

Razonamiento y aprehensión ante una tarea geométrica: análisis de la pertinencia didáctica de una trayectoria de aprendizaje en educación infantil

Reasoning and understanding in the resolution of a geometric task: analysis of the didactical pertinence of a learning trajectory in early childhood education

Ainhoa Berciano*

 ORCID iD 0000-0001-7399-4745

Clara Jiménez-Gestal**

 ORCID iD 0000-0003-1766-2855

María Salgado***

 ORCID iD 0000-0002-0309-241X

Resumen

En esta investigación se analiza la pertinencia didáctica de una trayectoria hipotética de aprendizaje diseñada para fomentar la aprehensión y razonamiento geométrico en aprendices de cuatro y cinco años cuando realizan tareas relacionadas con el concepto de cilindro. Para ello, se ha diseñado e implementado una trayectoria hipotética de aprendizaje en un aula de Educación Infantil con un total de diecinueve infantes. Posteriormente, se ha seleccionado una muestra de cuatro niñas y cuatro niños y se ha analizado su discurso, teniendo en cuenta como variables de análisis los tipos de aprehensión de Duval y las características de los niveles 1 y 2 de Van Hiele. Los resultados muestran que las niñas y niños desarrollan distintos itinerarios de aprendizaje, que varían, principalmente, entre la aprehensión perceptiva y discursiva y el nivel 1 y ciertas características del nivel 2 de Van Hiele, y que muestran flujos de evolución muy distintos, pero en todos los casos con una evolución favorable, por lo que se ratifica la pertinencia didáctica de la trayectoria hipotética de aprendizaje diseñada.

Palabras clave: Aprehensión. Niveles de Van Hiele. Educación Infantil. Trayectoria hipotética de aprendizaje. Geometría.

Abstract

* Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla (US). Profesora en la Facultad de Educación de Bilbao de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), Bizkaia, España. E-mail: ainhoa.berciano@ehu.eus.

** Doctora en Matemáticas por la Universidad de La Rioja (UR). Profesora en la Facultad de Letras y de la Educación de la Universidad de La Rioja (UR), Logroño, España. E-mail: clara.jimenez@unirioja.es.

*** Doctora en Matemáticas por la Universidade de Santiago de Compostela (USC). Profesora en el CEIP Sigüeiro y en la Facultade de Educación (FE) de la Universidade de Santiago de Compostela (USC), Santiago de Compostela, España. E-mail: maria.salgado@usc.es.

This research analyses the didactical relevance of a hypothetical learning trajectory designed to encourage geometric understanding and reasoning in four- and five-year-old children in tasks related to the cylinder concept. To this end, a hypothetical learning trajectory has been designed and implemented in a classroom for Early Childhood Education with a total of nineteen children. Subsequently, a sample of four boys and four girls were selected and the answers given to the teacher were analysed, considering as analytical variables the types of understanding defined by Duval and the characteristics of levels 1 and 2 of Van Hiele. The results show that children develop different learning itineraries, which vary mainly between perceptive and discursive understanding and level 1 and certain characteristics of level 2 of Van Hiele, showing very different evolution flows, but in all cases with a favourable evolution, thus confirming the didactical relevance of the hypothetical learning trajectory designed.

Keywords: Understanding. Van Hiele levels. Early Childhood education. Hypothetical learning trajectory. Geometry.

1 Introducción

A la hora de abordar la enseñanza-aprendizaje de la matemática, uno de los factores que deben tenerse en cuenta es el concepto de *trayectoria hipotética de aprendizaje*, término que según Confrey y Maloney (2014) fue originalmente introducido por Simon (1995) y hacía alusión a un modelo teórico creado por el profesorado acerca del desarrollo del entendimiento mostrado por cada estudiante sobre un concepto matemático junto con una serie de actividades diseñadas para favorecer el aprendizaje diario del futuro alumnado.

Actualmente, dentro de las distintas acepciones que tiene una trayectoria hipotética de aprendizaje, esta puede ser entendida como un *constructo pedagógico* en el que deben determinarse los distintos niveles de aprendizaje. Esto es,

Una trayectoria hipotética de aprendizaje consta de tres partes: un objeto de aprendizaje (concepto matemático que debe ser aprendido por el alumnado), un desarrollo progresivo o un itinerario de aprendizaje a través del cual los niños y las niñas se mueven por distintos niveles de razonamiento y una instrucción, que les ayude a moverse a través de dicho itinerario. De modo más general, una trayectoria de aprendizaje es un conjunto de indicaciones y descripciones teóricas sobre el pensamiento matemático, asociando a este ciertas acciones y razonamientos dependiendo de la edad y el área de conocimiento matemático que se trate (SARAMA; CLEMENTS, 2009, p. 17).

Teniendo en cuenta la definición de trayectoria hipotética de aprendizaje, es claro que esta resulta muy útil tanto a nivel teórico como a nivel docente para poder guiar el aprendizaje matemático y evaluar la utilidad de un diseño metodológico u otro, de acuerdo con el objetivo previamente marcado.

Así, cuando nos centramos en estudios de investigación relacionados con trayectorias hipotéticas de aprendizaje, encontramos muchos trabajos relevantes relativos a estudiantes adolescentes que se encuentran cursando enseñanza secundaria. Por ejemplo, en Aranda y Callejo (2017), tras diseñar la trayectoria hipotética de aprendizaje asociada al concepto de integral definida, las autoras caracterizan la adquisición del concepto de aproximación al área

de una superficie bajo una curva en un experimento de enseñanza usando *applets*.

Por otra parte, para la formación de profesorado de educación primaria muchas investigaciones utilizan las trayectorias hipotéticas de aprendizaje de conceptos matemáticos como contenido clave de didáctica de la matemática. De este modo, usando la idea de trayectoria hipotética de aprendizaje para el diseño de actividades-tareas en la formación de profesorado, analizan el desarrollo de la capacidad docente, tanto a nivel de contenido matemático como de contenido de didáctica de la matemática (CALLEJO; ZAPATERA, 2017; SÁNCHEZ-MATAMOROS; FERNÁNDEZ; LLINARES, 2015).

Sin embargo, para el caso de educación infantil, a pesar de encontrar diversas investigaciones que han establecido ciertas trayectorias hipotéticas de aprendizaje asociadas a ámbitos de la matemática que deben trabajarse y adquirirse en edades tempranas (CLEMENTS; SARAMA, 2009), hemos de reconocer la dificultad de establecer de modo conciso estos itinerarios de aprendizaje, lo que da lugar a una falta de concreción en la mayoría de los casos.

Aun así, en este artículo, pretendemos analizar la pertinencia de una trayectoria hipotética de aprendizaje explícitamente diseñada para trabajar conceptos geométricos asociados a objetos tridimensionales en el segundo ciclo de educación infantil, especialmente con niños y niñas de cuatro y cinco años, es decir, queremos analizar si la trayectoria hipotética diseñada es adecuada y sirve de base eficaz para la Educación Infantil (CLEMENTS; WILSON; SARAMA, 2004). Esto es, si establece un itinerario de aprendizaje y enseñanza de objetos tridimensionales y permite saber, con anterioridad a su implementación, las distintas etapas de desarrollo cognitivo de los niños y las niñas de esta edad, cuando se enfrentan a actividades que fomentan su razonamiento geométrico.

Para tal fin, tras el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje asociada a un objeto matemático tridimensional cotidiano como el cilindro y su posterior implementación en el aula de Educación Infantil, analizamos la pertinencia y validez de esta a través del tipo de aprehensión y de razonamiento geométrico (por medio de los niveles de Van Hiele) que muestran en sus argumentaciones niñas y niños con edades comprendidas entre los cuatro y cinco años.

2 Marco teórico

En este apartado, desarrollamos los marcos teóricos en los que basamos nuestra investigación: la aprehensión de Duval (1998), los niveles de comprensión de la geometría de Van Hiele (VAN HIELE, 1999), las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (SARAMA;

CLEMENTS, 2009) y los experimentos de aprendizaje (MOLINA *et al.*, 2011).

Para comenzar, nos centramos en la *aprehensión*, entendida como el acto de captar la forma de las cosas sin hacer juicio de ellas, o sin afirmar ni negar. Con esta definición en mente, según Duval (1998), se pueden definir tres tipos de *aprehensión*: 1) *aprehensión perceptiva* (P), caracterizada por la identificación simple de una configuración; 2) *aprehensión discursiva* (D), definida por el establecimiento de asociaciones entre la configuración dada y afirmaciones matemáticas; y 3) *aprehensión operativa* (O), caracterizada por la realización de modificaciones mentales o físicas de la configuración original.

Igualmente, Duval (1998) plantea la dificultad de la enseñanza de la geometría debida a la complejidad cognitiva que presenta la actividad geométrica. Describe tres tipos de procesos cognitivos implicados: procesos de *visualización*, que hacen referencia a mirar la representación espacial para la ilustración de una idea o para la exploración *heurística* de una situación compleja; procesos de *construcción con herramientas*, que pueden servir para modelizar cómo las acciones se relacionan con los objetos matemáticos; procesos de *razonamiento*, en relación al proceso discursivo de extensión del conocimiento. Aunque estos tres procesos están fuertemente conectados, y es preciso que se desarrollen paralelamente para la competencia en geometría, no son interdependientes, es decir, se puede llegar a las figuras sin saber cómo se construyen y aunque la *visualización* puede dar una idea intuitiva de cómo llegar a una demostración, el razonamiento no depende más que del *corpus* de proposiciones disponible.

A lo largo de los últimos años, diversas investigaciones se han centrado en analizar el tipo de *aprehensión* que tiene el alumnado y la caracterización de la misma cuando el ámbito de conocimiento es la geometría; por ejemplo, Prior-Martínez y Torregrosa-Gironés (2013) analizan la interacción entre los procesos de razonamiento y los procedimientos de verificación que utiliza el alumnado de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en la resolución de problemas de geometría en contexto de lápiz y papel; Clemente y Llinares (2013) identifican características del conocimiento de geometría especializado en estudiantes para maestro en relación con el razonamiento *configural*.

Para el caso de la *visualización*, destacamos los trabajos de, por un lado, Torregrosa-Gironés, Quesada-Vilella y Penalva-Martínez (2010), en el que se identifican los procesos de *visualización* de estudiantes para maestro, cuando resuelven problemas de geometría que requieren una prueba matemática y, por otro, Clemente, Llinares y Torregrosa (2017), en el que analizan la relación entre la identificación de figuras prototípicas y el conocimiento geométrico en la resolución de problemas de probar como muestra del razonamiento *configural* de

estudiantes para maestro, destacando la importancia de la relación entre la visualización y el conocimiento geométrico en el desarrollo de dicho razonamiento.

Por otro lado, atendiendo a Fernández (2013), son varios los trabajos realizados en los últimos años con el fin de determinar qué niveles de razonamiento intervienen en las habilidades de visualización, dando lugar a estudios que analizan la relación entre los niveles de Van Hiele y las habilidades de visualización; pero, aun así, no se conocen estudios que se centren en analizar o caracterizar la aprehensión en razonamiento geométrico en la etapa educativa de tres a seis años.

Para la etapa de Educación Infantil, si nos fijamos en los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (VAN HIELE, 1999; GUTIÉRREZ, 2012), aunque estos se plantean como niveles de aprendizaje no ligados a la edad cronológica de los sujetos, en la mayoría de los casos los niños y las niñas sólo alcanzan el nivel 1, pero se consideran alcanzables los niveles 1 y 2:

En el Nivel 1, se considera que la persona es capaz de reconocer las figuras geométricas por su forma globalmente, pero no diferencia partes de ellas ni es capaz de explicar propiedades determinantes de las figuras. Hace descripciones visuales, táctiles etc. y es capaz de compararlas con objetos de su entorno.

En el Nivel 2, la persona ya es capaz de reconocer y analizar las partes y propiedades de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas. El establecimiento de las propiedades se produce de forma empírica, a través de la manipulación y la experimentación.

Para que estos niveles de razonamiento geométrico sean adquiridos correctamente y una tarea de geometría favorezca el paso de modo gradual a un nivel de razonamiento cada vez mayor, la enseñanza-aprendizaje debe estar secuenciada en distintas fases, definidas por Van Hiele (GUTIÉRREZ, 2012, p. 46):

- 1) información (se plantean actividades que sirvan como toma de contacto y favorezcan la identificación de conocimientos y formas de razonamiento);
- 2) orientación dirigida (se ponen ejemplos, construir con distintos materiales, comparaciones con objetos del entorno,...);
- 3) explicitación (se deben explicar los resultados obtenidos y justificar las afirmaciones hechas);
- 4) orientación libre (se resuelven problemas diferentes a los anteriores, más complejos) y
- 5) integración (se establecen conexiones y relaciones con conceptos anteriores).

Son muchos los trabajos que analizan las distintas capacidades de los niños y niñas de Educación Infantil acerca de la visualización, cuando esta se centra en tareas de representación de objetos planos; en particular, destacamos aquellos trabajos que se centran en estudiar las dificultades de las y los infantes, cuando estos se sitúan en un nivel de comprensión entre los niveles 1 y 2 de Van Hiele.

Por ejemplo, en un estudio sobre la comprensión conceptual del cuadrado en educación

infantil, Halat y Yesil-Dagli (2016) proponen a niños y niñas de cinco y seis años seis tareas, ordenadas según los niveles de Van Hiele, en las que dada una colección de figuras dibujadas en un papel se les pide que identifiquen cuáles de ellas son cuadrados, y concluyen que, aunque la mayoría es capaz de dibujar un cuadrado, diferenciarlo de figuras muy diferentes (como un círculo o una estrella) y reconocerlo en objetos cotidianos, entre un 79 % y un 56 % (según el contexto) comete errores en la identificación cuando la figura aparece con una inclinación o tamaño no habituales.

De modo similar, concluyen en Yesil-Dagli y Halat (2016) que, tras realizar un estudio enfocado en la comprensión conceptual del triángulo, la mayoría de niños y niñas de cinco y seis años son capaces de dibujarlo, pero en aproximadamente la mitad de los casos observados se aprecian problemas para identificar triángulos no prototípicos en lo que respecta a tamaño, tipo u orientación.

Finalmente, en Novo y Berciano (2019), se realiza un estudio longitudinal sobre la capacidad de representación matemática de niños y niñas en edades tempranas (cuatro a seis años), caracterizando sus producciones en dictados matemáticos. Entre los resultados obtenidos, las autoras destacan que la repetición de tareas con dificultad equivalente dentro del mismo dictado fomenta el aprendizaje significativo, independientemente del nivel cognitivo de las niñas y de los niños, y, en consonancia con los niveles de Van Hiele, se detectan mayores dificultades en la representación simbólica de objetos bidimensionales cuando estos presentan un mayor grado de abstracción y complejidad matemática.

Aun así, son pocos los trabajos que analizan la comprensión geométrica de los niños y niñas de educación infantil cuando estos deben realizar tareas asociadas a la visualización de objetos tridimensionales.

En el trabajo de Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017) se muestra un estudio de caso con un niño de cuatro años acerca de la comprensión que tiene sobre un cilindro desde un punto de vista matemático; para ello analizan el tipo de argumentos que realiza el niño cuando se le plantea una tarea que requiere de la visualización de objetos tridimensionales y de sus propiedades. En dicho trabajo se concluye que una intervención docente, guiada gradualmente, siguiendo las fases de Van Hiele, fomenta un incremento en el tipo de razonamiento y aprehensión por parte del niño, llegando a mostrar un nivel 2 de Van Hiele y aprehensión operativa (superior a la esperada en esta etapa educativa).

2.1 Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Acorde con Sarama y Clements (2009), entendemos una trayectoria hipotética de aprendizaje como una herramienta útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje que consta de tres elementos: un objeto de aprendizaje, que será el concepto matemático que debe ser aprendido por el alumnado; un itinerario de aprendizaje o recorrido esperado por los distintos niveles de razonamiento a través del cual los niños y las niñas se mueven y una instrucción, secuencia de tareas que les ayuden a moverse a través de dicho itinerario.

Las trayectorias de aprendizaje han demostrado ser útiles para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en los niños y niñas, ya que relacionan el nivel en el que están con las actividades de instrucción que se les proponen para pasar de cada nivel de comprensión al siguiente, haciendo especial hincapié en los procesos de pensamiento más que en las respuestas a las tareas planteadas.

Centrando nuestro interés en educación infantil, destacan trabajos de investigación en los que se analiza la pertinencia didáctica de una trayectoria hipotética de aprendizaje en la adquisición de conceptos matemáticos (CLEMENTS; WILSON; SARAMA, 2004) o aquellos en los que se plantea el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la adquisición de conceptos matemáticos (p.e., RAMÍREZ-GARCÍA; DE CASTRO-HERNÁNDEZ, 2014; ZAPATERA-LLINARES, 2018). Aun así, en todos ellos, las áreas de interés son fundamentalmente la aritmética, la pre-álgebra y la geometría plana.

2.2 Experimentos de enseñanza

Acorde a Molina *et al.* (2011), para poder recopilar información sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en contextos de aula y analizar el proceso de adquisición del conocimiento matemático por parte del alumnado, un método idóneo es el conocido como experimento de enseñanza, consistente en una secuencia de actividades diseñadas específicamente para ser llevadas al aula con este objetivo. En el desarrollo de un experimento de enseñanza se establecen tres fases, en las que se identifican diferentes acciones.

En la primera fase, preparación del experimento, se definen tanto el objetivo de investigación como los objetivos instruccionales, se evalúan los conocimientos previos del alumnado y se diseña la secuencia de actividades, atendiendo a la metodología de enseñanza elegida. Además, es necesario describir los instrumentos usados para la recogida de datos.

La segunda fase es la experimentación. Esta fase ocurre en el aula y se basa en la implementación de las actividades diseñadas; para ello, es importante que, previamente a cada una de las intervenciones, se hayan identificado los objetivos instruccionales, diseñado la

actuación de docentes e investigadoras y la interacción con el alumnado. En esta fase se realiza la recogida de datos y las modificaciones oportunas sobre el diseño establecido si es necesario, y tras las mismas el análisis de los datos recogidos.

La tercera y última fase del experimento de enseñanza es el análisis retrospectivo de los datos que consiste, esencialmente, en recopilar y organizar toda la información recogida para su análisis.

Trabajos previos como Bernabeu, Moreno y Llinares (2019) muestran la eficacia de los experimentos de enseñanza para realizar investigaciones relacionadas con la investigación matemática en contextos de aula. En el caso del aula de infantil, encontramos trabajos como el de Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2021) que analizan las bondades de un experimento de enseñanza con respecto a la visualización.

3 Metodología

Para poder dar respuesta al objetivo de investigación anteriormente descrito, desde un paradigma de investigación de diseño (MOLINA *et al.*, 2011), realizamos una investigación cualitativa sobre el tipo de razonamiento y argumentación geométrica que caracterizan el proceso de construcción del concepto de cilindro en niños y niñas con edades comprendidas entre los cuatro y cinco años. Así, el experimento de enseñanza que se describe en este artículo está enmarcado dentro de un proyecto más amplio, que pretende contextualizar a las niñas y los niños en situaciones reales, donde deban relacionar las matemáticas con la vida cotidiana. En lo que continúa, detallamos la fase 1 y la fase 2 del experimento de enseñanza.

3.1 Fase 1: preparación del experimento

3.1.1 Objetivos de investigación

Evaluar la pertinencia de una trayectoria hipotética de aprendizaje, especialmente diseñada para trabajar nociones geométricas asociadas a objetos tridimensionales (en este caso el cilindro) en el aula de Educación Infantil. Para tal fin, analizamos:

1. Tipos de razonamiento que manifiestan infantes de cuatro y cinco años.
2. Tipos de aprehensión de infantes de cuatro y cinco años.

3.1.2 Participantes

El experimento de enseñanza se ha implementado en el aula de cuatro años de Educación Infantil, con un total de diecinueve infantes. Para la selección de las participaciones mostradas en el presente estudio, se han tenido en cuenta los siguientes factores: i) tener una edad intermedia; ii) participación activa en clase; iii) interés en responder a las preguntas de las maestras; y iv) equilibrio numérico en la selección con respecto al género; por lo que se han seleccionado cuatro niñas y cuatro niños, que denotamos, de ahora en adelante, como: N1 a N8. (N1-N5 son los códigos de tres niñas y dos niños de cuatro años, mientras que N6-N8 hacen alusión a dos niños y una niña de cinco años). La selección de participantes se ha hecho por conveniencia, atendiendo a la participación en todos los momentos del desarrollo de la actividad.

3.1.3 Diseño de la secuencia de actividades

Para el diseño de la secuencia de actividades de instrucción, se ha seleccionado como contexto de aprendizaje el desplazamiento en vehículos. Esta situación real tiene la finalidad de destacar la *Importancia social de la rueda: ¿por qué algunos objetos ruedan y otros no?* En este caso, pretendemos realizar un acercamiento comprensivo al concepto de cilindro, sus características y propiedades y construcción del mismo desde un rectángulo. Además, se han tenido en cuenta los marcos teóricos descritos en el apartado anterior, que, a continuación, resumimos brevemente:

1. La trayectoria hipotética de aprendizaje asociada al concepto de cilindro diseñada por las autoras de este trabajo y que se detalla en el Cuadro 1, está basada en trabajos previos sobre objetos bidimensionales y tridimensionales y conocimiento espacial de infantes de tres a seis años. Entre los conocimientos que los niños y las niñas pueden desarrollar en esta etapa (SARAMA; CLEMENTS, 2009), destacamos: 1) reconocimiento y distinción de formas planas (círculos, cuadrados, rectángulos y triángulos); 2) reconocimiento y distinción de objetos 3D y de sus partes; 3) determinación de algunas congruencias, por comparación de atributos de los objetos; 4) construcción y composición de objetos 3D. Estos conocimientos previos han sido usados para determinar los objetivos instruccionales (Cuadro 1).
2. Las tres primeras fases de enseñanza-aprendizaje definidas por Van Hiele (GUTIÉRREZ, 2012, p. 46): 1) información, 2) orientación dirigida y 3) explicitación.

3. A lo largo de la actividad, se intenta fomentar los tres procesos cognitivos descritos por Duval (1998), de visualización, de construcción de herramientas y el razonamiento, haciendo especial hincapié en el primero y el último.

La secuenciación de la actividad está recogida en el Cuadro 1.

Actividad	Descripción de la actividad	Objetivo instruccional	Agrupación docente	Fases de VH	Proce según Duval	NVH
A1. Importancia y necesidad de la rueda	Reproducción del vídeo <i>La pantera rosa y la rueda</i> y planteamiento de interrogantes: objetos que ruedan, cómo movemos las cosas, cómo andan los coches, por qué algunos objetos ruedan y otros no	Constatar la necesidad de la existencia del cilindro	Asamblea	1	P	1
A2	Turno de respuestas y justificación de las mismas. Entre las preguntas realizadas por la maestra destaca una en la que se solicita a los niños y niñas que digan qué es un cilindro	Descubrir sus conocimientos previos acerca del cilindro	Asamblea	1	P	1
A3. Participación de infantes	Con cada uno de los niños que participen de modo espontáneo, establecimiento de una conversación guiada por parte de la maestra	Constatar la necesidad de la existencia del cilindro y descubrir sus conocimientos previos acerca del cilindro	Asamblea	1	D	1
A4.	Construcción del cilindro dada una hoja de papel	Relacionar el desarrollo plano y el cilindro Construir objetos 3d (por apilamientos, enrollando el papel, ...)	Pequeño grupo	2	D	1
A5.1	Exploración de sus propiedades físicas y relación con la realidad	Establecer relaciones entre el desarrollo plano y el cilindro	Pequeño grupo	2	D	1
A5.2	Exploración de sus propiedades físicas y relación con la realidad	Comprobar empíricamente la capacidad de rodar y la posibilidad de apilarse sobre la cara curva. Construir de modo físico el cilindro atendiendo a las características	Pequeño grupo	2	O	1
A6.1	Conversación con cada niña o niño, para favorecer la verbalización de las conclusiones a las que ha llegado mediante la actividad, y descripción de las características del cilindro	Reconocer la existencia de formas planas y objetos: círculo, rectángulo, cilindro, 3d-objeto...	Individual	3	D	2

A6.2	Conversación con cada niña o niño, para favorecer la verbalización de las conclusiones a las que ha llegado mediante la actividad, y descripción de las características del cilindro	Reconocer la existencia de formas planas y objetos: círculo, rectángulo, cilindro, 3d-objeto...	Individual	3	O	2
------	--	---	------------	---	---	---

Cuadro 1 - Descripción de la secuencia de actividades, niveles de Van Hiele y tipo de Aprehensión de Duval (adaptada de Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado, 2017)

Fuente: elaboración propia

El objeto definido, junto con las actividades de instrucción y el itinerario seguido al ir pasando, progresivamente, por cada una de ellas constituyen la trayectoria hipotética de aprendizaje asociada a este experimento de enseñanza.

3.1.4 Instrumentos de recogida y análisis de datos

Para la recogida de datos y su análisis se han realizado grabaciones en vídeo de los niños y niñas en las distintas fases de la realización de la tarea planteada. Posteriormente, se han transcrito las conversaciones y actuaciones de niñas y niños y maestra, etiquetando las líneas de la transcripción con números consecutivos para facilitar las referencias.

Para el análisis de las transcripciones se ha considerado la rúbrica definida por Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017), a su vez, basada en: i) los ítems que caracterizan los niveles 1 y 2 de Van Hiele y ii) los tipos de aprehensión definidos por Duval (ver Cuadro 2), y para la determinación de los distintos itinerarios de aprendizaje se han considerado flujogramas asociados a las argumentaciones de los niños y las niñas.

Tipo de Aprehensión De Duval		Perceptiva	Discursiva	Operativa	
Niveles De Van Hiele	1	Conceptos básicos	Nombrar figuras planas (es una cosa cuadrada, es un folio, ...) Círculo, circular...	Justificar el cilindro como unión de círculos (el cilindro tiene muchos redondos)	-
		Consideraciones visuales	Nombrar una forma geométrica por su aspecto (cuadrado)	Justificar construcción por su aspecto visual (porque tiene un redondel)	-
		Consideraciones táctiles	Verbos que describan manipulación del objeto (lo he enrollado) Adjetivos que describan el objeto tras su manipulación manual (es blandito)	Justificar qué es un cilindro y qué no manipulando objetos	-
		Descripción de propiedades globales	Mencionar acciones asociadas al cilindro	Plantear acciones para comparar (hacemos una)	Manipular mentalmente el cilindro y describir sus

		(rodar) Mencionar propiedades globales con verbo ser (son muy estrechos)	carrera y lo vemos) Justificar respuestas con características (porque se parecen a círculos, pero alargados) (porque si le ponemos una cosa dura encima se aplastan)	propiedades tras la manipulación (pero si lo cortamos, tiene menos redondos)
2	Análisis informal de relaciones	Comparar grosores entre cilindros (es más estrecho que)	Justificar acciones por comparación de posiciones (porque los que están abajo se caen...)	Transformar un cilindro en otro de diferente grosor o longitud
	Análisis informal de propiedades	Describir una propiedad (rueda mucho si lo hago así)	Justificar acciones con comparación de propiedades (el de Laura es más rápido, este es más gordo...); justificar la construcción de cilindros a través de sus propiedades.	Construir un cilindro como unión de círculos (los representa en el plano, los recorta y los une)
	Definiciones de estructura lógica simple	-	Justificar por qué ruedan los cilindros (¿una característica de los cilindros? sí, son cosas que ruedan)	Comparar cilindros mentalmente y distinguir sus propiedades (el de I es más delgado por eso los círculos más pequeños)
	Demostraciones de tipo empírico	-	Justificar tras experimentar con los cilindros, si se puede o no hacer un tipo de construcción	Acciones asociadas a responder la pregunta. (lo probamos [que era cierto] con una carrera.)
	Experimento basado en ejemplo	Manipular y experimentar con varios cilindros a la vez para probar algo de sus propiedades	Justificar y concluir por qué gana un cilindro y no otro	Cambiar de escenario el problema y emitir conclusiones asociadas a varios posibles casos.

Cuadro 2 -Niveles de Van Hiele y tipo de Aprehensión de Duval (Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado, 2017)
Fuente: elaboración propia

En el desarrollo de esta actividad no contemplamos que se vayan a producir acciones que se puedan clasificar como aprehensión perceptiva y de nivel 2 o de aprehensión operativa con los tres primeros ítems del nivel 1. Igualmente, en el Cuadro anteriormente descrito, en cada apartado hemos puesto entre paréntesis respuestas *tipo* que las niñas y los niños de estas edades pueden decir o acciones que pueden hacer con el fin de facilitar su comprensión.

Para el análisis teórico del diseño de la experiencia con respecto a la trayectoria de aprendizaje asociada, hemos tenido en cuenta la estructura del experimento determinada por las fases de aprendizaje de Van Hiele y, por otro lado, la evolución teórica esperada de la aprehensión. En este sentido, hemos relacionado la trayectoria hipotética de aprendizaje de Clements y Sarama (2009) para el aprendizaje de objetos 2d y 3d y pensamiento espacial en edades comprendidas entre los tres y los seis años y la estructura del experimento. En este caso, el objeto de aprendizaje que subyace a la trayectoria hipotética de aprendizaje que presentamos

es la necesidad de reconocer las diferencias existentes entre los objetos tridimensionales y bidimensionales, evidenciada en el desarrollo de una propuesta de instrucción centrada en trabajar el concepto de cilindro.

Así, la evolución en el aprendizaje, mostrada en el Cuadro 2, debe entenderse como un camino evolutivo marcado en sentido ascendente. Para poder mostrar los resultados obtenidos de este análisis, de modo sintético, utilizamos un flujograma sobre la tabla de descriptores de los niveles de Van Hiele colocados en filas (con cuatro para el nivel 1 y cinco para el nivel 2, detallados en el Cuadro 1) y los niveles de aprehensión de Duval colocados en columnas (P de perceptiva, D de discursiva y O de operativa) de la siguiente figura. Así, el tipo de razonamiento de cada niño o niña será representado por medio de un itinerario (un *camino* dirigido marcado sobre la tabla) que comienza con un punto sobre el tipo de razonamiento que muestre en la primera actividad; va variando según su razonamiento en el resto de actividades y acaba en otro punto con una flecha asociado al razonamiento mostrado en la actividad final.

	P	D	O
WH-1			
WH-2			

Figura 1 - Tabla usada para el flujograma
Fuente: elaboración propia

3.2 Fase 2: experimentación

La experimentación se puede consultar en Salgado, Berciano y Jiménez-Gestal (2018), donde se detallan las actividades más pormenorizadamente.

4 Resultados

Como ya hemos comentado en apartados anteriores, para poder evaluar la pertinencia de la trayectoria hipotética de aprendizaje antes descrita, analizamos los distintos tipos de razonamiento y aprehensión mostrados por las niñas y los niños a lo largo de la implementación de las actividades, lo que se corresponde con la tercera fase del experimento de enseñanza.

Para poder mostrar, de modo sistemático, los resultados, estos han sido organizados acorde a las distintas fases de aprendizaje de la actividad. En este sentido, la transcripción de

las interacciones entre pares y con la maestra (disponible en <https://bit.ly/3vm5c5P>), grabadas para su análisis, proporcionó datos para poder clasificar los tipos de aprehensión alcanzados y la evolución del razonamiento a lo largo de la intervención educativa. Esto nos permite establecer diferentes itinerarios de aprendizaje: quienes alcanzan una aprehensión meramente perceptiva en el Nivel 1 de Van Hiele; aprehensión discursiva en el Nivel 1; aprehensión perceptiva en el Nivel 2; aprehensión discursiva en el Nivel 2 de Van Hiele y aprehensión operativa en el Nivel 2 de Van Hiele.

Los casos que presentamos, a continuación, reflejan los resultados obtenidos por estudiantes de cada uno de los itinerarios. Para entenderlos mejor, estos: 1) han sido estructurados acorde a la secuencia de actividades guiadas por la maestra, atendiendo a las agrupaciones docentes (asamblea, pequeño grupo e individual); 2) contienen algunos fragmentos de las transcripciones que se han analizado y los flujogramas de la evolución de la argumentación dada por los niños y las niñas a través de la caracterización de sus niveles de Van Hiele y Aprehensión y 3) no se muestran las transcripciones completas de cada participante, pero sí, se incluyen en el lugar adecuado de las tablas las etiquetas de las líneas que recogen su intervención.

4.1 Nivel 1, aprehensión perceptiva

En la asamblea, la maestra guía la conversación para identificar los conocimientos de la clase. La grabación en vídeo de la actuación nos permite diferenciar las intervenciones de cada estudiante. El diálogo siguiente corresponde a la niña N8.

M. ¿Alguien conoce formas geométricas? ¿figuras planas? ¿formas planas? ¿no conocéis formas planas?

(Otros estudiantes responden que un rectángulo, un folio. La maestra insiste ¿otra forma que no sea rectángulo?)

L41. Cuadrado.

M. Un cuadrado, muy bien (Diálogo entre la maestra y la niña, 2017).

Aunque la maestra sigue interpellando a la clase acerca de las figuras que conocen, esta es toda la intervención que realiza durante la asamblea la alumna que mostramos. Coincide con el resto de estudiantes de este tipo en que realizan pocas intervenciones en la asamblea.

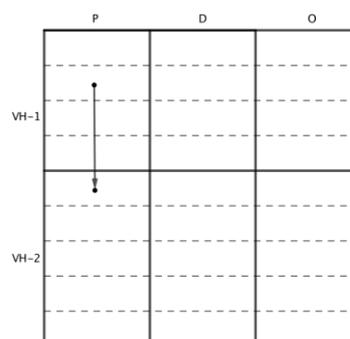
Tabla 1 - Evolución de N8 (cinco años)

		Tipo de	Perceptiva	Discursiva	Operativa
		Aprehensión de Duval			
Niveles de Van Hiele					
1	Conceptos básicos				
	Consideraciones visuales		41		
	Consideraciones táctiles		363		
	Descripción de propiedades globales		365, 367, 371, 378		
2	Análisis informal de relaciones		375, 383		
	Análisis informal de propiedades				
	Definiciones de estructura lógica simple				
	Demostraciones de tipo empírico				
	Experimento basado en ejemplo				

Fuente: elaboración propia

El número de intervenciones en la actividad individual es mayor, ya que se trata de un diálogo dirigido con cada estudiante. En el caso que se presenta, se limita a aportar el nombre de una figura geométrica en la asamblea, sin embargo, en la tarea individual hace diferentes apreciaciones acerca de la construcción del cilindro “sí, lo he enrollado y luego le he puesto celo” (N8, 2017, p. 10) y de las propiedades que tienen los cilindros y otros objetos. En la conversación se aprecia que llega a hacer un análisis informal de relaciones, comparando las características de diferentes cilindros, pero no podemos considerar que alcance el Nivel 2 de Van Hiele, debido a la escasa evidencia mostrada.

La Figura 2 recoge el flujograma de la estudiante N8 cuyas intervenciones recogemos en la Tabla 1. Se puede observar que, a lo largo de las intervenciones, la niña muestra un progresivo avance en los ítems descritos en el primer nivel de Van Hiele, haciendo pequeñas argumentaciones relacionadas con aspectos básicos, consideraciones visuales, táctiles e incluso propiedades globales del objeto, sin embargo, no hay evolución en cuanto a la aprehensión se refiere, no superando la perceptiva.


Figura 2 -Flujograma de N8

Fuente: elaboración propia

En este mismo tipo podemos situar a la niña N2, de cuatro años, cuya rúbrica es prácticamente igual que la de N8, por lo que la omitimos, y cuyo flujograma es idéntico al mostrado, pese a ser un año menor.

4.2 Nivel 1, *aprehensión discursiva*

Presentamos, aquí, los resultados de dos estudiantes representativos, uno de cinco años (N7) y otro de cuatro años (N5), para evidenciar que esta trayectoria se puede dar en diferentes cursos escolares. Sigue el dialogo entre la maestra y el niño N7.

P: ¿Cómo has construido tu cilindro?

L207: Haciendo un redondel.

P: ¿Un redondel? ¿y dónde hacías un redondel?

L209: En un papel.

P: ¿Sí? ¿Y cómo es tu cilindro? ¿qué propiedades tiene?

L211: Rueda.

P: Vale. ¿Y tu crees que los cilindros se pueden poner uno encima de otro?

L213: No.

P: ¿No por qué?

L215: Porque los que están abajo se caen. Y los de arriba después se ponen en el sitio, en el sitio donde estaba el que se escapó de su sitio.

P: Una pregunta ¿has ganado la carrera?

L218: Sí.

P: ¿Y por qué crees que tu cilindro ha ganado la carrera?

L220: Porque era muy redondo.

P: Ah, y por eso redaba muy bien. Mira, ¿Conoces cosas que rueden?

L222: Sí, las ruedas (Diálogo entre la maestra y el niño N7, 2017).

En el primer caso, Tabla 2, las intervenciones que realiza en la asamblea comienzan con la aportación de conceptos básicos como el nombre de las figuras que conoce y terminan con la respuesta *haciendo un redondel* a la pregunta de la maestra de *¿cómo podemos construirlo?* En el desarrollo de las actividades en pequeño grupo plantea *Haremos una carrera y así sabremos cuál es el más rápido* pese a que no ha construido su cilindro, y una vez que lo construye vuelve a mostrar la *aprehensión perceptiva* describiendo propiedades globales del mismo. Respecto a las actividades individuales, ante las preguntas de la maestra es capaz de argumentar acerca de las relaciones y propiedades, lo que se evidencia en las respuestas L215 a L220.

Tabla 2 - Evolución de N7 (cinco años)

Niveles de Van Hiele		Tipo de Aprehensión de Duval	Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos		11, 38		
	Consideraciones visuales		97	103-106	
	Consideraciones táctiles		109		
	Descripción de propiedades globales		196-198, 207-211	151	
2	Análisis informal de relaciones		212	215-216	
	Análisis informal de propiedades			218-222	
	Definiciones de estructura lógica simple				
	Demostraciones de tipo empírico				
	Experimento basado en ejemplo				

Fuente: elaboración propia

En la transcripción de esta conversación se recogen las preguntas de la maestra durante las actividades individuales, que son las mismas en todos los casos, lo que permite comparar los niveles de aprehensión.

En cuanto al estudiante N5, reflejado en la Tabla 3, sus intervenciones en la asamblea se centran en la descripción del cilindro, haciendo referencia tanto a conceptos básicos, *es algo circular que también es como un círculo por arriba*, como a consideraciones táctiles, *es blandito*, o a descripción de propiedades, *Y también ruedan por las mesas y por los suelos, porque son unas cosas que se parecen a círculos, pero alargados*.

En las actividades en pequeño grupo, elabora el cilindro enrollando un folio sin dificultad, pide cello para completarlo y lo echa a rodar para comprobar que rueda, *rueda mucho si lo hago así*.

Durante el desarrollo de las actividades individuales, da muestras de aprehensión perceptiva y discursiva cuando se refiere a la descripción y análisis informal de propiedades, pero no podemos decir que alcance un Nivel 2 de Van Hiele porque se queda en los dos primeros ítems que lo describen y lo hace de modo muy puntual.

Tabla 3 - Evolución de N5 (cuatro años)

Niveles de Van Hiele		Tipo de Aprehensión de Duval	Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos		393		
	Consideraciones visuales				
	Consideraciones táctiles		397, 420-422		
	Descripción de propiedades globales		407, 491, 495-496	410-411, 464, 468, 472, 480	
2	Análisis informal de relaciones		460		
	Análisis informal de propiedades		447-449, 483	489, 493	

Definiciones de estructura lógica simple
 Demostraciones de tipo empírico
 Experimento basado en ejemplo

Fuente: elaboración propia

En ambos casos se aprecia una evolución hacia la aprehensión discursiva y un paulatino avance hacia el análisis informal de relaciones y propiedades que establecen los Van Hiele como de Nivel 2, aunque la observación del flujograma de la Figura 3 indica ligeras diferencias.

Mientras que el estudiante de cinco años (N7) cambia en sus intervenciones de la aprehensión perceptiva a la discursiva y viceversa, para terminar con expresiones que muestran predominantemente la aprehensión discursiva, el de cuatro años (N5) limita su discurso a lo referente a propiedades, bien sea a su descripción o su análisis.

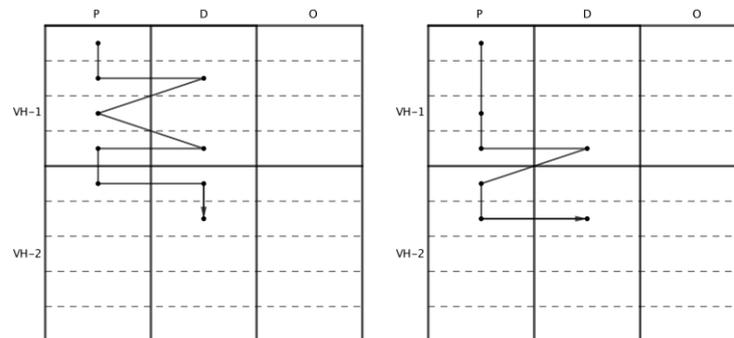


Figura 3 - Flujograma de N7 y N5

Fuente: elaboración propia

4.3 Nivel 2, aprehensión perceptiva

Esta estudiante, N4, tiene una única intervención en la asamblea, en la que se limita a describir un cilindro como *Una parte que es así*, señalando la palma de su mano y deslizando el dedo sobre ella. En las actividades en pequeño grupo comienza dibujando en el papel hasta que, como respuesta a la pregunta de si su cilindro puede rodar, enrolla el papel para construir un cilindro.

Tabla 4 - Evolución de N4 (cuatro años)

Niveles de Van Hiele	Tipo de Aprehensión de Duval		
	Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos Consideraciones visuales Consideraciones táctiles Descripción de propiedades globales	389, 419 436, 438, 572, 593, 595, 597	
2	Análisis informal de relaciones Análisis informal de propiedades	575, 577, 580, 583 599	

Definiciones de estructura lógica simple	
Demostraciones de tipo empírico	
Experimento basado en ejemplo	588-591, 611

Fuente: elaboración propia

En el desarrollo de las actividades individuales, N4 muestra aprehensión perceptiva en el análisis informal de relaciones y propiedades, y llega a realizar experimentos para responder a la pregunta de la maestra, pero no verbaliza una respuesta.

El flujograma muestra una evolución a través de los ítems considerados como definitorios de los niveles de Van Hiele a lo largo de las tres fases del aprendizaje, pero no avanza en el tipo de aprehensión manifestada, manteniéndose en la perceptiva.

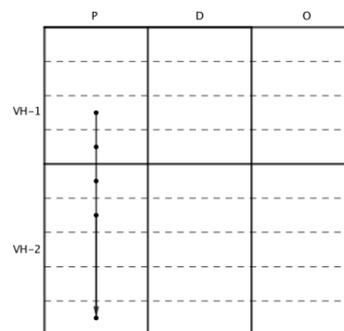


Figura 4 - Flujograma N4
Fuente: elaboración propia

4.4 Nivel 2, aprehensión discursiva

Los resultados que presentamos a continuación corresponden a dos estudiantes de características en principio distintas, un niño de cinco años (N6) y una niña de cuatro (N3), pero que podemos enmarcar en un mismo tipo.

En el primero de los casos (N6), ya en la asamblea se produce la primera afirmación que podemos considerar como muestra de aprehensión discursiva:

M: Y otra cosa, ¿por qué creéis que es un rectángulo y no un cuadrado, A6?

L99: Porque es mucho más largo (pasando la mano por uno de los lados largos del folio) (Diálogo entre la maestra y el estudiante N6, 2017).

Tabla 5 - Evolución de N6 (cinco años)

Niveles de Van Hiele		Tipo de Aprehensión de Duval		
		Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos	83		
	Consideraciones visuales			
	Consideraciones táctiles		99	
	Descripción de propiedades globales	117		
2	Análisis informal de relaciones			

—	Análisis informal de propiedades		326-328
	Definiciones de estructura lógica simple		335-342
	Demostraciones de tipo empírico		346-348
	Experimento basado en ejemplo	130	358-360

Fuente: elaboración propia

Mientras que en las actividades en pequeño grupo las intervenciones se quedan en perceptivas, a lo largo de la conversación con la maestra en las actividades individuales se puede apreciar la evolución en el nivel 2 de Van Hiele con una aprehensión discursiva.

En el caso de la niña de cuatro años (N3), (Tabla 6), en la asamblea pone de manifiesto que reconoce lo que es un cilindro, en las actividades en pequeño grupo lo construye sin problema y en las actividades individuales se aprecia su aprehensión discursiva cuando es capaz de relacionar los objetos que tiene delante con afirmaciones matemáticas del tipo *se metió por dentro porque es más pequeño*.

Tabla 6 - Evolución de N3 (cuatro años)

Niveles de Van Hiele	Tipo de Aprehensión de Duval	Perceptiva	Discursiva	Operativa
		1	Conceptos básicos	418
	Consideraciones visuales	391		
	Consideraciones táctiles	386-387		
	Descripción de propiedades globales	515		
2	Análisis informal de relaciones	523	527	
	Análisis informal de propiedades	529	538-540, 544	
	Definiciones de estructura lógica simple			
	Demostraciones de tipo empírico	534-536		
	Experimento basado en ejemplo			

Fuente: elaboración propia

La observación de los flujogramas nos muestra una diferencia entre N6 y N3. Mientras que en N6 (recordemos que tiene cinco años) las intervenciones que muestran aprehensión perceptiva están relacionadas fundamentalmente con conceptos básicos y descripción de propiedades globales y las discursivas cubrirían casi todos los ítems del Nivel 2 de Van Hiele, en el caso de N3 hay un recorrido perceptivo por todos los ítems del Nivel 1 y la discursiva se aprecia en la parte final de la conversación.

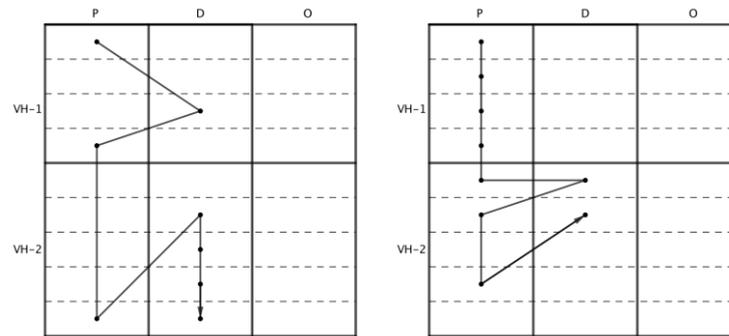


Figura 5. Flujograma N6 y N3
Fuente: elaboración propia

4.5 Nivel 2, comprensión operativa

Los resultados del análisis de la actividad de aprendizaje de este niño (N1) aparecen detallados en Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado (2017). Nos limitamos, aquí, a recoger la tabla presentada y a realizar una descripción del flujo observado.

Tabla 7 - Evolución de N1 (cuatro años)

Tipos de Aprehensión de Duval Niveles de Van Hiele		Perceptiva	Discursiva	Operativa
1	Conceptos básicos	1	2	
	Consideraciones visuales	5		
	Consideraciones táctiles		7, 8	24
	Descripción de propiedades globales	3	4, 6, 9	10, 13, 15
2	Análisis informal de relaciones	12, 20	11	
	Análisis informal de propiedades		17	16, 25
	Definiciones de estructura lógica simple		18, 23	22
	Demostraciones de tipo empírico		14	21, 26
	Experimento basado en ejemplo		28	19, 27

Fuente: elaboración propia

Lo que llama la atención en este flujograma (Figura 6) es la cantidad de respuestas a la maestra en todas las actividades, así como los cambios de un tipo de comprensión mostrada a otro dentro de un mismo ítem o de un ítem a otro dentro del mismo tipo de comprensión.

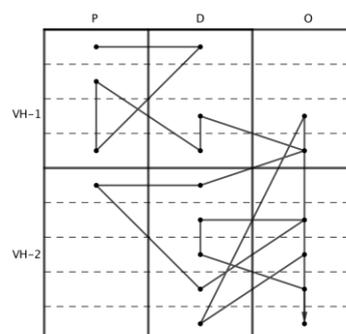


Figura 6 - Flujograma N1

Fuente: elaboración propia

Cabe destacar que el niño N1, pese a que tenía cuatro años cuando se realizó la actividad, es el que mayor nivel de complejidad muestra en la argumentación, alcanzando el tipo de aprehensión operativa en los ítems correspondientes al nivel 2 de Van Hiele.

5 Conclusiones

En este trabajo hemos caracterizado cómo niños y niñas de cuatro a cinco años construyen la noción de cilindro por medio de la implementación de una trayectoria hipotética de aprendizaje acerca de este objeto geométrico.

En particular, los resultados muestran distintos itinerarios de aprendizaje, que nos muestran distintas características del razonamiento y aprehensión de los niños y las niñas de esta edad a la hora de trabajar conceptos asociados a cuerpos geométricos, que se pueden clasificar como: 1) nivel 1 de Van Hiele y aprehensión perceptiva, realizado por niñas y niños que, en su mayoría, muestran una argumentación lineal, en la que destacan justificaciones que describen propiedades globales del objeto; 2) nivel 2 de Van Hiele y aprehensión perceptiva, donde los niños y las niñas tienden a hacer justificaciones también bastante lineales pero en este caso comienzan a detallar de modo informal propiedades del objeto pero con afirmaciones breves; 3) nivel 1 de Van Hiele y aprehensión discursiva, en ella, las niñas y los niños plantean ciertos razonamientos matemáticos basados en las propiedades globales o percepciones visuales del objeto de estudio; 4) nivel 2 de Van Hiele y aprehensión discursiva, en la que las niñas y los niños justifican propiedades matemáticas del objeto a través de pequeños experimentos de tipo empírico o argumentaciones lógicas; 5) nivel 2 de Van Hiele y aprehensión operativa, en este estadio sólo encontramos un niño, que es capaz de plantear problemas y razonamientos alternativos cuando cambia mentalmente las propiedades del objeto.

Con el fin de evaluar la pertinencia de la trayectoria hipotética diseñada, en primer lugar, consideramos oportuno reflexionar sobre la posible influencia de la edad en los itinerarios de aprendizaje antes descritos. En concreto, hemos encontrado pequeñas diferencias entre aquellos casos clasificados con el mismo tipo de aprehensión y nivel de Van Hiele relacionadas con esta. En los itinerarios de tipo 2, 3 y 4 resulta que el niño o la niña de cuatro años plantea un menor número de justificaciones, con un discurso menos elaborado, pero con el mismo tipo de razonamiento geométrico que el niño o niña de cinco años. Estos resultados paralelos observados nos permiten concluir que la edad cronológica no es determinante del itinerario de aprendizaje.

En definitiva, a pesar de que la estructura de los itinerarios de aprendizaje es variable, debido a que todos los casos analizados muestran diferencias en el flujograma, en todos ellos hallamos una evolución positiva a lo largo de la implementación, que varía en mayor o menor medida dependiendo del nivel de partida. Es más, tras el análisis de los flujogramas concluimos que el cambio de aprendizaje en los niños y las niñas tiene un camino de *ir y venir*, pasando, en algunos casos, de un nivel de Van Hiele superior a uno inferior, para posteriormente volver al superior, como pasa también con el tipo de aprehensión.

Aun así, al igual que en investigaciones previas que han abordado la problemática en el caso de la geometría plana (HALAT; YESIL-DAGLI, 2016; YESIL-DAGLI; HALAT, 2016; NOVO; BERCIANO, 2019), sería oportuno realizar una investigación más en profundidad que ayude a caracterizar el tipo de dificultad que tienen los niños y las niñas que muestran un nivel de comprensión entre los Niveles 1 y 2 de Van Hiele, cuando se trabaja con cuerpos geométricos.

En segundo lugar, tras la comparación entre los resultados mostrados en la implementación del experimento de enseñanza y el análisis teórico de la trayectoria de aprendizaje, consideramos probada la pertinencia didáctica de la trayectoria hipotética de aprendizaje diseñada para trabajar nociones asociadas al cilindro y propiedades de este cuerpo geométrico con niños y niñas de cuatro y cinco años de edad; así, al igual que investigaciones previas destacan la relevancia de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la enseñanza-aprendizaje de la geometría plana (CLEMENTS; WILSON; SARAMA, 2004), de la pre-álgebra (ZAPATERA-LLINARES, 2018) o de operaciones aritméticas en Educación Infantil (RAMÍREZ-GARCÍA; DE CASTRO-HERNÁNDEZ, 2014), en este trabajo hemos probado la importancia del uso de este tipo de trayectorias en los primeros pasos de la enseñanza-aprendizaje de la geometría espacial, en especial, de los cuerpos geométricos.

Además, gracias a la caracterización realizada en este trabajo acerca de los diferentes razonamientos de niños y niñas, en esta edad, frente a esta clase de conceptos, consideramos importante el uso de este tipo de trayectoria hipotética de aprendizaje y su comparación con la realidad del aula. En este sentido, algunos niños y niñas muestran aspectos asociados a apartados del nivel 2 de Van Hiele con una aprehensión perceptiva que no aparecían en la trayectoria hipotética de aprendizaje, que sería interesante analizar en una futura investigación.

Por otra parte, esta investigación refuerza y avala la necesidad de trabajar en el aula de Educación Infantil procesos de enseñanza que fomenten la visualización espacial (DUVAL, 1998), y ayuden a realizar razonamientos de tipo más abstracto, principalmente la aprehensión discursiva y, en algunos casos, la aprehensión operativa; relación ya justificada como necesaria

para alcanzar procesos de abstracción en etapas educativas superiores, convirtiendo a la visualización en una herramienta fundamental en la resolución de problemas (CLEMENTE; LLINARES; TORREGROSA, 2017).

Finalmente, volviendo a los resultados de este estudio, a pesar de que no era el objetivo fundamental del mismo, debemos destacar la importancia de las intervenciones llevadas a cabo por la maestra en las fases de aprendizaje de la experiencia, facilitando, en todo momento, el paso a un nivel mayor de aprehensión, lo que daría lugar a un salto cognitivo en el itinerario de aprendizaje de cada uno de los niños y las niñas.

En este sentido, consideramos fundamental que las futuras maestras y maestros sean capaces de describir una trayectoria hipotética de aprendizaje junto con una estructuración cronológica atendiendo a las fases de enseñanza-aprendizaje de Van Hiele para tratar de anticipar el tipo de razonamiento que un niño o una niña de esta edad puede dar, con el fin de facilitarles un aprendizaje significativo de la matemática.

Referencias

- ARANDA, C.; CALLEJO, M. L. Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 35, n. 1, p. 157-174, 2017.
- BERCIANO, A.; JIMÉNEZ-GESTAL, C.; SALGADO, M. Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. *In*: MUÑOZ-ESCOLANO, J.M.; ARNAL-BAILERA, A.; BELTRÁN-PELLICER, P.; CALLEJO, M.L.; CARRILLO, J. (ed.). **Investigación en Educación Matemática XXI**. Zaragoza: SEIEM, 2017. p. 147-156.
- BERCIANO, A.; JIMÉNEZ-GESTAL, C.; SALGADO, M. Detección de dificultades en el proceso de aprendizaje del concepto de simetría en educación infantil. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, Itabaiana, v. 6, n. 2, 24-46, 2021.
- BERNABEU, M.; MORENO, M.; LLINARES, S. Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. **Uni-pluriversidad**, Medellín, v. 19, n. 2, p. 103-123, 2019.
- CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalizations. **Journal of Mathematics Teacher Education**, New York, v. 20, n. 4, p. 309-333, 2017.
- CLEMENTE, F.; LLINARES, S. Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. *In*: BERCIANO, A.; GUTIÉRREZ, G.; ESTEPA, A.; CLIMENT, N. (ed.). **Investigación en Educación matemática XVII**. Bilbao: SEIEM, 2013. p. 229-236.
- CLEMENTE, F.; LLINARES, S.; TORREGROSA, G. Visualización y razonamiento configural. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 497-516, 2017.
- CLEMENTS D. H.; SARAMA, J. **Learning and teaching early math: The learning trajectories approach**. New York: Routledge, 2009.

CLEMENTS, D. H.; WILSON, D. C.; SARAMA, J. Young Children's Composition of Geometric Figures: A Learning Trajectory. **Mathematical thinking and learning**, London, v. 6, n. 2, p. 163-184, 2004.

CONFREY, J.; MALONEY, A. Linking standards and learning trajectories. *In*: MALONEY, A. P.; CONFREY, J.; NGUYEN, K. H. (ed.). **Learning over time: Learning trajectories in mathematics education**. Charlotte: IAP, Inc, 2014. p. 125-160.

DUVAL, R. Geometry from a cognitive point a view. *In*: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (ed.). **Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study**. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998. v. 5, p. 37-51.

FERNÁNDEZ, T. La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. *In*: BERCIANO, A.; GUTIÉRREZ, G.; ESTEPA, A.; CLIMENT, N. (ed.). **Investigación en Educación matemática XVII**. Bilbao: SEIEM, 2013. p. 19-42.

GUTIÉRREZ, A. Investigar es evolucionar. Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. *In*: PLANAS, N. (ed.). **Teoría, crítica y práctica de la educación matemática**. Barcelona: Graó, 2012. p. 43-59.

HALAT, E.; YESIL-DAGLI, U. Preschool Students' Understanding of a Geometric Shape, the Square. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 830-848, 2016.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; MOLINA, J. L.; CASTRO, E. Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 29, n. 1, p. 75-88, 2011.

NOVO, M. L.; BERCIANO, A. Estudio longitudinal de la capacidad de representación simbólica de niños y niñas en el ciclo 3-6 de Educación Infantil al abordar tareas relativas a dictados matemáticos. **Bolema**, Rio Claro v. 33, n. 64, p. 513-541, 2019.

PRIOR MARTÍNEZ, J.; TORREGROSA GIRONÉS, G. Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 16, n. 3, p. 339-368, 2013.

RAMÍREZ GARCÍA, M.; DE CASTRO HERNÁNDEZ, C. Trayectorias de aprendizaje de la multiplicación y la división de cuatro a siete años. **Épsilon**, Puerto Real, v. 31, n. 3, p. 41-56, 2014.

SALGADO, M.; BERCIANO, A.; JIMÉNEZ-GESTAL, C. Iniciación a los objetos tridimensionales y sus propiedades en el aula de educación infantil: una experiencia de aula con cilindros. **UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Andújar, n. 54, p. 46-59, 2018.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; FERNÁNDEZ, C.; LLINARES, S. Developing pre-service Teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. **International Journal of Science and mathematics Education**, Heidelberg, n. 13, p. 1305-1329, 2015.

SARAMA, J.; CLEMENTS, D. H. **Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children**. New York: Routledge, 2009.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

TORREGROSA GIRONÉS, G.; QUESADA VILELLA, H.; PENALVA MARTÍNEZ, M. C. Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 28, n. 3, p. 327-340, 2010.



VAN HIELE, P. M. Begin with play. **Teaching Children Mathematics**, Reston, v. 5, n. 6, p. 310-316, 1999.

YESIL-DAGLI, U.; HALAT, E. Young children conceptual understanding of Triangle. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, Eastbourne, v. 12, n. 2, p. 189-202, 2016.

ZAPATERA LLINARES, A. Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. **Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas**, La Laguna, n. 97, p. 51-67, 2018.

**Submetido em 08 de Junho de 2021.
Aprovado em 17 de Outubro de 2021.**