Neurria eta integrazioa

Osane Oruetxebarria Fernández de la Peña

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Neurria eta integrazioa

Osane Oruetxebarria Fernández de la Peña

Matematika saila

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

CIP. Biblioteca Universitaria

Oruetxebarria Fernández de la Peña, Osane

Neurria eta integrazioa [Recurso electrónico] / Osane Oruetxebarria Fernández de la Peña. – Datos. – [Leioa]: Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2023]. – 1 recurso en línea: PDF (166 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)

Bibliografía: p.157-158.
Modo de acceso: World Wide Web
ISBN: 978-84-1319-539-1.

1. Medida, Teoría de la. 2. Cálculo integral. 3. Análisis funcional.

(0.034)517.3
(0.0349517.98

ISBN: 978-84-1319-539-1

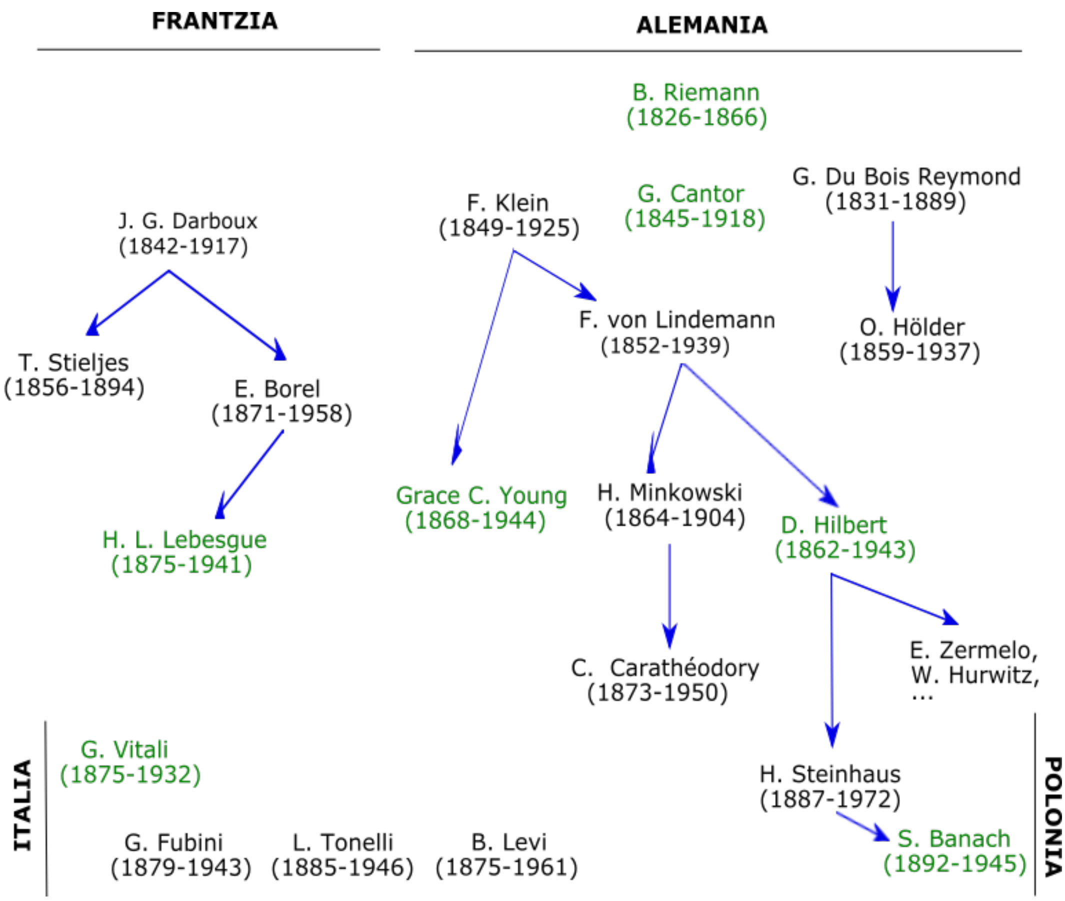
Aurkibidea

Sarrera

Neurriaren teoria analisiaren adar bat da, neurriak, funtzio neurgarriak eta integrazioa ikertzen dituena. XX. mendearen hasieran, Henry Lebesguek bere izena duen teoria hori sortu zuen, Lebesgueren neurria eta Lebesgueren integrala, hain zuzen ere. Teoria horrek XX. mendearen lehen erdian garapen handia izan zuen, gaur egun erabiltzen dugun integrazio-ereduaren oinarriak finkatuz.

Integralaren lehen formulazioa A. L. Cauchy (1789-1857) matematikariak eman zuen XIX. mendearen hasieran, eta B. Riemannek (1826-1866), urte batzuk beranduago, Cauchyren metodoa hedatzea pentsatu zuen. Hori horrela, ezagutzen dugun Riemannen integralaren definizioa eman zuen, goi- eta behe-baturak erabiliz. Bestalde, Cauchyren prozedura erabiliz baita ere, J. Dirichlet (1805-1859) matematikari alemaniarrak frogatu zuen integralak, edozein funtzioren kasuan, ez zuela zertan balio bakar bat izan, eta kontradibide gisa $[0, 1]$ tarteko funtzio karakteristikoa erabili zuen. Horrek iradoki zuen eten-puntuen kopuruaren eta multzoaren "neurria"-ren arteko erlazioa. Aldi berean, garai hartan, G. Cantor (1845-1918) multzoen eta haien neurrien ikasketan arduratzen zen; "multzoen neurria" kontzeptua funtsezkoa bilakatuko zen geroago integrazioteoriaren garapenerako. P. Du Bois Reymond izan zen integragarritasuna etenpuntuekin lotuta zegoela konturatu zen lehena, eta puntu horien multzoak nolabait neurtu behar zirela adierazi zuena. Hemen ezar ditzakegu neurriaren teoriaren hastapenak. Henri Lebesguek bere tesian teoria hori garatu zuen, eta 1902. urtean aurkeztu zuen, E. Borel-ek definitutako "neurria" orokortuz eta "zero neurriko" multzoaren definizioa ezarriz.

Garai hartako ikuspegi orokorra emateko asmoz, honako grafiko honetan laburbiltzen dira testu honetan agertzen diren matematikarien datuak eta erlazioak; gezi urdinez adierazi da nor zen bakoitzaren tesi-zuzendaria.



Lan honek UPV/EHUko Matematikako graduan irakasten den Neurria eta Integrazioa nahitaezko irakasgaiaren programa garatzen du, eta graduko azken ikasturteko Analisi Funtzional irakasgairako oinarrizko prestakuntza ematen. Edukiei dagokienez, sei gai agertzen dira lan honetan. Horietatik bost irakasgaiaren programan agertzen diren gai-zerrendari lotuta daude, guztiek egitura berdina dutelarik: gaiari dagokion teoria azaltzen da, definizioak, teoremak, frogak eta adibideak, hain zuzen ere; eta azkenengo atalean ariketa-zerrenda. Era berean, gai bakoitzean agertzen diren matematikarien bizitzei buruzko zertzelada batzuk aipatzen dira. Seigarren gaian, aurreko bost gaiei buruzko ariketa berezien zerrenda bat dago.

Lehen gaian Lebesgueren neurriaren definizioa ematen da, eta oinarrizko propietateak frogatzen dira. Bestalde, edozein neurriren definizioa eta propietateak ematen dira, baita ere. Ildo beretik jarraituz, bigarren gaian funtzio neurgarriak eta haien propietateak ematen dira, Lebesgueren integrala definitzeko eta hari lotuta konbergentziarako oinarrizko teoremak frogatzeko. Gai horren azken emaitzek Riemannen eta Lebesgueren integralen arteko erlazioak ematen dituzte. Hirugarren gaian, aurreko gaietako kontzeptuak hedatzen dira biderkadura espazioaren kasurako, Fubiniren teorema eta aldagai-aldaketaren teorema azaltzeko. Hiru gai horietan beharrezkoa den tresneria lantzen da laugarren eta bosgarren gaietan, bi espazio mota aztertzeko: Hilberten espazioak eta Banachen espazioak, hurrenez hurren. Laugarren gaian, Hilberten espazioen definizioa eta propietate nagusiak ikusi ondoren, proiekzioaren teorema frogatzen da, aipatutako guztia L^2 espaziora aplikatuz. Bosgarren gaian, Banachen espazioen kasuan, L^p espazioen oinarrizko propietateak eta espazioen arteko eragileen emaitzak ematen dira. Amaitzeko, azken gaia desberdina da, non irakasgaiari buruzko ariketa gehigarriak agertzen baitira, ikasleei ematen zaien material osagarria bakoitzak bere kabuz lantzeko.

Leioa, 2022ko urria.

Osane Oruetxebarria Fernández de la Peña.

1. gaia

Lebesgueren neurria $\mathbb{R}^n$-n. Neurri-espazioak

Lehen gai honetan, Lebesgueren neurria definituko dugu eta haren propietateak aztertuko ditugu; gaiaren bigarren zatian, ideia hori neurriaren kontzeptu orokorrera hedatuko dugu, bi ikuspuntu desberdinetatik abiatuz.

1.1 Lebesgueren neurria

Lebesgueren neurriak orain arte hainbat multzo "neurtzeko" erabilitako nozioak hedatzen ditu; esaterako, tarte edo zuzenki baten luzera, irudi lau baten azalera edo gorputz baten bolumena. Baina, horretaz aparte, lehen begiratu batean bereziagoak diruditen beste mota bateko multzoren neurria ere emango digu; Cantorren multzoarena, esaterako.

Henri Leon Lebesgue 1875eko ekainaren 28an jaio zen Beauvaisen, Frantzian, eta Parisen hil zen 1941eko uztailaren 26an. Lebesguek École Normale Supérieuren ikasi zuen, eta 1899tik 1902ra eskolak eman zituen Nancyko lizeoan. Emile Borel eta Camille Jordan matematikarien lanetatik abiatuta, neurriaren teoria garatu zuen 1901ean eta, hurrengo urtean, Lebesgueren integralaren definizioa eman zuen.

Integralaren definizio horrek Riemannen integralaren nozioa orokortzen du, kurba baten azpiko azaleraren kontzeptua funtzio ez-jarraituetara ere zabalduz. Ideia hori analisi modernoaren lorpen handienetako bat da zeina, matematikako hainbat arlotan erabilgarria baita, Fourierren analisian besteak beste. *Intégrale, longueur, aire* izeneko hitzaldian, Lebesgueren integrala aurkeztu zuen lehengoz. Ondoren, 1902an, Borelek zuzendutako bere doktoretza-tesia aurkeztu zen Nancyko Unibertsitatean. Lan horren lehen kapituluan edozein multzoren neurriaren kontzeptua ematen du, eta bigarrenean Lebesgueren integrala eta propietate nagusiak azaltzen ditu.

Henri Leon Lebesgue (Frantzia, 1875-1941)
https://eu.wikipedia.org/wiki/Fitxategi:Lebesgue_2.jpeg

Hainbat tokitan irakatsi ondoren, 1910. urtean katedra bat jaso zuen Sorbonako Unibertsitatean, eta Londresko Royal Societyko kide ere izendatu zuten. Horretaz gain, ekarpenak egin zituen Topologia, potentzialaren teoria eta Fourierren analisia adarretan ere. J. C. Burkill-en hitzetan, *bere lana funtzio errealen arloan datza, eta esparru horretan bera da gorena.*

Definizioak. Izan bitez $a = (a_1, \ldots, a_n)$ eta $b = (b_1, \ldots, b_n), a, b \in \mathbb{R}^n$, non $a_i \leq b_i$ den, $i = 1, 2, \ldots n$.

- a eta b mugak dituen I tarte itxia
$$I = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \ldots n\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$
multzoa bezala definitzen da.

- Era berean tarte irekia desberdintza hertsiak hartuz definitzen da
$$I = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \ldots n\} = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n).$$

- Oro har, $\mathbb{R}^n$-ko tarte bat modu berean definitzen da desberdintzak hertsiak izanda ala ez, eta horri *gelaxka* deituko diogu. Hori horrela, gelaxka bat mota desberdinetako tarteen biderkadura kartesiarra da.

- Edozein I gelaxkaren bolumena (irekia, itxia, ez irekia, ez itxia)
$$\mathrm{bol}(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$
formularen bidez definitzen da.

Argi dago edozein I tartetarako eta edozein $x \in \mathbb{R}^n$ puntutarako $x + I$ beste tarte bat dela, I-ren translazioa hain zuzen ere; horren mugak $x + a$ eta $x + b$ puntuak dira, eta tarte bien bolumenak berdinak:

$$\text{bol}(x + I) = \prod_{i=1}^{n}(x_i + b_i - (x_i + a_i)) = \text{bol}(I), \;\; x + I = \{x + y : y \in I\}.$$

Era berean, edozein $\lambda > 0$ zenbaki positibotarako, λI tarte bat da, I-ren homotetikoa hain zuzen ere mugak λa eta λb izanik, eta bolumenen arteko erlazioa honako hau:

$$\text{bol}(\lambda I) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda b_i - \lambda a_i) = \lambda^n \text{bol}(I), \;\; \lambda I = \{\lambda y : y \in I\}.$$

1.1.1 proposizioa. *Edozein $A \subset \mathbb{R}$ multzo ireki modu bakarrean idatz daiteke, tarte ireki disjuntuen bildura kontagarri bezala.*

Froga. Izan bitez $x \in A$ eta $I_x = (a_x, b_x)$, non

$$a_x = \inf\{a < x : (a, x) \subset A\} \text{ eta } b_x = \sup\{b > x : (x, b) \subset A\}$$

diren. I_x tartea x barne duen eta A-ren barruan dagoen tarterik handiena da. Gainera, $A = \bigcup_{x \in A} I_x$ da.

Ikus dezagun bildura disjuntua dela. Absurdura eramanez, demagun $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ dela. $I_x \cup I_y \subset A$ denez eta $x \in I_x \cup I_y$ denez, $I_x \cup I_y \subset I_x$ dugu. Era berean, $I_x \cup I_y \subset I_y$ izango da; hortaz, $I_x = I_y$ da.

Bestalde, I_x tarte bakoitzean zenbaki arrazional bat dago, eta, tarteak disjuntuak direnez, bi tarteetan bi zenbaki arrazional desberdin egongo dira. Hortaz, $(I_x)_{x \in A}$ familia kontagarria da. ∎

1.1.2 proposizioa. *Izan bitez $I \subset \mathbb{R}^n$ tartea eta hura estaltzen duen $\{J_k\}_{1 \leq j \leq m}$ tarteen familia. Orduan, bol$(I) \leq \sum_{k=1}^{m}$ bol(J_k).*

Froga. Izan bitez $N(I)$ I-ren puntu osoen kopurua eta $N(J_k)$ J_k-rena; hortaz,

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k \Longrightarrow N(I) \leq \sum_{k=1}^{m} N(J_k).$$

Izan bitez (x_i) eta (y_i) puntuak I-ren mugak eta (x_i^k) eta (y_i^k) J_k-renak, hurrenez hurren, eta defini ditzagun X_i, x_i baino handiago den puntu osorik txikiena eta Y_i, y_i baino txikiago den puntu osorik txikiena. Orduan, $[X_i, Y_i]$ tarteko osoen kopurua $Y_i - X_i + 1$ da; beraz, $N(I) = \prod_{i=1}^{n}(Y_i - X_i + 1)$.

Bestalde, $x_i \leq X_i \leq x_i + 1$, $y_i \leq Y_i \leq y_i + 1$ denez,

$$y_i - x_i - 1 \leq Y_i - X_i + 1 \leq y_i - x_i + 1;$$

hortaz,

$$\prod_{i=1}^{n}(y_i - x_i - 1) \leq N(I) \leq \prod_{i=1}^{n}(Y_i - X_i + 1).$$

Gauza bera eginez J_k bakoitzerako,

$$\prod_{i=1}^{n}(y_i^k - x_i^k - 1) \leq N(J_k) \leq \prod_{i=1}^{n}(Y_i^k - X_i^k + 1)$$

dugu, eta, orduan,

$$\prod_{i=1}^{n}(y_i - x_i - 1) \leq \sum_{k=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}(Y_i^k - X_i^k + 1)\right).$$

$x_i = \frac{1}{\epsilon}x_i'$ koordenatu-aldaketa eginez, aurreko desberdintza honela berridatz daiteke:

$$\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\epsilon}y_i - \frac{1}{\epsilon}x_i - 1) \leq \sum_{k=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{\epsilon}Y_i^k - \frac{1}{\epsilon}X_i^k + 1)\right).$$

Biderkagai bakoitzean ϵ-ez biderkatuz eta limitea eginez, $\epsilon \to 0$ emaitza dugu; hau da,

$$\text{bol}(I) = \prod_{i=1}^{n}(y_i - x_i) \leq \prod_{i=1}^{n}(y_i^k - x_i^k) = \sum_{k=1}^{m}\text{bol}(J_k).$$

■

1.1.3 korolarioa. *Izan bitez I tarte itxia eta haren tarte irekien estaldura bat $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Orduan, bol$(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty}$ bol(J_n).*

Froga. I tarte itxia denez, Heine-Borel-en teoremari esker, emandako familian I estalzen duen azpiestaldura finitu bat aurki daiteke. Hortaz, aurreko proposizioa aplikatuz, $\text{bol}(I) \leq \sum_{k=1}^{m}\text{bol}(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\text{bol}(J_k)$. ■

Tarteetarako definitu dugun bolumena $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{A : A \subset \mathbb{R}^n\}$-ren azpimultzoetara hedatzea da helburua, kontuan izanda lortu nahi dugun emaitza m funtzio bat izango dela, zeina $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$-ko $\mathcal{M}$ familia batean definituta egongo den eta propietate hauek beteko dituen:

- $I \in \mathcal{M}$-ko tartea bada, $m(I) = \mathrm{bol}(I)$.
- m translazioz aldaezina da; hau da, $m(x + A) = m(A), \forall\ x \in \mathbb{R}^n$, non $x + A = \{x + y, y \in A\}$ den.
- $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ multzo disjuntuen familia kontagarria bada,

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Aipatutako helburua lortzeko tresna Lebesgueren kanpo-neurria izango da.

Definizioa. Izan bitez $A \subset \mathbb{R}^n$ eta $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ funtzioa

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{bol}(I_k), A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ tartea}\}$$

izanda. m^* funtzioari *Lebesgueren kanpo-neurria* esaten zaio.

Definiziotik berehala ondorioztatzen da m^* ondo definituta dagoela edozein multzotarako. Era berean, argi dago $m^*(\emptyset) = 0$ eta $m^*(\mathbb{R}^n) = \infty$ direla, eta $A \subset B$ bada, $m^*(A) \leq m^*(B)$ dela.

1.1.4 proposizioa. *Tarte baten kanpo-neurria beraren bolumena da.*

Froga. $I = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}[x_i, y_i]$ tarte itxia bada, 1.1.3 korolarioari esker, $m^*(I) \geq \mathrm{bol}(I)$.

Bestalde, defini dezagun, $\forall \epsilon > 0$-rako, $I_\epsilon = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}[x_i - \epsilon, y_i + \epsilon]$. $I \subset I_\epsilon$ denez, $m^*(I) \leq \inf_{\epsilon>0}\{\mathrm{bol}(I_\epsilon)\} = \inf_{\epsilon>0}\{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(y_i - x_i + 2\epsilon)\} = \mathrm{bol}(I)$. Hortaz, $m^*(I) = \mathrm{bol}(I)$.

Demagun, orain, $I = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x_i, y_i)$ tarte irekia dela, eta izan bedi $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ I estaltzen duen familia bat. Segida horri gehienez tarteen familia finitu bat faltako zaio $\overline{I}$ estaltzeko, bolumena nahi adina txikia izanda. Beraz, $m^*(I) = m^*(\overline{I})$, baina $\mathrm{bol}(I) = \mathrm{bol}(\overline{I})$ denez, emaitza dugu.

Azkenik, tartea infinitua bada, edozein $M \in \mathbb{R}$ baliotarako aurki daiteke J tarte itxia, zeinetarako $J \subset I$ eta $m^*(J) = M$ den. Orduan,

$$m^*(I) \geq m^*(J) = M \Longrightarrow m^*(I) = \infty = \mathrm{bol}(I).$$

■

1.1.5 proposizioa. *Lebesgueren kanpo-neurriak honako propietate hauek betetzen ditu:*

i) *Puntu baten kanpo-neurria zero da.*

ii) *A bornatua bada, $m^*(A) < \infty$ da.*

iii) *A multzoak tarte bat partetzat badu, $m^*(A) > 0$ da.*

iv) $\forall\ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k).$

v) *Edozein multzo kontagarriren kanpo-neurria zero da.*

vi) $\forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ m^*(x + A) = m^*(A)$*; hots,* m^* *translazioz aldaezina da.*

Froga. *i)* Edozein x-tarako eta edozein $\epsilon > 0$-tarako, $I_\epsilon = \prod_{i=1}^{n}(x - \epsilon, x + \epsilon)$ hartuz, $m^*(\{x\}) = 0$ da.

ii) A bornatua bada, existitzen da I tarte bornatua, zeinetarako $A \subset I$ den. Orduan, $m^*(A) \leq m^*(I) = \mathrm{bol}(I) < \infty$.

iii) $I \subset A$ bada, $m^*(A) \geq m^*(I) = \mathrm{bol}(I) > 0$.

iv) Familiako elementuren baten kanpo-neurria infinitua bada, emaitza berehalakoa da; beraz, demagun $\forall\ k$-rako $m^*(A_k) < \infty$ dela. Biz $\epsilon > 0$. A_k multzo bakoitzarentzat existitzen da $(I_{k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ tarteen bilduma kontagarria, zeinentzat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{bol}(I_{k,j}) < m^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k} \quad \text{den .}$$

Har dezagun $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (I_{k,j})_k$ tarteen familia kontagarria. Bilduma honek $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ estaltzen du; hortaz,

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k,j\in\mathbb{N}} \mathrm{bol}(I_{k,j}) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{bol}(I_{k,j})\right) < \sum_{k\in\mathbb{N}}\left(m^*(A_k) + \frac{\epsilon}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} m^*(A_k) + \epsilon.$$

Desberdintza edozein ϵ positibotarako denez, propietatea beteko da.

v) Multzoa finitua bada, puntu bakoitzaren kanpo-neurria zero denez, emaitza berahalakoa da. Multzoa kontagarria bada $A_k = \{x_k\}$ multzoen bilduma hartuz, $k \in \mathbb{N}$ izanda, eta *iv)* ataleko propietatea erabiliz, emaitza lortzen dugu.

vi) A tartea bada, $\mathrm{bol}(x + A) = \mathrm{bol}(A)$ denez, argi dago $m^*(x + A) = m^*(A)$ dela.

Biz $A \subset \mathbb{R}^n$ eta $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tarteen estalki kontagarri bat. Orduan, $x + A$ $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}(x + I_k)$ familiarekin estal daiteke; hortaz,

$$m^*(x + A) \le m^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(x + I_k)\right) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{bol}(x + I_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{bol}(I_k).$$

Bornaketa estalki guztientzat betetzen denez, $m^*(x+A) \le m^*(A)$ desberdintza dugu. Alderantzizko desberdintza frogatzeko, $A = (-x) + (x + A)$ erara idaz daiteke; beraz, $m^*(A) = m^*((-x) + (x + A)) \le m^*(x + A)$ da. ∎

1.1.6 korolarioa. *$\mathbb{N}$-ren, $\mathbb{Z}$-ren eta $\mathbb{Q}$-ren Lebesgueren kanpo-neurriak zero dira.*

Froga. Emaitza berelahakoa da aurreko propozisioaren v) propietateagatik. ∎

1.1.7 proposizioa. *Izan bedi $A \subset \mathbb{R}^n$. Edozein $\epsilon > 0$-tarako $\exists\, V$ irekia $A \subset V$ izanda, zeinetarako $m^*(V) \le m^*(A) + \epsilon$ den.*

Froga. Kanpo-neurriaren definizioari esker,

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{bol}(I_k), A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ tartea}\}$$

da. Edozein $\epsilon > 0$-tarako, existituko da $\{I_k, k \in \mathbb{N}\}$ tarteen familia, zeinetarako $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ eta $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{bol}(I_k) \le m^*(A) + \epsilon$ diren. Har dezagun $V = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$ irekia. Hortaz, $A \subset V$ eta $m^*(V) \le \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} m^*(I_k) \le \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{bol}(I_k)$ $\le m^*(A) + \epsilon$. ∎

Kontuan izanda m^* kanpo-neurria $\mathbb{R}^n$-ren edozein azpimultzotan definituta dagoela, logikoa dirudi galdetzea azpimultzo horietatik guztietatik zein diren neurgarriak Lebesgueren ikuspuntutik. Horren erantzuna Caratheodoryren definizioak ematen digu.

Constantin Carathéodory (Alemania, 1873-1950) greziar jatorriko matematikari alemaniarra izan zen. Ekarpen garrantzitsuak egin zituen Matematikaren hainbat arlotan; hala nola, aldagai errealeko funtzioen teorian edo neurriaren teorian. Carathéodoryren aita diplomazialaria zen, eta horri esker Eurpako herrialde desberdinetan ibili zen. 1900. urtera arte, Egipton egon zen, baldintza higieniko eta osasungarri oso txarretan zingirak eraikitzen.

Constantin Carathéodory (Alemania, 1873-1950)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4a/
Caratheodory_constantin.jpg/220px-Caratheodory_constantin.jpg

Aldi berean, matematika ikasten jarraitu zuen bere kabuz. Urte hartan, bere familiaren iritziaren aurka, matematikan bakarrik aritzea erabaki zuen, eta Berlinera joan zen Schwarz-ekin ikastera. Göttingen-en ospeak erakarrita, 1902. urtean bertoko unibertsitatera sartu zen, non doktoretza lortu baitzuen 1904an Hermann Minkowskiren zuzendaritzapean.

1920an Greziako Gobernuak Esmirna-n unibertsitate bat eraikitzea erabaki zuen, eta Carathéodory izendatu zuten arduradun. Ezinezkoa izan zen, bigarren gerra greko-turkiarra hasi baitzen. Alemanian gelditu zen, eta 1924. urtean Ferdinand von Lindemannen tokia hartuko zuen Municheko Unibertsitatean, hura jubilatu zenean, eta bertan egongo zen hil arte.

Definizioa. (Caratheodoryren definizioa) Izan bedi $A \subset \mathbb{R}^n$. A Lebesgue-neurgarria dela diogu edozein $M \subset \mathbb{R}^n$ multzotarako,

$$m^*(M) = m^*(M \cap A) + m^*(M \cap A^c)$$

bada. Lebesgue-neurgarriak diren multzoen familiari $\mathcal{L}$ deituko diogu.

Caratheodoryren definizioaren arabera, m Lebesgueren neurria definitzen da m^* kanpo-neurriaren murrizketa bezala neurgarriak diren multzoetara; hau da, $m(A) = m^*(A)$, A neurgarria bada, $m = m^*|_{\mathcal{L}}$.

Oharra. $m^*(M) \leq m^*(M \cap A) + m^*(M \cap A^c)$ desberdintza beti betetzen da. Nahikoa da A eta M edozein azpimultzotarako $M = (A \cap M) \cup (A^c \cap M)$

erara idaztea eta 1.1.5 proposizioaren *iv)* atala erabiltzea. Bestalde, A-ren kanpo-neurria infinitua denean, kontrako desberdintza ere betetzen da; hortaz, A multzoa Lebesgue-neurgarria (edo neurgarria) den ala ez jakiteko, aski da $m^*(M) \geq m^*(M \cap A) + m^*(M \cap A^c)$ desberdintza frogatzea kanpo-neurri finitua duten multzoentzat.

Gainera, definizioa simetrikoa denez A eta A^c multzoentzat, A neurgarria bada, A^c ere bai.

1.1.8 proposizioa. *Izan bitez $A, B \subset \mathbb{R}^n$.*

i) $m^*(A) = 0$ *bada, A neurgarria da, eta, ondorioz,* $m(A) = 0$.

ii) $m^*(A) = 0$ *bada, eta $B \subset A$, B neurgarria da.*

iii) A eta B neurgarriak badira, $A \cup B$ neurgarria da.

Froga. i) Edozein M multzotarako

$$M \cap A \subset A \Longrightarrow m^*(M \cap A) \leq m^*(A)$$

$$M \cap A^c \subset M \Longrightarrow m^*(M \cap A^c) \leq m^*(M)$$

desberdintzak ditugu. Beraz, $m^*(M \cap A) + m^*(M \cap A^c) \leq m^*(M) + m^*(A) = m^*(M)$ da, eta, orduan, A neurgarria izango da. Gainera, $m^*(A) = m(A)$ denez, $m(A) = 0$ izango da.

ii) $B \subset A$ bada, $m^*(B) \leq m^*(A) = 0$; beraz, $m^*(B) = 0$ eta B neurgarria da.

iii) B neurgarria denez, definizioa idatz dezakegu $M \cap A^c$ multzorako, M edozein izanda; hau da,

$$m^*(M \cap A^c) = m^*(M \cap A^c \cap B) + m^*(M \cap A^c \cap B^c)$$

dugu. Bestalde, $M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B \cap A^c)$ denez,

$$m^*(M \cap (A \cup B)) \leq m^*(M \cap A) + m^*(M \cap B \cap A^c)$$

da. Hortaz,

$$m^*(M \cap (A \cup B)) + m^*(M \cap (A^c \cap B^c)) \leq m^*(M \cap A) + m^*(M \cap B \cap A^c)$$
$$+ m^*(M \cap A^c) - m^*(M \cap A^c \cap B) = m^*(A),$$

A neurgarria baita. Beraz, bi multzo neurgarrien bildura neurgarria da. Era berean, emaitza edozein bildura finitura heda daiteke indukzioa aplikatuz. ■

Oharra. 1.1.6 korolarioan, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ eta $\mathbb{Q}$ multzoen kanpo-neurria zero dela frogatu da. Hori horrela, azken emaitza horretatik ondorioztatzen da hiru multzo horiek zero neurriko multzoak direla; hots, $m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Z}) = m(\mathbb{Q}) = 0$.

1.1.9 proposizioa. *Izan bitez* $B \subset \mathbb{R}^n$ *eta* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *multzo disjuntu neurgarrien kolekzio finitu bat. Orduan,*

$$m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(B \cap A_k).$$

Froga. $n = 1$ kasua berehalakoa da. Indukzioz, suposatuz $n-1$-erako egia dela, froga dezagun emaitza n-rako. Horretarako, idatz dezagun

$$B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_n = B \cap A_n \text{ eta } B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_n^c = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

Bestalde,

$$m^*\left(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = m^*(B \cap A_n) + m^*(B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right))$$

da. Bigarren batugaian $n-1$-erako adierazpena erabiliz, emaitza dugu. ■

1.2 Espazio neurgarriak. Neurriak eta kanpo-neurriak

Lebesgueren neurria ikusi ondoren, hurrengo urratsa kontzeptu hori hedatzea da, definitzeko zer den, oro har, neurri bat. Horretarako, lehenik eta behin, lan egiteko esparrua finkatu behar da. $X \subset \mathbb{R}^n$ hutsa ez den azpimultzoa bada, X-ren zatien multzoa $\mathcal{P}(X)$-ren bidez izendatuko dugu; hau da, $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

Definizioa. Izan bedi $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{M}$ σ-aljebra bat dela diogu, honako propietate hauek betetzen badira:

- $X \in \mathcal{M}$, $\emptyset \in \mathcal{M}$.
- $A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A^c = X/A \in \mathcal{M}$.
- $\forall\ (A_k)_{\{k\in\mathbb{N}\}} \subset \mathcal{M}, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

$(X, \mathcal{M})$ bikoteari espazio neurgarria esaten zaio, eta $\mathcal{M}$-n dauden elementuei multzo neurgarriak. Bigarren eta hirugarren baldintzetatik multzoen ebakidura kontagarria σ-aljebraren elementua dela ondoriozta daiteke; hots:

$$\forall\ (A_k)_{\{k\in\mathbb{N}\}} \subset \mathcal{M},\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}.$$

Era berean, multzoen bildura zein ebakidura finitua σ-aljebrako elementuak izango dira.

Badaude jakinak diren bi σ-aljebra: bata $\mathcal{P}(X)$, hau da, X-ren azpimultzo guztiak; eta bestea X eta $\emptyset$ multzoz osotutakoa. Horiez gain, X-ren azpimultzoen edozein $\mathcal{F}$ familia bere partetzat duen σ-aljebrara heda daiteke, baina hedapen guztietatik berezi bat aztertuko dugu: $\mathcal{F}$ partetzat duten σ-aljebra guztien ebakidura σ-aljebra bat da, $\mathcal{F}$ partetzat dutenetatik txikiena, hain zuzen ere. Horri *$\mathcal{F}$-k sorrarazitako σ-aljebra* deituko diogu, eta $\sigma(\mathcal{F})$ ikurrarekin adieraziko dugu.

Adibide berezi gisa, aipa dezagun $\mathcal{B}$ σ-aljebra boreldarra. X espazio topologikoan, multzo boreldarrak dira egitura topologikoaren multzo irekiek sortzen dituzten multzoak, eta horrela eraikitako σ-aljebrari *boreldarra* esaten zaio. Hori horrela, defini ditzagun $\mathcal{G}$ eta $\mathcal{F}$ familiak:

$$\mathcal{G} = \{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k, G_k \text{ irekia}\} \text{ eta } \mathcal{F} = \{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k, F_k \text{ itxia}\}.$$

$\mathcal{G}$ eta $\mathcal{F}$ familietako elementuak multzo boreldarrak dira, nahiz eta ez izan multzo irekiak ez itxiak. Esaterako, $(\mathbb{R}, m)$ espazioan, $[0,1)$ multzoa ez da ez irekia ez itxia, baina boreldarra da,

$$[0,1) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{-1}{n}, 1\right) \quad \text{edo} \quad [0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$$

eran idatz baitaiteke.

1.2.1 proposizioa. *$\mathcal{L}$ familia σ-aljebra bat da.*

Froga. Multzo neurgarrien definiziotik berehala ondorioztatzen dira σ-aljebra izateko beharrezkoak diren lehen eta bigarren baldintzak, neurgarria izango da baita ere. Beraz, multzo neurgarrien bildura kontagarria neurgarria den frogatzea soilik falta da.

Izan bitez $A_n \in \mathcal{L}$ eta $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Edozein n-tarako, $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ neurgarria da; beraz, edozein B azpimultzotarako

$$m^*(B) = m^*(B\cap B_n) + m^*(B\cap B_n^c) \geq m^*(B\cap B_n) + m^*(B\cap A^c).$$

1.1.9 proposizioagatik $m^*(B \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} m^*(B \cap A_k)$; beraz,

$$m^*(B) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(B \cap A_k) + m^*(B \cap A^c).$$

Desberdintza edozein n-tarako egiaztatzen denez eta m^*-ren azpibatukortasunagatik ,

$$m^*(B) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(B \cap A_n) + m^*(B \cap A^c) \geq m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c).$$

■

Oharra. Aurreko frogan, 1.1.9 proposizioa erabili ahal izateko ezinbestekoa da A_n multzoak disjuntuak izatea. Horrela suposa daiteke orokortasunik galdu gabe; izan ere, disjuntuak ez balira, honako familia hau eraikiko genuke: $D_1 = A_1$ eta $D_p = A_p - \left(\bigcup_{k=1}^{p-1} A_k\right)$, $p > 1$-erako. D_k multzo disjuntuak dira, $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ izanik.

1.2.2 proposizioa. *Multzo boreldarrak Lebesgue-neurgarriak dira, hau da, $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$. Bereziki, $\mathcal{G}$ eta $\mathcal{F}$ familietako elementuak Lebesgue-neurgarriak dira.*

Froga. Lehenik eta behin, ikus dezagun (a, ∞) tartea neurgarria dela. Edozein A azpimultzotarako, izan bitez $A_1 = A \cap (a, \infty)$ eta $A_2 = A \cap (-\infty, a]$.

$m^*(A) = \infty$ bada, argi dago $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$ dela.

Demagun $m^*(A) < \infty$ dela. Edozein $\epsilon > 0$-tarako existitzen da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ tarte irekien familia, zeinetarako

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ eta } \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{bol}(I_n) \leq m^*(A) + \epsilon$$

den. Izenda ditzagun $I_{n,1} = I_n \cap (a, \infty)$ eta $I_{n,2} = I_n \cap (-\infty, a]$. $A_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,1}$ denez, honako desberdintza hau betetzen da:

$$m^*(A_1) \leq m^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,1}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(I_{n,1}).$$

Era berean, $A_2 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,2}$ denez, $m^*(A_2) \leq m^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,2}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m^*(I_{n,2})$ da.

Hortaz,

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (m^*(I_{n,1}) + m^*(I_{n,2})) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{bol}(I_{n,1}) + \text{bol}(I_{n,2})) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{bol}(I_n) \leq m^*(A) + \epsilon.$$

Emaitza edozein ϵ-tarako betetzen denez, $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$ da, eta ondoren $(a,\infty) \in \mathcal{L}$.

Gainontzeko multzo boreldarrak neurgarriak direla frogatzeko, σ-aljebraren propietateak erabiliko ditugu. Hori horrela, $(a,\infty) \in \mathcal{L}$ bada, $(-\infty, a] \in \mathcal{L}$ ere bai. Gainera, $(-\infty, b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\infty, b-1/n]$; beraz, $(-\infty, b) \in \mathcal{L}$. Bestalde, $(a,b) \in \mathcal{L}$, zeren eta $(a,b) = (-\infty,b) \cap (a,\infty)$ baita. Azkenik, edozein A irekitarako, 1.1.1 proposizioagatik $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ eran idatz daiteke; beraz, $A \in \mathcal{L}$. $\mathcal{B}$ σ-aljebra boreldarra multzo irekiak partetzat dituen σ-aljebrarik txikiena denez, $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ izan behar da. ∎

Definizioa. Izan bitez $(X, \mathcal{M})$ espazio neurgarria eta $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ aplikazioa, zeinek honako propietate hauek betetzen dituen:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\forall\ (A_k)_{k=1}^{\infty}, A_i \cap A_j = \emptyset,\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$

Orduan, μ aplikazioa neurri bat dela diogu, eta $(X, \mathcal{M}, \mu)$ hirukoteari *neurri-espazioa* esaten zaio.

Adibideak.

i) Lebesgueren neurria, m, neurri bat da. Hori egiaztatzeko, definizioaren bi baldintzak betetzen direla frogatu behar dugu. Alde batetik, argi dago $m(\emptyset) = 0$ izango dela, definizioz $m^*(\emptyset) = 0$ baita.

   Bestalde, demagun multzo neurgarrien eta disjuntuen bilduma kontagarria dugula. Bigarren baldintza betetzeko, nahikoa da ikustea

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k)$$

   dela; are gehiago, aski da frogatzea A eta B multzo neurgarri disjuntuetarako $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ dela. A neurgarria denez, edozein M-tarako, $m^*(M) = m^*(M \cap A) + m^*(M \cap A^c)$ da.

   $M = A \cup B$ hartuz, $m^*(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \cap A^c)$ idatz dezakegu; hau da, $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$. Indukzioa erabiliz, emaitza hedatzen da bilduma kontagarria baterako.

ii) Izan bitez X edozein multzo eta $\mathcal{P}(X)$. $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, non $\mu(A) = \text{card}(A)$ A finitua denean, eta $\mu(A) = \infty$ card(A) infinitua denean. μ neurri bat da, *kontatzeko neurria* deritzona, hain zuzen ere.

iii) Izan bitez X edozein multzoa eta $a \in X$ puntu finko bat. Defini dezagun

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\},$$

non A multzo bakoitzerako $\mu(A) = 1$ den $a \in A$ bada, eta $\mu(A) = 0$ $a \notin A$ bada. Funtzio hori neurri bat da.

iv) Probabilitate teorian, $(X, \mathcal{M}, p)$ probabilitate-espazioa espazio neurriduna da, $\mu = p$ hartuz, non $\mu(X) = 1$ den, eta $\mu(A)$ A gertaeraren probabilitatea den.

v) Izan bedi X multzo ez-kontagarrian honako σ-aljebra hau:

$$\mathcal{M} = \{A \subset X, A \text{ kontagarria edo } A^c \text{ kontagarria}\}.$$

μ neurria definitzen dugu, $\mu(A) = 0$ izanda A multzo kontagarria bada, eta $\mu(A) = 1$ izanda A^c multzoa kontagarria bada.

1.2.3 proposizioa. *Izan bedi $(X, \mathcal{M}, \mu)$ neurri-espazioa. Honako propietate hauek betetzen dira:*

i) $\forall\ (A_k)_{k=1}^n \subset \mathcal{M},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$

ii) $\forall\ A, B \in \mathcal{M},\ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. *Horrez gain, $\mu(A) < \infty$ bada,*

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$$

da.

iii) $\forall\ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M},\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).$

iv) $\forall\ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M},\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots,$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

v) $\forall\ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M},\ A_1 \supset A_2 \supset \ldots,$ *eta demagun existitzen dela $p \in \mathbb{N}$ zeinetarako $\mu(A_p) < \infty$ den. Orduan,*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^\infty A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

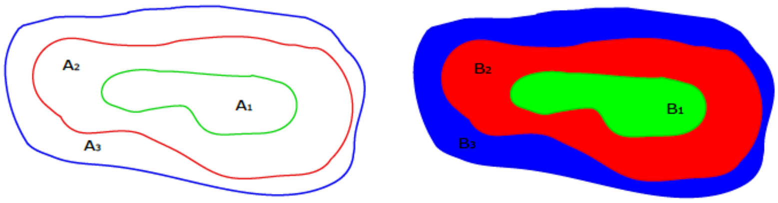
Froga. i) Berehalakoa da neurriaren definizioan $k \geq n$-rako $A_k = \emptyset$ hartuta.

ii) $A \subset B$ bada, $B = A \cup (B - A)$ modura idatz daiteke; hortaz,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A).$$

Gainera, $\mu(A) < \infty$ bada, aurreko adierazpena erabilita emaitza lortzen da ($\mu(A) = \infty$ balitz, $\mu(B) - \mu(A)$ indeterminazioa izango litzateke).

iii) Izan bitez $B_1 = A_1, \;\; B_p = A_p - \left(\bigcup_{k=1}^{p-1} A_k \right), \;\; p > 1$-erako.



1.1 irudia. A_k eta B_k multzoak.

B_k multzo disjuntuak dira, $B_k \subset A_k$ eta $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$; beraz,

$$\left. \begin{cases} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \end{cases} \right\} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

iv) Aurreko ataleko B_k multzo berdinak hartuta, badakigu A_k eta B_k guztien bildurak berdinak direla. Gainera,

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$$

da; beraz,

$$\mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i).$$

Limiteak hartuz

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

v) Osagarriak hartuta,

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c$$

dugu. Segidako multzo baten neurria finitua bada, ebaketarena ere finitua izango da; beraz, bigarren eta laugarren ataletako propietateak erabilita, honako berdintza hauek idatz ditzakegu emaitza lortzeko:

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c\right) = \mu(X) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) =$$

$$\mu(X) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k^c) = \lim_{k\to\infty} \mu(X - A_k^c) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

■

Definizioak. Izan bedi $(X, \mathcal{M}, \mu)$ neurri-espazioa.

i) μ neurria osoa dela diogu, zero neurriko multzoen azpimultzo guztiak neurgarriak badira; hau da, $\forall\ B \subset A,\ \mu(B) = 0$ bada $\mu(A) = 0$ izanda.

ii) μ neurria σ-finitua dela diogu, existitzen bada neurri finitudun multzoen familia kontagarria, beren bildura multzo osoa delarik; hau da, $\exists\ \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zeinetarako $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ den, $\mu(A_n) < \infty$ izanda $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Emandako definizioaz gain, badago neurriak eraikitzeko beste modu bat, Lebesgueren neurrirako jarraitutako prozedura errepikatuz, kanpo-neurriak eta Caratheodoryren definizioa erabiliz, hain zuzen ere.

Definizioa. Izan bedi $(X, \mathcal{M})$ espazio neurgarria. $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ aplikazioa X-ren gaineko kanpo-neurria dela esango dugu, μ^*-k honako propietate hauek betetzen baditu:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- $\forall\ A \subset B \subset X, \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
- $\forall\ (A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X),\ \mu^*\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Adibideak.

i) Lebesgueren kanpo-neurria, m^*, kanpo-neurri bat da.

ii) Biz X multzo ez-kontagarria, eta bertan definitutako honako funtzio hau:

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0, & E \text{ kontagarria bada,} \\ 1, & E \text{ ez-kontagarria bada.} \end{cases}$$

μ^* kanpo-neurria da.

Kontuan izanda μ^* kanpo-neurria X-ren edozein azpimultzotan definituta dagoela, logikoa dirudi galdetzea zein diren multzo μ-neurgarriak, Lebesgueren kasuan egin den bezala. Erantzuna Caratheodoryren definizioak ematen digu.

Definizioa. Izan bedi $A \subset X$. A neurgarria dela diogu, edozein $M \subset X$ multzotarako $\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c)$ bada.

Lebesgueren neurrirako frogatu den bezala, A multzoa neurgarria den ala ez aztertzeko, aski da Caratheodoryren definizioa erabiltzea,

$$\mu^*(M) \geq \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c)$$

desberdintza frogatuz, kanpo-neurria finitua duten multzoentzat. Era berean, Caratheodoryren definizioaren ondorioz, μ^* kanpo-neurriaren murrizketak neurgarriak diren multzoetara μ neurria sortzen du, eta multzo horietarako $\mu(A) = \mu^*(A)$ da. Hori horrela, berehala ondorioztatzen da μ-neurgarriak diren multzoen bildumak σ-aljebra bat osotzen duela.

1.3 Lebesgueren neurriaren beste propietate batzuk

1.3.1 proposizioa. *Lebesgueren neurriak honako propietate hauek betetzen ditu:*

i) *m neurri osoa da; hots, edozein zero neurriko multzoren azpimultzoa neurgarria da (eta, ondorioz, zero neurrikoa).*

ii) *m neurri σ-finitua da; hau da, $\exists \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n, m(A_n) < \infty$ edozein n-tarako eta $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}^n$ izanda.*

1.3.2 teorema. *Izan bedi $A \subset \mathbb{R}^n$. Honako baieztapen hauek baliokideak dira.*

i) *A Lebesgue-neurgarria da.*

ii) *$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, G$ irekia, $A \subset G$ eta $m(G - A) < \epsilon$ izanda.*

iii) *$\exists\, H \in \mathcal{G}$, zeinetarako $A = H - Z$ den, $m(Z) = 0$ izanda.*

Froga. Demagun A multzo neurgarria dela; beraz, $m(A) = m^*(A)$ denez, edozein $\epsilon > 0$ existituko da I_k tarte irekien estaldura kontagarria, zeinetarako $m(A) < \sum_{k=1}^{\infty} \text{bol}(I_k) + \epsilon$ den; hortaz, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ irekia hartuz, $m(G - A) < \epsilon$ izango da.

Demagun orain *ii)* betetzen dela. Orduan, $\forall\ k \in \mathbb{N}, \exists\ G_k$ irekia $A \subset G_k$, $m(G_k - A) < \frac{1}{k}$ izanda. Izan bedi $H = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k \in \mathcal{G}$. $A \subset H$ eta k guztietarako $H - A \subset G_k - A$ dugu; beraz,

$$m(H - A) \leq m(G_k - A) < \frac{1}{k}.$$

Limitea hartuz k infiniturantz doanean, emaitza dugu $Z = H - A$ izendatuz.

Froga amaitzeko, $A = H - Z$ gisa idatziz gero, H eta Z hirugarren baieztapenean aipatzen diren multzo neurgarriak izanda, A ere multzo neurgarria izango da. ∎

1.3.3 korolarioa. *Honako baieztapen hauek baliokideak dira.*

i) A *Lebesgue-neurgarria da.*

ii) $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ F$ *itxia eta* G *irekia,* $F \subset A \subset G$ *eta* $m(G - F) < \epsilon$ *izanda.*

iii) $\exists\ K \in \mathcal{F}$, *zeinetarako* $A = K \cup N$ *den* $, m(N) = 0$ *izanda.*

Froga. Edozein A multzo neurgarritarako, aurreko teoremagatik badakigu existitzen dela G irekia, $A \subset G$ eta $m(G - A) < \epsilon/2$ izanda. Era berean, A^c neurgarria izango da; beraz, existituko da G' irekia, $A^c \subset G'$ eta $m(G' - A^c) < \epsilon/2$ izanda. Izan bedi $F = (G')^c$. Hortaz, $F \subset A$ eta $A - F = G' - A^c$ da. Hori horrela, $m(A - F) = m(G' - A^c) < \epsilon/2$. Gainera, $G - F = (G - A) \bigcup (A - F)$ da; hortaz,

$$m(G - F) = m(G - A) + m(A - F) < \epsilon$$

izango da.

Azken baliokidetasuna frogatzeko, A^c neurgarria denez, aurreko teoremaren hirugarren baieztapenak bermatzen du H-ren eta Z-ren existentzia, $H \in \mathcal{G}, A^c = H - Z = H \cap Z^c$ eta $m(Z) = 0$ izanda. Hortaz, $A = H^c \cup Z$ bildura bezala idatziko dugu, $H^c \in \mathcal{F}$ izanda. ∎

1.3.4 korolarioa. *Neurri positibodun edozein multzo neurgarrik neurri positiboa duen multzo itxi bat du bere barne.*

Froga. E neurgarria bada, edozein $\epsilon > 0$-tarako, existitzen da F itxia zeinetarako $F \subset E$ eta $m(E-F) < \epsilon$ den. Hortaz, $m(F) = m(E) - m(F-E) > m(E) - \epsilon$. $\epsilon < m(E)/2$ aukeratuta, $m(F) > 0$ izango da. ∎

Emaitza horren ondorioz, edozein multzoren Lebesgueren neurrirako beste adierazpen hau eman daiteke:

$$m(A) = \sup\{m(K), K \subset A, K \text{ trinkoa}\}.$$

Bestalde, berehala ondoriozta daiteke puntu isolatu baten Lebesgueren neurria zero dela. Era berean, baita puntuen familia finitu baten Lebesgueren neurria eta puntuen familia kontagarri baten Lebesgueren neurria zero direla . Hori horrela, kanpo-neurriaren definizio orokorretik abiatuz, zero neurriko multzoetarako honako definizio baliokidea hau ondoriozta dezakegu, Lebesgueren neurriaren kasurako.

Definizioa. $A \subset \mathbb{R}^n$ zero neurriko multzoa dela esango dugu, $\forall\ \epsilon > 0$, existitzen bada $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ gelaxken familia, zeinetarako

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \ \text{ eta } \sum_{n=1}^{\infty} \text{bol}(I_n) < \epsilon \ \text{ diren.}$$

Definizio horrek zero edukineko multzoen definizioa gogorarazten digu.

Definizioa. $A \subset \mathbb{R}^n$ zero edukineko multzoa dela esango dugu, $\forall\ \epsilon > 0$ existitzen bada $I_1, I_2, \ldots, I_n$ gelaxken familia, zeinetarako

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \ \text{ eta } \sum_{k=1}^{n} \text{bol}(I_k) < \epsilon$$

den.

Argi dago multzo batek zero edukina badu, beraren Lebesgueren neurria zero dela; alderantzizkoa, ordea, ez da egia.

1.3.5 korolarioa. *Izan bedi $A \subset \mathbb{R}^n$ multzo trinkoa. Orduan, A zero edukinekoa da, baldin eta soilik baldin zero neurrikoa bada.*

Froga. Demagun A-ren neurria zero dela; hau da, $\forall\ \epsilon > 0$-rako existitzen da $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$ tarte irekien familia, zeinetarako $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} \text{bol}(I_n) < \epsilon$ diren. Bilduma hori A-ren estalki bat da, eta A trinkoa denez, existituko da azpiestalki finitu bat, zeinetarako $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ eta $\sum_{k=1}^{n} \text{bol}(I_k) < \epsilon$ diren. Beraz, A zero edukineko multzoa da. ■

Lebesgueren neurriaren propietateekin amaitzeko, azter dezagun zein den $m(A)$-ren eta $m(\psi(A))$-ren arteko erlazioa, $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismoa izanda.

1.3.6 proposizioa. *Lebesgueren neurria traslazioengatik aldaezina da; hau da, $m(x + A) = m(A)$, edozein A multzo neurgarritarako. Era berean, $m(\lambda A) = \lambda^n m(A)$, edozein $\lambda > 0$-tarako.*

Froga. A neurgarria denez, existitzen dira G irekia eta F itxia, $F \subset A \subset G$ izanda, zeinetarako $m(G - F) < \epsilon$ den. Gainera, $x + F$ itxia da, $x + G$ irekia da, $x + F \subset x + A \subset x + G$, $m((x + G) - (x + F)) < \epsilon$ izanda; hortaz, $x + A$ neurgarria da. Kontuan izanda Lebesgueren kanpo-neurria traslazioengatik aldaezina dela, $m(A) = m^*(A) = m^*(x + A) = m(x + A)$.

Argudio bera erabiliz, froga daiteke λA multzo neurgarria dela, eta ondorioztatu $m(\lambda A) = \lambda^n m(A)$ berdintza. ■

1.3.7 proposizioa. *Izan bedi $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismoa. $B \subset \mathbb{R}^n$ boreldarra da, baldin eta soilik baldin $\psi(B)$ boreldarra bada.*

Froga. Izan bitez $\mathcal{B}$ σ-aljebra boreldarra eta $\mathcal{B}' = \{B \subset \mathbb{R}^n, \psi(B) \text{ boreldarra}\}$ familia. Argi dago $\mathcal{B}'$ σ-aljebra bat dela, ψ aplikazioa bijektiboa baita.

Bestalde, edozein G multzo irekitarako, $\psi(G)$ ere irekia da, ψ^{-1} jarraitua delako; beraz, $G \in \mathcal{B}'$. Orduan, $\mathcal{B}'$ σ-aljebran $\mathbb{R}^n$-ko ireki guztiak badaude, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ da. Argudio bera erabiliz, ψ^{-1} funtziorako $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ inklusioa dugu, berdintza lortuz. ■

1.3.8 proposizioa. *Izan bitez $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismoa, $I = [0, 1)^n$ kuboa eta $c = m(\psi(I))$. Orduan, A Lebesgue-neurgarria bada, $\psi(A)$ ere Lebesgue-neurgarria da, eta $m(\psi(A)) = cm(A)$ da.*

Froga. Demagun, lehenik eta behin, $A = J = (a, b)$ kubo bat dela, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ eta $b = (b_1, \ldots, b_n)$ puntuak izanda. $r = |b_1 - a_1|$ bada, $J = a + rI$ eran idatz daiteke. Bestalde, ψ lineala denez, $\psi(J) = \psi(a) + r\psi(I)$ da; hortaz,

$$m(\psi(J)) = m(r\psi(I)) = r^n m(\psi(I)) = cm(J)$$

berdintza betetzen da.

Demagun $A = G$ multzo irekia dela, eta idatz dezagun I_j tarte irekien bildura disjuntu bezala; hots, $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Orduan,

$$m(\psi(G)) = m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \psi(I_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(\psi(I_j)) = c\sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) = cm(G).$$

Edozein $A \subset \mathbb{R}^n$ multzotarako, bijekzioa dago A multzoa estaltzen duten irekien eta $\psi(A)$ estaltzen dutenen irekien artean; beraz, honako hau idatz dezakegu:

$$\begin{aligned} m^*(\psi(A)) &= \inf\{m(\psi(G)), A \subset G, G \text{ irekia}\} \\ &= \inf\{cm(G), A \subset G, G \text{ irekia}\} = cm^*(A). \end{aligned}$$

Hortaz, A Lebesgue-neurgarria bada, emaitza betetzen da.

Azkenik, demagun A edozein multzo Lebesgue-neurgarria dela. 1.3.2 teoremaren arabera, $A = B \cup Z$ eran deskonposa daiteke, B boreldarra izanda eta Z zero neurrikoa. Hori horrela, $\psi(A) = \psi(B) \cup \psi(Z)$ izango da, eta, ondorioz, $\psi(A)$ neurgarria izango da, $\psi(B)$ boreldarra baita eta $m^*(\psi(Z)) = cm^*(Z) = 0$ delako. ∎

1.4 Vitaliren multzoa eta Cantorren multzoa

Atal honetan, multzo berezi bi aztertuko ditugu; alde batetik, Lebesgue-neurgarria ez den multzo bat, eta, bestetik, ez-kontagarria den zero neurriko multzo bat; Vitaliren multzoa eta Cantorren multzoa, hurrenez hurren.

Vitaliren multzoa

Giussepe Vitali matematikari italiarra Ravenan jaio zen 1875eko abuztuaren 26an, eta Bolonian hil zen 1932ko otsailaren 29an. Vitali izan zen zenbaki errealen multzo ez-neurgarri baten adibidea eman zuen lehena, 1905. urtean argitaratutako *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta* izeneko lanean. Neurriaren teorian lan egin zuen Lebesgueren emaitzaren hainbat hedapen emanez, eta bere *estalduraren teorema* neurriaren teoriaren oinarrizko emaitza da. Bestalde, Vitaliren konbergentziaren teoremak bigarren gaian ikusiko dugun konbergentzia menderatuaren teorema orokortu zuen. Bere bizitzaren azken urteetan, Hilbert espazioaren geometrian lan egin zuen.

Giussepe Vitali (Italia, 1875-1932)
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Giuseppe_Vitali.jpg

1.4.1 teorema. *(Vitaliren lema). Existitzen dira Lebesgue-neurgarriak ez diren multzoak.*

Froga. Teorema frogatzeko V Vitaliren multzoa eraikiko dugu, eta V hori ez dela Lebesgue-neurgarria ikusiko dugu.

Izan bitez $x, y \in E = (0, 1)$, eta defini dezagun honako erlazio hau:

$$x \sim y \Leftrightarrow y - x \text{ arrazionala bada.}$$

Erraz froga daiteke erlazio hori baliokidetasun-erlazioa dela, baliokidetasun-klaseak E_α izanda ($\alpha \in E$). Gainera, E_α klaseek E-ren partiketa bat osotzen dute. Zenbaki arrazionalen multzo kontagarria denez, E_α klase bakoitza ere multzo kontagarria izango da. Aldiz, $(0, 1)$ tartea ez da kontagarria; beraz, horrek esan nahi du E_α multzoen kopurua ezin dela kontagarria izan (bestela, multzo kontagarrien bildura kontagarria ezingo litzateke ez-kontagarria izan).

Zermeloren axiomaren arabera, existitzen da V multzo bat E_α baliokidetasun-klase bakoitzeko elementu bakarra duena (*Zermeloren axiona: Multzo ez-huts eta disjuntuen edozein bildumatarako, existitzen da beste multzo bat emandako bildumaren multzo bakoitzaren elementu bakarra duena*).

Horrela eraikitako V multzoa Vitaliren multzoa da, eta frogatuko dugu ez dela Lebesgue-neurgarria.

Izan bitez $r_n, n = 0, 1, \ldots$ $[0, 1)$ tartean dauden zenbaki arrazionalak, $r_1 = 0$ izanda. Defini dezagun, n zenbaki arrunt bakoitzerako, $V_n = r_n + V$ multzoa. $n \neq m$ bada, $y \in V_n \cap V_m \Leftrightarrow \exists\, x_\alpha, x_\beta \in V$, non $y = x_\alpha + r_n = x_\beta + r_m$ den. Alde batetik, $x_\alpha - x_\beta$ ez da arrazionala, eta, bestetik, $x_\alpha - x_\beta = r_m - r_n$ da; hortaz, gelditzen den aukera bakarra $x_\alpha = x_\beta$ izatea da. Ondorioz, $n \neq m$

bada, $V_n \cap V_m = \emptyset$ da. Horretaz gain, multzo guztien bildura egiten badugu, honako hau lortzen da:

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset [-1,2],$$

zeren eta $x \in (0,1)$ puntu bakoitzerako $\exists\ \alpha, n$ zeinetarako $x = x_\alpha + r_n$ den.

V multzoa neurgarria balitz, haren neurria eta V_n-ren neurria berdinak lirateke, bata bestearen translazioa baita. Gainera, guztiak disjuntuak direnez,

$$m([0,1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) \leq 3$$

izan beharko litzateke; hau da,

$$m([0,1]) \leq m(V) + m(V) + \cdots \leq 3.$$

Berdintzaren ezkerreko balioa bat da. Bestalde, $m(V) > 0$ bada, seriearen batura infinitu da, eta $m(V) = 0$ bada, seriea zero da. Edozein kasutan, ezinezkoa da desberdintza betetzea, kontraesan batera iritsiz. Hortaz, V ezin da Lebesgue-neurgarria izan. ■

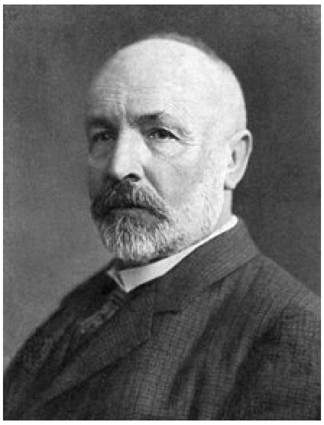
Oharra. V multzoa eraikitzeko $(0,1)$ tartearen ordez edozein $E \subset \mathbb{R}$ neurri positibodun multzo bornatua erabil daiteke, eta, ondorioz, E bakoitzerako neurgarria ez den multzo bat aurkituko genuke; hortaz, Lebesgue-neurgarriak ez diren infinitu multzo existitzen dira.

Cantorren multzoa

Georg Cantor San Petersburgon jaio zen, 1845eko martxoaren 3an, eta Hallen, Alemanian, zendu zen 1918ko urtarrilaren 6an. Cantorren gurasoak Danimarkakoak ziren, eta bere aita gaixotu zenean, 1856an, familia Frankfurtera joan zen bizitzera. Laster erakutsi zuen matematikan aparta zela, eta Berlinera joan zen, non fisika, filosofia eta matematika ikasi zituen, Weierstrass-ekin, Kummer-ekin eta Kronecker-ekin, besteak beste. Urte batzuk geroago, azken hori bere etsai bihurtuko zen Cantorren ideiak berriegiak zirela uste baitzuen. Ikasketak amaitu ondoren irakasle plaza bat lortu zuen Hallen, eta bertan geratu zen bere bizitza osoan.

Bere lanari dagokionez, multzo-teoria sortu zuen, zenbakien teoria landu zuen, eta, serie trigonometrikoak ere, Bernhard Riemannek garatutako aldagai konplexuetarako hasierako ideiak emanez. Multzo-teorian, tamaina desberdineko infinituak daudela frogatu zuen; esaterako, zenbaki arrunten eta zenbaki errealen kardinalak infinitu dira, bata kontagarria eta bestea ez. Horrek iraultza suposatu zuen garai hartako matematikariengan.

Bestalde, askotan depresio-aldiak jasan zituen, eta bere onetik ateratzen zen; baina oso gizon atsegina izan zen, beti animoak ematen, ideia berriak zituzten matematikari gazteei. Ez zuen nahi haiek sufritzea, ideia berriak izateagatik, berak horixe pairatu behar izan baitzuen matematikari zaharragoengandik. Azkenean, denborarekin, Cantorren lana munduan zehar hedatu zen, eta eskoletan multzoekin lan egiten hasi ziren. Eskola batzuetan, denbora luzez, oraindik XX. mendearen azken hamarkadetan ere, *matematika berria* deitzen zieten Cantorren ekarpen batzuen aplikazio didaktikoei.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (Errusia, 1845-1918)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e7/Georg_Cantor2.jpg

1.4.2 teorema. *(Cantorren multzo hirutarra).*

Cantorren multzo hirutarra, honako propietate hauek betetzen ditu:

- $[0,1]$ *tarteko multzo trinkoa da.*
- *Bere puntu guztiak metatze-puntuak dira; hau da, multzo perfektua da.*
- *Bere Lebesgueren neurria zero da.*
- *Multzo ez-kontagarria da; hau da, jarraituaren potentzia du.*

Froga. Izan bedi $[0,1]$ tarte itxia. Tarte hori hiru zati disjuntutan banatzen dugu: $[0,1] = [0,\frac{1}{3}]\bigcup(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\bigcup[\frac{2}{3},1]$. Izan bedi $G_1 = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Lehen urrats batean G_1 multzoa kentzen dugu, $C_1 = [0,1] - G_1$ izanda. Gelditzen diren bi azpitarteetan prozesua errepikatzen dugu; hau da, bakoitza hiru zatitan banatu eta erdikoa kendu. Beraz, $C_1 = [0,\frac{1}{3}]\bigcup[\frac{2}{3},1]$ multzoari $G_2 = (\frac{1}{9},\frac{2}{9})\bigcup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$

kentzen diogu, eta $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \bigcup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \bigcup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \bigcup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$ geldituko da. Prozedura errepikatuz, Cantorren multzo hirutarra C_n multzoen limite bezala definitzen da; hots, C_n guztien ebakidura:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

1.2 irudia. Cantorren multzoaren eraketa.

Froga ditzagun teoreman aipatutako propietateak.

Alde batetik, multzo bornatua eta ez-hutsa da $[0, 1]$ tarteko azpimultzoa delako, eta mugetako puntuak, 0 eta 1 hain zuzen ere, inoiz ez ditugulako kentzen. Gainera, multzo itxia da, zeren eta urrats bakoitzean kentzen den G_n azpimultzo irekia baita, tarte irekien bildura delako; beraz,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = C^c$$

irekia bada C multzo itxia da. Hortaz, trinkoa da.

Cantorren multzoa perfektua izango da, bertako x puntu guztiak metatze-puntua badira. Edozein $\epsilon > 0$-tarako, puntu horren $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ ingurune bakoitzerako existitzen da $n \in \mathbb{N}$, zeinetarako $1/3^n < \epsilon$ den; bestalde $x \in C_n$ denez, existituko da G bildumako I tarte bat, zeinetarako

$$x \in I \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$$

den. Kontuan izanda C eraikitzeko prozeduraren urrats bakoitzean tarteen muturrak inoiz ez ditugula kentzen, I tartearen muturrak C multzoan daude; beraz, aurkitu dugu x puntuaren ingurunea, zeinetarako

$$((x - \epsilon, x + \epsilon) - \{x\}) \cap C \neq \emptyset$$

den. Hortaz, x Cantorren multzoaren metatze-puntua da.

Kalkula dezagun $m(G)$, $m(C) = m([0,1]) - m(G)$ formula erabiliz $m(C)$-ren balioa lortzeko. $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ denez, G_n disjuntuak izanda,

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n)$$

da; beraz, nahikoa da $m(G_n)$ kalkulatzea, G_n multzoa n-garren urratsean kentzen dugun tarteen bildura izanda. Hori horrela, lehen urratsean $\frac{1}{3}$ luzerako tarte bat kentzen dugu. Bigarrenean $\frac{1}{9}$ luzerako bi tarte kentzen ditugu, hirugarrenean $\frac{1}{27}$ luzerako lau tarte, eta abar. Horren arabera, n-garren urratsean 2^{n-1} tarte kenduko ditugu, bakoitzaren luzera $\frac{1}{3^n}$ izanda; beraz, $m(G_n) = \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$ da. Orduan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = 1.$$

Horren arabera, $m(G) = 1$ bada $m(C) = 0$ izango da.

Azken atala frogatzeko, azter dezagun C multzoan dauden puntuak nolakoak diren. Har dezagun zenbaki errealen adierazpena hiru oinarrian. $x \in [0,1]$ bada,

$$x = 0, a_1a_2a_3 \ldots_{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n}, a_n = 0, 1, 2$$

da, eta $1 = 0,222\ldots_{(3)}$. Demagun x ez dela G multzoan dauden tarte baten muga. $x \in G_1 \Leftrightarrow x = 0,1a_2a_3\ldots_{(3)}$ eran adieraz badaiteke; $x \in G_2 \Leftrightarrow x = 0,01a_3\ldots_{(3)}$ edo $x \in G_2 \Leftrightarrow x = 0,21a_3\ldots_{(3)}$ eran adieraz badaiteke. G multzoko tarteen mugek adierazpen bi onartzen dituzte: bata zenbakien segida finitua, non azkenengo zenbakia 1 den; bestea, 0-z eta 2-z osotutako 2 periododun adierazpen infinitua (hau da, puntu batetik aurrera gai guztiak 2 dira). Horren arabera, $x \in C$, bere adierazpena 1 zenbakia erabili gabe eman badaiteke.

Defini dezagun Cantorren multzotik $[0,1]$ tartera doan honako f aplikazio honetan: Cantor multzoko puntu bakoitzari bi oinarriko zenbaki bat dagokio,

$$f(x) = 0, b_1b_2b_3\ldots_{(2)}\,,\ b_j = a_j/2$$

izanda. Cantorren multzoko zenbakiaren adierazpenean $a_j = 0$ bada, $b_j = 0$ izango da, eta $a_j = 2$ bada, $b_j = 1$. Adibidez, Cantorren multzoko $0,2002$ zenbakiari (hiru onarrian idatzita) $0,1001$ dagokio:

$$x = 0,2002_{(3)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4} \Longrightarrow f(x) = 0,1001_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} = \frac{9}{16}.$$

Modu horretan, bi oinarrian 0 eta 1 zenbakiak erabilita idatz daitezkeen $[0,1]$ tarteko zenbaki guztiak lortzen ditugu; hau da, $[0,1]$ tarte osoa. Orduan, f aplikazio surjektiboa da; hots, C kardinala ezin da $[0,1]$ tarteko kardinala baino txikiagoa izan:

$$\operatorname{card}(C) \geq \operatorname{card}([0,1]).$$

Alderantzizko desberdintza beti betetzen denez, $C \subset [0,1]$ delako, kardinal biak berdinak dira; hortaz, C ez da kontagarria. ■

1.5 Lebesgue-Stieltjesen neurriak

Lebesgueren kanpo-neurriaren adierazpenean oinarritzat hartzen da tartearen luzera, hortik abiatuz edozein multzoren kanpo-neurria definitzeko. Hori horrela, tartearen luzeraren ordez beste funtzio bat hartuz, neurrien familia desberdinak eraiki daitezke. Neurri horiei Lebesgue-Stieltjesen neurriak deritze, eta ohikoa da probabilitate teorian erabiltzea, esaterako. Atal honetan, aipamen labur bat egingo diegu neurri horiei.

Izan bedi $\mathbb{R}$-n definitutako μ neurri σ-finitu bat, zeinetarako multzo boreldarrak neurgarriak diren. Defini dezagun honako funtzio hau:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty],\ F(x) = \mu((-\infty, x]).$$

F-ri dentsitate-funtzioa esaten zaio, eta $F(x)$ balioari $(-\infty, x]$ tarteko masa deritzogu. F funtzioa gorakorra eta eskuin-jarraitua da. Horretaz gain, funtzioa b puntuan jarraitua izango da, b puntuaren neurria zero bada

$$\mu(\{b\}) = F(b) - F(b^-) = \mu((-\infty, b]) - \mu((-\infty, b-\epsilon])$$

baita. Oro har, $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ da, zeren eta

$$\mu((a,b]) = \mu((-\infty, b]) - \mu((-\infty, a])$$

baita, $(a,b] = (-\infty, b] - (-\infty, a]$ delako. x puntu bakoitzerako bere masa $F(x) - F(x^-)$-ren bidez emanda dago, $F(x^-)$ funtzioaren ezker-limitea x puntuan izanda.

1.5.1 teorema. *Izan bedi F aldagai errealeko funtzio gorakorra eta eskuin-jarraitua. Orduan, existitzen da $\mathbb{R}$-n definitutako neurri bakar bat multzo boreldarretarako*

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$$

baldintza betetzen duena.

Hori horrela, neurriaren eraikuntza honako era honetan egiten da kanpo-neurri baten bidez: biz $\phi((a,b]) = F(b) - F(a)$ eta $\mathcal{J} = \{(a,b], -\infty < a < b < \infty\}$ familia.

$$\mu_F^*(A) = \inf \{\sum_{j=1}^{\infty} \phi(I_j),\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, I_j \in \mathcal{J}\}$$

kanpo-neurri bat da, eta Caratheodoryren definizioak emandako prozedura jarraituz sortutako μ_F neurri bat da, *Lebesgue-Stieltjes neurria* deritzoguna, hain zuzen ere.

Thomas Joannes Stieltjes Zwolle-n (Holanda), jaio zen 1856an, eta Toulousen (Frantzia), zendu zen 1894an. Ezaguna da Riemann-Stieltjesen eta Lebesgue-Stieltjesen integralengatik. Delf-en egin zituen unibertsitateko ikasketak, baina ez zen klaseetara joaten; Gaussen eta Jacobiren lanak irakurtzen ematen zituen orduak, ordea. Hori horrela, ez zituen azterketak gainditu. Bere aitaren lagun bati esker, Leideneko astronomia-behatokian lortu zuen lana. Han zegoela, Hermiterekin hasi zen idazten, eta, horren ondorioz astronomia utzi eta matematiketara bideratu zen. Hermite bilakatu zen bere tesi-zuzendaria, Darboux-ekin batera, eta harreman horiek bizitza osorako iraungo zuten.

Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/13/
Thomas_Jan_Stieltjes.jpg/220px-Thomas_Jan_Stieltjes.jpg

Adibideak. i) $F(x) = x$ funtzioa denean, sortzen den μ_F neurria m Lebesgueren neurria da.

ii) Izan bedi $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ funtzioa Riemann-integragarria. Defini dezagun

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt, & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -\int_x^0 f(t)dt, & x < 0. \end{cases}$$

μ_F Lebesgue-Stieljesen neurria $\mu(a,b] = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ bidez definitzen da.

1.6 Ariketak

1.6.1. *Izan bedi* $[0,1]$ *tartean definitutako* f_n *funtzio-segida:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{p}{q}, \textit{laburtezina bada}, q \leq n, \\ 0, & \textit{beste kasuetan.} \end{cases}$$

Frogatu, n *bakoitzerako,* f_n *funtzioa Riemann-integragarria dela. Aztertu* f_n *segidaren puntuz puntuko limitea Riemann-integragarria den ala ez.*

1.6.2. *Izan bedi* $X = \{a, b, c, d\}$ *multzoa. Zein da* $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b\}\}$ *azpimultzoak sortutako* σ*-aljebra ?*

1.6.3. *Froga ezazu* $m^\star(A) = 0$ *bada,* A *multzo neurgarria dela. Ondorioztatu, kasu horretan, edozein* $B \subset A$ *neurgarria dela baita ere.*

1.6.4. *Izan bedi* A *multzoa, zeinetarako* $m^\star(A) = 0$ *den. Froga ezazu edozein* B *multzo neurgarritarako* $m^\star(A \cup B) = m^\star(B)$ *dela.*

1.6.5. *Izan bedi* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, |x - y| \leq e^{-x}\}$ *multzoa. Frogatu Lebesgue-neurgarria dela.*

1.6.6. *Izan bedi* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzioa,* D *multzo neurgarria izanik. Demagun* $A_n = \{x \in D, f(x) \leq -1/n\}$ *multzoak neurgarriak direla* n *guztietarako. Frogatu* $A = \{x \in D, f(x) < 0\}$ *multzoa neurgarria dela baita ere.*

1.6.7. *Izan bedi* A *Lebesgue neurgarria,* $m(A) > 0$ *izanda. Frogatu* A*-k azpimultzo ez-neurgarri bat duela.*

1.6.8. *Izan bitez* X *multzo ez-kontagarria eta bertan definitutako honako funtzio hau:*

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0, & E \textit{ kontagarria bada,} \\ 1, & E \textit{ ez-kontagarria bada.} \end{cases}$$

Froga ezazu μ^* *kanpo-neurria dela, eta kalkulatu* μ^**-neurgarriak diren multzoak.*

1.6.9. *Izan bitez* $\mathbb{R}$ *multzoa eta* $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ σ*-aljebra. Defini dezagun honako funtzio hau:*

$$\mu(E) = \begin{cases} \textit{card}(E), & \textit{card}(E) \textit{ finitua bada,} \\ \infty, & \textit{besteetan.} \end{cases}$$

Frogatu μ *neurri bat dela.*

1.6.10. *Izan bedi X multzo kontagarria, $f : X \longrightarrow [0, +\infty)$ eta X-ren gaineko $\mathcal{A}$ σ-aljebra. Defini dezagun μ honako era honetan:*

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad \textit{eta } \mu(E) = \sum_{x \in E} f(x), \forall\ E \in \mathcal{A}, E \neq \emptyset.$$

μ neurri bat da? σ-finitua al da?

1.6.11. *Izan bitez $E \subset (0, \infty)$, $m(E) = 0$ izanda, eta $f(x) = x^2$ funtzioa. Azter ezazu $f(E)$ multzoa zero neurrikoa den ala ez.*

1.6.12. *Biz $[0, \dfrac{1}{\pi}]$ tartean definitutako honako f funtzio hau:*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Kalkula ezazu $\{x \in [0, \dfrac{1}{\pi}] : f(x) \geq 0\}$ multzoaren neurria. (Gogoratu $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ dela).

1.6.13. *Izan bedi $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n, \frac{n^2 + 1}{n} \right)$ multzoa. Azter ezazu bere Lebesgueren neurria finitua den ala ez.*

1.6.14. *Izan bedi $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Froga ezazu bere grafikoa $\mathbb{R}^2$-ko zero neurriko multzoa dela; hau da,*

$$m\left(\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}\right) = 0.$$

2. gaia

Lebesgueren integrala eta propietateak

Neurri-espazioak aztertu ondoren, bigarren gaian Lebesgueren integrala definituko dugu, helburu izanda Riemannen integralak dituen gabeziak ekiditea eta propietateak hobetzea. Gainera, bi integralen arteko erlazioa ere emango da. Hori horrela, nahiz eta emaitza gehienak $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ neurri-espazioan aztertu, oro har $(X, \mathcal{M}, \mu)$ neurri-espazioa izango da, non μ neurria σ-finitua den.

2.1 Funtzio neurgarriak

Definizioa. $f : X \to [-\infty, \infty]$ funtzio neurgarria dela diogu, baliokideak diren honako baldintza hauetako bat betetzen denean:

i) $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in X, f(x) > \alpha\}$ multzo neurgarria da, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

ii) $f^{-1}([\alpha, \infty]) = \{x \in X, f(x) \geq \alpha\}$ multzo neurgarria da, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

iii) $f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in X, f(x) < \alpha\}$ multzo neurgarria da,$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

iv) $f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in X, f(x) \leq \alpha\}$ multzo neurgarria da, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

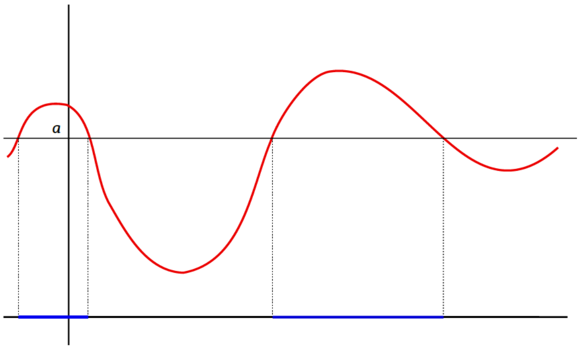
2.1.1 proposizioa. $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ *funtzio neurgarria da, baldin eta soilik baldin* $f^{-1}(B)$ *neurgarria bada,* B *edozein boreldar izanda.*

Froga. f neurgarrirako, defini dezagun $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^n, f^{-1}(A) \text{ neurgarria}\}$, eta ikus dezagun $\mathcal{A}$ σ-aljebra bat dela. Alde batetik, argi dago $\emptyset \in \mathcal{A}$ dela. Bestalde, $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(\mathbb{R}^n) - f^{-1}(A)$; beraz, $A \in \mathcal{A}$ bada, $A^c \in \mathcal{A}$ baita ere. Azkenik, izan bedi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Orduan,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$$

neurgarria da. Gainera, $f^{-1}(a,b) = f^{-1}(a,\infty) \cap f^{-1}(-\infty, b]$; hortaz, $(a,b) \in \mathcal{A}$ eta, ondorioz, ireki guztiak $\mathcal{A}$-ren barnean daude; hau da, baita boreldar guztiak.

Elkarrekikoa berehalakoa da. ■



2.1 irudia. Urdinez $f^{-1}((\alpha,\infty))$ multzoaren adierazpen grafikoa.

Oharra. Emaitza horren ondorioz, funtzio neurgarriren definizioa eta honako baldintza hauek baliokideak dira baita ere:

i) $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \in V \text{ irekia}\}$ multzo neurgarria da, $\forall\, V \subset \mathbb{R}$.

ii) $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \in F \text{ itxia}\}$ multzo neurgarria da, $\forall\, F \subset \mathbb{R}$.

iii) $f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \in I \text{ tartea}\}$ multzo neurgarria da, $\forall\, I \subset \mathbb{R}$.

Adibideak.

i) Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, f neurgarria da. $\forall\, V \subset \mathbb{R}^n$ multzo irekirako $f^{-1}(V)$ irekia da, baita ere, f jarraitua delako; hortaz, $f^{-1}(V)$ multzo neurgarria da $\mathbb{R}^n$-n.

ii) Izan bedi $f = \chi_A$, A multzoaren funtzio karakteristikoa:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$$\chi_A \text{ funtzio neurgarria da} \iff A \text{ multzo neurgarria bada.}$$

Demagun χ_A funtzio neurgarria dela. Hortaz, $\chi_{-1}([1/2,\infty])$ multzo neurgarria da, baina $\chi_{-1}([1/2,\infty]) = A$ da; hau da, A multzo neurgarria da.

Bestalde, edozein V multzo irekitarako, ikus dezagun $\chi_{-1}(V)$ neurgarria dela. Lau aukera ager daitezke:

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{l} 1 \in V \\ \text{eta} \\ 0 \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \chi_{-1}(V) = X, \quad \text{b)}\ \left.\begin{array}{l} 1 \in V \\ \text{eta} \\ 0 \notin V \end{array}\right\} \Rightarrow \chi_{-1}(V) = A,$$

$$\text{c)}\ \left.\begin{array}{l} 1 \notin V \\ \text{eta} \\ 0 \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \chi_{-1}(V) = A^c, \quad \text{d)}\ \left.\begin{array}{l} 1 \notin V \\ \text{eta} \\ 0 \notin V \end{array}\right\} \Rightarrow \chi_{-1}(V) = \emptyset.$$

Edozein kasutan, $\chi_{-1}(V)$ multzo neurgarria da.

iii) Izan bedi $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio ez-beherakorra (era berean, ez-gorakorra). Orduan, f neurgarria da.

Izan bedi $A = f^{-1}(-\infty, \alpha)$. $A = \emptyset$ bada, neurgarria da; hortaz, demagun $A \neq \emptyset$ dela. Orduan, $\exists\ b \in A,\ f(b) < \alpha$ izanda. f ez-beherakorra denez, $\forall\ y < b \Rightarrow f(y) \leq f(b) < \alpha$; beraz, $y \in A$. $A = (-\infty, a)$ erara idatz daiteke, $a = \sup A$ izendatuz, eta multzo neurgarria dela ondorioztatzen da.

2.1.2 proposizioa. *Izan bitez $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio neurgarriak eta $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, $h(x) = \phi(f(x), g(x))$ funtzio neurgarria da.*

Froga. Izan bedi $V \subset \mathbb{R}$ irekia.

$$h^{-1}(V) = \{x \in D, \phi((f(x), g(x)) \in V\} = \{x \in D, (f(x), g(x)) \in \phi^{-1}(V)\}$$

da. ϕ funtzio jarraitua denez, $\phi^{-1}(V)$ irekia da $\mathbb{R}^2$-n; beraz, honela idatz daiteke:

$$\phi^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (I'_j \times I''_j),$$

I'_j eta I''_j tarte irekiak izanda. Orduan,

$$\begin{aligned} h^{-1}(V) &= \{x \in D, (f(x), g(x)) \in \phi^{-1}(V)\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in D, (f(x), g(x)) \in I'_j \times I''_j\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(f^{-1}(I'_j) \bigcap g^{-1}(I''_j) \right) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

da, zeren eta $f^{-1}(I'_j)$ eta $g^{-1}(I''_j)$ multzo neurgarriak baitira. Hortaz, h funtzio neurgarria da, $h^{-1}(V)$ multzo neurgarria delako. ∎

2.1.3 korolarioa. *Izan bitez $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio neurgarriak.*

i) $\phi(x, y) = x + y$ *bada,* $h(x) = f(x) + g(x)$ *funtzio neurgarria da.*

ii) $\phi(x, y) = x - y$ *bada,* $h(x) = f(x) - g(x)$ *funtzio neurgarria da.*

iii) $\phi(x) = Kx$ *bada,* $\forall\ K \in \mathbb{R}$, $h(x) = Kf(x)$ *funtzio neurgarria da.*

iv) $\phi(x, y) = xy$ *bada,* $h(x) = f(x)g(x)$ *funtzio neurgarria da.*

v) $\phi(x, y) = \max\{x, y\}$ *bada,* $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ *funtzio neurgarria da.*

vi) $\phi(x, y) = \min\{x, y\}$ *bada,* $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ *funtzio neurgarria da.*

2.1.4 proposizioa. *Izan bitez $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio neurgarria eta $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua. Orduan, $g \circ f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio neurgarria da.*

Froga. Izan bitez $V \subset \mathbb{R}$ irekia eta $h = g \circ f$ konposaketa.

$$\begin{aligned} h^{-1}(V) &= \{x \in D, h(x) \in V\} = \{x \in D, g(f(x)) \in V\} \\ &= \{x \in D, f(x) \in g^{-1}(V)\}. \end{aligned}$$

Alde batetik, g jarraitua denez, $g^{-1}(V)$ multzo irekia da. Bestetik, f neurgarria denez, edozein multzo irekiren aurreirudia multzo neurgarria da; hots, $\{x \in D, f(x) \in g^{-1}(V)\}$ neurgarria da. ∎

2.1.5 proposizioa. *Izan bedi $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ funtzio neurgarrien segida.*

i) $\sup f_n$ *eta* $\inf f_n$ *funtzio neurgarriak dira.*

ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ *eta* $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ *funtzio neurgarriak dira.*

Froga. i) f_n funtzio neurgarriak badira, $\{x \in D, f_n(x) > \alpha\}$ multzo neurgarriak dira. Bestalde,

$$\{x \in D, \sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n(x)) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in D, f_n(x) > \alpha\}$$

multzo neurgarrien bildura da; beraz, $\sup f_n$ funtzio neurgarria da.

Infimoarena frogatzeko supremoarena erabiliko dugu, $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ baita. Hortaz, f_n funtzio neurgarria $\Rightarrow -f_n$ neurgarria $\Rightarrow \sup(-f_n)$ neurgarria $\Rightarrow \inf f_n$ neurgarria.

ii) $\limsup f_n = \inf\left(\sup f_i, i \geq n\right)$ eta $\liminf f_n = \sup\left(\inf f_i, i \geq n\right)$ direnez, funtzio neurgarriak izango dira. ∎

Definizioa. Propietate bat D multzoan ia nonahi (i.n.) betetzen dela diogu, zero neurriko D-ren azpimultzo batean izan ezik betetzen denean.

Adibidez, esango dugu f jarraitua dela i.n. jarraitua bada puntu guztietan, zero neurriko multzo batean izan ezik.

2.1.6 proposizioa. *Izan bitez μ neurri osoa, f funtzio neurgarria eta $g = f$ i.n. Orduan, g funtzioa ere neurgarria da.*

Froga. g funtzioa neurgarria izango da $M = \{x \in X, g(x) > \alpha\}$ multzo neurgarria bada, edozein α-tarako. $f = g$ denez i.n., bi funtzio horiek berdinak dira zero neurriko multzo baten izan ezik. Dei diezaiogun A zero neurriko multzo horri; hau da, $A = \{x \in X, f(x) \neq g(x)\}$, $\mu(A) = 0$ izanda.

Deskonposa dezagun M multzoa M_1 eta M_2 azpimultzo disjuntutan, non

$$M_1 = \{x \in A, g(x) > \alpha\} \text{ eta } M_2 = \{x \in X - A, g(x) > \alpha\}$$

diren. M_2 azpimultzo neurgarria da, bertan f eta g berdinak direlako eta f neurgarria delako. $M_1 \subset A$ da, A zero neurriko multzoa izanda. Zero neurriko multzo batean edozein azpimultzo neurgarria da μ neurri osoa delako; beraz, M_1 neurgarria da bere neurria zero delarik. Gainera, $\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$ denez, $\mu(M) = \mu(M_2)$ izango da. ∎

Definizioa. Biz $(X, \mathcal{M}, \mu)$ neurri-espazioa. s funtzio sinplea dela diogu, neurri finitudun multzoen funtzio karakteristikoen konbinazio lineala bada; hau da,

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}, \; a_j \in \mathbb{R} \text{ eta } A_j \in \mathcal{M}, j = 1, \dots n, \mu(A_j) < \infty \text{ izanik.}$$

A_j tarte bornatuak badira, s funtzio mailakatua da. Bestalde, s funtzioak $a_1, \dots, a_n$ balioak hartzen baditu, orduan, funtzioa honela adieraz daiteke:

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{f^{-1}(a_j)}.$$

2.1.7 proposizioa. *Funtzio sinpleak neurgarriak dira.*

Froga. Izan bedi $s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ funtzio sinplea. Definizioz, $A_j \in \mathcal{M}$ multzo neurgarriak dira; hortaz, χ_{A_j} funtzio neurgarria da, eta 2.1.3 korolarioagatik s ere neurgarria da. ∎

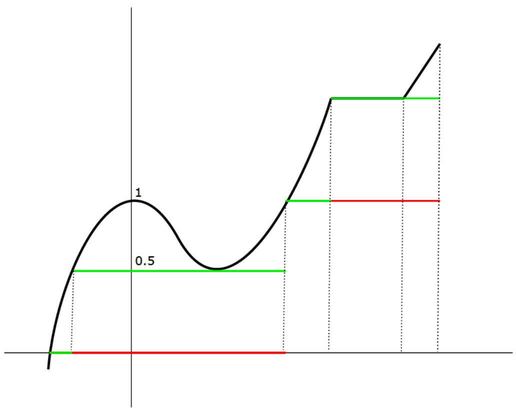
2.1.8 teorema. *Biz $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ funtzio neurgarria eta ez-negatiboa. Existitzen da honako propietate hauek betetzen dituen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio sinpleen segida bat:*

i) $0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq f(x), \forall\ x \in X$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \forall\ x \in X$.

Froga. Lehenik eta behin, s_n segida eraikiko dugu. Horretarako, idatz dezagun $[0, n) = \bigcup\limits_{j=1}^{n2^n} \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$, eta horren arabera defini dezagun s_n segida,

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^n}, & \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}, \\ n, & f(x) \geq n. \end{cases}$$



2.2 irudia. Beltzez f funtzioa, gorriz s_1, eta berdez s_2.

f funtzio neurgarria denez, $f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)$ eta $f^{-1}([n, \infty])$ multzo neurgarriak dira. Beraz, s_n multzo neurgarrien funtzio karakteristikoen konbinazio lineal bezala adieraz daiteke

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{f^{-1}\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)} + n\chi_{f^{-1}([n,\infty])};$$

hau da, funtzio sinplea da. Gainera, $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$ da.

Froga dezagun funtzio-segidaren limite puntuala f dela. Demagun $f(x_0) = \infty$ dela. Orduan, $s_n(x_0) = n$ da $\forall\ n \in \mathbb{N}$, eta

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} n = \infty = f(x_0).$$

Demagun, orain, $f(x_0) < \infty$ dela. Kasu horretan, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}, f(x_0) < n_0 \Rightarrow f(x_0) < n, \forall\ n > n_0$. Kalkula dezagun $f(x_0) - s_n(x_0)$:

$$\left.\begin{cases} \frac{j-1}{2^n} \leq f(x_0) < \frac{j}{2^n} \\ s_n(x_0) = \frac{j-1}{2^n} \end{cases}\right\} \Longrightarrow f(x_0) - s_n(x_0) < \frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \forall\ n \geq n_0.$$

Orduan, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_0) = f(x_0)$; beraz, edozein x-tarako $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ da.

Ikus dezagun eraiki den segida ez-beherakorra dela. Demagun, lehenik eta behin, $f(x) < n$ dela. Orduan, existitzen da j zenbaki arrunta, zeinetarako $\dfrac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{j}{2^n}$ eta $s_n(x) = \dfrac{j-1}{2^n}$ diren. Gainera,

$$\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) = \left[\frac{2j-2}{2^{n+1}}, \frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) \bigcup \left[\frac{2j-1}{2^{n+1}}, \frac{2j}{2^{n+1}}\right)$$

idatz daitekeenez, $s_{n+1}(x) = \dfrac{2j-2}{2^{n+1}}$ edo $s_{n+1}(x) = \dfrac{2j-1}{2^{n+1}}$ da. Ondorioz, $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ da.

Demagun, orain, $f(x) \geq n+1$ dela. Orduan, $s_n(x) = n$ da, eta $s_{n+1}(x) = n+1$; beraz, berriro $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ da.

Azkenik, $n \leq f(x) < n+1$ bada, $s_n(x) = n$ eta $s_{n+1}(x) = \dfrac{j-1}{2^{n+1}}$ dira, eta j horretarako $\dfrac{j-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \dfrac{j}{2^{n+1}}$ da.

$$n \leq f(x) < \frac{j}{2^{n+1}} \text{ denez } \Rightarrow n2^{n+1} < j \text{ eta } n2^{n+1} \leq j-1$$

ere bai; beraz, $n \leq \dfrac{j-1}{2^{n+1}} \Rightarrow s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ da. ■

Oharra. f funtzio bornatua bada, eraiki den funtzio sinpleen segidak uniformeki konbergitzen du f-ra, zeren eta $\exists\ k \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq k$ eta $\forall\ x \in X$, $f(x) < n \Rightarrow |f(x) - s_n(x)| < \dfrac{1}{2^n}$ da.

2.1.9 korolarioa. *Edozein $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio neurgarri funtzio sinpleen segida baten limite puntuala da.*

Froga. $f = f^+ - f^-$ da, batugai biak funtzio neurgarri ez-negatiboak izanda. Hori horrela, 2.1.8 teoremaren arabera, existitzen dira r_n eta t_n funtzio sinpleen segidak zeinetarako $r_n \uparrow f^+$ eta $t_n \uparrow f^-$ betetzen den. Emaitza frogatuta gelditzen da $s_n = r_n - t_n$ hartuz. ■

2.2 Lusinen teorema eta Egoroven teorema

J. E. Littlewood XX. mendeko matematikari garrantzitsuenetariko bat izan zen (Ingalaterrra, 1885-1977). Bere *Lectures on the Theory of Functions* liburuan honako hiru baieztapen hauek enuntziatu zituen:

i) Multzo neurgarriak ia multzo irekiak dira.

ii) Funtzio neurgarrien segida konbergenteak ia uniformeki konbergenteak dira.

iii) Funtzio neurgarriak ia funtzio jarraituak dira.

Baieztapen horiek "Littlewooden hiru printzipio" izenarekin ezagutzen dira, eta neurriaren teoriaren emaitza gehienen oinarria dira. Hiru printzipio horietatik lehena aurreko gaian aipatu da, 1.3.2 teoreman hain zuzen ere. Bigarren printzipioa Egoroven teorema da, eta hirugarrena Lusinen teorema, hurrenez hurren.

Dimitri Egorov (1869-1931) matematikari errusiar ezaguna izan zen, Geometria Diferentzial, eta Analisi Matematikoaren arloetan ekarpen esanguratsuak egiteagatik. Esaterako, bere lanak Jean Gaston Darbouxen eragin handia izan zuen. Moskuko Matematika Elkarteko lehendakari izan zen 1923 eta 1930 urteen artean.

2.2.1 teorema. *(Egoroven teorema) Izan bedi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien segida f funtziorantz puntuz puntu konbergentea E neurri finitudun multzoan. Orduan, $\forall\ \epsilon > 0$-rako existitzen da $A \subset E$ multzo itxia, $m(A) < \epsilon$ izanda, zeinetarako $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ uniformeki $E - A$ multzoan.*

Froga. Izan bedi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien segida, eta defini ditzagun

$$E_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x,\ |f_n(x) - f(x)| < 1/k\}$$

multzoak. Era berean,

$$(E_{k,m})^c = \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x,\ |f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\}$$

da, eta f segidaren limite puntuala denez, $m\left(E^c_{k,m}\right) = 0$ izango da. Hortaz, limitearen definizioagatik, edozein $\epsilon > 0$-tarako existitzen da n_k zeinetarako $m\left(E^c_{k,n_k}\right) < \epsilon/2^k$ den. Hori horrela,

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,n_k}$$

hartuz, $m(E^c) < \epsilon$ izango da. Bestalde, E multzoan $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ desberdintza beteko da $n \geq n_k$-tarako eta

$$\{x, \lim f_n(x) = f(x)\} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k,m}$$

da k bakoitzerako; beraz,

$$m\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_{k,m}^c\right) = 0$$

Neurri finitudun multzoak direnez, emaitza lortzen da. ■

Oharrak: teoreman agertzen diren baldintza guztiak beharrezkoak dira.

- E-ren neurria finitua ez bada, emaitza ez da betetzen. Adibidez, $\mathbb{R}$-n definitutako
$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq n, \\ 0, & x < n. \end{cases}$$
funtzio-segidaren limite puntuala zero da, baina teorema ez da betetzen. Antzeko egoera dugu $E = [0, \infty)$-n definitutako $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}$ bada.

- Teoremak ez du bermatzen konbergentzia uniformea. Adibidez,
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, 1/n], \\ -n^2 x + 2n, & x \in [1/n, 2/n], \\ 0, & \text{besteetan.} \end{cases}$$
segidaren limite puntuala $[0, 1]$ tartean 0 da, baina ez da uniformeki konbergentea.

- $g_n(x) = \chi_{(0,1/n)}, n \in \mathbb{N}$ segidak puntuz puntu konbergitzen du 0 funtziora, $x \in [0, 1]$. Egoroven teoremari esker, ia uniformeki konbergentea da, baina segida ez da uniformeki konbergentea zero neurriko multzo batean ez bada.

Nikolái Luzin (edo Lusin) (1883-1950) errusiar matematikari izan zen. Multzoen teorian egin zuen lan, eta analisi matematikoko arlo topologikoak landu zituen. Egoroven ikaslea izan zen, eta, bere lanetaz aparte, hainbat matematikari ezagunen maisu bilakatu zen, Aleksándrov, Kolmogórov, edo Urysohn matematikariena, besteak beste. Hemen aipatzen den teorema 1912. urtean argitaratu zuen, Gröningeneko Unibertsitatean zegoelarik.

2.2.2 teorema. *(Lusinen teorema) Izan bedi $f : E \to \mathbb{R}$ funtzioa. Demagun $m(E) < \infty$ dela eta f funtzioak balio finituak hartzen dituela i.n. Orduan, f neurgarria bada, $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ K \subset E$ trinkoa, zeinentzat $m(E - K) \leq \epsilon$ den, f jarraitua izanda K-n.*

Froga. Teorema frogatzeko, kasu bi bereiziko ditugu: funtzio sinpleak eta gainontzekoak. Hasteko, demagun f sinplea dela; hau da,

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i},\ E_i = \{x \in E, f(x) = \alpha_i\}.$$

Neurriaren definizioagatik, $\exists\ K_i \subset E_i$ trinkoa, $m(E_i) \leq m(K_i) + \epsilon/n$. Izan bedi $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Orduan,

$$m(E - K) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(E_i - K_i) \leq \epsilon.$$

$x \in K_j$-rako, existitzen da V x-ren ingurunea, $V \cap K_j = \emptyset$ izanda, $\forall\ i \neq j$. Hala ez balitz, $x \in \overline{K_i} \subset K_i$ litzateke, eta hori ez da posible $K_i \bigcap K_j = \emptyset$ baita $i \neq j$ denean. Hortaz, x-ren ingurune batean f konstantea bada, argi dago jarraitua dela.

Izan bedi, orain, edozein f funtzioa. Har dezagun f-ra konbergitzen duen funtzio sinpleen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ segida (2.1.8 teorema). Segida horri Egoroven teorema aplikatzen badiogu, existituko da $K_0 \subset E$ trinkoa, non $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ segidak f-ra uniformeki konbergitzen duen, eta zeinetarako $m(E) \leq m(K_0) + \epsilon/2$ den. Funtzio sinpleetarako frogatutako emaitza aplikatuz, izan bitez K_n multzo trinkoak $n \in \mathbb{N}$-rako, f_n jarraitua K_n-n eta $m(E) < m(K_n) + \dfrac{\epsilon}{2^{n+1}}$ izanda. Har dezagun $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. f_n funtzioak jarraituak dira K_n-n, eta f-ra uniformeki konbergitzen dute. Hortaz, f ere jarraitua izango da K-n. Gainera,

$$m(E - K) = m\left(E - \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(E - K_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon.$$

∎

2.3 Lebesgueren integrala

Integralaren definizioa prozedura konstruktibo baten bidez egingo da, kasu sinpleenetik hasita. Hori horrela, integrala funtzio karakteristikoetarako, funtzio sinpleetarako, funtzio ez-negatiboetarako eta edozein funtziotarako definituko da, hurrenez hurren.

Definizioak. Izan bedi $(X, \mathcal{M}, \mu)$ neurri-espazioa, μ neurria σ-finitua izanda.

i) Izan bitez A multzo neurgarria eta χ_A haren funtzio karakteristikoa. χ_A funtzioaren Lebesgueren integrala honako era honetan definitzen da:

$$\int_X \chi_A d\mu = \mu(A).$$

ii) Izan bedi $s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ funtzio sinple ez-negatiboa, non A_i multzo disjuntuak diren. s-ren Lebesgueren integrala honela definitzen da:

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i).$$

Definizioa. Izan bedi $f : X \to [0, \infty]$ funtzio neurgarria. f-ren Lebesgueren integrala baliokideak diren bi modu hauetan definitzen da:

- $\displaystyle\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu$, non $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ f-ra puntuz puntu konbergitzen duen funtzio sinpleen segida ez-beherakorra den.
- $\displaystyle\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu, 0 \le s \le f, s \text{ funtzio sinplea} \right\}.$

Integral hau bakarra da, eta finitua ala infinitua izan daiteke. X-ren ordez edozein A azpimultzotan integratzen badugu, honela kalkulatzen da:

$$\int_A f d\mu = \int_X (f \chi_A)\, d\mu.$$

2.3.1 proposizioa. *Izan bitez f eta g funtzio neurgarriak eta ez-negatiboak. Honako propietate hauek betetzen dira:*

i) $\mu(A) = 0$ *bada* $\Longrightarrow \displaystyle\int_A f d\mu = 0$ *da.*

ii) $0 \le f \le g$ *bada* $\Rightarrow 0 \le \displaystyle\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$ *da.*

iii) $\forall\ k \ge 0, \displaystyle\int_X k f d\mu = k \int_X f d\mu.$

iv) $\displaystyle\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$

v) A eta B multzo neurgarriak badira, $A \subset B$ izanda, orduan,

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

vi) A eta B multzo neurgarriak eta disjuntuak badira, orduan,

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

vii) $\displaystyle\int_A f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ *i.n.*

viii) $f = g$ *bada i.n.* $\Longrightarrow \displaystyle\int_X f d\mu = \int_X g d\mu.$

Froga. i) Definizioz $\displaystyle\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$ da. Edozein $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{l} a_k \chi_{A_k}$ funtzio sinple eta neurgarri hartuz, $\displaystyle\int_X s_n d\mu = \sum_{k=1}^{l} a_k \mu(A \cap A_k) = 0$ da; beraz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X s_n \chi_A d\mu = 0$ da, baita ere.

ii) $0 \leq f \leq g$ bada, existituko dira a_n eta b_n funtzio sinpleen segida ez-beherakorrak, $0 \leq a_n \leq b_n$, eta puntuz puntu konbergenteak f eta g funtzioetara, hurrenez hurren. Hortaz, $\displaystyle\int_X a_n d\mu \leq \int_X b_n d\mu$, eta limiteak hartzerakoan desberdintzak mantentzen direnez, emaitza dugu.

iii) Izan bedi s_n f-ra puntuz puntu konbergentea den funtzio sinpleen segida ez-beherakorra.Orduan, edozein $k \geq 0$-tarako, ks_n kf-ra konbergitzen duen funtzio sinpleen segida da; beraz,

$$\int_X kf d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X ks_n d\mu = \lim_{n\to\infty} k \int_X s_n d\mu = k \int_X f d\mu.$$

iv) Izan bitez a_n eta b_n funtzio sinpleen segida ez-beherakorrak, puntuz puntu konbergenteak f-ra eta g-ra, hurrenez hurren. Hortaz,

$$\begin{aligned}\int_X (f+g) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (a_n + b_n) d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X a_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X b_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

v) $A \subset B$ bada, $f\chi_A \leq f\chi_B$ izango da; beraz, proposizio horren bigarren atala erabiliz, emaitza lortzen da.

vi) A eta B multzo disjuntuak badira, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ da; hortaz, proposizio honen laugarren atala erabiliz, emaitza dugu.

vii) $f = 0$ bada i.n., hurbiltzen duen segida bat segida nulua da; hau da, $a_n = 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Orduan, integrala ere zero izango da.

Aldiz, demagun integrala zero dela. Izan bitez $A = \{x, f(x) > 0\}$ eta $A_n = \{x, f(x) > 1/n\}$. Alde batetik, $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ da eta $\mu(A_n) = 0$, zeren eta bestela $\displaystyle\int_A f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$ bailitzateke, eta hori ezinezkoa da. Hortaz, $\mu(A_n) = 0$ da, ondorioz, $\mu(A) = 0$ da, eta orduan, $f = 0$ i.n.

viii) f eta g berdinak dira, zero neurriko multzo batean izan ezik. Zero neurriko multzo horretan integrala zero da, eta hortik kanpo, funtzioak berdinak direnez, integralak berdinak izango dira. ■

Adibidea. Izan bedi $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. Kalkula ezazu $\displaystyle\int_{[1,\infty]} f dm$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bada.

f funtzioa jarraitua da $[1, \infty]$ tartean; beraz, neurgarria. Bestalde, funtzio positiboa da; hau da, bere integrala existitzen da, finitua ala infinitua izan daitekeelarik. Riemannen integrala aztertzen badugu, integral inpropio dibergentea da:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty.$$

Izan bedi $s_n(x) = \frac{1}{x}, x \in [1, n]$. Hori horrela, $[1, n] \subset [1, \infty]$ denez $\forall \ n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{[1,\infty]} \frac{1}{x}dm \geq \int_{[1,n]} \frac{1}{x}dm$$

da. Deskonposa dezagun $[1, n]$ tartea azpitarte disjuntuetan

$$[1, n] = \bigcup_{k=2}^{n} [k - 1, k) \cup \{n\}$$

integralaren honako adierazpen hau lortzeko:

$$\int_{[1,n]} \frac{1}{x}dm = \sum_{k=2}^{n} \int_{[k-1,k)} \frac{1}{x}dm. \tag{2.1}$$

Azpitarte bakoitzean $\frac{1}{x} > \frac{1}{k}$ da; beraz,

$$\int_{[k-1,k)} \frac{1}{x} dm > \int_{[k-1,k)} \frac{1}{k} dm = \frac{1}{k} m([k-1,k))$$

da, 2.3.1 proposizioan frogatutako propietateak erabiliz. Hortaz, (2.1) berdintzara bueltatuz,

$$\int_{[1,\infty]} \frac{1}{x} dm \geq \int_{[1,n]} \frac{1}{x} dm > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

da $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Azkenik, limiteak hartuz $n \to \infty$

$$\int_{[1,\infty]} \frac{1}{x} dm \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty;$$

hau da, $f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioaren Lebesgueren integrala $[1,\infty]$ tartean ∞ da.

Definizioaren prozedurarekin amaitzeko, Lebesgueren integralaren adierazpena ematea falta da edozein motatako funtzioetarako. Hori horrela, izan bitez $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ funtzio neurgarria, $f^+ =\ \max\ \{0, f\}$ eta $f^- = -\ \min\ \{0, f\}$ funtzio ez-negatiboak, $f = f^+ - f^-$ izanda. Logikoa dirudi f-ren Lebesgueren integrala honela definitzeak: $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$. Adierazpen hori ez dago definituta, f^+-en eta f^--en integralak infinituak badira. Bestalde, $|f| = f^+ + f^-$ da, eta

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

ondo definituta dago. Horrek honako definizio honetara eramaten gaitu.

Definizioa. Izan bedi $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ funtzio neurgarria. f Lebesgue-integragarria dela diogu, bere balio absolutuaren integrala finitua bada; hau da,

$$f \text{ Lebesgue-integragarria} \iff \int_X |f| d\mu < \infty.$$

f Lebesgue-integragarria bada, f^+ eta f^- ere bai. Hori horrela, zentzuzkoa da f-ren integrala definitzea

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

berdintzaren bidez.

Lebesgue-integragarriak diren funtzioen espazioari $L^1(\mu)$ deritzogu:

$$L^1(\mu) = \{f : X \longrightarrow [-\infty, \infty], \int_X |f| d\mu < \infty\},$$

eta Lebesgueren neurrirako $L^1(m) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty], \int_{\mathbb{R}^n} |f| dm < \infty\}$ da.

Adibidea. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funtzioa ez da Lebesgue-integragarria $[1, \infty]$ tartean.

2.3.2 proposizioa. *Biz f funtzio integragarri ez-negatiboa. Orduan, $f < \infty$ i.n.; hau da, $m(\{x, f(x) = +\infty\}) = 0$.*

Froga. Izan bedi $A = \{x, f(x) = +\infty\}$ eta demagun $m(A) = c > 0$ dela. Defini dezagun

$$h_n(x) = \begin{cases} n, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Alde batetik, $\int_X h_n dm = nc$ da. Bestetik, $h_n(x) \leq f(x)$ denez, $\int_X f dm \geq \int_X h_n dm = nc$; hots, integrala infinitua izango da, hipotesiaren aurka. ∎

Lebesgueren integralaren beste definizio baliokide bat

Demagun f $[a, b]$ tartean definitutako funtzio bornatua dela. Riemannen integrala eraikitzerakoan, $[a, b]$ tartearen partiketak hartzen dira, zeinetarako behe-baturak eta goi-baturak definitzen diren, $U(f, P)$ eta $L(f, P)$, hurrenez hurren. Baldintza horietan, f Riemann-integragarria dela diogu

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon, \forall P \supset P_\epsilon, U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

bada, edo baliokidea dena, existitzen bada I balio bat zeinetarako

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_n, \forall P \supset P_n, |S(f, P) - I| < \epsilon$$

den, $S(f, P)$ Riemannen batura izanda. Partiketen egitura hori jarraituz, badago Lebesgueren integrala definitzeko beste modu bat.

Izan bitez A multzo neurgarria eta bornatua, eta bertan definitutako f funtzio neurgarria eta bornatua. Defini ditzagun l eta u honako bi balio hauek:

$$l \leq \inf\{f(x), x \in A\} \quad \text{eta} \quad u \geq \sup\{f(x), x \in A\}.$$

Definizioa. Izan bitez $[l, u]$ tartean egindako $P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ partiketa eta $y_i^\star \in [y_{i-1}, y_i]$, $i = 1, \dots n$.

$$\mathcal{L}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} y_i^\star m(\{x \in A, y_{i-1} \leq f(x) < y_i\})$$

balioari *Lebesgueren batura* esaten zaio.

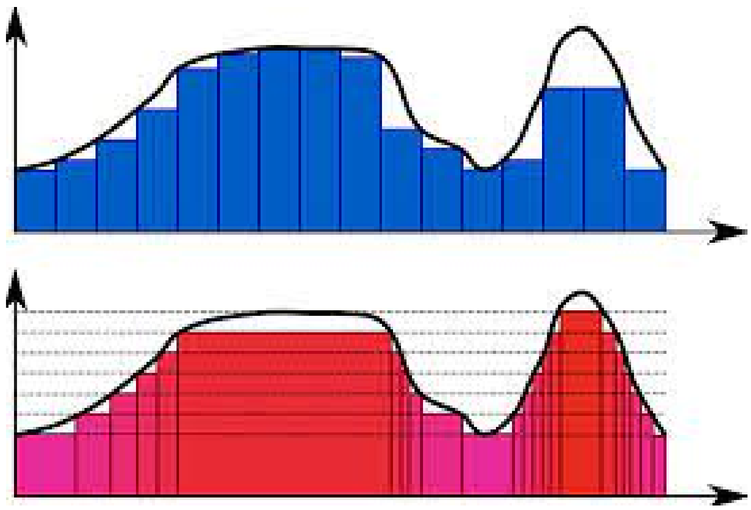
Definizioa. Izan bedi A multzo bornatua eta neurgarria, eta bertan definitutako f funtzioa. Existitzen bada $L \in \mathbb{R}$, zeinetarako

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ ||P|| < \delta,\ |\mathcal{L}(f, P) - L| < \epsilon \tag{2.2}$$

den, f funtzioa A multzoan Lebesgue-integragarria dela diogu. L zenbakiari f*-ren Lebesgueren integrala* esaten zaio, eta

$$L = \int_A f dm$$

eran adierazten da.



2.3 irudia. RIEMANN (urdina) *versus* LEBESGUE (gorria)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riemannvslebesgue.svg

H. Lebesguek 1926an *Integralaren nozioaren garapenari buruz* izeneko hitzaldia eman zuen Kopenhagen, eta bertan definizo hau azaldu zuen, honako adibide honen bidez: *XVII. mendeko geometrek, $f(x)$-ren integrala infinitu zatiezinen batura bezala ulertzen zuten, haietariko bakoitza $f(x)$-ren ordenatua izanda, positiboa ala negatiboa. Guk, ordea, konparagarria den tamainako zatiezinak bildu besterik ez dugu egin, eta, aljebran esaten den bezala, bilera* *egin dugu, antzeko terminoen laburketa. Esan daiteke, Riemannen metodoaren bidez, zatiezinak x aldagaiak ematen duen ordenaren arabera batura egiten saiatzen zirela, merkatari desantolatu batek egingo lukeen bezala, txanponak eta billeteak zenbatuz bere eskuetan erortzen ziren heinean; guk, ordea, merkatari metodikoak bezala jokatzen dugu; hau da,*

Koroa bateko $m(E_1)$ *txanpon ditut* $\Longrightarrow 1 \cdot m(E_1)$,

Bi koroako $m(E_2)$ *txanpon ditut* $\Longrightarrow 2 \cdot m(E_2)$,

Bost koroako $m(E_3)$ *txanpon ditut* $\Longrightarrow 5 \cdot m(E_3), \ldots$

Guztira $S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \ldots$ *dut.*

Zalantzarik gabe, bi prozedura horiek merkataria emaitza berera eramango dute; izan ere, aberatsa izan arren, billete kopuru mugatu bat baino ez dago kontatzeko; baina guretzat, kopuru infinitua batu behar dugunez, funtsezkoa da bi metodoen arteko aldea.

Ikus dezagun Lebesguek hitzaldian esandakoaren adibide bat.

Adibidea. Izan bedi Dirichlet-en funtzioa:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Funtzio hori ez da Riemann-integragarria. Froga dezagun Lebesgue-integragarria dela, eta kalkula dezagun integral horren balioa. Alde batetik, f positiboa da, eta bornatua denez

$$\int_{[0,1]} |f| dm = \int_{[0,1]} f dm \leq \int_{[0,1]} dm = m([0,1]) = 1 < \infty;$$

hortaz, Lebesgue-integragarria da.

Integralaren balioa kalkulatzeko, izan bitez $l = 0$ eta $u \geq 1$. Edozein P partiketarako, azter ditzagun $\mathcal{L}(f,P)$-ren batugaien balioak. $y_i < 1$ bada, $f(x) = 0$ da; hortaz, dagokion batugaiaren balioa zero da. $y_i \geq 1$ bada, funtzioaren balioa 1 da, baina dagokion aurreirudiaren neurria zero da, zenbaki arrazionalen azpimultzoa baita; beraz, batugaia ere zero da. Orduan, $L = 0$ hartuz, (2.2) adierazpena egiaztatuko da, eta, ondorioz, $\int_{[0,1]} f dm = 0$ izango da.

2.4 Funtzio integragarriak

2.4.1 proposizioa. *Izan bitez A multzo bornatua eta neurgarria, eta bertan definitutako f funtzioa. f Lebesgue-integragarria da, baldin eta soilik baldin*

$\forall\epsilon > 0, \exists\ f_1, f_2$ *funtzio sinpleak, zeinetarako* $f_1 \leq f \leq f_2$ *eta*

$$\int_A f_2 dm - \int_A f_1 dm < \epsilon.$$

2.4.2 korolarioa. *Izan bitez* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzio bornatua eta neurgarria, eta* $m(A) < \infty$*. Orduan,* f *Lebesgue-integragarria da, eta integralaren balioa*

$$\begin{aligned}\int_A f dm &= \sup\{\int_A f_1 dm, f_1 \leq f,\ f_1 \textit{ funtzio sinplea}\}\\ &= \inf\{\int_A f_2 dm, f_2 \geq f,\ f_2 \textit{ funtzio sinplea}\}\end{aligned}$$

da.

2.4.3 korolarioa. *Izan bedi* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornatua.* f *Riemann-integragarria bada* $[a,b]$ *tartean, orduan,* f *Lebesgue-integragarria da. Gainera, Riemannen eta Lebesgueren integralak berdinak dira; hau da,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

Froga. Izan bitez φ funtzio sinplea, eta horren I_R^- eta I_R^+ Riemannen behebaturen supremoa eta goi-baturen infimoa, hurrenez hurren. Batura horien definizioagatik eta aurreko korolarioagatik, honako desberdintza hauek idatz ditzakegu:

$$I_R^- \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_{[a,b]} \varphi dm \leq \inf_{\varphi \geq f} \int_{[a,b]} \varphi dm \leq I_R^+.$$

f Riemann-integragarria denez, desberdintza guztiak berdinak dira; hortaz, bi integralak berdinak dira. ∎

2.4.4 proposizioa. *Izan bitez* f *eta* $g \in L^1(\mu)$*. Honako propietate hauek betetzen dira:*

i) $f + g \in L^1(\mu)$ *eta* $\displaystyle\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$

ii) $\forall\ k \in \mathbb{R}, kf \in L^1(\mu)$ *eta* $\displaystyle\int_X kf d\mu = k\int_X f d\mu.$

iii) $|f| \in L^1(\mu)$ *eta* $\displaystyle\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu.$

iv) $f \leq g$ *i.n., orduan,*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

v) A eta B multzo neurgarriak eta disjuntuak badira, orduan,

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Froga.

$$i) \int_X (f+g)d\mu = \int_X (f^+ + g^+)d\mu - \int_X (f^- + g^-)d\mu$$
$$= \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu - \left(\int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu\right)$$
$$= \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right) + \left(\int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu\right)$$
$$= \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Beraz, $f+g$ integragarria da.

ii) $\alpha > 0$ bada, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ eta $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ dira; hortaz,

$$\int_X \alpha f d\mu = \int_X \alpha f^+ d\mu - \int_X \alpha f^- d\mu$$

eta 2.3.1 proposizioaren iii) atala erabiliz,

$$\alpha \int_X f^+ d\mu - \alpha \int_X f^- d\mu = \alpha \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right) = \alpha \int_X f d\mu.$$

$\alpha < 0$ bada, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ eta $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$ dira. Emaitza lortzen da aurreko kasuko arrazonamendu bera erabiliz.

iii) $|f| = f^+ + f^-$ denez, $\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$ izango da. Gainera,

$$\left|\int_X f d\mu\right| = \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right|$$
$$\leq \left|\int_X f^+ d\mu\right| + \left|\int_X f^- d\mu\right|$$
$$= \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

iv) $f \leq g$ i.n. bada, orduan, $g - f \geq 0$ i.n. Gainera, $g - f$ integragarria eta ez-negatiboa denez, $\int_X (g-f)d\mu \geq 0$ i.n. Emaitza lortzen da i) eta ii) propietateen ondorioz.

v) $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_X f\chi_{A\cup B} d\mu = \int_X f\chi_A d\mu + \int_X f\chi_B d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$ ∎

Oharrak.

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ integragarria bada, 2.3.2 proposizioagatik $|f(x)| < \infty$ i.n.; beraz, ezinezkoa da funtzioa infinitua izatea, zero neurriko multzo batean ez bada. Hori horrela, izan bitez $A = \{x \in X, |f(x)| = \infty\}$ eta

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ f(x), & x \notin A. \end{cases}$$

$f = g$ da ia nonahi, eta g funtzio finitua da; beraz, defini daiteke f-ren i.n. berdina den funtzio bat finitua dena.

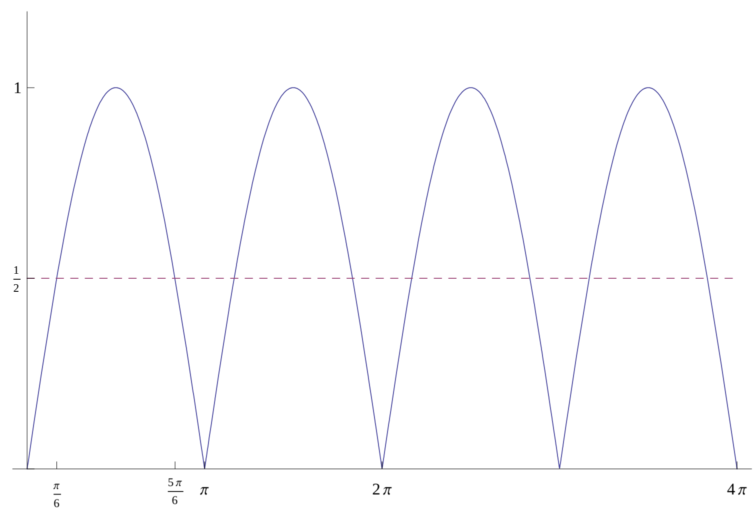
b) $(f + g)$ ez dago definituta $f = +\infty$ eta $g = -\infty$ edo $f = -\infty$ eta $g = +\infty$ den puntuetan, baina f eta g integragarriak badira, 2.3.2 proposizioa aplikatuz f^+, f^-, g^+ eta g^- funtzioei, $f + g$ definituta ez dauden puntuen neurria zero da. Orduan, $(f+g)$-ren integrala arazorik gabe kalkula daiteke.

Adibidea. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funtzioa ez da Lebesgue-integragarria $(0, \infty)$ tartean:

$$\int_{(0,\infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dm = \infty.$$

Integral hau infinitua dela frogatzeko, infinitua den beste integral batekin behe-bornatuko dugu. Izan bedi $B = \{x \in \ (0, \infty), |\sin x| \geq 1/2\}$ multzoa; hau da,

$$B = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[k\pi + \frac{\pi}{6}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \right].$$



2.4 irudia. $|\sin x|$ funtzioaren grafikoa.

Honako desberdintza hauek betetzen dira:

$$\int_{(0,\infty)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm \geq \int_B \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm \geq \int_{\bigcup_{k=0}^{n}\left[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right]} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm.$$

Azpimultzo guztiak disjuntuak direnez, integrala tarteetako integralen batura izango da.

Bestalde, $|\sin x| \geq 1/2$ da, eta, azpimultzo bakoitzean $x \in [k\pi + \dfrac{\pi}{6}, (k+1)\pi - \dfrac{\pi}{6}]$ dagoenez, $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{(k+1)\pi - \frac{\pi}{6}}$ da. Hori horrela,

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm &\geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi - \frac{\pi}{6}} m([k\pi + \frac{\pi}{6}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{6}]) \\ &= \frac{\pi}{3}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\pi + \frac{5\pi}{6}}, \forall\, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Limitea hartuz $n \to \infty$, serie dibergentea da; hortaz, $\displaystyle\int_{(0,\infty)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm = \infty.$

2.5 Konbergentzia monotonoaren teorema eta Fatouren lema

Atal honetan, integrala eta segidaren limitearen ordena-aldaketa aztertuko ditugu. Demagun $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio integragarrien segida dela, f-ra puntuz puntu konbergitzen duena i.n. f integragarria al da? Horrela balitz, limitearen integrala eta integralaren limitea berdinak al dira?

Adibideak.

a) Izan bedi $[0,1]$ tartean definitutako honako segida hau:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x, & 1/n \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{bestetan.} \end{cases}$$

f_n Lebesgue-integragrarria da $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako. Bestalde, segida horren limite puntuala

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

funtzioa da, eta f ez da Lebesgue-integragrarria.

b) Izan bedi $g_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{bestetan} \end{cases}$ segida, $x \in [0,1]$. Limite puntuala $[0,1]$ tartean $g(x) = 0$ da, baina

$$\int_{[0,1]} gdm = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} g_n dm = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n dm.$$

Riemannen integralaren kasuan, erantzun positiboa lortzeko konbergentzia uniformea izan behar da. Atal honetan ikusiko dugu Lebesgueren integralaren kasuan, baldintza ahulagoekin, baiezko erantzunak lor daitezkeela, Lebesgueren integralaren nagusitasuna erakutsiz.

2.5.1 teorema. *(Konbergentzia bornatuaren teorema) Izan bedi E multzoan definitutako $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien segida, $m(E) < \infty$ izanda. Demagun existitzen dela $M > 0$, zeinetarako $|f_n(x)| \leq M$ den, x eta n guztietarako. Orduan, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ bada,*

$$\int_E fdm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm \qquad \textit{eta} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| dm = 0.$$

Froga. Alde batetik, f_n guztiak bornatuak direnez, f ere bai. Bestalde, Egoroven teoremagatik, edozein $\epsilon > 0$ $\exists$ $n \in \mathbb{N}$ eta $A \subset E$ multzo neurgarria, $m(A) < \frac{\epsilon}{4M}$ izanda, zeinetarako $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2m(E)}$ $x \in E - A$ denean. Orduan,

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n dm - \int_E fdm \right| &= \left| \int_E (f_n - f) dm \right| \leq \int_E |f_n - f| dm \\ &= \int_{E-A} |f_n - f| dm + \int_A |f_n - f| dm \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

■

2.5.2 korolarioa. *Izan bedi E multzoan definitutako $f \geq 0$ funtzio bornatua, $m(E) < \infty$ izanda. $\int_E fdm = 0$ bada, orduan $f = 0$ i.n.*

Froga. Izan bitez $E_k = \{x \in E, f(x) \geq 1/k\}$ multzoak. $\dfrac{1}{k}\chi_{E_k}(x) \leq f(x)$ denez, $\dfrac{1}{k} \cdot m(E_k) \leq \int_E f$ izango da. Hipotesiz, k guztietarako $m(E_k) = 0$ da. Bestalde, $\{x \in E, f(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ denez, $f = 0$ i.n. izan beharko da. ■

Oharrak.

a) Aipatu behar da $m(E) < \infty$ baldintza ezinbestekoa dela. Har dezagun $E = \mathbb{R}$ multzoan $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[n,\infty)}$ segida. $|f_n(x)| \leq 1$ da, eta $f_n \to 0$ uniformeki, baina

$$0 = \int_E f dm \neq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \infty.$$

b) Izan bedi $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Funtzio-segidaren limite puntuala $f = 0$ da, baina konbergentzia ez da uniformea, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 2$ baita. Riemannen integrala erabiliz, ezin dugu limitera pasatu. Bestalde, $|f_n(x)| \leq 2$ da; hortaz, aurreko teorema aplikatuz,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n dm = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n dm = 0.$$

Integrazio-eremuaren neurria edozein denean, honako teorema hauek ditugu.

2.5.3 teorema. *(Konbergentzia monotonoaren teorema) Izan bedi $\{f_n\}_{n\in N}$ funtzio neurgarri ez-negatiboen segida ez-beherakorra. Orduan,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu.$$

Froga. $\{f_n\}_{n\in N}$ funtzio ez-negatiboen segida ez-beherakorra denez, puntuz puntuko konbergentea da f funtzio batera, $f_n \leq f$ izanda, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bestalde, $f_n \leq f_{n+1}$ desberdintza betetzen denez, integralak hartuz desberdintza mantendu egingo da; hau da,

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu.$$

Hori horrela, gai ez-negatiboen segida ez-beherakor berria dugu, $\displaystyle\int_X f_n d\mu$, besteak beste. Argudio bera erabiliz, haren limitea existituko da; hortaz, dei diezaiogun α limite horri:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

$f_n \leq f$ denez, lehen urrats batean integralak, eta bigarrenean limiteak hartuz, desberdintza mantendu egiten da; beraz,

$$f_n \leq f \Longrightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \Longrightarrow \alpha \leq \int_X f d\mu.$$

Teorema frogatzeko, nahikoa da $\alpha \geq \int_X f d\mu$ dela ikustea. $\alpha = \infty$ bada, berdintza berehalakoa, zeren eta

$$\alpha = \infty \leq \int_X f d\mu \leq \infty \Longrightarrow \int_X f d\mu = \infty = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Demagun, orain, $\alpha < \infty$ dela. Segidako f_i i-garren gai bakoitzerako funtzio ez-negatibo sinpleen segida ez-beherakorra existitzen da, $a_{ij}(x) \leq f_i(x)$ izanda eta $\lim_{j\to\infty} a_{ij}(x) = f_i(x)$.

Izan bedi $k \in N$ finko bakoitzerako $s_k(x) = \max\{a_{ij}(x), i, j \leq k\}$. s_k-ren definizioagatik eta $a_{ij} \geq 0$ direlako, k bakoitzerako, $0 \leq s_k \leq f_k$ da. Gainera, horrela eraikitako s_k segida f-ra puntuz puntuko konbergentea den funtzio sinpleen segida ez-beherakorra da. Beraz, alde batetik,

$$\lim_{k\to\infty}\int_X s_k d\mu \leq \lim_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \alpha$$

da, eta, bestetik, integralaren definiziotik,

$$\lim_{k\to\infty}\int_X s_k d\mu = \int_X f d\mu$$

da. Adierazpen biak elkartuz, falta zen beste desberdintza dugu,

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{k\to\infty}\int_X f_k d\mu = \alpha,$$

eta, horrela, teorema frogatuta gelditzen da. ■

Oharra. Konbergentzia monotonoaren teorema ez da betetzen segida beherakorra bada. Esaterako, $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n,\infty)}(x)$ segidak $f = 0$-ra puntuz puntu konbergitzen du, eta $\int f d\mu = 0$ da, baina $\lim_{n\to\infty}\int_{[n,\infty)} f_n dm = \infty$ da.

2.5.4 korolarioa. *(Beppo-Levi-ren teorema) Biz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien eta ez-negatiboen segida, eta $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Orduan, $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_X f_n d\mu\right)$.*

Froga. Definizioz $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} s_n$ da, non $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ segida ez-beherakorra eta ez-negatiboa den. Konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz s_n-ri

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu.$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$ ■

2.5.5 korolarioa. *Izan bitez $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ multzo neurgarrien eta binaka disjuntuen familia, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ eta $f \geq 0$. Orduan,*

$$\int_E f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} f dm.$$

Froga. Nahikoa da aurreko emaitza aplikatzea $f_n = f\chi_{E_n}$ segidari. ■

2.5.6 korolarioa. *Izan bedi f funtzio ez-negatiboa eta integragarria. Orduan,*

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ eta } A \subset X, \mu(A) < \delta \text{ eta } \int_A f d\mu < \epsilon \text{ izanda.}$$

Froga. Froga berehalakoa da, f bornatua bada $\delta < \epsilon/M$ hartuz. f ez bada bornatua, defini dezagun $f_n(x) = \min\{n, f(x)\}$. Segida hori bornatua da, ez-beherakorra, eta f da bere limite puntuala. Konbergentzia monotonoaren teoremagatik, edozein ϵ-tarako $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, zeinetarako

$$\int_E f_{n_0} dm > \int_E f dm - \epsilon/2 \quad \text{eta} \quad \int_E (f - f_{n_0}) dm < \epsilon/2.$$

Orduan, $\delta < \epsilon/2n_0$ aukeratuz, $m(A) < \delta$ bada,

$$\int_A f dm = \int_A (f-f_{n_0}) dm + \int_A f_{n_0} dm < \int_A (f-f_{n_0}) dm + n_0 m(A) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

■

Georg Friedrich Bernhard Riemann Alemanian jaio zen, 1826ko irailaren 17an, eta Italian zendu zen, 1866ko uztailaren 20an. Analisiaren eta Geometria Diferentzialaren arloetan ekarpen garrantzitsuak egin zituen, eta horietako batzuk Einsteinek erabili zituen erlatibitatearen teoriaren garapenerako bidean. Bere izena hainbat kontzepturekin dago lotuta: zeta funtzioa, Riemannen hipotesia, Riemannen integrala, Riemannen barietatea, Riemannen gainazalak, Riemannen geometria, besteak beste.

Bernhard Riemann (Alemania 1826 - Italia 1866)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/
Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg

Riemann artzain luterano baten seme izan zen. 1846an Filologia eta Teologia ikasten hasi zen Göttingeneko Unibertsitatean. Artzain bihurtu, aitari atsegin emanez, eta familiari lagundu ahal izatea ziren bere helburu nagusiak; baina 1847an matematika ikasteko diru nahikoa lortu zuen, eta Berlina joan zen. Han, Jacobi, Dirichlet, Steiner eta Einstein ari ziren irakasten, eta haiekin harremanetan hasi zen. Garai emankorra izan zen. 1849. urtean Göttingenera itzuli zen, eta 1851n Gaussek zuzendutako tesia aurkeztu zuen. Bere lehen hitzaldiak 1854an eman zituen, eta horietan Riemannen geometriaren inguruko arloa sortu zuen. 1859an Berlingo Zientzia Akademiako kide izateko aukeratu zuten. Ekitaldi horretarako idatzitako artikuluan ("Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", euskaraz "Magnitude jakin bat baino txikiagoak diren zenbaki lehenen gainean"), gaur egun Riemannen zeta funtzioa izenarekin ezagutzen duguna formulatu zuen; hau da, Riemannen hipotesia, matematiketan ebatzi gabeko problema ospetsuenetarikoa eta garrantzitsuenetarikoa. Osasun-arazoak zirela eta, Italiara bidaitzen hasi zen, eta bertan hil zen bere hirugarren bidaian.

2.5.7 proposizioa. *Izan bedi $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio jarraitua eta ez-negatiboa. Orduan,*

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_{[0,\infty)} f dm.$$

Froga. 2.3.2 proposizioari esker, badakigu emaitza betezen dela $[0,A]$ motako tarteetarako. Izan bedi $f_n = f\chi_{[0,n]}$. Segida horri 2.5.3 teorema aplikatuz eta kontuan izanda $[0,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,n]$ dela, emaitza lortzen da. ■

Pierre Joseph Louis Fatou (Frantzia, 1878 -1929) matematikari eta astronomo frantziarra izan zen eta dinamika konplexuaren arloan lan egin zuen. 1898an Pariseko École Normale Supérieure ikastetxean sartu zen matematika ikasteko, eta 1901ean graduatu zen. Graduatu ondoren, Parisko behatokian astronomo postua lortu zuen. Aldagai konplexuko prozesu iteratiboak aztertu zituen, eta, prozesu horietariko batzuk, Mandelbrotek erabili zituen, bere izena (Mandelbroten multzoa) daraman multzoa sortzeko.

2.5.8 teorema. *(Fatouren lema) Izan bedi $\{f_n\}_{n\in N}$ funtzio neurgarri ez-negatiboen segida. Orduan,*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} \; f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu \right).$$

Froga. Izan bedi $g_n(x) = \inf_{k\geq n}(f_k(x))$ funtzio ez-negatiboen segida ez-beherakorra. Era berean, $\int_X g_n d\mu$ segidak propietate berdinak ditu. Gainera, $g_n(x) \leq f_n(x)$ denez,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{2.3}$$

dugu. Bestalde,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} g_n \right) d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} f_k) \right) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu. \tag{2.4}$$

g_n segidari konbergentzia monotonoaren teorema aplika dakioke, definizioz ez-beherakorra baita,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} g_n \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu$$

berdintza lortuz. Adierazpen horren eskuin aldean (2.3)-ko bornaketa ordezkatuz eta ezkerrekoan (2.4)-ko berdintza aplikatuz,

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} \; f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu \right)$$

desberdintza lortzen dugu. ∎

Oharrak.

a) Fatouren lema ez da betetzen funtzio negatiboetarako. Izan bedi

$f_n(x) = -\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Segida horretarako, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ eta $\int_{[0,n]} f_n dm = -1$, baina

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = 0 > \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

b) Existitzen dira funtzio ez-negatiboen segidak, zeinetarako lemaren desberdintza hertsia den. Esaterako,

$$f_n(x) = \begin{cases} \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x), & n = 2k, \\ \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x), & n = 2k+1 \end{cases}$$

segida, $x \in [0,1]$ izanda. Azter dezagun nolakoa den segida hori:

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), f_n(x) = \{0,1,0,1,\dots\},$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], f_n(x) = \{1,0,1,0,\dots\},$$

$$x = \frac{1}{2}, f_n(x) = \{1,1,1,1\dots\}.$$

Segidaren behe-limitea zero da; beraz, lemaren ezkerreko adierazpena

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} \ f_n) d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

da. Bestalde, funtzio bakoitzaren integrala

$$\int_X f_n d\mu = \int_{[0,\frac{1}{2})} f_n d\mu + \int_{(\frac{1}{2},1]} f_n d\mu.$$

$n = 2k$ bada, $\int_{[0,\frac{1}{2})} 1 d\mu + \int_{(\frac{1}{2},1]} 0 d\mu = \mu\left([0, \frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}$ da, eta

$n = 2k+1$ bada $\int_{[0,\frac{1}{2})} 0 d\mu + \int_{(\frac{1}{2},1]} 1 d\mu = \mu\left((\frac{1}{2}, 1]\right) = \frac{1}{2}$ da.

Beraz,

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n d\mu\right) = \frac{1}{2} \text{ eta } 0 < \frac{1}{2}.$$

c) Desberdintza hertsia denaren beste adibide bat $f_n(x) = nx^{n-1}$, $x \in (0,1)$ funtzio-segida da.

2.6 Konbergentzia menderatuaren teorema

Oro har, konbergentzia monotonoaren teoremaren baldintzak ez dira betetzen. Kasu horietarako, aukera izan daiteke Lebesgueren konbergentzia menderatuaren teorema, zeinetan baldintza sinple batekin limitearen eta integralaren ordena alda daitezkeen.

2.6.1 teorema. *(Lebesgueren konbergentzia menderatuaren teorema) Izan bitez $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien segida eta f haren limite puntuala. Demagun*

$$\exists\ F \in L^1(X,\mu), |f_n| \leq F,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Orduan, f integragarria da, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ *eta* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Froga. $|f_n| \leq F$ denez, segidako gai guztiak integragarriak dira. Era berean, puntuz puntuko limitea hartuz, $|f| \leq F$ izango da, baita ere; beraz, f integragarria da. Bestalde,

$$|f_n| \leq F \Rightarrow -F \leq f_n \leq F \Rightarrow F + f_n \text{ eta } F - f_n \geq 0$$

dira. Fatouren lema aplikatuz $F + f_n$ segidari,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(F + f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X (F + f_n)d\mu$$

desberdintza dugu. Alde batetik, baturaren integrala eta integralen baturak berdinak dira, eta, bestetik, integral guztiak finituak dira; orduan,

$$\int_X F d\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \int_X F d\mu + \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \Rightarrow$$

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Azkenik, segidaren limitea f denez,

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \tag{2.5}$$

desberdintza dugu. Prozedura errepikatuz, Fatouren lema $F - f_n$ segidari aplikatuz, honako bornaketa hauek ditugu:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty}(F - f_n)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X (F - f_n)d\mu \Longrightarrow$$

$$\int_X Fd\mu + \int_X \liminf_{n\to\infty}(-f_n) \leq \int_X Fd\mu + \liminf_{n\to\infty}\int_X (-f_n)d\mu \Rightarrow$$
$$\int_X \liminf(-f_n)_{n\to\infty} \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X (-f_n)d\mu.$$

Desberdintzaren ezkerraldeko behe-limitea segidaren limitea da, eta eskuinean

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

propietatea erabiliz,

$$-\int_X fd\mu \leq -\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$$
$$\Downarrow$$
$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \leq \int_X fd\mu \tag{2.6}$$

desberdintza lortzen dugu. (2.5) eta (2.6) desberdintzak batera hartuz,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X fd\mu$$

edo

$$\lim_{n\to\infty}\int_X (f_n - f)d\mu = 0$$

da. Amaitzeko, $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2F$ da; beraz, teorema aplika dakioke $|f_n - f|$ segidari, $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|d\mu = 0$ lortzeko. ∎

2.6.2 teorema. *Izan bedi $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio integragarrien segida puntuz puntu konbergentea i.n. g funtzio integragarrira. Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien segida f-ra puntuz puntu konbergenta i.n., $|f_n(x)| \leq |g_n(x)|$ izanda.*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n dm = \int_X gdm \quad \textit{bada} \implies \lim_{n\to\infty}\int_X f_n dm = \int_X fdm \ \textit{da.}$$

Froga. Notazioa sinplifikatzeko, demagun $f_n \geq 0$ dela n guztietarako (bestela, $|f_n|$ idatziko genuke). Orduan, $(g - f_n)_+ \leq g$ denez, konbergentzia menderatuaren teoremari esker,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X (g - f_n)_+ dm = \int_X (g - f)_+ dm.$$

Bestalde, $g_n - f_n \geq 0$ denez, honako hau dugu:

$$0 \leq \int_X (g - f_n)_- \ dm = \int_X (g - g_n + g_n - f_n)_- \ dm \leq \int_X (g - g_n)_- \ dm.$$

Gainera, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X (g - g_n)_- \ dm = 0$; hortaz,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (g - f_n) \ dm = \int_X (g - f)_+ \ dm = \int_X (g - f) dm,$$

$f(x) \leq g(x)$ baita. ■

Adibidea. Izan bedi $f_n(x) = \dfrac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2}, 0 \leq x \leq 1$. Limite puntuala $f(x) = 0$ da, baina ez da uniformeki konbergentea, zeren eta $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^{1/2}}{2}$ baita. Funtzio horiek Riemann-integragarriak dira, baina ezin da planteatu limitera pasatzea konbergentzia uniformea ez delako. Bestalde, $\dfrac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2} \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{x}}$ da edozein n-tarako, eta funtzio hori Lebesgue-integragarria da; beraz konbergentzia menderatuaren teorema aplika dezakegu, etak orduan,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx = 0.$$

2.6.3 korolarioa. *Izan bedi* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *funtzio neurgarrien segida* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu$ *finitua izanda. Orduan,* $\exists \ f \in L^1(\mu)$ *zeinetarako* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ *den eta*

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Froga. $\int_X \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu$ funtzio ez-negatiboetako serie baten integrala da; beraz, 2.5.4 korolarioa erabiliz,

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < \infty,$$

eta $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x)$ funtzio integragarria da.

$$\int_X F(x)d\mu < \infty \Rightarrow F(x) < \infty \quad i.n. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty \quad i.n. \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty \quad i.n.$$

Izan bedi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Hori horrela,

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x) \in L^1(\mu) \Rightarrow f \in L^1(\mu).$$

Gainera,

$$\int_X f d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu$$

izango da, eta

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq F(x) \in L^1(\mu).$$

Beraz, Lebesgueren konbergentzia menderatuaren teoremaren arabera

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu \underbrace{=}_{\text{batura finitua}} \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu \underbrace{=}_{\text{teoremari esker}} \int_X \lim_{n\to\infty} s_n d\mu = \int_X f d\mu$$

da. ∎

Konbergentzia menderatuaren teoremak ondorio oso erabilgarriak dauzka; esaterako, parametroen bidez definitutako funtzioen jarraitutasuna, eta deribagarritasunaren azterketa, besteak beste.

2.6.4 teorema. *Izan bitez $f : X \times I \to \mathbb{R}$ funtzioa, $f(\cdot, t) \in L^1(X, \mu)$ izanda $t \in I$ guztietarako, eta*

$$F(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x), \ t \in I.$$

i) *$f(x,\cdot)$ jarraitua bada t_0-n, $x \in X$ guztietarako, eta $\exists\, g_1 \in L^1(X,\mu)$ non $|f(x,t)| \leq g_1(x)$ den $\forall\,(x,t) \in X \times I$, F funtzio jarraitua da t_0 puntuan; hau da,*

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \int_X f(x,t_0)d\mu(x).$$

ii) *$f(x,\cdot)$ deribagarria bada t_0-n, $x \in X$ guztietarako, eta $\exists\, g_2 \in L^1(X,\mu)$ non $|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g_2(x)$ den $\forall\,(x,t) \in X \times I$, F funtzio deribagarria da t_0 puntuan. Gainera, honako formula hau betetzen da, Leibnizen formula, hain zuzen ere:*

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\mu(x).$$

Froga. *i)* Izan bedi $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t_0-ra doan zenbaki errealen segida bat. F jarraitua izateko, $\lim\limits_{n\to\infty} F(t_n) = F(t_0)$ dela frogatu behar da, edo baliokidea dena, $\lim\limits_{n\to\infty}(F(t_n) - F(t_0)) = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(F(t_n) - F(t_0)) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f(x,t_n)d\mu - \int_X f(x,t_0)d\mu\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X f(x,t_n)d\mu = \int_X f(x,t_0)d\mu.\end{aligned}$$

Hipotesiz, existitzen da t guztietarako $f(x,t)$-ren goi-bornea den g_1 funtzio integragarria; hortaz, konbergentzia menderatuaren teoremaren baldintzak betetzen dira, eta limitea integralaren barrura sar daiteke. Gainera, t_0 puntuan f jarraitua denez, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x,t_n) = f(x,t_0)$; beraz,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f(x,t_n)d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f(x,t_n)d\mu = \int_X f(x,t_0)d\mu$$

da.

ii) Deribatuaren definizioaren arabera, $F'(t_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0}$ da. F-ren definizioan ordezkatuz,

$$\begin{aligned}F'(t_0) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\int_X f(x,t_n)d\mu(x) - \int_X f(x,t_0)d\mu(x)}{t_n - t_0}\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X\left(\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\right)d\mu(x)\end{aligned}$$

adierazpena lortzen dugu. Batez besteko balioaren teorema erabiliz, $\exists\,\psi \in (t_0,t_n)$, zeinetarako

$$\left|\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\psi)\right|$$

den. t guztietarako, berriz, existitzen da $\dfrac{\partial f}{\partial t}$-ren goi-bornea den g_2 funtzio integragarria; beraz, konbergentzia menderatuaren teoremaren baldintzak betetzen dira, eta limitea integralaren barrura sar daiteke emaitza frogatuz:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_X \left(\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}\right) d\mu(x) &= \int_X \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}\right) d\mu(x)\\ &= \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0).\end{aligned}$$

■

2.7 Riemannen integrala eta Lebesgueren integrala

Lebesgueren integrala ikasi ondoren, ezinbestekoa da Lebesgueren eta Riemannen integralaren arteko erlazioa aztertzea. Dagoeneko kasu bat aztertu dugu 2.4.3 korolarioan.

Izan bedi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funtzio bornatua. Riemannen integragarritasuna aztertzeko, $[a,b]$ tartean partiketak hartzen dira dagozkion goi-baturak eta behe-baturak kalkulatzeko. Goi- eta behe-baturak $U(f,P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} M_k(x_k - x_{k-1})$ eta $u(f,P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} m_k(x_k - x_{k-1})$ eran definitzen dira, M_k azpitarte bakoitzeko maximoa izanda eta m_k minimoa. f funtzioa Riemann-integragarria izango da, goi- eta behe-baturen arteko kenketak zerora jotzen duenean limitean; hau da,

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon, \forall P \supset P_\epsilon, U(f,P) - u(f,P) < \epsilon$$

denean.

Bestalde, Lebesguek irudi multzoan egiten du partiketa, eta dagokion batura honela definitzen du:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} y_i^\star m(\{x \in A, y_{i-1} \le f(x) < y_i\}),$$

$y_i^\star \in [y_{i-1}, y_i]$ izanda, $\forall\, i = 1,\dots n$. Izan bedi $h(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^\star \chi_{\{x\in A, y_{i-1}\le f(x)<y_i\}}$ funtzioa. Irudi multzoko edozein partiketatarako, azpitarteen luzerak zerora hurbiltzen direnean, f funtzioak h-ra joko du, eta, era berean, dagokion $L(f,P)$ batura f-ren Lebesgueren integralaren baliora hurbilduko da.

Riemannen baturak konbergenteak izateko, M_k eta m_k balioek ezin dute oso desberdinak izan, eta horrela izango da f jarraitua edo zatika jarraitua denean; hau da, eten-puntuen multzoaren neurria zero da. Beraz, horrek iradokitzen du Riemannen integragarritasunaren eta eten-puntuen multzoaren neurriaren arteko erlazioa egon daitekeela.

Lehenik eta behin, ikus dezagun f ezin dela Riemann-integragarria izan bere eten-puntuen multzoaren neurria zero ez bada. Izan bedi D f-ren eten-puntuen multzoa, honako era honetan idatz daitekeena:

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in [a,b], \forall \delta > 0, \exists y \in [a,b], |y-x| < \delta, |f(y) - f(x)| \geq \frac{1}{j}\}.$$

Demagun $m^*(D) > 0$ dela (ez dakigu D neurgarria den ala ez; beraz, kanpo-neurria dugu). Orduan, bildurako multzoren batek kanpo-neurri positiboa du. Izan bedi D_j multzo hori. Partiketako edozein azpimultzotarako, goi- eta behe-baturen arteko kenketa honela borna daiteke:

$$\sum_{(x_{k-1},x_k)\cap D_j \neq \emptyset} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \frac{1}{j} \sum_{(x_{k-1},x_k)\cap D_j \neq \emptyset} (x_k - x_{k-1}) =$$

$$\frac{1}{j} \sum_{(x_{k-1},x_k)\cap D_j \neq \emptyset} m\left([x_{k-1}, x_k]\right) \geq \frac{1}{j} m^*(D) > 0.$$

Hori horrela, $\epsilon < \frac{1}{j} m^*(D)$ hartuz, f ezin da Riemann-integragarria izan.

Demagun orain $m(D) = 0$ dela, eta zatitu dezagun $[a,b]$ tartea n zati berdinetan; hau da, $x_k = a + k(b-a)/n$. Izan bedi $g_n = \sum_{k=1}^{n} s_k \chi_{(x_{k-1},x_k)}$ funtzio-segida, $s_k \in [m_k, M_k]$ edozein balioa izanda. Ikus dezagun g_n-ren limitea f dela i.n. Demagun $x \notin D$; hortaz, f jarraitua da puntu horretan; hau da,

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \forall\ y \in [a,b]\ |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Hartuz n zeinetarako $(b-a)/n < \delta$ den, existituko da azpitarte bakar bat $x \in (x_{k-1}, x_k)$ izanda. Bestalde, $(x_{k-1}, x_k) \subset (x-\delta, x+\delta)$ denez, $M_k - f(x) \leq \epsilon$, $f(x) - m_k \leq \epsilon$ eta $m_k \leq g_n(x) = s_k \leq M_k$ dela ondorioztatzen da; beraz, $|f(x) - s_k| < \epsilon$ da. Gainera, f funtzio-segidaren limite puntuala denez, funtzio neurgarria da, eta neurri finitudun espazioan definitutako funtzio bornatua izateagatik, Lebesgue-integragarria da. Konbergentzia menderatuaren teorema aplikatzen badiogu g_n segidari,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n dm = \int_{[a,b]} f dm$$

dela ondoriozta dezakegu. Bestalde, $\int_a^b g_n(x)dx = U_n$ Riemannen goi-batura da $s_k = M_k$ hartuz. Era berean, $s_k = m_k$ hartuz, $\int_a^b g_n(x)dx = u_n$ Riemannen behe-batura da. Laburbilduz, $U_n - u_n \to 0$ dugu; beraz, f Riemann-integragarria da, eta, gainera, Riemannen eta Lebesgueren integralak berdinak dira.

2.7.1 teorema. *(Lebesgueren teorema)*

Izan bedi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio bornatua.

i) f Riemann-integragarria da, baldin eta soilik baldin jarraitua bada i.n.; hau da, eten-puntuen multzoaren Lebesgueren neurria zero bada.

ii) f Riemann-integragarria bada, Lebesgue-integragarria da, eta bi integralak berdinak dira.

Gai honetan zehar ikusi dugunez, teorema honen *ii)* atalaren alderantzizkoa ez da egia; hau da, existitzen dira Lebesgue-integragarriak diren funtzioak, baina ez Riemann-integragarriak. Horrek, berehalako ondorio bat ematen digu: Lebesgue-integragarriak diren funtzioen klasea, Riemann-integragarriak diren funtzioen klasea baino handiagoa da.

Amaitzeko, bi integralen arteko erlazioa aztertzea falta da integral inpropioetarako. Kasu horretan, Riemannen integral inpropioa, definizioz,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)dx$$

da. Demagun f ez-negatiboa dela, eta bere integral inpropioa konbergentea dela. Orduan, 2.7.1 teoremaren ii) atalagatik, Riemannen eta Lebesgueren integralak berdinak izango dira, eta integral inpropioa konbergentea denez, honako berdintza hauek ditugu:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f dm = \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n dm,$$

$f_n = f\chi_{[a,n]}$ segida definituz. Egoera horretan, f_n-ri konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n dm = \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n dm = \int_a^\infty f dm;$$

hots, funtzioa $[a,\infty]$ tartean Lebesgueren ikuspuntutik integragarria da, eta integral hori eta Riemannen integral inpropioa berdinak dira.

Aipatutakoaren adibide gisa, kalkula dezagun $f(x) = \frac{1}{x}$ funtzioaren Lebesgueren integrala $[1, \infty]$ tartean beste modu batean. Horretarako, eraiki dezagun honako segida hau:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1, n], \\ 0 & x > n. \end{cases}$$

Segidako gai guztiak funtzio jarraituak dira, eta tarte bakoitzaren neurria finitua denez, f_n funtzioak Riemann-integragarriak badira Lebesgue-integragarriak dira integralak berdinak izanda; beraz,

$$\int_{[1,n]} \frac{1}{x} dm = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n.$$

Bestalde, f_n segida ez-beherakorra da, eta puntuz puntu konbergentea f funtziora; beraz, konbergentzia monotonoaren teorema erabiliz:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n dm = \int_X f dm;$$

hau da,

$$\lim_{n \to \infty} \ln n = \infty = \int_X f dm.$$

Funtzioa edozein zeinutakoa denean, gerta daiteke Riemannen integral inpropioa existitzea baina Lebesgueren ikuspuntutik integragarria ez izatea; adibidez, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funtziorako frogatu den bezala,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{baina} \quad \int_{(0,\infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty.$$

Kasu horretan, f-ren integral inpropioak absolutuki konbergentea izan behar du; hau da, $|f|$-ren integral inpropioak konbergentea izan behar du, Lebesgueren eta Riemannen integralen arteko berdintza emateko.

2.8 Ariketak

2.8.1. *Izan bedi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa, zeinetarako $f^{-1}((r, \infty))$ multzoak neurgarriak diren, $\forall\ r \in \mathbb{Q}$. Frogatu f funtzio neurgarria dela.*

2.8.2. *Frogatu $[0, 1]$ tarteko zenbaki arrazionalen funtzio karakteristikoa; hau da, $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, funtzio neurgarria dela.*

2.8.3. *Izan bedi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ neurri-espazioa eta izan bitez $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioak, zeinetarako $\{x \in X, f(x) > \lambda\}$, $\{x \in X, g(x) > \lambda\} \in \mathcal{A}$ dauden, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Froga ezazu honako multzo hauek ere $\mathcal{A}$-n daudela:*

$$\{x \in X, f(x) \leq \lambda\}, \ \{x \in X, f(x) = \lambda\} \text{ eta } \{x \in X, f(x) < g(x)\}.$$

2.8.4. *Froga itzazu honako baieztapen hauek:*

i) f aldagai errealeko funtzio neurgarria bada, $1/f$ ere neurgarria da.

ii) f aldagai errealeko funtzio deribagarria bada i.n., f' neurgarria da.

2.8.5. *Izan bedi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funtzio neurgarrien segida bat. Froga ezazu segida konbergentea den puntuen multzoa, multzo neurgarria dela.*

2.8.6. *Esan honako baieztapen hauek egia ala gezurra diren, erantzuna arrazoituz:*

i) f neurgarria bada, f^+ eta f^- ere neurgarriak dira.

ii) f eta $|f|$ neurgarriak badira, f^+ eta f^- ere neurgarriak dira.

iii) f ez bada neurgarria, f^+ eta f^- ez dira neurgarriak.

2.8.7. *Eman f funtzio ez-neurgarriaren adibide bat, zeinetarako $|f|$ neurgarria den.*

2.8.8. *Izan bitez $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espazio neurriduna, f funtzio neurgarria eta $t \in (0, \infty)$. Frogatu Chebyshev-en desberdintza:*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}\right) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| d\mu.$$

Ondorioztatu $\{x \in X : |f(x)| \geq t\}$ multzoaren neurria finitua dela t guztietarako, f integragarria bada.

2.8.9. *Aurkitu f integragarria $(0, 1)$ tartean, zeinetarako f^2 ez den integragarria. Izan daiteke f bornatua?*

2.8.10. *Izan bedi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espazio neurriduna. Froga ezazu, μ neurria osoa ez bada, existitzen direla f eta g funtzioak, f neurgarria eta g ez-neurgarria, $f = g$ izanda ia nonahi.*

2.8.11. *Izan bitez $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ funtzioa eta $A = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = \infty\}$ eta $B = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = -\infty\}$ multzoak. Frogatu f funtzio neurgarria dela, baldin eta soilik baldin A, B eta $f|_{(A \cup B)^c}$ neurgarriak badira. Emaitza hori erabiliz, ondorioztatu honako funtzio hau neurgarria dela:*

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & x < -1, \\ \sqrt{1 - |x|}, & |x| \leq 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$

2.8.12. *Azter ezazu honako funtzio hauek Lebesgue-integragarriak diren ala ez:*

i) $f_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}},\ x \in (0, +\infty).$

ii) $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2(\ln x)^3},\ x \in [0, \infty).$

iii) $f_3(x) = \dfrac{x^2+5}{3x^4+7x}\sin x,\ x \in [1, \infty).$

2.8.13. *Kalkula itzazu honako funtzio hauen Lebesgueren integralak, integragarriak diren kasuetan:*

i) $f_1(x) = \sin x,\ x \in [0, \pi/2].$

ii) $f_2(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, \pi/2], \\ \cos x, & x \in [0, \pi/2] - \mathbb{Q}. \end{cases}$

iii) $f_3(x) = \begin{cases} p, & x = p/q \in [0, 1], \\ 1, & x \in [0, 1] - \mathbb{Q}. \end{cases}$

iv) $f_4(x) = \begin{cases} n^2, & x \in (n, n+1), n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \textit{bestetan.} \end{cases}$

2.8.14. *Biz* $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ *funtzio neurgarria eta* $A_n = \{x \in \mathbb{R} : 2^{n-1} \leq f(x) < 2^n\}$. *Froga ezazu* f *funtzioa integragarria dela, baldin eta soilik baldin* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n m(A_n)$ *seriea konbergentea bada.*

2.8.15. *Biz* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzio neurgarria eta* $S = \{x \in [0, 1] : f(x) \in \mathbb{Z}\}$. *Froga ezazu*

$$m(S) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n\, dx$$

berdintza egiaztatzen dela.

2.8.16. *Izan bietz* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espazio neurriduna,* $f \in L^1(\mu)$ *eta,* $n \in \mathbb{N}$ *bakoitzerako,* $E_n = \{x \in X : f(x) > 2n\}$ *multzoa. Froga itzazu honako bi limite hauek:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu = 0 \quad \textit{eta} \quad \lim_{n\to\infty} n\mu(E_n) = 0.$$

2.8.17. *Izan bedi* $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ *funtzio integragarria. Frogatu*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}-(-n,n)} f = 0 \quad \textit{eta} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{(n,n+1)} f = 0$$

direla.

2.8.18. *Izan bedi* $f_n(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x),\ x \in (0,1)$ *funtzio segida. Froga ezazu*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

dela. Azaldu zein baldintza ez diren betetzen konbergentzia monotonoaren teorema eta konbergentzia menderatuaren teorema aplikatu ezin izateko.

2.8.19. *Izan bitez* f_n *funtzio integragarrien segida* A *multzoan, eta* f *haren limite puntuala, integragarria baita. Frogatu:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f|dm = 0 \Longleftrightarrow \int_A |f_n|dm \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_A |f|dm.$$

2.8.20. *Azter ezazu honako funtzio hauen Lebesgueren integragarritasuna,* $a \in \mathbb{R}$ *parametroaren balioen arabera:*

i) $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{-ax}, x \in (0,1).$

ii) $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^a}, x \in (0,\infty).$

iii) $f_3(x) = (1+x^4)e^{-ax}, x \in (0,\infty).$

2.8.21. *Kalkula itzazu honako limite hauek:*

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt;$ *ii)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\ dx;$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{nx^2 - 3x}{nx+1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\ e^{-2x}\ dx;$

iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_2^\infty \frac{n \sin\left(\frac{x-2}{n}\right)}{(x-2)(1+(x-2)^2)} dx;$

v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1}dx,\ a > 0;$ *vi)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx \sin x}{1+(nx)^p} dx,\ 1 < p < 2.$

2.8.22. *Kalkulatu* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2}\chi_{[0,1]}(x)dm$ *eta* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}(x)dm.$

2.8.23. *Funtzio-serieak erabiliz, froga itzazu honako berdintza hauek:*

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{1-x} \log \frac{1}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{(3n+4)^2}; \qquad \int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

2.8.24. *Izan bedi $f \geq 0$ integragarria, $0 < \int_A f = c < \infty$ izanda. Froga ezazu honako berdintza hau:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A n \cdot \ln(1 + (f(x)/n)^{\alpha}) dx = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha < 1, \\ c, & \alpha = 1, \\ 0, & 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

2.8.25. *Izan bedi $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x} e^{-xt} dx,\ t \in (0, \infty)$.*

i) Frogatu F ondo definituta dagoela eta deribagarria dela.

ii) Kalkulatu $F'(t) - F(t)$.

2.8.26. *Izan bitez $F(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx\right)^2$ eta $G(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$ funtzioak, $t \geq 0$.*

i) Frogatu $F'(t) + G'(t) = 0$ dela, eta ondorioztatu $F(t) + G(t) = \frac{\pi}{4}$ dela.

ii) Kalkulatu $\lim_{t\to\infty} F(t)$ eta $\lim_{t\to\infty} G(t)$.

iii) Frogatu $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ dela.

2.8.27. *Izan bedi $G(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$ funtzioa.*

i) Frogatu G funtzioa jarraitua dela $\mathbb{R}$-n.

ii) Frogatu G funtzioa deribagarria dela $\mathbb{R}$-n.

iii) G funtzioa C^2 motatakoa al da? Horrela balitz, eman G''-ren adierazpena.

2.8.28. *Izan bedi f funtzio neurgarria eta bornatua X multzoan. Demagun existitzen direla $A > 0$ eta $\alpha < 1$ konstanteak, non $\epsilon > 0$ bakoitzerako*

$$\mu\left(\{x \in X, |f(x)| > \epsilon\}\right) < \frac{A}{\epsilon^{\alpha}}$$

den. Froga ezazu f integragarria dela.

2.8.29. *Izan bedi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ neurri-espazioa eta $f \in L^1(\mu)$. Froga ezazu*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ |\int_A f d\mu| < \epsilon \text{ dela } A \in \mathcal{A} \text{ eta } \mu(A) < \delta \text{ denean.}$$

3. gaia

Fubiniren teorema eta aldagaiaren aldaketa

Oinarrizko kalkuluan, Riemannen integral anizkoitza integral iteratuen bidez definitzen da, integral iteratu bakoitza dimentsio bateko espazioan kalkulatzen delarik. Lebesgueren integralaren kasurako, antzeko prozedura egiterakoan, $x \longrightarrow f(x,y)$ eta $y \longrightarrow f(x,y)$ funtzioen integragarritasunaren arazoa sortzen da. Hortaz, honako galdera hau planteatzen da: bi espazio neurridun izanda, ba al dago modurik "biderkadura-neurri" bat eraikitzeko jatorrizko espazioen biderkadura kartesiarrean? Lebesguek horri buruzko emaitza partzial bat frogatu zuen, laukizuzen batean definitutako funtzio bornatuetarako hain zuzen ere, eta biderkadura-neurria eraikitzeko jarraitutako bidea emaitza horretan oinarrituko da. Baina, hori egin ahal izateko, egitura egokia behar dugu; hau da, σ-aljebra bat eta biderkadura-neurri bat. Lehen adibidea izan daiteke $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ biderkadura bezala hartzea, non Lebesgueren neurria planoan zuzenen gaineko neurrien biderkadura izango litzatekeen, hots,

$$m_2\left([a,b] \times [c,d]\right) = m_1([a,b]) \cdot m_1([c,d]).$$

Helburua da ideia hori modu orokor batean garatzea, kanpo-neurri bat definituz eta, Caratheodoryren definizioaren bidez, biderkadura-espazioko multzo neurgarriak finkatuz. Hala ere, badago prozedura hori egiteko bigarren metodo bat, probabilitatean oinarrituta. Demagun bi behaketa dituen ausazko esperimentu bat dugula, lehena $x_1 \in \Omega_1$ eta bigarrena $x_2 \in \Omega_2$. Lehenengoa $A \in \mathcal{A}$ multzo batean erortzeko probabilitatea $\mu_1(A)$ da. Gainera, behin x_1 behaketa egin ondoren, bigarrena $B \in \mathcal{B}$ multzoan erortzeko probabilitatea $\mu_{x_1}(B)$ izango da. Hori horrela, logikoa dirudi pentsatzea (x_1, x_2) bikotearen behaketa $A \times B$ multzoan erortzeko probabilitatea honako hau izatea:

$$\mu(A \times B) = \int_A \mu_x(B) d\mu_1.$$

Adibidez, demagun karta espainolak ditugula (C multzoa) eta bi karta ateratzen ditugula, lehenengo bat eta gero bestea. Zein da lehenengoa batekoa (A) izateko probabilitatea eta bigarrena ezpata (B) izateko probabilitatea? Kontuan izanda lehen karta atera ondoren ez dela karta sortara bueltatzen, karta-bikote posibleen multzoa $(C \times C) - \Delta$ da, Δ diagonala izanda. Gainera, karta bakoitza ateratzeko probabilitatea berdina da; beraz, probabilitatea honako hau izango da:

$$\frac{\text{Aldeko kasuak}}{\text{Kasu posibleak}} = \frac{39}{39 \cdot 40} = \frac{1}{40}.$$

Kalkulu hori beste modu batean plantea daiteke: ateratzen den lehen karta ezpatako batekoa bada (horren probabilitatea $1/40$ da), bigarren kartak ezpata izateko duen probabilitatea $9/39$koa da. Bestalde, lehen karta beste edozein bateko bada, bigarrenaren probabilitatea $10/39$koa izango da; beraz,

$$\int_A \mu_x(B) d\mu_1 = \frac{1}{40} \cdot \frac{9}{39} + \frac{3}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{1}{40}$$

emaitza berdina. Bigarren moduan egindako kalkulua biderkadura espazioari dagokio.

3.1 Biderkadura-neurria

Izan bitez $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eta $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espazio neurridunak eta $A \times B$ motako multzoak, $A \in \mathcal{A}$ eta $B \in \mathcal{B}$ izanda. Multzo horiei *laukizuzen elementalak* esaten zaie (bereziki, A eta B tarteak direnean $A \times B$ laukizuzen bat delako). Multzo horiek osotzen duten familia oro har ez da σ-aljebra bat; beraz, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ izango da familia horrek sortutako σ-aljebra, biderkadura-σ-aljebra, hain zuzen ere.

Hurrengo pausoa biderkadura espazioko biderkadura-neurria eraikitzea da. Izan bedi $\mathcal{E}$ laukizuzen elementalen bildura disjuntu eta finituen familia; hau da, $\mathcal{E} = \{E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i), A_i \times B_i \text{ laukizuzen elementalak}\}$, eta bertan definitutako τ funtzioa, $\tau(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\nu(B_i)$. Hori horrela, τ^* kanpo-neurria eraikitzen da,

$$\tau^*(P) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau(E_i),\ P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ E_i \in \mathcal{E}\}$$

izanda. Caratheodoryren prozedura jarraituz, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σ-aljebran

$$\mu \otimes \nu(P) = \tau^*(P)$$

eran definitzen da kanpo-neurriaren bidez, neurgarriak diren multzoetarako. Hasierako μ eta ν neurri σ-finituak badira, definitutako $\mu\otimes\nu$ neurria laukizuzen elementaletarako

$$\mu \otimes \nu\,(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

baldintza betetzen duen neurri bakarra da. Hortaz, eraikita dago

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$$

biderkadura-espazio neurriduna.

Oharra. $\mathbb{R}^n$ eta $\mathbb{R}^m$ espazio bakoitzerako σ-aljebra boreldarra jotzen badugu, orain aipatutako prozedurari jarraituz σ-aljebren biderkadura lortzen da; hau da,

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{n+m}\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right) \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^m\right)$$

da. Izan ere, $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$ multzo irekiek sortutako σ-aljebra denez, $\mathbb{R}^{n+m}$-ko irekiak $\mathbb{R}^n$ eta $\mathbb{R}^m$-ko irekien biderkadurak izango dira, $\mathbb{R}^{n+m}$ espazio multzo irekiak eta $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ espazioko multzo irekiak identifika daitezkeelako. Bestalde, Lebesgue-neurgarriak diren multzoek sortutako σ-aljebra hartuz eta prozedura bera errepikatuz, biderkadura-espazioari dagokion σ-aljebra berria ez da emandakoen biderkadura; hau da,

$$\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n+m}\right) \neq \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right) \otimes \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^m\right).$$

Esaterako, izan bitez $(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1, m_1)$ eta $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}^2, m_2)$ $\mathbb{R}$ eta $\mathbb{R}^2$-ko Lebesgueren σ-aljebrak eta neurriak, hurrenez hurren. Frogatuko dugu $\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 \neq \mathcal{L}^2$ dela. Horretarako, izan bedi A Vitaliren multzoa; hortaz, $A \notin \mathcal{L}^1$. Har dezagun $x \in \mathbb{R}$ puntu finko bat, eta izan bedi $P = \{x\} \times A \subset \mathbb{R}^2$ multzoa. $m_2(P) = 0$ da, zeren eta $\mathbb{R}^2$-n dagoen zero neurriko multzo baten azpimultzoa baita,

$$\{x\} \times A \subset \{x\} \times \mathbb{R}$$

hain zuzen ere. Lebesgueren neurria osoa denez, zero neurriko multzo baten edozein azpimultzo ere zero neurrikoa da; hortaz, P-ren neurria zero da. Orduan, multzo neurgarria da $\mathbb{R}^2$-n; hau da, $P \in \mathcal{L}^2$. Bestalde, $\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^2$ balitz, $\mathbb{R}^2$-ko edozein multzo neurgarri $\mathbb{R}$-ko bi multzo neurgarriren biderkadura izan beharko litzateke, baina P ez da horrelakoa (neurgarria bider ez-neurgarria da). Hortaz, $\mathcal{L}^2$ σ-aljebra $\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1$ baino handiagoa dela ondorioztatzen da; hau da, $\mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^2$. Oro har,

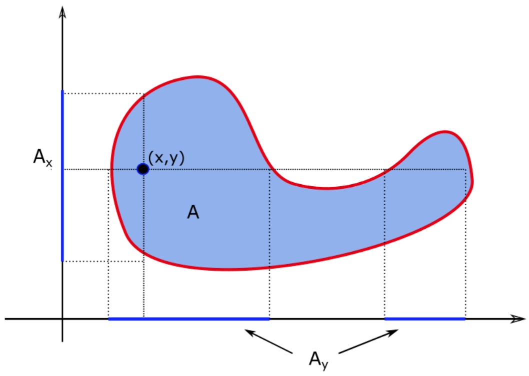
$$\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right) \otimes \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^m\right) \subset \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n+m}\right).$$

Definizioa. Izan bedi $A \in (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. A-ren sekzioak honela definitzen dira:

$$A_x = \{y \in Y, (x, y) \in A\} \in \mathcal{B},$$

$$A_y = \{x \in X, (x, y) \in A\} \in \mathcal{A}.$$

A multzo neurgarria bada $\mu \otimes \nu$ biderkadura neurrirako, A_x neurgarria da ν neurrirako, eta A_y neurgarria da μ neurrirako, hurrenez hurren.



3.1 irudia. A_x eta A_y sekzioak.

Berehalakoa da frogatzea y sekzioetarako betetzen diren honako propietate hauek (era berean, x-rako):

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)_y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_i)_y, \quad \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)_y = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i)_y, \quad (A - B)_y = A_y - B_y.$$

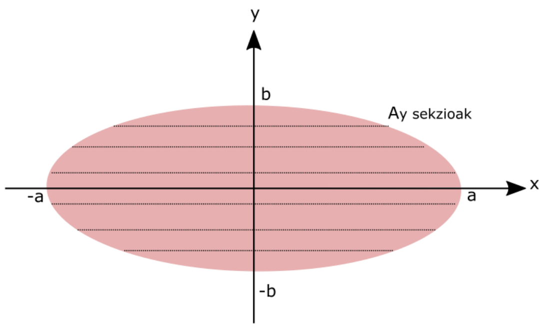
Biderkadura-espazioa definitu ondoren, logikoa dirudi pentsatzea $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ multzoaren neurria haren sekzioen neurrien menpekoa izango dela.

Adibidea. Izan bedi jatorrian zentratutako eta a eta b ardatzerdi dituen elipsea; hau da, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$. Edozein $y \in [-b, b]$ finkotarako, A_y sekzioa $\mathbb{R}$-ren honako tarte hau da:

$$A_y = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}\};$$

beraz, $m_1(A_y) = \dfrac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ da. Elipsea sekzio horizontal guztien bilduratzat hartzen badugu, bere azalera sekzioen luzeren batura infinitua izango litzateke; hots, honako integral hau:

$$\begin{aligned} m_2(A) = \int_{-b}^{b} m_1(A_y)dy &= \frac{2a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2 - y^2}dy \\ &= 2ab\int_{\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt = \pi ab. \end{aligned}$$



3.2 irudia. Elipsearen A_y sekzioak.

Adibide honek $\nu(A_x)$ eta $\mu(A_y)$ funtzioak aztertzera bideratzen gaitu, non $\nu(A_x)$ X-n definitutako funtzioa den eta $\mu(A_y)$ Y-n definiturikoa, hurrenez hurren. $A = I_1 \times I_2$ laukizuzen elementala bada, $\nu(A_x)$ eta $\mu(A_y)$ funtzio sinpleak dira, eta bi funtzio horien integralak (bakoitza bere espazioan eta bere neurriarekiko) berdinak dira, $\mu(I_1)\nu(I_2)$ hain zuzen ere. Emaitza horrek Cavalieriren teoremara eramaten gaitu.

Bonaventura Cavalieri apaiz jesuita eta matematikari italiarra izan zen (Milan, 1598 - Bolonia, 1647). Galileoren ikaslea izan zen, eta matematika irakatsi zuen Bolonian. Astronomia, trigonometria esferikoa eta kalkulu logaritmikoa landu zituen batez ere, baina bere ekarpenik garrantzitsuenetarikoa *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota* lanean aipatzen da. Bertan azaltzen du zenbaki zatiezinen teoria. Luzeren, azaleren eta bolumenen neurketa zatiezinen infinitutasunaren batura egitean datza: integral mugatu baten kalkuluaren hastapena da, nahiz eta limitearen nozio zorrotz modernorik ez izan. Hori dela eta, kalkulu infinitesimal modernoaren aitzindarietakotzat hartzen da; Cavalieriren printzipioa teoria horretan oinarrituta dago, nahiz eta XX. mendearen hasierakoa izan. Horregaitik darama bere izena.

Bonaventura Cavalieri (Italia, 1598-1647)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/49/Bonaventura_Cavalieri.jpeg/260px-Bonaventura_Cavalieri.jpeg

3.1.1 teorema. *(Cavalieriren printzipioa) Izan bitez* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *eta* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *espazio neurridunak, neurriak* σ*-finituak izanda. Orduan,* $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *multzo bakoitzerako*

$$g : X \longrightarrow [0, \infty], \;\; g(x) = \nu(A_x)$$

eta

$$h : Y \longrightarrow [0, \infty], \;\; h(y) = \mu(A_y)$$

funtzio neurgarriak dira, eta

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int_X \nu(A_x) d\mu = \int_Y \mu(A_y) d\nu \tag{3.1}$$

berdintza betetzen da.

3.1.2 teorema. *(Cavalieriren printzipioa) Izan bedi* $A \subset \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ *multzo neurgarria. Orduan, ia* $y \in \mathbb{R}^n$ *guztietarako* $A_y \subset \mathbb{R}^k$ *multzo neurgarria da, eta ia* $\mathbb{R}^n$ *guztian definitutako* $y \longrightarrow m_k(A_y)$ *funtzioa, funtzio ez-negatibo eta neurgarria da,*

$$m_p(A) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(A_y) dm_n(y) \tag{3.2}$$

berdintza betetzen delarik. Era berean, ia $x \in \mathbb{R}^k$ *guztietarako* $A_x \subset \mathbb{R}^n$ *multzo neurgarria da, eta ia* $\mathbb{R}^k$ *guztian definitutako* $x \longrightarrow m_n(A_x)$ *funtzioa, funtzio ez-negatibo eta neurgarria da,*

$$m_p(A) = \int_{\mathbb{R}^k} m_n(A_x) dm_k(x) \tag{3.3}$$

izanda.

Froga. Frogapena lau urratsetan egingo dugu: lehenik eta behin, emaitza tarteetarako frogatuko da. Bigarren pausoan multzo irekietarako, hirugarrenean edozein multzo bornatutarako, eta, azkenik, edozein multzoren kasua frogatuko da.

i) Demagun $A = I \subset \mathbb{R}^p$ tartea dela. Orduan, emaitza berehalakoa da, kontuan hartuz tarte baten neurria bere bolumena dela. Beinke, $I = I' \times I''$ tarteen biderkadura kartesiar bezala idatz daiteke, $I' \subset \mathbb{R}^k$ eta $I'' \subset \mathbb{R}^n$ izanda. Edozein $y \in \mathbb{R}^n$-tarako,

$$I_y = \begin{cases} I', & y \in I'', \\ \emptyset, & y \notin I'', \end{cases}$$

da; beraz, I_y neurgarria da. Gainera,

$$m_k(I_y) = \begin{cases} m_k(I'), & y \in I'', \\ 0, & y \notin I'', \end{cases}$$

izango da, eta hemendik $m_k(I_y) = m_k(I')\chi_{I''}(y)$ dela eta $y \longrightarrow m_k(I_y)$ funtzio neurgarria dela ondorioztatzen da. Hortaz,

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_k(I_y)dm_n(y) = m_k(I')m_n(I'') = m_p(I)$$

da.

ii) Demagun orain $A = G \subset \mathbb{R}^p$ multzo irekia dela. Badakigu G tarte disjuntuen bildura zenbakigarri bezala idatz daitekeela; hau da,

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j.$$

$\forall\ y \in \mathbb{R}^n,\ G_y$ multzo neurgarria da, $G_y = \bigcup_{j=1}^{\infty}(I_j)_y$ bildura disjuntu bezala idazten baita. Bestalde,

$$m_k(G_y) = \sum_{j=1}^{\infty} m_k((I_j)_y)$$

denez, $y \longrightarrow m_k(G_y)$ funtzio neurgarria da. Gairik gai integratuz, frogatu nahi dugun emaitza lortzen dugu; izan ere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_k(G_y)dm_n(y) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} m_k((I_j)_y)dm_n(y) = \sum_{j=1}^{\infty} m_p(I_j) = m_p(G).$$

iii) Izan bedi $A \subset \mathbb{R}^p$ edozein multzo neurgarri eta bornatu. Multzo neurgarrien definiziogatik, aukera daitezke $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ multzo trinkoen segida bat eta $(G_j)_{j\in\mathbb{N}}$ multzo irekien beste segida bat, zeinetarako

$$K_j \subset A \subset G_j, \quad \lim_{j\to\infty} m_p(G_j - K_j) = 0$$

den. Orokortasunik galdu gabe, multzo irekien segida beherakorra eta bornatua dela suposa daiteke baita ere (A bornatua denez, nahikoa litzateke bere barne duen edozein bola ireki eta G_j-ren arteko ebakidura hartzearekin). Era berean, multzo trinkoen segida gorakorra dela suposa daiteke. Har ditzagun

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \quad \text{eta} \quad C = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j$$

multzoak. Argi dago $B \subset A \subset C$ dela, $m_p(A) = m_p(C)$ dela, eta

$$\forall\ y \in \mathbb{R}^n,\ C_y = \bigcap_{j=1}^{\infty}(G_j)_y \quad \text{eta} \quad B_y = \bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j)_y$$

multzo neurgarriak direla. Edozein j-tarako $G_j - K_j$ multzo irekia da, eta, orduan, bigarren pausoan frogatutakoa erabil daiteke honako hau idazteko:

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_k((G_j - K_j)_y)dm_n(y) = m_p(G_j - K_j) \overset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Edozein j-tarako, $C - B \subset G_j - K_j$ denez, $m_k((C - B)_y) \le m_k((G_j - K_j)_y)$ izango da, eta $y \longrightarrow m_k((C - B)_y)$ funtzio neurgarria denez (funtzio neurgarrien limitea izateagatik), $\int_{\mathbb{R}^n} m_k((C - B)_y)dm_n(y) = 0$ dela ondorioztatzen da. Integral hori nulua bada, integrakizunean dagoen funtzioa ere nulua da; beraz, $m_k((C - B)_y) = 0$ da. Horrek inplikatzen du $(C - B)_y$ (edo berdina den $C_y - B_y$) multzo neurgarria dela $y \in \mathbb{R}^n$ ia guztietarako. Gainera, y horietarako $B_y \subset A_y \subset C_y$ inklusioak A_y, B_y-ren bildura eta zero neurriko multzo baten bildura dela ematen du. Monotoniaz,

$$m_k((G_j)_y) \overset{j\to\infty}{\to} m_k(A_y)$$

da; beraz, $y \longrightarrow m_k(A_y)$ funtzio neurgarria da, funtzio neurgarrien limitea izateagatik. Frogarekin amaitzeko, G_1 multzo ireki bornatua da; hortaz,

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_k((G_1)_y)dm_n(y) = m_p(G_1) < \infty$$

da, eta edozein j-tarako eta edozein y-tarako $m_k((G_j)_y) \le m_k((G_1)_y)$ da. Bornaketa horri esker konbergentzia menderatuaren teorema erabil daiteke $m_k((G_j)_y)$ segidarako, honako hau ondorioztatzeko:

$$\begin{aligned} m_p(A) = m_p(C) = \lim_{j\to\infty} m_p(G_j) &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} m_k((G_j)_y)dm_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} m_k((G_j)_y)dm_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(A_y)dm_n(y). \end{aligned}$$

iv) Azkenik, $A \subset \mathbb{R}^p$ edozein multzo neurgarri bada, multzo neurgarrien eta bornatuen bildura gorakor bezala idatz dezakegu,

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

non A_j, adibidez, A eta jatorrian zentratutako eta j erradiodun bolaren arteko ebakidura den. $j \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, aurreko urratsean frogatutakoagatik, ia $\mathbb{R}^n$ osoan definitutako $y \longrightarrow m_k((A_j)_y)$ funtzioa neurgarria da. Zero neurriko multzo batean izan ezik,

$$m_k(A_y) = \lim_{j\to\infty} m_k((A_j)_y)$$

da. Beraz, funtzio hori neurgarria da, eta konbergentzia monotonoaren teoremak alde batetik, eta aurreko atalean frogatutakoak bestetik,

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_k(A_y)dm_n(y) = \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} m_k((A_j)_y)dm_n(y) = \lim_{j\to\infty} m_p(A_j) = m_p(A)$$

dela bermatzen dute. ■

Oharra. Cavalieriren teoremaren ondorio bat honako hau da: $A \subset \mathbb{R}^p$ zero neurriko multzoa bada, orduan, ia y guztietarako A_y sekzioak zero neurriko multzoak dira dagokien neurri-espazioan (era berean, A_x-rako). Izan ere,

$$0 = m_p(A) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(A_y)dm_n(y)$$

da, eta $m_k(A_y)$ funtzio neurgarria eta ez-negatiboa denez, nulua da ia nonahi; hortaz, A_y sekzioaren neurria zero izango da ia y guztietarako.

Adibidea. Izan bedi $A \subset \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, eta $y \in \mathbb{R}^n$ bakoitzerako χ_{A_y} funtzioa A_y sekzioaren funtzio karakteristikoa,

$$(\chi_A)_y(x) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A, \\ 0 & (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Betetzen da, orduan, $(\chi_A)_y = \chi_{A_y}$ dela. A Lebesgue-neurgarria bada $\mathbb{R}^n$-n, $x \longrightarrow \chi_A(x,y)$ funtzioa ere neurgarria izango da. Gainera, definizioz

$$m_p(A) = \int\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n} \chi_A(x,y)dm_p(x,y)$$

da. Cavalieriren printzipioa erabiliz, $m_p(A) = \int_{\mathbb{R}^n} m_k(A_y)dm_n(y)$ da, $m_k(A_y) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_A(x,y)dm_k(x)$ izanda. Gai biak batera idatziz,

$$\int\int_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n} \chi_A(x,y)dm_p(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k} \chi_A(x,y)dm_k(x)\right)dm_n(y)$$

dela ondorioztatzen da. Adibide horrek iradokitzen digu integral anizkoitza integral iteratuen bidez kalkula daitekeela, Cavalieriren printzipioa erabiliz.

3.2 Fubiniren teorema

Riemannen integralean egiten den bezala, atal honetan aztertuko dugun teorema, biderkadura-espazioa eta jatorrizko espazioen integralen arteko erlazioa aztertzen da. Nahiz eta emaitza Fubiniren teorema izenarekin ezagutzen dugun, hiru matematikari italiarrek hartu zuten parte teoremaren garapenean 1906. urtean: Levik, Fubinik eta Tonellik, besteak beste. Bepo Levik Lebesgueren integral bikoitza eta integral iteratuak berdinak zirela baieztatu zuen, ezer frogatu gabe. Urtebete beranduago, Guido Fubinik Lebesgue-integragarria den edozein funtziotarako emaitza eman zuen, baina berak egindako frogak akats batzuk zituen. Fubiniren lanean oinarritutako lehen froga zehatza Leonida Tonellik eman zuen 1909. urtean. Frogapen horrek betirako ezarri zuen Lebesgueren integralaren nagusitasuna Riemannen integralaren aurrean.

Beppo Levi (Turin, 1875 - Rosario, 1961) Argentinako nazionalitatea zuen matematikari italiarra izan zen. Maila handiko lanak argitaratu zituen, ez bakarrik Matematikan, baita Fisikan, Historian, Filosofian eta Pedagogian ere. Turineko Unibertsitatean ikasi zuen, eta 21 urterekin doktore-titulua lortu zuen. Italiako hainbat unibertsitatetan irakatsi zuen, Piazenzan, Cagliarin, Parman edo Bolonian, besteak beste, Giuseppe Peanorekin eta Vito Volterrarekin lan eginez. 1938. urtean, Benito Mussolini Italiako agintari zela, unibertsitatetik bota zuten judutarra izateagatik, eta Argentinara joan zen. Han egongo zen hil arte.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e1/Beppolevi.jpg/220px-Beppolevi.jpg

Guido Fubini (Venezia, 1879 - New York, 1943) matematikari italiarra izan zen, Fubiniren teoremagatik, eta Fubini-Studyren metrikagatik ezaguna. Oso gaztetatik hasi zen matematika ikasten, bere aitak animatuta. 1896an, Scuola Normale Superiore di Pisan sartu zen ikasketekin jarraitzeko. Bertan, garai hartako matematikari ospetsuen irakaskuntza jaso zuen; esaterako, Ulisse Dini eta Luigi Bianchi bere tesi-zuzendariak izan ziren. 1900. urtean defendatu zuen bere doktoretza-tesia. Geometria arlokoa izan arren, gero Analisi Matematikoan jarraitu zuen lan egiten. Ondorengo urteetan, Italiako hainbat unibertsitatetan aritu zen irakasle, Sizilian, Genovan edo Turinen, besteak beste. Lehen Mundu Gerraren ostean, gai praktikoagoetan lan egin zuen, hala nola artilleriaren punterian. Bepo Leviri gertatu zitzaion bezala, juduarra izateagatik jasaten ari zen arazoengatik, 1939. urtean Princetoneko Unibertsitatera joan zen familiarekin. New Yorken hil zen lau urte beranduago.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/21/
Guido_Fubini.jpg/220px-Guido_Fubini.jpg

Leonida Tonelli (Gallipoli, 1885 - Pisa, 1946). Levirena eta Fubinirena ez bezala, Tonelliren ibilbide matematiko osoa Italian garatu zen. 1902an Pisara joan zen matematika ikastera, eta bertan aurkeztu zuen Arzeláren zuzendaritzapean egindako doktoretza-tesia, 1908. urtean. Lehen Mundu Gerran parte hartu zuen, eta handik itzuli zenean hasi zen bere garairik emankorrena. Tonellik lan asko argitaratu zituen, 176 inguru, ikerkuntza-lanak, didaktika eta dibulgazioa tartekatuz. Nazien okupazio-garaian unibertsitateko funts bibliografikoak ez galtzea lortu zuen.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/93/
Leonida_Tonelli.jpg/220px-Leonida_Tonelli.jpg

3.2.1 teorema. *(Levi-Fubini-Tonelliren teorema) Izan bitez* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *eta* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *espazio neurridunak,* μ *eta* ν *neurri* σ*-finituak izanda.*

i) Leviren teorema (1906). $f : X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ *funtzio neurgarria bada, orduan,*

$$\phi : X \to [0, \infty],\ \phi(x) = \int_Y f(x, y)d\nu(y)$$

eta

$$\psi : Y \to [0, \infty],\ \psi(y) = \int_X f(x, y)d\mu(x)$$

funtzio neurgarriak eta ez-negatiboak dira. Bestalde, honako berdintza hauek betetzen dira:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x, y)d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y) \leq \infty.\end{aligned}$$

ii) Fubiniren teorema (1907). $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzio integragarria bada, orduan,* $x \in X$*-rako ia nonahi definitutako* $f_x(y) = f(x, y)$ *(*x *finkoa eta* y*-ren funtzioa) funtzioa integragarria da* ν*-rekiko. Era berean,* $y \in Y$*-rako ia nonahi definitutako* $f_y(x) = f(x, y)$ *(*y *finkoa eta* x*-ren funtzioa) funtzioa integragarria da* μ*-rekiko. Ia nonahi definituriko*

$$\phi : X \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_Y f(x, y)d\nu(y)$$

eta

$$\psi : Y \to \mathbb{R},\ \psi(y) = \int_X f(x, y)d\mu(x)$$

funtzioak integragarriak dira, eta honako berdintza hauek egiaztatzen dira:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x, y)d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y) < \infty.\end{aligned}$$

iii) Tonelliren teorema (1909). Demagun $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzio neurgarrirako*

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)|d\nu(y)\right) d\mu(x) \ \textit{edo}\ \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

integral iteraturen bat finitua dela. Orduan, f *integragarria da, eta honako berdintza hauek betetzen dira:*

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x) &= \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y)\\ &= \int_{X\times Y} f(x, y)d(\mu \otimes \nu) < \infty.\end{aligned}$$

Froga. i) Leviren teorema. f funtzio karakteristikoa bada, teoremaren lehen atala Cavalieriren printzipioa da; beraz, kasu horretarako frogatuta dago. Funtzio sinpleetarako, linealtasuna erabiliz, emaitza lortzen da baita ere. Edozein f funtzio neurgarri eta ez-negatibotarako, badakigu existizten dela funtzio sinpleen segida ez-beherakorra f-ra puntuz puntuko konbergentea, $\{a_k(x,y)\}_{k\in\mathbb{N}}$, hain zuzen ere. Izan bedi, k bakoitzerako,

$$\phi_k(x) = \int_Y a_k(x,y)d\nu(y)$$

funtzio neurgarria. Funtzio sinpleetarako emaitza betetzen denez,

$$\int_{X\times Y} a_k d(\mu\otimes\nu) = \int_X \phi_k d\mu(x)$$

da. Konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz ϕ_k segidari, $\lim\limits_{k\to\infty} \phi_k(x) = \phi(x)$ da, ϕ neurgarria izanda, eta

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) &= \lim_{k\to\infty}\int_{X\times Y} a_k d(\mu\otimes\nu)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_X \phi_k d\mu(x) = \int_X \phi d\mu(x)\\
&= \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x)
\end{aligned}$$

dela ondorioztatzen da, emaitza lortuz. Era berean, prozedura bera errepika daiteke ψ funtziorako, beste berdintza frogatzeko.

ii) Fubiniren teorema. f integragarria bada, Leviren teorema aplika diezaiokegu f^+ funtzio positiboari. Hortaz,

$$\int_Y\left(\int_X f^+ d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) < \infty$$

da; beraz, $\displaystyle\int_X f^+ d\mu(x) < \infty$ da baita ere, ia $x\in X$; hots, $(f^+)_y$ integragarria da. Prozedura bera jarraituz f^- funtzioarekin, $(f)_y^-$ funtzio integragarria dela lortuko genuke. $f_y = (f^+)_y - (f^-)_y$ denez, f_y integragarria da ia $y\in Y$ guztietarako. Gainera,

$$\int_Y f_y d\nu(y) = \int_Y (f^+)_y d\nu(y) - \int_Y (f^-)_y d\nu(y) \in \mathbb{R};$$

beraz, ϕ funtzio integragarria da. Lehen atalean egindako modu berean, prozedura errepika daiteke ψ funtziorako.

iii) Tonelliren teorema. f neurgarria denez, nahikoa da $|f|$ integragarria dela frogatzea. $|f|$ funtzio positiboa da; beraz, Leviren teorema aplika dakioke, integral iteratuak eta integral anizkoitza berdinak direla bermatuz. Gainera, finituak dira teoremaren baldintzen arabera. Hori horrlea, $|f|$-ren integral anizkoitza finitua da, eta, orduan, f integragarria da. Froga amaitzeko, Fubiniren teoremari esker, integral guztiak (iteratuak eta anizkoitza) berdinak direla ondorioztatzen da, beti, existitzen diren kasurako. ■

Adibidea. Azter dezagun $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}(1-\arctan x)}{(1+x^2)(1+xy^2)}$ funtzioaren integragarritasuna $x,\ y > 0$ eremuan. Horretarako, $|f|$-ren integrala finitua dela ikusi behar da.

Lehenik eta behin, f jarraitua da; hortaz, neurgarria da. Bestalde, $|f|$ positiboa denez, teoremaren lehen atala (hau da, Leviren teorema) aplika dezakegu. Hortaz, $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty |f(x,y)|dy\ dx$ integral iteratua aztertuko dugu.

Alde batetik, honako bornaketa hau dugu:

$$|f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x}(1+\frac{\pi}{2})}{(1+x^2)(1+xy^2)},$$

eta y-rekiko integratuz

$$\int_0^\infty |f(x,y)|dy \leq \left(1+\frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{1+x^2} \arctan(\sqrt{xy})\bigg]_0^\infty$$

da. Bornaketa integralaren barne ordezkatuz,

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty |f(x,y)|dy \leq \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \infty$$

izango da; beraz, f integragarria da aztertutako eremuan.

Adibidea. Izan bedi $[-1,1]\times[-1,1]$ karratuan definitutako honako funtzio neurgarri hau:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1], (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Azter ezazu integral bikoitza eta integral iteratuak existitzen diren ala ez.

f ez da funtzio positiboa; beraz, ezin dugu Leviren teorema erabili. Azter dezagun balio absolutuaren integral iteratuak finituak diren ala ez, Tonelliren teorema (teoremaren hirugarren atala) aplikatu ahal izateko: $|f|$ jarraitua denez i.n., Riemann-integragarria da; hau da,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}dydx = 2\int_{-1}^{1}|x|\left(\int_{0}^{1}\frac{y}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx$$
$$= \int_{-1}^{1}|x|\left(-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx = 2\int_{0}^{1}\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}dx = \infty.$$

Simetriagatik, beste integral iteratua ere infinitua izango da; beraz, f ez da Lebesgue-integragarria eremu horretan. Kalkulatu nahi badugu f-ren integrala, x_0 bat finkatuz,

$$\int_{-1}^{1}\frac{x_0y}{(x_0^2+y^2)^2}dy = 0$$

da, funtzio bakoitia tarte simetrikoan delako; beraz,

$$x \longrightarrow \int_{-1}^{1} f(x,y)dy$$

funtzioa zero da i.n., eta, orduan, bere integrala ere bai (gauza bera gertatuako da beste integral iteratuan x-ren eta y-ren ordena aldatuz gero). Ondorioz, f-ren integral iteratu biak existitzen dira (zero dira), nahiz eta funtzioa integragarria ez izan.

Adibidea. Froga ezazu $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ dela.

Badakigu $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funtzioa ez dela Lebesgue-integragarria $(0,\infty)$ tartean. Oraingoan, ordea, integral inpropioa finitua dela ikusiko dugu (hau da, Riemann-integragarria), eta, horretarako, Fubiniren teorema erabiliko dugu.

Lehenik eta behin, bi aldagaietako funtzio bat eraiki behar da; hortaz, $x \geq 0$ denerako, idatz dezagun

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}dt$$

eran. $h(t) = e^{-xt}, t \in (0,\infty)$ funtzio positiboa da, Riemannen integral inpropioa konbergentea duena; beraz, Lebesgue-integragarria. Integral inpropioaren definizioa eta aurreko berdintza erabiliz,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \sin x\left(\int_0^\infty e^{-xt}dt\right)dx$$

idatz dezakegu; hortaz, izan bedi $g(x,t) = \sin xe^{-xt}$ funtzioa $(x,t) \in [0,n] \times [0,\infty)$. g funtzioa Lebesgue-integragarria bada, Fubiniren teorema aplikatu ahal izango dugu. Ikus dezagun horrela dela:

$$\int_{[0,n]\times[0,\infty)} |\sin xe^{-xt}|dm_2 = \int_0^n |\sin x|\left(\int_0^\infty e^{-xt}dt\right)dx$$

$$= \int_0^n \frac{|\sin x|}{x} dx \le \int_0^1 \frac{|\sin x|}{x} dx + \int_1^n \frac{|\sin x|}{x} dx \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx < \infty.$$

Fubiniren teoremagatik, g-ren integral anizkoitza eta iteratuak berdinak dira; hau da,

$$\int_0^n \sin x \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^n \sin x e^{-xt} dx \right) dt.$$

Ezker-aldeko integral iteratuaren balioa $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx$ da. Bestalde, eskuin-aldeko barruko integralean zatikako integrazioa bi bider aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$\int_0^n \sin x e^{-xt} dx = 1 - \cos n e^{-nt} - t e^{-nt} \sin n - t^2 \int_0^n e^{-xt} \sin x dx;$$

beraz,

$$\int_0^n \sin x e^{-xt} dx = \frac{1}{1+t^2} (1 - \cos n e^{-nt} - t e^{-nt} \sin n).$$

Integral iteratuan ordezkatuz,

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1 - \cos n e^{-nt} - t e^{-nt} \sin n}{1+t^2} dt \tag{3.4}$$

berdintza dugu. Ezkerraldeko adierazpenaren limitea kalkulatu nahi dugun integrala da. Eskuinaldean, aldiz, izan bedi

$$f_n(t) = \frac{1 - \cos n e^{-nt} - t e^{-nt} \sin n}{1+t^2}$$

funtzio-segida. Konbergentzia menderatuaren teorema erabil daiteke

$$|f_n(t)| = \frac{|1 - \cos n e^{-nt} - t e^{-nt} \sin n|}{1+t^2} \le \frac{3}{1+t^2} \in L^1(0, \infty)$$

baita; hots, limitea integralaren barrura sartuz,

$$\int_0^\infty \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \cos n e^{-nt} - t e^{-nt} \sin n}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

dugu. (3.4)-ren limitearen alde biak berdinduz, emaitza frogatzen da.

3.3 Aldagaiaren aldaketa. Koordenatu polarrak

Riemannen integralaren kasuan egiten den bezala, logikoa dirudi planteatzea aldagai-aldaketa egitea Lebesgueren integralaren kasuan. Hori horrela, lehen gaian ikusitako 1.3.8 proposizioaren arabera, badakigu A multzoa neurgarria bada, $\phi(A)$ ere neurgarria dela, $\phi : U \to V$ C^1 motatako funtzioa izanda eta $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Hori jakinda, bi auzi sortzen dira. Lehena, zein den $m(\phi(A))$ eta $m(A)$ neurrien arteko erlazioa; bigarrena, f integragarria izanda bere definizio eremuan, aldagai-aldaketaren ondoren sortutako funtzio berria integragarria izango ote den ala ez, integrazio eremu berrian. Aldagai-aldaketaren teoremak emango dizkigu bi galdera horien erantzunak.

3.3.1 proposizioa. *Izan bedi $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismo bat. $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-neurgarria bada, $\phi(A)$ ere Lebesgue-neurgarria da, eta*

$$m(\phi(A)) = |det\ \phi| m(A)$$

da.

Badakigu, 1.3.8 proposizioari esker, $m(\phi(A)) = cm(A)$ dela, $c = m(\phi([0,1]^n))$ izanda. Hortaz, nahikoa da ikustea $c = |\det \phi|$ dela.

3.3.2 proposizioa. *Izan bedi $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, C^1 motako aplikazioa U multzo irekian, $n \leq p$ izanda. $A \subset U$ zero neurriko multzoa bada $\mathbb{R}^n$-n, $\phi(A)$ zero neurriko multzoa da $\mathbb{R}^p$-n.*

Oro har, izan bedi $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$ C^1 motatako difeomorfismoa, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ izanda. Hori horrela, $d\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio lineala da, $n \times n$ ordenako honako matrize honen bidez adierazten dena:

$$d\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

3.3.3 proposizioa. *Izan bedi $\phi : U \longrightarrow V$, C^1 motatako difeomorfismo, U eta V azpimultzo irekiak izanda. Orduan, $A \subset U$ multzoa Lebesgue-neurgarria da, baldin eta soilik baldin $\phi(A) \subset V$ Lebesgue-neurgarria bada. Gainera, $\phi(A)$-ren neurria honako formula honen bidez kalkulatzen da:*

$$m(\phi(A)) = \int_A |det(d\phi(x))| dx.$$

3.3.4 teorema. *(Aldagai-aldaketaren teorema) Izan bitez* $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $\phi : U \to V$ C^1 *motako difeomorfismoa, eta* $f : V \to \mathbb{R}$ *funtzio neurgarria. Orduan,* $(f \circ \phi)|det\, d\phi|$ *Lebesgue-neurgarria da, eta*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\phi(x))\ |det(d\phi(x))|dx,$$

da, bietariko gai bat ondo definituta badago.

Teorema horrek f-ren integragarritasuna ondorioztatzeko ere balio du, zeren eta berdintza betez gero, f integragarria izango da V-n, baldin eta soilik baldin $(f \circ \phi)|\det(d\phi(x))|$ integragarria bada U-n.

Froga. Demagun $f = \chi_{\phi(U)}$ funtzio karakteristikoa dela. Orduan, aldagai-aldaketaren teorema 3.3.3 proposizioa baino ez da. Era berean, f funtzio sinplea eta ez-negatiboa bada, integralaren linealtasunagatik emaitza ere betetzen da.

Demagun f funtzio neurgarri ez-negatiboa dela. Bigarren gaian frogatutako 2.1.8 teoremagatik existitzen da s_n funtzio sinpleen segida bat, f-ra puntuz puntuko konbergentea dena V multzoan. Hori horrela, $(s_n \circ \phi)$ puntuz puntuko konbergentea da $(f \circ \phi)$-ra U eremuan. Gainera, s_n funtzio sinpleetarako

$$\int_V s_n(y)dy = \int_U s_n(\phi(x))\ |\det(d\phi(x))|dx$$

berdintza dugu; beraz, limiteak hartuz alde bietan eta konbergentzia monotonaren teorema aplikatuz, f-ri dagokion berdintza lortuko dugu. Amaitzeko, edozein f funtzioren kasuan, nahikoa da $f = f^+ - f^-$ eran idaztea eta funtzio ez-negatiboetarako frogatutako emaitza aplikatzea f^+ eta f^- funtzioei. ■

Adibidea. Koordenatu polarrak $\mathbb{R}^n$-n.

Izan bedi $||x|| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ norma euklidearra $\mathbb{R}^n$-n. Edozein $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ puntutarako, har ditzagun jatorrian zentratutako eta bat erradiodun bolan dauden $\bar{x}$ bektoreak:

$$\bar{x} = \frac{x}{||x||} \in S^{n-1},\ S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1\}.$$

Esaterako, $n = 1$ bada, $S^0 = \{1, -1\}$ puntuak dira; $n = 2$ bada, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ zirkunferentzia da; $n = 3$ denean, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ esferaren gainazala da.

Izan bedi honako aplikazio hau:

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow (0, \infty) \times S^{n-1}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (r, u),$$

$r = ||x||$, $u = \frac{x}{||x||}$ eta $x = ru$ izanda. Modu horretan definitutako (r, u) aldagaiei koordenatu polarrak deritze. Aplikazio hori bijekzio bat da: $\mathbb{R}^n$-ko x puntu bakoitza $(r, u) \in (0, \infty) \times S^{n-1}$ bidekadura espazioko bikote bakar bati lotuta dago. Biderkadura-espazio horretan, $(0, \infty)$ tartean Lebesgueren neurria $\mathbb{R}$-n hartzen da kontuan. Bestalde, S^{n-1} esferaren parametrizazioa hartuz, σ neurri bat sortzen da esferaren gainazal-integrala kalkulatzeko. Hori horrela, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ bakoitzerako

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int_0^\infty r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} f(ru)d\sigma(u) \right) dr \\ &= \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty r^{n-1} f(ru)dr \right) d\sigma(u). \end{aligned}$$

Kasu berezi bezala, demagun f funtzioa erradiala dela; hau da, $f(x) = f_0(||x||)$ $= f_0(r)$. Koordenatu polarretan idazterakoan, f-ren u-rekiko menpekotasuna desagertu egiten da, eta soilik r-ren menpeko funtzio bilakatzen da. Funtzioa koordenatu polarretan idatziz, $f(ru) = f_0(r)$ aldagai bakarreko funtzioa da. Integralaren adierazpenean ordezkatuz,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int_0^\infty r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} f_0(r)d\sigma(u) \right) dr \\ &= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} f_0(r)dr \end{aligned}$$

da, $\sigma(S^{n-1})$ konstantea, esferaren gainazalaren balioa izanda.

Adibidea. Gaussen integralaren kalkulua: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$

Badakigu Barrowen erregela erabiliz integral hori ezin dela kalkulatu, ez delako jatorrizko funtziorik existitzen; beraz, koordenatu polarrak erabiliko ditugu integralaren balioa lortzeko.

Izan bedi $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ funtzio neurgarri positiboa, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alde batetik, Fubiniren teoremagatik (Leviren teorema)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)d(x, y) &= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

da. Bestalde, koordenatu polarrak erabiliz,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} re^{-r^2} dr \right) d\theta = \pi(-e^{-r^2})_0^{\infty} = \pi$$

dugu; hortaz, ekuazioak berdinduz,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

dela lortzen dugu. e^{-x^2} funtzio bikoitia denez, $(-\infty, \infty)$ tarteko integrala $(0, \infty)$ tartekoaren bikoitza izango da; hots,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

da. Oro har, n aldagaien kasuan, honako hau dugu: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2} dx = \pi^{n/2}$.

3.4 Ariketak

3.4.1. *Izan bedi* $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzioa, non*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], y \in [0,1], \\ 0, & \textit{beste kasuetan.} \end{cases}$$

den. Froga ezazu Lebesgue-neurgarria dela, eta kalkulatu $\displaystyle\int\int_{[0,1]\times[0,1]} f dm_2$.

3.4.2. *Izan bitez* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espazio neurridunean definituriko* f *funtzio integragarria eta* $g(t) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})$. *Froga ezazu honako berdintza hau:*

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{\infty} pt^{p-1} g(t)dt, \forall\ p \geq 1.$$

3.4.3. *Izan bitez* f *eta* g *funtzio integragarriak* $\mathbb{R}$*-n.*

i) Frogatu $h(x,y) = f(x)g(y)$ *funtzioa integragarria dela* $\mathbb{R}^2$*-n, eta eman* h*-ren integralaren adierazpena.*

ii) Izan bedi f*-ren eta* g*-ren konboluzioa:* $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$. *Frogatu* $f * g$ *integragarria dela* $\mathbb{R}$*-n, eta eman* $f * g$*-ren integralaren adierazpena.*

3.4.4. *Azter ezazu $S = [0,1] \times [0,1]$ multzoan definitutako honako f funtzio honen integragarritasuna:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 - 1 + \ln(1+xy), & (x,y) \in S \cap \mathbb{Q}^2, \\ x + y^2 + xye^{(x^2+y^2)}, & (x,y) \notin S \cap \mathbb{Q}^2. \end{cases}$$

3.4.5. *Kalkulatu* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} y \frac{\sin x}{x^2} dxdy$. *Marraztu integrazio-eremua, eta aztertu ea* $\displaystyle y\frac{\sin x}{x^2}$ *integragarria den eremu horretan.*

3.4.6. *Azter ezazu $(0,1) \times (0,1)$ eremuan definituriko honako funtzio hauen integragarritasuna:*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x,y) = \frac{|x-y|}{(x^2+y^2)^3}, \quad h(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{y}}, \quad t(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x+y}}.$$

3.4.7. *Izan bedi honako f funtzio hau:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^3} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Frogatu integral iteratuak berdinak direla. Integragarria al da f funtzioa?

3.4.8. *Izan bedi $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| < e^{-x}, x > 0\}$. Frogatu A neurgarria dela, eta azter ezazu $f(x,y) = e^{ax}$ funtzioaren integragarritasuna bertan, a parametroaren balioaren arabera.*

3.4.9. *Izan bitez $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow [1,2]$ funtzio jarraitua eta bikoitia, eta honako f funtzio hau:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\phi(x)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Frogatu f-ren integral iteratuak existitzen direla, eta kalkula itzazu. Ondorioztatu f funtzioa integragarria den ala ez $\mathbb{R}^2$-n, erantzuna arrazoituz.

3.4.10. *Froga ezazu $f : (x,y) \longrightarrow e^{-y} \sin 2xy$ funtzioa Lebesgue-integragarria dela $[0,1] \times [0,\infty)$-n. Horren ondorioz, kalkulatu honako integrala honen balioa:*

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy.$$

3.4.11. *Izan bedi $(0,\infty) \times (0,\infty)$ karratuan definitutako $f(x,y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$ funtzioa. Aztertu f-ren integragarritasuna eremu horretan, eta ondorioztatu*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

dela.

3.4.12. *Azter ezazu honako funtzio hauen integragarritasuna:*

i) $f(x,y) = \dfrac{\sin x}{x^{3/2}(1+x^2+y^2)}$, $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ *eremuan.*

ii) $g(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$, $\sqrt{x^2+y^2}\leq 1$ *eremuan.*

iii) $h(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}(x^2+y^2)}$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0<y<x<1\}$ *eremuan.*

iv) $m(x,y) = \dfrac{e^{-2x^2-3y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathbb{R}^2$*-n.*

v) $n(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^3}$, $\mathbb{R}^3$*-n.*

3.4.13. *Izan bedi honako f funtzio hau:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & 0<y<|x|<1, \\ 0 & \textit{beste kasuetan.} \end{cases}$$

Aztertu f-ren integragarritasuna, eta kalkulatu integral iteratuak.

3.4.14. *Aztertu α-ren zein baliotarako den integragarria $\mathbb{R}^3$-ko unitate bolan definitutako honako funtzio hau:*

$$f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\sin||x||^2}{||x||^{7-2\alpha}}\right)^2,$$

non $||x|| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ *den.*

3.4.15. *Azter ezazu α-ren zein baliotarako den integragarria $f(x) = ||x||^{-\alpha}$ funtzioa $\mathbb{R}^n$-ko bat erradiodun bolaren barrualdean eta kanpoaldean.*

4. gaia

Hilberten espazioen oinarrizko teoria

Matematikan, Hilberten espazioaren kontzeptua espazio euklidearraren orokortzearena da. Orokortze horrek edozein dimentsiotako espazioetara hedatzen ditu bi dimentsioko eta hiru dimentsioko espazio euklidearretan aplikatutako aljebra linealaren metodoak eta kalkuluak, dimentsio infinituko espazioetara barne. Kontzeptu horien adibide dira, esaterako, bektoreen arteko ortogonalitatea, Pitagorasen teorema edo bektoreen arteko distantzia, besteak beste. Espazio horiei emandako izena David Hilbert matematikari alemaniarraren omenekoa da, hark erabili baitzituen espazio horiek lehen aldiz ekuazio integralak aztertzeko.

David Hilbert (Alemania, 1862-1943)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hilbert.jpg

David Hilbert Könisberg-en jaio zen 1862an, eta Göttingenen hil zen 1943. urtean. Hainbat ideia berri sortuz eta garatuz irabazi zuen bere izena, hala nola inbarianteen teoria, Hilberten axioma edo Hilberten espazioaren nozioa;

azken hori analisi funtzionalaren oinarrietako bat izango zen. Hilbertek eta bere ikasleek mekanika kuantikorako eta erlatibitate orokorrerako beharrezko azpiegitura matematikoaren tresna esanguratsuak eman zituzten. Frogaren teoriaren eta logika matematikoaren sortzaileetako bat ere izan zen. Bestalde, biziki hartu eta defendatu zuen Cantorren multzoen teoria. Orotara, Hilberten lana bost arlo desberdinetan sailka daiteke: Aldaezinen teoria, Zenbakien teoria, Geometriaren oinarriak, Ekuazio integralak eta Fisika.

Matematikan izan zuen lidergoaren adibide ospetsu bat 1900.an gertatu zen Parisen, Matematikarien Nazioarteko Bigarren Bileran (II ICM, Second International Congress of Mathematicians). Bertan, hogeita hiru problema planteatu zituen; jarraituaren hipotesia, Riemannen aierua edo Goldbachen aierua, besteak beste. Problema horien ebazpenak XX. mendean zehar egindako ikerkuntza matematikoa markatu zuen, neurri batean. Horietariko bakoitzaren ebazpena gertaera garrantzitsua zen matematikarien artean, eta esan beharra dago planteatutako problema batzuk ebatzi gabe daudela oraindik gaur egun.

XX. mendearen hasieran ohikoa zen alemaniar gazteak unibertsitate batetik bestera ibiltzea; baina Hilbertek Göttingeneko Unibertsitatean eman zuen bizitza osoa. Bertan, Minkowskiren ikaskide izan zen, eta lagun handiak egin ziren biak. Bien artean lortu zuten XX. mendeko lehenengo hamarkadan unibertsitate hura arrakastatsua izatea lortu zuten. 1909. urtean Minkowski hil egin zen, eta Hilbertek elkarrekin egindako lanarekin jarraitu zuen. XX. mendearen lehenengo hogeita hamar urteetan, Göttingeneko Matematika Institutuan mundu osoko ikasleak eta irakasleak bildu ziren Hilberten ospea zela eta. Bere bizitzako azken urteetan nahiko bakarrik gelditu zen, bere lagun gehienek atzerrira joan behar izan zutelako, naziak gobernura heldu zirenean. Hilbertek, oztopo guztien gainetik, Alemanian gelditzea erabaki zuen, ez erregimenaren aldekoa zelako, baizik eta bertatik lan egin behar zuela uste zuelako.

4.1 Hilberten espazioak: adibideak eta propietateak

Intuitiboki, Hilberten espazioak dimentsio finitudun espazio euklidiarren orokortzea izango dira eta angeluaren eta ortogonaltasunaren kontzeptuak agertuko dira.

Definizioa. Izan bitez H K-ren gainean definitutako bektore-espazioa ($K = \mathbb{R}$ edo $\mathbb{C}$ izanda), eta

$$< \, , \, >: H \times H \longrightarrow K$$

aplikazio bilineala. $< \, , \, >$ biderkadura eskalarra dela esango dugu, honako propietate hauek betetzen badira:

i) $< x, x > \geq 0$, eta $< x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (positiboki definitua).

ii) $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$, $\forall\ x, y, \in H$, $\lambda \in K$.

iii) $< x, y >= \overline{< y, x >}$, $\forall\ x, y \in H$ (hermitikoa).

iv) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$, $\forall\ x, y, z \in H$.

Biderkadura eskalarra definituta duen H espazioari *aurrehilbert* esaten zaio. Espazio erreala bada; hau da, $K = \mathbb{R}$, hirugarren propietatea simetria da.

4.1.1 proposizioa. *(Cauchy-Schwarz-en desberdintza). Edozein* $x, y \in H$ *elementutarako*

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >< y, y >}$$

desberdintza betetzen da.

Froga. $x = 0$ edo $y = 0$ badira,

$$< x, 0 >= \overline{< 0, x >} = \overline{< y - y, x >} = \overline{< y, x > - < y, x >} = 0;$$

beraz,

$$0 \leq \sqrt{< x, x >< y, y >}.$$

Demagun orain $x, y \neq 0$ direla. $\forall\ t \in K, 0 \leq< x - ty, x - ty >$ denez, gara dezagun biderkadura hori:

$$\begin{aligned} 0 \leq< x - ty, x - ty > &=< x, x > + < x, -ty > + < -ty, x > + < -ty, -ty > \\ &=< x, x > +2 \text{ Re } (-t) < y, x > +t^2 < y, y > . \end{aligned}$$

Orduan, $t = \dfrac{< x, y >}{< y, y >} \in \mathbb{R}$ balioa aukeratuz,

$$0 \leq< x, x > -2\frac{< x, y >}{< y, y >} < x, y > + \frac{< x, y >^2}{< y, y >}$$

desberdintza betetzen da. Azkenik, $< y, y >$ gaiarekin biderkatuz, emaitza dugu. ∎

4.1.2 proposizioa. *Izan bedi* $(H, < \ , \ >)$ *espazioa. Orduan,*

$$|| \cdot || : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow ||x|| = \sqrt{< x, x >}$$

aplikazioa norma bat da, eta $(H, || \ ||)$ *espazio normaduna da.*

Froga. Norma bat dela egiaztatzeko, hiru propietate frogatu behar ditugu. Lehenik, $||x|| = \sqrt{< x, x >} \geq 0$ da beti. Gainera, $||x|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{< x, x >} = 0 \Leftrightarrow < x, x >= 0$, eta biderkadura eskalarra denez, $x = 0$ da.

Bigarren propietaterako,

$$||\lambda x|| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{\lambda}\sqrt{< x, \lambda x >} =$$

$$\sqrt{\lambda}\sqrt{< \lambda x, x >} = \sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda}\sqrt{< x, x >} = |\lambda|||x||$$

dugu; hortaz, betetzen da.

Amaitzeko, egiazta dezagun desberdintza triangeluarra. Normaren definizioagatik eta biderkadura eskalarren propietateengatik

$$||x + y||^2 =< x + y, x + y >=< x, y > + < x, x > + < y, x > + < y, y >$$

$$= ||x||^2 + 2 < x, y > +||y||^2$$

dugu. Cauchy-Schwarzen desberdintza erabiliz, formula horren bigarren batugaian, adierazpen osoa

$$||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

gaiarekin borna daiteke. Alde bietan erroak hartuz, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ desberdintza lortzen dugu. ■

Era berean, froga daiteke $||\cdot|| : H \longrightarrow \mathbb{C}$ aplikazioa norma konplexua dela, $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ definituz.

Oharra. Normaren idazkera erabiliz, Cauchy-Schwarzen desberdintza honela adieraz daiteke:

$$\forall\ x, y \in H, \quad | < x, y > | \leq ||x||\ ||y||.$$

Gainera, berdintza gertatzen da baldin eta soilik baldin x eta y bektore linealki independenteak badira. Argi dago $y = 0$-rako berdintza gertatzen dela; beraz, demagun $y \neq 0$ dela, eta izan bedi $x = \lambda y$. Orduan,

$$| < x, y > | = | < \lambda y, y > | = |\lambda| < y, y >= ||\lambda y||||y|| = ||x||||y||.$$

Aldiz, demagun $||y|| = 1$ dela (bestela $y/||y||$ bektorea hartuko genuke). Nahikoa izango da frogatzea $| < x, y > | = ||x||$ bada, orduan, x eta y linealki dependenteak direla. Baina,

$$||x- < x, y > y||^2 = ||x||^2 - | < x, y > |^2$$

denez, orduan,

$$||x|| = | < x, y > | \Longleftrightarrow ||x- < x, y > y|| = 0 \Longleftrightarrow x- < x, y > y = 0;$$

hots, x eta y linealki dependenteak dira.

4.1.3 proposizioa. *(Polarizazio identitateak) Izan bedi H aurrehilbert espazio bat. Edozein $x, y \in H$ bektoretarako honako berdintza hauek betetzen dira:*

i) $K = \mathbb{R}$ *bada,* $4 < x, y >= ||x + y||^2 - ||x - y||^2$.

ii) $K = \mathbb{C}$ *bada,* $4 < x, y >= ||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i(||x + iy||^2 - ||x - iy||^2)$.

Froga. *i)* Biderkadura eskalar erreala denez, $< y, x >=< x, y >$ izango da. Hori horrela,

$$||x + y||^2 - ||x - y||^2 =< x + y, x + y > + < x - y, x - y >$$

berdintza garatuz, emaitza ateratzen da.

ii) Kasu honetan, biderkadura eskalar konplexua dugu. Alde batetik,

$$||x + y||^2 - ||x - y||^2 =< x + y, x + y > - < x - y, x - y >= 4 \text{ Re} < x, y >$$

berdintza dugu. Bestalde, $||x + iy||^2 - ||x - iy||^2$ kenketa garatuz

$$||x + iy||^2 - ||x - iy||^2 = 4i \text{ Im} < x, y >$$

berdintza lortzen da, biok batuz, emaitza ateratzen da. ■

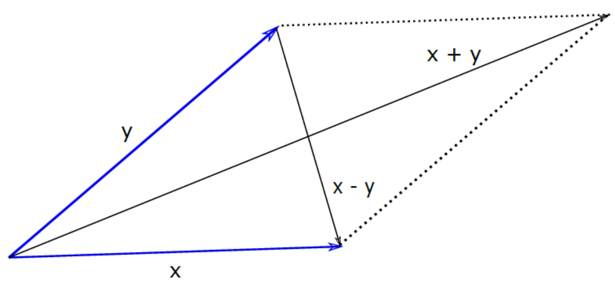
Edozein biderkadura eskalarrek norma bat definitzen du. Aldiz, paralelogramoaren legeak, polarizazio identitateen bidez, norma batetik biderkadura eskalarra definitzeko bidea ematen du.

4.1.4 teorema. *(Jordan-Von Neumann-en teorema. Paralelogramoaren legea)*

Izan bedi $(H, || \, ||)$ espazio normaduna. Norma horrek biderkadura eskalarra definituko du, baldin eta soilik baldin honako berdintza hau betetzen badu:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right), \forall\, x, y \in H.$$

Teoreman aipatzen den berdintza *Paralelogramoaren legea* izenarekin ezagutzen da, kasu errealen normek paralelogramo baten aldeen eta diagonalen luzerak adierazten baitituzte, honako irdui honetan ikus daitekeenez.



4.1 irudia. Paralelogramoaren legea.

Froga. Alde batetik, $||\ ||$ norma biderkadura eskalar baten bidez emanda badago, definizioz $||x||^2 =< x, x >$ da; beraz, polarizazio-identitateetan ordezkatuz, paralelogramoaren legea lortzen da.

Bestalde, defini dezagun $< \ , \ >: H \times H \longrightarrow K$ aplikazio bilineala honako era honetan:

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$$

$K = \mathbb{R}$ denean, eta

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2)\right)$$

$K = \mathbb{C}$ denean, hurrenez hurren. Berehalakoa da egiaztatzea definitutako aplikazioek biderkadura eskalarra izateko baldintzak betetzen dituztela. ■

Adibideak.

i) $\mathbb{R}^n$-n eta $\mathbb{C}^n$-n ohiko biderkadura eskalarrak ditugu:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ x, y \in \mathbb{R}^n \quad \text{edo} \quad < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \ x, y \in \mathbb{C}^n,$$

eta dagokion eratorritako honako norma hau:

$$||x|| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

ii) Izan bedi $l^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ segiden bektore-espazioa.

Bertan,

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

aplikazio bilineala definitzen da. Berehalakoa da aplikazio hori biderkadura eskalarra dela frogatzea, dagokion norma honako hau izanda:

$$||x||_{l^2} = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$$

iii) Izan bitez $L^2(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R}, \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$ bektore-espazioa eta

$$< f, g >= \int_X f g d\mu$$

aplikazioa. Aplikazio hori biderkadura eskalar bat da, eta, ondorioz,

$$||f||_2 = \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu}$$

norma bat da.

iv) Izan bedi, $C([0,1])$ espazioan, $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ norma, eta izan bitez $f(t) = 1$ eta $h(t) = t$ funtzioak. Erraz ikus daiteke $||f||_\infty = 1$, $||h||_\infty = 1$, $||f+h||_\infty = 2$ eta $||f-h||_\infty = 1$ direla; hortaz, paralelogramoaren identitatea idazten badugu,

$$||f+h||_\infty^2 + ||f-h||_\infty^2 = 5 \neq 4 = 2||f||_\infty + 2||h||_\infty$$

desberdintza dugu; hau da, norma ez dago definituta biderkadura baten bidez.

Definizioak. Izan bedi H aurrehilbert espazioko $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida.

i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida H espazioan f-ra konbergentea dela diogu, ($f_n \xrightarrow{H} f$)

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_H = 0 \text{ bada.}$$

ii) $\{f_n\}$ Cauchyren segida da H espazioan, $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall\ m, n \geq n_0$

$$||f_m - f_n||_H < \epsilon.$$

Definizioa. Izan bitez $(H, <\ ,\ >)$ espazioa eta $(H, ||\ ||)$ biderkadura horrek definitzen duen espazio normaduna. H espazioa osoa bada norma horrekiko, H Hilberten espazioa dela esango dugu.

Gogora dezagun espazio bat osoa dela bertan definituta dagoen normarekiko, edozein Cauchyren segida konbergentea bada.

4.1.5 proposizioa. *Hilberten espazio baten edozein azpimultzo itxi osoa da.*

Froga. Izan bitez $A \subset H$ azpimultzo itxia eta $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ cauchyren segida. H Hilberten espazioa denez, edozein segida cauchyar konbergentea da; hortaz, $\exists\ x \in H$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Bestalde, A itxia denez, segidaren limitea bertan egongo da; beraz, $x \in A$. ■

Argi dago $\mathbb{R}^n$ eta $\mathbb{C}^n$ ohiko biderkadura eskalarrekin Hilberten espazioak direla. Orain helburua da beste Hilberten espazio batzuk arakatzea; esaterako, L^2 eta l^2 espazioak Hilbertenak diren ala ez.

4.1.6 teorema. *$L^2(X,m)$ Hilberten espazioa da; hau da, $L^2(X,m)$ espazioko edozein segida cauchyar konbergentea da bertako $||\cdot||_2$ normarekiko.*

Froga. Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^2$ segida cauchyarra. Segida hori konbergentea dela frogatzeko; hau da, $f_n \overset{L^2}{\to} f$, hiru pausotan egingo dugu: lehenik eta behin, $f \in L^2$ funtzioa eraiki behar da; bigarrenik, ikusiko dugu existitzen dela f_n-ren azpisegida bat f-ra konbergentea dena L^2 espazioan; eta, azkenik, frogatuko da segida konbergentea dela eraikitako f-ra.

• $\{f_n\}$ segida cauchyarra denez, $\epsilon = 2^{-k}$-rako, $\exists\ \{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^2$, emandako segidaren azpisegida, zeinetarako $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_2 \leq 2^{-k}$ den, $\forall\ k \geq 1$. Izan bitez

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right) \tag{4.1}$$

eta

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|,$$

eta dagozkien batura partzialak

$$S_K(f)(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right),$$

$$S_K(g)(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{K} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|.$$

Argi dago $|f(x)| \leq g(x)$ eta $S_K(f)(x) \leq S_K(g)(x)$ direla. Bestalde, $S_K(g)$ segida ez-negatiboa eta ez-beherakorra da. Ikus dezagun $g \in \mathrm{L}^2$ dela, eta, ondorioz, baita f ere. Horretarako, $S_K(g)$-ren definizioan desberdintza triangeluarra aplikatuz, honako hau dugu:

$$||S_K(g)||_2 \leq ||f_{n_1}||_2 + \sum_{k=1}^{K} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_2 \leq ||f_{n_1}||_2 + \sum_{k=1}^{K} 2^{-k},$$

seriea konbergentea izanda. Hortaz, K infinitua eginez eta $S_K(g)^2$ segidarako konbergentzia monotonoaren teorema aplikatuz,

$$\lim_{K\to\infty} \int_X S_K(g)^2 dm = \int_X \lim_{K\to\infty} S_K(g)^2 dm = \int_X g^2 dm < \infty$$

dugu; beraz, (4.1)-en definitutako f funtzioa L^2-n dago. Gainera, f funtzioaren eraketagatik, $f_{n_k}(x) \to f(x)$ ia nonahi.

• Azpisegidak f-ra konbergitzen duela frogatzeko, kontuan har dezagun $|f - S_K(f)|^2 \leq (2g)^2$ dela, edozein K-tarako. Hori horrela, konbergentzia menderatuaren teorema aplika dakioke $h_K = |f - S_K(f)|^2$ segidari, honako hau lortzeko:

$$\lim_{K\to\infty} \int_X h_K dm = \lim_{K\to\infty} \int_X |f - S_K(f)|^2 dm = \int_X \lim_{K\to\infty} |f - S_K(f)|^2 dm = 0.$$

Beraz, f_{n_k} azpisegidak f-ra konbergitzen du L^2 espazioan.

• Azkenik, badakigu edozein ϵ-tarako existitzen dela N, zeinetarako $\forall n, m \geq N$, $||f_n - f_m||_2 < \epsilon/2$ den. Aukera dezagun $n_k > N$. Orduan, desberdintza triangeluarragatik,

$$||f_n - f||_2 \leq ||f_n - f_{n_k}||_2 + ||f_{n_k} - f||_2$$

da. Lehen batugaia $\epsilon/2$ baino txikiagoa da segida caychyarra izateagatik, eta bigarren batugaia $\epsilon/2$ baino txikiagoa da azpisegidak f-ra konbergitzen duelako; beraz, segida guztia konbergentea da. ■

4.1.7 teorema. *$L^2(X, m)$ espazio banangarria da; hau da, existitzen da $L^2(X, m)$ elementuen segida bat, zeinetarako beren elementuen konbinazio linealak dentsoak diren.*

Froga. Izan bitez $f \in L^2$ eta $\epsilon > 0$. Defini dezagun, $n \geq 1$ bakoitzerako honako g_n funtzio hau:

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq n \text{ eta } |f(x)| \leq n, \\ 0, & \text{besteetan.} \end{cases}.$$

Definizioz, argi dago g_n-ren limite puntuala f dela ia nonahi. Bestalde,

$$|f - g_n|^2 \leq 4|f|^2$$

bornaketa dugu; beraz, konbergentzia menderatuaren teorema aplikatuz $h_n = |f - g_n|^2$ segidari, $||f - g_n||_2 \to 0$ dela ondorioztatzen da, n infinitura doanean; hori horrela, existitzen da N zeinetarako $||f - g_N||_2 < \epsilon/2$ den.

Izenda dezagun $g = g_N$. Definiziogatik, g funtzioa bornatua da, eta haren definizio-eremua ere bornatua da; ondorioz, $g \in L^1$. 2.1.8 teoremari esker, existituko da funtzio sinpleen segida bat g-ra konbergitzen duena, edo, baliokidea dena, existitzen da ϕ funtzio sinplea, zeinetarako

$$||g - \phi||_1 < \epsilon/4N$$

den. Gainera, $||g-\phi||_2 = \int_X |g-\phi|^2 dm \leq 2N \int_X |g-\phi| dm \leq \epsilon/2$ da. Amaitzeko, desberdintza triangeluarra aplikatuz, honako hau dugu:

$$||f-\phi||_2 \leq ||f-g||_2 + ||g-\phi||_2 = ||f-g_N||_2 + ||g-\phi||_2 \leq \epsilon,$$

emaitza frogatuz. ■

Oharra. Teorema bera $l^2 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ segiden bektore-espaziorako froga daiteke; hau da, l^2 Hilberten espazioa ere bada.

Aldiz, $(C([0,1]), ||\cdot||_2)$ espazio normatua ez da osoa. Hori frogatzeko, nahikoa da aurkitzea konbergentea ez den segida cauchyar bat. Esaterako, izan bedi

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ nx - \frac{n}{2} + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Segida hori Cauchyren segida da $||\cdot||_2$ normarako, baina ez da konbergentea espazio horretan. Aldiz, $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ espazioa bada osoa.

4.2 Ortogonaltasuna eta proiekzioak

Hilberten espazioak definitu ondoren, gai honen helburuetariko bat da espazio horien azterketa egitea. H bektore-espazioaren dimentsioa finitua denean, badakigu bertan definitutako normak baliokideak direla; beraz, sortzen den Hilberten espazioa $\mathbb{R}^n$-rekiko isometrikoa izango da, kasu errealerako, edo $\mathbb{C}^n$-rekiko, aldagai konplexuen kasuan. Hortaz, H-ren dimentsioa infinitua denean, eraiki daiteke $\mathbb{R}^n$-n dagoen oinarri ortonormalen antzeko egitura bat? Hala balitz, nola egingo litzateke? Hori horrela, hasteko, ezinbestekoa da definitzea H espazioan ortogonalitatea eta oinarri ortonormalak.

Definizioak. Izan bedi H Hilberten espazioa eta $x, y \in H$.

- x eta y ortogonalak direla diogu beren arteko biderkadura eskalarra zero bada; hau da,
$$x \perp y \iff < x, y >= 0.$$
- x-ren azpiespazio ortogonala, $x^\perp$, honako multzo hau da:
$$x^\perp = \{y \in H, < x, y >= 0\}.$$

- $A \subset H$ azpimultzorako x elementua A-rekiko ortogonala dela diogu, multzo horretan dauden puntu guztiekiko ortogonala denean; hots,

$$x \perp A \Longleftrightarrow x \perp y, \forall\, y \in A.$$

- A multzoaren multzo ortogonala, $A^{\perp}$, honako multzo hau da:

$$A^{\perp} = \{y \in H,\ y \perp x\ \forall\, x \in A\} = \bigcap_{x \in A} x^{\perp}.$$

4.2.1 proposizioa. *Edozein $x \in H$ elementutarako, $x^{\perp}$ multzoa itxia da.*

Froga. Izan bedi x finkorako $f : H \to \mathbb{R}$ funtzioa, non $f(y) = < x, y >$ den. Funtzio hori jarraitua da, zeren eta

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_2)| &= |< x, y_1 > - < x, y_2 >| \\ &= |< x, y_1 - y_2 >| \leq ||x|| ||y_1 - y_2|| \end{aligned}$$

denez, $\delta = \epsilon / ||x||$ hartuz, egiaztatzen da

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta = \frac{\epsilon}{||x||},\ ||y_1 - y_2|| < \delta \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon$$

dela. Beste aldetik,

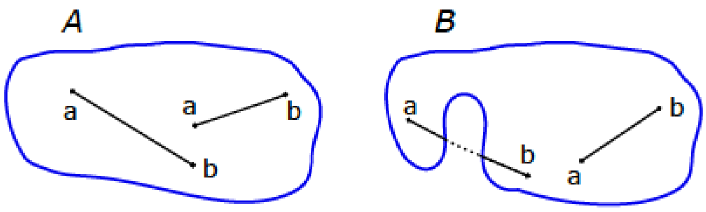
$$x^{\perp} = \{y \in H, < x, y >= 0\} = \{y \in H, f(y) = 0\} = f^{-1}(0)$$

da. f jarraitua denez, edozein multzo itxiren aurreirudia ere itxia izango da; beraz, $x^{\perp}$ multzo itxia da. Azkenik, $A^{\perp}$ multzo itxien ebakidura infinitua denez, itxia izango da. ■

Definizioa. A multzo konbexua dela esango dugu multzoko edozein bi puntu hartuz, beren arteko zuzenkia multzoaren barruan mantentzen bada; hau da,

$$\forall\, a, b \in A, \{(1 - t)a + tb, 0 \leq t \leq 1\} \subset A.$$

Grafikoki, honako hau dugu:



4.2 irudia. A multzo konbexua eta B multzo ez-konbexua.

4.2.2 teorema. *(Bektore minimizatzailearen teorema). Biz $M \subset H$ azpimultzo konbexu, itxi eta ez-hutsa, eta $x_0 \in H$. Orduan,*

$$\exists\ y_0 \in M \text{ bakarra, zeinetarako } dist(x_0, M) = \min_{y \in M} ||x_0 - y|| = ||x_0 - y_0||$$

den; hots, M multzoan existitzen da x_0-rekiko distantzia minimoko elementu bakarra.

Froga. Definizioz distantzia infimo bat da; beraz, dei diezaiogun α zenbaki horri; hots,

$$\alpha = \mathrm{dist}(x_0, M) = \inf_{y \in M} ||x_0 - y|| \geq 0.$$

$\alpha = 0$ bada, $y = x_0$ hartuz emaitza frogatuta dago; beraz, demagun $\alpha > 0$ dela. α infimoa denez, existitzen da balio horretara konbergitzen duen segida bat, $(y_n - x_0)_{n \in \mathbb{N}}$, non $||y_n - x_0|| \overset{n \to \infty}{\to} \alpha$ den.

Ikus dezagun (y_n) segida cauchyarra dela. Alde batetik, M multzo konbexua denez, $\dfrac{y_n}{2} + \dfrac{y_m}{2} \in M$; beraz,

$$\left|\left|\frac{y_n}{2} + \frac{y_m}{2} - x_0\right|\right|^2 \geq \alpha^2$$

α infimoa baita. Bestalde, $x_0 - y_n$ eta $x_0 - y_m$ gaiei paralelogramoaren identitatea aplikatuz gero, honako adierazpen hau dugu:

$$||y_n - y_m||^2 = 2||x_0 - y_n||^2 + 2||x_0 - y_m||^2 - 4||x_0 - \frac{1}{2}(y_n + y_m)||^2,$$

eta aurreko desberdintzan ordezkatuz,

$$||y_n - y_m||^2 \leq 2\left(||y_n - x_0||^2 + ||y_m - x_0||^2\right) - 4\alpha^2$$

da. n infinitura doanean aurreko gaia zerora doa; hau da, segida cauchyarra da.

H Hilberten espazioa izateagatik, espazio osoa da; beraz, (y_n) segida konbergentea da. Izan bedi y_0 segidaren limitea. M multzo itxia denez, edozein segida konbergenteren limitea ere multzoan dago; beraz, $y_0 \in M$.

Ikus dezagun orain $||x_0 - y_0|| = \alpha$ dela. Alde batetik, $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - x_0) = y_0 - x_0$ da. Norma funtzioa jarraitua denez, $\lim\limits_{n \to \infty} ||y_n - x_0|| = ||y_0 - x_0||$ izango da. Bestalde, suposatzen ari gara $(y_n - x_0)$ segidaren limitea α dela; beraz, berdinak izan behar dute.

Frogarekin amaitzeko, y_0 bakarra dela ikustea falta da. Demagun existitzen direla y_0 eta y_1, $||x_0 - y_0|| = \alpha = ||x_0 - y_1||$ izanda, eta har dezagun $\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2} \in M$. Paralelogramoaren identitatea erabiliz, $y_0 - x$ eta $y_1 - x$ bektoreetarako

$$\frac{1}{4}||(y_0 - x) + (x - y_1)||^2 + \frac{1}{4}||(y_0 - x) - (y_1 - x)||^2 = \frac{1}{2}||y_0 - x||^2 + \frac{1}{2}||y_1 - x||^2$$

berdintza dugu. Hortaz,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}||(y_0 - x) - (y_1 - x))||^2 = \frac{1}{4}||(y_0 - y_1)||^2\\
=&\frac{1}{2}\left(||y_0 - x||^2 + ||y_1 - x||^2\right) - \frac{1}{4}||(y_0 - x) + (y_1 - x)||^2\\
=&\frac{1}{2}\left(||y_0 - x||^2 + ||y_1 - x||^2\right) - \left|\left|\frac{(y_0 - x)}{2} + \frac{(y_1 - x)}{2}\right|\right|^2\\
\leq&\frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^2) - \alpha^2 = 0
\end{aligned}$$

da; hots, $||y_0 - y_1||^2 = 0 \Rightarrow y_0 = y_1$. ∎

Oharra. 4.2.2 teoreman, ezinbestekoak dira M multzorako eskatzen diren baldintzak; hau da, M konbexua eta itxia izatea. Horietariko baldintzaren bat kentzen bada, teorema ez da betetzen. Adibidez, izan bedi $H = l^2$ dimentsio infinitudun Hilberten espazioa eta $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ elementuak,

$$(e_n) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n.\ tokia}, 0, \ldots)$$

izanda. Izan bedi $M = \{(x_n) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{n.\ tokia}, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$ azpimultzoa.

Ikus dezagun ez dela minimorik existitzen; hau da, infimoa ez dela multzoko elementuetan lortzen. Definizioz,

$$\text{dist }(0, M)^2 = \text{ inf }_{n\in\mathbb{N}}||x_n - 0||^2$$

da. $||x_n||^2 =< x_n, x_n >= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ da, horien infimoa 1 izanda, baina ez da existitzen M multzoan elementurik zeinetarako bere norma bat den; beraz, infimoa inoiz ez da minimoa.

Teorema ez da betetzen M ez delako multzo konbexua. M konbexua balitz, $\frac{x_n}{2} + \frac{x_m}{2} \in M$; hortaz, existituko litzateke $k \in \mathbb{N}$ zeinetarako

$$\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m = (0, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}}_{m.\ tokia}, 0, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}_{n.\ tokia}, 0, \ldots) =$$

$$(0, \ldots, 0, \underbrace{1 + \frac{1}{k}}_{k.\ tokia}, 0, \ldots)$$

modukoa izan beharko litzatekeen.

4.2.3 teorema. *(Proiekzioaren teorema) Izan bedi $M \subset H$ Hilberten espazio baten azpimultzo itxia eta konbexua. Orduan, existitzen da P_M eta $P_{M^\perp}$ aplikazio linealen bikote bakarra*

$$P_M : H \longrightarrow M \quad eta \quad P_{M^\perp} : H \longrightarrow M^\perp,$$

zeinetarako honako baieztapen hauek betetzen diren:

i) $\forall\, x \in H, x = y + z,\ y = P_M(x)$ *eta* $z = P_{M^\perp}(x)$ *izanda.*

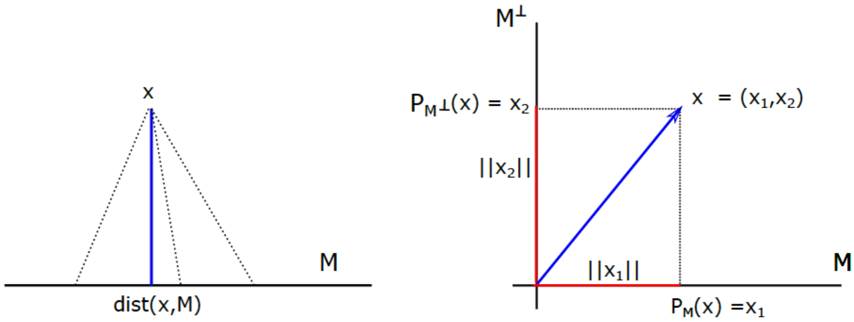
ii) $||x||^2 = ||y||^2 + ||z||^2$.

iii) $dist\ (x, M) = ||z||$.

iv) $x \in M$ *bada,* $P_M(x) = x$ *eta* $P_{M^\perp}(x) = 0$ *dira.*

$x \in M^\perp$ *bada,* $P_M(x) = 0$ *eta* $P_{M^\perp}(x) = x$ *dira.*

Grafikoki, teorema horren emaitzak honela laburbil daitezke:



4.3 irudia. Proiekzioaren teorema.

Froga. Edozein $x \in H$ elementutarako $x + M = \{x + y, y \in M\}$ multzo itxia eta konbexua da, M halakoa baita. Bektore minimizatzailearen teoremagatik, existitzen da norma minimoko elementu bat $x + M$ multzoan. Dei diezaiogun $P_{M^\perp}(x) \in x + M$ elementu horri, eta defini dezagun $P_M(x) = x - P_{M^\perp}(x)$. Orduan, $y = P_M(x)$ eta $z = P_{M^\perp}(x)$ izendatuz, lehen baieztapena betetzen da.

Bestalde, $z = P_{M^\perp}(x) \in x + M$ dagoenez, $P_M(x) = x - P_{M^\perp}(x) \in M$ izango da; beraz, defini daiteke $P_M : H \longrightarrow M$ aplikazioa, zeinetarako $P_M(x) = x - P_{M^\perp}(x)$ den.

P_M aplikazioa ondo definituta egongo da $< y, z >= 0$ bada, M-ko edozein y elementutarako. Orokortasuna galdu gabe, demagun $||y|| = 1$ dela. z norma minimoko elementua denez, edozein α eskalarretarako

$$< z, z >= ||z||^2 \leq ||z - \alpha y||^2 =< z - \alpha y, z - \alpha y >$$

da. Biderkadura garatuz eta gai guztiak alde batera pasatuz,

$$0 \leq -\alpha < y, z > -\overline{\alpha} < z, y > +|\alpha|^2$$

desberdintza lortzen dugu. $\alpha =< z, y >$ hartuz $0 \leq -| < z, y > |^2$ desberdintza lortzen denez, $< z, y >= 0$ izan beharko da.

Behin P_M aplikazioa finkatuz, defini dezagun $P_{M^\perp} : H \longrightarrow M^\perp$ bigarren aplikazioa, $P_{M^\perp}(x) = x - P_M(x)$ izanda.

Ikus dezagun aplikazio bi horiek sortutako bikotea bakarra dela. Demagun $x = x_0 + x_1$ dela, $x_0 \in M$ eta $x_1 \in M^\perp$ izanda. Orduan,

$$\left.\begin{cases} x = x_0 + x_1 \\ x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x) \end{cases}\right\} \Longrightarrow \underbrace{x_0 - P_M(x)}_{\in M} = \underbrace{P_{M^\perp}(x) - x_1}_{\in M^\perp}.$$

$M \cap M^\perp = \{0\}$ denez, $x_0 = P_M(x)$ da eta $P_{M^\perp}(x) = x_1$ izan beharko dira; beraz, bakarrak dira.

Ikus dezagun orain aplikazioak linealak direla. Izan bitez x_1, x_2 elementuak eta α, β eskalarrak. Elementu bakoitzerako

$$x_1 = P_M(x_1) + P_{M^\perp}(x_1), \quad x_2 = P_M(x_2) + P_{M^\perp}(x_2)$$

deskonposaketak ditugu. Bestalde, $\alpha x_1 + \beta x_2$ elementuari dagokion deskonposaketa

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = P_M(\alpha x_1 + \beta x_2) + P_{M^\perp}(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

izango da, eta x_1-en eta x_2-ren deskonposaketak erabiliz

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \left(P_M(x_1) + P_{M^\perp}(x_1)\right) + \beta \left(P_M(x_2) + P_{M^\perp}(x_2)\right)$$

berdintza dugu.

Adierazpen biak garatuz eta berdinduz, honako hau dugu:

$$P_M(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha P_M(x_1) - \beta P_M(x_2) \in M$$

$$||$$

$$\alpha P_{M^\perp}(x_1) + \beta P_{M^\perp}(x_2) - P_{M^\perp}(\alpha x_1 + \beta x_2) \in M^\perp.$$

Berriro $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ izateagatik, berdintzaren alde bakoitzeko gaia zero da; hau da,

$$P_M(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P_M(x_1) + \beta P_M(x_2)$$

eta

$$P_{M^{\perp}}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P_{M^{\perp}}(x_1) + \beta P_{M^{\perp}}(x_2)$$

izango dira; hots, aplikazioen linealtasuna betetzen da.

Bigarren baieztapena frogatzeko, $< y, z >= 0$ dela kontuan izanda

$$||x||^2 =< x, x >=< y + z, y + z >$$

garatuz emaitza lortzen da.

Azkenik, laugarren baieztapenerako, $x \in M$ bada

$$x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x) \Rightarrow \underbrace{P_{M^{\perp}}(x)}_{\in M^{\perp}} = \underbrace{x - P_M(x)}_{\in M};$$

beraz, $P_{M^{\perp}}(x) = 0$ izango da, eta $x = P_M(x)$. Era berean, $x \in M^{\perp}$ bada

$$x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x) \Rightarrow \underbrace{P_M(x)}_{\in M} = \underbrace{x - P_{M^{\perp}}(x)}_{\in M^{\perp}};$$

beraz, $x = P_{M^{\perp}}(x)$ eta $P_M(x) = 0$ dira. ■

Badago proiekzioaren teorematik ondorioztatzen den minimorako emaitzaren baliokidea den beste enuntziatu bat, maximoaren menpe ematen dena, hain zuzen ere.

4.2.4 korolarioa. *Izan bitez $x_0 \in H$ eta $M \subset H$ azpimultzo itxia eta konbexua. Orduan, honako berdintza hau betetzen da:*

$$\min\{||x - x_0||, x \in M\} = \max\{< x_0, y >, y \in M^{\perp}, ||y|| = 1\}.$$

Froga. Proiekzioaren teoremari esker $\{||x - x_0||, x \in M\}$ balioen minimoa x_0-ren proiekziorako lortuko da $x = P_M(x_0)$ denean; hortaz, $x - x_0 = P_M(x_0) - x_0 = P_M^{\perp}(x_0)$ da, eta, ondorioz,

$$\min\{||x - x_0||, x \in M\} = ||P_M^{\perp}(x_0)||.$$

Ikus dezagun $\{< x_0, y >, y \in M^{\perp}, ||y|| = 1\}$ balioen maximoa ere $||P_M^{\perp}(x_0)||$-rako lortzen dela.

Izan bedi $y \in M^{\perp}, ||y|| = 1$ izanda. Elementuaren deskonposaketa, biderkadura eskalarraren propietateak eta Cauchy-Schwarzen desberdintza erabiliz, honako hau dugu:

$$\begin{aligned} < x_0, y > &= < P_M(x_0) + P_M^{\perp}(x_0), y > = < P_M(x_0), y > + < P_M^{\perp}(x_0), y > \\ &= < P_M^{\perp}(x_0), y > \leq \ ||P_M^{\perp}(x_0)|| \cdot ||y|| \\ &= \ ||P_M^{\perp}(x_0)||; \end{aligned}$$

hortaz, $\max\{< x_0, y >, y \in M^{\perp}, ||y|| = 1\} \leq ||P_M^{\perp}(x_0)||$ da.

Izan bedi $y = \dfrac{P_M^{\perp}(x_0)}{||P_M^{\perp}(x_0)||} \in M^{\perp}$. Balio horretarako $< x_0, y >$ biderkadura kalkulatuz, frogatu nahi den emaitza dugu,

$$\begin{aligned} < x_0, y > &= < P_M(x_0) + P_M^{\perp}(x_0), \frac{P_M^{\perp}(x_0)}{||P_M^{\perp}(x_0)||} > \\ &= < P_M^{\perp}(x_0), \frac{P_M^{\perp}(x_0)}{||P_M^{\perp}(x_0)||} > = \ ||P_M^{\perp}(x_0)|| \end{aligned}$$

baita. ■

4.2.5 korolarioa. *Izan bedi $M \subset H$ azpimultzo itxia eta konbexua. Honako baieztapen hauek betetzen dira:*

i) $H = M \oplus M^{\perp}$.

ii) $M^{\perp\perp} = M$.

Froga. i) Proiekzioaren teoremari esker $H = M + M^{\perp}$ deskonposaketa dugu. Gainera, $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ da; hortaz, $H = M \oplus M^{\perp}$.

ii) Edozein $x \in M$ eta $y \in M^{\perp}$ bektoretarako $< x, y >= 0$ da. Era berean, $< y, x >= 0$ izango da; hau da, $x \in M^{\perp\perp}$.

Alderantzizkoa frogatzeko, izan bedi $x \in M^{\perp\perp}$ eta dagokion deskonposaketa $x = P_M(x) + (x - P_M(x))$. Alde batetik,

$$< x, x - P_M(x) >= 0$$

da, $x \in M^{\perp\perp}$ eta $x - P_M(x) \in M^{\perp}$ baitaude. Bestalde,

$$< P_M(x), x - P_M(x) >= 0$$

baita ere, $P_M(x) \in M$ eta $x - P_M(x) \in M^{\perp}$ daudelako; beraz, kenketa eginez $< x - P_M(x), x - P_M(x) >= 0$ izango da; hau da, $x - P_M(x) = 0 \Longrightarrow x = P_M(x)$ da, eta, ondorioz, $x \in M$. ■

4.3 Sistema eta oinarri ortonormalak

Definizioa. Izan bedi $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \in H$. A sistema ortonormala dela diogu, elementuak binaka ortogonalak badira beren artean, bakoitzaren norma bat izanda; hots, $< x_i, x_j >= 0, \ \forall\ i \neq j,$ eta $||x_i|| = 1, \forall\ i \in \mathbb{N}$.

Adibideak.

i) Oinarri kanonikoa $\mathbb{R}^n$-ren sistema ortonormala da:

$$\{e_1, \ldots, e_n\}, \ e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i.\ tokia}, \ldots, 0).$$

ii) l^2 espazioan $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}, \ e_n = (0, \ldots, \underbrace{1}_{n.\ tokia}, \ldots, 0, \ldots)$ sistema ortonormala da.

iii) $L^2([-\pi, \pi])$ espazioan $\left\{\dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ sistema ortonormala da.

4.3.1 proposizioa. *Izan bedi $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \in H$ familia.*

i) Pitagorasen teorema: $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ortonormala bada eta $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, orduan, $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ da.

ii) Bessel-en desberdintza: edozein $x \in H$ elementutarako

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, x_n > |^2 \leq ||x||^2$$

desberdintza betetzen da.

Froga. i) Emaitza frogatzeko, nahikoa da x-ren adierazpena idaztea eta garatzea; hau da,

$$||x||^2 =< x, x >=< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j >=$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} < x_i, x_j >= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

ii) Izan bedi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $\alpha_k =< x, x_k >$ izanda $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Orduan, $x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ elementuaren norma garatuz,

$$\begin{aligned} 0 &\leq < x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k > \\ &= ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < x_k, x > - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} < x, x_k > + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k} \\ &= ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \alpha_k - \sum_{k=1}^{n} | < x, x_k > |^2 \end{aligned}$$

adierazpena dugu; hortaz,

$$\sum_{k=1}^{n} | < x, x_k > |^2 \leq ||x||^2.$$

Desberdintza edozein n-tarako denez, limitea eginez emaitza lortzen da. ■

Adibideak. Ezaguna da, edozein $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ bektoreren familia linealki independentea hartuta, Gram-Schmidt-en ortonormalizazio metodo induktiboaren bidez sistema ortonormal bat eraiki daitekeela, honako emaitza honi esker: edozein H aurrehilbert espaziotan, $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ sistema linealki independenterako existitzen da $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ sistema ortonormala, zeinetarako $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ eta $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ sorturiko azpiespazio bektorialak berdinak diren.

Hona hemen adibide batzuk:

i) Izan bitez $x_0(t) = 1,\ x_1(t) = t, \ldots, x_n(t) = t^n, \ldots$ linealki independenteak $L^2([-1, 1])$ espazioan. Gram-Schmidten metodoa erabiliz, $n = 0, 1 \ldots$ balioetarako honako sistema ortonormal hau lortzen da:

$$e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} P_n(t),\ P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} \left((t^2 - 1)^n \right).$$

Horrela eraikitako P_n funtzioei *Legendre-ren polinomioak* esaten zaie.

ii) Izan bitez $e^{-t^2/2}, te^{-t^2/2}, \ldots, t^n e^{-t^2/2}, \ldots$ linealki independenteak $L^2(\mathbb{R})$ espazioan. Gram-Schmidten metodoaren bidez, honako sistema ortonormal hau lortzen da:

$$e_n(t) = 2^n n! \sqrt{\pi} H_n(t) e^{-t^2/2},\ H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2} \right).$$

H_n funtzioei *Hermite-ren polinomioak* esaten zaie, eta $H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$ ekuazioa betetzen dute.

iii) Izan bitez $e^{-t/2}, te^{-t/2}, \ldots, t^n e^{-t/2}, \ldots$ linealki independenteak $L^2((0,\infty))$ espazioan. Gram-Schmidten metodoa erabiliz, $n = 0, 1 \ldots$ balioetarako honako sistema ortonormal hau lortzen da:

$$e_n(t) = \frac{e^{-t/2}}{n!} L_n(t), \; L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right).$$

Horrela eraikitako L_n funtzioei *Laguerre-ren polinomioak* deritze.

Definizioa. Izan bedi H Hilberten espazioa eta $B = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ sistema ortonormala. B sistema ortonormal maximala dela diogu, ez bada existitzen $x \in H$ elementurik, zeinetarako $< x, x_n >= 0$ den n guztietarako; hots,

$$\forall \; x \in H - B, < x, x_n > \neq 0, \forall \; n \in \mathbb{N}.$$

B sistema ortonormal maximalari *oinarri ortonormala edo sistema ortonormal osoa* deritzo.

Adibide gisa, $\mathbb{R}^n$-n $\{e_i, i = 1, \ldots n\}$ bektoreek $e_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i.\ tokia}, ..., 0)$ izanda, oinarri ortonormala osotzen duten bezala, l^2 espazioan $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ oinarri ortonormala dugu $e_n = (0, ..., \underbrace{1}_{n.\ tokia}, ..., 0, \ldots)$ segidetarako.

Edozein familia linealki independentetarako, Gram-Schmidten metodoak familia ortornormala sortzen du. Bestalde, Zörn-en lemak oinarri ortonormal baten existentzia bermatzen du; beraz, azken helburua H-ren oinarriak deskribatzea denez, azter dezagun nola identifika daitezkeen oinarriak Hilberten espazioetan.

Oharra. Zörnen lemak honela dio: izan bedi A multzoan partzialki ordenatua den kate goi-bornatu bat. Orduan, kate horrek elementu maximal bat du.

4.3.2 teorema. *Izan bedi H Hilberten espazioan $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ sistema ortonormala. Honako baieztapen hauek baliokideak dira:*

i) $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ *oinarri ortonormala da.*

ii) $< x, e_n >= 0$ *bada n guztietarako, orduan, $x = 0$ da.*

iii) Edozein $x \in H$ bektoretarako, honako berdintza hau betetzen da:

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2 \text{ (Parseval-en identitatea).}$$

iv) $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ *bektoreen konbinazio linealen multzoa dentsoa da* H *espazioan; hau da, edozein* $x \in H$ *elementutarako*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n \tag{4.2}$$

serieraren garapena dugu eta

$$\lim_{n\to\infty} ||x - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k||_H = 0$$

da.

(4.2) adierazpenari *Fourierren seriearen garapena edo Fourierren seriea* esaten zaio, eta $< x, e_n >$ gaiei *Fourierren koefizienteak.*

Froga. i) $\Leftrightarrow$ *ii)* $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ oinarria bada, sistema maximala da; beraz, edozein elementu berri sartuz gero, ortogonalitatea galtzen da. n guztietarako $< x, e_n >= 0$ bada, derrigorrez $x = 0$ izan beharko da, eta gauza bera alderantzizko norabidean.

ii) $\Rightarrow$ *iv)* Izan bitez $x \in H$ eta $k_1, k_2, \ldots, k_m$ azpiindizeak $< x, e_{k_i} >\neq 0$ izanda. Besselen desberdintzari esker,

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2 \leq ||x||^2$$

da; beraz, seriea konbergentea da, eta bere hondarra zerora joango da. Bestalde, Pitagorasen teorema erabiliz, honako hau dugu:

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} < x, e_{k_i} > e_{k_i}\right\|^2 = \sum_{i=n}^{m} | < x, e_{k_i} > |^2 \overset{m,n\to\infty}{\rightarrow} 0;$$

hau da, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} < x, e_i > e_i$ seriea ere konbergentea da. $y = x - \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} < x, e_i > e_i$ izendatuz, argi dago $< y, e_k >= 0$ dela k guztietarako; beraz, $y = 0$ izango da.

iv) $\Rightarrow$ *iii)* Besselen desberdintza frogatzeko erabilitako garapen berdina eginez,

$$\left\|x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i\right\|^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} | < x, e_i > |^2$$

dugu. Limitea hartuz n infinitura doanean, berdintzaren ezkerreko gaia zerora doa; hortaz,

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | < x, e_i > |^2$$

izango da.

iii)$\Rightarrow$ *ii)* n guztietarako $< x, e_n >= 0$ bada, Parsevalen identitateari esker $||x||^2 = 0$ izango da; hots, $x = 0$. ■

Adibideak. $\mathcal{F} = \left\{ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N} \right\}$ familia oinarri ortonormala da $L^2([-\pi, \pi])$ espazioan. Era berean, Gram-Schmidten metodoaren bidez eraikitako Legendreren polinomioak, Hermiteren polinomioak eta Laguerreren polinomioak oinarri ortonormalak dira familia bakoitzari dagokion Hilberten espazioan, hurrenez hurren.

4.3.3 teorema. *(Riesz-Fischer-en teorema). Izan bitez H dimentsio infinitudun Hilberten espazioa eta $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ haren oinarri ortonormal bat. Existitzen da $\phi : H \longrightarrow l^2$ isometria, zeinetarako*

$$\phi(x) = (< x, e_n >)_{n \in \mathbb{N}} = (< x, e_1 >, < x, e_2 >, \dots, < x, e_n >, \dots)$$

den; hots, $H \approx l^2$.

Froga. Izan bedi $\phi : H \longrightarrow l^2$ funtzioa $\phi(x) = (< x, e_n >)_{n \in \mathbb{N}}$ izanda. Parsevalen identitateari esker, aplikazioa ondo definituta dago,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2 = ||x||^2 < \infty$$

baita. Gainera, aplikazioa lineala da, biderkadura eskalarra lineala delako.

Bestalde, ϕ injektiboa da, zeren eta

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow (< x, e_1 >, \dots, < x, e_n >, \dots) = (0, \dots, 0, \dots)$$

$$\Updownarrow$$

$$x \perp e_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Oinarri ortonormala denez, sistema maximala da; beraz, $x = 0$ da. Aplikazio surjektiboa dela frogatzeko, har dezagun l^2-ko edozein $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ segida, eta defini dezagun

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Besselen desberdintzari esker x ondo definituta dago, eta

$$\phi(x) = (< x, e_n >)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

da; hortaz, surjektiboa da. Azkenik, $||\phi(x)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2 = ||x||^2$ denez, ϕ isometria bat da. ■

Adibidea. Fourierren serieak.

Izan bedi $L^2([-\pi,\pi])$ Hilberten espazioa, ohiko biderkadura eskalarrarekin

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Biz $f \in L^2([-\pi,\pi])$ funtzioa eta $\left\{\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, k \in \mathbb{N}\right\}$ oinarri ortonormala. 4.3.2 teoremaren arabera, a_k, b_k, f-ren Fourierren koefizienteak,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad \text{eta} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

adierazpenaren bidez definitzen dira, eta dagozkien f-ren Fourierren seriea eta batura partziala

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

eta

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dira, hurrenez hurren. Gainera, $\lim_{n\to\infty} ||f - s_n||_2 = 0$ da, eta Parsevalen identitateari esker

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = ||f||_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Kalkula ditzagun, $f(x) = x,\ x \in [-\pi,\pi]$ funtziorako, haren Fourierren seriea eta koefizienteak. Argi dago $f \in L^2[-\pi,\pi]$ dela; beraz, Fourierren koefizienteak honako hauek izango dira: $n = 0$-rako $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$ da, eta, era berean, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx dx = 0$. Bestalde,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

izango da. Orduan, kasu horretarako, ϕ isometria

$$\phi : L^2([-\pi,\pi]) \to l^2(\mathbb{R})$$

$$f(x) \to b_k$$

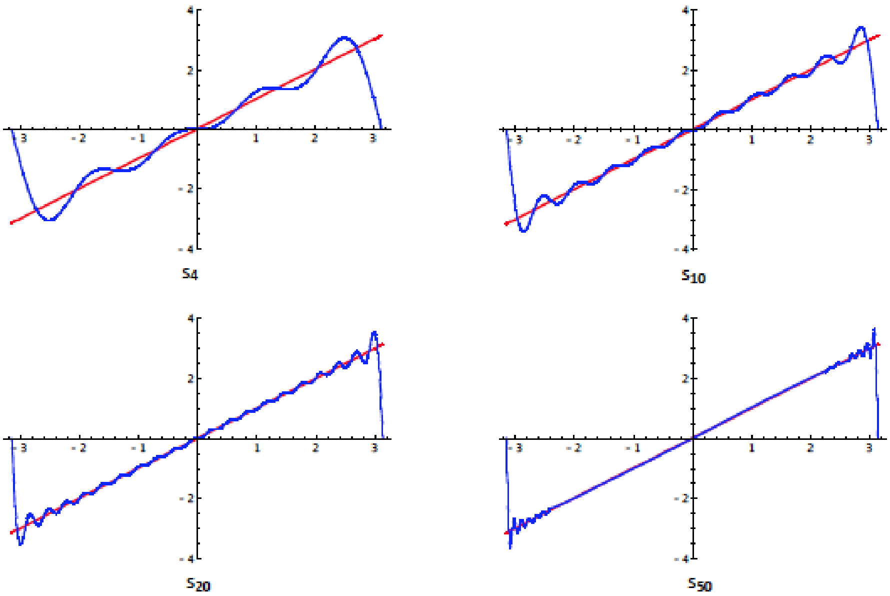
izango da, eta dagokion Fourierren seriea

$$f(x) = x \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \forall\, x \in [-\pi, \pi].$$

Gainera, $L^2[-\pi, \pi]$-ko konbergentzia

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \right|^2 dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

limitearen bidez emanda dator.



4.4 irudia. $f(x) = x$ eta s_4, s_{10}, s_{20} eta s_{50} batura partzialen grafikoak.

4.4 irudian, $f(x) = x$ funtzioaren grafikoa gorriz marraztu da, eta urdinez s_4, s_{10}, s_{20} eta s_{50} batura partzialak, hurrenez hurren. Ikus daitekeenez, zenbat eta n handiagoa izan, orduan eta hobea da hurbilketa. Azkenik, Parsevalen identitatea

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{k+1}}{k} \right)^2$$

eran idazten da, eta berdintza horretatik $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ serie harmonikoaren baturaren balioa ondoriozta daiteke.

4.4 Ariketak

4.4.1. *Froga itzazu honako baieztapen hauek, X aurrehilbert espazio erreala izanda.*

i) $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ *bada, orduan,* $x \perp y$ *da. X espazio konplexua bada, ikusi aurrekoa ez dela egia.*

ii) $x \perp y \Longleftrightarrow ||x+\alpha y|| = ||x-\alpha y||, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

iii) $||z-x||^2 + ||z-y||^2 = \frac{1}{2}||x-y||^2 + 2||z - \frac{x+y}{2}||^2, \forall\ x,y,z \in \mathbb{R}$.

4.4.2. *Izan bitez H Hilberten espazioan* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *familia ortonormal bat eta* $x \in H$. *Froga ezazu*

$$\left|\left| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right|\right|$$

norma minimoa dela $a_i =< x, x_i >, i = 1, \ldots, n$.

4.4.3. *Izan bitez X aurrehilbert espazio errealean* $B(0,1)$ *bola itxian definitutako* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eta* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *segidak. Froga ezazu*

$$\lim_{n\to\infty} < x_n, y_n >= 1 \quad \textit{bada, orduan} \quad \lim_{n\to\infty} ||x_n - y_n|| = 0 \ \textit{dela.}$$

4.4.4. *Izan bitez H Hilberten espazioa, eta* $S, T \subset H$ *azpiespazio ez-hutsak. Froga itzazu honako baieztapen hauek:*

i) $S^{\perp}$ *H-ren azpiespazio bektorial itxia da, eta* $S \subset (S^{\perp})^{\perp}$ *da.*

ii) $S \subset T$ *bada, orduan,* $T^{\perp} \subset S^{\perp}$ *da.*

iii) S H-ren azpiespazio bektorial itxia eta konbexua bada, orduan, $H = S \oplus S^{\perp}$ *da, eta* $S = (S^{\perp})^{\perp}$.

iv) $(S^{\perp})^{\perp}$ *multzoa S bere barne duen H-ren azpiespazio bektorial itxi guztietatik txikiena da.*

4.4.5. *Izan bedi* $\{x_n\}$ *segida H Hilberten espazioan eta demagun baldintzak hauek betetzen direla,*

$$\lim_{n\to\infty} < x_n, y >=< x, y > \ \ \forall\ y \in H, \ \textit{eta} \ \lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||.$$

Frogatu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *dela H espazioan.*

4.4.6. *Existi daitezke* $L^2[0,1]$ *espazioan, f eta g funtzioak, zeinetarako* $||f||^2 + ||g||^2 = ||f+g||^2$ *den,* $< f, g >\neq 0$ *izanda? Arrazoitu erantzuna.*

4.4.7. *Izan bitez,* $f_n(t) = \sqrt{t + \frac{1}{n}}$, $n \geq 1$ *segida, eta* $f(t) = \sqrt{t}$ *funtzioa,* $t \in [0,1]$. *Froga ezazu* $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_2 = 0$ *dela* $L^2([0,1])$ *espazioan.*

4.4.8. *Izan bedi* $M = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n = 0, n \text{ bikoitietarako}\}$. *Frogatu* M l^2*-ko azpiespazio itxia dela, eta kalkulatu* $M^\perp$.

4.4.9. *Izan bedi* M $(1,-1,0,\dots)$ *bektoreak sortutako* l^2*-ko azpiespazio bektoriala. Eman* l^2*-ko elementuen deskonposaketa* M *eta* $M^\perp$ *espazioetako bi elementuen batura bezala.*

4.4.10. *Kalkulatu*

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$$

eta

$$\max \int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx,$$

g funtzioak honako baldintza hauek betetzen baditu:

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0, \text{ eta } \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1.$$

4.4.11. $L^2([0,\pi])$ *espazioan* $h(t) = \chi_{[0,\pi/2]}(t)$ *funtzioa hurbildu nahi dugu* $A\sin t + B\cos t$ *motako funtzioen bidez, errore koadratikoa minimoa izan daiten. Zenbat balioko dute* A *eta* B *eskalarrek?*

4.4.12. *Izan bitez,* $L^2[-\pi,\pi]$ *Hilberten espazioan,* $\left\{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *oinarri ortonormala eta* $f(x) = x^2$ *funtzioa.*

i) Kalkulatu f*-ren Fourierren koefizienteak eta dagokien Fourierren seriea.*

ii) Eman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ *baturaren balioa.*

4.4.13. *Izan bitez* $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ *Legendreren polinomioen oinarri ortonormala eta* $\{L_n, n \in \mathbb{N}\}$ *Laguerrerena. Familia bakoitzerako:*

i) Eman Hilberten espazio bakoitzeko biderkadura eskalarraren definizioa.

ii) Eman Riesz-Fischeren teoremaren ϕ *funtzioa.*

iii) Definitu oinarri horietan edozein f *funtziotarako, Fourierren koefizienteak eta Fourierren seriea.*

4.4.14. *Izan bitez* $H = \mathbb{R}^3$ *espazioan* $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ *biderkadura eskalarra eta* $M = \{x \in R^3, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ *azpiespazioa.*

i) Kalkulatu M*-ren oinarri ortonormala.*

ii) Kalkulatu M*-tik* $(1, 10, 0)$*-ra dagoen distantzia.*

4.4.15. *Izan bedi* $L^2(-\pi, \pi)$ *espazio erreala ohiko biderkadura eskalarrekin; hau da,*

$$< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Izan bedi $M = \{a + b\cos x, a, b \in \mathbb{R}\}$ *azpiespazioa. Eman* $\sin x$ *funtzioaren proiekzioak* M*-n eta* $M^{\perp}$*-n.*

4.4.16. *Izan bedi* $C^1([a, b])$ *espazioan* $< f, g >= \int_a^b (f(x)\bar{g}(x) + f'(x)\bar{g}'(x))dx$ *eragiketa.*

i) Froga ezazu $<, >$ *biderkadura eskalarra dela* $C^1([a, b])$ *espazioan.*

ii) Froga ezazu $\forall f \in C^1([-\pi, \pi])$ *funtzioetarako*

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)\cos x - f'(x)\sin x)\, dx \right| \leq \sqrt{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(|f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

dela.

iii) Froga ezazu $(g_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ *familia* $C^1([-\pi, \pi])$ *espazioko sistema ortonormal bat dela,* $g_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi(n^2+1)}}$ *izanda.*

iv) $W = \{f \in C^1([-\pi, \pi]), f(-\pi) = f(\pi)\}$ *bada, frogatu* $f(x) = \sinh x \perp W$ *dela. Ondorioztatu (iii) ataleko familia ez dela* $C^1([-\pi, \pi])$ *espazioko oinarri ortonormala.*

5. gaia

Banachen espazioak eta L^p espazioak

Laugarren gaian Hilberten espazioak aztertu ondoren, gai honetan Banachen espazioei ekingo diegu. Espazio horiei emandako izena Stefan Banach matematikari poloniarren omenezkoa da, berak garatu baitzuen kontzeptu hori 1920-1922 urteetan zehar. Intuitiboki, esan genezake Banachen espazioek ahalbidetzen dutela edozein bektore-espaziok duen egitura aljebraikoa eta metrika baten bidez defini daitekeen egitura topologikoaren arteko erlazioa. Stefan Banachek gaur egungo analisi funtzionala eraiki zuen. Hori dela eta, XX. mendeko matematikari garrantzitsuenetariko bat izan zen; hain zuzen ere, matematikari poloniarren belaunaldi distiratsu baten buruzagi; bere garaikide izandako matematikari poloniar ospetsuen artean aipa daitezke Sierpinski, Steinhaus, Mazurkiewicz, Nikodym, Kuratowski, Schauder, Zygmund edo Mazur, besteak beste.

Stefan Banach (Polonia, 1892-1945)
(Polish Home Page of Stefan Banach)

Stefan Banach Krakovian jaio zen, 1892. urtean, eta Lviv-en, gaur egungo Ukrainan, zendu zen 1945ean. Bere matematikako hastapenak nahiko era autodidaktikoan gauzatu zituen, bere lagun batekin lantzen baitzituen matematikak. 1910. urtean, derrigorrezgo hezkuntza amaitu ondoren, Lvivera joan zen, baina Lehen Mundu Gerra amaitu ondoren Krakoviara itzuli zen. Bertan, Hugo Steinhaus ezagutu zuen, eta elkarrekin hasi ziren lanean. Steinhaus laster konturatu zen Banachek ebazten zituen problemak zailak zirela eta ahalmen handiko ikaslea zela.

1920. urtean S. Banachek *Sur les opèrations dans les ensembles abstraits et leur application aux èquations intègrales* izenburuko doktoretza-tesia idatzi zuen, eta 1922. urtean *Fundamenta Mathematica* aldizkarian argitaratu zen. Lan horretan Banachen espazioaren kontzeptua definitu zuen, eta espazio horiei buruzko lehen emaitzak lortu zituen. Banachen espazioaren izena erabili zuen lehena Maurice René Fréchet izan zen, eta alderantziz, Banachek, lehen aldiz, Frécheten espazioak izendatu zituen. Geroago, kontzeptu horiek garatu ziren, eta 1932. urtean *Thèorie des operations linèaires* liburua argitaratu zen. Hori horrela, analisian adituak zirenak, metodo berri horren ahalmenaz konturatu ziren, eta Banachek sortutako terminologia eta idazkera guztiz onartu ziren mundu osoan.

Espazio normadun osoak Banachen espazio bihurtu ziren, eta teoria berri hori funtsezko bilakatu zen edozein matematikako ikaslerentzat.

Bigarren Mundu Gerra hasi zenean, Banach Poloniako Matematika Elkarteko lehendakaria zen, eta Lviveko Unibertsitateko irakasle. Ukrainako Errepublika Sozialista Sobietikoko Zientzia Akademiaren lehendakari zen, eta harreman ona zuen Sobietar Batasuneko matematikariekin. Harreman horri esker, bere karguan jarraitu ahal izan zuen sobietarrek hiria hartu zutenean 1939an, eta alemaniarren okupazioa (1941etik 1944ra) Rudolf Weiglen ikerketa-institutuan pasatu zuen. Gerra amaitu zenean, Krakoviara itzultzekoa zen, baina birikako minbizia diagnostikatu zioten; bere azken egunak Lviven pasa zituen, eta hantxe hil zen 53 urterekin 1945ean.

5.1 Espazio normadunak. Banachen espazioak

E bektore-espazioan edozein metrika definitzerakoan, ez dugu egitura aljebraikoen eta egitura geometrikoen arteko erlaziorik. Hori saihesteko metrika berezi bat definitu behar dugu, normaren kontzeptutik datorrena, eta bektore-espazio normaduna egitura aljebrikoa duen bektore-espazioa izango da.

Definizioak.

i) Izan bedi $K(\mathbb{R}$ edo $\mathbb{C})$ gorputzaren gaineko E bektore-espazioa.

$$||\cdot|| : E \longrightarrow [0, \infty]$$

moduan definitutako aplikazioa norma bat dela esango dugu, honako baldintza hauek betetzen badira:

a) $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

b) $\forall\, x \in E,\ \lambda \in K, ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.

c) Desberdintza triangeluarra: $\forall\, x, y \in E, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

ii) E espazioan definituriko bi normak baliokideak dira, definitzen dituzten topologiak berdinak badira ($||\cdot||_1$ eta $||\cdot||_2$ norma baliokideak dira $\exists\, C_1, C_2 > 0$, $C_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C_2||x||_1, \forall\, x \in E$).

Oharra. Lehen baieztapena ez bada betetzen, orduan $|| \cdot ||$ erdinorma dela diogu.

Adibideak.

i) K^n bektore-espazioan normarik ezagunena norma euklidearra da, biderkadura eskalarraren bidez definitzen dena:

$$||x|| = ||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Oro har, $1 \leq p < \infty$ balio bakoitzerako honako aplikazio hau defini daiteke:

$$||x||_p = ||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p},$$

zeinetarako $p = 2$ denean norma euklidearra den. Frogatzen da $1 \leq p < \infty$ balio guztietarako ere norma dela.

ii) K^n espazio berdinean maximoaren norma definitzen da:

$$||x||_\infty = ||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_\infty = \ \max\ \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

Froga daiteke norma hori eta norma euklidearra baliokideak direla.

iii) Izan bedi $C[a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ jarraitua$\}$ bektore-espazioa eta

$$||f||_\infty = \max\{|f(t)|, t \in [a, b]\}$$

aplikazioa. $|| \cdot ||_\infty$ norma bat da.

Edozein normak distantzia bat definitzen du; $d(x, y) = ||x-y||$ distantzia, hain zuzen ere. Hortaz, $(E, ||\cdot||)$ espazio normaduna da, eta (E, d) espazio metrikoa. Bestalde, gogora dezagun espazioa osoa dela Cauchyren segidak konbergenteak badira bertan definitutako normarekiko. Hori horrela, Banachen espazioen definizioa eman dezakegu.

Definizioa. $(E, ||\cdot||)$ espazio normaduna Banachen espazioa dela diogu, E espazio normadun osoa bada.

Aurreko adibidean aipatutako norma guztiak osoak dira; beraz, espazio horiek guztiak Banachen espazioak dira.

5.2 L^p espazioak

Izan bitez $1 \leq p < \infty$, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espazio neurriduna eta $\mathcal{L}^p(\mu)$ funtzio neurgarrien multzoa, zeinetarako $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ den. Multzo hori bektore-espazioa da, eta espazio horretan norma bat definitu nahi da. Logikoa dirudi f-ren norma

$$||\cdot|| : \mathcal{L}^p(\mu) \longrightarrow [0, \infty], \; ||f|| = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

adierazpenaren bidez emateak. Aplikazio hori norma bat izateko, definizioaren lehen baieztapena bete beharko luke; hau da,

$$||f|| = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} = 0 \Longleftrightarrow f = 0,$$

baina $f = 0$ da ia nonahi; hortaz, erdinorma da. Egoera hori ekiditeko, defini dezagun $\mathcal{L}^p$ espazioan baliokidetasun-erlazio bat: $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ baliokideak izango dira, baldin eta berdinak badira ia nonahi. Erlazio horrek baliokidetasun-klaseak sortzen ditu $\mathcal{L}^p$-n. Klase bakoitzaren ordezkari bakarra hartuz, L^p multzoa eraikiko dugu. Horrela definitutako $L^p(\mu)$ multzoa bektore-espazioa da, eta bertan norma bat definituko da (ohartu $p = 2$ kasua laugarren gaian definitutako normari dagokiola; beraz, L^2 espazioa horren kasu berezia da).

5.2.1 proposizioa. *Izan bedi* $1 \leq p < \infty$. *Orduan,* $||\cdot||_p : L^p(\mu) \longrightarrow [0, \infty]$ *aplikazioa norma bat da,*

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

izanda.

Froga. Norma baten definizioaren hiru baieztapenak betetzen badira, $||\cdot||_p$ aplikazioa norma bat izango da. Lehen baieztapenerako

$$||f||_p = 0 \Longleftrightarrow \int_X |f|^p d\mu \Longleftrightarrow f \equiv 0.$$

Era berean, bigarren baldintza betetzen da, zeren eta

$$||\lambda f||_p = \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int_X |\lambda|^p |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| ||f||_p$$

baita. Froga amaitzeko desberdintza triangeluarra egiaztatu behar da, baina aurrerago frogatuko da, horretarako beharrezkoak diren beste propietate batzuk ikusi ondoren. ■

p-ren balio finituetarako $L^p(\mu)$ espazioak definitu ondoren, azter dezagun nola eraikitzen den $p = \infty$-rako dagokion $L^\infty(\mu)$ espazioa.

Definizioa. Izan bitez $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espazio neurriduna eta f funtzio neurgarria. Orduan, $f \in L^\infty(\mu)$ existitzen bada $\alpha \in \mathbb{R}$, zeinetarako

$$\mu\left(\{x \in X, |f(x)| > \alpha\}\right) = 0$$

den.

Funtzio bat L^∞-n egoteak funtzioa bornatua dela ia nonahi esan nahi du, zeren eta puntuen neurria non funtzioa α baino handiagoa den zero baita. Hori horrela, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtziorako

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}, \mu\left(\{x \in X, |f(x)| > \alpha\}\right) = 0\}$$

funtzioa norma bat da, f-ren L^∞ espazioko norma, hain zuzen ere.

5.2.2 proposizioa. *Izan bedi $f : X \to \mathbb{R}$ funtzio neurgarria. Orduan,*

$$|f(x)| \leq \lambda \ i.n. \iff ||f||_\infty \leq \lambda.$$

Ondorioz, $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ i.n. eta $||f||_\infty$ da $|f|$-ren goi-bornerik txikiena i.n.

Froga. Izan bedi $S = \{\alpha \in \mathbb{R}, \mu\left(\{x \in X, |f(x)| > \lambda\}\right) = 0\}$ multzoa. Demagun $|f(x)| \leq \lambda$ dela i.n.; hots, $|f(x)| > \lambda$ da $\forall x \in A$, $\mu(A) = 0$ izanda. Orduan, $|f(x)| > \lambda$ bada $x \in A$ dago, eta

$$|f|^{-1}((\lambda, \infty]) \subset A \Longrightarrow \mu(|f|^{-1}(\lambda, \infty]) \leq \mu(A) = 0 \Longrightarrow \lambda \in S,$$

eta, ondorioz, $||f||_\infty \leq \lambda$ izango da.

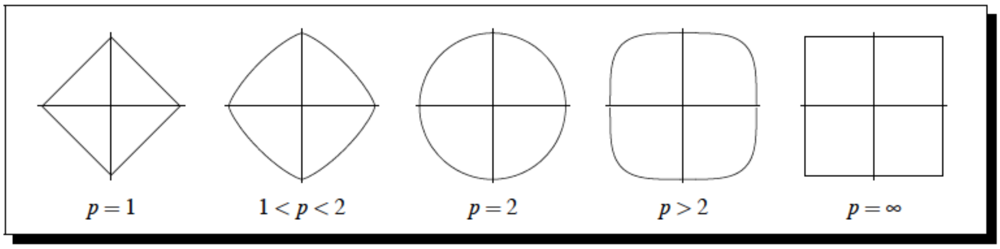
Aldiz, demagun $||f||_\infty \leq \lambda$ dela. $|f(x)| \leq \lambda$ dela i.n. frogatzeko, $\mu(A) = 0$ dela ikusi behar da, $A = \{x \in X, |f(x)| > \lambda\}$ multzorako. Hipotesiz, existitzen da $\alpha \in S$, $\lambda \leq \alpha$, zeren eta $\alpha < \lambda$ balitz α guztietarako, λ S multzoaren behebornea izango litzateke, eta $||f||_\infty > \lambda$ izango litzateke. Hortaz,

$$A = |f|^{-1}((\lambda, \infty]) \subset |f|^{-1}((\alpha, \infty]) \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(|f|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0.$$

Azkenik, $\lambda = ||f||_\infty$ hartuz, $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ izango da i.n., eta $||f||_\infty$ izango da $|f|$-ren goi-bornerik txikiena (i.n.). ■

Aurreko propietatea kontuan hartuz, $p = \infty$ kasurako berehalakoa da frogatzea aplikazioa norma dela, zeren eta nahikoa da f-ren balio absolutua hartzea.

Oharra. Hona hemen, p-ren balio desberdinetarako, $\mathbb{R}^2$-ko bat erradiodun bolaren irudia $||\cdot||_p$ normarako.



5.1 irudia. $B(0,1)$ bola $L^p(\mathbb{R}^2)$ espazioetan, $1 \leq p \leq \infty$.

5.2.3 proposizioa. *Izan bedi $L^p(\mu)$ espazioa, $p \in [1, \infty]$ izanda. Propietate hauek betetzen dira:*

i) $f \in L^p(\mu) \Longrightarrow f^s \in L^{\frac{p}{s}}(\mu)$.

ii) ii) $\mu(X) < \infty$ *bada eta* $f \in L^p(\mu)$, *orduan,* $f \in L^q(\mu)$ *edozein* $q \leq p$-*tarako. Oro har,* $\mu(X) < \infty$ *bada,*

$$L^\infty(X) \hookrightarrow L^p(X) \hookrightarrow L^q(X) \hookrightarrow L^1(X), \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

Froga. i) $p = \infty$ bada, $p/s = \infty$ da, baita ere; hortaz, emaitza berehalakoa da. Demagun $p \neq \infty$ dela. Orduan,

$$f \in L^p(\mu) \Longleftrightarrow \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \Longleftrightarrow \int_X (|f(x)|^s)^{\frac{p}{s}} d\mu < \infty;$$

beraz, $f^s \in L^{\frac{p}{s}}(\mu)$.

ii) $p = \infty$ bada, f bornatua da ia nonahi; hau da, $\exists\ M > 0, |f(x)| \leq M$ i.n. Beraz,

$$\int_X |f(x)|^q d\mu \leq M^q \mu(X) < \infty.$$

Demagun $p \neq \infty$ dela. Orduan,

$$\int_X |f(x)|^q d\mu = \int_X |f(x)|^p |f(x)|^{q-p} d\mu =$$

$$\underbrace{\int_{\{x \in X, |f(x)|<1\}} |f(x)|^q d\mu}_{I_1} + \underbrace{\int_{\{x \in X, |f(x)| \geq 1\}} |f(x)|^p |f(x)|^{q-p} d\mu}_{I_2}.$$

I_1 lehen batugaian $|f| < 1$ denez, $|f|^q < 1$ ere bai. Gainera, integrazio-eremuaren neurria X espazio osoaren neurria baino txikiago da; beraz,

$$I_1 \leq \int_{\{x \in X, |f(x)|<1\}} d\mu \leq \mu(X) < \infty.$$

Bestalde, $q - p < 0$ denez, I_2 bigarren batugaian $|f|^{q-p} < 1$ da, eta, orduan,

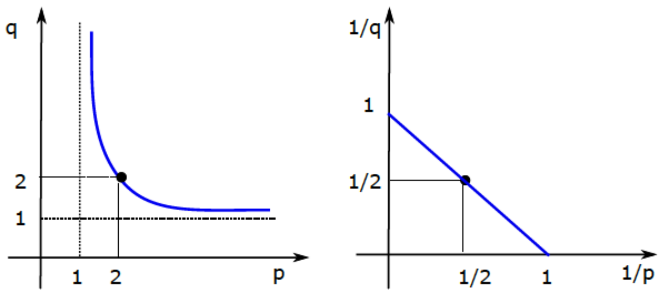
$$I_2 \leq \int_{\{x \in X, |f(x)| \geq 1\}} |f(x)|^p d\mu \leq ||f||_p^p < \infty.$$

■

$||\cdot||_p$ aplikazioa norma dela ikusteko, desberdintza triangeluarra frogatzea falta da. Hori egiteko, lehenago, Youngen desberdintza eta Hölderren desberdintza frogatu behar ditugu.

Definizioa. $p, q \in [1, \infty]$ zenbaki konjugatuak direla esango dugu $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ erlazioa betetzen badute.

Adibidez, $p = q = 2$ konjugatuak dira. Bestalde, $p = 1$-en konjugatua $q = \infty$ da, eta alderantziz.



5.2 irudia. p eta q zenbaki konjugatuak.

5.2.4 proposizioa. *(Youngen desberdintza) Izan bitez $a, b \geq 0$, eta p eta q zenbaki konjugatuak, $p > 1$ izanda. Orduan, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ da.*

Ohartu Youngen desberdintza $p = 2$-rako, $2ab \leq a^2 + b^2$ erlazioa ezaguna dela.

Froga. Logaritmoa funtzio ganbila denez,

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q}$$

erlazioa betetzen da, eta logaritmoen propietateak erabiliz (berretzailea atera eta logaritmoen batura biderkaduraren logaritmoa dela)

$$\frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q} = \log a + \log b = \log(ab)$$

dugu. Beraz, alderantzizko funtzioak hartuz, emaitza ateratzen da. ∎

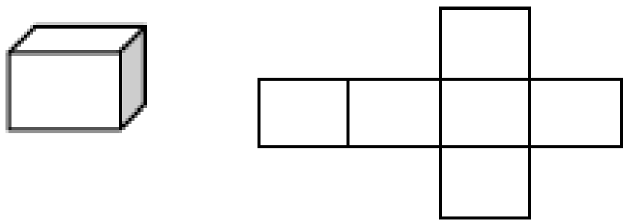
Grace Chisholm Young (1868-1944) Ingalaterran jaio zen, Victoria erreginaren garaian. Bere familia goi-klasekoa zen, eta heziketa-maila altua zuten. Bere aitak goi-kargua betetzen zuen Britainiar Gobernuan, eta ama, Anna Louisa Bell, pianista famatua zen. Gainera, bere neba nagusietako bat famatua izan zen Britainiar Entziklopediaren argitalpenagatik. Lau neba-arrebetatik txikiena izan zen. Berak ikasi nahi zuena bakarrik irakasten zioten; eta, horrela, hamar urte bete zituen arte, kalkulu mentala eta musika besterik ez zituen ikasi, bere amaren eskutik. Hamar urte bete zituenean, etxe-irakasle bat jarri zioten, eta hori izan zuen bere haurtzaroko hezkuntza formal bakarra. Hala ere, prestaketa nahikoa izan zuen, 17 urte zituelarik, Cambridgeko azterketak gainditzeko.

Grace Chisholm Young (Britainia Handia, 1868-1944)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/7/72

Gizona izan bazen, hurrengo urtean bere unibertsitate-ikasketak hasiko zituen; baina, emakumea zenez, aukera hori ez zen kontuan hartu. Orduan, bere familiaren nahiei jarraika, Londresen jende pobrearekin aritu zen gizarte-lanetan. 21 urterekin ikasten jarraitzeko erabakia hartu zuenean, amak ez zuen nahi Gracek medikuntza-ikasketak egitea; eta horrela, aitaren baimenarekin, matematika ikasten hasi zen. 1889ko apirilean Cambridgen sartu zen, Griton Collegen, urte haietan matematikaren alorreko zentrorik onena baitzen. Bertan, beste irakasleen artean, Arthur Cayley-k irakasten zuen. Bere tutore William Youngen laguntzari esker, Cayleyk ematen zituen klaseetara joateko baimena lortu zuen Gracek, baimena lortzea oso zaila izan zen arren. Gracek diploma lortu zuen Cambridgen 1892. urtean, baina artean ezinezkoa bertan doktoretza egitea.

Matematikari bezala ikasketak jarraitzeko Göttingen hirira joan behar izan zuen, eta han Felix Klein irakasleak eman zion laguntza. Baina bertan onartua izateko erabakia Berlingo Kultura Ministerioak hartu behar zuen. Gracek zortea izan zuen; izan ere, momentu hartan Alemanian goi-hezkuntzaren arduraduna Friedrich Althoff zen, liberala eta emakumeen goi-heziketaren aldekoa. Felix Kleinen zuzendaritzapean, 1895. urtean doktoretza lortu zuen eta bere tesiaren izenburua *Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie* izan zen. Horrela, Grace Chisholm Young har daiteke modu normal batean matematiketan doktoretza eskuratu zuen lehen emakumetzat.

Horren ostean, Ingalaterrara itzuli zen, eta William Youngek, geroago senarra izango zuenak, astronomia-liburu bat idazteko lankidetza eskatu zion. Liburu horretan zaila da Gracen ekarpena Williamek egindakotik ezberdintzea, kontuan izanda ezkondu eta gero Gracek senarraren abizena hartu zuela. Egoera hori bere ibilbide osoan zehar errepikatuko zen. Gracek askotan egin zuen lan senarrarekin batera, eta zaila da bere ekarpena eta senarrarena ezberdintzea lanetan. Cambridgen ikasten zuenean, matematikari bikaina zela zioten denek. Gracek, nahiz eta sei seme-alabez arduratu behar izaten zuen, lanean jarraitu zuen, kalkulu diferentzial eta integralari, edo geometriari buruzko testuak idazten, besteak beste. Hori horrela, bizitza-baldintza zailak izan arren, gai izan zen lan bikainen kopuru handi bat lortzeko. Zoritxarrez, senarraren egiletasun esklusiboa eraman zuten lanek eta haiekin batera argitaratu zituzten 200 artikuluk baino gehiagok.



5.3 irudia. *The first book of Geometry* (Kubo baten eraketa).

Grace Chilson Youngi geometriaren "lehenengo liburua" idazteagatik ere ezaguna da. 1905. urtean *The first book of Geometry* argitaratu zuen Londresen, eta, hiru urte geroago, alemanez argitaratu zen *Der kleine geometer*. Izan ere, hainbat hizkuntzatara itzuli da; hala nola, hebrearrera. Liburua 1970ean *Beginner book of geometry* izenez berrargitaratu zen, soilik oker-zuzenketa eginda. Gaur egun, oraindik liburu modernotzat hartzen da, eta erabiltzen da.

5.2.5 proposizioa. *(Hölderren desberdintza) Izan bitez $f \in L^p$, $g \in L^q$ funtzioak eta $1 \le p, q \le \infty$ zenbaki konjugatuak. Orduan, $fg \in L^1$ eta*

$$||fg||_1 \le ||f||_p ||g||_q$$

desberdintza betetzen da.

Froga. $p = 1$ eta $q = \infty$ badira, emaitza berehalakoa da, zeren eta g bornatua baita ia nonahi, eta, orduan,

$$\int_X |fg| d\mu \le M \int_X |f| d\mu \le ||f||_1 ||g||_\infty$$

da. Demagun $p, q \in (1, \infty)$ direla. Aplika dezagun Youngen desberdintza

$$a = \frac{|f(x)|}{||f||_p} \quad \text{eta} \quad b = \frac{|g(x)|}{||g||_q}$$

hartuz. Hortaz,

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{||f||_p ||g||_q} \le \frac{|f(x)|^p}{p||f||_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q||g||_q^q}$$

desberdintza betetzen da. Alde bietan integratuz eta konstanteak ateraz,

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)| d\mu}{||f||_p ||g||_q} \le \frac{\int_X |f(x)|^p d\mu}{p||f||_p^p} + \frac{\int_X |g(x)|^q d\mu}{q||g||_q^q}$$

erlazioa lortzen da. Alde batetik, p eta q konjugatuak dira. Bestalde, $\displaystyle\int_X |f(x)|^p d\mu = ||f||_p^p$ da eta $\displaystyle\int_X |g(x)|^q d\mu = ||g||_q^q$; beraz, desberdintzaren eskuineko aldea bat da. Hori horrela,

$$\frac{\int_X |f(x)||g(x)| d\mu}{||f||_p ||g||_q} \le 1$$

da, emaitza lortuz. ■

5.2.6 proposizioa. *(Desberdintza triangeluarra. Minkowskiren desberdintza) $\forall\, p \in [1, \infty]$, $f, g \in L^p(\mu)$, $||f + g||_p \le ||f||_p + ||g||_p$.*

Froga. $p = 1$ bada, emaitza berehalakoa da, zeren eta

$$\int_X |f(x) + g(x)| d\mu \le \int_X |f(x)| d\mu + \int_X |g(x)| d\mu$$

baita. Bestalde, $p = \infty$ kasurako, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ denez, berehalakoa da baita ere.

Demagun $p \in (1, \infty)$ dela. Orduan,

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu = \int_X |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu \leq$$

$$\int_X |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu + \int_X |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu$$

da. Hölderren desberdintza aplikatu nahi dugu batugai bakoitzean. Horretarako, f eta g L^p-n daudenez, $(f + g)^{p-1} \in L^q$-n egon beharko litzateke, $q = \frac{p}{p-1}$ p-ren konjugatua izanda. Eta horrela da, zeren eta

$$f + g \in L^p \Longrightarrow (f + g)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$$

baita; beraz, Hölderren desberdintza aplika dakioke batugai bakoitzari

$$\int_X |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu \leq ||f||_p ||(f + g)^{p-1}||_{\frac{p}{p-1}}$$

eta

$$\int_X |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu \leq ||g||_p ||(f + g)^{p-1}||_{\frac{p}{p-1}}$$

bornaketak lortzeko. Gai biak batuz

$$\begin{aligned}\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu &\leq (||f||_p + ||g||_p)\, ||(f + g)^{p-1}||_{\frac{p}{p-1}} \\ &= (||f||_p + ||g||_p)\, ||f + g||_p^{p-1}\end{aligned}$$

izango da. Ezkerreko aldea norma bezala idatziz

$$||f + g||_p^p \leq (||f||_p + ||g||_p)\, ||f + g||_p^{p-1}$$

desberdintza dugu, eta sinplifikatuz emaitza lortzen da. Ondorioz, L^p espazio normaduna da $\forall\ p \in [1, \infty]$ balioetarako. ■

Otto Ludwig Hölder Stuttgarten jaiotako matematikari alemaniarra izan zen. Aljebra arloan lan egin arren, bere izena daraman desberdintza oso famatua eta erabilera handikoa bilakatu da Analisi Funtzionalean. Graduko ikasketak Berlingo Unibertsitatean egin zituen, eta 1882. urtean doktoretza-tesia defendatu zuen Tubingako Unibertsitatean Paul du Bois-Reymond irakaslearen zuzendaritzapean. Horren ostean, Leipzigeko Unibertsitatean emango zuen bere irakasle-ibilbide osoa.

Otto Hölder (Alemania, 1859-1937)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Hoelder_Otto.jpg

5.2.7 proposizioa. *(Hölderren desberdintza orokortuak)*

i) Izan bitez $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ *eta* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *Orduan,* $fg \in L^r(\mu)$ *eta* $||fg||_r \leq ||f||_p ||g||_q$ *da.*

ii) Izan bitez $f_i \in L^{p_i}(\mu)$ *eta* $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$. *Orduan,* $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} f_i \in L^1(\mu)$ *eta*

$$\left|\left|\prod_{i=1}^{m} f_i\right|\right|_1 \leq \prod_{i=1}^{m} ||f_i||_{p_i}$$

da.

Froga. i) $r = \frac{pq}{p+q}$ da; hortaz $f \in L^p$ denez, $f^{\frac{pq}{p+q}} \in L^{p_1}$ izango da, eta, era berean, $g \in L^q$ izateagatik $g^{\frac{pq}{p+q}} \in L^{p_2}$, $p_1 = \frac{p+q}{q}$ eta $p_2 = \frac{p+q}{p}$ izango dira. Gainera, p_1 eta p_2 zenbaki konjugatuak dira; beraz, Hölderren desberdintza aplika daiteke honako hau lortzeko:

$$\left(\int_X |f(x)g(x)|^r d\mu\right)^{1/r} = \left(\int_X |f(x)g(x)|^{\frac{pq}{p+q}} d\mu\right)^{1/r} \leq$$

$$\left(\int_X (|f|^{\frac{pq}{p+q}})^{p_1} d\mu\right)^{1/(p_1 r)} \left(\int_X (|g|^{\frac{pq}{p+q}})^{p_2} d\mu\right)^{1/(p_2 r)}.$$

Berretzaileetan eragiketak eginez,

$$\frac{pq}{p+q} p_1 = p, \ \frac{pq}{p+q} p_2 = q, p_1 r = p \ \text{ eta } p_2 r = q$$

dira, emaitza lortuz.

ii) Bigarren propietate hori Hölderren desberdintza m bider aplikatuz frogatzen da. ■

Hermann Minkowski (1864-1909), jatorri lituaniarreko matematikari alemaniarra izan zen. Alemanian egin zituen ikasketak, eta han eman zuen bizitza osoa. Matematikako ikasketak egiten ari zela, 1882an, Parisko Zientzien Akademiaren saria lortu zuen, Smith britainiarrarekin batera, forma koadratikoen teoriari esker. 1885. urtean doktore titulua lortu zuen, eta Ferdinand von Lindemann izan zuen zuzendari. Urte batzuk beranduago, bera izango zen Constantin Caratheodoryren tesi-zuzendaria. Bere ibilbidean zehar, hainbat unibertsitatetan irakatsi zuen: Bonnen, Könisbergen, Zurichen eta Göttingen, besteak beste. Zurichen Albert Einsteinen irakaslea izan zen, eta Göttingenen David Hilbertekin lan egin zuen; azken horren lagun handi izatera iritsi zen. 1909an bat-batean hil zen, apendizitis-atake baten ondorioz.

Hermann Minkowski (Errusia, 1864-1909)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/35/De_Raum_zeit_Minkowski_Bild_%28cropped%29.jpg/220px-De_Raum_zeit_Minkowski_Bild_%28cropped%29.jpg

Minkowskik n aldagaien forma koadratikoak aztertu zituen, eta, hortik abiatuta, n dimentsiodun espazioen propietate geometrikoak aztertu zituen. Hori horrela, 1904. urtean Einsteinek bere erlatibitate-teoria aurkeztu zuen, eta 1907an Minkowski konturatu zen teoria hori askoz hobeto uler zezakeela lau dimentsioko geometria ez-euklidearreko espazio batean. Emaitza hori lagungarria izan zen Einsteinen ondorengo lanetan, zeinak erlatibitate orokorraren garapenarekin amaitu baitziren.

Oharra. Minkowskiren desberdintza integrala.

Izan bitez (X,μ) eta (Y,ν) neurri espazioak eta $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzio neurgarria. Biz $1 \leq p \leq \infty$. Demagun $y \in Y$ ia guztietarako $f(.,y) = f(x,y)$ funtzioa $L^p(\mu)$ espazioan dagoela, bere norma $\sigma(y) \in L^1(\nu)$ izanda; hau da,

$$f_y : X \longrightarrow L^p(\mu), \ ||f_y||_p = \sigma(y) \in L^1(\nu).$$

Orduan, ia $x \in X$ guztietarako $\phi : X \longrightarrow L^p(\mu),\ \phi(x) = \displaystyle\int_Y f(x,y)d\nu$ funtzioa ondo definituta dago, eta $||\phi||_p \leq ||\sigma||_1$ da; hots,

$$\left|\left|\int_Y f(\cdot,y)d\nu\right|\right|_p \leq \int_Y ||f(\cdot,y)||_p d\nu.$$

Desberdintza horri *Minkowskiren desberdintza integrala* esaten zaio.

Zehazki, $p < \infty$-rako honako desberdintza hau dugu:

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)d\nu\right|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu\right)^{1/p} d\nu\right).$$

Bestalde, $p = 1$ denean f integragarria dela ondorioztatzen da, eta Fubiniren teorema lortzen da.

Azter dezagun orain L^p-ri dagokion espazioa kasu diskretuan, l^p hain zuzen ere.

5.2.8 proposizioa. *Izan bitez K gorputzean definitutako $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ segidak.*

i) $\forall\ 1 \leq p < \infty,\ l^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ *espazioan*

$$||x||_p = ||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

aplikazioa norma bat da.

ii) $p = \infty$ *bada,* $l^\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ sup\ |x_n| < \infty\}$ *espazioan*

$$||x||_\infty = ||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_\infty = \ sup\ \{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$$

aplikazioa norma bat da.

Esaterako, $p = 1$ denean, l^1 segida absolutuki konbergenteen espazioa da, eta $p = 2$ bada aurreko gaian aztertutako norma da, osagai infinitu dituen bektoreen biderkadura eskalarrarekin identifika daitekeena.

Froga. Norma izateko lehen eta bigarren baieztapenak egiaztatzea berehalakoa da. Desberdintza triangeluarra frogatzeko, L^p-ren kasuan egin den bezala, Hölderren desberdintza erabiltzen da, norma horri egokituta.

Biz, p eta q zenbaki konjugatuetarako, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ eta $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^q$. Orduan, $xy = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. 5.2.5 proposizioan jarraitutako prozedura errepikatuz, $a = \dfrac{|x_n|}{||x||_p}$ eta $b = \dfrac{|y_n|}{||y||_q}$ balioetarako, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, eta integralen ordez baturak eginez desberdintza dugu.

Azkenik, $p = 1$ eta $p = \infty$ balioetarako desberdintza triangeluarra berehalakoa da. Era berean, $p \in (1, \infty)$ kasurako, Minkowskiren desberdintzaren frogako prozeduran, integralen ordez baturak hartuz emaitza lortuko dugu. ■

Oharra. l^p espazioak beste era batean ere interpreta daitezke: izan bedi $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\mathbb{N}$-ren azpimultzoz osotutako σ-aljebra, eta μ kontatzeko neurria; hots, $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$, $\mu(A) = \text{card}(A)$. $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ neurri-espazio horretan, edozein $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funtzioa neurgarria da, zeren eta $V \subset \mathbb{R}$ irekirako, $f^{-1}(V) \subset \mathbb{N} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ baita. Hortaz, $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ funtziorako, $f(n) = |x_n|$ izanik, integrala honako hau izango da:

$$\int_{\mathbb{N}} f^p d\mu = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}} f^p d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{n\}} f^p d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p.$$

Hori horrela, l^p espazioak $(L^p(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ espazioekin identifika daitezke, μ kontatzeko neurria denean.

Oharra. L^p eta l^p Banachen espazioak izanda, ez dira Hilbertenak $p \neq 2$-rako.

L^p Hilberten espazioa balitz, $p \neq 2$-rako, paralelogramoaren identitatea bete beharko litzateke. Hori horrela, izan bitez $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ eta $g(x) = \chi_{[-1,0]}(x)$ funtzioak, eta kalkula ditzagun identitateari dagozkien normak:

$$||f + g||_p^2 + ||f - g||_p^2 = \left(\int_{-1}^{1} dx\right)^{2/p} + \left(\int_{-1}^{1} dx\right)^{2/p} = 2^{2/p} + 2^{2/p},$$

$$2||f||_p^2 + 2||g||_p^2 = 2\left(\int_{0}^{1} dx\right)^{2/p} + 2\left(\int_{-1}^{0} dx\right)^{2/p} = 2 + 2 = 4.$$

Bi adierazpen horiek berdinak izango dira $2^{2/p} + 2^{2/p} = 4$ bada, eta hori ezinezkoa da $p \neq 2$ denean.

Era berean, l^p espazioaren kasuan, izan bitez $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, \ldots, \underbrace{1}_{k.\ tokia}, \ldots, 0, \ldots)$ eta $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, \ldots, \underbrace{1}_{k+1.\ tokia}, \ldots, 0, \ldots)$ segidak, eta idatz dezagun dagokion paralelogramoaren identitatea:

$$||x_n + y_n||_p^2 + ||x_n - y_n||_p^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{2/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{2/p} = 2^{2/p} + 2^{2/p},$$

$$2||x_n||_p^2 + 2||y_n||_p^2 = 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{2/p} + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{2/p} = 2+2=4.$$

Aldiz, adierazpenak berdinak izango dira $2^{2/p}+2^{2/p}=4$ bada; hau da, $p=2$ denean.

5.3 L^p espazioen propietateak

Atal honetan L^p espazioen propietateak aztertuko ditugu. Hasteko, espazio normadunak direnez, norma horrekiko konbergentzia defini daiteke. Era berean, propietate berak froga daitezke l^p espazioetarako.

Definizioak. Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(\mu)$ espazioaren funtzio-segida bat.

i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segidak f funtziora konbergitzen du L^p espazioan, ($f_n \overset{L^p}{\to} f$), $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0$ bada.

ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyren segida da L^p espazioan, $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}$, $\forall\, m,n\geq n_0$, $||f_m-f_n||_p<\varepsilon$ bada.

5.3.1 teorema. *(Riesz-Fischerren teorema) L^p espazioa osoa da $p\in[1,\infty]$; hau da, L^p espazioak Banachen espazioak dira p guztietarako.*

Froga. Izan bedi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ L^p-ko Cauchyren segida bat. Segida hori L^p espazioan konbergentea dela frogatu behar da; hau da, existitzen da $f\in L^p$, $\lim\limits_{n\to\infty}||f_n-f||_p=0$. Bi kasu bereiziko ditugu, $p=\infty$ eta $p<\infty$, hurrenez hurren.

$p=\infty$ bada, Cauchyren segida izateagatik, honako hau dugu:

$$\forall\, k>0, \varepsilon=\frac{1}{k}, \exists\, n_k\in\mathbb{N}, \forall\, m,n\geq n_k \quad ||f_m-f_n||_\infty<\frac{1}{k};$$

hau da,

$$\exists\, E_k, \mu(E_k)=0, \forall\, x\notin E_k, |f_m(x)-f_n(x)|<\frac{1}{k}.$$

Izan bedi $E=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Orduan, $\mu(E)=0$ da, eta exisitzen da n_0, zeinetarako

$$\forall\, m,n\geq n_0, |f_m(x)-f_n(x)|<\frac{1}{n_0}, \forall\, x\notin E.$$

Hortaz, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida cauchyarra da $E^c\subset\mathbb{R}$ multzoan; beraz, konbergentea da $\mathbb{R}$-n; hau da, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), \forall\, x\notin E$. Hori horrela,

$$\sup\,\{|f_n(x)-f(x)|, x\in E^c\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow f\in L^\infty(\mu).$$

Demagun orain $p < \infty$ dela. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida cauchyarra denez L^p-n, existitzen da $\{f_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ azpisegida bat, zeinetarako $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \dfrac{1}{2^k}$ den. Defini ditzagun $g_m(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ segida berria, eta haren limite puntuala $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ funtzioa. Orduan, $\forall\ m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
||g_m||_p &= \left(\int_X |g_m|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|\right)^p d\mu\right)^{1/p} \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \left(\int_X |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \sum_{k=1}^{m} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} < 1
\end{aligned}$$

da; hots, $g_m \in L^p$. Bestalde, $|g_m|^p$-ren limite puntuala $|g|^p$ izango da, eta, Fatouren lema erabiliz, honako hau dugu:

$$\int_X |g|^p d\mu = \int_X \lim_{m\to\infty} |g_m|^p d\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X |g_m|^p d\mu \leq 1;$$

hau da, $g \in L^p$ baita. Ondorioz, $|g|^p$ finitua da i.n., $g(x) < \infty$ i.n. ere bai, eta, orduan, $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ seriea absolutuki konbergentea da.

Izan bedi A zero neurriko multzoa, eta defini dezagun honako f funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)), & x \in A^c, \\ 0, & x \in A. \end{cases}$$

$f(x)$ funtzioa $f_{n_m}(x)$-ren limite puntuala da, zeren eta

$$f_{n_m}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$$

baita; beraz, f_{n_m} azpisegida cauchyarra puntuz puntu konbergentea da ia nonahi. Ikusten badugu f_n segida osoak konbergitzen duela f-ra eta $f \in L^p$ dagoela, emaitza frogatuta gelditzen da. Horretarako, segida cauchyarra izateagatik, $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N\ ||f_n - f_m||_p < \epsilon$.

$m \geq N$ hartuz, honako hau betetzen da:

$$\begin{aligned} ||f - f_m||_p^p &= \int_X |f - f_m|^p d\mu = \int_X |\lim_{k\to\infty} f_{n_k} - f_m|^p d\mu \\ &= \int_X \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \\ &= \liminf_{k\to\infty} ||f_{n_k} - f_m||_p^p \leq \epsilon^p, \end{aligned}$$

$n_k \geq N$ izanda. Horrek frogatzen du $f - f_m \in L^p(\mu)$ dela, eta, ondorioz, $f \in L^p(\mu)$ ere bai. Azkenik, $||f - f_m||_p^p < \epsilon^p$ denez, $m \geq N$-rako, segida osoak konbergitzen du puntualki f funtziora. ■

Riesz-Fischerren teoremak Lebesgueren integralaren nagusitasuna erakusten du Riemannen integralaren aurrean.

Adibidea. Izan bitez $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ jarraitua}\}$ bektore-espazioa eta honako bi norma hauek:

$$||f||_\infty = \max\{|f(t)|, t \in [a,b]\},$$

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty.$$

$C([a,b], ||\cdot||_\infty)$ Banachen espazioa da: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ segida cauchyarra bada, $\epsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, $n, m \geq n_0$. Orduan, edozein $x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$; hots, konbergentzia uniformea da. f_n funtzio guztiak jarraituak direnez, limitea ere bai; beraz, $f \in C([a,b]$. Esaterako, har dezagun $[-1,1]$ tartean definitutako honako funtzio-segida hau:

Aldiz, $C([a,b], ||\cdot||_p)$ ez da Banachen espazioa. Esaterako, har dezagun $[-1,1]$ tartean definitutako honako funtzio-segida hau:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \ -1 \leq x \leq 0, \\ nx, \ 0 < x \leq 1/n, \\ 1, \ 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Edozein $p \geq 1$-erako, f_n cauchyren segida da $||\cdot||_p$ normarako; limite puntuala, ordea,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ -1 \leq x \leq 0, \\ 1, \ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

funtzioa da, eta ez da jarraitua $x = 0$ puntuan. Izan ere, $C([a,b], ||\cdot||_p)$ espazio osoa bihur daiteke, sortzen den espazioa $L^p([a,b], ||\cdot||_p)$ izanik.

5.3.2 teorema. *$\mathcal{S}$ funtzio sinpleen espazioa dentsoa da L^p espazioan; hau da,*

$$\forall\ f \in L^p(\mu)\ \exists\ s \in \mathcal{S}, ||s - f||_p < \varepsilon,\ p \in [1, \infty].$$

Froga. 2.1.9 korolarioari esker, existitzen da s_n funtzio sinpleen segida f funtziora puntualki konbergitzen duena, eta $|s_n| \leq f$ dena. Gainera, edozein eremu bornatutan konbergentzia uniformea da. Hori horrela,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n_0 \geq n,\ |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

da. $p = \infty$ denean, f bornatua izango da i.n.; beraz, $||s_n - f||_\infty < \varepsilon$ desberdintza dugu, emaitza lortuz. Bestalde, $|s_n(x) - f(x)|^p \leq 2|f(x)|^p$ bornaketa betetzen da, f^p funtzio integragarria izanda. Konbergentzia menderatuaren teorema aplikatuz, emaitza beteko da p-ren balio finituetarako ere. ■

5.4 Espazio normadunen arteko eragile linealak eta jarraituak

Definizioa. Izan bedi $T : E \to F$ aplikazioa, E eta F K-ren gaineko bektore-espazioak izanda. T eragile lineala dela diogu honako hau betetzen bada:

$$\forall\ \alpha, \beta \in K,\ \text{eta}\ \forall\ x, y \in E,\ T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

E eta F bektore-espazio normadunak badira, egitura aljebraikoaren ikuspuntutik aplikazio linealtzat har ditzakegu. Aldiz, espazio topologikoen egitura aztertzerakoan, eragileen jarraikitasuna azter daiteke. Bi kontzeptu horiek bateratzeko, eragile lineal bornatuaren definizioa ezartzen da.

Definizioak. Izan bitez E eta F espazio normadunak, eta T beren arteko eragile lineal bat.

i) T eragile bornatua dela diogu

$$\exists\ M > 0, ||Tx||_F \leq M||x||_E, \forall\ x \in E$$

bada, edo, baliokidea dena, $\sup\ \{||Tx||_F, ||x||_E \leq 1\} < \infty$ bada.

ii) T eragile jarraitua dela diogu

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ ||x - y||_E < \delta \Longrightarrow ||Tx - Ty||_F \leq \varepsilon$$

bada. Zehazki, T eragilea zero puntuan jarraitua dela diogu, honako hau betetzen denean:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0, \forall\ x \in E\ ||x||_E < \delta \Longrightarrow ||Tx||_F \leq \varepsilon.$$

5.4.1 teorema. *Izan bedi $T : E \to F$ eragile lineala, E eta F espazio normadunetarako. Honako baieztapen hauek baliokideak dira:*

i) T eragile uniformeki jarraitua da.

ii) T eragile jarraitua da.

iii) T eragile jarraitua da $x = 0$ puntuan.

iv) T eragile bornatua da.

Froga. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* eta *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* inplikaizoak berehalakoak dira.

Froga dezagun *iii)* $\Rightarrow$ *iv)*. Demagun T eragilea jarraitua dela zero puntuan. Orduan, $\forall\ \varepsilon > 0$ (bereziki $\varepsilon = 1$-erako) $\exists\ \delta > 0$ $||x||_E \leq \delta \Rightarrow ||Tx||_F \leq 1$. Adierazpen hori edozein $x \neq 0$-tarako betetzen denez, idatz dezagun $x = \dfrac{||x||_E}{\delta}\left(\delta\dfrac{x}{||x||_E}\right)$. Hortaz,

$$Tx = \frac{||x||_E}{\delta}T\left(\delta\frac{x}{||x||_E}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$||Tx||_F = \frac{||x||_E}{\delta}\left|\left|T\left(\delta\frac{x}{||x||_E}\right)\right|\right|_F \leq \frac{||x||_E}{\delta} = M||x||_E,$$

eta $M = 1/\delta$ hartuz eragile bornatua da.

Froga dezagun orain *iv)* $\Rightarrow$ *ii)* inplikazioa. T bornatua denez, existitzen da $M > 0$, zeinetarako $||Tx||_F \leq M||x||_E$ den $\forall\ x \in E$. Bestalde, T lineala denez, $||Tx - Ty||_F = ||T(x - y)||_F$ da. Biak batuz

$$||Tx - Ty||_F = ||T(x - y)||_F \leq M||x - y||_E$$

izango da; beraz, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \varepsilon/M$, zeinetarako aurreko desberdintza betetzen den; hau da, T jarraitua da. Gainera, M konstante absolutua denez, δ ez da x-ren menpekoa; beraz, jarraitutasuna uniformea da. Horrela, *iv)* $\Rightarrow$ *i)* inplikazioa ere lortzen da froga amaituz. ∎

Definizioa. Izan bitez E eta F espazio normadunak eta $T : E \to F$ aplikazio lineal bijektiboa. T eta T^{-1} jarraituak badira, T isomorfismo bat dela diogu. Horretaz gain, $||Tx||_F = ||x||_E$ bada, isometria bat dela esango dugu.

E-ren eta F-ren arteko isomorfismo batek bi espazio horien artean baliokidetasun bat adierazten du. Alde batetik, isomorfoak badira antzeko propietateak dituzte, eta, horretaz gain, isometrikoak badira norma edo distantzien aldetik ere antzekoak.

Definizioa. Izan bedi $\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \to F,$ eragile lineala eta bornatua$\}$ bektore-espazioa. $\forall\ T \in \mathcal{L}(E,F)$ eragileetarako

$$\begin{aligned} ||T|| = &\ \sup\ \{||Tx||_F, ||x||_E \leq 1\} \\ = &\ \inf\ \{M > 0, ||Tx||_F \leq M||x||_E, \forall\ x \in E\} \end{aligned}$$

norma bat da, eta, ondorioz, $\mathcal{L}(E,F)$ espazio normaduna da.

5.4.2 teorema. *Izan bitez E eta F espazio normadunak. F Banachen espazioa bada, $\mathcal{L}(E,F)$ Banachen espazioa da.*

Froga. Izan bedi $T_n \in \mathcal{L}(E,F)$ segida cauchyarra. Argi dago edozein x-tarako $T_n(x) \in F$ ere segida cauchyarra dela; hortaz, konbergentea da. Biz $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$.

Alde batetik, $T : E \to F$ lineala da funtzio linealen limitea delako. Bestalde, normaren jarraitutasunagatik eta definizioagatik, honako hau idatz dezakegu:

$$||T(x)|| = ||\lim_{n\to\infty} T_n(x)|| = \lim_{n\to\infty} ||T_n(x)|| \leq \sup||T_n(x)|| \leq \sup(||T_n||)||x||.$$

T_n cauchyarra denez, $\sup(||T_n||) < \infty$ da. Orduan, T ondo definituta dago; hots, $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Froga amaitzeko, T_n-ren limitea $\mathcal{L}(E,F)$ espazioan T dela ikusi behar da. T_n cauchyarra izateagatik, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ edozein $n, m \geq n_0$ $||T_n - T_m|| < \varepsilon$. Har ditzagun $x \in E$ eta $n > n_0$. Orduan, $||T_n(x) - T_m(x)|| < \varepsilon||x||$ izango da edozein $m > n_0$-tarako. Bestalde, $T(x) = \lim\limits_{m\to\infty} T_m(x)$ denez,

$$||T(x) - T_n(x)|| = ||(T - T_n)(x)|| < \varepsilon||x||$$

da; hau da, $||T - T_n|| \leq \varepsilon$ edozein $n > n_0$-tarako. ■

Definizioa. Izan bedi E espazio normaduna eta $F = K(\mathbb{R}$ edo $\mathbb{C})$. $\mathcal{L}(E,K)$ aplikazio linealen eta bornatuen espazioari E-ren duala esaten zaio, eta E' ikurraz adieratzen da. $T \in E'$-ren elementuei forma edo funtzional linealak deritze.

Izan bedi $(L^p)'$, L^p-tik $\mathbb{R}$-ra doazten aplikazio linealen eta bornatuen espazioa; hots, L^p-ren duala:

$$(L^p)' = \{T : L^p \longrightarrow \mathbb{R},\ T \text{ forma lineal eta bornatua}\}.$$

Espazio hori Banachen espazioa da, $F = \mathbb{R}$ Banachen espazioa delako.

5.4.3 teorema. *(Rieszen adierazpenaren teorema)*

Izan bedi $1 < p \leq \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ *izanda.* L^p *eta* $(L^{p'})'$ *isometrikoki isomorfoak dira;*

$\forall\ f \in L^p$, $\exists\ T_1 : L^{p'} \longrightarrow \mathbb{R}$ *forma lineala eta bornatua; hau da,* $T_1 \in \mathcal{L}(L^{p'}, \mathbb{R}) = (L^{p'})'$, *isometria dena, eta honako hau betetzen duena:*

$$\forall\ f \in L^p \quad \exists\ g \in L^{p'},\ T_1 g = \int_X fgd\mu,\ \textit{non}\ ||T_1|| = ||g||_{L^{p'}}\ \textit{den.}$$

Era berean, $f \in L^{p'}$ *funtziorako existitzen da* $T_2 : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *forma lineala eta bornatua; hots,* $T_2 \in \mathcal{L}(L^p, \mathbb{R}) = (L^p)'$, *isometria dena, eta honako hau betetzen duena:*

$$\forall\ f \in L^{p'} \quad \exists\ g \in L^p,\ T_2 g = \int_X fgd\mu,\ \textit{non}\ ||T_2|| = ||g||_{L^p}\ \textit{den.}$$

$f \in L^p$ bakoitzerako, aurreko eran definitutako $T_1 : L^p \to L^{p'}$ forma lineal bat dagokio. Hölderren desberdintzari esker,

$$|T_1 g| = \left| \int_X fgd\mu \right| \leq \int_X |fg| d\mu \leq ||f||_p ||g||_{p'}.$$

Orduan, T_1 jarraitua da $M_1 \leq ||f||_p$ izanda. Era berean, $g \in L^{p'}$ funtziorako T_2 forma lineala definitzen da $T_2 : L^{p'} \to L^p$, zeinetarako, Hölderren desberdintza erabiliz, $||T_2|| \leq M_2 ||f||_p$ den.

Rieszen adierazpenaren teorema ez da betetzen $p = 1$-erako. Hori horrela, $p = 1$ baliorako aurki daitezke μ neurria eta T forma lineal jarraitua L^∞-n, zeinetarako ez den existitzen $f \in L^1, Tg = \displaystyle\int_X fgd\mu$ delarik.

Laburbilduz, honako hau dugu:

$$\begin{aligned} (L^p)' &\sim L^{p'}, (1 < p < \infty) \\ (L^\infty)' &\sim L^1, \\ \left(L^1\right)' &\subsetneq L^\infty. \end{aligned}$$

5.4.4 teorema. *(Rieszen adierazpenaren teorema Hilberten espazioetarako) Izan bedi* $L : H \to \mathbb{R}$ H *Hilberten espazioan definitutako forma lineala eta jarraitua. Orduan,* $\exists\ y \in H$ *elementu, bakarra dena, zeinetarako* $Lx =< x, y >$ *den, espazioko edozein* x*-tarako.*

Froga. $L \equiv 0$ bada, $y = 0$ hartuz teorema egiaztatzen da. Demagun $L \neq 0$ dela. Orduan, existitzen da x_0 elementua, zeinetarako $Lx_0 \neq 0$ den. Defini dezagun $M = \{x \in H, Lx = 0\}$ multzoa. $M \neq H$ da, x_0 elementu hori existitzen baita. L eragile lineala denez, M azpiespazio bektoriala da, eta Ker $L = M$ multzo itxia. Proiekzioaren teorema aplikatuz, P_M eta $P_{M^\perp}$ existitzen direla ondorioztatzen da, $P_{M^\perp}(x_0) \neq 0$ izanda. Izenda ditzagun $z = P_{M^\perp}(x_0)$, $\alpha = \left(\dfrac{Lz}{< z, z >}\right) \in \mathbb{R}$ eta $y = \alpha z$. Hori horrela,

$$< y, y >=< \alpha z, \alpha z >= \alpha^2 < z, z >= \alpha^2 \frac{Lz}{\alpha} = \alpha Lz = L(\alpha z) = Ly \in M^\perp.$$

Edozein $x \in H$ elementutarako $x = x' + x''$ eran deskonposa daiteke, non

$$x' = \left(x - \frac{Lx}{< y, y >} y\right) \text{ eta } x'' = \frac{Lx}{< y, y >} y$$

diren. $Lx = Lx' + Lx''$ denez,

$$Lx' = Lx - \frac{LxLy}{< y, y >} = Lx - \frac{Lx < y, y >}{< y, y >} = 0.$$

Hori kontuan hartuz, $Lx = Lx''$ da; hots,

$$< x, y > = < x'', y > = < \frac{Lx}{< y, y >} y, y > = \frac{Lx}{< y, y >} < y, y >$$

$$\Downarrow$$

$$Lx =< x, y > .$$

Azkenik, y bakarra dela frogatzeko, demagun y eta y' elementuak existitzen direla, baldintza betetzen dutenak. Orduan,

$$Lx =< x, y > \text{ eta } Lx =< x, y' >, \ \forall \ x \in H$$

$$\Downarrow$$

$$0 =< x, y > - < x, y' >=< x, y - y' > .$$

Aurreko berdintza $x = y - y'$ denean ere beteko da; hortaz,

$$0 =< y - y', y - y' >= ||y - y'||^2$$

$$\Downarrow$$

$$y - y' = 0 \Rightarrow y = y'$$

da. ■

Definizioa. E Banachen espazioa erreflexiboa dela diogu, bere dualaren duala hasierako espazioa bada; hots, $(E')' = E$.

5.4.5 korolarioa. *Hilberten espazioak erreflexiboak dira.*

Froga. Rieszen teoremak erakusten du edozein H-ren gaineko L forma lineala eta bornatua biderkadura eskalarraren bidez adieraz daitekeela:

$\forall\ T \in H'\ \exists\ f \in H$ bakarra, zeinetarako $Tv =< f, v >$ den $\forall\ v \in H$, $||f||_H = ||T||_{H'}$ izanda. Beraz, isometria bat dugu H-ren eta H'-ren artean. Egoera errepikatzen da H' espazioa abiapuntu hartuz; ondorioz, Hilberten espazioak erreflexiboak dira; hots, $(H')' = H$.

Esaterako, $H = L^2$ bada, $\forall\ T : L^2 \to \mathbb{R},\ \exists\ g \in L^2$ bakarra, non $Tf =< f, g >= \int_X fgd\mu$ den, $(L^2)' = L^2$ izanda. ■

5.5 Ariketak

5.5.1. *Izan bedi* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x(1-x)}}$. *Frogatu* $f \in L^p(0,1), 1 \leq p < 6$ *denean, baina* $f \notin L^6(0,1)$.

5.5.2. *Izan bedi* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$. *Frogatu* $f \in L^3(\mathbb{R})$ *dela, baina* $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

5.5.3. *Biz* $f \in L^p,\ 1 < p < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Froga ezazu* $g(x) = \dfrac{f(x)}{1+|x|} \in L^1$ *eta, halaber, honako desberdintza hau egiaztatzen dela:*

$$\|g\|_1 \leq 2^{\frac{1}{q}} (\frac{1}{q-1})^{\frac{1}{q}} ||f||_p.$$

5.5.4. *Izan bedi* $X = [0,1]$ *eta* $f \in L^5(X)$. *Froga ezazu honako desberdintza hau:*

$$\int_X \frac{f(x)}{x^{2/3}} dx \leq 6^{4/5} ||f||_5.$$

5.5.5. *Integrala kalkulatu gabe, azter ezazu* $\int_0^\pi x^{-1/3} \sin x dx < 2\pi^{2/3}$ *desberdintza egia den ala ez, erantzuna arrazoituz.*

5.5.6. *Froga itzazu honako baieztapen hauek:*

i) $f \in L^p(X)$ *edozein funtzio bornatutarako,* $||f||_q \leq ||f||_p^{p/q} ||f||_\infty^{1-p/q}$, $p > 1$ *izanda.*

ii) $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ *bada* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *bikote baterako,* $f \in L^r(\mathbb{R})$ *edozein* $r \in [p,q]$ *baliotarako.*

5.5.7. *Izan bedi $\mathbb{R}^3$-n definitutako $f(x) = 1/||x||^\alpha$ funtzioa. Azter ezazu α-ren zein baliotarako $f \in L^p(B_1)$ den, B_1 jatorrian zentratutako bat erradiodun bola bada. α-ren zein baliotarako beteko da $f \in L^p(\mathbb{R}^3 - B_1)$? Azterketa bera egin $\mathbb{R}^n$-ren kasuan, $n \geq 1$ izanda.*

5.5.8. *Biz $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ funtzioa. Froga itzazu honako baieztapen hauek:*

i) $g \in L^q(\mathbb{R})$, $1 \leq q \leq \infty$ *guztietarako.*

ii) $\{f_n\}$ *segidaren limitea* f *funtzioa bada* $L^2(\mathbb{R})$ *espazioan, orduan*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f_n(x)}{1+x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+x^2}dx$$

da.

5.5.9. *Izan bitez $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eta $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Froga ezazu $f * g$ konboluzioa $L^p(\mathbb{R}^n)$-n dagoela, eta $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ dela.*

5.5.10. *Izan bitez, edozein p eta p' balioetarako, $f_n \overset{L^p(\mu)}{\longrightarrow} f$ eta $g_n \overset{L^{p'}(\mu)}{\longrightarrow} g$ limiteak. Froga ezazu $f_n g_n$ segidak fg funtziora konbergitzen duela L^1-en.*

5.5.11. *i) Froga ezazu $p > 2$ eta $f \in L^p([0,1])$ badira, $f/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$ dela.*

ii) $T : L^p([0,1]) \longrightarrow L^\infty([0,1])$ *eragilea honako era honetan definitzen dugu:*

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{y}}dy.$$

Froga ezazu T eragilea lineala eta bornatua dela $2 < p \leq \infty$ denean.

5.5.12. *Biz $k(x,y) = \dfrac{1}{y^{1/3}x^{1/4}(x+y+1)}$ funtzioa. Froga itzazu honako baieztapen hauek:*

i) $k \in L^2((0,1) \times (0,1))$.

ii) $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ *eragilea lineala eta bornatua da* $L^2(0,1)$*-tik* $L^2(0,1)$*-ra.*

5.5.13. *$T(f)(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ bada, froga ezazu $L^2(0,1)$-tik $L^2(0,1)$-ra doan eragile lineala eta bornatua dela, bere norma $||T|| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ izanda.*

5.5.14. *Izan bedi* $Tf(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+xy} f(y)dy$ *eragilea,* $x > 0$ *izanda. Froga ezazu* $L^2(0,\infty)$*-tik* $L^\infty(0,\infty)$*-ra doan eragilea lineala eta bornatua dela, eta* $||T|| \leq 1$ *desberdintza betetzen dela bere normarako.*

5.5.15. *Izan bedi* $Tf(x) = \displaystyle\int_0^x (x-y)f(y)dy$ *eragilea,* f *integragarria izanda. Froga ezazu forma lineala eta jarraitua dela* $[0,1]$ *tartean.*

5.5.16. *Izan bedi honako era honetan definitutako eragilea:* $T : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R})$,

$$T(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) = \{0, 2x_1, x_2, 2x_3, x_4, \ldots\}.$$

Froga ezazu T *eragile lineala eta bornatua dela, eta eman* $||T||$*-ren estimazioa.*

5.5.17. *Izan bedi* $V = C([-1,1])$ *espazio bektoriala ohiko biderkadura eskalarrarekin; hots,* $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$*. Froga ezazu* $T : V \to \mathbb{R}$ *forma lineala eta bornatua dela,*

$$T(u) = \int_0^1 u(x)dx$$

izanda. Existitzen al da V*-n* v *funtziorik, zeinetarako* $T(u) =< u, v >$ *den,* $\forall\ u \in V$*? Erantzuna Rieszen adierazpenaren teoremaren aurkakoa al da? Arrazoitu erantzuna.*

6. gaia

Ariketa osagarriak

6.1 Lehen gaia

6.1.1. *E multzoko dentsitatea x puntuan $\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} m(E \cap I_\delta)$ limitearen bidez definitzen da, non $I_\delta = (x-\delta, x+\delta)$ den. Froga ezazu $\{x \in E, x \neq 0, \cos \frac{1}{x} > \frac{1}{2}\}$ multzoaren dentsitatea $x = 0$ puntuan $\frac{1}{3}$ dela.*

6.1.2. *Izan bedi X multzo ez-kontagarria eta $\mathcal{A} = \{E \subset X, E$ kontagarria edo X/E kontagarria$\}$ familia.*

i) Froga ezazu $\mathcal{A}$ σ-aljebra bat dela.

ii) Aztertu $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ funtzioa neurri bat den ala ez,

$$\nu(E) = min\{card(E), card(X/E)\}$$

izanda.

6.1.3. *Izan bedi $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espazio neurriduna.*

i) Frogatu $E_1 \sim E_2 \iff \mu(E_1 \triangle E_2) = 0$ erlazio bitarra baliokidetasun-erlazioa dela.

ii) Froga ezazu $\forall\ E_1, E_2 \in \mathcal{A}, E_1 \sim E_2 \Longleftrightarrow \mu(E_1) = \mu(E_2)$ bada.

iii) Froga ezazu μ neurri osoa bada, $E_1 \in \mathcal{A}$ eta $\mu(E_1 \triangle E_2) = 0$, $E_2 \in \mathcal{A}$ dela.

6.1.4. *Izan bedi μ^* kanpo-neurria eta dagokion $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espazio neurriduna. μ-k induzitutako barne-neurria honako era honetan definitzen da:*

$$\forall\ E \subset X,\ \mu_*(E) = \sup\{\mu(A) - \mu^*(A/E),\ A \in \mathcal{A},\ \mu^*(A/E) < \infty\}.$$

Honako baieztapen hauek froga itzazu:

i) $\forall\ E \subset X, \mu_*(E) \leq \mu^*(E)$.

ii) $E \in \mathcal{A}$ *bada,* $\mu(E) = \mu_*(E)$.

iii) $\forall\ E, F \subset X$ *eta* $E \subset F \Longrightarrow \mu_*(E) = \mu_*(F)$.

iv) A *eta* $B \in \mathcal{A}$ *multzoetarako* $A \subset B$ *bada eta* $\mu^*(E) < \infty$

$$\mu(A) - \mu^*(A/E) \leq \mu(B) - \mu^*(B/E)$$

desberdintza betetzen da. Gainera, $E \subset A$ *bada,* $\mu_*(E) = \mu(A) - \mu^*(A/E)$ *da.*

v) *Edozein* E *azpimultzotarako eta* $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \mu_*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$.

6.1.5. *Froga ezazu* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ *bada,* x *bakoitzerako* $g(x) = m_g((-\infty, x))$ *Lebesgue-Stiletjesen neurria dela.*

6.1.6. *Izan bitez* $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \log t$ *eta* $m_g : \mathcal{B}(0, \infty) \longrightarrow [0, +\infty]$. *Froga ezazu* $m_g(kE) = m_g(E)$ *dela,* $\forall\ E \in \mathcal{B}, \forall\ k > 0$.

6.1.7. *Izan bedi* $(0, \infty)$ *tartean definitutako* $g(x) = x^\alpha, \alpha > 0$ *funtzioa eta* m_g *dagokion Lebesgue-Stieltjesen neurria. Izan bedi* $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(n, \dfrac{n^2+1}{n}\right)$. *Aztertu* α*-ren zein baliotarako den finitua* $m_g(A)$.

6.2 Bigarren gaia

6.2.1. *Kalkulatu* $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ \left[\frac{1}{x}\right], & x \in \mathbb{I} \cap (0,1) \end{cases}$ *funtzioaren integrala.*

6.2.2. *Izan bedi* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funtzioa,*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in P \text{ Cantoren multzo hirutarra,} \\ p, & x \in I \subset [0,1] - P, I \text{ tartea eta } l(I) = 3^{-p}. \end{cases}$$

Froga ezazu f *neurgarria dela eta* $\displaystyle\int_{[0,1]} f = 3$ *dela.*

6.2.3. *Izan bedi* $(X, \mathcal{A})$ *espazio neurgarria eta* δ_a $\mathcal{A}$ σ*-aljebraren gaineko* a *puntuko Diracen delta; hau da,* $\delta_a(A) = \chi_A(a)$, $\forall\ A \in \mathcal{A}$. *Zein dira funtzio integragarriak* δ_a*-rekiko? Kalkulatu horietariko funtzio baten integrala.*

6.2.4. $\mathbb{Z}$ *zenbaki osoen multzoan, izan bedi* $\mu(A) = card(A)$ *neurria.*

i) *$\mathbb{Z}$-n definitutako funtzioen artean, zein dira integral finitua dutenak?*

ii) *Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ limite puntuala,*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \le x \le n \\ 0, & \textit{besteetan} \end{cases}$$

segidarako. Frogatu segidak uniformeki konbergitzen duela, baina ez $L^1(\mu)$ espazioan.

6.2.5. *Kalkulatu honako funtzio hauen Lebesgueren integrala $(0, \infty)$ tartean:*

$$f(x) = e^{-[x]}, \quad g(x) = \frac{1}{[x+1][x+2]}, \quad h(x) = \frac{1}{[x]!}.$$

6.2.6. *Izan bedi $P(\mathbb{N})$ multzoan definitutako*

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\delta_n$$

neurria, δ_n Diracen delta izanik. Kalkulatu $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$, $f(n) = n \in \mathbb{N}$ funtziorako.

6.2.7. *Izan bitez $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espazio neurriduna eta f funtzio neurgarria.*

i) *Demagun $\mu(X) < \infty$ dela, eta existitzen bada $\lim_{n\to\infty} \int_X f^n d\mu$ limitea, finitua dela. Orduan, $\lim_{n\to\infty} \int_X f^n d\mu = \mu(\{x, f(x) = 1\})$ da.*

ii) *$E \in \mathcal{A}$ eta f integragarria eta ez-negatiboa bada, $\lim_{n\to\infty} \int_E f^{\frac{1}{n}} d\mu = \mu(E)$ da.*

6.3 Hirugarren gaia

6.3.1. *Izan bitez $B \subset \mathbb{R}^n$ neurri finitudun multzoa eta $f : B \longrightarrow [0, \infty)$ funtzio neurgarria. Frogatu $m_{n+1}(G(f)) = 0$ dela, $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in B\}$ f-ren grafikoa bada.*

6.3.2. *Izan bedi $E \subset [0,1] \times [0,1]$ multzo neurgarria, eta demagun $m_1(E_x) \le 1/2$ dela $[0,1]$ tartean i.n. Frogatu $m_1(\{y \in [0,1] : m_1(E_y) = 1\}) \le \dfrac{1}{2}$ dela.*

6.3.3. *Azter ezazu honako funtzio hauen integragarritasuna:*

i) $f_1(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, \quad x,y \in [0,1].$

ii) $f_2(x,y) = \dfrac{\sin^2 x}{x^{5/2}(1+x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}.$

ii) $f_3(x,y) = e^{-xy^2}\sin x, (x,y) \in (0,R)\times(0,\infty)$, *edozein* $R>0$*-tarako.*

iii) $f_4(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}, \quad x,y \in [0,1].$

6.3.4. *Aztertu* α,β *eta* γ*-ren zein baliotarako dagoen* $\dfrac{(\sin ||x||^\alpha)^\beta}{||x||^\gamma}$ *funtzioa* $L^1(B(0,1))$ *espazioan,* $B(0,1)\subset\mathbb{R}^n$ *izanik.*

6.3.5. *Izan bitez* $(X,\mathcal{A},\mu) = (Y,\mathcal{B},\nu) = (\mathbb{N},P(\mathbb{N}),c)$ *espazioak eta dagokion biderkadura espazioan definitutako honako funtzio hau:*

$$f(n,m) = \begin{cases} n, & n=m, \\ -n, & m=n+1, \\ 0, & \textit{beste kasuetan.} \end{cases}$$

Aztertu integral bikoitza eta integral iteratuak berdinak diren ala ez.

6.4 Laugarren gaia

6.4.1. *Izan bitez* H_1 *eta* H_2 *Hilberten espazioak, eta* $H = H_1\times H_2$ *ohiko batura eta biderkadurarekin; hau da,* $\forall\ (h_1,h_2),\ (g_1,g_2)\in H$*,*

$$(h_1,h_2)+(g_1,g_2) = (h_1+g_1, h_2+g_2), \quad \textit{eta} \quad \lambda(h_1,h_2) = (\lambda h_1,\lambda h_2).$$

Froga ezazu $<(h_1,h_2),(g_1,g_2)> = <h_1,g_1> + <h_2,g_2>$ *biderkadura eskalarra dela, eta* H *Hilberten espazioa dela. (*$H = H_1\oplus H_2$ *baturaren bidez adierazten da).*

6.4.2. *Izan bedi* $(C([0,1]),||\cdot||_\infty)$ *espazioan ohiko biderkadura eskalarrarekin, eta honako multzo hau:*

$$M = \{f\in C([0,1]); \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 1\}.$$

Froga ezazu M *konbexua eta itxia dela. Izango al du norma minimoko elementurik? Zergatik?*

6.4.3. *Izan bitez f eta g $(0,\infty)$ tartean definitutako polinomioak.*

i) Frogatu $< f,g >= \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ *biderkadura eskalarra dela.*

ii) Kalkulatu $min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^\infty |x^3-a-bx-cx^2|^2 e^{-x}dx.$

iii) Planteatu eta ebatzi dagokion maximoaren ariketa.

6.4.4. $\{1,\cos x,\cos(2x)\}$ *multzoa* $L^2(0,\pi)$ *espazioko multzo ortogonala dela jakinik, kalkulatu*

$$min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^\pi |\sin x-a-b\cos x-c\cos(2x)|^2 dx$$

eta

$$max \int_0^\pi \sin x g(x)dx,$$

g funtzioak honako baldintza hauek betetzen baditu:

$$\int_0^\pi g(x)dx = \int_0^\pi \cos x g(x)dx = \int_0^\pi \cos(2x)g(x)dx = 0$$

eta

$$\int_0^\pi |g(x)|^2 dx = 1.$$

6.4.5. *Izan bedi,* $H = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n\in\mathbb{R}, \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n^2}{n^2} < +\infty\}$ *espazioan,* $< a,b >= \sum_{n=1}^\infty \frac{a_nb_n}{n^2}$ *aplikazioa.*

i) Frogatu $< a,b >$ *biderkadura eskalar finitua dela,* $a=(a_n)$ *eta* $b=(b_n)$ *segidak izanik.*

ii) Izan bedi M $(1,2,0,0,\dots)$ *eta* $(1,0,1,0,\dots)$ *segidek sortutako azpiespazio bektoriala. Eman M-ren oinarri ortonormal bat.*

6.4.6. *Biz* $E = C([0,1]) = \{f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}, f \text{ jarraitua}\}$ *bektore-espazioa eta* $p:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ *funtzio positiboa eta jarraitua. Defini dezagun honako eragiketa hau:*

$$< f,g >= \int_0^1 f(t)g(t)p(t)dt.$$

i) Frogatu $< f,g >$ *biderkadura eskalarra dela.*

ii) *Izan bitez* $||\cdot||$ *biderkadurak sortutako norma eta* $||\cdot||_\infty$. *Froga ezazu* I *identitate eragilea, hau da* $I : (E, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (E, ||\cdot||)$, *jarraitua dela.*

iii) *Gram-Schmidten ortogonalizazio metodoa aplikatu* $q_n(t) = t^n, n = 0, 1, 2, \ldots$ *familiari, eta kalkulatu lehenengo bi funtzioak,* $p(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ *funtziorako.*

6.4.7. *Izan bedi* $M = \{(x_n) \in l^2, x_1 + x_2 + \cdots + x_N = 0\}$ *azpimultzoa,* $N \in \mathbb{N}$ *finkoa izanik.*

i) *Froga ezazu* M *azpiespazio itxia dela.*

ii) *Kalkulatu* $M^\perp$.

iii) *Eman* $v = (1, 2, \ldots, N, 0, \ldots)$ *bektorearen proiekzioa* M*-n, eta kalkulatu* v*-tik* M*-rainoko distantzia.*

6.5 Bosgarren gaia

6.5.1. *Izan bedi* f *funtzio ez-negatiboa* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espazioan,* $1 \le p < \infty$ *eta* $0 < \epsilon < \infty$ *izanda. Frogatu honako desberdintza hau (Chebysheven desberdintza):*

$$\mu\left(\{x \in X, f(x) \ge \epsilon\ \}\right) \le \frac{1}{\epsilon^p} \int_X f^p d\mu.$$

6.5.2. *Existitzen dira* $\delta \in (0,1)$ *eta* $f \in L^2(0,\pi)$, *zeinetarako*

$$\int_0^\pi (f(t) - \sin t)^2 dt < \delta^2 \ \text{eta}\ \int_0^\pi (f(t) - \cos t)^2 dt < (1-\delta)^2$$

diren? Arrazoitu erantzuna.

6.5.3. *Izan bedi* $K(x,y) = \dfrac{\chi_{\{x>y\}}(x,y)}{x}$ *nukleoa,* $x, y \in (0,\infty)$. *Froga itzazu honako hauek:*

i) $1 < p \le \infty$ *bada,* $C_p = \displaystyle\int_0^\infty K(1,y) y^{-1/p} dy < \infty$ *da.*

ii) $\forall\ t > 0$*-rako* $K(tx, ty) = t^{-1} K(x,y)$ *da.*

iii) $1 < p \le \infty$ *bada,* $Tf(x) = \displaystyle\int_0^\infty K(x,y) f(y) dy$ *eragile lineala eta bornatua da* $L^p(0,\infty)$*-n, eta* $||Tf||_p \le C_p ||f||_p$ *da.*

6.5.4. *Izan bedi* $K : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ *eragilea,* $(Kf)(t) = \displaystyle\int_0^t (t-s) f(s) ds$. *Froga ezazu* $||K|| \le 1$ *dela, eta* $K^n f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s) ds$ *dela.*

6.5.5. *Izan bitez $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espazio neurriduna eta $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ segida monotonoa puntuz puntuko konbergentea f funtziora i.n.*

i) *Demagun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^1(X, \mu)$. Froga ezazu, oro har, $f \notin L^1(\mu)$, baina $\displaystyle\int_X f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu$ berdintza betetzen dela.*

ii) *Demagun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^p(X, \mu)$ dela. f_k segida konbergentea izango da $L^p(\mu)$ espazioan? Arrazoitu erantzuna.*

6.5.6. *Izan bitez ω funtzio ez-negatiboa eta ν honako neurri hau:*

$$\nu(E) = \int_E \omega(y)dy.$$

i) *Frogatu, f funtzio neurgarria bada, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y)\nu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\omega(y)dy$ dela.*

ii) *Eman dagokion $L^p(w)$ espazioaren adierazpena, $1 \leq p < \infty$.*

iii) *Idatz ezazu Hölderren desberdintza $L^p(w)$ espazioetarako.*

Bibliografia

[1] P. Alegría, *Teoria de la medida: apuntes*, Bilbo, 2007.

[2] G. de Barra, *Introduction to Measure Theory*, Van Nostrand, Londres, 1974.

[3] S. K. Berberian, *Introducción al espacio de Hilbert*, Teide, Bartzelona, 1977.

[4] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza, Madril, 1984.

[5] J. Cerdá, *Análisis Real*, Ediciones de la Universitat de Barcelona, Bartzelona, 1996.

[6] J. Duoandikoetxea eta M. J. Esteban, *Neurria eta Integrazioa*, UEU, Iruña, 1981.

[7] J. A. Facenda eta F. J. Freniche, *Integración de funciones de varias variables*, Pirámide, 2002.

[8] G. B. Folland, *Real Analysis*, John-Wiley-Interscience, New York, 1984.

[9] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*, Dover, New York, 1982.

[10] A. García eta M. J. Bouzo, *Espacios de Hilbert y Análisis de Fourier: los primeros pasos*, Sanz y Torres, Madril, 2012.

[11] M. A. de Guzmán eta B. Rubio, *Integración: teoría y técnicas*, Alhambra, Madril, 1979.

[12] A. el Kacimi Alaoui, *Introducción al Análisis Funcional*, Reverte, 1994.

[13] W. J. Kaczor eta M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis III, Integration*, Student Mahematical Library, 21. lib., AMS, 2003.

[14] P. Miana, *Curso de Análisis Funcional*, Universidad de Zaragoza, 2006.

[15] J. A. Mira, *Lecciones sobre la teoría de la medida e integración*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante, 2010.

[16] H. L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan, New York, 1963.

[17] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra, Madril, 1979.

[18] E. M. Stein eta R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert spaces*, Princeton University Press, 2005.

[19] T. Tao *An introduction to Measure Theory*, American Mathematical Society, 2011.

[20] R. L. Whedeen and A. Zygmund, *Measure and integral. An Introduction to Real Analysis*, Marcel Deckker, New York, 1977.

Unibertsitateko eskuliburuak
Manual universitarios

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua
argitaletxea@ehu.eus

Servicio Editorial de la UPV/EHU
editorial@ehu.eus

Tel.: 94 601 2227
www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ISBN: 978-84-1319-539-1