+\frac{1}{2}\big)^2+\frac{3}{4}\Big)^2}\,dx.$$

Egin dezagun $t = x+\frac{1}{2}$ aldagai-aldaketa, eta izenda dezagun $m = \sqrt{3}/2$. Orduan,

$$\begin{aligned} I = \int \frac{1}{(t^2+m^2)^2}\,dt =& \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2+m^2-t^2}{(t^2+m^2)^2}\,dt \\ =& \frac{1}{m^2}\int \frac{1}{t^2+m^2}\,dt - \frac{1}{2m^2}\int \frac{2t\cdot t}{(t^2+m^2)^2}\,dt. \end{aligned}$$

Lehen integrala berehalakoa da. Bigarrenean, azaldu den bezala, zatikako integrazioa erabili behar da, $u = t$ eta $dv = \dfrac{2t}{(t^2+m^2)^2}$ hartuz. Horrela, $du = dt$ eta $v = -\dfrac{1}{t^2+m^2}$ direnez,

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{m^3}\arctan\frac{t}{m} - \frac{1}{2m^2}\Big(-\frac{t}{t^2+m^2} + \int \frac{1}{t^2+m^2}\,dt\Big) \\ =& \frac{1}{m^3}\arctan\frac{t}{m} + \frac{1}{2m^2}\frac{t}{t^2+m^2} - \frac{1}{2m^3}\arctan\frac{t}{m} + k \\ =& \frac{1}{2m^3}\arctan\frac{t}{m} + \frac{1}{2m^2}\frac{t}{t^2+m^2} + k. \end{aligned}$$

Aldagai-aldaketa deseginez eta gogoratuz $m = \sqrt{3}/2$ dela,

$$I = \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1},$$

eta, azkenik,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{2} I \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \frac{2x+1}{x^2+x+1} + k \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)} + k. \end{aligned}$$

7.3.2 Funtzio arrazional orokorren integrazioa

Atal honetan $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ motako funtzio arrazionalak aztertuko ditugu, Q eta P polinomioak izanik, erro komunik ez dutenak.

Izendatzailearen maila zenbakitzailearena baino txikiagoa bada; hau da, frakzioa inpropioa bada, frakzio hori polinomio baten eta frakzio propio baten batura bezala adieraz dezakegu; hots,

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{P(x)}.$$

Polinomioak integratzen ikusi dugunez, orain ikasi behar dugu frakzio propioak integratzen. Horretarako, frakzio sinpleetan deskonposatuko ditugu.

Izan bitez R eta P erro komunik ez duten polinomioak, $\deg R < \deg P$, eta demagun P-ren faktore sinpleetako deskonposizioan $(x-a)^n$ eta $(x^2+px+q)^m$ motako faktoreak agertzen direla soilik, non $a, p, q \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ diren, eta x^2+px+q motako polinomioek erro errealik ez dutela. Orduan, $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ frakzio sinpleetako batura bezala deskonposa daiteke.

(i) $(x-a)^n$ P-ren faktore sinpleetako deskonposizioan agertzen bada, orduan, R/P-ren frakzio sinpleetako deskonposizioan n batugai agertuko dira, izendatzaileak $(x-a)^k$ izanik, $k = 1, \ldots, n$, eta zenbakitzaileak, konstanteak,

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

(ii) $(x^2+px+q)^m$ bigarren mailako polinomioa P-ren faktore sinpleetako deskonposizioan agertzen bada, $p^2 - 4q < 0$ izanik, orduan, R/P-ren frakzio sinpleetako deskonposizioan m batugai agertuko dira, izendatzaileak $(x^2+px+q)^k$ izanik, $k = 1, \ldots, m$, eta zenbakitzaileak lehen mailako polinomioak, honela:

$$\frac{B_1x + D_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x + D_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{D_mx + D_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, D_1, B_2, D_2, \ldots, B_m, D_m$ finkatu behar diren konstanteak dira. Horretarako, izendatzaile komunera eramaten dira bigarren atalaren frakzioak; horrela, lehenengo eta bigarren atalen izendatzaileak berdinak dira; beraz, zenbakitzaileak ere berdinak izango dira. Hortik ateratzen dira konstanteen balioak, x-ren berretzaile berberak dituzten gaien koefizienteak berdinduz, edo eta balioak emanez x aldagaiari.

Adibidea. Honako hau da $\dfrac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ funtzio arrazionalaren frakzio sinpleetako deskonposizioa:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

A, B, C eta D konstanteen balioak lortzeko, eskuineko atalean izendatzaile komunera eramanez, lortutako funtzio arrazionalaren zenbakitzailea

$$A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx-D)(x-1)^2$$

da, eta ezkerreko ataleko frakzioaren zenbakitzailea izan behar da, izendatzaileak berdinak direlako. Hots,

$$1 = A(x^3-1) + B(x^2+x+1) + C(x^3-2x^2+x) + D(x^2-2x+1).$$

x-ren berreturen koefizienteak berdinduz, sistema aljebraiko bat lortzen dugu,

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B - 2C + D = 1, \\ B + C - 2D = 0, \\ -A + B + D = 1. \end{cases}$$

Sistema honen soluzioa $A = -1/3$, $B = C = D1/3$ denez,

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\Big).$$

Aurreko guztia kontuan izanda, P eta Q polinomioak badira, $\displaystyle\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ integral arrazionala kalkulatzeko, $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ frakzioa inpropioa bada, orduan, $\dfrac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \dfrac{R(x)}{P(x)}$ moduan idatziko dugu, eta gero R/P frakzio propioa frakzio sinpleetan deskonposatuko dugu. M polinomioa eta frakzio sinpleak integratuko ditugu, lehenago azaldu dugun bezala.

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)(x+1)}\,dx$ integral arrazionala kalkulatzeko, lehenengo eta behin, berridatzi behar dugu integrakizuna frakzio propio bat izateko. Zatiketa eginez,

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)(x+1)} = x+1+\frac{3x^2+4x+8}{(x^2+2x+3)(x+1)}.$$

Ondoren, lortutako frakzio propioa frakzio sinpleetan deskonposatu behar dugu, honako hau lortuz,

$$\frac{3x^2+4x+8}{(x^2+2x+3)(x+1)} = \frac{2}{x+1}+\frac{x-1}{x^2+2x+3}.$$

Orduan,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)(x+1)}\,dx &= \int (x+1)\,dx + 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx\\ &= \frac{x^2}{2}+x+2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - \int \frac{2}{(x+1)^2+2}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}+x+2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+k.\end{aligned}$$

7.3.3 Hermiteren edo Ostrogradskiren metodoa

IV motako frakzioak integratu behar direnean, are gehiago berretzailea handia bada, kalkuluak oso luzeak dira. Azalduko dugu beste metodo bat, batez ere II eta IV motako frakzioak agertzen direnerako.

Izan bitez Q eta P erro komunik ez duten polinomioak, $\deg Q < \deg P$, eta demagun P-ren faktore sinpleetako deskonposizioan $(x-a)^n$ eta $(x^2+px+q)^m$ motako faktoreak agertzen direla soilik, non $a,p,q \in \mathbb{R}$, $n,m \in \mathbb{N}$ diren, eta x^2+px+q motako polinomioek erro errealik ez duten. Orduan, $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ funtzioa honako era honetan idatz dezakegu:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \Big(\frac{A(x)}{R_1(x)}\Big)' + \frac{B(x)}{R_2(x)},$$

non R_2 polinomioaren faktoreak P-renak diren, baina behin bakarrik; hau da, berretzailea 1 izanik, eta $R_1(x)R_2(x)=P(x)$. A eta B polinomioak dira, A-ren maila R_1-en maila baino unitate bat txikiagoa eta B-ren maila R_2-rena baino unitate bat txikiagoa. A eta B polinomioen koefizienteak kalkulatzeko goiko berdintza erabiltzen da, n ekuazioko sistema lineal bat lortuz, n P-ren maila izanik.

Azkenik, integratuz,

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = \frac{A(x)}{R_1(x)} + \int \frac{B(x)}{R_2(x)}\,dx.$$

Eskuineko atalean agertzen den integrala hasierakoa baino askoz errazagoa da orain, izendatzailearen faktore guztien berretzaileak 1 dira eta.

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{24x+8}{x(x^2+4)^2}\,dx$ integral arrazionala kalkulatuko dugu, Hermiteren metodoaren bidez.

Goian azaldu den bezala, gure integrakizuna honela deskonposa daiteke:

$$\frac{24x+8}{x(x^2+4)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+4}\right)' + \frac{cx+dx+e}{x(x^2+4)}.$$

Bigarren batugaia integratu beharko dugunez, idatziko dugu bere deskonposizioa frakzio sinpleetan, eta deribatuko dugu lehen batugaia, honako hau lortzeko:

$$\begin{aligned}\frac{24x+8}{x(x^2+4)^2} &= \frac{A(x^2+4)-2x(Ax+B)}{(x^2+4)^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+4}\\ &= \frac{(-Ax^2+4A-2Bx)x + C(x^2+4)^2 + (Dx+E)x(x^2+4)}{x(x^2+4)^2}\\ &= \frac{-Ax^3-2Bx^2+4Ax+Cx^4+8Cx^2+16C+Dx^4+Ex^3+4Dx^2+4Ex}{x(x^2+4)^2}.\end{aligned}$$

x-ren berreturen koefizienteak berdinduz, hasiz x^4-ren koefizientearekin eta bukatuz x^0-renarekin, honako sistema hau lortzen da:

$$\begin{cases} 0 = C+D\\ 0 = -A+E\\ 0 = -2B+8C+4D\\ 24 = 4A+4E\\ 8 = 16C \end{cases}$$

Azken ekuaziotik lortzen dugu $C = 1/2$. Lehenengoan ordezkatuz, $D = -1/2$, eta bi balio horiek hirugarren ekuazioan sartuz, B=1. Azkenik, bigarren eta laugarren ekuazioetatik ondorioztatzen da $A = 3$ eta $E = 3$ direla. Beraz,

$$\begin{aligned}\int \frac{24x+8}{x(x^2+4)^2}\,dx &= \int \left(\frac{3x+1}{x^2+4}\right)' dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x+6}{x^2+4}\,dx\\ &= \frac{3x+1}{x^2+4} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+4}\\ &= \frac{3x+1}{x^2+4} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x/2)^2+1}\\ &= \frac{3x+1}{x^2+4} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+4} + \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} + k.\end{aligned}$$

7.4 Funtzio irrazionalen integrazioa

Funtzio irrazional baten integrala oinarrizko funtzioen bidez adieraztea ez da beti posible izango. Atal honetan, funtzio irrazional batzuk aztertuko ditugu. Aldagai-aldaketa egokiak erabiliz, funtzio arrazionalen integral bihurtuko ditugu. R-k parentesien artean agertzen diren aldagaien funtzio arrazionala adieraziko du.

7.4.1 Funtzio irrazional bilinealen integrazioa

Izan bitez $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $r_1, s_1, \ldots, r_n, s_n$ zenbaki osoak eta $R(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $n+1$ aldagaiko funtzio arrazionala.

$$\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1/s_1}, \ldots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_n/s_n}\Big) dx$$

motako integralak integral irrazional bilinealak direla esan ohi da. Ikusiko dugu, aldagai-aldaketa apropos baten bidez, integral horiek integral arrazional batera eraman daitezkeela.

Lehenengo eta behin, kasu partikular batekin hasiko gara: $a = d = 1$ eta $b = c = 0$; hau da, $\displaystyle\int R(x, x^{r_1/s_1}, \ldots, x^{r_n/s_n}) dx$ motako integralekin. Izan bedi k zenbakia $s_1, \ldots, s_n$ zenbakien multiplo komunik txikiena. Orduan, existituko dira $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ zenbaki osoak non $k = \alpha_j s_j$ den, $j = 1, \ldots, n$ guztietarako, eta

$$x = t^k \quad \Longrightarrow \quad dx = kt^{k-1}$$

aldaketa eginez, $\dfrac{r_j}{s_j} k = r_j \alpha_j$ zenbaki osoa izango da, $j = 1, \ldots, n$ guztietarako; hau da, berretzaile frakzionario guztiak berretzaile oso bihurtzen dira, eta t-ren funtzio arrazional bat da integrakizun berria.

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}\, dx$ integral irrazionala kalkulatzeko, $x = t^4$ aldagai-aldaketa egin behar da. Horrela,

$$\begin{aligned} \int = \frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}\, dx &= \int \frac{t^2}{t^3+1} 4t^3\, dt = \int \left(4t^2 - \frac{4t^2}{t^3+1}\right) dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + k = \frac{4}{3}\left(x^{3/4} - \ln\left|x^{3/4}+1\right|\right) + k \end{aligned}$$

Orokorrean, lehen bezala, k zenbaki osoa $s_1, \ldots, s_n$ zenbakien multiplo komunik txikiena bada,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}$$

aldagai-aldaketaren bidez, $\displaystyle\int R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_1/s_1}, \ldots, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{r_n/s_n}\Big) dx$ integralean berretzaile frakzionario guztiak desagertzen dira, eta x eta dx t-ren funtzio arrazionalak dira.

Adibidea. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$ integrala ebazteko, $x+4=t^2$ aldagai-aldaketa egingo dugu. Orduan, $x=t^2-4$ eta $dx=2tdt$ direnez,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= \int \frac{t}{t^2-4}2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt = 2\int \Big(1+\frac{4}{t^2-4}\Big)\,dt \\ &= 2t + 2\int \frac{dt}{t-2} - 2\int \frac{dt}{t+2} = 2t + 2\ln|t-2| - 2\ln|t+2| + k \\ &= 2\Big(\sqrt{x+4} + \ln\Big|\frac{x+8-4\sqrt{x+4}}{x}\Big|\Big) + k\end{aligned}$$

7.4.2 Funtzio irrazional koadratikoen integrazioa

Orain, $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ motako integralak kalkulatu nahi ditugu, non, lehen bezala, R-k funtzio arrazional bat adierazten duen. Eulerren aldaketen bidez, funtzio arrazionalen integraletara eramaten dira integral irrazional horiek.

7.4.1 proposizioa (Eulerren aldaketak)**.** *Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{R}$ eta R funtzio arrazionala.*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

motako integralak integral arrazionaletara eraman daitezke honako kasu hauetan:

(i) $a > 0$ bada, aldaketa honen bidez:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t \quad \textit{(Eulerren lehen aldaketa).}$$

(ii) $c > 0$ bada, honako aldagai-aldaketa hau egin behar da:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c} \quad \textit{(Eulerren bigarren aldaketa).}$$

(iii) ax^2+bx+c polinomioak erro errealak baditu; hots, existitzen badira $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ den, aldagai-aldaketa hau egiten da:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t \quad \textit{(Eulerren hirugarren aldaketa).}$$

Froga. (i) $a > 0$ bada, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ berdintzaren bi atalen karratuak hartuz, $ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2$ da, eta, ondorioz,

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}.$$

Gainera, deribatuz

$$dx = \frac{2t(b-2\sqrt{a}t) - (t^2-c)(-2\sqrt{a})}{(b-2\sqrt{a}t)^2}\,dt = \frac{2tb - 2\sqrt{a}t^2 - 2\sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}t)^2}\,dt.$$

Beraz, x, dx eta $\sqrt{ax^2+bx+c}$ adierazpenak t-ren funtzio arrazional bezala adieraz daitezke, eta emandako integrala t-ren funtzio arrazional baten integral bihurtzen da.

$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + t$ aldagai-aldaketa eginez, antzeko adierazpenak lortzen dira.

(ii) $c > 0$ bada, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ berdintzan karratuak hartuz, $ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$ da, eta hemendik honako hau dugu:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

Orain ere, x, dx eta $\sqrt{ax^2+bx+c}$ adierazpenak t-ren funtzio arrazional bezala idatz daitezkeenez, t-ren funtzio arrazional baten integrala lortzen da. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$ ere erabil dezakegu.

(iii) α eta β zenbaki errealak ax^2+bx+c polinomioaren erro errealak badira, $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ dela kontuan hartuz, aurreko kasuetan bezala, $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$ berdintzaren bi atalen karratuak berdinak direnez, $a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$ da; beraz,

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Horrela, emandako integrala berriro t-ren funtzio arrazional baten integral bihurtzen da. □

Adibidea. Kalkula dezagun $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$. x^2+3x-4 polinomioaren koefiziente zuzendaria positiboa da; beraz, Eulerren lehen aldaketa erabil dezakegu. Halaber, $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$ eta Eulerren hirugarren aldagai-aldaketa ere aplikagarria da, eta hori da aukeratuko duguna. Izan bedi

$$\sqrt{x^2+3x-4} = (x-1)t.$$

Karratuak hartuz,

$$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4) = (x-1)^2t^2 \implies x+4 = (x-1)t^2$$
$$\implies x = \frac{t^2+4}{t^2-1}.$$

Deribatuz, erraz ikusten da $dx = \dfrac{6t\,dt}{(t^2-1)^2}$ dela; beraz,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}} &= \int \frac{1}{\left(\dfrac{t^2+4}{t^2-1}-1\right)t} \frac{6t\,dt}{(t^2-1)^2} \\
&= -2\int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t-1} = \ln|t+1| - \ln|t-1| + k \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x-1}+1\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x-1}-1\right| + k \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + k
\end{aligned}
$$

7.4.3 Integral binomikoak

Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$ eta m, n, p zenbaki arrazionalak. $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ motako integralie binomiko deritze. 7.4.2 ataleko integraletan bezala, aldagai-aldaketa egokien bidez, integral binomikoak integral arrazionaletara eraman daitezke, m, n eta p zenbakiek baldintza batzuk betetzen badituzte.

7.4.2 proposizioa. *Izan bitez a, b zenbaki errealak eta m, n, p zenbaki arrazionalak.*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

integral binomikoa funtzio arrazional baten integralera eraman daiteke hiru kasu hauetan:

(i) *p zenbakia osoa denean,*

(ii) *$\dfrac{m+1}{n}$ zenbakia osoa denean,*

(iii) *$p+\dfrac{m+1}{n}$ zenbakia osoa denean.*

Froga. Egin dezagun emandako integralean honako aldaketa hau:

$$x = z^{1/n}, \qquad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

Orduan, integralean ordezkatuz,

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p\;dz = \frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz, \qquad (7.4.1)$$

non $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$ den.

(i) Izan bedi p zenbaki osoa. q zenbakia arrazionala denez, izenda dezagun r/s. Kasu honetan, (7.4.1) integrala $\int R(z^{r/s}, z)dz$ erakoa da, eta, lehenago ikusi dugunaren arabera, $z = t^s$ aldaketa eginez, t-ren funtzio arrazional baten integral bihurtzen da.

(ii) Izan bedi $\dfrac{m+1}{n}$ zenbaki osoa. Orduan, $\dfrac{m+1}{n} - 1$ ere osoa da. p zenbakia arrazionala denez, (7.4.1) integrala $\int R\big(z^q, (a+bz)^{r/s}\big)dz$ motakoa da. Integral hori ere aztertu dugu, $a + bz = t^s$ aldaketaren bidez ebazten delarik.

(iii) Izan bedi $\dfrac{m+1}{n} + p$ zenbaki osoa. Orduan, $\dfrac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ ere osoa da, eta (7.4.1) honela berridatz dezakegu:

$$\int z^q(a + bz)^p dz = \int z^{q+p}\Big(\frac{a + bz}{z}\Big)^p dz,$$

non $p + q$ zenbakia osoa den eta p arrazionala; beraz, $\dfrac{r}{s}$ motakoa. Lehen ikusi dugunaren arabera, $\dfrac{a + bz}{z} = t^s$ aldaketaren bidez ebazten da. $\square$

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ integral binomikoa kalkulatzeko, lehenengo eta behin, $x^2 = z$ aldagaia-aldaketa egingo dugu; hau da, $x = t^{1/2}$, $dx = \dfrac{1}{2}z^{-1/2}dz$. Orduan,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1 + x^2)^3}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z(1 + z)\sqrt{1 + z}\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{z}{z + 1}}\frac{dz}{z^2(z + 1)},$$

non azken berdintza lortu dugun $\sqrt{z}$-rekin biderkatuz zenbakitzailean eta izendatzailean. Orain,

$$\frac{z}{z + 1} = t^2 \iff z = -\frac{t^2}{t^2 - 1},\ dz = \frac{2tdt}{(t^2 - 1)^2}$$

aldagai-aldaketa eginez,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1 + x^2)^3}} &= \frac{1}{2}\int t\frac{1}{\Big(\dfrac{t^2}{t^2 - 1}\Big)^2\Big(1 - \dfrac{t^2}{t^2 - 1}\Big)}\frac{2tdt}{(t^2 - 1)^2} = -\int \frac{t^2 - 1}{t^2}dt \\ &= -t - \frac{1}{t} + k.\end{aligned}$$

Azkenik, aldagai-aldaketak desegin behar ditugu. $t = \sqrt{\dfrac{z}{z + 1}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ dugunez,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1 + x^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + k.$$

7.5 Funtzio trigonometrikoen integrazioa

Atal honetan, funtzio trigonometrikoen integrazioa aztertuko dugu. Aurrekoetan bezala, ez da beti posible izango funtzio trigonometriko baten integral mugagabea aurkitzea, baina ikusiko dugu batzuetan aldagai-aldaketa egokien bidez integral arrazionaletara pasa daitezkeela, edo formula trigonometriko batzuen bidez integrakizunak berridatz daitezkeela jatorrizkoa topatzeko.

7.5.1 Aldaketa trigonometriko unibertsala

Izan bedi R parentesien artean agertzen diren aldagaien funtzio arrazionala.

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

integral trigonometrikoa kalkulatzeko, honako aldaketa hau egiten badugu,

$$\tan\frac{x}{2} = t,$$

t aldagaiaren funtzio arrazional baten integral bihurtzen da. Adieraz ditzagun $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioak $\tan\frac{x}{2}$ adierazpenaren menpe; hau da, t aldagaiaren menpe:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Gainera, $x = 2\arctan t$ denez, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ da. Horrela,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ aldaketaren bidez, $R(\sin x, \cos x)$ motako edozein funtzio integra daiteke. Horregatik, aldaketa trigonometriko unibertsala dela esan ohi da.

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ integrala kalkulatzeko, aldaketa trigonometriko unibertsala erabiliko dugu:

$$\tan\frac{x}{2} = t,\;\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Orduan,

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{1}{3+5\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2}$$

$$= \frac{1}{4}(\ln|t+2| - \ln|t-2|) + k = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan\dfrac{x}{2}+2}{\tan\dfrac{x}{2}-2}\right| + k.$$

7.5.2 Beste aldagai-aldaketa batzuk

Batzuetan, $t = \tan\dfrac{x}{2}$ aldaketak zailegiak diren funtzio arrazionaletara eramaten duenez, aldaketa unibertsalaz gain, komeni da beste aldaketa batzuk ezagutzea.

(I) $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ integraletan $\sin x = t$ aldaketa egiten bada, $\displaystyle\int R(t)\,dt$ integrala lortzen da; beraz, hemen R aurreko ataletan agertu zaigun edozein funtzio izan daiteke, arrazionala zein irrazionala.

(II) $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ integraletan $\cos x = t$ aldaketa egiten da, $-\displaystyle\int R(t)\,dt$ lortzeko.

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}\,dx$ integrala kalkulatzeko, kontuan hartzen dugu $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ dela. Orduan, $\sin x = t$ aldagai-aldaketa eginez, $\cos x\,dx = dt$ da, eta

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}\,dx = 2\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Integral irrazional horretan ikusitako aldagai-aldaketak eginez,

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{1}{2}\ln|t^2+\sqrt{1+t^4}| + k$$

lortzen da. Azkenik, $t = \sin x$ dela gogoratuz,

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}\,dx = \ln\left|\sin^2 x + \sqrt{\sin^4 x + 1}\right| + k.$$

(III) $\int R(\tan x)\,dx$ integraletan $\tan x = t$ aldaketa egiten da. Orduan, $x = \arctan t$ eta $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ dira.

(IV) Integrakizunak $R(\sin^2 x, \cos^2 x)$ forma badu; hau da $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen berretura guztiak bikoitiak badira, $\tan x = t$ aldaketa egiten da, zeren eta

$\sin^2 x$ eta $\cos^2 x$ funtzioak $\tan x$ funtzioaren menpe idatz baitaitezke, jarraian agertzen den bezala:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$
$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$
$$x = \arctan t \Longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Adibidea. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx$ integralean $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioen berretura bikoitiak agertzen direnez, $\tan x = t$ aldagai-aldaketa egin daiteke. Goian ikusitakoaren arabera,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^3} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2(1+t^2)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + k$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + k.$$

7.5.3 Formula trigonometrikoak

Batzuetan, integrakizuna formula trigonometrikoak erabiliz berridatz daiteke. Aipatuko ditugu bi kasu partikular.

(I) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ integralak, m eta n zenbakiak positibo edo nuluak eta bikoitiak izanik. Kasu horretan, honako formula trigonometriko hauek erabil ditzakegu:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \text{eta} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Adibidea. $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos^2(2x)-2\cos(2x)}{4}$ denez, eta $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$,

$$\int \sin^4 x\, dx = \frac{12x + \sin(4x) - 8\sin(2x)}{32} + k.$$

(II) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$ eta $\int \sin mx \sin nx\, dx$ integralak, non $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq n$ diren. Integral horiek erraz ebazten dira, formula trigonometriko hauek kontuan hartuz:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\big)$$
$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\big)$$
$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\big(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\big)$$

Adibidea. $\displaystyle\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{4\sin 2x - \sin 8x}{16} + k.$

7.6 Aldagai-aldaketa trigonometrikoak integral irrazional koadratikoetan

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ integral irrazional koadratikoak kalkulatzeko, ikusi dugu Eulerren aldaketak erabil daitezkeela. Hemen ikusiko dugu funtzio trigonometrikoak erabil daitezkeela erro karratua desagerrarazteko. Lehenengo eta behin, errokizunean karratu perfektua osatu behar dugu.

(i) $a > 0$ bada,

$$ax^2 + bx + c = \Big(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Polinomioak ez badu erro errealik, $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ da, eta $t = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ aldagai-aldaketa eginez eta $c - \frac{b^2}{4a} = m^2$ izendatuz,

$$\int \tilde{R}(t, \sqrt{t^2+m^2})\, dt$$

integralera ailegatzen da. Kasu honetan erabili behar dugun aldaketa $t = m\tan z$ da. Horrela,

$$t^2 + m^2 = m^2(1+\tan^2 z) = \frac{m^2}{\cos^2 z} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{t^2+m^2} = \frac{m}{\cos z},$$

eta $\displaystyle\int \hat{R}(\sin z, \cos z)\, dz$ integral trigonometriko batera heltzen da.

(ii) $a > 0$ bada baina polinomioak erro errealak baditu; hau da, $c - \frac{b^2}{4a} < 0$ bada, lehen bezala $t = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ aldagai-aldaketa egiten da, baina orain $c - \frac{b^2}{4a} = -m^2$ izendatzen dugu. Horrela,

$$\int \tilde{R}(t, \sqrt{t^2-m^2})\, dt$$

integrala lortzen da. $t = \dfrac{m}{\sin z}$ edo $t = \dfrac{m}{\cos z}$ aldaketen bidez ebazten da integral hori, zeren eta

$$t^2 - m^2 = m^2\Big(\frac{1}{\sin^2 z} - 1\Big) = m^2\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{t^2 - m^2} = \frac{m\cos z}{\sin z},$$

eta antzeko zerbait lortuko da $t = \dfrac{m}{\cos z}$ hartuz. Aurreko kasuan gertatu den bezala, funtzio trigonometriko bat lortzen da.

(iii) $a < 0$ bada, $\alpha = -a$ eginez,

$$ax^2 + bx + c = c - (\alpha x^2 - bx) = c - \frac{b^2}{4a} - \Big(\sqrt{\alpha}x - \frac{b}{2\sqrt{\alpha}}\Big)^2.$$

Kasu honetan, $c - \dfrac{b^2}{4a} > 0$ da derrigorrez (bestela, polinomioa negatiboa izango litzateke x guztietarako, eta erroa ez litzateke definiturik egongo). Beraz, $\sqrt{\alpha}x - \dfrac{b}{2\sqrt{\alpha}} = t$ aldagai-aldaketa eginez eta $c - \dfrac{b^2}{4a} = m^2$ izendatuz, honako integral honetara heltzen da

$$\int \tilde{R}(t, \sqrt{m^2 - t^2})\, dt.$$

Integral hau kalkulatzeko, $t = m\sin z$ edo $t = m\cos z$ aldaketak erabil daitezke. Lehen aukerarekin,

$$m^2 - t^2 = m^2(1 - \sin^2 z) = m^2\cos^2 z \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{m^2 - t^2} = m\cos z,$$

eta $t = m\cos z$ aukeratzen badugu, $\sqrt{m^2 - t^2} = m\sin z$ gelditzen da. Bi kasuetan, funtzio trigonometriko baten integral batera ailegatzen da.

Adibidea. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx$ integrala kalkulatuko dugu aldagai-aldaketa trigonometriko baten bidez. Lehenengo eta behin, integrakizunean osatuko dugu karratu perfektu bat:

$$x^2 + 4x + 10 = (x+2)^2 - 4 + 10 = (x+2)^2 + (\sqrt{6})^2.$$

Beraz, $x + 2 = t = \sqrt{6}\tan z$ aldagai-aldaketa egingo dugu. Horrela,

$$x^2 + 4x + 10 = 6\tan^2 z + 6 = \frac{6}{\cos^2 z} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{x^2+4x+10} = \frac{\sqrt{6}}{\cos z}.$$

Gainera,

$$dx = \sqrt{6}\frac{dz}{\cos^2 z}.$$

Integralean ordezkatuz,

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{5(\sqrt{6}\tan z - 2) + 3}{\dfrac{\sqrt{6}}{\cos z}} \frac{\sqrt{6}}{\cos^2 z} dz$$

$$= 5\sqrt{6}\int \frac{\tan z}{\cos z}dz - 7\int \frac{dz}{\cos z}.$$

Integral trigonometrikoak ebatziz eta aldagai-aldaketa deseginez,

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + k.$$

7.7 Ariketak

7.1. Kalkula itzazu honako integral hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ *Em.:* $\displaystyle\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ *Em.:* $\ln|\ln x|+k$

(iii) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ *Em.:* $\arctan e^x+k$

(v) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx,\ (e^x=3\sin t)$ *Em.:* $\arcsin\frac{e^x}{3}+k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{4}\arctan^2\frac{x}{2}+k$

(vii) $\displaystyle\int x\ln(x+1)\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{(x^2-1)}{2}\ln(x+1)-\frac{(x-1)^2}{4}+k$

(viii) $\displaystyle\int \ln(x+1)\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ *Em.:* $\sqrt{x+1}\,(2\ln(x+1)-4)+k$

(ix) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos bx+b\sin bx)+k$

(x) $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx$ *Em.:* $-e^{-x}(x+1)+k$

(xi) $\displaystyle\int \sin x\ln(\tan x)\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\cos x\ln(\tan x)+\ln\Big(\tan\frac{x}{2}\Big)+k$

(xii) $\displaystyle\int \frac{4x^3+2x+1}{e^x}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{4x^3+12x^2+26x+27}{e^x}+k$

(xiii) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}+k$

(xiv) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{(x^2+1)\arctan x}{2}-\frac{x}{2}+k$

(xv) $\displaystyle\int (e^x-\cos x)^2\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}-e^x(\sin x+\cos x)+k$

7.2. Kalkula itzazu integral arrazional hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{x^5+3x+1}{x-1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+5\ln|x-1|+k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{3}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+k$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{6}\ln\Big|\frac{(x-1)^3}{x^3-1}\Big| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-3x+2}\,dx$ *Em.:* $x - 4\ln|x-1| + 7\ln|x-2| + k$

(v) $\displaystyle\int \frac{(x+2)(x^2+5)}{(x^2+2x+1)^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\ln|x+1| + \frac{x^2-3}{(x+1)^3} + k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{3}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{(x-1)^2}{x^2+2}\Big| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + k$

(vii) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2(x^2+x+1)^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\ln\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|} - \frac{1}{x} - \frac{7}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$
$\displaystyle-\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + k$

(viii) $\displaystyle\int \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$, $(e^x = t)$ *Em.:* $x - 2\ln(1+e^x) + k$

(ix) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{2}{9}\ln\Big|\frac{x-2}{x+1}\Big| - \frac{2x-1}{6(x+1)^2} + k.$

(x) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + k$

7.3. Kalkulatu integral irrazional hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle 6\Big(\frac{x\sqrt[6]{x}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x}\Big)$
$-3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + 6\arctan\sqrt[6]{x} + k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{8}{9}x^2\sqrt[4]{x} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + k$

(iii) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\Big| + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{x^2-x-2}{2} + k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ *Em.:* $-2\arctan\sqrt{1-x} + k$

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ *Em.:* $\displaystyle\ln\Big|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\Big| + k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{3+x}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\sqrt{1-x^2} + 4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{2(1+x)}}$
$\displaystyle-6\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + k$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ *Em.:* $\ln\big|x+\sqrt{x^2+4}\big| + k$

(viii) $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{(x-1)\sqrt{2x-x^2}}{2} - \arctan\sqrt{\frac{2-x}{x}} + k$

(ix) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{3}{4}\ln\Big|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}-1\Big| - \frac{16}{27}\ln\Big|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}-2\Big|$
$\displaystyle -\frac{17}{108}\ln\Big|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+1\Big| - \frac{5}{8}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} - \frac{x+1}{6(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})^2}+k$

(x) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{9}{2}\ln\big|\sqrt{x^2-9}-x\big| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}+k$

(xi) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle -\sqrt{1-x^2}+\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3}+k$

(xii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{1}{3}\ln\big|x^3+\sqrt{x^6+1}\big|+k$

(xiii) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^6\sqrt{1+x^3}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{2}{9}\frac{2x^3-1}{x^3}\sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}}+k$

(xiv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ *Em.:* $\displaystyle -\frac{2\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}\right)^2}{\sqrt{x}}+k$

(xv) $\displaystyle\int 2x^2(4x+1)^{-5/2}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{1+6x+6x^2}{6(1+4x)^{3/2}}$

(xvi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ *Em.:* $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{1+x^3}} - \frac{1}{2}\ln\left|x-\sqrt[3]{x^3+1}\right|+k$

(xvii) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}(x^2-2)+k$

(xviii) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{\sqrt{1+2x^2}}{4}+\frac{1}{4\sqrt{1+2x^2}}+k$

7.4. Kalkulatu integral trigonometriko hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{(\cos x-2)^2}{2}+3\ln|\cos x+2|+k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ *Em.:* $\displaystyle \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+k$

(iii) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+k$

(iv) $\displaystyle\int \sin mx\sin nx\,dx,\ m\neq n$ *Em.:* $\displaystyle \frac{1}{2}\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{1}{2}\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+k$

(v) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$ *Em.:* $\displaystyle -\frac{1}{3\tan^3 x}+k$

(vi) $\displaystyle\int \tan^2 x\sec x\,dx$ *Em.:* $\displaystyle \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+\frac{1}{2}\tan x\sec x+k$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$ *Em.:* $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+k$

(viii) $\displaystyle\int \tan x \, dx$ *Em.:* $\ln\left|\dfrac{1}{\cos x}\right| + k$

(ix) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$ *Em.:* $\dfrac{3}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt[3]{\sin x}+1}{\sqrt[3]{\sin x}-1}\right| + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\sin x}+1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\sin x}-1}{\sqrt{3}} + k$$

(x) $\displaystyle\int \cos^5 x \, dx$ *Em.:* $\dfrac{\sin^5 x}{5} - \dfrac{2\sin^3 x}{3} + \sin x + k$

(xi) $\displaystyle\int \sin^3\left(\frac{x}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$ *Em.:* $\dfrac{\sin^8(x/2)}{4} - \dfrac{2\sin^6(x/2)}{3} + \dfrac{\sin^4(x/2)}{2} + k$

(xii) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\, dx$ *Em.:* $\ln|2+\cos x| + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + k$

(xiii) $\displaystyle\int \cos^2(ax)\cos^2(bx)\, dx$ *Em.:* $\dfrac{x}{4} + \dfrac{b\sin(2ax) + a\sin(2bx)}{8ab}$

$$+\frac{(a-b)\sin\big(2(a+b)x\big) + (a+b)\sin\big(2(a-b)x\big)}{16(a^2-b^2)} + k$$

(xiv) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx$ *Em.:* $\dfrac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + k$

(xv) $\displaystyle\int \frac{3\tan^2 x + 1}{2\tan x}\, dx$ *Em.:* $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}\right| + k$

7.5. Kalkulatu honako integral hauek:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ *Em.:* $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + k$

(ii) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$ *Em.:* $x - \tan\dfrac{x}{2} + k$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}\, dx$ *Em.:* $-\sqrt{3-x^2} + k$

(iv) $\displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{1+e^{2x}}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx$ *Em.:* $\dfrac{3}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt[6]{1+e^{2x}}-1}{\sqrt[6]{1+e^{2x}}+1}\right| + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}+1}{\sqrt{1+e^{2x}}-1}\right|$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[6]{1+e^{2x}}+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[6]{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{3}} + k$$

(v) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\, dx$ *Em.:* $\dfrac{1}{8}\ln(1+4x^2) - \dfrac{1}{3}\big(\sqrt{\arctan 2x}\big)^{3/2} + k$

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ *Em.:* $2\sqrt{x+1} - 2\ln|\sqrt{x+1}+1| + k$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ *Em.:* $\tan x + \dfrac{\tan^3 x}{3} + k$

(viii) $\displaystyle\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$ *Em.:* $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}+k$

(ix) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$ *Em.:* $-\dfrac{2x+5}{2(x^2+2x+3)}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+k$

(x) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$ *Em.:* $\dfrac{\cos x}{2}-\dfrac{\cos 5x}{10}+k$

(xi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$ *Em.:* $3\arctan\sqrt[3]{x}+k$

(xii) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{3\sin^2 x-1}{3\sin^3 x}+k$

(xiii) $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ *Em.:* $x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+k$

(xiv) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2\,dx$ *Em.:* $3x\sqrt[3]{x}+\dfrac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7}+\dfrac{24x\sqrt[6]{x^5}}{11}+k$

(xv) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$ *Em.:* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}+k$

(xvi) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx$ *Em.:* $\dfrac{x^2}{2}+\ln|x+3|+k$

(xvii) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ *Em.:* $2\sin\sqrt{x}+k$

(xviii) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ *Em.:* $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+k$

(xix) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx$ *Em.:* $\dfrac{x\,(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))}{2}+k$

(xx) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$ *Em.:* $\tan x-x+k$

(xxi) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ *Em.:* $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+k$

(xxii) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ *Em.:* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+k$

(xxiii) $\displaystyle\int x^2\arctan 3x\,dx$ *Em.:* $\dfrac{x^3\arctan 3x}{3}-\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{\ln(1+9x^2)}{162}+k$

(xxiv) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ *Em.:* $-\dfrac{1+2\ln|x|}{4x^2}+k$

(xxv) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^4-1}$ *Em.:* $x+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{1}{2}\arctan x+k$

(xxvi) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$ *Em.:* $-\cos(\ln x)+k$

(xxvii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\arctan x\;dx$ *Em.:* $x\arctan x-\dfrac{\arctan^2 x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln|1+x^2|+k$

(xxviii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x^4}}{x-\sqrt{1+x^4}}\right| + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} + k$

(xxix) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x-1}}$ *Em.:* $2\arctan\left(\sqrt{x^2+x-1}-x-1\right)+k$

(xxx) $\displaystyle\int \sin^4 x\ \cos^4 x\ dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{x}{32}-\frac{\sin 4x}{128}+k$

(xxxi) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4x-4}}$ *Em.:* $\displaystyle\arctan\frac{\sqrt{x^2-4x-4}-x}{2}+k$

(xxxii) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\sin x}$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan(x/2)-2}{2\tan(x/2)-1}\right|+k$

(xxxiii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+k$

(xxxiv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}$ *Em.:* $\displaystyle-\frac{1}{2\tan x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+k$

(xxxv) $\displaystyle\int \frac{\sin x\ dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$ *Em.:* $\sqrt{2}\ln\left|\sqrt{\sqrt{2}+\cos x}+\sqrt{\sqrt{2}-\cos x}\right|+k$

(xxxvi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x}}$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{2}\arctan\sqrt[3]{\tan^2 x}-\frac{1}{6}\ln\left|\sqrt[3]{\tan^4 x}-\sqrt[3]{\tan^2 x}+1\right|$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\tan^2 x}-1}{\sqrt{3}}+k$$

(xxxvii) $\displaystyle\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+2}{\sin x-2}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}}+k$

(xxxviii) $\displaystyle\int \sin^5 x\ dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{2\cos^3 x}{3}-\cos x-\frac{\cos^5 x}{5}+k$

(xxxix) $\displaystyle\int \sqrt{2ax-x^2}\ dx$ *Em.:* $\displaystyle\frac{(x-a)\sqrt{2ax-x^2}}{2}-a^2\arctan\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}+k$

(xl) $\displaystyle\int \sqrt{1-2x-x^2}\ dx$ *Em.:* $\displaystyle-2\arctan\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$

$$+\frac{10x^2+12x\sqrt{1-2x-x^2}-12x}{(\sqrt{1-2x-x^2}-1)^2+x^2}+\frac{4x^4}{\left((\sqrt{1-2x-x^2}-1)^2+x^2\right)^2}+k$$

8. gaia

Integrazioa: integral mugatuaren aplikazio geometrikoak

Atal honetan, integral mugatuaren erabilera batzuk aipatuko ditugu. Riemannen integrala nola definitu den kontuan izanda, argi dago azaleren kalkulurako erabili ahal izango dugula, baina hori ez da integral mugatuaren aplikazio bakarra.

8.1 Azaleraren kalkulua koordenatu kartesiarretan

Izan bedi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua, eta, ondorioz, integragarria. Gogora dezagun

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf\{U(f, P)\ :\ P \in \mathcal{P}([a, b])\} = \sup\{L(f, P)\ :\ P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

dela. Izan bedi A f-ren grafikoak, $x = a$, $x = b$ zuzenek eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera.

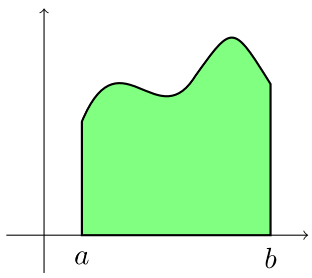
$f(x) \geq 0$ bada $x \in [a, b]$ guztietarako, integralaren definizioagatik, honako hau dugu:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

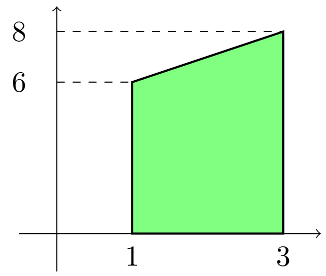
Adibidea. Kalkula dezagun $f(x) = x + 5$ funtzioaren grafikoak, OX ardatzak eta $x = 1$, $x = 3$ zuzenek mugatzen duten eskualdearen azalera, 8.2 irudia.

$$A = \int_1^3 (x + 5)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{9}{2} + 15 - \frac{1}{2} - 5 = 14.$$

Baldin $f(x) \leq 0$ bada $x \in [a, b]$ guztietarako, orduan, A eta $x = a$, $x = b$ zuzenek, OX ardatzak eta $-f$ funtzioaren grafikoak mugatzen duten eskualdearen azalera



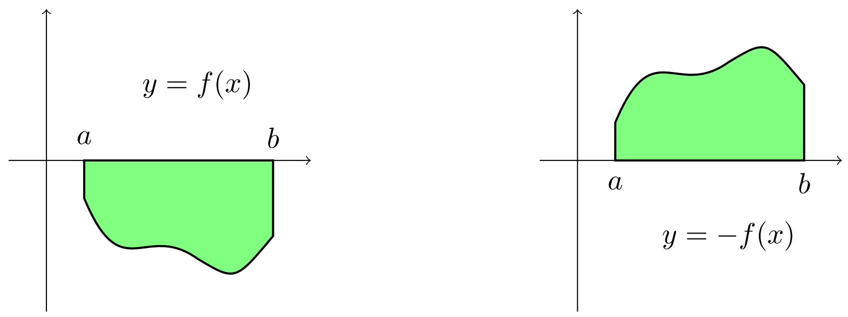
8.1 irudia. Funtzio positibo batek eta ardatz horizontalak mugatzen duten azalera.



8.2 irudia. $f(x) = x + 5$ funtzioaren grafikoa.

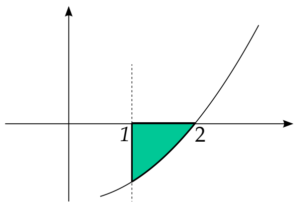
berdinak dira, $-f$ funtzio ez-negatiboa delarik; beraz,

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx.$$



8.3 irudia. Balio negatiboak hartzen dituen funtzio baten grafikoak eta ardatz horizontalak osatzen duten eremuaren azalera.

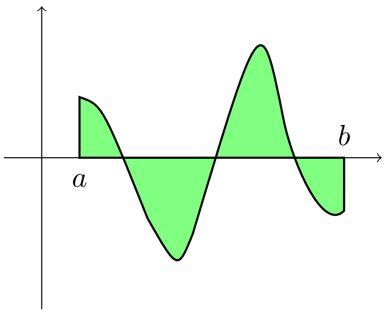
Adibidea. Kalkulatuko dugu $f(x) = x^2 - 4$ funtzioaren grafikoak, OX ardatzak eta $x = 1$ zuzenak mugatzen duten eskuinaldeko eskualdearen azalera, 8.4 irudia.



8.4 irudia. $f(x) = x^2 - 4$ funtzioaren grafikoa.

$$A = -\int_1^2 (x^2 - 4)\,dx = \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

f funtzioaren zeinua aldi kopuru finitu batean aldatzen baldin bada $[a, b]$ tartean, orduan, f-k mugatzen duen eskualdearen azalera kalkulatzeko integrazioa tarteka egin beharko dugu. f funtzioa $[a, b]$ tartean jarraitua bada, orduan, zeinu batetik bestera pasatzeko, f funtzioak OX ardatza gutxienez behin moztu beharko du, Bolzanoren teoremaren arabera. Beraz, azalera kalkulatzeko eman beharko dugun lehenengo pausoa f funtzioak $[a, b]$ tartean dituen erroak topatzea izango da.



8.5 irudia. Balio positiboak eta negatiboak hartzen dituen funtzio baten grafikoak eta ardatz horizontalak osatzen duten eremuaren azalera.

Adibide gisa, demagun f funtzio jarraitu batek $[a, b]$ tartean a_1, a_2, a_3 erroak dituela, 8.5 irudian bezala.

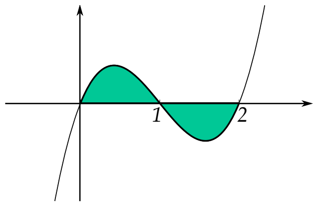
Orduan, f funtzioak $[a, b]$ tartearen gainean mugatzen duen A azalera honako modu honetan kalkulatzen da:

$$A = \int_a^{a_1} f(x)\,dx - \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx - \int_{a_3}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beraz, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua bada, bere grafikoak, $x = a$, $x = b$ zuzenek eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera honako formula honen bidez kalkulatzen da:

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{8.1.1}$$

Adibidea. Izan bedi $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Kalkula dezagun f-ren grafikoak eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera, 8.6 irudia. (8.1.1) formula



8.6 irudia. $f(x) = x(x-1)(x-2)$ funtzioaren grafikoa.

aplikatuz,

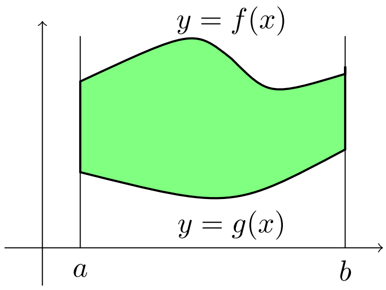
$$\begin{aligned} A = \int_0^2 |f(x)|\,dx &= \int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2)\,dx \\ &= \Big(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big)\Big|_0^1 - \Big(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big)\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{4} - 1 + 1 - \Big(4 - 8 + 4 - \frac{1}{4} + 1 - 1\Big) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Azter dezagun, orain, tarte baten gainean bi kurbek mugatzen duten eskualdearen azalera.

Demagun f eta g funtzio integragarriak direla $[a,b]$ tartean, $f(x) \geq g(x)$ izanik, $x \in [a,b]$ guztietarako. Orduan, f eta g funtzioen grafikoek eta $x = a$ eta $x = b$ zuzenek mugatzen duten eskualdearen azalera, 8.7 irudia, honela kalkulatzen da:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

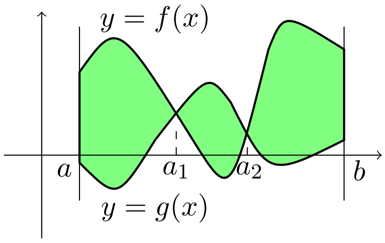
Demagun, orain, f eta g $[a,b]$ tartean definitutako funtzio jarraituak direla, elkar



8.7 irudia. Bi funtzioren grafikoek mugatzen duten eremuaren azalera.

ebakitzen dutelarik. Mugatzen duten eskualdearen azalera kalkulatzeko, lehenengo eta behin, $[a,b]$ tarteko f eta g funtzioen arteko ebaki-puntuak topatu behar dira. Ondoren, integrazioa tarteka egingo dugu, puntu horiek integrazio-mugak direlarik.

Adibidez, demagun f eta g $[a,b]$ tartean definituta daudela, eta, 8.8 irudian agertzen den moduan, a_1, a_2 puntuetan elkar ebakitzen dutela. Orduan, f-k eta g-k



8.8 irudia. Bi funtzioren grafikoek mugatzen duten eremuaren azalera.

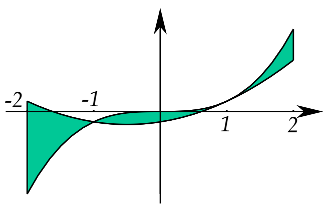
mugatutako eskualdearen azalera honako era honetan kalkulatuko dugu:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^{a_1} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{a_1}^{a_2} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{a_2}^{b} (f(x) - g(x))\, dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Beraz, orokorrean, honako hau da $[a,b]$ tartearen gainean f eta g funtzioen grafikoek mugatzen duten eskualdearen azalera:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{8.1.2}$$

Adibidea. Kalkula dezagun $f(x) = x^3$ eta $g(x) = x^2 + x - 1$ funtzioen grafikoek $[-2,2]$ tartean mugatzen duten eskualdearen azalera, 8.9 irudia. Lehenengo eta



8.9 irudia. $f(x) = x^3$ eta $g(x) = x^2 + x - 1$ funtzioen grafikoek $[-2,2]$ tartean mugatzen duten eskualdea.

behin, ebaki-puntuak kalkulatu behar ditugu,

$$x^3 = x^2 + x - 1 \Longleftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ edo } x = -1$$

$[-2,-1]$ tartean $g(x) \geq f(x)$ da, eta $[-1,2]$ tarte osoan, $g(x) \leq f(x)$. $x = 1$ ukitze-puntua da, ez ebaki-puntua. Orduan, (8.1.2) formularen arabera,

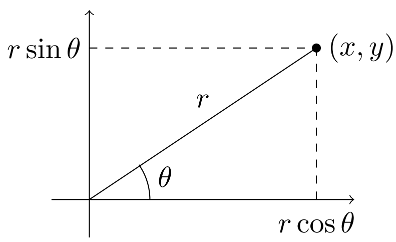
$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x - 1 - x^3)\, dx + \int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 - x + 1)\, dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{2} \\
&= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 + 2 - 4\right) \\
&\quad + \left(4 - \frac{8}{3} - 2 + 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{11}{12} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{11}{12} = \frac{35}{6}.
\end{aligned}$$

8.2 Azaleraren kalkulua koordenatu polarretan

Batzuetan, koordenatu kartesiarrak erabili beharrean, kurba bat bere ekuazio polarraren bidez eman daiteke. Gogora dezagun, lehenengo eta behin, zer diren planoko puntuen koordenatu polarrak.

Definizioa. Izan bedi $(x, y) \neq (0, 0)$ planoko puntua. (x, y)-ren koordenatu polarrak (r, θ) bikotearen bidez adieraziko ditugu, eta honela definitzen dira: r (x, y)-tik jatorrirako distantzia da, eta θ jatorria eta (x, y) puntua lotzen dituen zuzenkiak eta ardatzerdi horizontal positiboak osatzen duten angelua da.

$r > 0$ eta $\theta \in [0, 2\pi)$ dira.

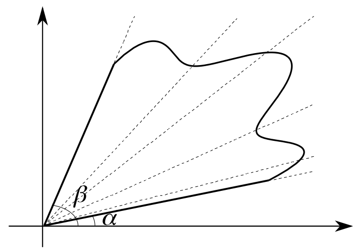


8.10 irudia. Planoko (x, y) koordenatu kartesiarrak dituen puntuaren koordenatu polarrak, (r, θ).

Kontuan izanda x, y triangelu errektangeluar baten katetoak direla, hipotenusa r izanik,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x};$$
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Azter dezagun nola kalkulatu koordenatu polarretan emandako sektore baten azalera. Izan bitez $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ eta $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. $r = f(\theta)$ ekuazioko kurbak eta $\theta = \alpha$ eta $\theta = \beta$ erradio-bektoreek mugatutako sektorearen azalera kalkulatu nahi dugu, 8.11 irudia. Izan bedi $P = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n = \beta\}$ $[\alpha, \beta]$



8.11 irudia. Koordenatu polarretan emandako kurba batek mugatzen duen eskualdearen azalera.

tarteko partiketa. Partiketa horrek definitzen duen i-garren sektorean puntu bat aukeratzen dugu, $\theta_i^* \in (\theta_{i-1}, \theta_i)$, eta hartzen dugu $r_i^* = f(\theta_i^*)$ erradioa eta $\theta_i - \theta_{i-1}$ angelu zentrala duen sektore zirkularra. Sektore horren azalera $\dfrac{1}{2}\left(r_i^*\right)^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ da. Partiketak definitzen dituen sektore guztien azaleren batura eginez,

$$A_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(r_i^*\right)^2(\theta_i - \theta_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(f(\theta_i^*)\big)^2(\theta_i - \theta_{i-1})$$

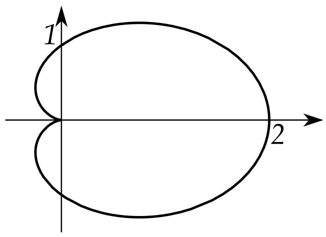
dugu. A_P f-ren P partiketari dagokion Riemannen batura bat da; beraz, f integragarria denez, $\Delta P = \max\{\theta_1 - \theta_0, \ldots, \theta_n - \theta_{n-1}\}$ izendatuz,

$$\lim_{\Delta P \to 0} A_P = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(\theta))^2 \, d\theta$$

da. Beraz, f jarraitua bada $[\alpha, \beta]$ tartean, $r = f(\theta)$ ekuazioaren bidez koordenatu polarretan emandako sektorearen azalera honako formula honen bidez kalkulatzen da:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(f(\theta)\big)^2 \, d\theta. \tag{8.2.1}$$

Adibidea. Izan bedi $r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, non $r(\theta) = 1 + \cos\theta$ den. Kalkulatuko dugu kurba horrek mugatzen duen eremuaren azalera, 8.12 irudia. Simetriagatik, kalkula dezakegu goiko planoerdian geratzen den zatiaren azalera, eskatzen dena horren



8.12 irudia. $r = 1 + \cos\theta$ ekuazioko kardioidearen grafikoa.

bikoitza izango baita. (8.2.1) formula erabiliz,

$$\begin{aligned} A =& 2\frac{1}{2}\int_0^\pi \big(r(\theta)\big)^2\,d\theta = \int_0^\pi (1+\cos\theta)^2\,d\theta \\ =& \int_0^\pi (1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)\,d\theta \\ =& \int_0^\pi \Big(1 + \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 2\cos\theta\Big)\,d\theta \\ =& \Big(\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + 2\sin\theta\Big)\Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

8.3 Arku-luzera koordenatu kartesiarretan

Izan bedi $y = f(x)$ ekuazioaren bidez koordenatu kartesiarretan emandako kurba. Kalkulatu nahi dugu $x = a$ eta $x = b$ zuzenen artean dagoen kurba horren luzera, L.

Izan bedi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ $[a,b]$ tarteko partiketa, eta izenda dezagun $P_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0,\ldots,n$, 8.13 irudia. Izan bedi Δs_i P_{i-1} eta P_i puntuak lotzen dituen zuzenkiaren luzera.

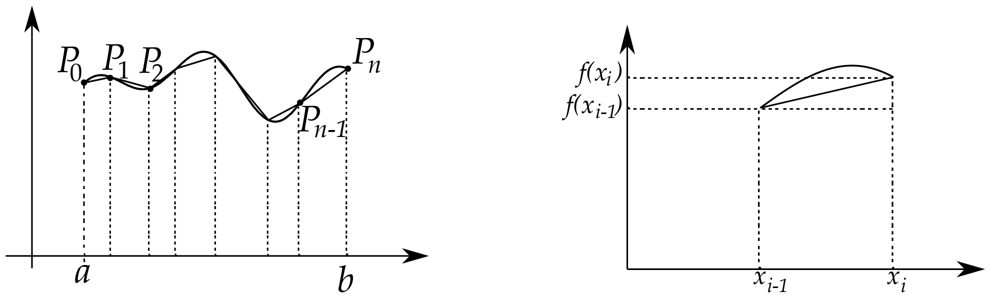
Orduan, P_i puntuak lotzen dituen lerro poligonalaren luzera honako hau da:

$$L_P = \sum_{i=1}^n \Delta s_i.$$

f eta f' jarraituak badira $[a,b]$ tartean, orduan, $i = 1,\ldots,n$ guztietarako, i-garren zuzenkiaren luzera $\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ da. Batez besteko balioaren 5.3.4 teoremaren arabera, existitzen da $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ non $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ den; beraz,

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i)^2)}.$$

L_P adierazpena $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ funtzioaren Riemannen batura bat da. Gainera, f' jarraitua denez, $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ ere jarraitua da, eta, ondorioz, integragarria. Or-



8.13 irudia. Kurbaren luzera lerro poligonal baten luzeraren bidez hurbil daiteke.

duan,

$$L = \lim_{\Delta P \to 0} L_P = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx. \tag{8.3.1}$$

Adibidea. Izan bedi $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$. Kalkulatuko dugu $x = 1$ eta $x = 3$ zuzenen artean geratzen den f-ren grafikoaren luzera. (8.3.1) formularen arabera, luzera hori honako hau da:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx &= \int_1^3 \sqrt{1 + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\Big)^2}\, dx \\
&= \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2}}\, dx \\
&= \int_1^3 \sqrt{\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\Big)^2}\, dx \\
&= \int_1^3 \frac{x^2}{2}\, dx + \int_1^3 \frac{1}{2x^2}\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 - \frac{1}{2x}\Big|_1^3 = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

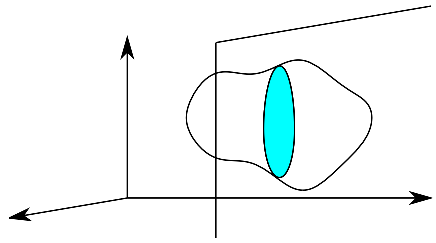
8.4 Bolumenaren kalkulua. Biraketa-gorputzak

Izan bedi $T \subset \mathbb{R}^3$ $x = a$ eta $x = b$ planoen artean geratzen den hiru dimentsioko gorputza. Izan bedi $x \in [a, b]$ eta har dezagun x puntutik pasatzen den eta OYZ planoarekiko paraleloa den planoa. T gorputza plano horrekin ebakitzen denean lortzen den sekzioaren azalera $A(x)$ izendatuko dugu. Horrela,

$$\begin{aligned} A\colon [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\ \to\ A(x) \end{aligned}$$

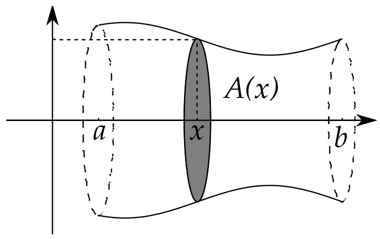
funtzioa dugu definituta. A funtzio jarraitua bada $[a, b]$ tartean, orduan, T gorputzaren bolumena honela kalkulatzen da:

$$B(T) = \int_a^b A(x)\, dx.$$



8.14 irudia. Hiru dimentsioko gorputz baten bolumena Cavalieri-ren printzipioaren bidez kalkula daiteke, hots, sekzio perpendikularren azaleren integrala erabil daiteke.

Definizioa. Izan bitez $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua eta T f-ren grafikoa OX ardatzarekiko biratzean lortzen den gorputza. T *biraketa-gorputza* dela diogu.



8.15 irudia. Biraketa-gorputza.

Biraketa-gorputzak OYZ planoarekiko paraleloak diren planoekin ebakitzean sortzen diren sekzioak zirkuluak dira, 8.15 irudia; beraz,

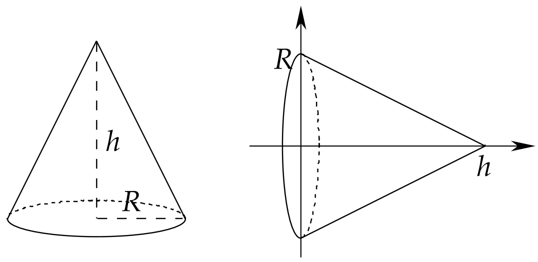
$$A(x) = \pi\big(f(x)\big)^2, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Orduan, hau da f-ren grafikoak sortutako biraketa-gorputzaren bolumena:

$$B(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx. \tag{8.4.1}$$

Adibidea. Kalkula dezagun kono zilindriko baten bolumena, oinarria R erradioko zirkulu bat izanik, eta altuera, h. Bolumena ez da aldatzen konoa biratzen badugu, haren ardatza OX ardatzaren gainean gera dadin, 8.16 irudia; beraz, R erradioko eta h altuerako kono zilindrikoa lor daiteke $(h,0)$ eta $(0,R)$ puntuetatik pasatzen den zuzenkia OX ardatzarekiko biratzean.

$(0,R)$ eta $(0,h)$ puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa $y = R\Big(1 - \dfrac{x}{h}\Big)$ da. Beraz, konoa $f(x) = R\Big(1 - \dfrac{x}{h}\Big)$ funtzioaren $[0,h]$ tarteko grafikoak sortzen duen



8.16 irudia. Konoa biraketa-gorputza da.

biraketa-gorputza da, eta, 8.4.1) formularen arabera, bolumena

$$
\begin{aligned}
B &= \pi \int_0^h \left(R\left(1 - \frac{x}{h}\right)\right)^2 dx \\
&= \pi R^2 \int_0^h \left(1 + \frac{x^2}{h^2} - \frac{2x}{h}\right) dx \\
&= \pi R^2 \left(x + \frac{x^3}{3h^2} - \frac{x^2}{h}\right)\Bigg|_0^h \\
&= \pi R^2 \left(h + \frac{h^3}{3h^2} - \frac{h^2}{h}\right) = \frac{\pi R^2 h}{3}.
\end{aligned}
$$

8.5 Ariketak

8.1. Kalkula itzazu jarraian agertzen diren funtzioen bidez definitutako eskualdeen azalerak:

(i) $xy = a^2$ hiperbolak eta OX ardatzak, $a > 0$ izanik eta $x \in [a, 2a]$.

(ii) $y = 4 - x^2$ parabolak eta OX ardatzak mugatutako eskualdea.

(iii) $y^2 = 9x$ eta $y = 3x$ kurben arteko eremua.

(iv) $y^2 = 2px$ eta $x^2 = 2py$ parabolen arteko eremua, $p > 0$ izanik.

(v) $y = x^3$, $y = 2x$ eta $y = x$ kurbek definitzen duten eremua.

(vi) $y = \cos x$, $y = 0$, $x \in [0, 2\pi]$.

(vii) $xy = a$, $xy = 2a$, $y = x$ eta $y = 2x$ kurben arteko eremua, $a > 0$ izanik.

(viii) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ eta $y = x^3$ kurbek mugatzen duten eskualdearen azalera, $x \geq 0$ izanik.

(ix) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ parabolek eta $y = 2x$ zuzenak mugatzen duten eskualdearen azalera.

Em.: (i) $a^2 \ln 2$; (ii) $\dfrac{32}{3}$; (iii) $\dfrac{1}{2}$; (iv) $\dfrac{4p^2}{3}$; (v) $\dfrac{3}{2}$; (vi) 4; (vii) $a \ln 2$, (viii) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{6}$, (ix) 4.

8.2. Kalkulatu polarretan adierazitako kurba hauek mugatzen dituzten azalerak:

(i) $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ polarretan definitutako lemniskata.

(ii) $\rho = a(1 - \cos\theta)$ polarretan definitutako kardioidea, $a > 0$ izanik.

(iii) $\rho = a \sin 3\theta$ polarretan definitutako hiru hostotako larrosa, non $a > 0$ den.

(iv) $\rho = 2 + \sin\theta$ kurba.

Em.: (i) a^2; (ii) $\dfrac{3\pi a^2}{2}$; (iii) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; (iv) $\dfrac{9\pi}{2}$.

8.3. Kalkulatu polarretan emandako bi kurben arteko azalera hauek:

(i) $\rho = 2\cos\theta$ ekuazioa duen zirkunferentziaren barruan baina $\rho = 1$ zirkunferentziaren kanpoan geratzen den eskualdearen azalera.

(ii) $\rho = 1 + \cos\theta$ kurbaren barrualdean baina $\rho = 1 - \cos\theta$ kurbaren kanpoaldean geratzen den eskualdearen azalera.

(iii) $\rho = 1 - \sin\theta$ eta $\rho = \sin\theta$ kurben artean geratzen den eskualdearen azalera.

Em.: (i) $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) 4; (iii) $\dfrac{7\pi}{12} - \sqrt{3}$.

8.4. Kalkula itzazu ematen diren funtzioen grafikoen arku-luzerak, agertzen diren tarteetan:

(i) $y = \ln x$, $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$. *Em.:* $1 + \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{3}{2}$

(ii) $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$. *Em.:* $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

(iii) $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$. *Em.:* $\ln(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}$

8.5. Hiru dimentsioko gorputz baten oinarria $y = x^2$ eta $y = 4$ kurbek osatzen duten eremua da. Kalkula ezazu gorputzaren bolumena, OX ardatzarekiko perpendikularrak diren sekzioak karratuak baldin badira.

Em.: $\dfrac{512}{15}$

8.6. Kalkula itzazu jarraian ematen diren funtzioen grafikoak, OX ardatzarekiko biratzean lortzen diren biraketa-gorputzen bolumenak:

(i) $y^2 = 2px$, $x \in [0, a]$, $p > 0$. *Em.:* $\pi p a^2$

(ii) $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$. *Em.:* $\dfrac{\pi^2}{2}$

(iii) $y = 2x$, $y = x$, $x \in [0, 1]$. *Em.:* π

(iv) $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $x \in [0, 1]$. *Em.:* $\dfrac{\pi}{6}$

(v) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $a < b$. *Em.:* $2a^2 b\pi^2$

8.7. Kalkula ezazu OX ardatzak eta $y = ax - x^2$, $(a > 0)$, parabolak mugatzen duten eskualdea OX ardatzarekiko biratzerakoan lortzen den biraketa-gorputzaren bolumena.

Em.: $\dfrac{\pi a^2}{30}$

8.8. r erradioko esfera bat bi plano paralelorekin ebakitzen da, bata ekuatorearen gainetik a unitatera, eta bestea ekuatorearen azpitik b unitatera. Kalkula ezazu bi plano horien artean geratzen den esferaren zatiaren bolumena, $0 < a, b < r$ izanik.

Em.: $\pi r^2(a + b) - \dfrac{\pi}{3}(a^3 + b^3)$.

9. gaia

Integrazioa: integral inpropioak

Funtzio baten integral mugatua definitzeko beharrezkoa da funtzioaren definiziotartea itxia eta bornatua izatea, eta funtzioa bera bornatua izatea. Baldintza horietako bat edo biak ez badira betetzen, funtzioaren integral inpropioa definitzen da, integral mugatuen limite baten bidez.

Ikusiko denez, integral inpropioen teoriak eta zenbaki-serieenak antzekotasunak dituzte. Orokorrean, zaila edo ezinezkoa izango da integral inpropioen balioak kalkulatzea, eta integral inpropioa finitua den ala ez ziurtatzen dituzten irizpideak eman beharko dira, zenbaki errealen serieen gaian egin zen bezala.

9.1 Integral inpropioak. Definizioak eta adibideak

Definizioa. (i) Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, eta $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa $[a, y]$ tartean integragarria, $y \in (a, b)$ guztietarako. f-ren $[a, b)$ tarteko *integral inpropioa* $\int_a^b f(x)\,dx$ ikurraren bidez adieraziko dugu, eta honela definituko:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx.$$

Limite hori zenbaki erreala bada, integral inpropioa konbergentea dela diogu, eta f $[a, b)$ tartean integragarria.

(ii) Izan bitez $a \in \mathbb{R}$ eta $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funtzioa $[a, y]$ tartean integragarria, $y > a$ guztietarako. f-ren $[a, +\infty)$ tarteko *integral inpropioa* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ikurraren bidez adieraziko dugu, eta honela definituko:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y \to +\infty} \int_a^y f(x)\,dx.$$

Limite hori zenbaki erreala bada, integral inpropioa konbergentea dela diogu, eta f $[a, +\infty)$ tartean integragarria.

(iii) Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, eta $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa $[z, b]$ tartean integragarria, $z \in (a, b)$ guztietarako. f-ren $(a, b]$ tarteko *integral inpropioa* $\int_a^b f(x)\,dx$ ikurraren bidez adierazten da, eta honela definituta dago:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)\,dx.$$

Limite hori existitzen bada, integral inpropioa konbergentea dela diogu, eta f $(a, b]$ tartean integragarria.

(iv) Izan bitez $b \in \mathbb{R}$ eta $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ funtzioa $[z, b]$ tartean integragarria, $z < b$ guztietarako. f-ren $(-\infty, b]$ tarteko *integral inpropioa* $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ ikurraren bidez adierazten da, eta honela definituta dago:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^b f(x)\,dx.$$

Limite hori existitzen bada, integral inpropioa konbergentea dela diogu, eta f $(-\infty, b]$ tartean integragarria.

(v) Izan bedi $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ funtzioa, $a, b \in \mathbb{R}$ edo infinituak izanik. f (a, b) tartean integragarria dela diogu, baldin eta existitzen bada $c \in (a, b)$, non f integragarria den $(a, c]$ eta $[c, b)$ tarteetan. Kasu horretan,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Oharrak. (i) Izan bitez $a.b \in \mathbb{R}$, $a < b$, eta $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ funtzio integragarria $[a, b)$ tartean. $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$ bada, f birdefini daiteke $x = b$ puntuan, limite horren balioaren bidez, eta funtzioa integragarria izango da $[a, b]$ tarte itxi eta bornatuan; beraz, $\int_a^b f(x)\,dx$ integral mugatua izango da, ez inpropioa.

Hots, f-ren definizio-tartea bornatua bada, $\lim\limits_{x \to b^-} |f(x)| = +\infty$ izan behar du integrala inpropioa izateko. Hau da, funtzioa ez da bornatua izango.

Gauza bera gertatzen da $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b]$ tartean integragarria bada eta $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ bada.

(ii) $b \in \mathbb{R}$ eta $b = +\infty$ kasuak aldi berean azter daitezke, ulertzen badugu azken kasu honetan b puntuko ezker-limitea $+\infty$-ko limitea dela. Beraz, hemendik aurrera bi kasuak batera hartuko ditugu.

Era berean, $a = -\infty$ baldin bada, eskuin-limitearen ordez, $-\infty$-ko limitea izango dugu, eta $a \in \mathbb{R}$ eta $a = -\infty$ kasuak aldi berean aztertu ahal izango ditugu.

(iii) $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ bada, integral inpropioaren definizioa $c \in (a, b)$ puntuaren menpekoa dela ematen du. Existitzen bada $c \in (a, b)$ non f $(a, c]$ eta $[c, b)$ tarteetan integragarria den, orduan, froga daiteke gauza bera betetzen dela $c \in (a,b)$ guztietarako. Horrela, integral inpropioa ez da aukeratzen den c puntuaren menpekoa.

(iv) Izan bitez $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eta $c \in (a,b)$, eta suposa dezagun f $[a,c]$ tartean integragarria dela. Orduan, f $[a,b)$ tartean integragarria da, baldin eta soilik baldin $[c,b)$ tartean integragarria bada. Izan ere,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

da, eta f funtzioa $[a,c]$ tartean integragarria denez, $\int_a^c f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ da; beraz, $\int_a^b f(x)\,dx$ finitua izango da, baldin eta soilik baldin $\int_c^b f(x)\,dx$ finitua bada.

Era berean, $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ bada, $c \in (a,b)$ eta f $[c,b]$ tartean integragarria bada, orduan, f $(a,b]$ tartean integragarria da, baldin eta soilik baldin $(a,c]$ tartean integragarria bada.

Adibideak. Azter dezagun integral inpropio batzuen izaera.

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ integral inpropioa dibergentea da. Izan ere,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{dx}{x} = \lim_{y\to\infty} (\ln(|y| - \ln 1) = \lim_{y\to\infty} \ln y = \infty.$$

(ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konbergentea da $\alpha > 1$ bada, eta dibergentea $\alpha \leq 1$ bada; eta

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \forall\, \alpha > 1.$$

Ikus dezagun. $\alpha = 1$ kasua aurreko adibidea da; beraz, $\alpha \neq 1$ hartuko dugu. $1/x^\alpha$ funtzioa integragarria da $[1,y]$ tartean, $y > 1$ guztietarako, eta

$$\int_1^y \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^y x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_1^y = \frac{y^{-\alpha+1} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Orduan,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)y^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} +\infty, & \alpha - 1 < 0 \text{ bada}, \\ -\dfrac{1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha - 1 > 0 \text{ bada}. \end{cases}\end{aligned}$$

(iii) Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\alpha < 1$ bada.

$\alpha > 0$ bada, $f(x) = (x-a)^{-\alpha}$ ez dago definituta a puntuan. Gainera, $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^\alpha} = +\infty$ da; beraz, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ integral inpropioa da.

$\alpha \neq 1$ bada,

$$\int_y^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \left.\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_y^b = \frac{1}{(1-\alpha)}\Big(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(y-a)^{\alpha-1}}\Big).$$

Orduan, $\alpha < 1$ bada; hots, $\alpha - 1 < 0$,

$$\begin{aligned}&\lim_{y \to a^+} \frac{1}{(1-\alpha)}\Big(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(y-a)^{\alpha-1}}\Big)\\ &\qquad = \frac{1}{(1-\alpha)}\Big(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \lim_{y \to a^+} (y-a)^{1-\alpha}\Big) = \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Aldiz, $\alpha > 1$ bada,

$$\begin{aligned}&\lim_{y \to a^+} \frac{1}{(1-\alpha)}\Big(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(y-a)^{\alpha-1}}\Big)\\ &\qquad = \frac{1}{(1-\alpha)}\Big(\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \lim_{y \to a^+} (y-a)^{1-\alpha}\Big) = +\infty.\end{aligned}$$

Azkenik, $\alpha = 1$ bada,

$$\int_y^b \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|\Big|_y^b = \ln(b-a) - \ln(y-a),$$

eta $\displaystyle\lim_{y \to a^+} \ln(b-a) - \ln(y-a) = +\infty$ da; beraz,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \text{ konbergentea } \iff \alpha < 1.$$

$a = 0$ kasua maiz agertzen da.

$$\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konbergentea } \iff \alpha < 1, \quad \forall b > 0.$$

(iv) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\alpha < 1$ bada.

Aurreko kasuan bezala, $\alpha \neq 1$ bada,

$$\lim_{y\to b^-}\int_a^y \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{y\to b^-}\frac{1}{(1-\alpha)}\Big(-\frac{1}{(b-y)^{\alpha-1}}+\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\Big)$$
$$= \begin{cases} +\infty, & \alpha-1>0 \text{ bada,} \\ \dfrac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}, & \alpha-1<0 \text{ bada,} \end{cases}$$

eta, $\alpha = 1$ bada,

$$\lim_{y\to b^-}\int_a^y \frac{dx}{b-x} = \lim_{y\to b^-}\big(-\ln|b-x||_a^y\big) = \ln|b-a| - \lim_{y\to b^-}\ln(b-y) = +\infty.$$

(v) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ integral inpropioa da zeren eta $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ baita. Azter dezagun bere izaera. Zatika integratuz, $u=\ln x$ eta $dv = dx$ hartzen ditugularik, $du = dx/x$ eta $v = x$ dira; beraz,

$$\int_y^1 \ln x\,dx = x\ln x|_y^1 - \int_y^1 x\frac{dx}{x} = -y\ln y-(1-y) = y-1-y\ln y.$$

Orduan,

$$\lim_{y\to 0^+}\int_y^1 \ln x\,dx = \lim_{y\to 0^+}(y-1-y\ln y).$$

$\displaystyle\lim_{y\to 0^+} y\ln y$ kalkulatzeko, $0/0$ moduko indeterminazio baten bidez berridatziko dugu, L'Hopitalen erregela aplikatu ahal izateko. Horrela,

$$\lim_{y\to 0*+} y\ln y = \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln y}{1/y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{1/y}{1/y^2} = 0.$$

Beraz, $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = -1$ da, konbergentea.

(vi) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$. Kasu honetan, bi integral inpropio aztertu behar ditugu. $c = 0$ hartuz,

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y\to\infty}\int_0^y\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y\to\infty}(\arctan y - \arctan 0) = \frac{\pi}{2};$$
$$\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y\to-\infty}\int_y^0\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{y\to-\infty}(\arctan 0 - \arctan y) = -\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Bi integral inpropio horiek konbergenteak direnez, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ konbergentea da, eta

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Oharra. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} f(x)\,dx$. Posible da limite hori finitua izatea, eta, hala ere, $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \int_{c}^{y} f(x)\,dx$ eta $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \int_{y}^{c} f(x)\,dx$ integral inpropioak infinituak, $c \in \mathbb{R}$ guztietarako. Kasu horretan, integral inpropioa ez da konbergentea.

Definizioa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integral inpropioaren *balio nagusia* honela definitzen da:

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{y\to+\infty} \Big(\int_{-y}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{y} f(x)\,dx \Big) = \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} f(x)\,dx.$$

Era berean, izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, eta demagun existitzen dela $c \in (a,b)$ non $f\colon [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ eta $\displaystyle\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty$ den. $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ integral inpropioaren *balio nagusia* honela definitzen da:

$$p.v. \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \Big(\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \Big).$$

Oharra. Integral inpropioa konbergentea bada, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = p.v. \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ da; baina alderantzizkoa, orokorrean, ez da egia.

9.2 Funtzio ez-negatiboen integral inpropioetarako konbergentzia-irizpideak

Maiz integral inpropioen balioak kalkulatzea zaila edo ezinezkoa izan daiteke. Zenbaki errealen serieekin gertatu zen bezala, sarritan integral inpropioa konbergentea den ala ez jakitea nahikoa izango da, konbergentea den kasuan, integralaren balioa ezagutu gabe. Horretarako, zenbait irizpide emango ditugu, eta, serieen kasuan bezala, lehenengo eta behin, balio positiboak hartzen dituzten funtzioen integral inpropioak aztertuko ditugu. Suposatuko dugu funtzioen definizio-eremua $[a,b)$ motakoa dela, b finitua zein infinitua izanik. Antzeko irizpideak enuntzia daitezke definizio-eremua $(a,b]$ motakoa denean.

9.2.1 lema. *Izan bedi $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ funtzioa $[a,y]$ tartean integragarria, $y \in (a,b)$ guztietarako. $f(x) \geq 0$ bada $x \in [a,b)$ guztietarako, orduan, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin existitzen bada $M \in \mathbb{R}$ non $\int_{a}^{y} f(x)\,dx \leq M$ den $y \in (a,b)$ guztietarako.*

Era berean, izan bedi $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ funtzioa $[z,b]$ tartean integragarria $z \in (a,b)$ guztietarako. $f(x) \geq 0$ bada $x \in (a,b]$ guztietarako, orduan, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin existitzen bada $M \in \mathbb{R}$ non $\int_{z}^{b} f(x)\,dx \leq M$ den $z \in (a,b)$ guztietarako.

Froga. Izan bitez $F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ eta $y_1, y_2 \in (a,b)$, $y_1 < y_2$ izanik. Integral mugatuaren propietateengatik,

$$F(y_2) - F(y_1) = \int_a^{y_2} f(x)\,dx - \int_a^{y_1} f(x)\,dx = \int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx \geq 0;$$

beraz, F gorakorra da $[a,b)$ tartean, eta $\lim_{y\to b} F(y) = \sup\{F(y) \ : \ y \in (a,b)\}$. Definizioz,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to b} \int_a^y f(x)\,dx = \lim_{y\to b} F(y);$$

beraz, $\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\sup\{F(y) \ : \ y \in (a,b)\}$ finitua bada, edo, baliokidea dena, $F(y)$ goitik bornatua bada $[a,b)$ tartean; hots, existitzen bada $M \in \mathbb{R}$ non $\int_a^y f(x)\,dx \leq M$ den $y \in (a,b)$ guztietarako.

Beste kasua antzeko modu batean frogatzen da. □

9.2.2 teorema (Konparazio-irizpidea)**.** *Izan bitez $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ funtzioak $[a,y)$ tartean integragarriak $y \in (a,b)$ guztietarako. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ bada $x \in [a,b)$ guztietarako, orduan,*

(i) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *konbergentea bada,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *ere konbergentea da;*

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *dibergentea bada,* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *ere dibergentea da.*

Froga. (i) Izenda dezagun $\int_a^b g(x)\,dx = M$. $f(x) \leq g(x)$ denez $x \in [a,b)$ guztietarako, orduan, integral mugatuaren propietateengatik, $\int_a^y f(x)\,dx \leq \int_a^y g(x)\,dx$ da, $y \in (a,b)$ edozein izanik.

$g(x) \geq 0$ denez $x \in [a,b)$ guztietarako, $\int_a^y g(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx = M$; beraz, $\int_a^y f(x)\,dx \leq M$, $y \in (a,b)$ guztietarako, eta, 9.2.1 lemaren arabera, $\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea da.

(ii) Absurdora eramanez, demagun $\int_a^b g(x)\,dx$ konbergentea dela. Orduan, (i) atala aplikatuz, $\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea izango litzateke, eta hori hipotesiaren kontra doa; beraz, $\int_a^b g(x)\,dx$ dibergentea da. □

Adibidea. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+\cos x}{x^2}\,dx$ konbergentea da. Ikus dezagun.

$f(x) = \dfrac{1+\cos x}{x^2}$ funtzio ez-negatiboa da, eta $\dfrac{1+\cos x}{x^2} \leq \dfrac{2}{x^2}$ da, $x \in [1,\infty)$ guztietarako. Gainera, ikusi dugu $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konbergentea dela; beraz, 9.2.2 teoremaren arabera, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+\cos x}{x^2}\,dx$ konbergentea da.

9.2.3 teorema (Limitearen irizpidea)**.** *Izan bitez $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ funtzioak $[a,y]$ tartean integragarriak $y \in (a,b)$ guztietarako, $f(x) \geq 0$ eta $g(x) > 0$ izanik $x \in [a,b)$ guztietarako. Izan bedi $A = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Orduan,*

(i) $A \neq 0, \infty$ bada, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea da, baldin eta soilik baldin $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konbergentea bada.

(ii) $A = 0$ bada, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konbergentea bada, orduan, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konbergentea.

(iii) $A = \infty$ bada, $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ dibergentea bada, orduan, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ dibergentea da.

Froga. Suposatuko dugu $b = +\infty$ dela, baina antzeko modu batean frogatzen da $b \in \mathbb{R}$ bada.

(i) Izan bedi $A = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0, \infty$.

$\epsilon = A/2 > 0$ hartuz, limitearen definizioaren arabera, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non, $x > K$ bada, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \dfrac{A}{2}$ den. Hau da, $x > K$ guztietarako, $A - \dfrac{A}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{A}{2} + A$ da, eta, $g(x) \geq 0$ denez $x \geq a$ guztietarako,

$$\frac{A}{2} g(x) < f(x) < \frac{3A}{2} g(x), \quad \forall\, x > K.$$

Argi denez, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konbergentea bada, $\int_K^\infty f(x)\,dx$ ere konbergentea da. Orduan, konparazio-irizpidea erabiliz, $\int_K^\infty \dfrac{A}{2} g(x)\,dx$ konbergentea da, eta, ondorioz, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ere konbergentea da. Era berean, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konbergentea bada, orduan, $\int_K^\infty \dfrac{3A}{2} g(x)\,dx$ ere konbergentea da, eta, konparazio-irizpidearen arabera, $\int_K^\infty f(x)\,dx$ konbergentea da; beraz, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ere konbergentea da.

(ii) $A = 0$ bada, $\epsilon = 1$ hartuz, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < 1$ den, $x > K$ guztietarako; hau da, $f(x) < g(x)$, $x > K$ guztietarako. Beraz, konparazio-irizpidearen arabera, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konbergentea bada, orduan, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ere konbergentea da.

(iii) $A = \infty$ bada, $M = 1$ hartuz, existitzen da $K \in \mathbb{R}$ non $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 1$ den, $x > K$ guztietarako. Beraz, $f(x) > g(x)$ da, $x > K$ guztietarako, eta, berriro konparazio-irizpidea kontuan hartuz, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ dibergentea bada, orduan, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ere dibergentea da. □

Adibideak. Limitearen irizpidea erabili ahal izateko, g funtzioa aukeratu behar dugu, aztertu nahi den integral inpropioaren integrakizunarekin konparatzeko, eta, aldi berean, g-ren integral inpropioaren izaera ezagutu behar dugu. Serieen izaera konparazioz aztertzeko, serie harmonikoak erabiltzen ziren bezala, integral inpropioen esparruan, maiz erabiltzen diren funtzioak $1/x^\alpha$ motakoak dira.

(i) $\displaystyle\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^3+7}}$ konbergentea da. Limitearen irizpidea erabiliko dugu hori frogatzeko. Izan bedi $g(x) = \dfrac{1}{x^{5/2}}$. Gure integrakizuna eta g funtzio positiboak dira $[1/3, \infty)$ tartean. Bestalde,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^5+x^3+7}}}{\dfrac{1}{x^{5/2}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^5}{x^5+x^3+7}} = 1.$$

$\displaystyle\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{x^{5/2}} = \int_{1/3}^{1} \frac{dx}{x^{5/2}} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$ konbergentea da $5/2 > 1$ delako; beraz, limitearen irizpidearen arabera, $\displaystyle\int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^3+7}}$ konbergentea da.

(ii) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-x}x^\alpha\, dx$ konbergentea da $\alpha \in \mathbb{R}$ edozein izanik. Izan ere,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}x^\alpha}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Gainera, $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ konbergentea da; beraz, $\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-x}x^\alpha\, dx$ ere konbergentea da, edozein izanik α-ren balioa.

(iii) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\ln^\alpha x}$ dibergentea da, $\alpha \in \mathbb{R}$ guztietarako. Izan ere,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\ln^\alpha x}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^\alpha x} = \infty, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},$$

eta, $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x}$ dibergentea denez, $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\ln^\alpha x}$ ere dibergentea da.

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ integral inpropioa da, zeren eta $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$ baita.

Izan bedi $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$. Orduan,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{\sqrt{2+x}} = 2 \neq 0.$$

Bestalde, ikusi dugu $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^{1/2}}$ konbergentea dela. Ondorioz, limitearen irizpidearen arabera, $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ konbergentea da.

(v) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}\,dx$ integral inpropioa da tartea bornatua ez delako, eta funtzioa jatorriaren inguruan bornatua ez delako. Orduan, bi integral inpropioren batura modura hartuko dugu, honela:

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

Has gaitezen $(0,1]$ tartearen gaineko integral inpropioarekin. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ hartuz,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to 0^+} \arctan x = 0,$$

eta limitearen irizpideak ez digu laguntzen $\int_0^1 g(x)\,dx$ dibergentea delako. Baina $g(x) = 1/\sqrt{x}$ hartuz,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0.$$

Orain, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konbergentea denez, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}$ konbergentea da.

Bestalde, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}\,dx$ ere konbergentea da, zeren eta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

baita, eta $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ konbergentea. Ondorioz, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}$ konbergentea da.

9.3 Beste konbergentzia-irizpide batzuk

9.2 atalean emandako integral inpropioetarako konbergentzia-irizpideak aplika daitezke funtzioak balio positiboak hartzen dituenean. Funtzioaren zeinua aldatzen bada integrazio-tartean, beste tresna batzuk erabili behar dira. Atal honetan, ikusiko dugu integrakizunaren balio absolutuaren integral inpropioaren izaerak aztertu nahi den integral inpropioaren konbergentziari buruzko informazioa eman diezagukeela.

Atal honetan a eta b finituak zein infinituak izango dira, eta funtzioak $[a, b)$ edo $(a, b]$ erako tarteetan definituta egongo dira.

Definizioa. $\int_a^b f(x)\, dx$ integral inpropioa *absolutuki konbergentea* dela diogu, baldin eta $\int_a^b |f(x)|\, dx$ integral inpropioa konbergentea bada.

9.3.1 teorema. *$\int_a^b f(x)\, dx$ absolutuki konbergentea bada, orduan, $\int_a^b f(x)\, dx$ konbergentea da. Gainera,*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Froga. Balio absolutuaren definizioagatik, $0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$ da $x \in (a, b)$ guztietarako. Hipotesiaren arabera, $\int_a^b |f(x)|\, dx$ konbergentea da; beraz, konparazio-irizpideak ziurtatzen du $\int_a^b (|f(x)| - f(x))\, dx$ konbergentea dela. Orain,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx - \int_a^b (|f(x)| - f(x))\, dx.$$

Eskuinaldeko bi integral inpropioak konbergenteak direnez, $\int_a^b f(x)\, dx$ ere konbergentea da. Gainera,

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \ \forall\, x \in [a, b);$$

beraz,

$$-\int_a^y |f(x)|\, dx \leq \int_a^y f(x)\, dx \leq \int_a^y |f(x)|\, dx, \ \forall\, y \in [a, b).$$

Limiteak hartuz,

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx;$$

hau da,

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

□

f funtzioak balio positiboak zein negatiboak hartzen baditu eta $\int_a^b |f(x)|\, dx$ konbergentea bada, 9.3.1 teoremak ziurtatzen du $\int_a^b f(x)\, dx$ ere konbergentea dela. Gainera, $|f(x)|$ funtzio ez-negatiboa denez, haren integralaren izaera aztertzeko 9.2 ataleko irizpideak erabil daitezke.

Hala ere, 9.3.1 teoremaren alderantzizkoa ez da egia; hots, $\int_a^b |f(x)|\, dx$ dibergentea bada, ezin dugu ezer ziurtatu $\int_a^b f(x)\, dx$ integral inpropioaren izaerari buruz. Kasu horietan, lagungarriak izan daitezke jarraian enuntziatzen diren teoremak.

9.3.2 teorema (Dirichleten irizpidea)**.** *Izan bitez* $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *funtzio monotonoa,* $\lim\limits_{y\to b} f(y) = 0$ *izanik, eta* $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *funtzioa* $[a,y]$ *tartean integragarria* $y \in (a,b)$ *guztietarako. Existitzen bada* $B \in \mathbb{R}$ *non* $\left|\int_a^y g(x)\,dx\right| \leq B$ *den* $y \in (a,b)$ *guztietarako, orduan,* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *konbergentea da.*

9.3.3 teorema (Abelen irizpidea)**.** *Izan bitez* $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *funtzio monotonoa eta bornatua, eta* $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *funtzioa* $[a,y]$ *tartean integragarria* $y \in (a,b)$ *guztietarako,* $\int_a^b g(x)\,dx$ *konbergentea izanik. Orduan,* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *konbergentea da.*

Adibidea. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konbergentea da.

Izan bitez $f(x) = \dfrac{1}{x}$ eta $g(x) = \sin x$. f monotonoa da $[1,\infty)$ tartean (beherakorra, hain zuzen ere), eta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ da. Gainera,

$$\left|\int_1^y \sin x\,dx\right| = |\cos y - \cos 1| \leq |\cos y| + |\cos 1| \leq 2, \ \forall y \geq 1.$$

Orduan, Dirichleten irizpidearen arabera, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konbergentea da.

9.4 Ariketak

9.1. Aztertu honako integral hauetatik zein diren konbergenteak eta zein ez. Konbergenteak direnen balioa kalkulatu.

(i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ *Em.:* Dib.

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$ *Em.:* $\pi/4$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{px}\, dx$ *Em.:* $-1/p$, $p<0$ bada; dib. $p \geq 0$ bada

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\, dx$ *Em.:* -1.

(v) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *Em.:* π

(vi) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2+1}\, dx$ *Em.:* $\dfrac{\pi^2}{8}$

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *Em.:* 2

(viii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$ *Em.:* $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$

(ix) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\, dx$ *Em.:* Dib.

(x) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ *Em.:* Dib.

9.2. (i) Aurkitu f funtzio bat, $[0,\infty)$ tartean jarraitua, non $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ ez den existitzen.

(ii) Aurkitu f funtzio bat, $(0,1]$ tartean jarraitua, non $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ ez den existitzen.

9.3. Erabaki zein izan behar duten a eta b parametroen balioek, honako berdintza hau bete dadin:

$$\int_1^\infty \left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1 \right) dx = 1.$$

Em.: $a=b=2(e-1)$.

9.4. Aztertu honako integral inpropio hauen konbergentzia:

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$ *Em.:* konb.

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$ *Em.:* konb.

(iii) $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^2}$ *Em.:* konb.

(iv) $\displaystyle\int_0^1 x^{-3/2}\sin x\,dx$ *Em.:* konb.

(v) $\displaystyle\int_0^\infty x\sin x\,dx$ *Em.:* dib.

(vi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ *Em.:* konb.

9.5. Frogatu honako integral honen bidez definitutako Eulerren Γ funtzioa konbergentea dela $p>0$ guztietarako:

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx.$$

9.6. Eulerren β funtzioa integral inpropio honen bidez definitzen da:

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Egiaztatu konbergentea dela $p>0$ eta $q>0$ badira.

9.7. Aztertu integral hauen izaera, agertzen diren parametroen balioen arabera, $n\in\mathbb{N}$ eta $\alpha,p,q\in\mathbb{R}$ izanik:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)^n}}$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow n=1$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^n}\,dx$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow n=1,2$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\,dx$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow \alpha\in(1,2)$

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow 1<\alpha<2$

(v) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^n}$ *Em.:* $\alpha\neq 0$ bada, konb $\forall n\in\mathbb{N}$; eta $\alpha=0$ bada, konb $\forall n\geq 2$

(vi) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\,\cos^q x}$ *Em.:* konb $\Longleftrightarrow p<1$ eta $q<1$

9.8. Izan bedi $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+3}$.

(i) Frogatu f-ren grafikoak eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera ez dela finitua.

(ii) Kalkulatu f-ren grafikoa OX ardatzarekiko biratzean lortzen den gorputzaren bolumena.

Em.: $\dfrac{9\pi^2}{2\sqrt{3}}$.

10. gaia

Funtzio-segidak. Funtzio-serieak. Berretura-serieak

2. eta 3. gaietan zenbaki errealen segidak eta serieak definitu dira, haien konbergentzia eta bestelako propietateak aztertuz. Gai honetan, segiden eta serieen kontzeptuak hedatuko ditugu, zenbaki errealen ordez aldagai errealeko funtzio errealak hartuz.

10.1 Funtzio-segidak

Definizioa. $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, izan bedi $f_n \colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioa. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Ω multzoan definitutako *funtzio-segida* dela diogu.

$x \in \Omega$ bada, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ zenbaki errealen segida dugu, eta azter dezakegu konbergentea den ala ez.

10.1.1 Konbergentzia puntuala

Definizioa. Izan bitez $\Omega \subset \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Ω multzoan definitutako funtzio-segida eta

$$D = \{x \in \Omega \ : \ \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ konbergentea}\}.$$

D funtzio-segidaren *konbergentzia-eremua* dela diogu. $D \neq \emptyset$ bada, honako funtzio hau defini dezakegu:

$$\begin{aligned} f \colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

f funtzioa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren *puntuz puntuko limitea* edo *limite puntuala* dela diogu, eta $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ D multzoan *puntuz puntu konbergentea* edo *puntualki konbergentea* dela esaten da, eta $f \xrightarrow{p} f$ D-n idatzi.

Zenbaki-segiden limitearen definizioa gogoratuz, f funtzioa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren D multzoko puntuz puntuko limitea da, baldin eta

$$\forall\, x \in D,\ \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Zenbaki-segida konbergenteak Cauchyren segidak direnez, enuntzia daiteke Cauchyren baldintza funtzio-segiden konbergentziarako ere.

Definizioa. Izan bitez $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida eta $D \subset \mathbb{R}$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak D multzoan *Cauchyren puntuz puntuko baldintza* edo *Cauchyren baldintza puntuala* betetzen duela diogu, baldin

$$\forall\, x \in D,\ \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n, m \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

10.1.1 proposizioa. *Izan bitez $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida eta $D \subset \mathbb{R}$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ D multzoan puntuz puntu konbergentea da, baldin eta soilik baldin Cauchyren puntuz puntuko baldintza betetzen badu.*

Adibideak. Jarraian funtzio-segida batzuk definituko ditugu, eta aztertuko dugu haien konbergentzia puntuala.

(i) Izan bitez $\Omega = [0, \infty)$ eta $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, $f_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \text{ bada,} \\ 1, & x = 1 \text{ bada,} \\ +\infty, & x > 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

Beraz, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren konbergentzia-eremua $[0,1]$ tartea da, eta puntuz puntuko limitea honako funtzio hau da:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \text{ bada,} \\ 1, & x = 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

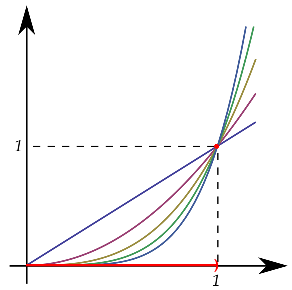
Aipatzekoa da segidaren funtzio guztiak jarraituak direla $[0,1]$ tartean, baina ez limite funtzioa.

(ii) Izan bitez $\Omega = \mathbb{R}$ eta $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako

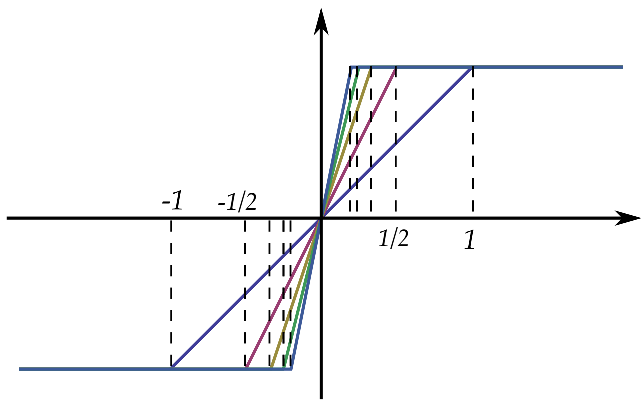
$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1/n \text{ bada,} \\ nx, & -1/n < x < 1/n \text{ bada,} \\ 1, & x \geq 1/n \text{ bada.} \end{cases} \tag{10.1.1}$$

Azter dezagun $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren konbergentzia puntuala.

- $x \leq -1$ bada, $f_n(x) = -1$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -1$ da.



10.1 irudia. $f_n(x) = x^n$ funtzioen grafikoak eta limite puntuala (gorriz).

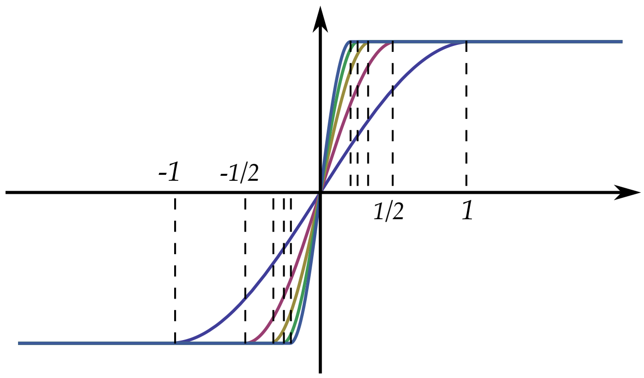


10.2 irudia. (10.1.1) formularen bidez definitutako f_n funtzioen grafikoak: $n = 1$ (urdina), $n = 2$ (gorria), $n = 3$ (horia), $n = 4$ (berdea) eta $n = 5$ (urdina).

- $x \geq 1$ bada, $f_n(x) = 1$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ da.
- $x = 0$ bada, $f_n(0) = 0$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$ da.
- $x \in (0, 1)$ bada, Arkimedesen printzipioagatik, badakigu existitzen dela $n_0 \in \mathbb{N}$ non $x > 1/n_0$ den eta $n \geq n_0$ bada, era berean, $x > 1/n$ da; beraz, $n \geq n_0$ guztietarako, $f_n(x) = 1$ da, eta, ondorioz, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ da.
- $x \in (-1, 0)$ bada, lehen bezala arrazoituz, existitzen da $n_1 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_1$ bada, $x < -1/n$ den, eta, ondorioz, $f_n(x) = -1$. Beraz, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -1$ da.

Laburbilduz, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite puntuala honako funtzio hau da:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \text{ bada}, \\ 0, & x = 0 \text{ bada}, \\ 1, & x > 0 \text{ bada}. \end{cases}$$



10.3 irudia. (10.1.2) formularen bidez definitutako f_n funtzioen grafikoa: $n = 1$ (urdina), $n = 2$ (gorria), $n = 3$ (horia), $n = 4$ (berdea) eta $n = 5$ (urdina).

Aurreko adibidean bezala, segidaren gai guztiak funtzio jarraituak dira $\mathbb{R}$ osoan, baina limite puntuala ez, etengunea baitu $x = 0$ puntuan.

(iii) Har ditzagun $\mathbb{R}$ osoan definituta dauden funtzio hauek, $n \in \mathbb{N}$ izanik:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1/n \text{ bada,} \\ \sin \dfrac{n\pi x}{2}, & -1/n < x < 1/n \text{ bada,} \\ 1, & x \geq 1/n \text{ bada.} \end{cases} \tag{10.1.2}$$

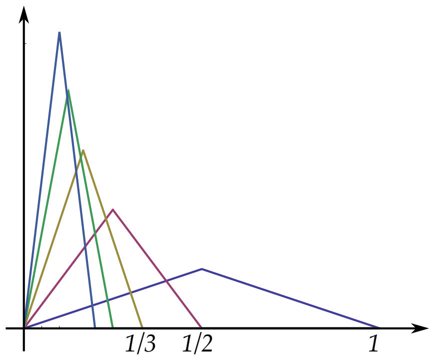
Aurreko adibidean bezala argudiatuz, erraz ikusten da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite puntuala honako funtzio hau dela:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \text{ bada,} \\ 0, & x = 0 \text{ bada,} \\ 1, & x > 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

f_n deribagarria da $\mathbb{R}$ osoan, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, baina f ez da deribagarria. Are gehiago, ez da jarraitua $x = 0$ puntuan.

(iv) Izan bedi f_n $[0, 1]$ tartean definitutako funtzio hau:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n} \text{ bada,} \\ 2n - 2n^2x, & \dfrac{1}{2n} < x < \dfrac{1}{n} \text{ bada,} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ bada.} \end{cases} \tag{10.1.3}$$



10.4 irudia. (10.1.3) formularen bidez definitutako f_n funtzioen grafikoa: $n = 1$ (urdina), $n = 2$ (gorria), $n = 3$ (horia), $n = 4$ (berdea) eta $n = 5$ (urdina).

Kalkula dezagun $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite puntuala. $x \in (0, 1]$ bada, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $x > 1/n_0$ den, eta, ondorioz, $n \geq n_0$ bada $f_n(x) = 0$ da. Bestalde, $f_n(0) = 0$ da n guztietarako; beraz,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

f_n integragarria da $[0, 1]$ tartean, jarraitua delako, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta f ere integragarria da $[0, 1]$ tartean; baina

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{n}n = \frac{1}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

eta

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0.$$

Hau da,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

10.1.2 Konbergentzia uniformea

Ikusi ditugun adibideetan argi geratu da funtzio-segida baten limite puntualak ez dituela heredatzen segidaren funtzioen ezaugarriak: jarraitutasuna, deribagarritasuna, integrala. Zehazki, proposatutako adibideetan honako hau izan dugu:

$$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) \neq \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big),$$
$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Funtzio-segida baten limiteak segidaren funtzioek dituzten propietateak mantentzen dituela bermatzen duten baldintzak aurkitu nahi ditugu.

Definizioa. Izan bitez $f_n\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak, $n \in \mathbb{N}$ izanik. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida D multzoan *uniformeki konbergentea* dela diogu, existitzen bada $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in D.$$

$f_n \xrightarrow{u} f$ D-n idatziko dugu.

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ f funtziorantz uniformeki konbergentea bada D multzoan, f-ren grafikoaren inguruan ϵ anplitudeko banda bat hartzen badugu, existitu behar da n_0 non f_n funtzioen grafikoak banda horren barruan dauden $n \geq n_0$ guztietarako.

10.1.2 proposizioa. *Izan bitez $f_n\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak, $n \in \mathbb{N}$ izanik, eta $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak f funtziora uniformeki konbergitzen badu D multzoan, orduan, puntuz puntu konbergitzen du f funtziora D multzoan.*

Oharra. 10.1.2 proposizioaren alderantzizkoa ez da egia orokorrean. Konbergentzia puntualak ez du inplikatzen konbergentzia uniformea.

Adibidea. Izan bitez $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Lehenago ikusi dugun bezala, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puntuz puntu konbergentea da $[0,1]$ tartean, haren limitea funtzio hau izanik:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \text{ bada,} \\ 1, & x = 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

Ikusiko dugu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez dela uniformeki konbergentea $[0,1]$ tartean; hau da, frogatuko dugu

$$\exists\, \epsilon > 0\ :\ \forall\, n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq n_0,\ \exists x_n \in [0,1]\colon |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon.$$

Izan bedi $x_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ izanik.

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |x_n^n - 0| = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ denez, $\epsilon = 1/2 > 0$ hartuz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada, $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \geq 1/2 = \epsilon$ den.

Beraz, $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez da uniformeki konbergentea $[0,1]$ tartean.

Azter dezagun, baita ere, $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren konbergentzia uniformea $[0,1-\delta]$ tartean, $\delta > 0$ izanik. Orain, limite puntuala funtzio nulua da, $f(x) = 0$, $x \in [0,1-\delta]$ guztietarako. Izan bedi $\epsilon > 0$. $x \in [0,1-\delta]$ bada,

$$0 \leq x^n \leq (1-\delta)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\lim_{n\to\infty}(1-\delta)^n = 0$ denez, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non $n \geq n_0$ bada,

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n \leq (1-\delta)^n < \epsilon, \quad \forall\, x \in [0, 1-\delta]$$

den. Hau da, $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformeki konbergentea da $[0, 1-\delta]$ tartean.

Definizioa. Izan bitez $f_n \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak, $n \in \mathbb{N}$ izanik. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak D multzoan *Cauchyren baldintza uniformea* betetzen duela diogu, baldin eta honako hau betetzen badu:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, n_0 = n_0(\epsilon, x) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n, m \geq n_0 \; |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \quad \forall\, x \in D.$$

10.1.3 proposizioa. *Izan bitez $f_n \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak, $n \in \mathbb{N}$ izanik. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida D multzoan uniformeki konbergentea da, baldin eta soilik baldin Cauchyren baldintza uniformea betetzen badu.*

Praktikan, ez konbergentzia uniformearen definizioa ez eta Cauchyren baldintza uniformea ez dira errazak betetzen diren ala ez egiaztatzeko. Ikus dezagun irizpide erabilgarriago bat funtzio-segidak uniformeki konbergenteak ote diren erabakitzeko.

10.1.4 teorema (Konbergentzia uniformearen karakterizazioa)**.** *Izan bitez $f_n \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ izanik, eta $f \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak f funtziora uniformeki konbergitzen du D multzoan, baldin eta soilik baldin*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

bada.

Froga. Izenda dezagun $d_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$. Ikusi nahi dugu $f_n \xrightarrow{u} f$ dela D multzoan, baldin eta soilik baldin $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ bada.

$\Rightarrow$) Demagun $f_n \xrightarrow{u} f$ dela D multzoan, eta izan bedi $\epsilon > 0$. Orduan, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, x \in D;$$

beraz, $n \geq n_0$ guztietarako,

$$d_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon;$$

hau da, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ da.

$\Leftarrow$) Demagun orain $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ dela, eta izan bedi $\epsilon > 0$. Orduan, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada,

$$|d_n| = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

den; beraz, $n \geq n_0$ guztietarako

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in D.$$

Hots, $f_n \xrightarrow{u} f$ da D multzoan. $\square$

Adibidea. Izan bedi f_n $[0,1]$ tartean (10.1.3) formulak definitutako funtzioa. Lehenago ikusi dugun bezala, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite puntuala funtzio nulua da; hots, $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$ guztietarako. Froga dezagun konbergentzia ez dela uniformea, 10.1.4 teoremaren karakterizazioa erabiliz.

$$d_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\Big(\frac{1}{2n}\Big) = n.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty \neq 0$ denez, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez da uniformeki konbergentea $[0,1]$ tartean.

Oharra. Cauchyren baldintzarako ere antzeko karakterizazio bat eman daiteke. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak Cauchyren baldintza uniformea betetzen du D multzoan, baldin eta soilik baldin

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$$

bada.

10.1.3 Konbergentzia uniformea eta limitearen propietateak

Atal honetan, ikusiko dugu konbergentzia uniformeak bermatzen duela limite funtzioak mantentzen dituela funtzio-segidaren funtzioek betetzen dituzten zenbait propietate.

10.1.5 teorema (Konbergentzia uniformea eta jarraitutasuna)**.** *Izan bitez $f_n \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioak, $n \in \mathbb{N}$ izanik, eta $f \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida f funtziora uniformeki konbergentea izanik D multzoan.*

Izan bedi $x_0 \in D$. f_n jarraitua bada x_0 puntuan $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan, f ere jarraitua da x_0 puntuan; hau da,

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Big).$$

Froga. Izan bedi $\epsilon > 0$. Frogatu behar dugu existitzen dela $\delta > 0$, non, $|x - x_0| < \delta$ bada, orduan, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ den.

$f_n \xrightarrow{u} f$ denez D multzoan,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall\, x \in D.$$

Bereziki, $|f_n(x_0)-f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ da, $n \geq n_0$ bada. Bestalde, n guztietarako f_n jarraitua denez x_0 puntuan,

$$\exists\, \delta_n > 0 \,:\, |x - x_0| < \delta_n \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Orduan, $n \geq n_0$ hartuz, $|x - x_0| < \delta = \delta_n$ bada,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| =& |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ \leq& |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ <& \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$ □

10.1.6 teorema (Konbergentzia uniformea eta deribagarritasuna)**.** *Izan bitez $f_n\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ izanik, honako propietate hauek betetzen dituzten funtzioak:*

(i) f_n deribagarria da D-n, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako;

(ii) $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformeki konbergentea da D-n;

(iii) existitzen da $t \in D$, non $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konbergentea den.

Orduan, existitzen da $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deribagarria, non $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformeki konbergentea den f funtziora D multzoan eta

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \quad \forall\, x \in D.$$

Oharra. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite funtzioaren deribatua eta segidaren funtzioen deribatuen limitea berdinak izan daitezen, ez da nahikoa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren konbergentzia uniformearekin. Izan bedi $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ izanik. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformeki konbergentea da $\mathbb{R}$-n, haren limitea funtzio nulua izanik, zeren eta

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{\sin(n^2x)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Bestalde,

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} n^2 \cos(n^2x) = n\cos(n^2x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

eta $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez da puntuz puntu konbergentea $\mathbb{R}$-n. Adibidez, $x = 0$ hartuz, $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$; eta $x = \pi/2$ balioaren kasuan, $f_n(\pi/2) = n\cos(n^2\pi/2)$ segidak ez du limiterik, ez finitua ez eta infinitua ere.

10.1.7 teorema (Konbergentzia uniformea eta integragarritasuna)**.** *Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f_n\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida f funtziora uniformeki konbergentea izanik $[a,b]$ multzoan.*

f_n integragarria bada $[a,b]$ tartean $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, orduan, f ere integragarria da $[a,b]$ tartean, eta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Froga. Lehenengo eta behin, frogatuko dugu f integragarria dela $[a,b]$ tartean. Izan bedi $\epsilon > 0$ edozein. Ikusiko dugu existitzen dela $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$, non

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

den. Izan bedi $d_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$. Orduan, $|f_n(x) - f(x)| \leq d_n$ da $x \in [a,b]$ guztietarako; hau da,

$$f_n(x) - d_n \leq f(x) \leq f_n(x) + d_n, \ \forall x \in [a,b].$$

Beraz, $P \in \mathcal{P}([a,b])$ guztietarako,

$$L(f_n + d_n, P) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f_n + d_n, P)$$

da, eta, ondorioz,

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f_n + d_n, P) - L(f_n - d_n, P), \quad \forall\, P \in \mathcal{P}([a,b]).$$

d_n konstante bat denez,

$$\begin{aligned} L(f_n - d_n, P) =& L(f_n, P) - L(d_n, P) = L(f_n, P) - d_n(b-a) \\ U(f_n + d_n, P =& U(f_n, P) + U(d_n, P) = U(f_n, P) + d_n(b-a); \end{aligned}$$

beraz,

$$U(f_n + d_n, P) - L(f_n - d_n, P) = U(f_n, P) - L(f_n, P) + 2d_n(b-a).$$

$f_n \xrightarrow{u} f$ denez $[a,b]$ tartean, 10.1.4 teoremagatik, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ da, eta, ondorioz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada, $d_n < \dfrac{\epsilon}{4(b-a)}$ den. Gainera, f_n integragarria denez $[a,b]$ tartean $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, bereziki $n \geq n_0$ hartuz, existituko da $P_\epsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ non

$$U(f_n, P_\epsilon) - L(f_n, P_\epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$$

den. Orduan, P_ϵ partiketa horretarako,

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f_n, P) - L(f_n, P) + 2d_n(b-a) < \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) = \epsilon.$$

Azkenik, frogatu behar dugu limitearen integrala integralen limitea dela. Ikusi dugun bezala,

$$f_n(x) - d_n \leq f(x) \leq f_n(x) + d_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, x \in [a,b];$$

beraz, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$\int_a^b (f_n(x) - d_n)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b (f_n(x) + d_n)\, dx, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ denez, limiteak hartuz goiko deberdintza-katean,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx. \qquad \square$$

10.2 Funtzio-serieak

Definizioa. $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, izan bitez $f_n \colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ adierazpena *funtzio-seriea* dela diogu, eta honela definitzen da:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriearen *konbergentzia multzoa* honako hau da:

$$D = \{x \in \Omega \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ konbergentea}\}.$$

Hau da, $x \in D$ da, baldin eta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zenbaki-serie konbergentea bada, eta horrek esan nahi du $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$ seriearen n-garren batura partziala bada, orduan, existituko dela $S(x)$ zenbaki erreala non $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ den. Horrela, funtzio hau defini dezakegu:

$$\begin{aligned} S\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \ &\to \ S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Ω multzoan definitutako funtzio-segida. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea $D \subset \Omega$ multzoan *puntuz puntu konbergentea* dela diogu, batura partzialen funtzio-segida, $\{S_n = f_1 + \dots + f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, D-n puntuz puntu konbergentea bada. S funtzioa $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio–segidaren limite puntuala bada, orduan, S $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriearen *batura* D multzoan dela diogu.

Definizioa. Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Ω multzoan definitutako funtzio-segida. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea $D \subset \Omega$ multzoan *uniformeki konbergentea* dela diogu, baldin eta batura partzialen funtzio-segida, $\{S_n = f_1 + \dots + f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, D-n uniformeki konbergentea bada.

Adibidea. Azter dezagun $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\big(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\big)$ funtzio-seriearen konbergentzia $x \geq 0$ eremuan. Izenda dezagun $f_n(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}$, $n = 2, 3, \dots$ izanik.

$$\begin{aligned} S_n(x) =& f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_{n-1}(x) + f_n(x) \\ =& \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} + \dots + \sqrt[n-1]{x} - \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} \\ =& \sqrt{x} - \sqrt[n+1]{x}. \end{aligned}$$

$x = 0$ bada, $S_n(x) = 0$, $n \geq 2$ guztietarako, eta, ondorioz, $\lim_{n\to\infty} S_n(0) = 0$.

$x > 0$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\sqrt{x} - \sqrt[n+1]{x}\big) = \sqrt{x} - 1$.

Beraz, funtzio-seriearen batura honako hau da:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)=S(x)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ bada},\\ \sqrt{x}-1, & x>0 \text{ bada}.\end{cases}$$

S funtzioa ez da jarraitua, baina batura partzialak funtzio jarraituak dira $[0,\infty)$ multzoan; beraz, konbergentzia ezin da uniformea izan.

Adibidea. Izan bedi $\alpha>0$. Aztertuko dugu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ funtzio-seriearen konbergentzia $[0,\infty)$ multzoan.

Izan bedi $f_n(x)=\dfrac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$, $n\in\mathbb{N}$ izanik. Orduan, $f_n(0)=0$ denez $n\in\mathbb{N}$ guztietarako, $\lim_{n\to\infty}S_n(0)=0$ da. Bestalde, $x>0$ bada,

$$0\le\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}\le\frac{x}{n^{\alpha}nx^2}=\frac{1}{x}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

Hau da, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ gure seriearen maiorante bat da, eta $\alpha+1>1$ denez, konbergentea. Konparazio-irizpideagatik, $\sum f_n(x)$ ere konbergentea da.

Beraz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ puntuz puntu konbergentea da $[0,\infty)$ tartean. Hala ere, ez dakigu zein den batura, eta ezin da ziurtatu konbergentzia uniformea.

Funtzio-segidetarako egin dugun bezala, funtzio-serieetarako ere enuntzia daitezke Cauchyren baldintza puntual eta uniformearen kontzeptuak, eta konbergentziaren eta Cauchyren baldintzaren arteko baliokidetasuna.

Definizioa. Izan bitez $f_n\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ guztietarako. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ funtzio-serieak D multzoan *Cauchyren baldintza puntuala* betetzen du, baldin eta batura partzialen funtzio-segidak, $\{S_n=f_1+\cdots+f_n\}$, D multzoan Cauchyren baldintza puntuala betetzen badu; hots, honako hau betetzen badu:

$$\forall\, x\in D, \forall\,\epsilon>0, \exists n_0=n_0(x,\epsilon)\in\mathbb{N}\ :\ \forall\, m>n\ge n_0,$$
$$|S_m(x)-S_n(x)|=|f_{n+1}(x)+\ldots f_m(x)|<\epsilon.$$

10.2.1 teorema. *Izan bitez $f_n\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ guztietarako. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ funtzio-seriea D multzoan puntuz puntu konbergentea da, baldin eta soilik baldin D multzoan Cauchyren baldintza puntuala betetzen badu.*

Definizioa. Izan bitez $f_n\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ guztietarako. $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ funtzio-serieak D multzoan *Cauchyren baldintza uniformea* betetzen du, baldin eta batura partzialen funtzio-segidak, $\{S_n = f_1 + \cdots + f_n\}$, Cauchyren baldintza uniformea betetzen badu; hots, honako hau betetzen badu:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, m > n \geq n_0,$$
$$|S_m(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots f_m(x)| < \epsilon, \quad \forall\, x \in D.$$

10.2.2 teorema. *Izan bitez $f_n \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea D multzoan uniformeki konbergentea da, baldin eta soilik baldin D multzoan Cauchyren baldintza uniformea betetzen badu.*

Askotan gertatzen den bezala, funtzio-serieen konbergentzia uniformearen definizioa edo Cauchyren baldintza uniformea ezerosoak izaten dira praktikan, betetzen ote diren egiaztatzea zaila izan daitekeelako. Horregatik, funtzio-serieen konbergentzia uniformea ondorioztatzeko irizpide bat emango dugu.

10.2.3 teorema (Weierstrassen irizpidea edo proba maiorantea)**.** *Izan bitez $f_n \colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eta $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, non*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \ \forall\, x \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea bada, orduan, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ funtzio-serieak uniformeki konbergenteak dira D multzoan.

Froga. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zenbaki-seriea konbergentea denez, Cauchyren baldintza betetzen du; hau da,

$$\forall\, \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, m > n \geq n_0 \quad |a_{n+1} + \dots a_m| < \epsilon.$$

$|f_n(x)| \leq a_n$ denez $n \in \mathbb{N}$ eta $x \in D$ guztietarako, eta $a_n > 0$ denez $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$\forall\, \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, m > n \geq n_0$$
$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \dots f_m(x)| \leq a_{n+1} + \dots a_m < \epsilon, \ \forall\, x \in D;$$

hau da, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ funtzio-serieek Cauchyren baldintza uniformea betetzen dute D multzoan eta, ondorioz, uniformeki konbergenteak dira D-n. □

Adibidea. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ uniformeki konbergentea da $\mathbb{R}$ osoan. Izan ere,

$$\Big|\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konbergentea da; beraz, Weierstrassen irizpideak ziurtatzen digu emandako serieak uniformeki konbergitzen duela $\mathbb{R}$ osoan.

Adibidea. Azter dezagun $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ funtzio-seriearen konbergentzia uniformea $[0,\infty)$ multzoan, $\alpha > 0$ izanik. Lehenengo eta behin, bila dezagun $f_n(x) = \dfrac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ funtzioaren maximoa multzo horretan.

$$\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)' = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = 0 \iff 1-nx^2 = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

f_n funtzioak bere maximoa lortzen du $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ puntuan $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz,

$$\frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \le \frac{1/\sqrt{n}}{n^{\alpha}(1+n\frac{1}{n})} = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, x \in [0,\infty).$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ konbergentea denez $\alpha > 1/2$ bada, funtzio-seriea uniformeki konbergentea da $[0,\infty)$ multzoan $\alpha > 1/2$ guztietarako.

Ohartu, $0 < \alpha \le 1/2$ bada, ezin dela ezer ziurtatu konbergentzia uniformeari buruz.

10.2.1 Konbergentzia uniformea eta baturaren propietateak

Funtzio-serie baten konbergentzia haren batura partzialen segidaren konbergentziaren bidez definitzen denez eta funtzio-seriearen batura batura partzialen segidaren limitea denez, ia berehalakoak dira atal honetan emango ditugun teoremak.

10.2.4 teorema (konbergentzia uniformea eta baturaren jarraitutasuna)**.** *Izan bitez $f_n\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ izanik, eta $x_0 \in D$. f_n funtzioa jarraitua bada x_0 puntuan $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funtzio-seriea D multzoan uniformeki konbergentea bada, orduan, seriearen batura, S, jarraitua da x_0 puntuan. Hau da,*

$$S(x_0) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0).$$

Froga. Izan bedi $S_n = f_1 + \cdots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$ izanik. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak 10.1.5 teoremaren baldintzak betetzen ditu; beraz, S funtzioa, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite uniformea D multzoan, x_0 puntuan jarraitua da; hots,

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \Big(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\lim_{x\to x_0} S_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x). \qquad \square$$

10.2.5 teorema (Konbergentzia uniformea eta baturaren deribagarritasuna)**.** *Izan bitez $f_n\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ izanik, honako propietate hauek betetzen dituzten funtzioak:*

(i) f_n *deribagarria da* D*-n,* $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako;*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ *uniformeki konbergentea da* D*-n;*

(iii) *existitzen da* $t \in D$*, non* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ *konbergentea den.*

Orduan, existitzen da $S\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deribagarria, non* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *serieak uniformeki konbergitzen duen* S *funtziora* D *multzoan eta*

$$S'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \forall\, x \in D.$$

Froga. Izan bedi $S_n = f_1 + \cdots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$ izanik. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak betetzen ditu 10.1.6 teoremaren baldintzak; beraz, existitzen da S funtzio deribagarria D-n, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite uniformea D multzoan dena. Gainera,

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)'(x) = S'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} S'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \forall\, x \in D. \quad \square$$

10.2.6 teorema (Konbergentzia uniformea eta baturaren integragarritasuna)**.** *Izan bitez* $f_n\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako, eta* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $[a,b]$ *multzoan uniformeki konbergentea, bere batura* $S\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funtzioa izanik.*

f_n *integragarria bada* $[a,b]$ *tartean* $n \in \mathbb{N}$ *guztietarako, orduan,* S *ere integragarria da* $[a,b]$ *tartean, eta*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Froga. Izan bedi $S_n = f_1 + \cdots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$ izanik. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidak betetzen ditu 10.1.7 teoremaren baldintzak, eta, ondorioz, integragarria da $[a,b]$ tartean. Gainera,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\,dx &= \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_a^b f_1(x)\,dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)\,dx\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.
\end{aligned} \quad \square$$

10.3 Berretura-serieak

Atal honetan, funtzio-serieen mota berezi bat aztertuko dugu, gai orokorra binomio baten berretura dena; hots, polinomio bat eta, ondorioz, nahi den bezainbeste aldiz deribagarria edozein puntutan. Horrek inplikatuko du baturak ere, existitzen den puntuetan, ordena guztietako deribatuak dituela.

Definizioa. Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

funtzio-seriea x_0 *puntuan zentratutako berretura-seriea* dela diogu. a_n berretura-seriearen *n-garren koefizientea* da.

10.3.1 Berretura-serieen konbergentzia

10.3.1 teorema. *Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$ eta $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.*

(i) Existitzen bada $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_0$, non $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ konbergentea den, orduan, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolutuki konbergentea da $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ betetzen duten x guztietarako.

(ii) Existitzen bada $x_1 \in \mathbb{R}$ zeinetarako $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ dibergentea den, orduan, $\sum a_n(x - x_0)^n$ dibergentea da $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ betetzen duten x guztietarako.

Froga. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ konbergentea bada, $\lim_{n\to\infty} a_n(x_1 - x_0)^n = 0$ da; beraz, existitzen da $n_0 \in \mathbb{N}$ non, $n \geq n_0$ bada, $|a_n(x_1 - x_0)^n| \leq 1$ den.

Izan bedi $x \in \mathbb{R}$, non $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ den.

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(x_1 - x_0)^n| \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n \leq \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n, \quad \forall n \geq n_0.$$

$\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right| < 1$ denez, $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^n$ serie geometrikoa konbergentea da. Konparazio-irizpideak $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$ ere konbergentea dela ziurtatzen digu; hau da, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolutuki konbergentea dela.

(ii) Izan bedi, orain, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ dibergentea. Absurdora eramanez, demagun existitzen dela $x \in \mathbb{R}$, non $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ den, eta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konbergentea. Orduan, (i) atalaren arabera $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ absolutuki konbergentea izango litzateke, eta hori ez da posible. Beraz, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ dibergentea da $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ desberdintza betetzen duten x guztietarako. □

10.3.2 teorema. *Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ eta $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Orduan,*

(i) $\alpha > 0$ bada, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ berretura-seriea absolutuki konbergentea da $I = \left(x_0 - \frac{1}{\alpha}, x_0 + \frac{1}{\alpha}\right)$ tartean, eta dibergentea da $\left(-\infty, x_0 - \frac{1}{\alpha}\right) \cup \left(x_0 + \frac{1}{\alpha}, \infty\right)$ multzoan.

(ii) $\alpha = 0$ bada, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ seriea absolutuki konbergentea da zuzen erreal osoan.

(iii) $\alpha = +\infty$ bada, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ seriea konbergentea da soilik $x = x_0$ puntuan.

Froga. Izan bedi $x \in \mathbb{R}$. Erroaren irizpidea erabiliko dugu $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ zenbaki-seriearen izaera aztertzeko.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0| = |x-x_0|\alpha.$$

(i) $\alpha > 0$ bada, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ seriea konbergentea da $|x-x_0|\alpha < 1$ bada, eta dibergentea da $|x-x_0|\alpha > 1$ bada.

Beraz, $x \in \left(x_0 - \frac{1}{\alpha}, x_0 + \frac{1}{\alpha}\right)$ bada, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ absolutuki konbergentea da.

Baina, $|x-x_0| > \frac{1}{\alpha}$ bada, 10.3.2 teoremaren arabera $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ dibergentea da; bestela, beti topa dezakegu x eta $x_0 + \frac{1}{\alpha}$-ren artean edo $x_0 - \frac{1}{\alpha}$ eta x-ren artean puntu bat non serieak absolutuki konbergentea izan behar duen, eta badakigu hori ez dela egia.

(ii) $\alpha = 0$ bada, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = 0 < 1$ da $x \in \mathbb{R}$ guztietarako; beraz, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ absolutuki konbergentea da $\mathbb{R}$ osoan.

(iii) $\alpha = \infty$ bada, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ dibergentea da $x \neq x_0$ guztietarako, eta, aurreko teoremaren arabera, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ere dibergentea da $x \neq x_0$ guztietarako.

$x = x_0$ bada, seriearen batugai guztiak nuluak dira lehenengoa izan ezik, eta konbergentzia puntu horretan nabaria da. □

Definizioa. Izan bitez $x_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ eta $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(i) $\alpha > 0$ bada, $\rho = \frac{1}{\alpha}$ zenbaki erreala $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ berretura-seriearen *konbergentzia-erradioa* dela esaten da, eta $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ *konbergentzia-tartea*.

(ii) $\alpha = 0$ bada, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ seriearen konbergentzia-tartea $\mathbb{R}$ dela esaten da.

Adibideak. Honako adibide hauetan guztietan $x_0 = 0$ da.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ seriearen konbergentzia-tartea $(-1, 1)$ da, zeren eta $a_n = 1$ baita $n = 0, 1, \ldots$ guztietarako, eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$.

$x = 1$ eta $x = -1$ puntuetan, berretura-seriea dibergentea da.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ seriearen konbergentzia-tartea ere $(-1, 1)$ da. Izan ere, $a_n = \dfrac{1}{n}$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ da; beraz, $\rho = 1$.

$x = 1$ puntuan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ seriea dugu, dibergentea; eta $x = -1$ puntuan, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ serie alternatua dugu, konbergentea.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ seriearen konbergentzia-tartea $(-1, 1)$ da. Hemen, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako, eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ da.

$x = 1$ eta $x = -1$ puntuetan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ zenbaki-serieak ditugu, hurrenez hurren, biak konbergenteak.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ berretura-seriea konbergentea da $\mathbb{R}$ osoan. Izan ere, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ da, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako, eta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ dibergentea da $x \neq 0$ guztietan. Kasu horretan, $a_n = n!$ da n guztietarako, eta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

10.3.3 proposizioa. *Izan bitez $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ berretura-seriea eta $\rho > 0$ haren konbergentzia-erradioa. Orduan, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ seriea uniformeki konbergentea da $[x_0 - r, x_0 + r]$ tarte itxi eta bornatuan, $r < \rho$ guztietarako.*

Froga. Izan bedi $r < \rho$. $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ guztietarako, $|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| r^n$ da, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ edozein izanik.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|r^n} = \dfrac{r}{\rho} < 1$ da; beraz, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n$ zenbaki-seriea konbergentea da. Weierstrassen irizpidearen arabera, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ berretura-seriea uniformeki konbergentea da $[x_0 - r, x_0 + r]$ tartean, $r < \rho$ guztietarako. □

10.3.4 korolarioa. *Izan bitez $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ berretura-seriea eta $\rho > 0$ haren konbergentzia-erradioa. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ uniformeki konbergentea da $[\alpha,\beta]$ tartean $[\alpha,\beta] \subset (x_0-\rho, x_0+\rho)$ guztietarako.*

10.3.2 Berretura-serieen baturaren deribagarritasuna

Berretura-serie baten batugaien deribatuek osatzen duten funtzio-seriea beste berretura-serie bat da. Ikusiko dugu bi serie horien konbergentzia-erradioak berdinak direla. Horren ondorioz, berretura-serieen baturak C^∞ klaseko funtzioak dira haien konbergentzia-tarteetan.

10.3.5 teorema. *Izan bitez $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ berretura-seriea, $\rho > 0$ haren konbergentzia-erradioa eta f bere batura $I = (x_0-\rho, x_0+\rho)$ tartean. Orduan, f funtzioa I tartean deribagarria da, eta*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1}, \quad \forall x \in I.$$

Froga. Izan bedi $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n = 0, 1, \ldots$ guztietarako. f_n deribagarria da $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako, $f_n'(x) = n\, a_n(x-x_0)^{n-1}$ izanik $n \in \mathbb{N}$ bada, eta $f_0'(x) = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1}$ berretura-seriearen konbergentzia-erradioa $\tilde{\rho}$-ren bidez izendatzen badugu,

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho},$$

hau da, $\tilde{\rho} = \rho$ da. Gainera, $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1}$ berretura-seriea uniformeki konbergentea da $I = (x_0-\rho, x_0+\rho)$ tarteko edozein azpimultzo itxi eta bornatutan. Beraz, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ serieak f funtzio deribagarri batera uniformeki konbergitzen du, I tarteko edozein azpimultzo itxi eta bornatutan,

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n(x-x_0)^n\big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1}$$

izanik $x \in [\alpha,\beta]$ guztietarako, $[\alpha,\beta]$ I tarteko edozein azpimultzo itxi eta bornatu delarik.

Baina $x \in I$ bada, beti topa daitezke α eta β, non $x \in [\alpha,\beta] \subset I$ den; beraz,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-a)^{n-1}, \quad \forall x \in I. \qquad \square$$

10.3.6 korolarioa. *Izan bitez* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *berretura-seriea,* $\rho > 0$ *haren konbergentzia-erradioa, eta* f *haren batura* $I = (x_0-\rho, x_0+\rho)$ *tartean. Orduan,* f *infinitu aldiz deribagarria da, eta* $k \in \mathbb{N}$ *guztietarako*

$$f^{(k)}(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}, \quad \forall x \in I.$$

Froga. 10.3.5 teoremaren frogan ikusi dugun bezala, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$ seriearen konbergentzia-tartea ere I da; beraz, 10.3.5 teorema aplikatuz serie horri, I tartean deribagarria dela ondoriozta dezakegu. Gainera,

$$\begin{aligned} f''(x) = (f')'(x) &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1}\Big)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(n\,a_n(x-x_0)^{n-1}\big)' \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}, \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Indukzioaren printzipioa erabiliz, $f^{(k)}$ funtzioaren adierazpena lortzen da, $k \in \mathbb{N}$ guztietarako. □

Adibidea. Ikusi dugu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ berretura-seriea konbergentea dela $(-1,1)$ tartean. Gainera, serie horren batura $\dfrac{1}{1-x}$ da. x-rekin biderkatzen badugu,

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

da. Orain, deribatzen badugu, aurrean ikusitakoaren arabera,

$$\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \Longrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

da. x-rekin biderkatuz eta berriro deribatuz,

$$\Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} (nx^n)' \quad \Longrightarrow \quad \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$$

da. Beraz,

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n, \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

10.3.3 Berretura-serieen batura eta integrala

10.3.7 teorema. *Izan bitez* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *berretura-seriea,* $\rho > 0$ *haren konbergentzia-erradioa eta* f *haren batura* $I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *tartean.* f *funtzioa integragarria da* $[x_0, x]$ *tartean (edo* $[x, x_0]$ *tartean),* $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *guztietarako, eta*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho).$$

Froga. Suposatuko dugu $x \in (x_0, x_0 + \rho)$ dela, baina froga antzera egiten da $x_0 \in (x_0 - \rho, x_0)$ bada. $f_n(t) = a_n(t - x_0)^n$ funtzioa integragarria da $[x_0, x]$ tartean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako, eta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n$ uniformeki konbergentea da $[x_0, x]$ tartean; beraz, f ere integragarria da $[x_0, x]$ tartean, eta

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt &= \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-x_0)^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in (x_0, x_0+\rho).\end{aligned}$$

Lortzen den berretura-seriearen konbergentzia-tartea, berriro, I da. □

Adibidea. Serie geometriko baten baturaren formula gogoratuz,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Serie hori konbergentea da $(-1, 1)$ tartean. Beraz, $x \in (0, 1)$ guztietarako,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Hau da,

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

10.4 Taylorren serieak

Ikusi dugu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ berretura-seriearen baturak ordena guztietako deribatuak dituela haren konbergentzia-tarteko puntu guztietan, bereziki x_0 puntuan. Orain, alderantzizko egoera aztertuko dugu; hau da, f funtzioak x_0 puntuan infinitu deribatu baditu, aztertu nahi dugu f funtzioa berretura-serie baten batura bezala idaztea posible den ala ez.

Lehen ikusi dugun bezala, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ bada,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \ldots \Longrightarrow f(x_0) = a_0,$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots \Longrightarrow f'(x_0) = a_1,$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \ldots \Longrightarrow f''(x_0) = 2a_2.$$

Orokorrean, $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$ da, $k \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Definizioa. Izan bedi f funtzioa infinitu aldiz deribagarria x_0 puntuan. Honako hau da f funtzioaren x_0 *puntuko Taylorren seriea*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Gerta daiteke $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ berretura-seriea $x = x_0$ puntuan soilik konbergentea izatea, edo, nahiz eta $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ moduko tarte batean konbergentea izan, $\rho > 0$ izanik, haren batura f ez izatea tarte horretan.

10.4.1 teorema. *Izan bedi f funtzioa infinitu aldiz deribagarria $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tartean, $\delta > 0$ izanik. Demagun $|f^{(n)}(x)| \leq M$ dela $n \in \mathbb{N}$ eta $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ guztietarako. Orduan,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Froga. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ seriearen batura partzialen konbergentzia aztertu behar dugu. Hau da, $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$ bada, frogatu behar dugu

$$\lim_{n\to\infty}\Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\Big) = 0$$

dela.

Izan bitez $x \in (x_0, x_0+\rho)$ eta $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ f funtzioaren x_0 puntuko n-garren mailako Taylorren polinomioa da; beraz, 5.5.3 teoremaren arabera, existitzen da $\xi_n \in [x_0, x]$, non

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

den. Hipotesiaren arabera, $|f^{(n+1)}(\xi_n)| \leq M$ da n guztietarako; beraz,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Gauza bera gertatzen da $x \in (x_0 - \rho, x_0)$ bada. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ denez,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \qquad \square$$

10.4.1 Oinarrizko funtzioen Taylorren serieak

Atal honetan, oinarrizko funtzioen $x_0 = 0$ puntuko Taylorren serieak, edo McLaurin-en serieak, topatuko ditugu, eta haien konbergentzia aztertuko dugu.

(1) $f(x) = e^x$

$f^{(n)}(x) = e^x$ da $n \in \mathbb{N}$ guztietarako; beraz, $f^{(n)}(0) = 1$ da, eta honako hau da funtzio esponentzialaren $x_0 = 0$ puntuko Taylorren seriea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Orain, serie horren batura esponentziala dela konprobatu behar dugu. Ikusi dugu berretura-serie hori puntualki konbergentea dela $\mathbb{R}$ osoan. Gainera, $\delta > 0$ guztietarako, $|x| \leq \delta$ bada, $|f^{(n)}(x)| \leq e^\delta$ da. Beraz,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) $f(x) = \sin x$

Kalkula ditzagun f-ren ordena guztietako deribatuak $x_0 = 0$ puntuan. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bada,

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \exists m \in \mathbb{N} : \ k = 4m \text{ den}, \\ \cos x, & \exists m \in \mathbb{N} : \ k = 4m+1 \text{ den}, \\ -\sin x, & \exists m \in \mathbb{N} : \ k = 4m+2 \text{ den}, \\ -\cos x, & \exists m \in \mathbb{N} : \ k = 4m+3 \text{ den}, \end{cases}$$

beraz,

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \text{ bada,} \\ 1, & k \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4) \text{ bada,} \\ 0, & k \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 4) \text{ bada,} \\ -1, & k \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4) \text{ bada.} \end{cases}$$

Hau da, $f(x) = \sin x$ funtzioaren deribatu bikoitiak nuluak dira $x_0 = 0$ puntuan, eta ordena bakoitiko deribatuak 1 edo -1 dira.

Horren arabera, hau da $\sin x$ funtzioaren $x_0 = 0$ puntuko Taylorren seriea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Serie horren konbergentzia-tartea $\mathbb{R}$ osoa da, zeren eta $|a_n| = 0$ baita n bikoitia bada eta $|a_n| = \dfrac{1}{n!}$, n bakoitia bada; beraz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

da. Gainera, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$ da, $x \in \mathbb{R}$ eta $n \geq 0$ guztietarako. Ondorioz,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(3) $f(x) = \cos x$

Funtzio horren $k \in \mathbb{N}$ ordenako deribatua honako hau da:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \exists m \in \mathbb{N} : k = 4m \text{ den,} \\ -\sin x, & \exists m \in \mathbb{N} : k = 4m+1 \text{ den,} \\ -\cos x, & \exists m \in \mathbb{N} : k = 4m+2 \text{ den,} \\ \sin x, & \exists m \in \mathbb{N} : k = 4m+3 \text{ den.} \end{cases}$$

$x_0 = 0$ puntuan ebaluatzean, ordena bakoitiko deribatuak nuluak dira, eta ordena bikoitikoak, 1 edo -1. Beraz, hau da $\cos x$ funtzioaren $x_0 = 0$ puntuko Taylorren seriea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Aurreko kasuan bezala, serie hori konbergentea da $\mathbb{R}$ osoan, bere batura $\cos x$ izanik; hau da,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Taylorren serieak erabiliz, funtzio trigonometrikoen propietate batzuk froga daitezke. Adibidez, $\sin x$ funtzioaren Taylorren seriea deribatzen badugu,

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.\end{aligned}$$

(4) $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Erraz frogatzen da $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ guztietarako, deribatuak honako hauek direla:

$$f^{(2k)}(x) = \sinh x \Longrightarrow f^{(2k)}(0) = 0,$$
$$f^{(2k+1)}(x) = \cosh x \Longrightarrow f^{(2k+1)}(0) = 1.$$

Beraz, hau da $\sinh x$ funtzioaren $x_0 = 0$ puntuko Taylorren seriea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Serie horren konbergentzia-tartea $\mathbb{R}$ osoa da, eta $\delta > 0$ guztietarako

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{e^{\delta}+1}{2}, \quad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Beraz,

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funtzio horren Taylorren seriea lortzeko, kontuan har dezakegu funtzio esponentzialaren Taylorren seriea ere. Ikus dezagun.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{r}n! = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

n bakoitia bada $1 - (-1)^n = 2$ da, eta n bakoitia bada, aldiz, $1 - (-1)^n = 0$ da. Ondorioz,

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(5) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh x$ funtzioarekin gertatu den bezala, hemen ere Taylorren seriearen definizioa edo funtzio esponentzialaren Taylorren seriea erabil ditzakegu, honako garapen hau lortzeko:

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(6) $f(x) = \ln(1+x)$

Taylorren seriearen definizioa erabili nahi badugu, ordena guztietako deribatuen $x_0 = 0$ puntuko balioa kalkulatu behar dugu. Indukzioz, froga daiteke $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \Longrightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

dela. Beraz, $\ln(1+x)$ funtzioren $x_0 = 0$ puntuko Taylorren seriea honako hau da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Serie horren konbergentzia-erradioa 1 da, baina $(-1, 1)$ tartean bere batura $\ln(1+x)$ funtzioa dela frogatzeko, ezin da 10.4.1 teorema aplikatu. $\ln(1+x)$ funtzioaren $x_0 = 0$ puntuko Taylorren seriearen batura $\ln(1+x)$ dela egiaztatzeko, berretura-serieen propietateak erabiliko ditugu. Alde batetik,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Bestaldetik, $|t| < 1$ bada,

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n.$$

Integratuz, eta berretura-serie baten integrala integralen seriea dela kontuan izanik,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Era berean arrazoi dezakegu $x \in (-1, 0)$ bada. Beraz,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

(7) $f(x) = (1+x)^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ izanik.

Kalkula ditzagun f-ren deribatuak eta haien balioak $x_0 = 0$ puntuan.

$$\begin{aligned} f(x) = (1+x)^\lambda &\quad\Longrightarrow\quad f(0) = 1, \\ f'(x) = \lambda(1+x)^{\lambda-1} &\quad\Longrightarrow\quad f'(0) = \lambda, \\ f''(x) = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2} &\quad\Longrightarrow\quad f''(0) = \lambda(\lambda-1). \end{aligned}$$

Indukzioz, erraz frogatzen da $k \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$f^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}$$

dela, eta, ondorioz,

$$f^{(k)}(0) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1).$$

Izan bitez

$$\begin{aligned} \binom{\lambda}{0} &= 1, \\ \binom{\lambda}{n} &= \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Orduan, hau da $f(x) = (1+x)^\lambda$ funtzioaren $x_0 = 0$ puntuko Taylorren seriea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} x^n.$$

Kalkula dezagun konbergentzia-erradioa.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\binom{\lambda}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{\lambda}{n+1}}{\binom{\lambda}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-(n+1)+1)}{(n+1)!}}{\dfrac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\lambda - n}{n+1} \right| = 1.$$

Beraz, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} x^n$ seriea konbergentea da $(-1, 1)$ tartean. Gainera, froga daiteke seriearen batura tarte horretan $(1+x)^\lambda$ dela.

Kasu berezi batzuk aztertuko ditugu orain:

a) $\lambda \in \mathbb{N}$ bada, orduan, $\displaystyle\binom{\lambda}{n} = 0$ da $n > \lambda$ guztietarako, eta Taylorren seriea batura finitua da, polinomio bat, alegia.

b) $\lambda = -1$ bada,

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-1-1)\dots(-1-n+1)}{n!} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = (-1)^n;$$

beraz, ezagutzen dugun $\dfrac{1}{1+x}$ funtzioaren Taylorren seriea berreskuratzen dugu:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \forall x \in (-1,1).$$

c) $\lambda = -1/2$ bada, $n \geq 2$ guztietarako,

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\ &= \frac{(-1)(-3)(-5)\dots(-2n+1)}{2^n n!}\\ &= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2^n n!}\\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n-2)(2n)2^n n!} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

Beraz, $\binom{-1/2}{0} = 1$ eta $\binom{-1/2}{1} = -1/2$ direnez,

$$(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n, \quad \forall x \in (-1,1).$$

10.5 Ariketak

10.1. Azter ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren konbergentzia uniformea $[-1,1]$ tartean, f_n honako funtzio hau izanik:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \text{ bada,} \\ 1 - nx, & 0 \leq x < 1/n \text{ bada,} \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

10.2. Azter ezazu funtzio-segida hauen konbergentzia puntuala eta uniformea, ondoan agertzen diren D eremuetan:

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $D = [0,1]$

(ii) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $D = \mathbb{R}$

(iii) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} e^{-x/n}$, $D = [0,\infty)$

(iv) $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{2n}}{1 + x^{2n}}$, $D = \mathbb{R}$

10.3. Izan bedi $f_n(x) = e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida $[a,\infty)$ tartean uniformeki konbergentea dela, $a > 0$ guztietarako, baina $[0,\infty)$ tartean, aldiz, konbergentzia ez dela uniformea.

10.4. Izan bedi $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida $[0,\infty)$ tartean uniformeki konbergentea dela.

10.5. Izan bedi $f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida $[a,\infty)$ tartean uniformeki konbergentea dela, $a > 0$ guztietarako, baina $[0,\infty)$ tartean konbergentzia ez dela uniformea.

10.6. Izan bitez $f_n = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, $x \geq 0$ izanik. Baldin eta $0 < b < 1$ bada, orduan, froga ezazu funtzio-segida hori $[0,b]$ tartean uniformeki konbergentea dela, baina $[0,1]$ tartean konbergentzia ez dela uniformea.

10.7. Izan bitez

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{1}{n+1} \text{ bada,} \\ \sin^2(\pi/x), & \dfrac{1}{n+1} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \text{ bada,} \\ 0, & x > \dfrac{1}{n} \text{ bada.} \end{cases}$$

Froga ezazu $\{f_n\}$ funtzio-segidak jarraitua den funtzio batera konbergitzen duela, baina konbergentzia ez dela uniformea.

10.8. Azter ezazu $[0,1]$ tartean definitutako honako f_n funtzio hauek osatzen duten segidaren konbergentzia:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \le x \le 1/n \text{ bada,} \\ -n^2\left(x - \dfrac{2}{n}\right), & 1/n < x < 2/n \text{ bada,} \\ 0, & 2/n \le x \le 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ berdintza egia al da?

10.9. Izan bedi

$$f_n(x) = \begin{cases} \inf\left\{n, \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}, & x > 0 \text{ bada,} \\ 0, & x = 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

(i) Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida uniformeki konbergentea dela $[\delta,\infty)$ tartean, $\delta > 0$ guztietarako.

(ii) Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ez dela uniformeki konbergentea $(0,1)$ tartean.

(iii) Froga ezazu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ dela.

10.10. Izan bedi $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Froga ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segida uniformeki konbergentea dela $\mathbb{R}$ osoan, eta $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ betetzen dela $x \neq 0$ guztietarako, f funtzioa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidaren limitea izanik.

10.11. Izan bedi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \le n \text{ bada,} \\ \cos(x-n)\pi, & n < x < n+1 \text{ bada,} \\ -1, & x \ge n+1 \text{ bada.} \end{cases}$$

(i) Kalkula ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segidaren limite puntuala, f. Uniformea al da konbergentzia $\mathbb{R}$ osoan?

(ii) Froga ezazu f eta f_n deribagarriak direla eta $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidak f'-rantz konbergitzen duela. Uniformeki konbergentea al da $\mathbb{R}$-n?

10.12. Izan bedi $\{f_n\}$ funtzio-segida, non

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Azter ezazu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eta $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio-segiden konbergentzia.

10.13. Izan bedi $f_n(x) = (e^x - 1)e^{-nx}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Froga ezazu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ seriea $(0,1]$ tartean konbergentea dela, baina ez uniformeki konbergentea.

10.14. Azter ezazu funtzio-serie hauen konbergentzia puntuala eta uniformea ondoan adierazten diren D eremuetan:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2}, \quad D = \mathbb{R}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(1+\sin x)^n}, \; D = [0, \pi]$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \quad D = \mathbb{R}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)}, \quad D = [0, \infty)$

10.15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zenbaki-serie absolutuki konbergentea bada, frogatu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ funtzio-serieak uniformeki konbergenteak direla $\mathbb{R}$-n.

10.16. Izan bedi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Froga ezazu f-ren deribatua jarraitua dela $\mathbb{R}$-n.

10.17. Izan bitez $\sum a_n x^n$ berretura-seriea, haren konbergentzia-erradioa 2 izanik, eta $k \in \mathbb{N}$ zenbaki finkoa. Kalkulatu $\sum a_n^k x^n$ eta $\sum a_n x^{kn}$ serieen konbergentzia-erradioak.

Em.: $r_1 = 2^k$ eta $r_2 = \sqrt[k]{2}$.

10.18. Izan bedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1+2^n x)}, \qquad x \geq 0.$$

Froga ezazu f-k ordena guztietako deribatuak dituela $x = 0$ puntuan, eta

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

seriea soilik $x = 0$ puntuan dela konbergentea.

10.19. Berretura-serie hauetarako, kalkulatu konbergentzia-tartea eta aztertu konbergentzia-tarte horien muturretako portaera.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ *Em.:* $(-1/e, 1/e)$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{a^n+b^n}\Big)x^n,\quad a\geq b>0$ *Em.:* $(-\min(1,a),\min(1,a))$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln n\, x^n$ *Em.:* $(-1,1)$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\frac{x^n}{n!}$ *Em.:* $\mathbb{R}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n n^2}$ *Em.:* $[-2,2]$

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\,x^n$ *Em.:* $(-e,e)$

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{nx}{n+1}\Big)^n$ *Em.:* $(-1,1)$

(viii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$ *Em.:* $(1,3]$

(ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$ *Em.:* $(-7,-3)$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ *Em.:* $(-1,1]$.

10.20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ berretura-seriearen batura $(-1,1)$ tartean $\dfrac{1}{1-x}$ dela kontuan hartuz, eman itzazu honako funtzio hauen x-ren berretura-serieko garapenak:

(i) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$

(ii) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

(iii) $f(x)=\ln(1+x)$

10.21. Eman $g(x)=\dfrac{1}{2-x}$ funtzioa $x-1$, x eta $1/x$ funtzioen berretura-serieen batura bezala. Kasu bakoitzean, kalkulatu konbergentzia-tartea.

10.22. Izan bedi

$$g(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\sum a_n x^n.$$

Froga ezazu a_n koefizienteek $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ berdintza betetzen dutela. Azter ezazu seriearen konbergentzia-tartea.

10.23. Eman itzazu funtzio hauek x-ren berretura-serieen batura bezala, eta kalkula itzazu lortzen diren serieen konbergentzia-tarteak:

(i) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

(ii) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(iv) $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$

(v) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

(vi) $f(x) = \sin^2 x$

10.24. Eman ezazu $f(x) = \sqrt{1+x}$ funtzioa $(x-1)$-en berretura-serie baten batura gisa.

10.25. Eman ezazu $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t^2\, dt$ funtzioaren seriezko garapena x-ren berreturetan, eta erabaki ezazu noiz den konbergentea lortutako seriea.

11. gaia

Aldagai anitzeko funtzioak

Zientzia eta teknologian agertzen diren fenomenoak modelizatzeko, sarritan aldagai bat baino gehiago behar da. Adibidez, D solido baten tenperatura $(x, y, z) \in D$ puntuarekin aldatu egiten da; fluido baten abiadura adierazteko bektore bat behar da, fluidoaren puntuarekin eta denborarekin aldatu egingo dena. Gai honetan, aldagai anitzeko funtzioen sarrera bat egingo dugu, jarraitutasunaren eta diferentziagarritasunaren kontzeptuak definituz.

11.1 $\mathbb{R}^n$ espazioa

Aldagai anitzeko funtzioen definizio-eremuak $\mathbb{R}^n$ espazioko azpimultzoak dira, $n \in \mathbb{N}$ izanik. Gogora ditzagun, lehenengo eta behin, $\mathbb{R}^n$ espazioaren ezaugarri nagusiak.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \; : \; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

espazio bektorial erreala da honako bi eragiketa hauekin: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ badira, eta $\lambda \in \mathbb{R}$,

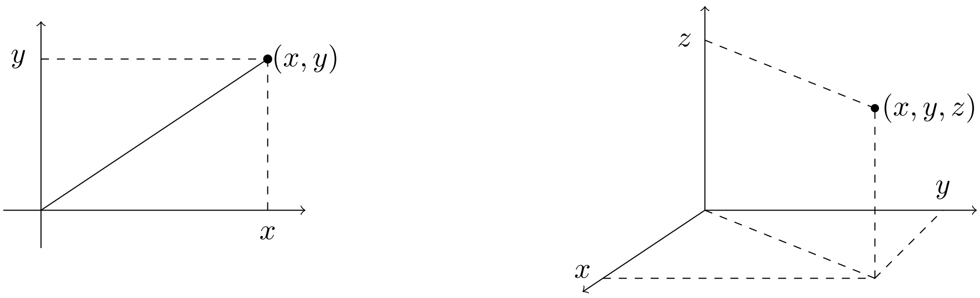
$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} =& (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \mathbf{x} =& (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ espazioko elementuak puntuekin zein bektoreekin identifikatzen dira, bereziki $n = 2$ eta $n = 3$ kasuetan.

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \; : \; x, y \in \mathbb{R}\}$ multzoko bikoteak planoan irudikatzen dira, ardatz horizontalean x koordenatua eta ardatz bertikalean y koordenatua kokatuz.
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \; : \; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ multzoko hirukoteak espazioan irudikatzen dira.

$\mathbb{R}^n$ espazio bektorialeko oinarri kanonikoa $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ da, $\mathbf{e}_i$ honela definitzen delarik:

$$\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n, \qquad \text{non} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \text{ bada,} \\ 0, & j \neq i \text{ bada.} \end{cases}$$



11.1 irudia. $\mathbb{R}^2$ planoko puntu baten koordenatu kartesiarrak (ezkerrean) eta $\mathbb{R}^3$ espazioko puntu baten koordenatu kartesiarrak.

Hau da, $\mathbf{e}_i$ bektorearen koordenatu guztiak nuluak dira i-garrena izan ezik, 1 dena. Horrela, $\mathbb{R}^2$ espazioko oinarri kanonikoa $\{(1,0),(0,1)\}$ da, eta, antzera, $\mathbb{R}^3$ espaziokoa $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ da.

Definizioa. Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{x}$-ren eta $\mathbf{y}$-ren arteko *biderkadura eskalarra* honela definitzen da:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Biderketa eskalarra erabiliz, *norma euklidearra* definitzen da $\mathbb{R}^n$ espazioan. Izan bedi $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

$n = 2$ bada, $||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ da, eta $n = 3$ bada, $||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

11.1.1 proposizioa (Desberdintza triangeluarra)**.** *Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, Orduan,*

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

11.1.2 proposizioa (Cauchy-Schwartz-en desberdintza)**.** *Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Orduan,*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}||.$$

Norma euklidearrak distantzia bat induzitzen du $\mathbb{R}^n$ espazioan.

Definizioa. Izan bitez $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{x}$-ren eta $\mathbf{y}$-ren arteko *distantzia euklidearra* honela kalkulatzen da:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definizioa. Izan bitez $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ eta $r > 0$.

$$B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < r\}$$

multzoa $\mathbf{x}_0$ *puntuan zentroa duen eta r erradioa duen bola irekia* dela diogu.

Definizioa. Izan bedi $D \subset \mathbb{R}^n$. Esaten dugu D multzoa *irekia* dela, $\mathbf{x} \in D$ guztietarako existitzen bada $r > 0$ non $B_r(\mathbf{x}) \subset D$ den.

Definizioa. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}^n$. $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ A-ren *metatze-puntua* dela diogu, baldin eta $r > 0$ guztietarako $(B_r(\mathbf{x}_0) - \{\mathbf{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset$ bada.

11.2 Aldagai anitzeko funtzioak. Oinarrizko definizioak

Definizioa. Izan bedi $D \subset \mathbb{R}^n$. D multzotik $\mathbb{R}$ espaziora doan aplikazioari *n aldagaiko funtzio erreal* edo *n aldagaiko funtzio eskalar* deritzo, eta honela idatzi ohi da:

$$\begin{aligned} f\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\to f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

$D = \mathrm{Dom}(f)$ f-ren definizio-eremua dela diogu.

$m \geq 2$ bada, D multzotik $\mathbb{R}^m$ espaziora doan aplikazioari *n aldagaiko funtzio bektorial* deritzo, eta honela adierazi ohi da:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\colon D &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\to \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \end{aligned}$$

non D $\mathbf{f}$-ren definizio-eremua den eta $f_j\colon D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $\mathbf{f}$ funtzioaren *osagai funtzioak* diren, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$.

Adibideak. Azter ditzagun aldagai anitzeko funtzio batzuk:

(i) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

f definituta dago planoko puntu guztietan, jatorrian izan ezik; beraz, haren definizio-eremua $D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ da.

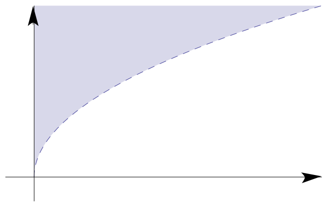
(ii) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.

Ikus dezagun zein den f-ren definizio-eremua, D. f definituta egon dadin $1 - (x^2 + y^2) \geq 0$ bete behar da; hau da, $x^2 + y^2 \leq 1$. Beraz, $\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ da; hots, $(0, 0)$ puntuan zentroa duen eta $r = 1$ erradioa duen zirkulua.

(iii) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

$f(x, y)$ kalkula daiteke $x \geq 0$ eta $y - \sqrt{x} > 0$ direnean; beraz,

$$\mathrm{Dom}\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y > \sqrt{x}\}.$$



11.2 irudia. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$ funtzioaren definizio-eremua.

(iv) $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2x_3, \sqrt{x_1^2 + x_4^2})$.

$\mathbf{f}$ 4 aldagaiko funtzio bektoriala da, haren definizio-eremua $\mathbb{R}^4$ osoa delarik.

Definizioa. Izan bedi $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n aldagaiko funtzio erreala. f-ren *grafikoa* $\mathbb{R}^{n+1}$ espazioko honako azpimultzo hau da:

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \;:\; (x_1, \ldots, x_n) \in D\}.$$

$n = 1$ denean, $\operatorname{graf}(f)$ $\mathbb{R}^2$ planoko kurba bat da,

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x, f(x)) \;:\; x \in D\} \subset \mathbb{R}^2;$$

$n = 2$ bada, $\operatorname{graf}(f)$ $\mathbb{R}^3$ espazioko gainazal bat da,

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x, y, f(x,y)) \;:\; (x,y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3;$$

$n \geq 3$ bada, f-ren grafikoa ezin dugu irudikatu, gutxienez lau dimentsio behar direlako.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n aldagaiko funtzio erreala eta $c \in \mathbb{R}$. f-ren c balioko *maila multzoa* honako hau da:

$$L_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D \;:\; f(x_1, \ldots, x_n) = c\}.$$

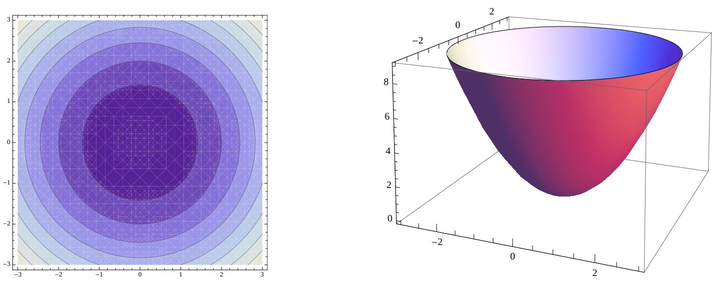
$n = 2$ bada, f-ren maila multzoak $\mathbb{R}^2$ planoko kurbak dira, orokorrean, eta maila-kurbak direla diogu.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x,y) = c\}.$$

$n = 3$ bada, f-ren maila multzoak $\mathbb{R}^3$ espazioko gainazalak dira, maila-gainazalak, hain zuzen.

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x,y,z) = c\}.$$

Maila multzoak lagungarriak dira aldagai anitzeko funtzio baten adierazpen grafikoa zein den ulertzeko. Adibidez, bi aldagaiko funtzio baten c balioko maila-kurbak ezagutzen baditugu, planoko kurba horiek c altuerara trasladatuz, f-ren grafikoa lortzen dugu.



11.3 irudia. $f(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioaren maila-kurbak (ezkerrean) eta grafikoa (eskuinean).

Lagungarria izaten da, baita ere, grafikoaren sekzio bertikal batzuk kontuan hartzea. Berriro, $n = 2$ kasuan, f-ren grafikoa OXZ eta OYZ planoekin ebakitzean lortzen diren kurbek, $z = f(x,0)$ eta $z = f(0,y)$ kurbek, alegia, lagunduko dute hobeto ulertzen zein den f-ren grafikoa.

Adibideak. Azter ditzagun funtzio batzuen grafikoak maila-kurben eta sekzio bertikalen laguntzaz.

(i) $f(x,y) = x + y + 2$ funtzioaren maila-kurbak $x + y + 2 = c$ ekuazioko kurbak dira; hots, -1 malda duten zuzenak. Adibidez, L_0 $x + y = -2$ ekuazioko zuzena da, eta L_2, $x + y = 0$ ekuaziokoa.

f-ren grafikoa $z = x + y + 2$ ekuazioko planoa da.

(ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioaren maila-kurbak aztertuko ditugu.

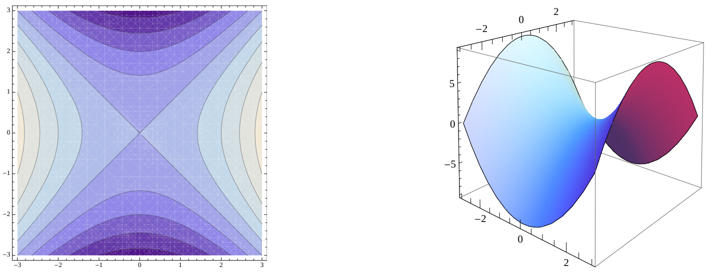
$c < 0$ bada, ez dago (x,y) punturik $x^2 + y^2 = c$ ekuazioa betetzen duenik; beraz, c balioko maila multzoa hutsa da. $c = 0$ bada, maila multzoa puntu bakar bat da, $(0,0)$ puntua, hain zuzen ere. Azkenik, $c > 0$ bada, c balioko maila-kurba $x^2 + y^2 = c$ da; hots, jatorrian zentroa duen eta $\sqrt{c}$ erradioa duen zirkunferentzia, 11.3 irudia.

Maila-kurbak c altuerara altxatuz, f-ren grafikoa lortzen da. Gainera, plano koordenatuekiko ebakidurak kalkulatuz, $z = f(x,0) = x^2$ eta $z = f(0,y) = y^2$ parabolak ditugu; beraz, f-ren grafikoa biraketa-paraboloidea da.

(iii) $f(x,y) = x^2 - y^2$ funtzioaren maila-kurbak aztertuko ditugu.

$c = 0$ bada, $x^2 - y^2 = 0$ ekuazioak bi zuzen deskribatzen ditu, $x = y$ eta $x = -y$ zuzenak. $c > 0$ bada, $x^2 - y^2 = c$ kurba OX ardatzean fokoak dituen hiperbola da. Aldiz, $c < 0$ bada, $x^2 - y^2 = c$ maila-kurba OY ardatzean fokoak dituen hiperbola da. Hau da, f-ren maila-kurbak hiperbolak dira, 11.4 irudia.

Bestalde, f-ren grafikoa OXZ planoarekin ebakiz, $z = f(x,0) = x^2$ parabola lortzen dugu, eta $z = f(0,y) = -y^2$ parabola, OYZ planoarekin ebakitzen bada. f-ren grafikoa paraboloide hiperbolikoa da.



11.4 irudia. $f(x, y) = x^2 - y^2$ funtzioaren maila-kurbak (ezkerrean) eta grafikoa (eskuinean).

Definizioa (Aldagai anitzeko funtzioen arteko eragiketak)**.** Izan bitez $\mathbf{f}, \mathbf{g}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ eta $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ izanik. Orduan, $\mathbf{f} + \mathbf{g}\colon D \to \mathbb{R}^m$ honela definitzen da:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x_1, \ldots, x_n)\\ &\qquad = (f_1(x_1, \ldots, x_n) + g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) + g_m(x_1, \ldots, x_n)).\end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}$ bada, $c\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ funtzioa honako hau da:

$$(c\mathbf{f})(x_1, \ldots, x_n) = (cf_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, cf_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Izan bitez $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Orduan, hau da $fg\colon D \to \mathbb{R}$ biderkadura funtzioa:

$$(fg)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)g(x_1, \ldots, x_n).$$

Izan bitez $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eta $\mathbf{g}\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$. Orduan, $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^q$ konposizioa honela definitzen da:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})((x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)) =\\ &(g_1(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, g_q(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))).\end{aligned}$$

11.3 Aldagai anitzeko funtzioen limiteak

Limitearen kontzeptua distantzian oinarritzen denez, ez da desberdintasunik egongo aldagai bateko funtzioen limiteen eta aldagai anitzeko funtzioen limiteen definizioen artean, distantziak neurtzeko moduagatik izan ezik: $\mathbb{R}^n$ espazioko puntuen arteko distantzia neurtzeko, balio absolutuaren ordez, distantzia euklidearra erabili behar da.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzioa, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ D-ren metatze-puntua eta $l \in \mathbb{R}$. f funtzioaren $\mathbf{x}_0$ puntuko *limitea* l dela diogu, eta $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$ idazten dugu, baldin eta

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \,:\, \forall \mathbf{x} \in D, \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - l| < \epsilon.$$

Definizioa. Izan bitez $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funtzio bektoriala, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$ D-ren metatze-puntua eta $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$. $\mathbf{f}$-ren $\mathbf{x}_0$ puntuko *limitea* $\mathbf{l}$ dela diogu, eta $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ idazten dugu, baldin eta

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \,:\, \forall\mathbf{x} \in D, \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \implies ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}|| < \epsilon.$$

11.3.1 teorema. *Izan bitez $f_j\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,m$, $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_m)$ eta $\mathbf{l} = (l_1,\dots,l_m) \in \mathbb{R}^m$. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ da, baldin eta soilik baldin $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = l_j$ bada, $j = 1,\dots,m$ guztietarako.*

Froga. Lehenengo eta behin, demagun $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ dela. Izan bedi $\epsilon > 0$, edozein. Orduan, existitzen da $\delta > 0$ non, $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$ bada, $||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}|| < \epsilon$ den. $|f_j(\mathbf{x}) - l_j| \leq ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}||$ denez, $j = 1,\dots,m$ guztietarako, $|f_j(\mathbf{x}) - l_j| < \epsilon$ da, eta, ondorioz, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = l_j$ da, $j = 1,\dots,m$ guztietarako.

Demagun orain $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = l_j$ dela, $j = 1,\dots,m$ guztietarako, eta izan bedi $\epsilon > 0$. Orduan, $j = 1,\dots,m$ bakoitzerako, existitzen da $\delta_j > 0$ non, $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta_j$ bada, $|f_j(\mathbf{x}) - l_j| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt{m}}$ den.

Izan bedi $\delta = \min\{\delta_1,\dots,\delta_m\}$. Orduan, $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$ bada,

$$||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}|| = \Big(\sum_{j=1}^{m} |f_j(\mathbf{x}) - l_j|^2\Big)^{1/2} < \Big(\frac{\epsilon^2}{m} m\Big)^{1/2} = \epsilon.$$

Hau da, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$ da. □

11.3.1 teoremaren arabera, funtzio bektorial baten limitea kalkulatzeko, nahikoa da haren osagai-funtzioen limiteak kalkulatzea; beraz, hemendik aurrera aldagai anitzeko funtzio eskalarren limiteak aztertuko ditugu. Limiteen oinarrizko propietateak laburbiltzen ditugu honako bi teorema hauetan. Frogak ez dira ematen, aldagai bateko funtzioen kasuan egin zirenen berdintsuak direlako.

11.3.2 teorema (Limitearen bakartasuna)**.** *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzioa, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ D-ren metatze-puntua eta $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l_1$ eta $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l_2$ badira, orduan, $l_1 = l_2$ da.*

11.3.3 proposizioa. *Izan bitez $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funtzioak, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ D-ren metatze-puntua, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l_1$ eta $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = l_2$ izanik, eta $c \in \mathbb{R}$. Orduan,*

(i) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = l_1 + l_2$ *da.*

(ii) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (cf)(\mathbf{x}) = cl_1$ *da.*

(iii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = l_1 l_2$ *da.*

(iv) $l_1 \neq 0$ *bada,* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{1}{f(\mathbf{x})} = \dfrac{1}{l_1}$ *da.*

(v) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x})| = |l_1|$ *da.*

Aztertuko dugu bereziki nola kalkulatu bi aldagaiko funtzio eskalarren limiteak.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ D-ren metatze-puntua. f-ren (x_0, y_0) puntuko *limite iteratuak* honako bi limite hauek dira:

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big) \qquad \text{eta} \qquad \lim_{y\to y_0}\Big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big).$$

11.3.4 proposizioa. *Izan bitez* $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *eta* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *D-ren metatze-puntua.* f*-ren* (x_0, y_0) *puntuko limitea eta bi limite iteratuak existitzen badira, orduan,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to y_0}\Big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big).$$

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ D-ren metatze-puntua. Izan bitez $I \subset \mathbb{R}$ x_0-ren ingurune bat, eta $\phi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0-n jarraitua, non $y_0 = \phi(x_0)$ den; hau da, $y = \phi(x)$ kurba (x_0, y_0) puntutik pasatzen da. Orduan, *f-ren $y = \phi(x)$ kurbarekiko limitea* (x_0, y_0) *puntuan* honela definitzen da:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=\phi(x)}} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f(x, \phi(x)).$$

Bi aldagaiko funtzio baten kurba batekiko limitea aldagai bateko funtzio baten limitea da, $f(x, \phi(x))$ funtzioarena, hain zuzen. $\mathbb{R}^2$ planoan kurba edo norabide desberdinen bidez hurbil gaitezke (x_0, y_0) punturantz: malda desberdinak dituzten zuzenak, parabolak... f funtzioaren (x_0, y_0) puntuko limitea $l \in \mathbb{R}$ bada, edozein kurbarekiko limiteak ere l balioa hartu beharko du.

11.3.5 proposizioa. *Izan bitez* $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *D-ren metatze-puntua,* $I \subset \mathbb{R}$ x_0*-ren ingurune bat eta* $\phi_1, \phi_2\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jarraituak* x_0*-n,* $y_0 = \phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$ *izanik. Orduan,*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=\phi_1(x)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=\phi_2(x)}} f(x,y)$$

bada, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *ez da existitzen.*

Adibideak. Bi aldagaiko funtzio batzuen limiteak aztertuko ditugu.

(i) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

f-ren zenbakitzailea eta izendatzailea anulatzen dira jatorrian; beraz, indeterminazio bat dugu. Limite norabidetuak kalkulatzeko, har ditzagun jatorritik pasatzen diren zuzenak; hots, $y = mx$ ekuazioa duten kurbak, $m \in \mathbb{R}$ izanik. Orduan,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x-mx}{x+mx} = \frac{1-m}{1+m}, \ \forall m \neq -1.$$

Jatorritik pasatzen diren zuzen desberdinek limite norabidetu desberdinak ematen dituzte; beraz, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ez da existitzen.

(ii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Kasu horretan ere, zenbakitzailea zein izendatzailea anulatzen dira $(0,0)$ puntuan. Kalkula dezagun $y = x$ zuzenarekiko limite norabidetua.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + (x-x)^2} = 1.$$

Aldiz, $y = mx$ zuzenarekiko limitea, $m \neq 1$ izanik, honako hau da:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2m^2x^2}{x^2m^2x^2 + (x-mx)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{m^2x^2 + (1-m)^2} = 0, \ \forall m \neq 1.\end{aligned}$$

Ondorioz, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ez da existitzen.

Arestian ikusitako adibideetan, norabide batzuekiko limite desberdinak topatuz, limitea ez dela existitzen frogatu dugu. Hau da, limite norabidetuak erabilgarriak dira limitea existitzen ez dela frogatzeko, baina ez limitea bera kalkulatzeko. Momentuz, limitea kalkulatzeko ditugun tresnak definizioa eta propietate aritmetikoak dira, baina horiek askotan ez dira nahikoak.

Sarritan, koordenatu polarrak lagungarriak dira bi aldagaiko funtzioen limiteak kalkulatzeko. (x_0, y_0) puntuko limitea kalkulatu nahi badugu, aldagai-aldaketa hau erabiliko dugu:

$$x = x_0 + \rho\cos\theta, \quad y = y_0 + \rho\sin\theta.$$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2$ denez, $\rho = ||(x,y) - (x_0,y_0)||$ da; beraz, pentsa daiteke

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$$

izango dela. Aurreko berdintzaren eskuineko atalean bi aldagaiko funtzio baten limitea kalkulatu behar da aldagai batekiko soilik.

11.3.6 teorema. *Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eta $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ D-ren metatze-puntua. Baldin eta $\lim_{\rho\to 0} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) = l \in \mathbb{R}$ bada uniformeki θ aldagaian; hau da,*

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{\theta\in(-\pi,\pi]} |f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) - l| = 0$$

bada, orduan,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) = l.$$

Oharra. Izan bedi $F(\rho,\theta) = f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$. Hauek dira $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta)$ θ aldagaian uniformea dela ziurtatzen duten baldintza batzuk:

(i) Existitzen bada $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non $|F(\rho,\theta) - l| \leq h(\rho)$ den $\theta \in (-\pi,\pi]$ guztietarako, eta $\lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 0$ den, orduan, $\lim_{\rho\to 0} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) = l \in \mathbb{R}$ da uniformeki θ aldagaian, eta, ondorioz, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ da.

(ii) Existitzen badira G eta h funtzioak non $F(\rho,\theta) - l = h(\rho)G(\theta)$ den, G bornatua eta $\lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 0$ izanik, orduan, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ da.

Adibideak. (i) Izan bedi $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. f-ren $(0,0)$ puntuko limitea kalkulatzeko, koordenatu polarrak erabiliko ditugu. $\theta \in (-\pi,\pi]$ guztietarako,

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{\rho^2+1-1} = \sqrt{\rho^2+1}+1.$$

$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\rho^2+1}+1) = 2$ denez, uniformeki θ-n, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2$ da.

(ii) Kalkula dezagun $f)x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ funtzioaren $(0,0)$ puntuko limitea, koordenatu polarrak erabiliz.

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \rho(\cos^3\theta + \sin^3\theta),\ \forall\,\theta \in (-\pi,\pi].$$

Hau da, $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = h(\rho)G(\theta)$, non $h(\rho) = \rho$ eta $G(\theta) = \cos^3\theta + \sin^3\theta$ diren.

$$|G(\theta)| = |\cos^3\theta + \sin^3\theta| \leq 2,\ \forall\,\theta \in (-\pi,\pi] \quad \text{eta} \quad \lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 0,$$

beraz, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$ da.

11.4 Aldagai anitzeko funtzioen jarraitutasuna

Behin limitearen kontzeptua definitu dugula, aldagai anitzeko funtzioen jarraitutasuna aldagai bateko funtzioetarako egin zen modu berean definitizen da; hots, funtzioaren balioa aztertu nahi den puntuan eta funtzioaren limitea puntu horretan berdinak izan behar dira.

Definizioa. Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eta $\mathbf{x}_0 \in D$. f funtzio eskalarra $\mathbf{x}_0$ puntuan *jarraitua* dela esaten dugu, baldin eta $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ bada; hots,

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ :\ \forall\,x \in D,\ ||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon.$$

Definizioa. Izan bitez $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eta $\mathbf{x}_0 \in D$. $\mathbf{f}$ funtzio bektoriala $\mathbf{x}_0$ puntuan *jarraitua* dela esaten dugu, baldin eta $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ bada; hots,

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ :\ \forall\,x \in D,\ ||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| < \delta \implies ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|| < \epsilon.$$

11.4.1 proposizioa. *Izan bitez $f_j\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,m$, $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_m)$ eta $\mathbf{x}_0 \in D$. $\mathbf{f}$ jarraitua da $\mathbf{x}_0$ puntuan, baldin eta soilik baldin f_j jarraitua bada $\mathbf{x}_0$ puntuan $j = 1,\ldots,m$ guztietarako; hau da, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x}_0)$ bada, $j = 1,\ldots,m$ guztietarako.*

11.4.2 proposizioa. *(i) Izan bitez $f, g\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D$ eta $c \in \mathbb{R}$. f eta g jarraituak badira $\mathbf{x}_0$ puntuan, orduan, $f+g$, cf eta fg ere jarraituak dira $\mathbf{x}_0$ puntuan. Gainera, $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ bada, $1/f$ ere jarraitua da $\mathbf{x}_0$-n.*

(ii) Izan bitez $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g}\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$, $\mathbf{x}_0 \in D$, eta demagun $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in E$ dela. $\mathbf{f}$ jarraitua bada $\mathbf{x}_0$ puntuan eta $\mathbf{g}$ jarraitua bada $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ puntuan, orduan, $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ jarraitua da $\mathbf{x}_0$-n.

11.4.2 proposizioaren arabera, n aldagaiko funtzio polinomikoak jarraituak dira $\mathbb{R}^n$ osoan, eta n aldagaiko polinomioen arteko zatidurak; hots, n aldagaiko funtzio arrazionalak, jarraituak dira definituta dauden puntu guztietan.

Adibideak. (i) Azter dezagun

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$$

funtzioaren jarraitutasuna $\mathbb{R}^2$ osoan. Argi denez, $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ bada, f jarraitua da (x_0,y_0) puntuan, f (x_0,y_0)-n anulatzen ez diren bi polinomioen arteko zatidura delako. Azter dezagun zer gertatzen den $(0,0)$-n. f-ren $(0,0)$ puntuko limitea kalkulatzeko koordenatu polarrak erabiliko ditugu. $\rho \neq 0$ bada,

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2} = \rho\cos^2\theta\sin\theta.$$

$|\cos^2\theta\sin\theta| \leq 1$ denez $\theta \in (-\pi, \pi]$ guztietarako,

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

da uniformeki θ-n, eta, ondorioz,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Beraz, f jarraitua da $(0,0)$-n ere.

(ii) Izan bedi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}, & y \neq -x^2 \text{ bada,} \\ 0, & y = -x^2 \text{ bada.} \end{cases}$$

Aurreko adibidean bezala, $y_0 \neq -x_0^2$ bada, f jarraitua da (x_0, y_0) puntuan anulatzen ez diren polinomioen arteko zatidura delako. Ikus dezagun zer gertatzen den $(x_0, -x_0^2)$ moduko puntuetan.

$x_0 \neq 0$ bada, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0^2)} (x^2+y^2) = x_0^2+x_0^4 \neq 0$ eta $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0^2)} (x^2+y) = 0$; beraz, f-ren limitea $(x_0, -x_0^2)$ puntuan ez da existitzen.

$x_0 = 0$ bada; hots, $(0,0)$ puntua aztertzen badugu, bi limite iteratuak kalkulatuko ditugu.

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+y}\Big) = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$
$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+y}\Big) = \lim_{y\to 0} y = 0.$$

Bi limite horiek desberdinak direnez, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ez da existitzen, eta, ondorioz, f ez da jarraitua $(0,0)$-n.

11.5 Aldagai anitzeko funtzioen diferentziagarritasuna

Aldagai bateko funtzioen deribatua funtzioaren balioen aldakuntzarekin erlazionatuta dago, limite baten bidez. Aldagai anitzeko funtzioen kasuan, funtzioaren balioen aldakuntza hori norabide desberdinak kontuan hartuz neurtu daiteke, deribatu norabidetuen kontzeptua sorraraziz. Bereziki, norabideak ardatz kartesiarrenak direnean, deribatu partzialak izango ditugu.

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D$ eta $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ bektore unitarioa; hau da, $||u|| = 1$. f-ren $\mathbf{u}$ *norabidearekiko deribatua* $\mathbf{x}_0$ *puntuan* $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$ edo $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$ ikurren bidez adieraziko dugu, eta honela definitzen da:

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}.$$

Adibidea. Izan bitez

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^6}, & y^6 \neq -x^3 \text{ bada,} \\ 0, & y^6 = -x^3 \text{ bada.} \end{cases}$$

eta $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ planoko bektore unitarioa. Kalkulatuko dugu $D_{(u_1,u_2)}f(0,0)$.

$$\begin{aligned} D_{(u_1,u_2)}f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{hu_1h^3u_2^3}{h(h^3u_1^3+h^6u_2^6)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u_1u_2^3}{u_1^3+h^3u_2^6} = \begin{cases} u_2^3/u_1^2, & u_1 \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & u_1 = 0 \text{ bada.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in D$ eta $\mathbf{e}_i$ $\mathbb{R}^n$ espazioko oinarri kanonikoaren i-garren bektorea, $\mathbf{e}_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n$, $i = 1,\ldots,n$. f-ren *i-garren deribatu partziala* edo *x_i aldagaiarekiko deribatu partziala* $\mathbf{x}_0$ puntuan f-ren $\mathbf{e}_i$ norabidearekiko deribatua $\mathbf{x}_0$ puntuan da; hots, $D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{x}_0)$, eta $D_if(\mathbf{x}_0)$ edo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ idatzi ohi da. Beraz, $\mathbf{x}_0 = (\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ bada, $i = 1,\ldots,n$ guztietarako,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{i-1},\tilde{x}_i+h,\tilde{x}_{i+1},\ldots,\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_i,\ldots,\tilde{x}_n)}{h}.$$

Praktikan, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ kalkulatzeko, aldagai guztiak konstante modura hartu behar ditugu, x_i izan ezik, eta deribazio-erregelak erabili aldagai horrekiko deribatzeko.

Oharra. Aldagai bateko funtzio baten puntu bateko deribatuaren existentziak funtzioaren jarraitutasuna bermatzen du puntu horretan. Aldiz, aldagai anitzeko funtzio baten norabide guztiekiko deribatuen existentziak puntu batean ez du ziurtatzen funtzioa puntu horretan jarraitua izango denik. Adibidez, izan bedi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{y+x^2}, & y \neq -x^2 \text{ bada,} \\ 1, & y = -x^2,\ x \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$$

Funtzio hori ez da jarraitua $(0,0)$ puntuan, baina $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ existitzen da $\mathbf{u}$ edozein bektore unitario izanik. Izan ere,

$$\begin{aligned} D_{(u_1,u_2)}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu_1,hu_2)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2u_1u_2}{h(hu_2+h^2u_1^2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u_1u_2}{u_2+hu_1^2} = \begin{cases} u_1, & u_2 \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & u_2 = 0 \text{ bada.} \end{cases} \end{aligned}$$

Izan bitez $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eta $x_0 \in (a,b)$. f funtzioa x_0 puntuan deribagarria dela diogu, baldin eta haren deribatua x_0-n existitzen bada,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Beste modu batean esanda, f deribagarria da x_0 puntuan, baldin eta soilik baldin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

bada, edo, baliokidea dena,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0$$

bada. f deribagarria bada x_0-n, aplikazio lineal bat defini daiteke, f-ren *diferentziala* x_0 puntuan:

$$df(x_0)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \quad \forall\, h\in\mathbb{R}.$$

$h = dx$ izendatuz, $df(x_0) = f'(x_0)dx$ laburtu ohi da.

Bestalde, f x_0-n deribagarria bada, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ ekuazioko zuzena $y = f(x)$ kurbaren $(x_0, f(x_0))$ puntuko zuzen ukitzailea da, eta $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ balioa $f(x)$ balioaren hurbilketa on bat da, x x_0-tik hurbil badago. Kontzeptu horiek aldagai anitzeko funtzioetara hedatu nahi ditugu.

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^2$ irekia, $f\colon D\to\mathbb{R}$ eta $(x_0,y_0)\in D$. Esaten dugu f funtzioa (x_0,y_0) puntuan *diferentziagarria* dela $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ f-ren deribatu partzialak (x_0,y_0) puntuan existitzen badira, eta

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right|}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0$$

bada.

Definizioa. Izan bitez $D\subset\mathbb{R}^2$ irekia, $f\colon D\to\mathbb{R}$ eta $(x_0,y_0)\in D$, f (x_0,y_0)-n diferentziagarria izanik. Orduan,

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

ekuazioko planoa $z = f(x,y)$ gainazalaren $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ puntuko *plano ukitzailea* dela esaten da.

Bestalde, f-ren deribatu partzialak (x_0,y_0) puntuan existitzen badira,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}$$

denez, aplikazio lineal bat ere defini dezakegu.

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^2$ irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eta $(x_0, y_0) \in D$, f (x_0, y_0)-n diferentziagarria izanik. Honako aplikazio lineal hau,

$$df(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

f-ren (x_0, y_0) puntuko *diferentziala* dela diogu.

$h_1 = dx$ eta $h_2 = dy$ eginez,

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Bi aldagaiko funtzioetarako definitu ditugun kontzeptuak n aldagaiko funtzioetarako ere defini daitezke, $n \geq 2$ izanik.

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eta $\mathbf{x}_0 \in D$. f funtzioa $\mathbf{x}_0$ puntuan *diferentziagarria* dela diogu, existitzen badira f-ren deribatu partzialak $\mathbf{x}_0$ puntuan, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, eta

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\left| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right|}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} = 0$$

bada. Kasu horretan,

$$df(\mathbf{x}_0)(h_1, \ldots, h_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

aplikazio lineala f-ren $\mathbf{x}_0$ puntuko *diferentziala* dela diogu, eta honela laburtzen da:

$$df(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)dx_n.$$

Azkenik, diferentziagarritasunaren definizio guztiz orokorra emango dugu.

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, eta $\mathbf{x}_0 \in D$. Esaten dugu $\mathbf{f}$ funtzioa $\mathbf{x}_0$ puntuan *diferentziagarria* dela, baldin eta existitzen bada $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio lineala, non

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)||}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} = 0$$

den. Kasu horretan, existitzen den aplikazio lineal hori bakarra da, eta $\mathbf{f}$-ren *diferentziala* dela diogu, $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ ikurrarekin adierazi ohi delarik.

11.5.1 proposizioa. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, eta $\mathbf{x}_0 \in D$. $\mathbf{f}$ funtzioa $\mathbf{x}_0$ puntuan* diferentziagarria *bada, $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ aplikazio linealarekin elkartutako matrizea, oinarri kanonikoekiko, honako hau da:*

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Froga. Izan bedi $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (h_1, \dots, h_n)$ eta

$$L(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{f}$ funtzioa $\mathbf{x}_0$ puntuan *diferentziagarria* denez,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})||}{||\mathbf{h}||} = 0$$

da, eta, ondorioz,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f_j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^n l_{ji} h_i}{||\mathbf{h}||} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Orain, goiko limitearen $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_i$ norabidearekiko limite norabidetua kalkulatuz, $i = 1, \dots, n$ guztietarako,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_j(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f_j(\mathbf{x}_0) - l_{ji}h}{h} = 0$$

da; hau da,

$$l_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \quad j = 1, \dots, m, \; i = 1, \dots, n. \qquad \square$$

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, eta $\mathbf{x}_0 \in D$. $\mathbf{f}$ funtzioa $\mathbf{x}_0$ puntuan *diferentziagarria* bada,

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

f*-ren* $\mathbf{x}_0$ *puntuko matrize jacobiarra* dela diogu.

Oharra. $\mathbf{f}$ $\mathbf{x}_0$ puntuan diferentziagarria izateko, haren deribatu partzial guztiak existitu behar dira puntu horretan, baina deribatu partzialen existentzia ez da nahikoa $\mathbf{f}$ diferentziagarria izateko.

11.5.2 teorema. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ eta $\mathbf{x}_0 \in D$. $\mathbf{f}$ diferentziagarria bada $\mathbf{x}_0$ puntuan, orduan, jarraitua da $\mathbf{x}_0$-n.*

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia eta $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$. $\mathbf{f}$ *D-n diferentziagarria* dela diogu, D-ren puntu guztietan diferentziagarria bada.

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia eta $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$. $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ deribatu partzialak jarraituak badira D multzoan $i = 1, \ldots, n$ eta $j = 1, \ldots, m$ guztietarako, orduan, $\mathbf{f}$ D multzoan *C^1 klasekoa* dela diogu, eta $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ idazten dugu.

Ikusi dugu deribatu partzialen existentziak ez duela diferentziagarritasuna ziurtatzen, baina deribatu partzialak jarraituak badira, orduan bai.

11.5.3 teorema. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia eta $\mathbf{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$. $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ bada, orduan, $\mathbf{f}$ diferentziagarria da D multzoan.*

11.5.3 teoremaren arabera, polinomioak diferentziagarriak dira $\mathbb{R}^n$ osoan, adibidez.

11.5.4 proposizioa. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia eta $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ diferentziagarriak $\mathbf{x} \in D$ puntuan. Orduan, $f+g$ eta fg diferentziagarriak dira $\mathbf{x}$-n. Gainera, $g(\mathbf{x}) \neq 0$ bada, f/g ere diferentziagarria da $\mathbf{x}$-n. Are gehiago,*

$$\begin{aligned} D(f+g)(\mathbf{x}) &= Df(\mathbf{x}) + Dg(\mathbf{x}), \\ D(fg) &= g(\mathbf{x})Df(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})Dg(\mathbf{x}), \\ D\Big(\frac{f}{g}\Big)(\mathbf{x}) &= \frac{g(\mathbf{x})Df(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})Dg(\mathbf{x})}{(g(\mathbf{x}))^2}. \end{aligned}$$

$\mathbf{f}, \mathbf{g}\colon D \to \mathbb{R}^m$ diferentziagarriak badira $\mathbf{x} \in D$ puntuan, orduan, $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ eta $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ diferentziagarriak dira $\mathbf{x}$-n eta

$$\begin{gathered} D(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}) + D\mathbf{g}(\mathbf{x}), \\ D(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot D\mathbf{g}(\mathbf{x}). \end{gathered}$$

Oharra. 11.5.4 proposizioaren berdintza guztietan diferentzialak matrize jacobiarrekin ordezka daitezke.

11.5.5 teorema (Katearen erregela)**.** *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ multzo irekiak eta $\mathbf{f}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g}\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$, non $f \circ g$ ondo definituta dagoen. $\mathbf{f}$ diferentziagarria bada $\mathbf{x} \in D$ puntuan eta $\mathbf{g}$ diferentziagarria bada $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ puntuan, orduan,*

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Hau da, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_q)$ eta $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} = (h_1, \ldots, h_q)$ badira, matrize jacobiarren arteko erlazio hau dugu:

$$J(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial h_q}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \frac{\partial g_q}{\partial y_2}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) & \ldots & \frac{\partial g_q}{\partial y_m}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Hau da, $D\mathbf{h}(\mathbf{x})$ matrizearen rs-garren gaia hauxe da:

$$\frac{\partial h_r}{\partial x_s} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_r}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_s}, \quad r = 1, \ldots, q, \ s = 1, \ldots, n.$$

Adibidea. Izan bitez $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, eta $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferentziagarriak. $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$ bada, orduan,

$$h'(t) = Df(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Adibidea. Izan bitez $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eta $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferentziagarriak, $g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$. $h = f \circ g$ bada; hau da,

$$h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)),$$

orduan, katearen erregelaren arabera,

$$Dh = DfDg = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Hau da,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}$$

Definizioa. Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia eta $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferentziagarria D-n. f-ren aplikazio diferentzialarekin elkartutako matrizea, bektore modura hartuta, f-ren *gradientea* da; hots,

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big).$$

11.5.6 proposizioa. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eta $\mathbf{x}_0 \in D$. f diferentziagarria bada $\mathbf{x}_0$ puntuan, orduan, f-ren norabide guztiekiko deribatuak existitzen dira $\mathbf{x}_0$ puntuan. Izan ere, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ edozein bektore unitario bada,*

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}.$$

Froga. Izan bedi $G(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$. G diferentziagarria da funtzio diferentziagarrien konposizioa delako. Alde batetik, deribatu norabidetuaren definizioaren arabera,

$$G'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{G(h) - G(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = D_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0).$$

Bestalde, katearen erregela aplikatuz,

$$G'(t) = \nabla f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u},$$

eta $t = 0$ puntuan ebaluatuz,

$$G'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}.$$

$G'(0)$ baliorako lortu ditugun bi adierazpenak berdinduz, frogatu nahi genuena lortzen da. □

11.5.7 proposizioa. *Izan bitez $D \subset \mathbb{R}^n$ irekia, $\mathbf{x}_0 \in D$ eta $f\colon D \to \mathbb{R}$ $\mathbf{x}_0$-n diferentziagarria.*

$$||\nabla f(\mathbf{x}_0)|| = \max\{|D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0)| \ : \ u \in \mathbb{R}^n, \ ||u|| = 1\}.$$

Hori dela eta, gradiente-bektoreak funtzioaren hazkunde maximoaren norabidea duela esaten da.

Froga. 11.5.6 proposizioaren arabera,

$$|D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0)| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| = ||\nabla f(\mathbf{x}_0)|| \; ||u|| \; |\cos\alpha|,$$

non α $\mathbf{u}$ eta $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ bektoreek osatzen duten angelua den. Orduan, norabide guztiekiko deribatuen balio absolutuen maximoa $|\cos\alpha| = 1$ denean lortzen da; hots, $\alpha = 0$ hartuz, edo $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{||\nabla f(\mathbf{x}_0)||}$ bektore unitarioa; eta, beraz,

$$\begin{aligned}
\max\{|D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0)| \ : \ u \in \mathbb{R}^n, \ ||u|| = 1\} &= \left| D_{\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{||\nabla f(\mathbf{x}_0)||}} f(\mathbf{x}_0) \right| \\
&= \left| \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{||\nabla f(\mathbf{x}_0)||} \right| = ||\nabla f(\mathbf{x}_0)||. \quad \square
\end{aligned}$$

11.5.8 proposizioa. *(i) Izan bedi* $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in D$ *puntuan diferentziagarria, haren deribatu partzialak puntu horretan jarraituak direlarik. Izan bedi* $C = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$ f*-ren maila-kurba, non* $(x_0, y_0) \in C$ *den.* $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ *bada, orduan,* $\nabla f(x_0, y_0)$ *bektorea* C *kurbarekiko ortogonala da* (x_0, y_0) *puntuan.*

(ii) Izan bitez $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (x_0, y_0, z_0) *puntuan diferentziagarria, haren deribatu partzialak puntu horretan jarraituak izanik, eta* $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$ f*-ren maila-gainazala, non* $(x_0, y_0, z_0) \in S$ *den. Orduan,* $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ *bada,* $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *bektorea* S *gainazalarekiko perpendikularra da* (x_0, y_0, z_0) *puntuan. Ondorioz,* S *gainazalaren plano ukitzailea* (x_0, y_0, z_0) *puntuan honako ekuazio honen bidez adierazten da:*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

11.6 Ariketak

11.1. Marraztu honako funtzio hauen definizio-eremuak:

(i) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$;

(ii) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(iii) $f(x,y) = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(iv) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{4x^2-y^2}}$;

(v) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$.

11.2. Kalkula itzazu limite hauek, existitzen badira:

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ *Em.:* 0

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$ *Em.:* 0

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ *Em.:* 0

(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ *Em.:* 1

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}$ *Em.:* $\nexists$

(vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ *Em.:* $\nexists$

(vii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$ *Em.:* 0

(viii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *Em.:* 0

11.3. Kalkulatu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ honako funtzio hauetarako:

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin(xy), & x \neq 0 \text{ bada,} \\ y, & x = 0 \text{ bada.} \end{cases}$ *Em.:* 0

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{x}{y}, & y \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & y = 0 \text{ bada.} \end{cases}$ *Em.:* 0

11.4. Izan bedi

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, \sin(x+y)\right), & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$$

Kalkulatu $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathbf{f}(x,y)$.

Em.: $(0,0)$

11.5. Aztertu funtzio hauen jarraitutasuna:

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+\sin(x+y)}{x+y}, & x+y \neq 0 \text{ bada,} \\ 0, & y = -x \text{ bada.} \end{cases}$

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$

(iii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bada,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bada.} \end{cases}$

11.6. Izan bedi

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \quad \forall\,(x,y) \neq (0,0).$$

Defini ezazu $f(0,0)$ balioa f funtzioa $(0,0)$ puntuan jarraitua izan dadin.

Em.: $f(0,0) = 1$

11.7. Izan bedi

$$f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, \quad \forall\,(x,y) \neq (0,0).$$

Defini ezazu $f(0,0)$ balioa f funtzioa $(0,0)$ puntuan jarraitua izan dadin.

Em.: $f(0,0) = 1/2$

11.8. Izan bedi $f(x,y) = e^{xy}$ funtzioa. Froga ezazu

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$$

egiaztatzen dela.

11.9. Kalkulatu honako funtzio hauen deribatu partzialak:

(i) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$;

(ii) $f(x,y) = e^{xy}\ln(x^2+y^2)$;

(iii) $f(x,y) = e^{xy}\cos y \sin x$.

11.10. Izan bedi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ bada,}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ bada.}\end{cases}$$

(a) Kalkulatu f-ren deribatu partzialak $(2,3)$ puntuan.

(b) Kalkulatu f-ren deribatu partzialak $(0,0)$ puntuan.

(c) Kalkulatu f-ren edozein norabiderekiko deribatua $(0,0)$ puntuan.

(d) Froga ezazu f funtzioa ez dela jarraitua $(0,0)$ puntuan.

11.11. Izan bedi

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ bada,}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ bada.}\end{cases}$$

Kalkulatu edozein norabiderekiko deribatua jatorrian. Aztertu f-ren diferentziagarritasuna jatorrian.

11.12. Izan bedi $f(x,y)=e^{2x+3y}$ funtzioa. Aztertu ea f funtzioa C^1 klasekoa den. Kalkulatu f-ren gradientea jatorrian.

Em.: $(2,3)$

11.13. Kalkulatu honako funtzio hauen deribatuak finkatutako puntuan eta emandako bektore unitoarioarekiko:

(i) $f(x,y)=x+2xy-3y^2$, $P=(1,2)$, $\mathbf{u}=(3/5,4/5)$; *Em.:* -5

(ii) $f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$, $P=(1,0)$, $\mathbf{u}=(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})$; *Em.:* $2/\sqrt{5}$

(iii) $f(x,y)=e^x\cos(\pi y)$, $P=(0,-1)$, $\mathbf{u}=(-1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$. *Em.:* $1/\sqrt{5}$

11.14. Kalkulatu $z=x^2+y^3$ gainazalaren plano ukitzailea $(3,1,10)$ puntuan.

11.15. Izan bedi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ bada,}\\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ bada.}\end{cases}$$

(a) Aztertu f-ren jarraitutasuna.

(b) Aztertu f-ren diferentziagarritasuna.

(c) Kalkulatu $(0,0)$ puntuan edozein bektore unitariorekiko f-ren deribatua, existitzen bada.

(d) Kalkulatu $(2,1)$ puntuan edozein bektore unitariorekiko f-ren deribatua, existitzen bada.

(e) Kalkulatu f funtzioaren grafikoaren plano ukitzailea $P=(2,1,3/5)$ puntuan.

Bibliografia

[1] M. Bilbao, F. Castañeda eta J.C. Peral, *Problemas de cálculo*, Pirámide, 1998.

[2] J. de Burgos, *Cálculo infinitesimal de una variable*, McGraw-Hill, 1994.

[3] M. de Guzmán eta B. Rubio, *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático*, Pirámide, 1993.

[4] B.P. Demidovich, *5000 problemas de Análisis Matemático*, Paraninfo, 1980.

[5] R.Larson eta B.H. Edwards, *Cálculo*, McGraw Hill, 9. argitalpena, 2011.

[6] J.E. Marsden eta A.J Tromba, *Cálculo Vectorial*, Pearson Education, 5. argit., 2004.

[7] J. M. Ortega, *Introducción al Análisis Matemático*, Labor, 1993.

[8] N.Piskunov, *Kalkulu diferentziala eta integrala*, UEU, 2.argitalpena, 2009.

[9] B. Rubio, *Números y convergencia*, Visión, 2006.

[10] B. Rubio, *Funciones de variable real*, Visión, 2006.

[11] W. Rudin, *Principios del Análisis Matemático*, McGraw Hill, 1987.

[12] M. Spivak, *Calculus*, Reverté, 2. argitalpena, 1996.

[13] A. Vera eta P. Alegría, *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*, AVL, 2000.

UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea